



UNIVERSIDAD CENTRAL "MARTA ABREU" DE LAS VILLAS
VERITATE SOLA NOBIS IMPONETUR VIRLISTOGA. 1948

Facultad de Ingeniería Eléctrica

Departamento de Electroenergética

TRABAJO DE DIPLOMA

Resumen Teórico y Bibliográfico de las características y propiedades de los Métodos y Teoremas más usados en la solución de los circuitos eléctricos.

Autor: Denys García Herrera

Tutores: Dr. Avertano Hernández Stuart

MSc. Leonardo Rodríguez Jiménez

Santa Clara

2014

"Año 56 de la Revolución"

Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas

Facultad de Ingeniería Eléctrica

Departamento de Electroenergética



TRABAJO DE DIPLOMA

*Resumen Teórico y Bibliográfico de las características y propiedades de los
Métodos y Teoremas más usados en la solución de los circuitos eléctricos.*

Autor: Denys García Herrera

Tutor(es): - Dr. Avertano Hernández

avertanoH@uclv.edu.cu

- Msc. Leonardo Rodríguez Jiménez

leonardo@uclv.edu.cu

Santa Clara, 2014

"Año 56 de la Revolución"



Hago constar que el presente Trabajo de Diploma fue realizado en la Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas como parte de la culminación de estudios de la especialidad de Ingeniería Eléctrica, autorizando a que el mismo sea utilizado por la Institución, para los fines que estime conveniente, tanto de forma parcial como total y además no podrá ser presentado en eventos, ni publicados sin autorización de la Universidad.

Firma del Autor

Los abajo firmantes certificamos que el presente trabajo ha sido realizado según acuerdo de la dirección de nuestro centro y el mismo cumple con los requisitos que debe tener un trabajo de esta envergadura referido a la temática señalada.

Firma del Autor

Firma del Jefe de Departamento
donde se defiende el trabajo

Firma del Responsable de
Información Científico-Técnica

PENSAMIENTO

El aprendizaje no solo exige escuchar y poner en práctica, sino también olvidar y después volver a recordar.

John Gray

DEDICATORIA

A mi madre: por todo el amor, el cariño y la educación.

A mi esposa e hijos: gran parte de mi ser y principal escuela.

A mis amigas y amigos: por serlo

A mis compañeros: por haber compartido estos seis años de estudio

AGRADECIMIENTOS

A mi madre, Nedys Herrera Peñate, por estar siempre presente en mis pensamientos y por darme la vida.

A mi esposa, Yaneiby Martínez Gómez, que me ha brindado todo su apoyo y fe.

A la Revolución Cubana por la oportunidad de hacer este sueño una realidad

A mis tutores.

A mi familia porque fueron ellos los que hicieron posible que llegara hasta este nivel.

A todos los profesores que durante toda la carrera han puesto en mis manos el conocimiento que contribuirán a mi desempeño como profesional.

A mis compañeros de aula.

TAREA TECNICA

Plan de Trabajo:

1. Revisión y estudio de la bibliografía y preparación metodológica existente acerca de los métodos de solución de los Circuitos Eléctricos.
2. Actualizar los contenidos teóricos en textos básicos y materiales de estudio publicados en Internet.
3. Presentar un documento sobre las formas de aplicación de los métodos generales de solución y teoremas.
4. Estudiar y presentar las nuevas formas de aplicación de los métodos generales de solución y teoremas no impartidos en los cursos de pregrado.
5. Organizar adecuadamente la estructura de la tesis basándose en un diseño metodológico estratégico según la didáctica de la asignatura y las orientaciones y normas aprobadas por el Ministerio de Educación Superior (MES).

Firma del Autor

Firma del Tutor

RESUMEN

Este trabajo de investigación constituye una continuación del trabajo realizado por el colectivo de Circuitos Eléctricos sobre métodos generales de solución y teoremas utilizados en la solución de circuitos eléctricos. En el mismo se explican las características de cada uno y los mecanismos para su aplicación en la solución de determinados circuitos.

En el caso de los métodos de las corrientes de mallas y los voltajes nodos se explicaron en detalle las nuevas formas que existen para su aplicación, como son: métodos modificados de amplio uso en la bibliografía moderna, que sustituyen los conocidos métodos del supernodo y la supermalla, argumentándose en cada caso, las ventajas que se logran en su utilización. Se estudia además la aplicación del método de las corrientes de mallas en los circuitos no planos, que resulta de gran interés y es una cuestión completamente nueva en la solución de éste tipo de circuito.

Por otra parte, se realizaron análisis de la aplicación de los Teoremas de Thevenin y Norton, destacándose los casos en que surgen las llamadas conexiones absurdas.

Como cuestión novedosa en éste trabajo se estudia una nueva forma de aplicar el principio de superposición en circuitos que contienen fuentes dependientes y se analiza la aplicación del Método de los Voltajes de Nodos (MVN), en circuitos con inductancias mutuas y una nueva forma de solución de los circuitos aplicando el MVN.

TABLA DE CONTENIDOS

PENSAMIENTO	i
DEDICATORIA	ii
AGRADECIMIENTOS	iii
TAREA TECNICA	iv
RESUMEN	v
INTRODUCCIÓN	1
MÉTODOS GENERALES DE SOLUCIÓN DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS.....	4
1.1 Introducción	4
1.2 Análisis del Método de Corriente de Malla (MCM).....	4
1.3 Corrientes de malla y mallas esenciales	5
1.4 Solución usando el MCM	7
1.4.1 Método tradicional.....	8
1.4.2 Método de supermalla.....	10
1.4.3 Método de las Mallas Modificado (MMM).....	11
1.5 Gráficos de circuitos planos y no planos	14
1.6 Método de las Corrientes de Mallas aplicado en circuitos no planos	14
Ejemplo que ilustra la estrategia a seguir en circuitos no planos.	15
1.7 Análisis del Método de Voltaje de Nodo (MVN).....	17
1.7.1 Procedimiento	18
Ejemplos.....	20
1.7.2 Circuitos con fuentes de voltaje reales independientes y dependientes.....	25
1.8 Método tradicional de nodo	28

1.9 Método del supernodo	30
1.10 Método de los Nodos Modificado (MNM).....	32
CAPITULO 2. APLICACIONES ESPECIALES DE LOS MÉTODOS GENERALES Y LOS TEOREMAS.	41
2.1 Introducción	41
2.2 Algunas falacias en los cursos de Circuitos Eléctricos	41
2.3 Principio de Superposición	41
2.4 Demostración de la nueva aplicación del Principio de Superposición.	43
2.5 Nueva forma de aplicación del MVN.	46
2.6 Aplicación nueva sobre la inductancia mutua utilizando el método de los voltajes de nodos como vía de solución.....	53
2.7 Teorema de Thevenin.....	57
2.7.1 Formas en las que se aplica el Teorema de Thevenin	59
2.8 Condiciones para aplicar el Teorema de Thevenin	63
2.9 ¿Será siempre aplicable el Teorema de Thevenin?	64
2.10 Teorema unificado de Thevenin.....	71
2.11 Consideraciones generales del capítulo.....	75
Conclusiones	76
Recomendaciones	77
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	78

INTRODUCCIÓN

A lo largo de la teoría desarrollada para el análisis de circuitos eléctricos se presentan varias herramientas y métodos que ayudan a resolver redes eléctricas lineales. Estas técnicas son muy útiles y de gran aplicación en muchas ramas de la tecnología, como la electrónica, las telecomunicaciones, la automática, entre muchas otras. Dentro de estas herramientas cabe destacar, por su gran uso y eficiencia, los métodos generales conocidos como Análisis Nodal y Análisis de Mallas, las conocidas Leyes de Voltaje y Corriente de Kirchhoff, las transformaciones de fuentes reales, los divisores de voltaje y corriente y los Teoremas de Thevenin, Norton y el Principio de Superposición, entre otros. Una red lineal, en particular, puede ser analizada usando cualquiera de las técnicas; produciendo, por supuesto, cada una de ellas un resultado lógico y perfectamente interpretable desde el punto de vista físico.

Hasta ahora se ha visto cómo se pueden resolver circuitos, utilizando directamente las Leyes de Kirchhoff o bien, en algunos casos particulares, mediante la reducción de circuitos basada en la sucesiva aplicación de asociación y equivalencia entre dispositivos. En la práctica, la utilización directa de estos métodos resulta útil solamente cuando el circuito bajo análisis es lo suficientemente sencillo como para que el número de ecuaciones a plantear sea pequeño. Con el fin de simplificar el análisis de circuitos más complejos y de abstraerse de sus detalles para diseñar sistemas de mayor entidad y estudiar su comportamiento, en este trabajo de investigación se profundiza en una serie de nuevas herramientas. A grandes rasgos se pueden agrupar en:

- Métodos para aplicar las Leyes de Kirchhoff de manera sistemática, organizada y semiautomática. Estos métodos permitirán, en la mayor parte de los casos, facilitar el

planteamiento del sistema de ecuaciones que permite resolver un circuito, y así reducir su orden y, por lo tanto, la complejidad de su resolución.

- Teoremas cuyo objetivo es establecer las normas para analizar circuitos con múltiples excitaciones o con una excitación cualquiera, obtener modelos simplificados de circuitos complejos con el fin de abordar la interconexión de redes circuitales e introducir conceptos asociados a la transmisión de potencia en una cadena de dispositivos.

Por la importancia, actualidad y vigencia del tema surge como problema científico: la necesidad de preparar un material sobre el tema y enriquecerlo con contenidos que no son impartidos en pregrado. A partir del problema científico planteado, se puede establecer como objetivo general de la investigación el siguiente:

Objetivo general de este trabajo:

- Exponer las nuevas formas de aplicación de los métodos generales de solución y teoremas en la solución de los circuitos eléctricos.

Para dar cumplimiento al objetivo general se trazaron los objetivos específicos siguientes:

- Analizar los métodos generales de solución y teoremas utilizados en la solución de los circuitos eléctricos a partir de la revisión y el estudio de la bibliografía existente.
- Mostrar las diferentes formas de aplicación de los métodos generales de solución y teoremas.
- Profundizar en la aplicación de los métodos generales y teoremas destacando los casos en que no es posible su aplicación.

Dentro de los aportes de este trabajo está el desarrollo de un material docente actualizado sobre el tema de los métodos generales de solución y teoremas y sus diferentes formas de aplicación, cuestión que se aborda en la literatura de forma muy resumida y no se dan las diferentes variantes que existen para la solución de los circuitos. Además, en el trabajo se

destaca también los casos en que no se pueden aplicar estos métodos y teoremas en la solución de los circuitos eléctricos, aspecto el cual no se trata en los libros.

Organización del informe

Este trabajo de diploma consta de las siguientes partes:

Pensamiento

Dedicatoria

Agradecimientos

Tarea técnica

Resumen

Introducción

Capítulo 1 Métodos generales de solución de circuitos eléctricos.

Capítulo 2 Aplicaciones especiales de los métodos generales y los teoremas.

Conclusiones y Recomendaciones

Referencias bibliográficas

MÉTODOS GENERALES DE SOLUCIÓN DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS.

1.1 Introducción

El estado eléctrico de cualquier circuito queda enteramente definido con las ecuaciones basadas en las leyes de Kirchhoff de corriente y voltaje, debiéndose formar y resolver un sistema de ecuaciones de m incógnitas (número de ramas) para determinar las corrientes en las “ m ” ramas de un circuito. A continuación se estudiarán dos métodos de solución que se derivan de dichas Leyes de Kirchhoff.

1.2 Análisis del Método de Corriente de Malla (MCM)

El **análisis de mallas** (algunas veces llamada como **método de corrientes de malla**), es una técnica usada para determinar la tensión o la corriente de cualquier elemento de un circuito plano. Un circuito plano es aquel que se puede dibujar en un plano de forma que ninguna rama quede por debajo o por arriba de ninguna otra. Esta técnica está basada en la ley de tensiones de Kirchhoff. La ventaja de usar esta técnica es que crea un sistema de ecuaciones para resolver el circuito, minimizando en algunos casos el proceso para hallar una tensión o una corriente de un circuito. ^[1]

Para usar esta técnica se procede de la siguiente manera: se asigna a cada una de las mallas del circuito una corriente imaginaria que circula en un sentido arbitrario; se prefiere asignarle a todas las corrientes de malla el mismo sentido. De cada malla del circuito, se plantea una ecuación que estará en función de la corriente que circula por cada elemento. En un circuito de varias mallas se resuelve un sistema lineal de ecuaciones para obtener las diferentes corrientes de malla.

1.3 Corrientes de malla y mallas esenciales

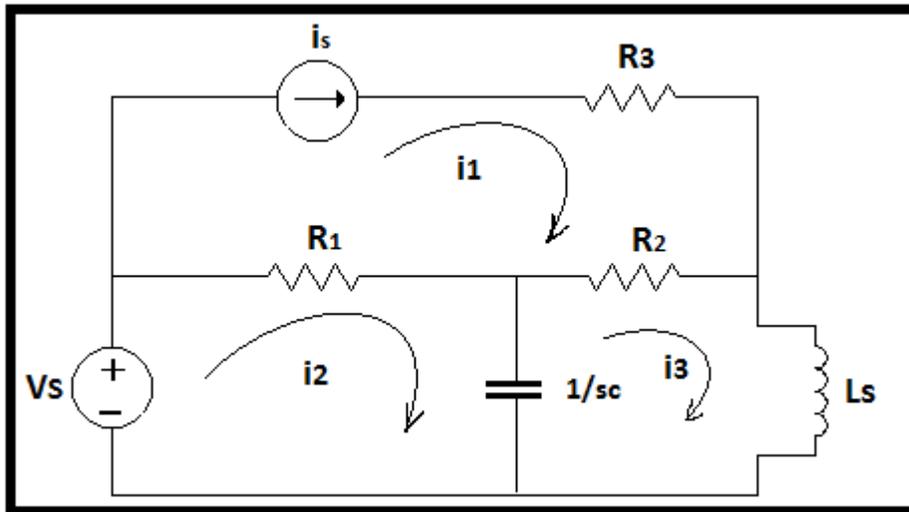


Figura 1.1. Circuito con corrientes de malla marcadas como i_1 , i_2 , e i_3 donde las flechas muestran la dirección de la corriente de malla.

La técnica de análisis de mallas funciona asignando arbitrariamente la corriente de una malla en una malla esencial. Una malla esencial es un lazo que no contiene a otro lazo. Cuando se observa un esquema de un circuito, las mallas se ven como una ventana. En la figura 1.1 las mallas esenciales son uno, dos y tres. Una vez halladas las mallas esenciales, las corrientes de malla deben ser especificadas. ^[2]

Una corriente de malla es una corriente que pasa alrededor de la malla esencial. Esta corriente de malla podría no tener un significado físico pero es muy usado para crear el sistema de ecuaciones del análisis de mallas. Cuando se asignan corrientes de malla es importante tener todas las corrientes de malla girando en el mismo sentido ya que esto ayudará a prevenir errores al escribir las ecuaciones. La convención es tenerlas todas girando en el sentido de las manecillas del reloj. En la figura 1.1 se muestra un circuito con las corrientes de malla marcadas.

La razón para usar corrientes de malla en vez de usar la ley de Kirchhoff de corriente (LKC) y la ley de Kirchhoff de voltaje (LKV) para resolver un problema es que las corrientes de malla pueden simplificar cualquier corriente planteada con LKC y LKV. O

sea, que el análisis de mallas asegura el menor número de ecuaciones, simplificando así el problema.

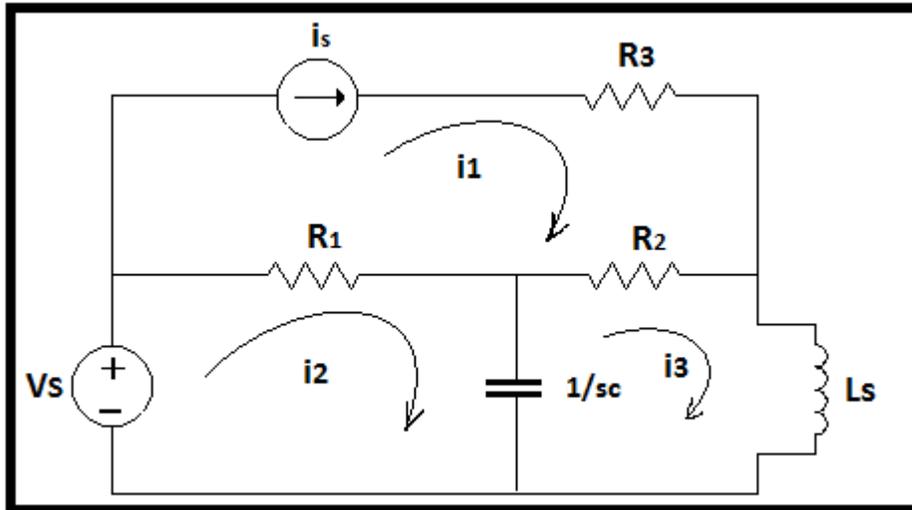


Figura 1.2. Circuito simple usando análisis de mallas.

Después de nombrar las corrientes de malla, se plantea una ecuación para cada malla, en la cual se suman todas las tensiones de todos los componentes de una malla. Para los elementos que no son fuentes de energía, la tensión será la impedancia del componente por la corriente que circula por él. Cuando un componente se encuentra en una rama que pertenece a dos mallas, su corriente será el resultado de la suma algebraica de las corrientes de malla a las que pertenezca. Es importante tener esto en cuenta a la hora de expresar la tensión en la rama en función de la intensidad que circula por ella. Por ejemplo, la tensión de la resistencia R_2 en la figura 1.2 es: $V_R = R_2(i_1 - i_3)$, siendo i_1 la corriente de malla de la que se está escribiendo la ecuación e i_3 la malla vecina; considerando positiva la corriente de la malla que se describe y negativa la corriente de malla vecina. Es importante tener en cuenta estos signos.

