

FIMAT XXI “TALLER INTERNACIONAL DE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA, LA INFORMÁTICA, LA FÍSICA, LAS CIENCIAS NATURALES Y TÉCNICAS EN EL SIGLO XXI”

LA TRANSFORMADA DE LAPLACE APLICADA EN LA MODELACIÓN FÍSICO-MATEMÁTICA DE SISTEMAS

Autores:

José Alberto González Bernal. Departamento de Física, Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas. jagbernal@uclv.cu

Armando Taillacq Montalvo. Departamento de Matemática, Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas. taillacq@uclv.edu.cu

Resumen

El objetivo del presente trabajo es brindar un método de solución más elegante a un problema planteado acerca de la polución hidrodinámica. Se enuncia el marco teórico referencial que sustenta la investigación, se realiza la modelación del problema, tomando como premisa el caso estacionario unidimensional de la ecuación de balance de masa expresada en (Zhen-Gang, 2008), postulándose su veracidad y la de todas las propiedades que a ella se extiendan y se lleva a cabo la implementación computacional de la solución en el software Wolfram Mathematica. Las soluciones analíticas son en todo caso comparadas con las soluciones numéricas, lográndose una precisión en el modelo de hasta más de diez cifras significativas. Se demuestra la no veracidad del modelo desde el punto de vista de la interpretación física, mas se percibe la elegancia y simpleza matemática en la resolución de la ecuación estacionaria al ser aplicada la Transformada de Laplace, pudiendo incluso pensarse en extenderse al caso no estacionario.

Abstract

The aim of the present work is to provide a more elegant method of solution to a problem presented a few years ago about the hydrodynamics pollution. The referential theoretical frame holding the investigation is announced; the modeling –taking as a point of departure the one-dimensional non stationary case of the mass balance

equation enunciated in (Zhen-Gang, 2008), from which it is naturally adopted the (one-dimensional) steady state— is made and the corresponding computational implementation of the solution is carried out using the software Wolfram Mathematica, comparing both analytical solution (obtained by the authors) and the numerical solution —provided by the software Wolfram Mathematica—, showing a remarkable fit.

The results obtained from the model demonstrate that this is not held from the physical interpretation point of view. It is confirmed the mathematical elegance of the Laplace Transform method throughout the resolution of the steady state differential equation, which is an encouragement to think about the extension of this method to the recognized non stationary mass balance equation in one (or even two) dimensions.

Introducción

La ecuación del calor o de difusión es la que representa a las ecuaciones parabólicas de la Física-Matemática. Atendiendo al caso estacionario unidimensional, esta se convierte en una ecuación diferencial ordinaria, sobre la cual hay innumerables métodos para su resolución, siendo uno de ellos, de los más útiles y elegantes, la Transformada de Laplace, de la cual se han encontrado esenciales aplicaciones en la ingeniería, la matemática y la física. Véanse (Céspedes Hinojosa, 1989), (Hayt, Kemmerly, & Durbin, 2008) y (James, 2009).

La polución hidrodinámica puede modelarse, con su ecuación de balance de masa, a través de una ecuación diferencial que corresponde al tipo parabólico. Por simplicidad en un primer acercamiento, se establece la validez de la ecuación unidimensional estacionaria para la modelación de esta problemática.

Los resultados corroboran otros anteriormente obtenidos y, pese a que para las condiciones (no verificadas) postuladas se arriban a ciertas incongruencias desde el punto de vista de la interpretación física, son alentadores en el uso de la Transformada de Laplace en la modelación de sistemas, específicamente el que nos ocupa, los hidrodinámicos. Un trabajo similar pero con otro acercamiento puede ser visto en (Garcés & Calzada, 2011)

Desarrollo

Basado en el principio de conservación de la masa el cambio de concentración de un reactante puede calcularse usando una ecuación de balance de masa. Su forma unidimensional cuenta con la expresión (Zhen-Gang, 2008):

$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = -U \frac{\partial C(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ D(x) \frac{\partial C(x, t)}{\partial x} \right\} + S + R + Q \quad (1.00)$$

donde C es concentración del contaminante, t , tiempo, x , distancia, U , velocidad de advección en el sentido de la coordenada x , D , coeficiente de dispersión, S , fuentes y sumideros propios del sistema acuático debidos al asentamiento y la resuspensión, R , reactividad de procesos químicos y biológicos y Q , cargas externas al sistema acuático.

La ecuación:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f_1(x, t) \quad (1.01)$$

recibe comúnmente el nombre de ecuación de conducción del calor no homogénea unidimensional.

Si se considera la ecuación con coeficientes constantes:

$$v_t = a^2 v_{xx} + \beta v_x + \gamma v + f \quad (1.02)$$

Mediante el cambio de variables:

$$v = e^{\mu x + \lambda t} \cdot u; \quad \text{para } \mu = -\frac{\beta}{2a^2}, \quad \lambda = \gamma - \frac{\beta^2}{4a^2} \quad (1.03)$$

(1.02) se reduce a la forma (1.01) donde $f_1(x, t) = f e^{-(\mu x + \lambda t)}$.

2. Modelación de la polución hidrodinámica. Caso estacionario unidimensional.

Por tanto, si se escribe la ecuación:

$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2} - U \frac{\partial C(x, t)}{\partial x} + S + R + Q \quad (2.00)$$

conociéndose que el medio es homogéneo por lo que ni D ni U dependen de x , se establece la siguiente relación:

$$\left\{ \begin{array}{l} v \equiv C(x, t) \\ a^2 \equiv D \\ \beta \equiv -U \\ \gamma \equiv 0 \\ f \equiv S + R + Q \end{array} \right\} \quad (2.01)$$

En una cinética de primer orden donde $R = -kC$, entonces $\gamma \equiv -k$ y $f \equiv S + Q$. La constante k que marca el ritmo de biodegradación está comprendida en el intervalo $k \in (0, 1)$. Si se piensa en un fluido irrotacional cuya corriente sea laminar de modo que el término de sedimentación S pueda tomarse como $S = 0$, se tendría entonces $f \equiv Q$.

En el sistema (2.01) el coeficiente $a^2 \equiv D$ es, por definición, constante, por lo que con este sistema solamente se pueden trabajar problemas en los cuales el coeficiente de dispersión no dependa de x . Se postula que como mismo hay una ecuación de balance de masa para describir el comportamiento del contaminante en las aguas (en dependencia del tiempo) la ecuación estacionaria también se sostiene y es válida, tanto como los principios que se extiendan a ella. Así, la ecuación de trabajo es:

$$D \frac{d^2 C(x)}{dx^2} - U \frac{dC(x)}{dx} - kC(x) + Q = 0 \quad (2.02)$$

Para la ecuación unidimensional homogénea se cumple el principio del valor máximo: “Si una función $u(x,t)$ determinada y continua en la región cerrada $0 \leq t \leq T$ y $0 \leq x \leq l$ satisface a la ecuación de conducción del calor homogénea en los puntos de la región $0 < x < l$, $0 < t \leq T$, los valores mínimo y máximo de la función $u(x,t)$ se alcanzan o bien en el momento inicial o bien en los puntos de la frontera $x = 0$ ó $x = l$ ” (Tijonov & Samarsky, 1980). Esto permite establecer las siguientes condiciones iniciales:

$$C(0) = C_0, \quad \left. \frac{dC}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (2.03)$$

El análisis se centra a un flujo de régimen estable, irrotacional, incompresible y ligeramente viscoso –de modo que pueda arrastrar los contaminantes– cuya corriente sea laminar. El modelo es más aplicable a ríos o canales cuanto sean estos menos sinuosos, constituyendo una buena forma de empezar a analizar este problema y las dificultades de la resolución.

La ecuación (2.02) presenta una evidente analogía con la ecuación de vibraciones forzadas (Savéliev, 1989):

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \quad (2.04)$$

así como con la ecuación de Fokker-Planck (Rodríguez Castellanos & Pérez Maldonado, 2009).

3. Análisis de resolución a través de la Transformada de Laplace.

Se aplica el método de la Transformada de Laplace a (2.02) con las condiciones iniciales enunciadas. Así:

$$D\ddot{C}(x) - U\dot{C}(x) - kC(x) = -Q, \quad \left(C(0) = C_0, \quad \left(\frac{dC(x)}{dx} \right)_{x=0} = \dot{C}_0 = 0 \right) \quad (3.00)$$

$$\mathcal{L}\{D\ddot{C}(x) - U\dot{C}(x) - kC(x)\} = \mathcal{L}\{-Q\} \quad (3.01)$$

$$D(s^2C(s) - sC_0 - \dot{C}_0) - U(sC(s) - C_0) - kC(s) = -\frac{Q}{s} \quad (3.02)$$