Si hay una fuente de tensión en la corriente de malla, la tensión en la fuente es sumada o sustraída dependiendo si es una caída o subida de tensión en la dirección de la corriente de malla. Para una fuente de corriente que no esté contenida en dos mallas, la corriente de malla tomará el valor positivo o negativo de la fuente de corriente dependiendo si la

corriente de malla está en la misma dirección o en dirección opuesta a la fuente de corriente [2]. A continuación se plantean las ecuaciones del circuito de la figura 1.2, así:

$$\text{Malla 1: } \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_s \quad \dots (1.1)$$

$$\text{Malla 2: } -V_s + R_1(i_2 - i_1) + \frac{1}{sC}(i_2 - i_3) = 0 \quad \dots (1.2)$$

$$\text{Malla 3: } \frac{1}{sC}(i_3 - i_2) + R_1(i_3 - i_1) + Lsi_3 \quad \dots (1.3)$$

Una vez halladas las ecuaciones, el sistema puede resolverse usando alguna de las técnicas para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Observación: En circuitos resistivos (donde solo hayan resistencias), si al resolver el sistema una corriente de malla es negativa significa que esa corriente circula en sentido contrario al que se ha supuesto. En circuitos de corriente alterna con condensadores, bobinas, será importante el criterio de signos ya que a la hora de restar intensidades, como se trabaja con números complejos, a través de la Fórmula de Euler, se tienen cambios de modulo y de fase en la intensidad resultante, no basta con fijar la de mayor módulo como positiva; se tiene que acudir al patrón de corriente positiva en sentido horario (o anti horario, a elección)

1.4 Solución usando el MCM

Considerado el circuito plano de la figura siguiente (con resistencia en Ω) con tres mallas, se desea calcular las corrientes de mallas I_1 , I_2 e I_3 utilizando LKV y después calcular la potencia absorbida por la resistencia marcada con V cuyo valor es de 2Ω .

1.4.1 Método tradicional

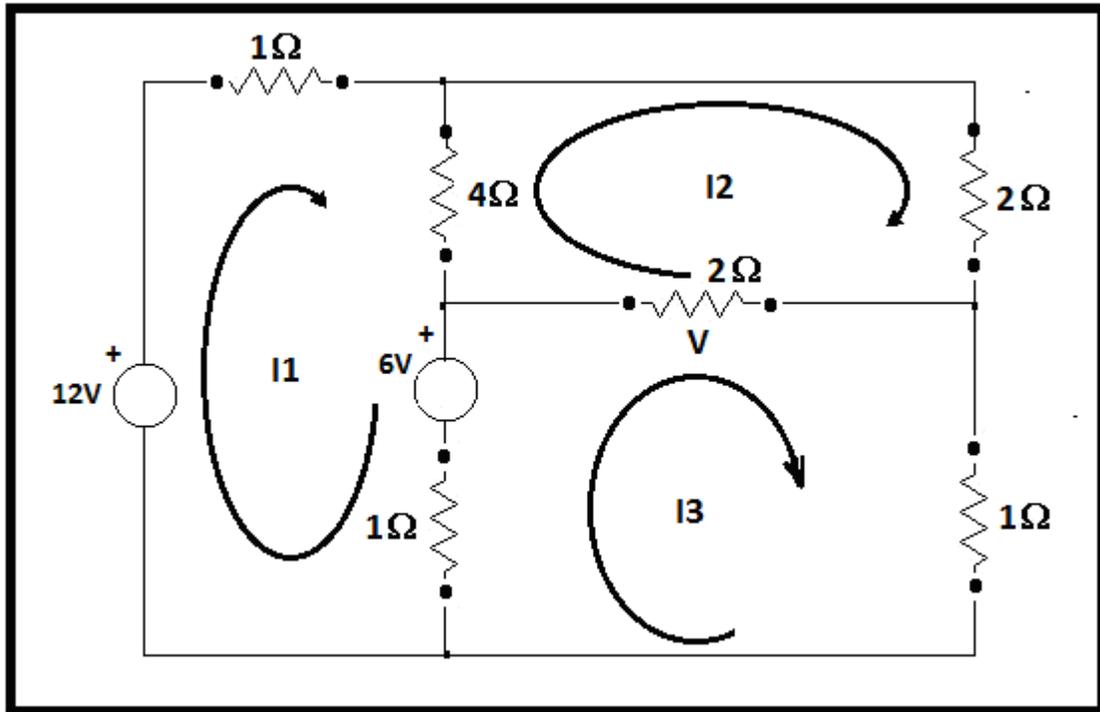


Figura 1.3. Circuito resistivo que contiene solamente fuentes independientes de voltaje para el análisis de mallas.

Fórmula general de Método de Malla: ^[2]

$$I_1 R_{11} + I_2 R_{12} + I_3 R_{13} \dots + I_n R_n = \sum V \quad \dots (1.4)$$

Lazo 1: Aplicando LKV en la malla 1 se tiene que el voltaje alrededor de esta malla se define por las corrientes de mallas representadas:

$$-12V + I_1 + 4(I_1 - I_2) + 6V + (I_1 - I_3) = 0 \quad \dots (1.5)$$

Simplificando la ecuación:

$$6I_1 - 4I_2 - I_3 = 6 \quad \dots (1.6)$$

Lazo 2. Aplicado LKV en la malla 2 el voltaje alrededor de esta malla 2 queda definido de la forma siguiente:

$$4(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) + 2\mathbf{I}_2 + 2(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3) = 0 \quad \dots (1.7)$$

$$-4\mathbf{I}_1 + 8\mathbf{I}_2 - 2\mathbf{I}_3 = 0 \quad \dots (1.8)$$

Lazo 3. Finalmente se escribe LKV en la malla 3 y se obtiene que:

$$-\mathbf{I}_1 - 2\mathbf{I}_2 + 4\mathbf{I}_3 = 6\mathbf{V} \quad \dots (1.9)$$

Expresándolas en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 & -1 \\ -4 & 8 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Usando la matriz inversa se tiene que:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.35 & 0.225 & 0.2 \\ 0.225 & 0.288 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Ahora se puede determinar la potencia consumida por la resistencia de 2Ω . Conociendo el valor de las corrientes de malla, es posible a calcular todos los voltajes y corrientes en el circuito. Lo que se desea es calcular el voltaje V en la resistencia, que se obtiene por:

$$V = 2(\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_2) = 2\mathbf{V} \quad \dots (1.10)$$

Y la potencia absorbida por la resistencia de 2Ω será:

$$P = \mathbf{V}^2/2 = 2\mathbf{W} \quad \dots (1.11)$$

1.4.2 Método de supermalla

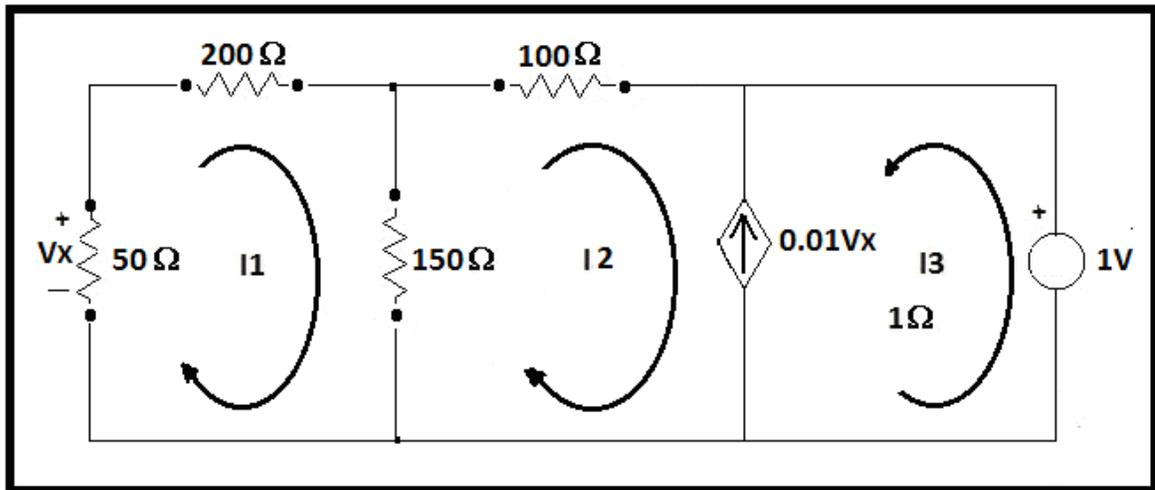


Figura 1.4. Circuito con supermalla.

Al aplicar el MCM

Malla 1:

$$50I_1 + 200I_1 + 150(I_1 - I_2) = 0 \quad \dots (1.12)$$

$$400I_1 - 150I_2 = 0 \quad \dots (1.13)$$

Supermalla:

$$150(I_2 - I_1) + 100I_2 + 1 = 0 \quad \dots (1.14)$$

$$0.01V_x = -I_2 - I_3 \quad \dots (1.15)$$

Pero $V_x = -50I_1$... (1.16)

Sustituyendo (1.16) en (1.15)

$$-0,5I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad \dots (1.17)$$

Finalmente resolviendo (1.13), (1.14) y (1.17) por matrices se obtiene que:

$$I_3 = 0,00419A$$

$$I_2 = 2,6667I_1 \quad \dots (1.18)$$

Luego, determinando el valor de V_x , por sustitución se obtiene el valor de I_1 :

$$I_1 = -0.00419/21667 \quad \dots (1.19)$$

$$I_1 = -0.00193A$$

$$I_2 = -0.005155A$$

1.4.3 Método de las Mallas Modificado (MMM)

El método de las mallas modificado es más fácil que la supermalla. El ejemplo siguiente muestra cómo escribir la ecuación de lazo cuando la fuente de corriente es común en dos o más lazo. En este caso se introduce una fuente auxiliar de voltaje variable por la fuente común de corriente a dos o más lazo. El resultado contiene una ecuación simultánea. Se considera el circuito siguiente el cual contiene la fuente independiente de corriente en rama común a 1 y 3 y el voltaje-controlado de fuente de corriente en la rama 1 y 2. Dado esto, encuentra la corriente de malla I_1 , I_2 , e I_3 y la potencia disipada por las fuentes independientes.

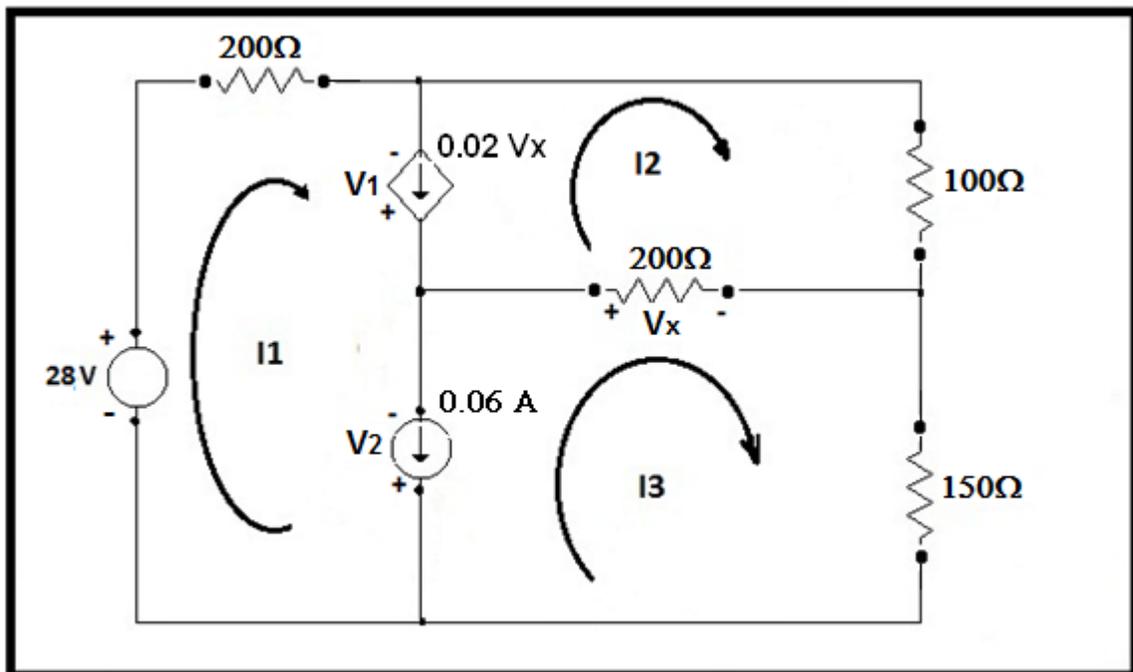


Figura 1.5. Método de malla modificado.

Solución

Se introducen dos fuentes auxiliares de voltaje variable V_1 y V_2 asociado con dos fuentes de corriente común en dos ramas. Este voltaje variable facilita la aplicación de LKV para construir la ecuación de lazo.

Paso 1. Aplicar LKV en lazo 1.

$$28 = 200I_1 - V_1 - V_2 \quad \dots (1.20)$$

Paso 2. Aplicar LKV y la ley de ohm en lazo 2,

$$100I_2 + 200(I_2 - I_3) + V_1 \quad \dots (1.21)$$

$$300I_2 - 200I_3 + V_1 = 0 \quad \dots (1.22)$$

Paso 3. Aplicar LKV en lazo 3

$$150I_3 + V_2 + 200(I_3 - I_2) = 0 \quad \dots (1.23)$$

$$-200I_2 + 350I_3 + V_2 = 0 \quad \dots (1.24)$$

Paso 4. Escribir la ecuación determinada por la fuente de corriente independiente. Aquí en el lazo 1 y 3

$$0.06 = I_1 - I_3 \quad \dots (1.25)$$

Paso 5. Escribir la ecuación determinada por la fuente de corriente dependiente.

$$I_1 - I_2 = 0.02V_x \quad \text{y} \quad V_x = 200(I_3 - I_2) \quad \dots (1.26)$$

$$I_1 + 3I_2 - 4I_3 = 0 \quad \dots (1.27)$$

Paso 6. Aplicando matrices y resolviendo se tiene que:

$$\begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 300 & -200 & 1 & 0 \\ 0 & -200 & 350 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 0 \\ 0 \\ 0.06 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo con la matriz inversa:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 300 & -200 & 1 & 0 \\ 0 & -200 & 350 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 28 \\ 0 \\ 0 \\ 0.06 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.02 \\ 0.04 \\ 2 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Paso 7. Calcular la potencia en la fuente independiente

$$P_{V_{fuente}} = 28 I_1 = 28 \times 0.1 = 2.8W \quad \dots (1.28)$$

$$P_{I_{fuente}} = 0.06 V_2 = -0.6W \quad \dots (1.29)$$

Y esto indica que las fuentes independientes absorben potencia en el circuito ^[7]

1.5 Gráficos de circuitos planos y no planos

Para los circuitos que contienen elementos concentrados, las ecuaciones LKC y LKV son independientes de la naturaleza de los elementos de circuito en las ramas individuales. La información importante en la ecuación LKV y LKC es: ¿en cuál de los dos nodos se conecta? Debido a esto, a menudo es conveniente sustituir cada rama de la red por un segmento de línea. La representación simplificada resultante de la información de conexión se llama gráfico del circuito. En el análisis de mallas de la sección anterior se trataba, al menos en la superficie, exclusivamente con circuitos planos, es decir, los estirables en un plano sin ramas que tienen para cerrar entre sí. Un circuito no plano es aquel que tiene ramas que se cruzan entre si. Dos sencillos ejemplos de gráficos de circuitos no planos, llamadas gráficas no planas básicas de Kuratowski, aparecen en la figura 1.6. Cada gráfico tiene exactamente un cruce de rama. Como se puede observar, cualquier intento de volver a dibujar estas cifras como gráficos planos fallará.

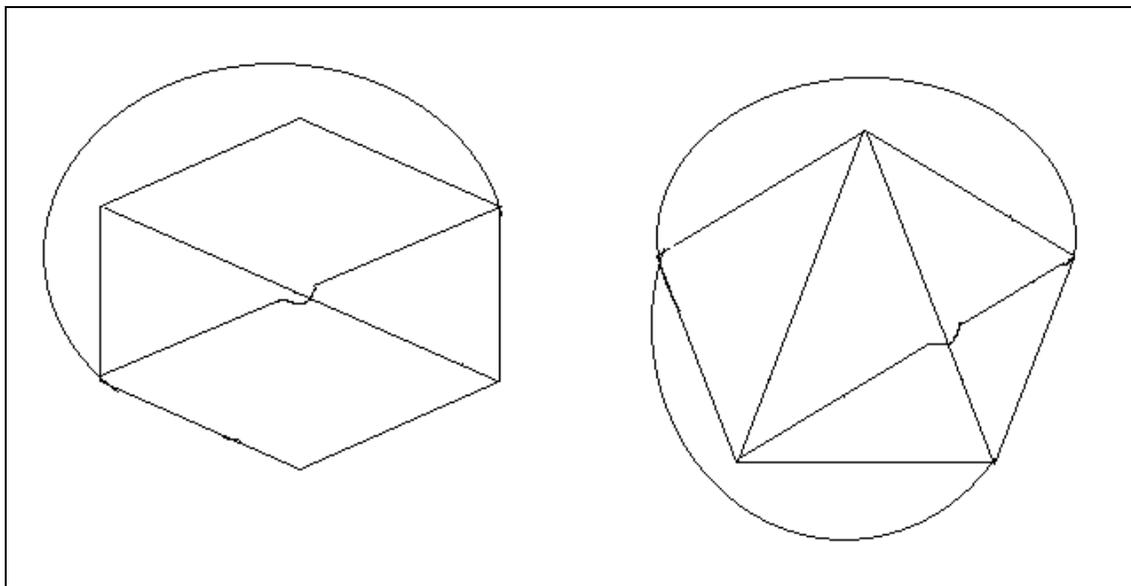


Figura 1.6. Dos circuitos simples no planos (gráfico de Kuratowski).

1.6 Método de las Corrientes de Mallas aplicado en circuitos no planos

Como se sabe el MCM no es aplicable, según la literatura, a circuitos eléctricos no planos. A continuación se ofrecen los pasos a dar para poder resolver un circuito no plano

aplicando el MCM. Para circuitos no planos, tales como los que se muestran en la figura 1.6, el concepto de una malla está mal definido debido a los cruces de ramificación. ¿Cómo se hace una ecuación de lazo de estos circuitos? En los cursos avanzados de análisis de circuito, este tema se aborda de una manera muy sistemática mediante el uso de un concepto llamado el árbol de un gráfico o de un circuito. Este enfoque introduce una gran cantidad de nomenclatura que no es muy beneficiosa para los estudiantes cuyas técnicas están fuera del análisis de circuitos analógicos. La idea básica consiste en utilizar la técnica de análisis de mallas tanto como sea posible y manejar las ramas problemáticas (las que cruzan sobre otras ramas) de una manera especial.