Despejando $C(s)$ y empleando (3.00):

$$C(s)[Ds^2 - Us - k] = -\frac{Q}{s} - UC_0 + DsC_0 = \frac{Ds^2C_0 - UsC_0 - Q}{s} \quad (3.03)$$

$$C(s) \cdot D \left[s^2 - \frac{U}{D}s - \frac{k}{D} \right] = \frac{Ds^2C_0 - UsC_0 - Q}{s}$$

$$\Rightarrow C(s) = \frac{Ds^2C_0 - UsC_0 - Q}{sD \left[s^2 - \frac{U}{D}s - \frac{k}{D} \right]} = \frac{1}{D} \left\{ \frac{A}{s} + \frac{\gamma}{s^2 - \frac{U}{D}s - \frac{k}{D}} \right\} \quad (3.04)$$

$$= \frac{1}{D} \left\{ \frac{A}{s} + \frac{B}{s - s_1} + \frac{C}{s - s_2} \right\} \quad (3.05)$$

donde:

$$s_{1,2} = \frac{U \pm \sqrt{U^2 + 4Dk}}{2D} \quad (3.06)$$

son los polos del sumando que contiene a γ como numerador.

Entonces, se tiene:

$$Ds^2C_0 - UsC_0 - Q = A(s - s_1)(s - s_2) + Bs(s - s_2) + Cs(s - s_1) \quad (3.07)$$

Para $s = 0$, $s = s_1$ y $s = s_2$ respectivamente se obtendrá:

$$A = \frac{DQ}{k}, \quad B = \frac{Ds_1^2C_0 - s_1UC_0 - Q}{s_1(s_1 - s_2)}, \quad C = \frac{Ds_2^2C_0 - s_2UC_0 - Q}{s_2(s_2 - s_1)}$$

Y la solución buscada, anti-transformando, es:

$$\mathcal{L}^{-1}\{C(s)\} = \frac{1}{D} \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A}{s} + \frac{B}{s - s_1} + \frac{C}{s - s_2} \right\} \quad (3.08)$$

$$C(x) = \frac{Q}{k} + \frac{1}{D} \{B e^{s_1 x} + C e^{s_2 x}\} \quad (3.09)$$

Aplicando las relaciones:

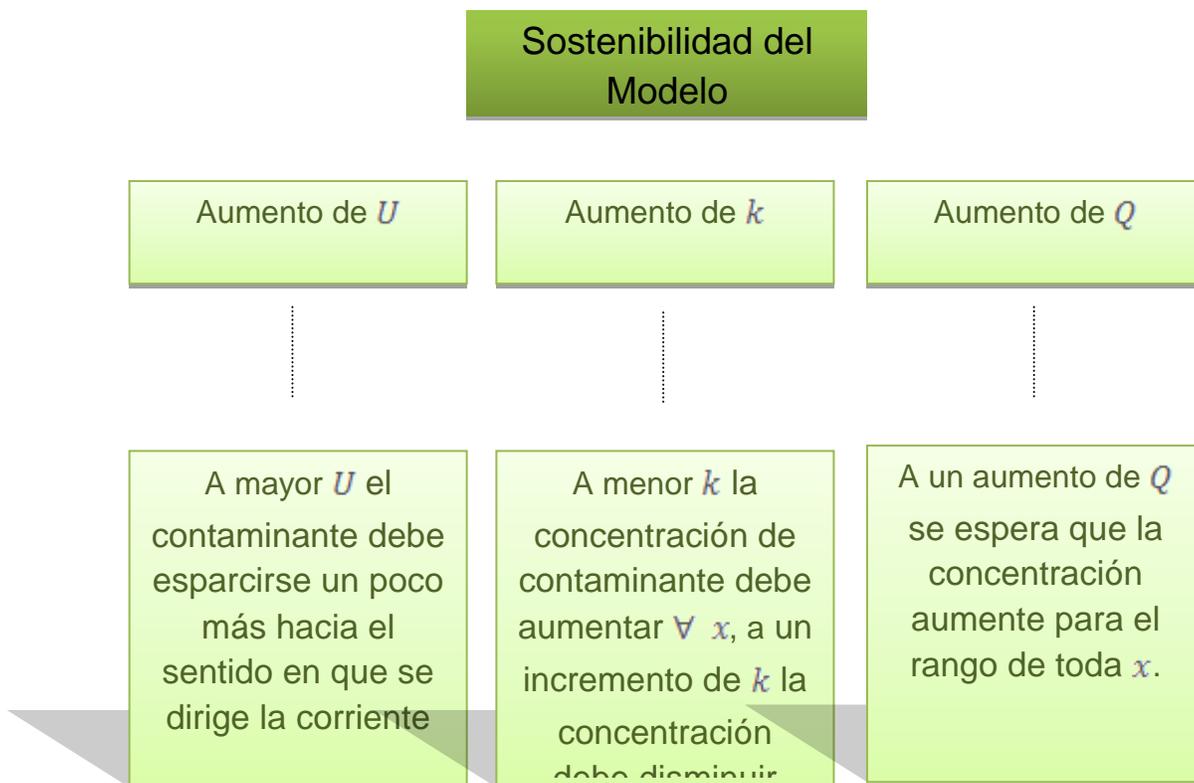
$$\frac{s_1 \cdot s_2}{k} = -\frac{1}{D}, \quad s_1 + s_2 = \frac{U}{D} \quad (3.10)$$