1.6.1 Estrategia para escribir la ecuación de lazo de las redes no planas

Paso 1: Dado un circuito no plano N , volver a dibujar el circuito con el objetivo de reducir el número de ramas cruces tanto como sea posible. A pesar de que reducir al mínimo el número de cruces sería lo mejor, no es necesario que lo haga.

Paso 2: Después de trazado el nuevo circuito, suponiendo que hay m cruces. Retire bastantes ramas para eliminar todos los cruce de rama, dejando así un circuito plano, que se denomina por N^*

Paso 3: Escribir un conjunto de corrientes de malla para el circuito plano N^* .

Paso 4: Para cada rama de N que se ha eliminado en el paso 2, formar un lazo de corriente asociada que consiste en esta rama y algún subconjunto de ramas de N^*

Paso 5: Aplicar LKV a cada uno de los lazos obtenidos en el paso 3 y 4 para obtener un conjunto de ecuaciones de lazo para la red no plana.

Ejemplo que ilustra la estrategia a seguir en circuitos no planos.

La figura 1.7 muestra un circuito no plano N . Todas las resistencias tienen un valor de 1Ω . Escriba las ecuaciones de lazo y encuentre las corrientes en todas las resistencias.

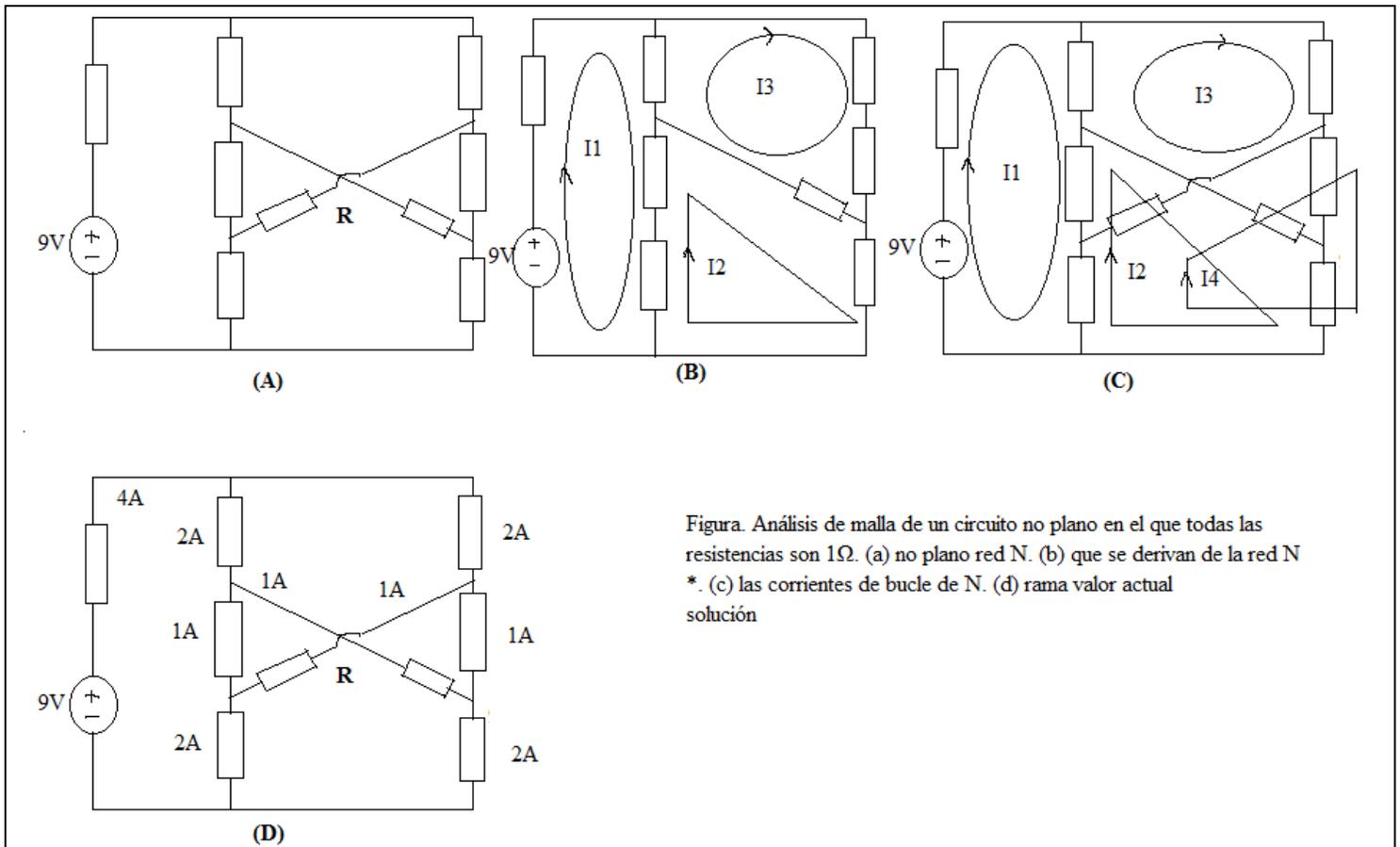


Figura 1.7. Análisis de malla de un circuito no plano en el que todas las resistencias son 1Ω . (A) No plano red N. (B) Que se derivan de la red N*. (C) Las corrientes de lazo de N. (D) Rama valor actual.

Solución:

Extracción de la resistencia marcada R en la figura 1.7 A) para eliminar cruzar la rama que produce el circuito plano N* de la figura 1.7 B. La red N* contiene tres corrientes de malla identificadas fácilmente como I1, I2, e I3. Luego, restauración de la resistencia R y la corriente de malla adicional nombrada I4. Este lazo de corriente en R y el árbol de las otras resistencias de N*, como se muestra por las líneas gruesas de la Figura 1.7 describe el siguiente sistema de ecuaciones.

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones por algún método conocido se obtiene que:

$$I_1 = 4A, I_2 = 3A, I_3 = 2A \text{ e } I_4 = -1A$$

1.7 Análisis del Método de Voltaje de Nodo (MVN)

Es un método general de análisis de circuitos que se basa en determinar los voltajes de todos los nodos del circuito respecto a un nodo de referencia. Conocidos estos voltajes se pueden determinar todas las corrientes que circulan por los distintos elementos del circuito. Si el circuito tiene N nodos se han de determinar (N-1) voltaje de nodo. El nodo de referencia se elige de forma arbitraria, si bien es frecuente elegir el nodo al cual hay conectadas un mayor número de ramas o un nodo con una fuente de voltaje. En la versión que se va a desarrollar a continuación se van a determinar los voltajes de los nodos principales del circuito. Como nodo de referencia se elegirá un nodo principal. En la mayoría de los casos este procedimiento conlleva un menor número de ecuación.

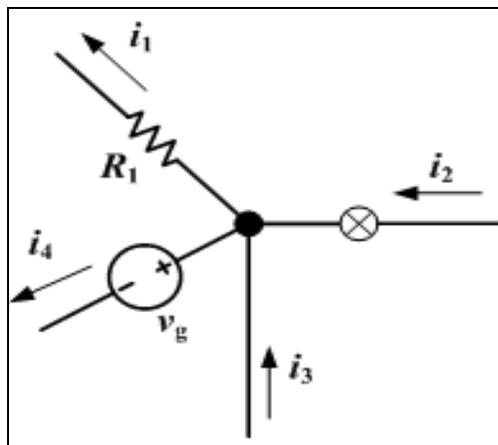


Figura 1.8: Representación de un nodo.

Cuando se analiza un circuito por las Leyes de Kirchhoff, se podrían usar análisis de nodos (tensiones nodales) por la Ley de Corrientes de Kirchhoff (LKC) o análisis de malla (corrientes de malla) usando la Ley de Tensiones de Kirchhoff (LKV). En el análisis de nodos se escribe una ecuación para cada nodo, con condición que la suma de esas corrientes sea igual a cero en cualquier instante, por lo que una carga Q nunca puede acumularse en un nodo. Estas corrientes se escriben en términos de las tensiones de cada nodo del circuito. Así, en cada relación se debe dar la corriente en función de la tensión que es la incógnita, la conductancia ó admitancia. Por ejemplo, para un resistor, $I_{rama} = V_{rama} * G$, donde G es la conductancia del resistor.

El análisis de nodos es posible cuando todos los nodos tienen resistencia o impedancia. Este método produce un sistema de ecuaciones, que puede resolverse a mano si es pequeño, o también puede resolverse rápidamente usando álgebra lineal en un computador. Por el hecho de que forme ecuaciones muy sencillas, este método es una base para muchos programas de simulación de circuitos (Por ejemplo, SPICE). Cuando los elementos del circuito no tienen conductancia, se puede usar una extensión más general del análisis de nodos: el análisis de nodos modificado.

Los ejemplos simples de análisis de nodos se enfocan en elementos lineales. Las redes no lineales (que son más complejas) también se pueden resolver por el análisis de nodos al usar el método de Newton para convertir el problema no lineal en una secuencia de problemas lineales.

1.7.1 Procedimiento

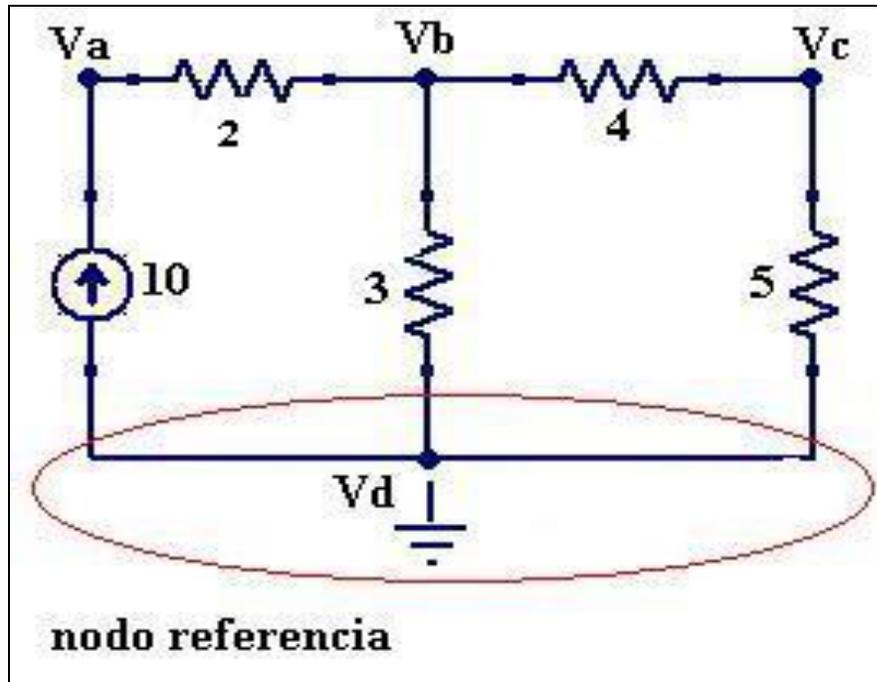


Figura 1.9. Ejemplo donde se elige el nodo con más conexiones como nodo de referencia (cuya tensión es 0) y se asignan 3 variables V_a , V_b y V_c .

1. Localice los segmentos de cable conectados al circuito. Estos serán los nodos que se usarán para el método.
2. Seleccione un nodo de referencia (polo a tierra). Se puede elegir cualquier nodo ya que esto no afecta para nada los cálculos; pero elegir el nodo con más conexiones podría simplificar el análisis.
3. Identifique los nodos que están conectados a fuentes de voltaje que tengan una terminal en el nodo de referencia. En estos nodos la fuente define la tensión del nodo. Si la fuente es independiente, la tensión del nodo es conocida. En estos nodos no se aplica la LKC.
4. Asigne una variable para los nodos que tengan tensiones desconocidas. Si la tensión del nodo ya se conoce, no es necesario asignarle una variable.
5. Para cada uno de los nodos, se plantean las ecuaciones de acuerdo con las Leyes de Kirchhoff. Básicamente, sume todas las corrientes que pasan por el nodo e iguálelas

- a 0. Si el número de nodos es n , el número de ecuaciones será por lo menos $n-1$ porque siempre se escoge un nodo de referencia al cual no se le elabora ecuación.
6. Si hay fuentes de tensión entre dos tensiones desconocidas, una esos dos nodos como un supernodo, haciendo la sumatoria de todas las corrientes que entran y salen en ese supernodo. Las tensiones de los dos nodos simples en el supernodo están relacionadas por la fuente de tensión intercalada.
 7. Resuelva el sistema de ecuaciones simultáneas para cada tensión desconocida.

Ejemplos

Ejemplo 1: Caso básico

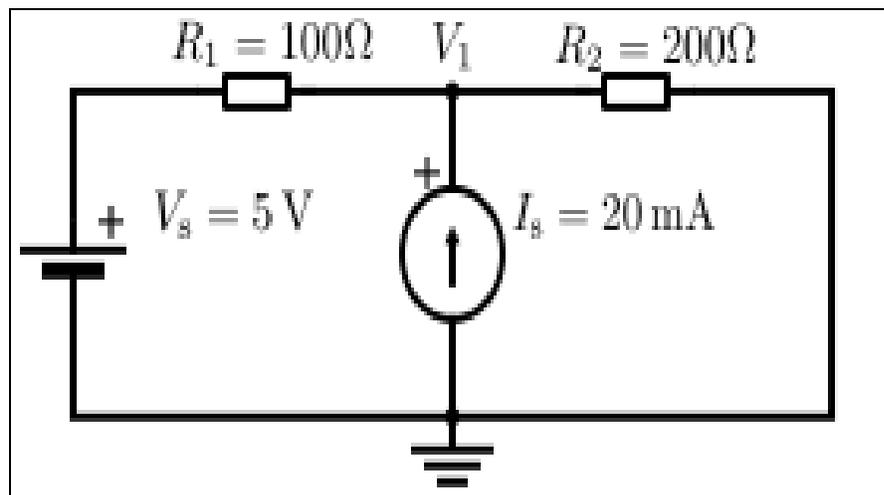


Figura 1.10. Circuito sencillo con una tensión desconocida V_1 .

La única tensión desconocida en este circuito es V_1 . Hay tres conexiones en este nodo y por esta razón, 3 corrientes a considerar. Ahora se analizan todas las corrientes que pasan por el nodo (saliendo del nodo):

$$\text{Corriente en } R_1 : \frac{V_1 - V_s}{R_1} \quad \dots(1.30)$$

$$\text{Corriente en } R_2 : \frac{V_1}{R_2} \quad \dots(1.31)$$

$$\text{Corriente en } I_s : I_s = -I_s \quad \dots(1.32)$$

Con la Ley de Corrientes de Kirchhoff (LKC), se tiene que:

$$\frac{V_1 - V_S}{R_1} + \frac{V_1}{R_2} - I_S = 0 \quad \dots (1.33)$$

Se resuelve con respecto a V_1 :

$$V_1 = \left(\frac{V_S}{R_1} + I_S \right) : \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad \dots (1.34)$$

Finalmente, la tensión desconocida se resuelve sustituyendo valores numéricos para cada variable. Después de haber obtenido estas ecuaciones y conocer cada tensión, es fácil calcular cualquier corriente desconocida.

$$V_1 = \left(\frac{5 \text{ V}}{100 \Omega} + 20 \text{ mA} \right) : \left(\frac{1}{100 \Omega} + \frac{1}{200 \Omega} \right) \approx 4.667 \text{ V} \quad \dots (1.35)$$

Ejemplo 2

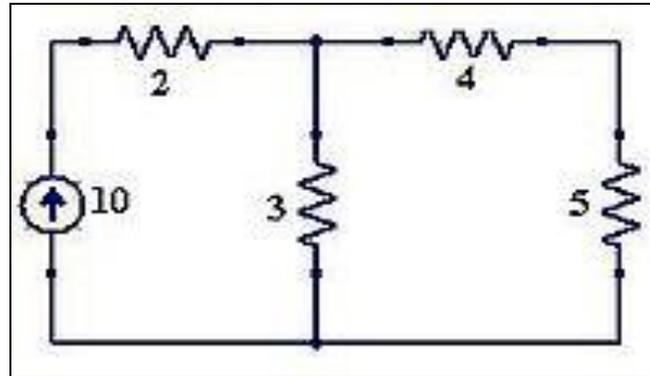


Figura 1.11. Gráfico del Ejemplo 2

Ejemplo: Del circuito de la figura 1.12 se deben hallar los voltajes en sus diferentes nodos

Solución:

1. Se localizan todos los nodos del circuito.
2. Se busca el nodo con más conexiones y se le llama nodo de referencia V_d (Figura 1.13).
3. No hay fuentes de tensión.
4. Se le asignan variables a los nodos V_a , V_b y V_c
5. Se plantean las ecuaciones según las Leyes de Kirchhoff, así:
 - Para calcular el voltaje en el nodo V_a , se plantea que la resistencia de 2Ω tiene la polaridad de la Figura 1.13.