Fácilmente se demuestra que la solución se puede escribir como (González-Bernal, 2013):

$$C(x) = \left[C_0 - \frac{Q}{k} \right] \left(\frac{s_2}{s_2 - s_1} \cdot e^{s_1 x} + \frac{s_1}{s_1 - s_2} \cdot e^{s_2 x} \right) + \frac{Q}{k} \quad (3.11)$$

$$s_{1,2} = \frac{U \pm \sqrt{U^2 + 4Dk}}{2D} \Rightarrow s_{1,2} = \begin{cases} s_1 > 0 \\ s_2 < 0 \end{cases} \text{ para } U, D, k > 0 \quad (3.11.a)$$

El Esquema 1 representa un esquema de confiabilidad del modelo.



Esquema 1. Esquema de sostenibilidad del modelo.

4. Resultados y discusión.

La solución de la concentración (3.11) presenta curvas exponenciales, como se cumple (3.11.a), al realizarse la suma:

$$\left(\frac{s_2}{s_2 - s_1} \cdot e^{s_1 x} + \frac{s_1}{s_1 - s_2} \cdot e^{s_2 x} \right) \quad (4.00)$$

se obtiene una gráfica cuyos extremos se dirigen hacia arriba, siendo cóncava hacia arriba (Demidovich, y otros, 1977). Se quiere que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} C(x) = 0 \quad (4.01)$$

y la única manera de que esto suceda es definiendo:

$$\left[C_0 - \frac{Q}{k} \right] < 0 \quad (4.02)$$

El término $\frac{Q}{k}$, definido positivo, solamente contribuiría a una traslación de la función:

$$g(x) = \left[C_0 - \frac{Q}{k} \right] \left(\frac{s_2}{s_2 - s_1} \cdot e^{s_1 x} + \frac{s_1}{s_1 - s_2} \cdot e^{s_2 x} \right) \quad (4.03)$$

$\frac{Q}{k}$ unidades hacia la parte positiva del eje de las ordenadas, pero debe ser mayor que el valor absoluto de (4.03) en determinada x para que el modelo tenga sentido.

Las derivadas de (3.11) se determinan por las expresiones:

$$C'(x) = \frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2} \left[C_0 - \frac{Q}{k} \right] (e^{s_2 x} - e^{s_1 x}) \quad (4.04)$$

$$C''(x) = \frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2} \left[C_0 - \frac{Q}{k} \right] (s_2 e^{s_2 x} - s_1 e^{s_1 x}) \quad (4.05)$$

Realizando un análisis de la primera derivada, se nota que en (4.04) los dos primeros factores son negativos y el signo de la derivada lo dará el tercero.

Si $x < 0$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[e^{|s_2 x|} - \frac{1}{e^{s_1 |x|}} \right] > 0 \quad (4.06)$$

Si $x > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{e^{|s_2| x}} - e^{s_1 x} \right] < 0 \quad (4.07)$$

En $x = 0$, $C'(0) = 0$ y se tiene, haciendo un rápido trabajo algebraico, $C(0) = C_0$

La segunda derivada siempre será negativa.

La curva tendrá pendiente positiva en el intervalo $x \in (-\infty, 0)$, igualándose a cero en $x = 0$ cuando la concentración alcanza el valor máximo $C(0) = C_0$, y tomará valores cada vez más negativos desde ese punto hacia el infinito positivo.

Si en (3.00) se hace $U = 0$, se comprueba que (3.11) adquiere la forma:

$$C(x) = \left(\frac{1}{2} e^{s_1 x} + \frac{1}{2} e^{-s_1 x} \right) \cdot Cte + \frac{Q}{k} \quad (4.08)$$

Luego se cumple la condición de paridad.

Este caso se corresponde con aquellos sistemas en que la velocidad de advección de la corriente es nula y predomina el proceso dispersivo o difusivo.

El Código 1 que se presenta en el Anexo 2 evidencia una animación de la variación de Q que demuestra, de forma general, un aumento de la concentración alrededor de $x = 0$, sin embargo, hay una ligera contracción de la concentración sobre el dominio de x .

Animaciones similares se hacen para una variación de k y de U , destacándose un ligero aumento de la concentración a lo largo del dominio de x para un incremento del ritmo de biodegradación y el corrimiento hacia el eje negativo del contaminante para un incremento de la velocidad de advección.

Todos estos tres resultados entran en contradicción directa con lo estipulado por el Esquema 1.

Una forma más general es el Código 2, presentado en el Anexo 2, el cual brinda información acerca de la variación simultánea de los parámetros Q , k y U a la vez. Este se puede escribir en términos de Manipulate para fijar mejor los parámetros.

En el Anexo 1 se muestran las gráficas para una variación del parámetro de la velocidad $U = 0.0 \text{ m/s}$, $U = 1.0 \text{ m/s}$ y $U = 2.0 \text{ m/s}$, para valores fijos de los demás parámetros: $D = 0.5 \text{ m}^2/\text{s}$, la constante de ritmo de biodegradación $k = 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ y la

carga $Q = 2 \times 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \times \text{s}} = 172.8 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \times \text{día}}$, con condiciones iniciales $C(0) = (20 + 10^3 Q \cdot s) \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \neq 0$, $C'_{x=0} = 0$.

Se trabaja de forma similar para una variación de k y de Q , fijándose para estos el valor de velocidad de advección $U = 1.0 \text{ m/s}$.

En estas gráficas se han superpuesto las soluciones analíticas (en línea azul) con las soluciones numéricas correspondientes (en línea roja) brindadas por el software Wolfram Mathematica 8.0. Los rangos de x mostrados son los dominios de coincidencia de ambas soluciones.

Conclusiones

- Se demuestra que no es factible hacer la transición al caso estacionario derivado directamente de la ecuación de balance de masa presentada en (Zhen-Gang, 2008).
- Tanto las soluciones analíticas como numéricas muestran una superposición casi perfecta, lo cual evidencia la validez de la resolución.
- El método de la Transformada de Laplace constituye una herramienta útil de resolución para este tipo de problemas hidrodinámicos y pudiere emplearse en el acercamiento a los casos no estacionarios.

Bibliografía

- Céspedes Hinojosa, M. A. (1989). *Transformada de Laplace con aplicaciones*. Ciudad de La Habana: Editorial Félix Varela.
- Demidovich, B., Baranenkov, G., Efimenko, V., Kogan, S., Lunts, G., Porshneva, E., . . . Yampolski, A. (1977). *Problemas y ejercicios de análisis matemático*. Moscú: Mir.
- Garcés, Y., & Calzada, A. (2011). Importancia del sistema de ecuaciones de Saint-Venant para la obtención y aplicación de los modelos hidrodinámicos (Oiltrack). *Revista Cubana de Investigaciones Pesqueras*, 1-6.
- González-Bernal, J. A. (2013). *Transporte hidrodinámico de contaminantes. Caso estacionario unidimensional*. Santa Clara: Universidad Central de Las Villas.
- Hayt, W. H., Kemmerly, J. E., & Durbin, S. M. (2008). *Análisis de circuitos en ingeniería*. La Habana: Editorial Félix Varela.
- James, G. (2009). *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. La Habana: Editorial Félix Varela.

Rodríguez Castellanos, C., & Pérez Maldonado, M. T. (2009). *Introducción a la Física Estadística*. La Habana: Félix Varela.

Savéliev, I. V. (1989). *Curso de Física General I*. Moscú: Mir.