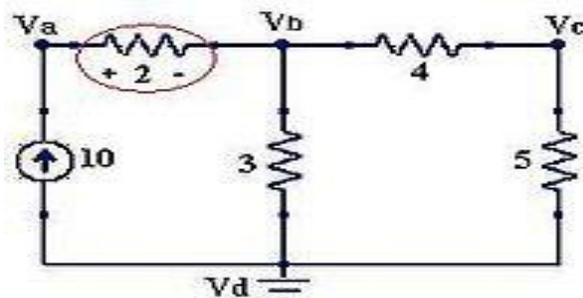


Figura 1.12.

$$\frac{V_a - V_b}{2} = 10 \quad \dots (1.36)$$

Simplificando:

$$\frac{1}{2}V_a - \frac{1}{2}V_b = 10 \quad \dots (1.37)$$

Para calcular el voltaje en el segundo nodo (V_b) las resistencias que van a dicho nodo tendrán la polaridad de la Figura 1.14:

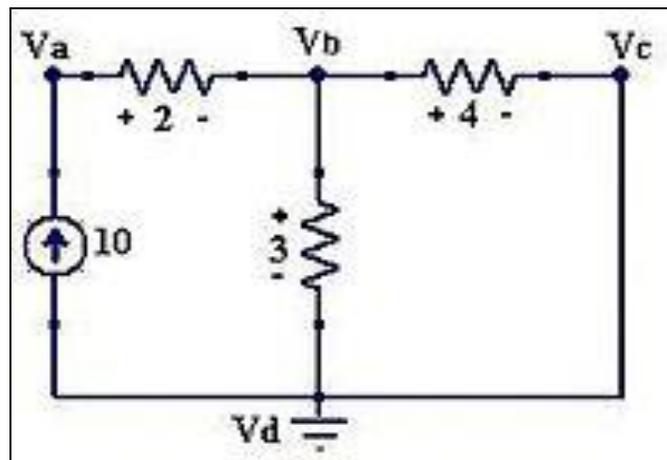


Figura 1.13

$$\frac{V_b - V_a}{2} + \frac{V_b}{3} + \frac{V_b - V_c}{4} = 0 \quad \dots (1.38)$$

Factorizando se obtiene que:

$$-\frac{1}{2}V_a + \frac{13}{12}V_b - \frac{1}{4}V_c = 0 \quad \dots (1.39)$$

Para la polaridad del nodo V_c se asume que:

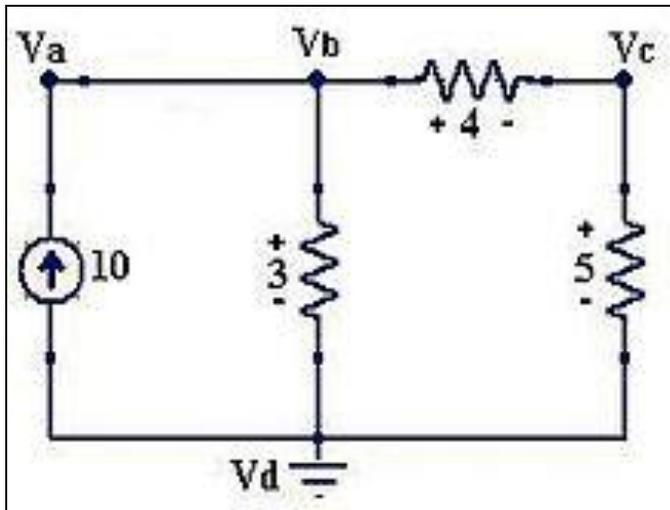


Figura 1.14

$$\frac{V_c - V_b}{4} + \frac{V_c}{5} = 0 \quad \dots (1.40)$$

Factorizando se obtiene:

$$-\frac{1}{4}V_b + \frac{9}{20}V_c = 0 \quad \dots (1.41)$$

Sistema de ecuaciones: Se obtuvo un sistema de ecuaciones del cual se pueden determinar los valores de los voltajes en los nodos.

$$\frac{1}{2}V_a - \frac{1}{2}V_b = 10 \quad \dots(1.42)$$

$$-\frac{1}{2}V_a + \frac{13}{12}V_b - \frac{1}{4}V_c = 0 \quad \dots(1.43)$$

$$-\frac{1}{4}V_b + \frac{9}{20}V_c = 0 \quad \dots(1.44)$$

Solucionando el sistema lineal, se tienen como resultado los voltajes:

$$V_a = 42,5V, V_b = 22,5V \text{ y } V_c = 12,5V$$

1.7.2 Circuitos con fuentes de voltaje reales independientes y dependientes.

Circuito con fuentes independientes

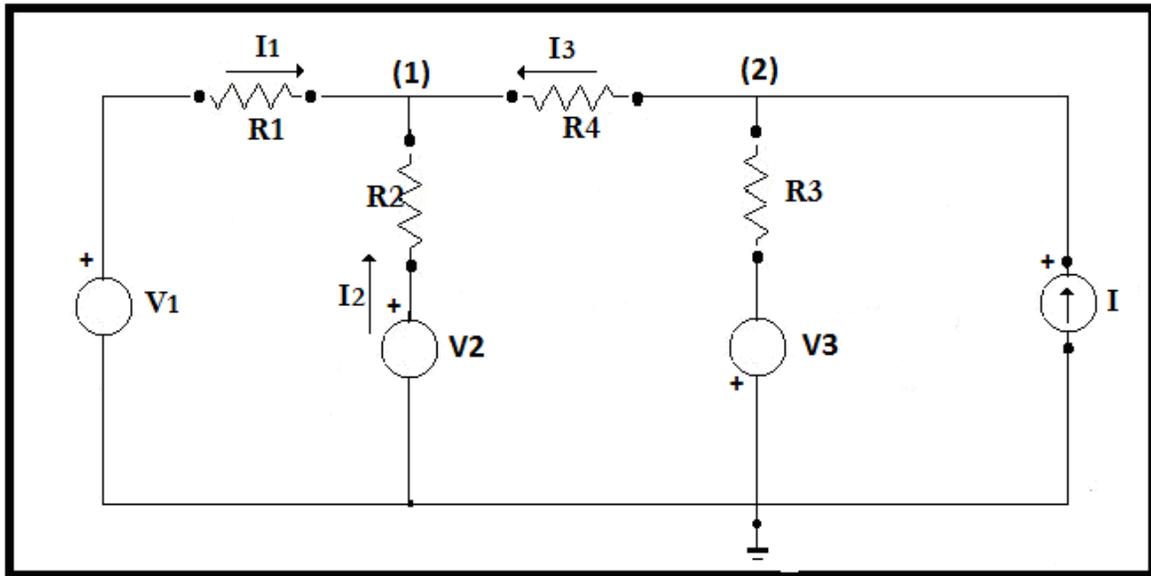


Figura 1.15. Circuito con fuentes independientes.

Fórmula general

$$(1) \varphi_1(G_1 + G_2 + G_4) - \varphi_2(G_4) = V_1 G_1 + V_2 G_2 \quad \dots (1.45)$$

$$(2) -\varphi_1(G_4) + \varphi_2(G_4 + G_3) = -V_3 G_3 + I \quad \dots (1.46)$$

Aplicado $\sum I = 0 \quad I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad \dots (1.47)$

$$(-\varphi + V_1)G_1 + (-\varphi_1 + V_2)G_2 + (\varphi_2 + \varphi_1)G_4 = 0 \quad \dots (1.48)$$

$$-\varphi_1(G_1 + G_2 + G_4) + \varphi_2(G_4) + V_1 G_1 + V_2 G_2 = 0 \quad \dots (1.49)$$

Circuito con fuentes de voltaje reales independientes

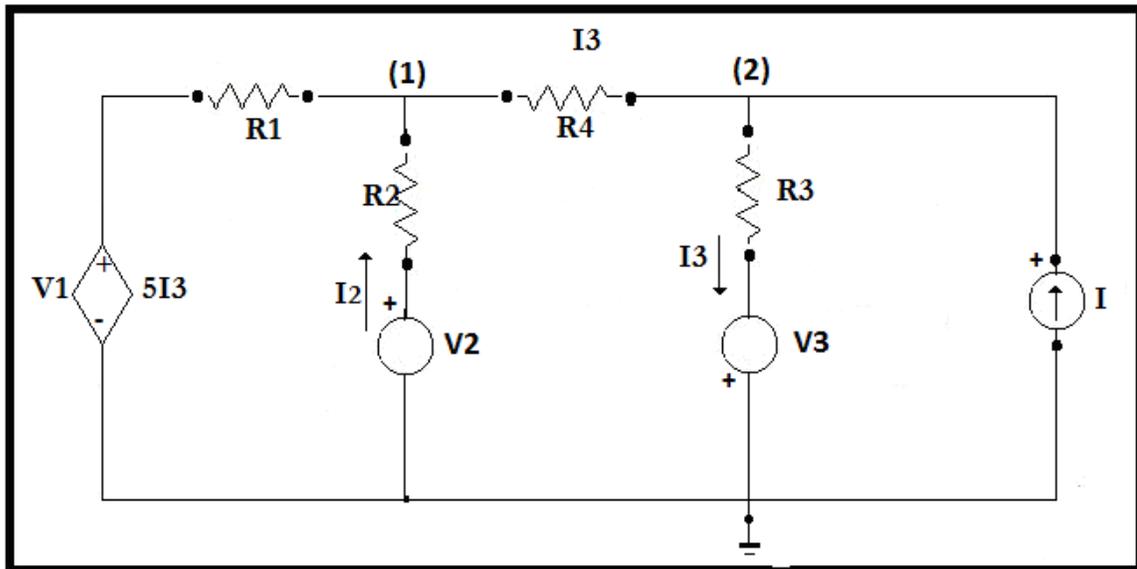


Figura 1.16. Circuitos con fuentes de voltaje independientes reales

Aplicando la fórmula general:

$$(1) \ \varphi_1(\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 + \mathbf{G}_4) - \varphi_2(\mathbf{G}_4) = (5\mathbf{I}_3)\mathbf{G}_1 + \mathbf{V}_2\mathbf{G}_2 \quad \dots (1.50)$$

$$(2) \ \mathbf{I}_3 = (\varphi_2\mathbf{V}_3)\mathbf{G}_3 \quad \dots (1.51)$$

$$(3) \ -\varphi_1\mathbf{G}_4 + \varphi_2(\mathbf{G}_4 + \mathbf{G}_2) = \mathbf{I} - \mathbf{V}_3\mathbf{G}_3 \quad \dots (1.52)$$

1.7.3 Circuito con Fuente ideal de voltaje.

El nodo de referencia se conecta al terminal de la fuente ideal.

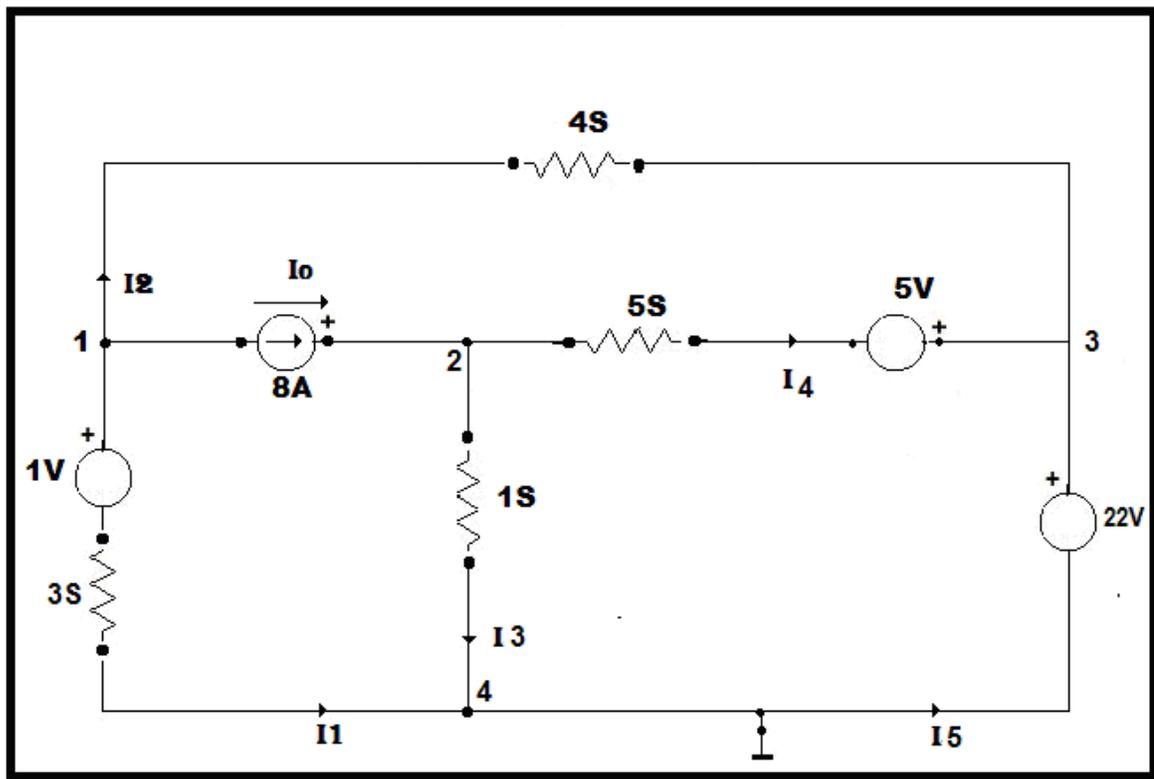


Figura 1.17. Circuito con fuente ideal de voltaje.

$$I_0 = 8A$$

$$I_0 + I_1 + I_2 = 0 \quad \dots (1.53)$$

Como usted calcularía I5?

$$1) +I_1 - I_2 = 0 \quad \dots (1.54)$$

$$2) -I_0 + I_3 + I_4 = 0 \quad \dots (1.55)$$

$$-8 + (V_1 + 1)3 - (V_3 + V_1)4 = 0 \quad \dots (1.56)$$

$$-8 + V_2(1) + (V_2 - V_3 + 5)(5) = 0 \quad \dots (1.57)$$

Si se conoce que $V_3 = 22V$ entonces,

Respuesta: $V_1 = 11V$

$$V_2 = 15.5V$$

$$\mathbf{I_3 + I_5 + I_6 = 0} \quad \dots (1.58)$$

$$\mathbf{I_6 + I_1 + I_4 = 0} \quad \dots (1.59)$$

$$\mathbf{I_3 + I_5 + I_1 + I_4 = 0} \quad \dots (1.60)$$

1.7.4 Nodo de referencia no conectado a un terminal de la fuente ideal (Fuente Flotando)

La fuente de tensión flotante significa que el nodo de las fuentes no está conectado al nodo de referencia. Cuando una fuente flotante de tensión dependiente o independiente está presente con respecto al nodo de referencia dada, una aplicación directa de LKC a cualquiera de los nodos terminales de las fuentes de tensión se considera infructuosa. Hay varias formas de manejar esta situación. Un método conveniente es incluir las fuentes y sus nodos terminales, definiendo una curva envolvente que muchos textos llaman un supernodo.

1.8 Método tradicional de nodo

Si se toma el nodo 2 como referencia en el ejemplo mostrado a continuación:

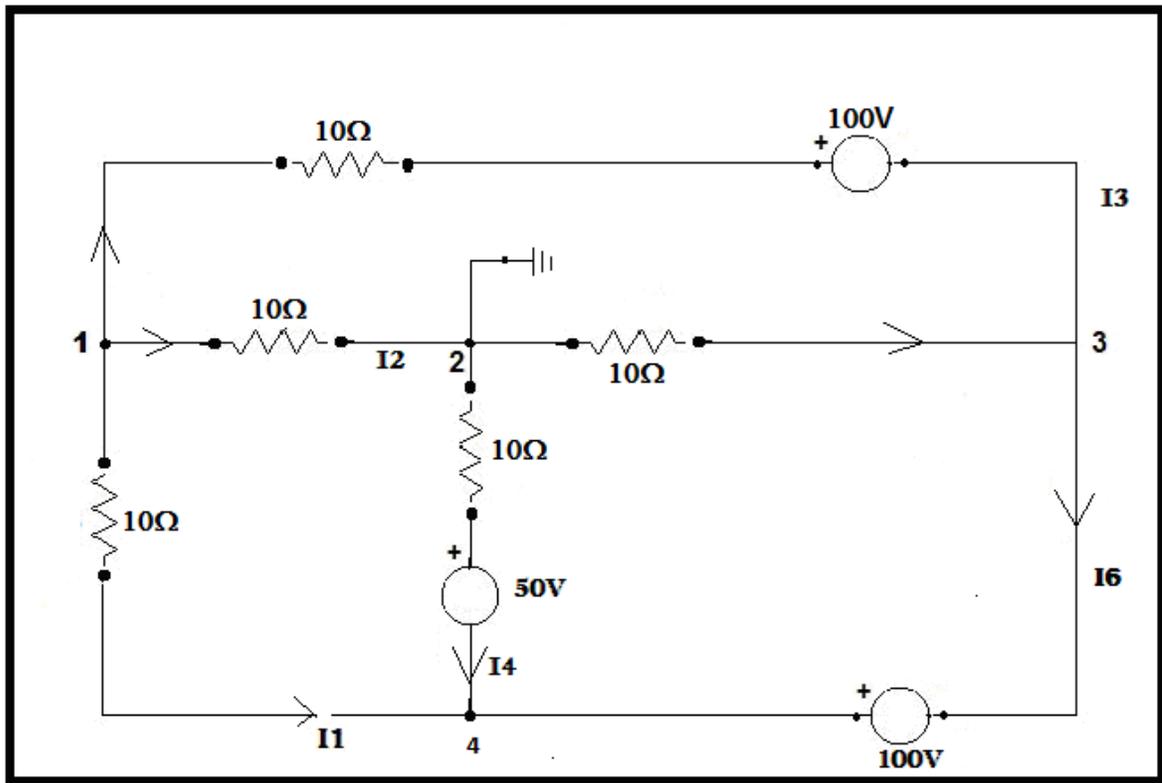


Figura.1.18 Ejemplo con fuente ideal y nodo de referencia que no coincide con ninguno de los terminales de la fuente ideal.