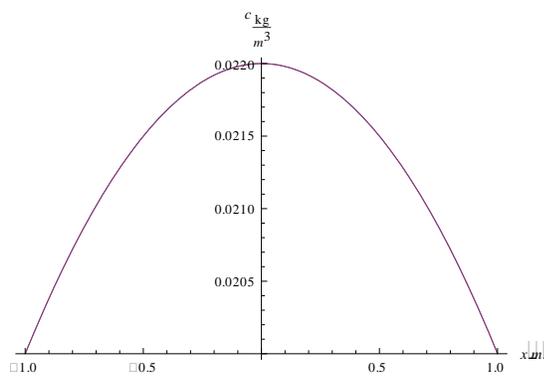
Tijonov, A. N., & Samarsky, A. A. (1980). *Ecuaciones de la Física-Matemática*. Moscú: Mir.

Zhen-Gang, J. (2008). *Hydrodynamics and water quality. Modeling rivers, lakes and estuaries*. New Jersey: John Wiley and Sons.

ANEXO 1

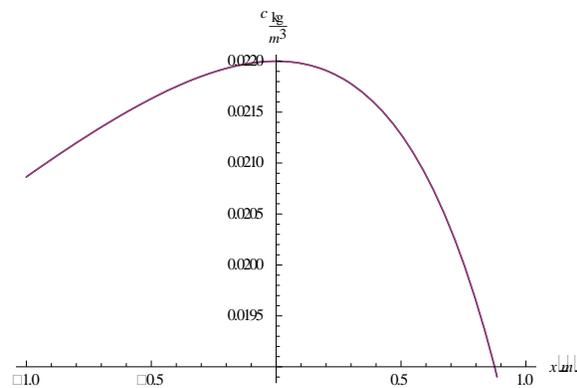
1. Variación de U

$U = 0.0 \text{ m/s}$



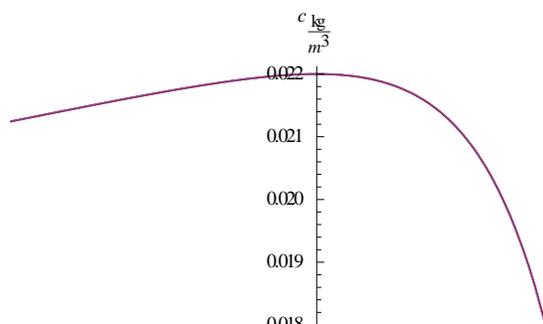
$x \in (-3.3167768131, 3.3167768131) \text{ m}$

$U = 1.0 \text{ m/s}$



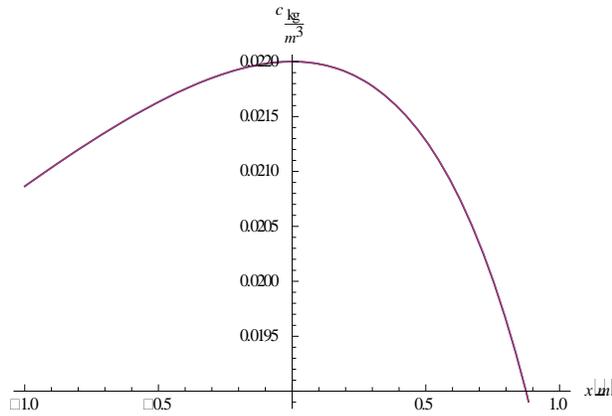
$x \in (-11.5006562971, 1.63422840818) \text{ m}$