Encontrar: V_1, V_3, V_4 e I_6

Solución:

$$V_2 = 0$$

$$V_3 + 100V = V_4 \quad \dots (1.61)$$

$$\text{Nodo 1) } I_2 + I_1 + I_3 = 0 \quad \dots (1.62)$$

$$\text{Nodo 3) } I_6 - I_5 - I_3 = 0 \quad \dots (1.63)$$

$$\text{Nodo 4) } -I_1 - I_4 - I_6 = 0 \quad \dots (1.64)$$

$$I_2 = 0 - V_1/10\Omega \quad ; \quad I_1 = V_1 - V_4/10\Omega \quad \dots (1.65)$$

$$I_3 = 0 - V_4 - 50/10\Omega \quad ; \quad 0 - I_4(10\Omega) - 50 = V_4 \quad \dots (1.66)$$

$$I_3 = V_1 - V_3 - 100/10\Omega \quad ; \quad I_5 = V_2 - V_3/10\Omega \quad \dots (1.67)$$

$$\text{Supernodo: } I_3 + I_5 + I_1 + I_4 = 0 \quad \dots (1.68)$$

1.9 Método del supernodo

Fuentes de voltajes flotantes (solo fuente independiente)

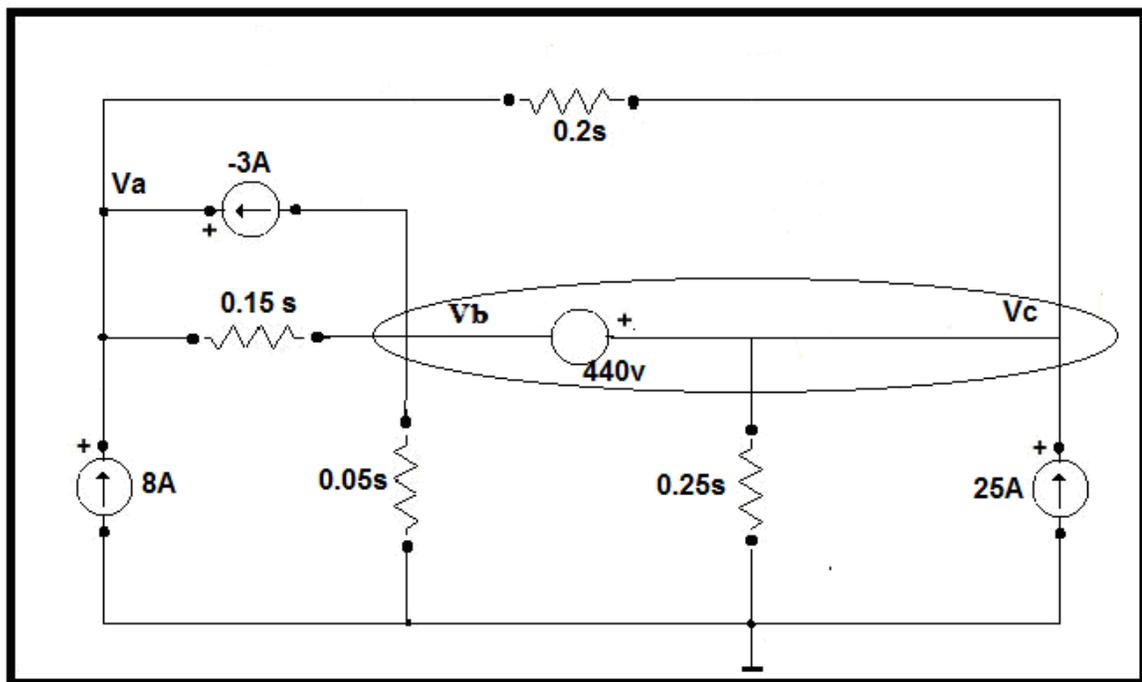


Figura. 1.19. Fuentes de voltajes flotantes.

Solución:

$$8 + 0.15(V_a + V_b) + 3 + 0.2(V_a + V_c) = 0 \quad \dots (1.69)$$

$$(1) \quad 0.35V_a - 0.15V_b - 0.2V_c = -11 \quad \dots (1.70)$$

Ecuaciones del supernodo

$$-3 + 0.15(V_b - V_a) + 0.05V_b + 0.25V_c - 25 + 0.2(V_c + V_a) = 0 \quad \dots (1.71)$$

$$(2) \quad -0,35V_a + 0,2V_b + 0,45V_c = 28 \quad \dots (1.72)$$

$$(3) \quad V_b + 440 = V_c \quad \dots (1.73)$$

Resolviendo el sistema quedara:

$$V_a = -90V$$

$$V_b = -310V$$

$$V_c = 130V$$

A continuación se analiza un ejemplo de un circuito con fuentes de voltaje flotantes con fuentes dependientes.

Encuentre el voltaje de nodo en los puntos siguientes: V_a , V_b y V_c y la potencia a entregar por la fuente de 30V. El método de solución será la combinación de dos fuentes en el Supernodo.

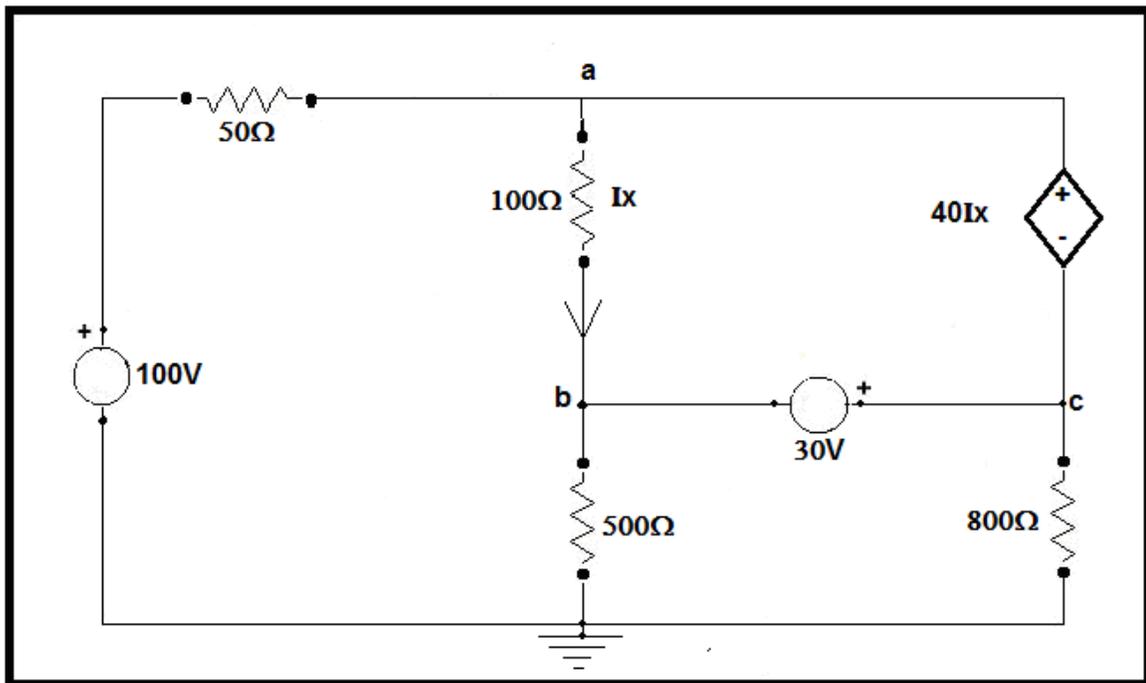


Figura 1.20. Fuentes de voltaje flotantes con fuentes dependiente

$$\text{Supernodo (1)} \quad (V_a - 100)/50 + I_x - I_x + V_b/500 + V_c/800 \quad \dots (1.74)$$

$$(3) V_b + 30 = V_c \quad e \quad I_x = \frac{V_a - V_b}{100} \quad \dots (1.75)$$

Sustituyendo quedará:

$$1) \quad \mathbf{0.02V_a + 0.00325V_b = 2.1625V} \quad \dots (1.76)$$

$$\mathbf{V_a - V_b = V_a - V_b - 30 = 40I_x} \quad \dots (1.77)$$

$$I_x = (V_a - V_b) / 100$$

Sustituyendo:

$$2) \quad \mathbf{0.6V_a - 0.6V_b = 30} \quad \dots (1.78)$$

$$\mathbf{Resolviendo 1 y 2. V_a = 100V}$$

$$\mathbf{V_b = 50V}$$

$$I_x = 0.5A, \quad i_{bd} = V_b/500 = 0.1A, \quad \text{entonces} \quad i_{bc} = i_x - i_{bd} = 0.4A \quad \dots (1.79)$$

$$\mathbf{P_{30} = 30 \times i_{bc} = 12W} \quad \dots (1.80)$$

1.10 Método de los Nodos Modificado (MNM)

En este método se incluyen en el circuito fuentes de corriente como incógnitas. El **MNM** mantiene los voltajes del **MVN** y elimina sus limitaciones, la mayoría de los programas de análisis de corriente usan este método.

En el **MNM** las incógnitas son los voltajes en los nodos y los valores de las fuentes de corrientes introducidas, estas fuentes incluyen:

1. Corriente en serie con FVI
2. Corriente en serie con FVD
3. Corriente en elemento en C.C
4. Corriente de control de F.D
5. Corriente declarada como cantidad de salida

Nota: El punto 3, es un caso especial de punto 1 porque en un elemento en corto circuito el voltaje de la fuente independiente es cero.

1.10.1 Procedimiento para escribir la ecuación del método modificado de nodo.

Paso 1: Para cada elemento x que existe, una I_x actual ha sido elegida como una corriente auxiliar, luego, reemplace temporalmente ese elemento por una fuente de corriente independiente que tenga valor I_x . Además, reemplace cada βI_x fuentes de corriente controlada por corriente, por fuentes de corriente independientes que tienen el valor de βI_x . Escriba la ecuación nodal convencional para MNM.

Paso 2: Para cada elemento x dónde I_x actual ha sido elegida como una corriente auxiliar, escribir una ecuación que describe su relación constitutiva en el circuito original del supernodo

Paso 3: Combinar la ecuación del paso 1 y el paso 2 en la forma de una única matriz lineal.

Ejemplo con fuente independiente

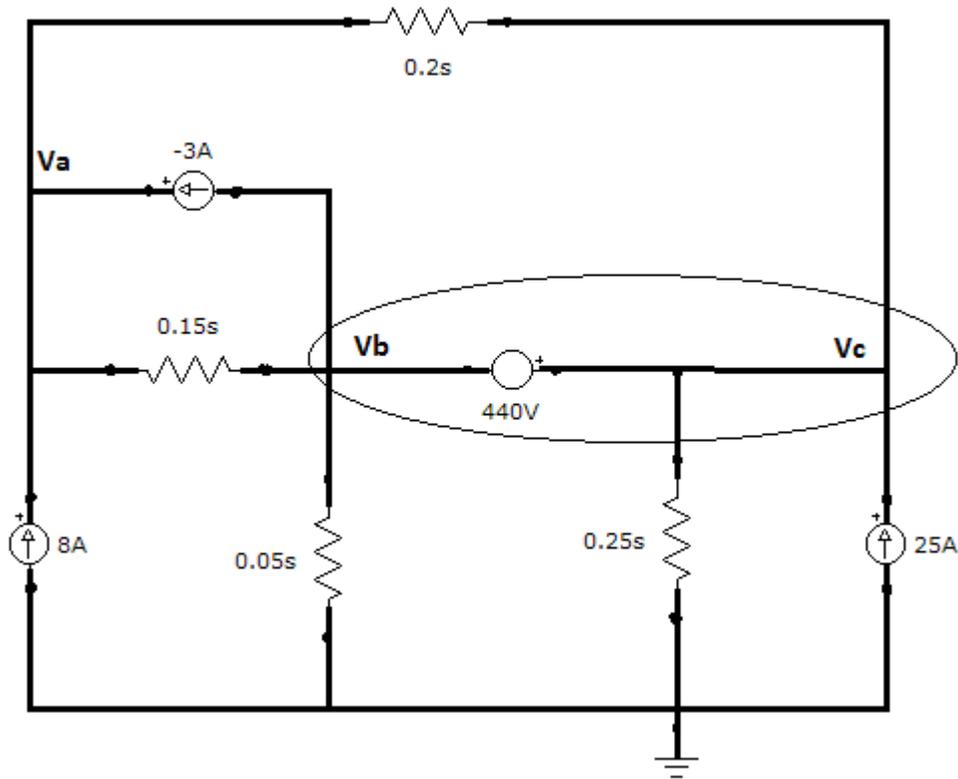
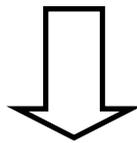


Figura 1.21. Con fuente independiente



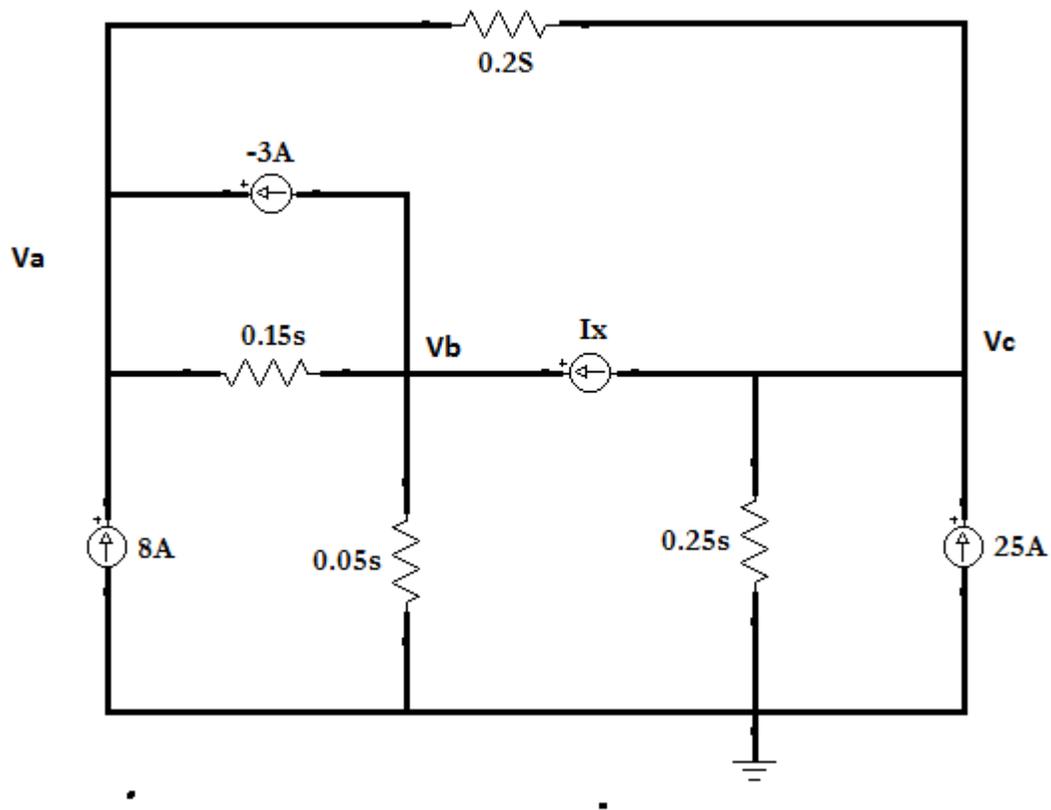


Figura.1.22. MNM.

Se ha reemplazado la fuente de 440 V por una fuente de corriente I_x la que se considera la misma que circula por la fuente de voltaje de 440 V. El circuito solamente contiene fuentes de corrientes.

Paso 1: Escribir ecuaciones nodales de MNM. Por este circuito, el MMN sólo requiere reemplazar temporalmente la fuente de tensión de 440 V por una fuente de corriente independiente, nombrada I_x . Esta I_x es la verdadera corriente que fluye a través de la fuente de 440V independiente (en el paso 2 se reintroduce la restricción de 440 V entre los nodos C y B inducida por esta fuente de tensión.). Esta sustitución resulta en el MMN como se muestra en la figura a continuación, aquí sólo contienen resistencias y fuentes de corriente independientes. Después del procedimiento, se obtienen las ecuaciones nodales siguientes:

Resolviendo las ecuaciones de nodos.

$$1. 0.35V_a - 0.15V_b - 0.2V_c = -11 \quad \dots (1.81)$$

$$2. -0.15V_a - 0.2V_b - I_x = 3 \quad \dots (1.82)$$

$$3. -0.2V_a + 0.45V_c + I_x = 25 \quad \dots (1.83)$$

Paso 2: Escribir relación constitutiva del elemento del circuito original, que fueron sustituidas por fuentes de corriente independientes en el MNM. La relación constitutiva de la fuente de voltaje de 440V es:

$$V_c - 440 = V_b \quad \dots (1.84)$$

Paso 3. Escribir la ecuación en forma de matriz.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.35 & -0.15 & -0.2 & 0 \\ -0.15 & 0.2 & 0 & -1 \\ -0.2 & 0 & 0.45 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \\ I_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 3 \\ 25 \\ 440 \end{pmatrix}$$

Resolviendo: $V_a = -90 \text{ V}$

$$V_b = -310 \text{ V}$$

$$V_c = -130 \text{ V}$$

$$I_x = -51.5 \text{ A}$$

Se puede observar que la matriz resultante del MNM es de mayor dimensión que la del método de supernodo. Podría preguntarse si existe alguna ventaja para el MMN. La respuesta es, sí. En primer lugar, el método de supernodo, como se ha descrito anteriormente, se basa en la inspección de reconocimiento del supernodo. En segundo lugar, el MMN es sistemático y de fácil adaptación a la aplicación informática.