$U = 2.0 \text{ m/s}$

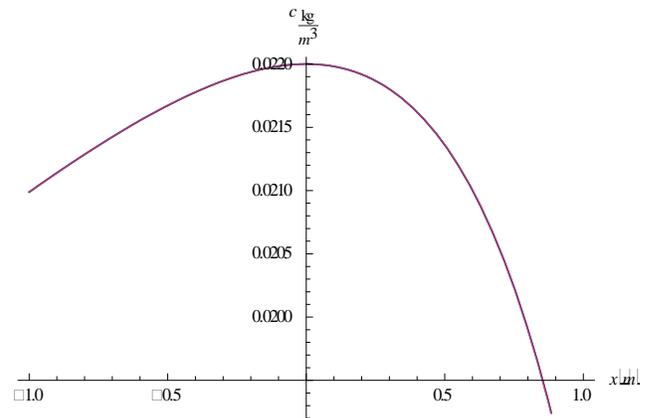


2. Variación de k

$$k = 10^{-10} \text{ s}^{-1}$$



$$k = 10^{-2} \text{ s}^{-1}$$



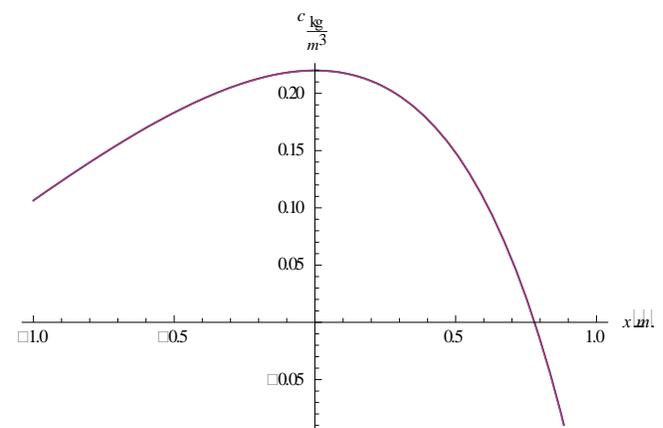
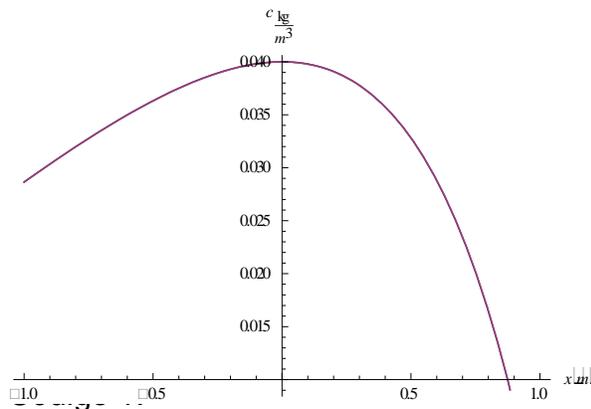
3. Variación de Q

$$x \in (-11.499999, 1.634182) \text{ m}$$

$$Q = 2 \times 10^{-2} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \times \text{s}}$$

$$x \in (-12.2076572909, 1.68286542702) \text{ m}$$

$$Q = 2 \times 10^{-1} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \times \text{s}}$$



$$x \in (-2.496634711, 0.96842986248) \text{ m} \quad x \in (-1.5787422828, 0.7801596630) \text{ m}$$

$$\text{Animate}[\text{Plot}[(20 \times 10^{-3} + Q - \frac{Q}{k}) (\frac{s2}{s2 - s1} * e^{s1*x} + \frac{s1}{s1 - s2} * e^{s2*x})$$

$$+ \frac{Q}{k}, \{x, 0, 5\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{x[\text{m}], C[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}]\}, \text{PlotRange} \rightarrow 1], \{Q, 2 \times 10^{-2}, 2\}, \text{AnimationRunning} \rightarrow \text{False}]$$

Para el código hay que definir $s1$ y $s2$ en (3.11.a) dados en $U = 1.0 \text{ m/s}$, $D = 0.5 \text{ m}^2/\text{s}$ y una constante de ritmo de biodegradación $k = 10^{-5} \text{ s}^{-1}$.

Código 2:

$$\begin{aligned}
 & \text{Animate}[\text{Plot}[(20 * 10^{-3} + Q - \frac{Q}{k}) \left(\frac{\frac{U - \sqrt{U^2 + 4Disp * k}}{2Disp}}{U - \sqrt{U^2 + 4Disp * k} - \frac{U + \sqrt{U^2 + 4Disp * k}}{2Disp}} \right. \\
 & * e^{\frac{U + \sqrt{U^2 + 4Disp * k}}{2Disp} * x} + \frac{\frac{U + \sqrt{U^2 + 4Disp * k}}{2Disp}}{U + \sqrt{U^2 + 4Disp * k} - \frac{U - \sqrt{U^2 + 4Disp * k}}{2Disp}} \\
 & * e^{\frac{U - \sqrt{U^2 + 4Disp * k}}{2Disp} * x} \left. \right) + \frac{Q}{k}, \{x, -5, 5\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{x[m], C[\frac{kg}{m^3}]\}, \text{PlotRange} \\
 & \rightarrow \frac{1}{2} \times 10^{-1}], \{Q, 2 * 10^{-2}, 2\}, \{U, -2, 2\}, \{k, 10^{-10}, 10^{-1}\}, \text{AnimationRunning} \\
 & \rightarrow \text{False}]
 \end{aligned}$$

Se ha de fijar $Disp = 0.5$.