- No existe la necesidad de el supernodo

- El método de MNM es sistemático y es de fácil programación, nótese que las ecuaciones se hallan directamente
- Se puede apreciar la importancia de la ecuación $V_c - 440 = V_b$ donde se introduce nuevamente la fuente ideal de voltaje

Ejemplo con fuente dependiente

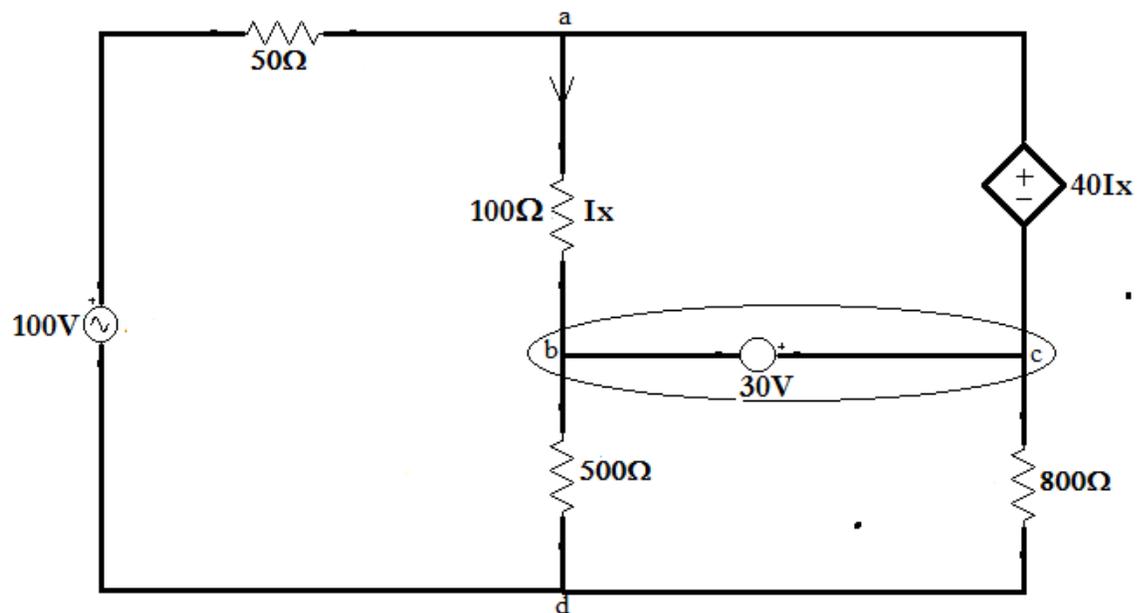


Figura 1.23. Circuito con fuente dependiente.



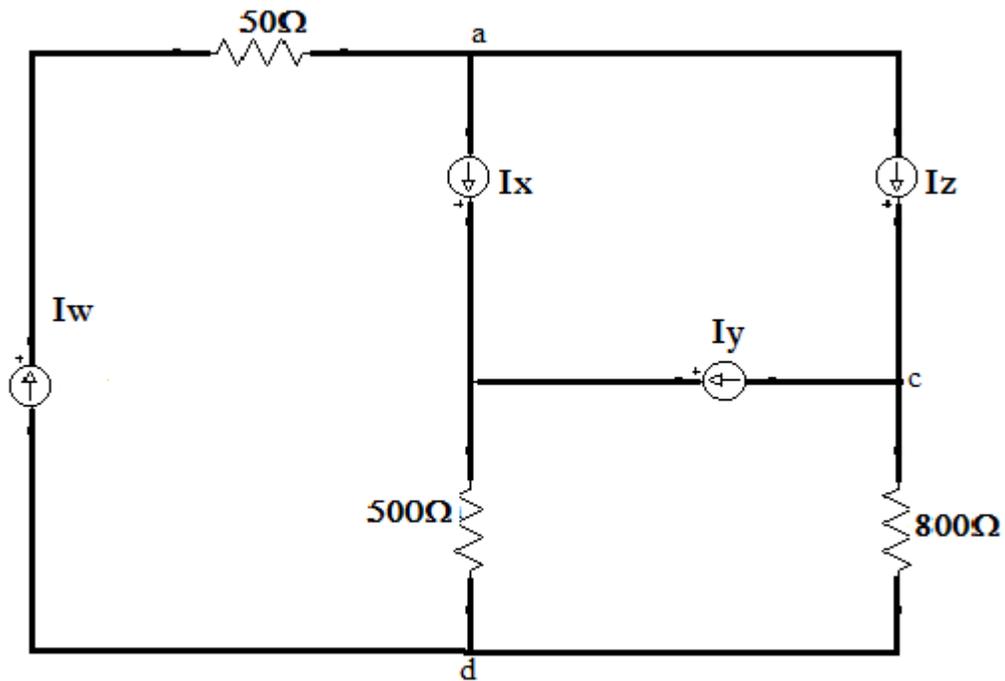


Figura 1.24. MNM en circuito con fuente dependiente.

Se ha reemplazado la fuente dependiente e independiente de voltaje por una fuente de corriente I_w , I_y , e I_z . En adición a esto, se ha reemplazado la rama asociado con la fuente dependiente de voltaje por la fuente independiente I_x , y ahora se puede escribir la ecuación de nodo modificado.

Ecuación del Método de Nodo Modificado

Paso 1.

$$I_w + 0.02(V_e - V_a) = 0.02V_e - 0.02V_a + I_w = 0 \quad \dots (1.85)$$

Nodo a:

$$0.02(V_a - V_e) + I_x + I_z = 0 \quad \dots (1.86)$$

Nodo b y c:

$$0.002V_b - I_x - I_y = 0 \quad \dots (1.87)$$

$$0.00125V_c + I_y + I_z = 0 \quad \dots (1.88)$$

Paso 2. Escribiendo la relación constitutiva por el elemento del circuito original, o sea, lo que se reemplazó por una fuente independiente en nodo modificado, entonces la relación constitutiva de 110V de la fuente independiente de voltaje será:

$$\diamond V_e = 110V$$

Mientras que con la fuente independiente de 30V

$$\diamond -V_b + V_c = 30 \quad \dots (1.89)$$

Y de la fuente dependiente:

$$\diamond V_a - V_c - 40I_x = 0 \quad \dots (1.90)$$

Por último, la fuente de corriente de la rama de I_x

$$\diamond V_a - V_b - 100I_x = 0 \quad \dots (1.91)$$

Aplicando Matlab o matices se obtiene que:

$$V_e = 110V, V_a = 100V, V_b = 50V, V_c = 80V, I_w = -0.2A, I_x = 0.5A, I_y = -0.4A,$$

$$I_y = -0.4A \text{ y } I_z = -0.3A$$

1.11 Consideraciones generales del capítulo

- Tanto el MCM como el MVN constituyen poderosas herramientas en la solución de circuitos eléctricos de topología compleja.
- Existen, además de los métodos tradicionales, otras formas o vías de solución aplicando los métodos generales de solución como son; el métodos de los voltajes de nodos y de las corrientes de mallas modificado.
- Mediante cierto artificio es posible aplicar el MCM a circuitos no planos.

CAPITULO 2. APLICACIONES ESPECIALES DE LOS MÉTODOS GENERALES Y LOS TEOREMAS.

2.1 Introducción

En la literatura existente los teoremas se enuncian, demuestran y usan cuando se requieren, es decir, aparecen de repente, como una forma de salir de una dificultad en el proceso de análisis de los circuitos eléctricos, es por esto que su posterior aplicación, es difícil y se debe buscar dentro de la literatura en extenso. Si se hubiera planeado el hacer una presentación sistematizada de todos ellos, bastaría buscar el apartado de teoremas dentro del conjunto sus aplicaciones a casos particulares. A continuación, se presentaran estos teoremas especificando en qué tipo de circuito se pueden usar y como se aplican (ejercicios y problemas resueltos). Se explica en qué casos y a qué tipo de circuito se aplica, sus ventajas, la demostración y al menos un ejemplo de aplicación.

2.2 Algunas falacias en los cursos de Circuitos Eléctricos

En este capítulo se presenta el análisis de las falacias más comunes que se presentan en el estudio de los circuitos eléctricos explicándose las bases teóricas de cada una de ellas. Algunas de ellas se presentan en los circuitos activos y otras en cualquier sección de los textos más comunes. Esto es de gran importancia ya que su estudio puede contribuir para un reanálisis de algunos tópicos que se estudian en los textos introductorios de los circuitos eléctricos, los que son tratados muy débilmente y sin mucha profundidad, aunque no se trata en la tesis de ser exhaustivos pues no es posible abarcar todos los casos que se conocen.

2.3 Principio de Superposición

Se comienza el estudio con la aplicación del Principio de la Superposición, que como se sabe se aplica en los circuitos lineales, es muy básico y aparecerá repetidamente en el

estudio y análisis de los circuitos lineales., incluso el hecho de no poder aplicar éste principio en los circuitos no lineales hace que sea tan difícil su solución.

El **Principio de Superposición** establece que la respuesta (voltaje o corriente deseada), en cualquier punto de un circuito lineal que tenga más de una fuente independiente, se puede obtener como la suma de las respuestas debidas a cada fuente independiente actuando sola.

Este teorema no ofrece grandes ventajas en la solución de redes sencillas, ya que otro método puede resultar más eficiente y rápido para solucionarlo. Sin embargo, su aplicación permite una visión física del comportamiento del circuito en cuanto a las diferentes respuestas cuando están actuando varios estímulos simultáneamente y a la vez permite la demostración de otros teoremas poderosos como los de Thevenin y Norton. La limitación de este principio es que sólo es aplicable a respuestas lineales. ^[13]

Sus **ventajas** son:

1. Permite la solución de redes lineales sin establecer un gran número de ecuaciones simultáneas, ya que se necesita considerar solo una fuente para cada solución independientemente.
2. Si se introducen nuevas fuentes en el circuito, no es necesario resolverlo desde el principio. Solamente habría que agregar la respuesta de la nueva fuente a la respuesta total.
3. Se ha generalizado el concepto de que al aplicar Superposición en un circuito lineal con fuentes dependientes, ésta no se puede eliminar sino que en todo caso hay que dejarla trabajar conjuntamente con el resto de las fuentes.

En el trabajo se demuestra que esto no es así exactamente y son simplemente advertencias y exhortaciones que se repiten en todos los textos:

Nunca desactive una fuente dependiente cuando aplique el Principio de Superposición a un circuito activo y lineal...

2.4 Demostración de la nueva aplicación del Principio de Superposición.

Aplicando superposición en el circuito que se muestra, violando la regla planteada anteriormente, es decir considerando la fuente dependiente como independiente, representada como $i_c = 0.5 V_x$ y en las ecuaciones sólo se utilizará i_c .

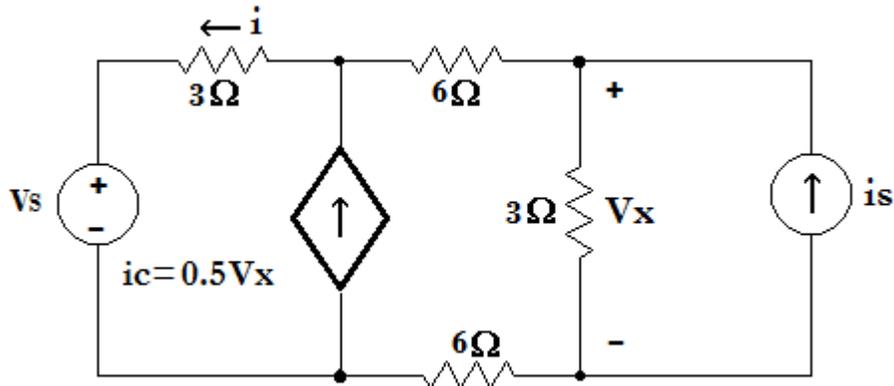


Figura 2.1

En este caso la regla anterior será violada y las ecuaciones encontradas al aplicar superposición serán:

$$V_x = V_s / 6 + i_c / 2 + 2.5 I_s \quad \dots (2.1)$$

$$I = - V_s / 18 + (5/6) i_c + 0.1666 I_s \quad \dots (2.2)$$

$$i_c = 0.5 V_x \quad \dots (2.3)$$

Cabe destacar, y es muy importante, que se ha computado la variable de control y la de interés aplicando Superposición.

El próximo paso es trabajar con la fuente dependiente y sustituir en (2.3) el valor de V_x hallado en (2.1), encontrándose.

$$i_c = V_s / 9 + (5/3) I_s \quad \dots (2.4)$$

Sustituyendo en (2.2) el valor de i_c hallado en (2.4) queda que

$$I = V_s / 27 + (28/18) I_s \quad \dots (2.5)$$

Se puede demostrar, usando el método tradicional que el valor de I es el hallado en (2.5), con lo que concluye que se puede desactivar la fuente dependiente al aplicar el Principio de Superposición mediante los siguientes pasos:

- **Considere solamente en las ecuaciones el símbolo de la fuente (i ó v),**
- **Compute las variables de control y las variables que se piden en el ejercicio**
- **Considere el verdadero valor de la fuente dependiente y exprese sus variables dependientes en términos de las variables desconocidas y de las variables de las fuentes independientes.**

A continuación se muestra un ejemplo:

El circuito de la figura 2.2 contiene una fuente dependiente. Halle el valor de I considerando la fuente como independiente

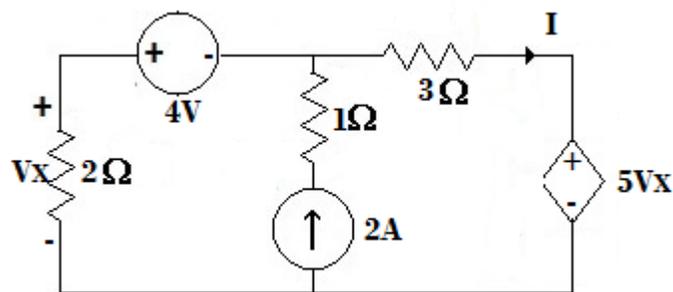


Figura 2.2

Aplicando el Principio de Superposición usando las formas tradicionales $I = 4 \text{ A}$

Efecto de la fuente de 4 volts

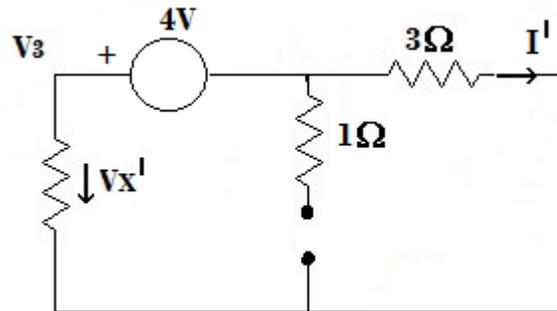


Figura 2.3

$$I' = -4/5 \text{ A} , V_{x'} = 8/5 \text{ V}$$

Efecto de la fuente de 2 A

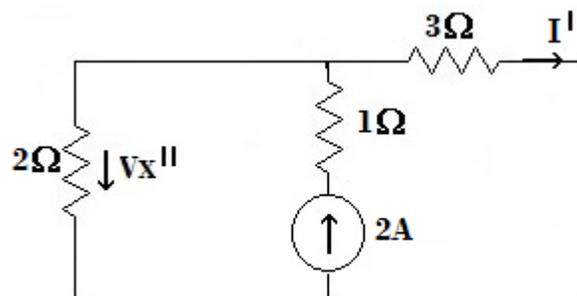


Figura 2.4

$$I'' = 4/5 \text{ A} \quad V_{x''} = 12/5 \text{ V}$$

Efecto de la fuente dependiente V

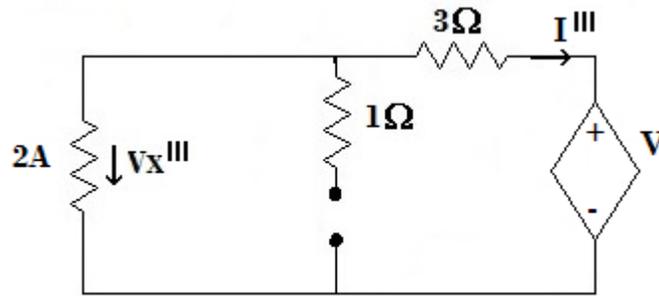


Figura 2.5

$$I^{III} = -V / 5 \text{ A} \quad V_{x^{III}} = 2V / 5 \quad \dots (2.6)$$

Sumando los efectos.

$$I = -4/5 + 4/5 - V/5 = -V/5 \quad \dots (2.7)$$

$$V_x = 8/5 + 12/5 + 2V/5 = 20/5 + 2V/5 \quad \dots (2.8)$$

Sustituyendo el valor de $V = 5 V_x$.

$$V_x = 4 + 2(5V_x / 5) = 4 + 2 V_x \quad \dots (2.9)$$

$$- V_x = 4 \text{ entonces sustituyendo en } I = -V/5 = -5 V_x / 5 = 4 \text{ A} \quad \dots (2.10)$$

2.5 Nueva forma de aplicación del MVN.

Dado la cantidad de estudios realizados sobre el MVN, se podría pensar que no faltaba nada por decir sobre el mismo, sin embargo el siguiente análisis dice que lo planteado es erróneo.

El circuito que se muestra se resolverá por el MVN donde $i_c = g_m V_x$ la cual será tratada como una fuente independiente.

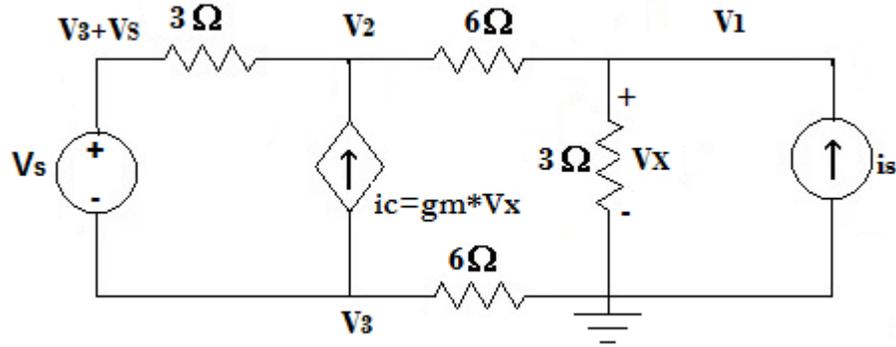


Figura 2.6

Sean las ecuaciones

$$\frac{V_1}{3} + \frac{V_1 - V_2}{6} = I_s \quad \text{Nodo 1} \quad \dots (2.11)$$

$$\frac{V_2 - V_1}{6} + \frac{V_2 - (V_3 + V_s)}{3} - i_c \quad \text{Nodo 2} \quad \dots (2.12)$$

$$\frac{V_3 + V_s - V_2}{3} + \frac{V_3}{6} + i_c = 0 \quad \text{Nodo 3} \quad \dots (2.13)$$

Lo que resulta de interés son las formas generales de las ecuaciones: Todos los términos son combinaciones lineales de los voltajes de nodos y de los valores de las fuentes. De hecho ésta característica del circuito, de producir variables que son combinaciones lineales de todas las variables de todas las fuentes variables es lo que permite la desactivación de fuentes de corrientes cuando usamos superposición. Ellas tienen la forma:

$$f(V_1, V_2, V_3, V_s, i_c, i_s) = 0 \quad \dots (2.14)$$

Donde f es una función multilineal de los argumentos de la variable lo que significa que las ecuaciones de nodo tienen la forma genérica:

$$f(V_1, V_2, V_3, 0, 0, 0) + f(0, 0, 0, V_s, i_c, i_s) = 0 \quad \dots (2.15)$$

El primer término se puede interpretar como la suma de las corrientes alejándose del nodo debido a la acción de los voltajes de nodo solamente, con las fuentes desactivadas y el segundo como la suma de las corrientes alejándose del nodo debido a la acción de las fuentes solamente lo que arreglándola quedará como:

$$f(V_1, V_2, V_3, 0, 0, 0) = - f(0, 0, 0, V_s, i_c, i_s) \quad \dots (2.16)$$

Es decir, la suma de las corrientes que abandonan el nodo debido a la acción de los voltajes de nodo solamente, con las fuentes desactivadas, es igual a la suma de las corrientes que entran al nodo bajo la influencia de las fuentes solamente, forzando los voltajes de nodos a ser iguales a cero. La primera parte de estas dos interpretaciones puede llamarse el equivalente desactivado y la segunda el equivalente forzado.

Estos dos circuitos se muestran en las figuras a continuación:

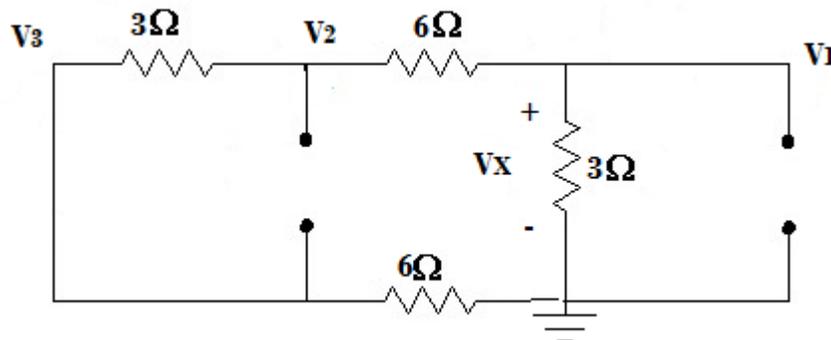


Figura: 2.7 Circuito desactivado equivalente

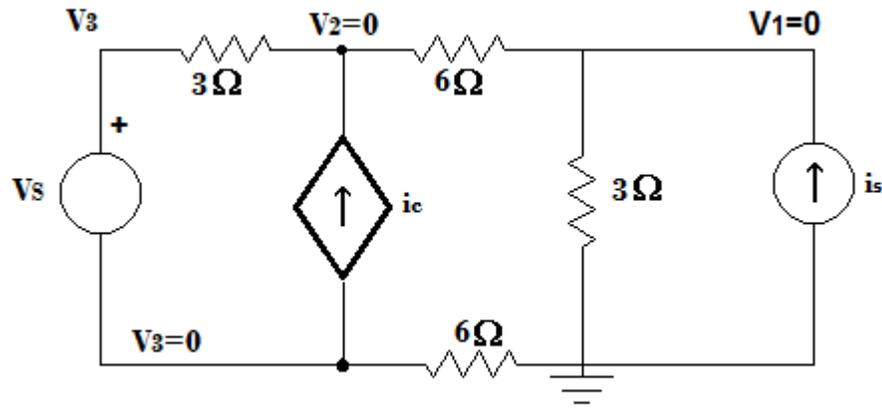


Figura: 2.8 Circuito forzado equivalente

En forma matricial la parte izquierda de la ecuación (2.16) se puede escribir como se muestra en la ecuación (2.17)

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} + \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} + \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad \dots (2.17)$$

La generalización a más de tres nodos es óbvio que se puede hacer por simple inspección.

Lo que no es tan óbvio ni muy conocido es que la parte derecha de la ecuación (2.16) pueda ser escrita por inspección del circuito forzado usando la interpretación dada.

El resultado es:

$$\begin{bmatrix} i_s \\ \frac{V_s}{3} + i_c \\ \frac{V_s}{3} - i_c \end{bmatrix} \quad \dots (2.18)$$

Uniando estos dos resultados y usando la forma matricial de la ecuación (2.16) se tiene que:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_s \\ \frac{V_s}{3} + g_m V_1 \\ -\frac{V_s}{3} - g_m V_1 \end{bmatrix} \quad \dots (2.19)$$

Es necesario recordar que la fuente dependiente se usa como \dot{I}_c por lo que la ecuación (2.19) es extensible al caso general de un circuito con n nodos con fuentes independientes.

Ejemplo

En el circuito que se muestra, hallar las ecuaciones para resolver aplicando el MVN

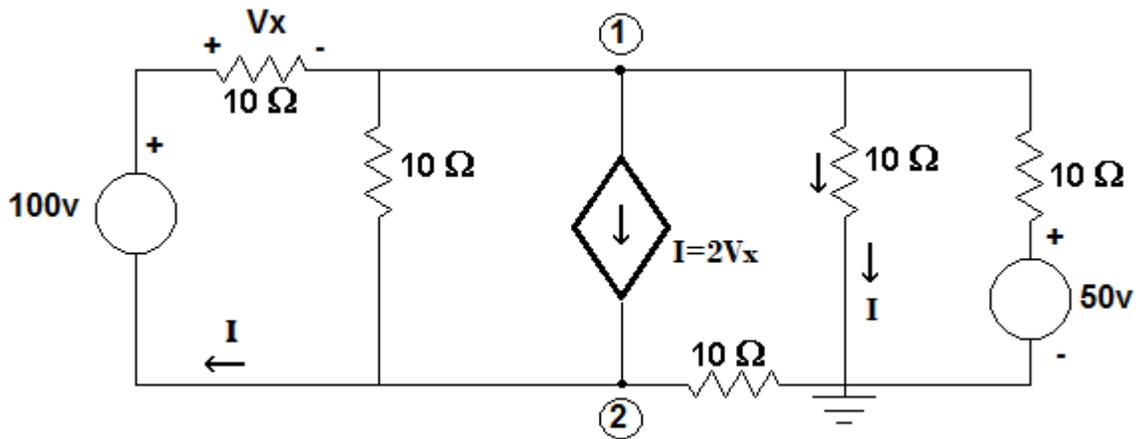


Figura 2.9

Sean las ecuaciones halladas aplicando el método tradicional

Circuito forzado:

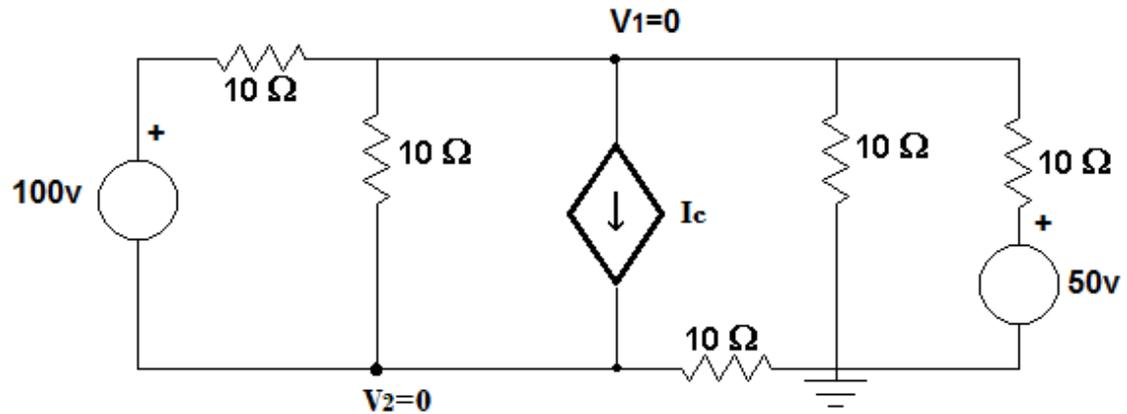


Figura 2.11

Ecuaciones:

$$\frac{-100}{10} - \frac{50}{10} + I_c \quad \dots (2.25)$$

$$\frac{+100}{10} - I_c \quad \dots (2.26)$$

$$\dots (2.27)$$

Combinando las ecuaciones:

A partir de las ecuaciones anteriores se llega a la conclusión que coinciden, por tanto:

$$V_1 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \right) - V_2 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10} \right) = \frac{100}{10} + \frac{50}{10} - I_c \quad \dots (2.28)$$

$$-V_1 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10} \right) + V_2 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \right) = \frac{-100}{10} + I_c \quad \dots (2.29)$$

2.6 Aplicación nueva sobre la inductancia mutua utilizando el método de los voltajes de nodos como vía de solución.

En la solución de circuitos con inductancia mutua, normalmente no se aplica el método de los nodos independientemente de que existe esa posibilidad. Hasta ahora esto se hacía casi que imposible dada la complicación matemática de las ecuaciones, lo que demoraba excesivamente la solución, en la actualidad con la utilización de la computadora y de poderosas herramientas (Matlab) esto se hace mucho más fácil, desapareciendo la limitación anterior en la aplicación del método.

Al desaparecer esta limitación el método resulta ser completamente general, válido para cualquier tipo de circuito lineal sin restricción en los elementos que lo componen lo cual lo hace aún más poderoso en la solución de redes eléctricas por computadoras.

Conviene recordar que este método no es más que una forma sistemática de plantear la Ley de Kirchhoff para corrientes, en función de los voltajes de los nodos respecto a uno cualquiera tomando como referencia, las admitancias de las ramas y las fuentes de energía.

En forma matricial, esta representación será:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{I}_i \\ \mathbf{I}_j \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{I}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11} \dots \mathbf{Y}_{1i} \dots \mathbf{Y}_{1j} \dots \mathbf{Y}_{1n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{Y}_{i1} \dots \mathbf{Y}_{ii} \dots \mathbf{Y}_{ij} \dots \mathbf{Y}_{in} \\ \mathbf{Y}_{j1} \dots \mathbf{Y}_{ji} \dots \mathbf{Y}_{jj} \dots \mathbf{Y}_{jn} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{Y}_{n1} \dots \mathbf{Y}_{ni} \dots \mathbf{Y}_{nj} \dots \mathbf{Y}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{U}_i \\ \mathbf{U}_j \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{U}_n \end{bmatrix} \quad \dots (2.30)$$

donde:

I_i : Suma algebraica de las corrientes que por fuentes de corrientes llegan al nodo i .
 Y_{ii} : Admitancia propia, suma de las admitancias de cada una de las ramas conectadas al nodo i . Siempre es positivo.

Y_{ij} : Admitancia mutua, suma de las admitancias de cada una de las ramas conectadas entre los nodos i y j . Siempre es negativa.

U_i : Voltaje del nodo i respecto al de referencia.

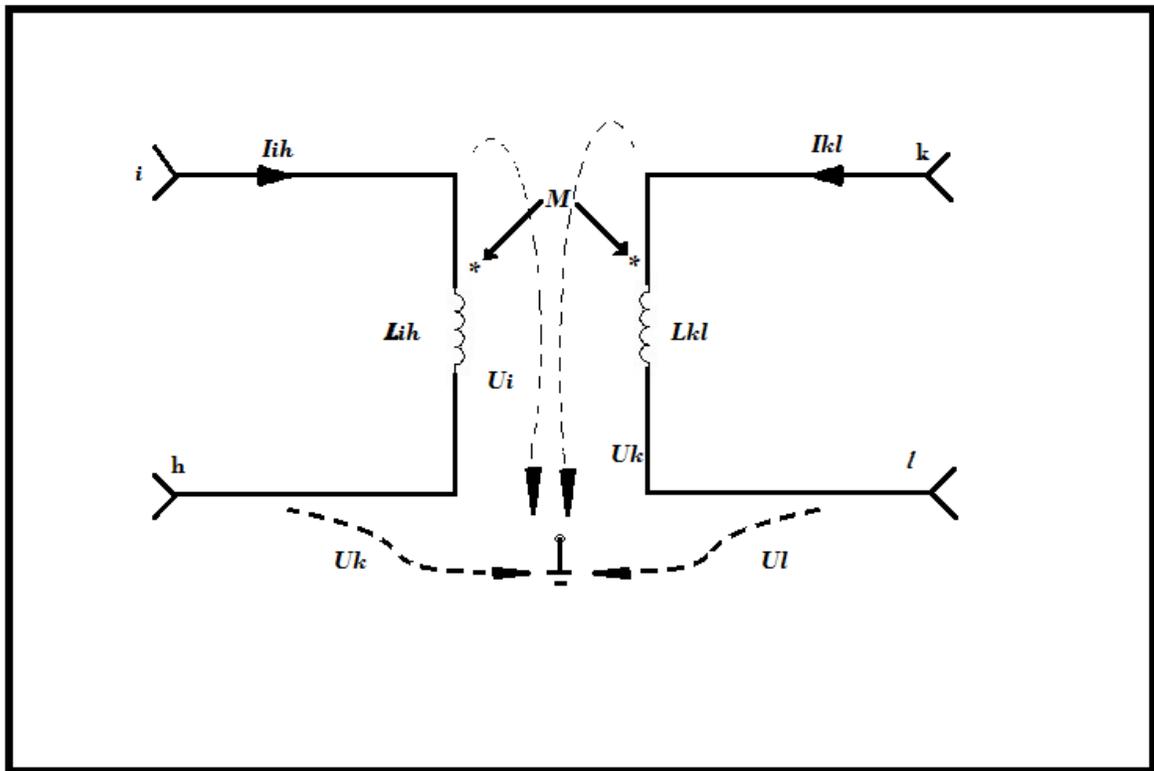


Figura 2.12

En la figura se representan dos inductancias acopladas, tales que el coeficiente de acoplamiento no es uno y no tiene pérdidas, es decir, las resistencias se suponen pertenecientes a otras ramas. En general

$$U_i - U_h = j\omega L_{ih} I_{ih} + j\omega M I_{kl} \quad \dots (2.31)$$

$$\mathbf{U}_k - \mathbf{U}_l = \mathbf{jWM} \mathbf{I}_{hl} + \mathbf{jWLk} \mathbf{I}_{kl} \quad \dots (2.32)$$

Como se observa de las ecuaciones (2.31) y (2.32): no se pueden expresar en forma directa la corriente de rama en función de los voltajes de los nodos, y la diferencia de potencial en cada inductancia depende de dos corrientes.

Entonces, planteando el sistema a continuación:

$$\mathbf{I}_{ih} = \frac{\mathbf{jWLk}(U_i - U_h) - \mathbf{jWM}(U_k - U_l)}{(\mathbf{jW})^2(\mathbf{Lih} \ \mathbf{Lkl} - \mathbf{M}^2)} \quad \dots (2.33)$$

$$\mathbf{I}_{kl} = \frac{\mathbf{jWLih}(U_k - U_l) - \mathbf{jWM}(U_i - U_h)}{\mathbf{C}} \quad \dots (2.34)$$

$$\mathbf{C} = (\mathbf{jW})^2(\mathbf{Lih} \ \mathbf{Lkl} - \mathbf{M}^2) \quad \dots (2.35)$$

La ecuación (2.33) por ejemplo significa que la corriente que sale del nodo i por la rama i - h tiene componentes que dependen de los voltajes de los nodos i, h, k y l.

Igualmente ocurre con I_{kl}. Con respecto a los nodos h y l los términos correspondientes en sus ecuaciones se obtienen si se tiene en cuenta que:

$$\mathbf{I}_h = -\mathbf{I}_i \ ; \ \mathbf{I}_l = -\mathbf{I}_k \quad \dots (2.36)$$

Representando los términos en forma matricial y manipulando algebraicamente

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_i \\ \mathbf{I}_h \\ \mathbf{I}_k \\ \mathbf{I}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{YA} & -\mathbf{YA} & \mathbf{YM} & -\mathbf{YM} \\ -\mathbf{YA} & \mathbf{YA} & -\mathbf{YM} & \mathbf{YM} \\ \mathbf{YM} & -\mathbf{YM} & \mathbf{YB} & -\mathbf{YB} \\ -\mathbf{YM} & \mathbf{YM} & \mathbf{YB} & \mathbf{YB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_i \\ \mathbf{U}_h \\ \mathbf{U}_k \\ \mathbf{U}_l \end{bmatrix} \quad \dots (2.37)$$

Donde:

$$Y_A = \frac{-j L_{kl}}{(L_{ih} L_{kl} - M^2)} \quad \dots (2.38)$$

$$Y_B = \frac{-j L_{ih}}{W(L_{ih} L_{kl} - M^2)} \quad \dots (2.39)$$

$$Y_M = \frac{JM}{W(L_{ih} L_{kl} - M^2)} \quad \dots (2.40)$$

En el caso más general los términos de las ecuaciones (2.38), (2.39) y (2.40) son los que se añaden en la matriz admitancia producto de las inductancias acopladas, aquí se deben hacer las siguientes observaciones.

1. Que los términos que aparecen en función de las ecuaciones (2.38) y (2.39) no dependen de la inductancia mutua, por lo tanto se escriben con el signo mostrado.
2. Los términos que aparecen en función de la ecuación (2.40) dependen de la inductancia mutua, por lo que con respecto al signo debe tenerse en cuenta que

Los términos que correspondan en la matriz con los dos nodos de marca o los dos nodos de no marca son positivos. Los términos que dependen de los terminales de marca en una inductancia y no marca en la otra son negativos.

Si alguno de los nodos es el de referencia, se elimina de la matriz la fila y la columna correspondiente, ya que al nodo de referencia se le asigna voltaje cero y la ecuación de este nodo no es independiente, sino la combinación lineal de las restantes por lo que puede eliminarse.

A partir de las expresiones (2.38), (2.39) y (2.40)

Resulta justificado que cuando se trata de resolver manualmente un circuito con inductancia mutua no se utilizara el método de los nodos, ya que por el de mallas o Kirchhoff las expresiones y reglas a recordar son mucho más simples.

Sin embargo, por la importancia que alcanzan actualmente las técnicas de computación digital se han producido cambios importantes en los enfoques y procedimientos a utilizar, por lo que cobra particular interés la utilización del método de los nodos con INDUCTANCIA MUTUA.^[14]

2.7 Teorema de Thevenin

El teorema de Thevenin debe su nombre al ingeniero telegrafista francés E. León Thevenin, quien en 1883, en *Annales Télégraphiques*, formuló el teorema de la siguiente manera:^[6]

$$\mathbf{i} = \frac{\mathbf{V} - \mathbf{V}}{\mathbf{r} + \mathbf{R}} \quad \dots (2.41)$$

La declaración anterior cubre solamente el caso de corriente directa constante y debe ser entendido de la siguiente manera: si una resistencia lineal R_L (carga) es conectada entre dos puntos de una red de resistencias lineales con cualquier número de fuentes independientes, la corriente a través de R_L puede ser encontrada reemplazando el resto de la red por un circuito equivalente que consiste en una fuente de tensión independiente en serie con una resistencia. La tensión de la fuente será igual a la tensión de circuito abierto a través de los terminales de carga cuando la carga ha sido desconectada de la red y la resistencia es la resistencia interna de la red que se observa desde los terminales de carga con todas las fuentes independientes igualadas a cero.

Cuando el concepto de impedancia fue introducido en la Ingeniería Eléctrica, el teorema de Thevenin fue generalizado al caso del estado sinusoidal constante, o lo que se conoce como corriente alterna.

Muchos autores en la literatura enuncian el teorema de Thevenin de diferentes maneras. Entre muchos otros ejemplos se tiene los siguientes:

a) “Supongamos que nos dan un circuito y que deseamos encontrar la corriente, voltaje o la potencia en alguna resistencia de la red a la cual le llamaremos carga. El teorema de Thevenin nos dice que podemos reemplazar toda la red, excluyendo la carga, por un circuito

equivalente que contenga sólo una fuente de voltaje independiente en serie con una resistencia de tal forma que la relación corriente-voltaje en la carga se conserve sin cambio.” [2]

b) “Todo dipolo activo lineal puede ser sustituido por una fuente real de tensión. El valor y la polaridad de la fuente son iguales a la tensión que existe entre los terminales del dipolo cuando este se encuentra en circuito abierto. El resistor conectado en serie con dicha fuente, tiene una resistencia igual a la equivalente entre los terminales del dipolo cuando se han desactivado todas las fuentes internas, o sea, cuando las fuentes de tensión se han sustituido por cortocircuitos y las de corrientes por circuitos abiertos”.

En la definición anterior se hace alusión a que cualquier red eléctrica de dos terminales, compuesta por resistencias lineales, puede ser reemplazada por una fuente de tensión E_0 en serie con una resistencia R_i , donde E_0 es la tensión a circuito abierto entre los dos terminales y R_i es la resistencia de la red cuando las fuentes son reducidas a cero.

En la definición anterior, el autor considera un circuito lineal, el cual se divide en dos redes eléctricas A y B conectadas por conductores ideales. Al separar la red B (carga) de A, entonces en los extremos de A aparecerá una diferencia de potencial V_{oc} o tensión a circuito abierto y todas las tensiones y corrientes en la red B permanecerán constantes si en A se anulan todas las fuentes independientes.

Desde cualquier punto de vista, todos los autores, incluso el propio Thevenin, concuerdan en que si se examina cualquier red desde un par de terminales, se sabe que, con respecto a esos terminales toda la red es equivalente a un circuito simple consistente en una fuente de tensión independiente en serie con una resistencia. Siendo la tensión de la fuente igual a la tensión a circuito abierto, o sea, la tensión entre los terminales cuando se excluye la carga de la red original y la resistencia coincide con la resistencia que se observa desde los propios terminales con las fuentes independientes anuladas. Este teorema es un resultado muy importante y constituye una herramienta muy potente en el análisis de circuitos eléctricos, tanto en corriente directa como en corriente alterna.

Cuando Thevenin expuso su teorema, Siglo XIX, no se conocían entonces, los modelos matemáticos (fuentes dependientes), por los que son representados, hoy en día, elementos

que surgieron en el siglo XX, como los transistores bipolares, de efecto de campo, amplificadores, entre otros. Sin embargo el teorema ha sido extendido, por diversos autores, al caso en que la red bajo análisis contenga elementos que se representan por fuentes dependientes o controladas. Para estos casos también es aplicable el teorema, pero se diferencia en la manera en que este se aplica.

2.7.1 Formas en las que se aplica el Teorema de Thevenin

Antes de entrar a analizar los posibles casos en los que el teorema de Thevenin es aplicado, es necesario definir y representar algunos términos que serán empleados.

Se denomina carga, en un circuito eléctrico, a aquella resistencia, en el caso de corriente directa, o a aquella impedancia, en el caso de corriente alterna, a la cual se le desea determinar la corriente que circula por ella y/o la tensión a través de sus terminales. La figura 2.36 muestra este concepto para el caso de corriente directa. ^[4]

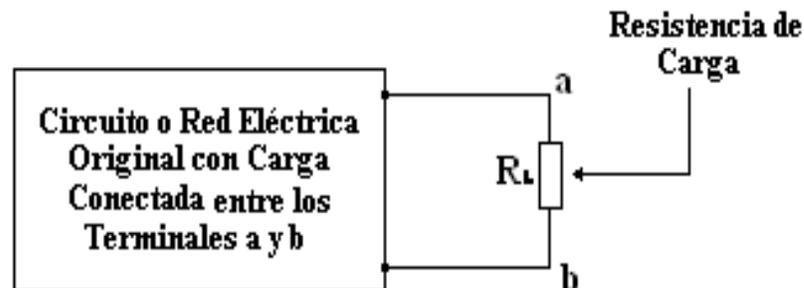


Figura 2.13 Circuito con resistencia R_L conectada a los terminales de carga a y b.

La figura 2.14 muestra el concepto de tensión a circuito abierto (V_{ca}), la cual no es más que la tensión que aparece entre los terminales de carga cuando esta se ha desconectado del resto de la red.

Cada uno de los casos anteriores tiene su modo particular de solución.

Caso 1. Si en la red original sólo existen fuentes independientes, el procedimiento para encontrar el circuito equivalente de Thevenin, entre dos terminales cualesquiera de la red, consiste en determinar la tensión entre los terminales sin carga, o sea, la tensión a circuito abierto (V_{ca}) o tensión de Thevenin (V_{Th}) y determinar la resistencia equivalente de Thevenin (R_{Th}) que se observa entre estos terminales, anulando todas las fuentes (las fuentes de tensión independientes cuando son anuladas se sustituyen por cortocircuitos y las de corrientes por circuitos abiertos). Para estos casos el circuito equivalente (fig. 2.16) consistirá en una fuente de tensión independiente, de valor V_{Th} , conectada en serie con una resistencia equivalente de valor R_{Th} .^[9]

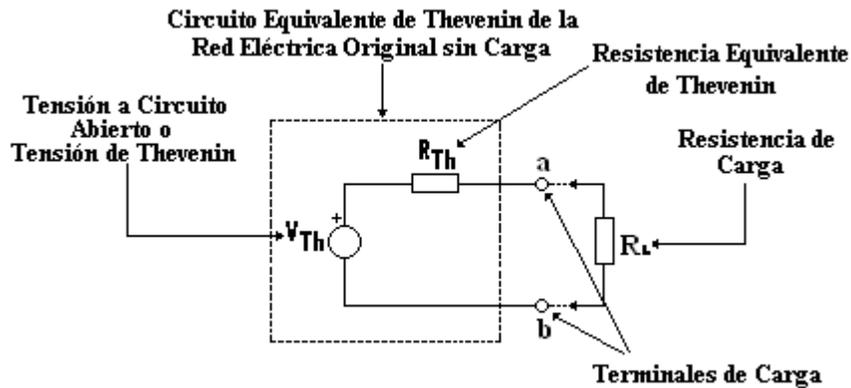


Figura 2.16. Circuito equivalente de Thevenin de una red que sólo contiene fuentes independientes (carga R_L conectada).

Caso 2. Si en la red original sólo existen fuentes dependientes, la tensión a circuito abierto y la corriente de cortocircuito (I_{cc}) o corriente de Norton (I_N) serán cero, por lo que la resistencia equivalente de Thevenin no se puede determinar por la relación:

$$R_{Th} = \frac{V_{Th}}{I_N} \quad \dots (2.42)$$

Como es una relación indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$. En estos casos se aplica una fuente independiente externa, de tensión (1 V) o de corriente (1 A), entre los terminales, y se determina, para el caso de la fuente de tensión, la corriente I que circula por ella. La resistencia equivalente de Thevenin será:

$$R_{Th} = \frac{1}{I} \quad \dots (2.43)$$

Para el caso de aplicar una fuente externa de corriente, lo que se halla es la tensión V a través de ella. La resistencia equivalente de Thevenin será:

$$R_{Th} = \frac{V}{1} \quad \dots (2.44)$$

Por tanto, el circuito equivalente de Thevenin para este caso será solamente la resistencia equivalente de Thevenin como muestra la figura 2.17 [8]

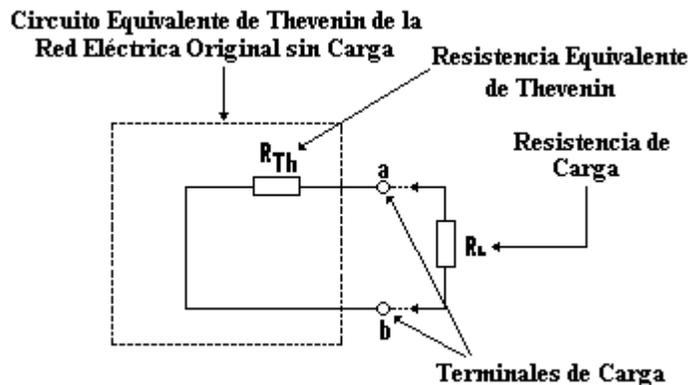


Figura 2.17 Circuito equivalente de Thevenin de una red que sólo contiene fuentes dependientes (carga R_L conectada).

Caso 3. Si en la red original están presentes los dos tipos de fuentes, el circuito equivalente de Thevenin es el mismo que en el caso 1 (fig. 2.16). La diferencia radica en la manera de encontrar la resistencia equivalente de Thevenin. Para este caso, la resistencia equivalente

de Thevenin se obtiene a partir de la expresión (2.42), es decir, se obtendrá a partir del cociente entre la tensión a circuito abierto (V_{ca}) o tensión de Thevenin (V_{Th}) y la corriente de cortocircuito (I_{cc}) o corriente de Norton (I_N).

2.8 Condiciones para aplicar el Teorema de Thevenin

En la sección anterior se expusieron los diferentes casos para los cuales el teorema de Thevenin es aplicado en dependencia de la estructura de la red original. Pero, cabe la pregunta, ¿existen condiciones de aplicación del teorema de Thevenin?

Como teorema al fin, este no está exento de restricciones, bien definidas todas por los autores en la literatura especializada en el tema. Muchos plantean y exigen, independientemente de que la carga sea lineal o no lineal, que para el uso del teorema de Thevenin en cualquiera de los tres casos vistos anteriormente, la red eléctrica original y la carga deben cumplir algunos requisitos, sin los cuales no se podría utilizar este teorema. Estos requisitos son:

- 1) La red eléctrica original, sin la carga, y que puede contener tanto fuentes dependientes como independientes, debe ser una red completamente lineal, es decir, todos los elementos circuitales que la componen deben ser elementos lineales. Dentro de los más conocidos están las resistencias, capacitores o condensadores y los inductores o bobinas.
- 2) Si la red eléctrica original contiene fuentes dependientes, el teorema no podrá ser aplicado a aquella parte del circuito donde se encuentren tanto la incógnita del problema como la variable de dependencia de la fuente dependiente. Es decir, no se podrá separar la variable de dependencia, de la cual depende una fuente dependiente en particular, de la porción de la red que contiene dicha fuente.

Los requisitos anteriores son los que se plantean en la literatura especializada y sobre la base de los cuales se ha desarrollado, utilizado y demostrado el teorema de Thevenin. Por cuanto, cuando se formule el teorema, deben exponerse también las condiciones sobre las que se puede utilizar. Sin embargo el teorema, desde el punto de vista de los autores de este análisis, no está completo, pues existe un requisito que no se ha tenido en consideración

desde los propios inicios del teorema ni por los subsiguientes autores que lo han tratado de manera eficiente.

2.9 ¿Será siempre aplicable el Teorema de Thevenin?

Para explicar lo que se pretende en este apartado se propone el análisis de los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1. Para la red eléctrica que se muestra en la figura 2.18, se desea encontrar el valor de la corriente I utilizando el teorema de Thevenin.

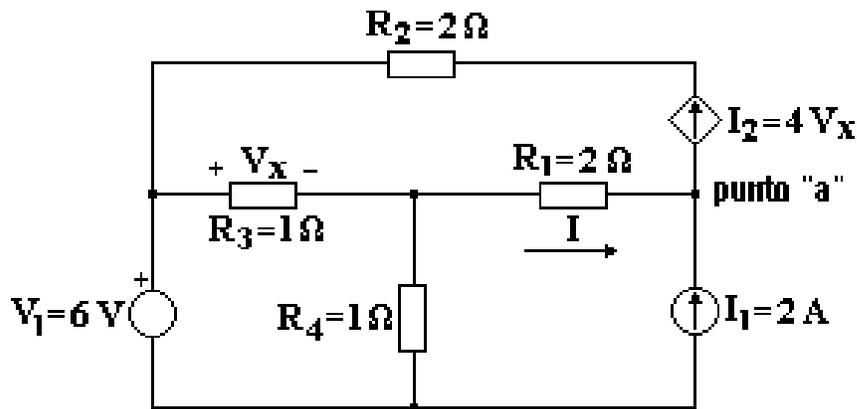


Figura 2.18 Circuito correspondiente al ejemplo 1.

Lo primero que se debe hacer es comprobar si las condiciones de aplicación del teorema se satisfacen:

- 1) La red eléctrica bajo estudio contiene una fuente dependiente (I_2) y dos fuentes independientes (I_1 y V_1) y es una red completamente lineal pues todos los elementos circuitales que la conforman son lineales (resistencias).

2) La red contiene una fuente de corriente dependiente de la tensión V_x a través de los terminales de la resistencia R_3 y la variable que se desea encontrar es la corriente I que circula por la resistencia R_1 . Por tanto la resistencia R_1 será la carga en este caso, y al desconectarla del circuito la dependencia entre la fuente dependiente y su variable permanece dentro de la red a analizar (fig. 2.19).

Como se ha observado las dos condiciones se cumplen, por lo que no existe ningún inconveniente para aplicar el teorema.

Después de comprobar si las condiciones se satisfacen, se procede a identificar el caso en cuestión. Como se observa en la figura 2.19 y se ha descrito con anterioridad, el circuito a analizar contiene los dos tipos de fuentes, por lo que la metodología que se desarrollará para su solución es similar al caso 3 explicado.

En la solución, primero se desconecta la carga del resto de la red y se determina la tensión a circuito abierto o tensión de Thevenin (fig. 2.19):

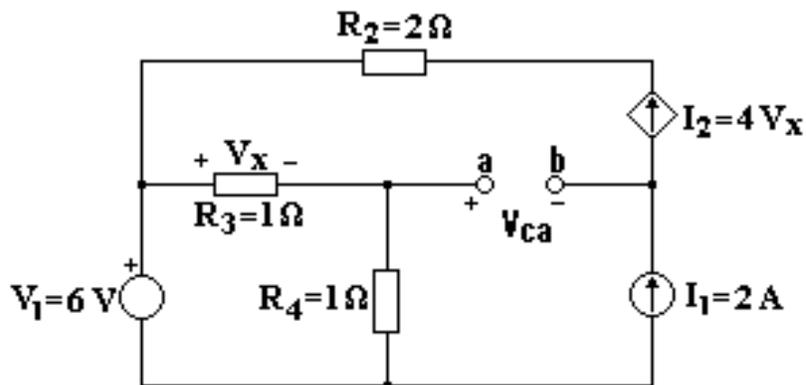


Figura 2.19 Circuito con carga desconectada y representación de la tensión a circuito abierto.

Al desconectar la carga del resto de la red el punto “a” en el circuito de la figura, deja de ser un nodo en la figura 2.19, esto hace que las fuentes de corriente I_1 e I_2 queden conectadas en serie, lo cual **no es posible**, debido a que solo pueden estar conectadas en

serie, teóricamente, si son iguales. Si no son iguales aparece, como en este caso, **una conexión absurda**.

En el caso de dos fuentes de corriente independientes, conectadas en serie y de diferente valor cada una, es evidente que la conexión que aparece es totalmente absurda. Cuando existen, como en este caso, una fuente de corriente dependiente en serie con una fuente de corriente independiente, la conexión absurda no resulta tan evidente. Se puede pensar que si las fuentes I_1 e I_2 están en serie, entonces ellas son iguales, por lo que entregarían la misma corriente. Esto se haría planteando que:

$$I_1 = I_2 \quad \dots (2.45)$$

De donde se obtiene que $V_x = 0.5V$.

O sea, se podría asumir que como las fuentes están en serie, ellas entregan la misma corriente, al igualarse se puede determinar la variable de dependencia de la fuente dependiente. Ahora es necesario comprobar si el valor obtenido para V_x es cierto o no.

Las resistencias de 1Ω (R_3 y R_4), al desconectar la carga del resto de la red, quedan conectadas en serie (fig. 2.19), por tanto se puede aplicar un divisor de tensión sencillo para determinar V_x .

$$V_x = 6 \cdot \frac{1}{1+1} = 3 V \quad \dots(2.46)$$

Como se aprecia, los resultados obtenidos para la variable de dependencia V_x **son totalmente diferentes**, por lo que se demuestra que no es posible realizar el análisis para encontrar la tensión a circuito abierto V_{ca} , quedando evidenciado que para casos como estos, donde desconectar la carga del resto de la red conduce a una **conexión absurda**, no es válido aplicar el teorema de Thevenin.

No solo al desconectar la carga y determinar la tensión a circuito abierto se pueden encontrar conexiones absurdas. También al cortocircuitar los terminales de carga para determinar la corriente de cortocircuito pueden aparecer conexiones absurdas.

Ejemplo 2. Dada la red eléctrica de la figura 2.20, se desea hallar el valor de la tensión V Utilizando el teorema de Thevenin.

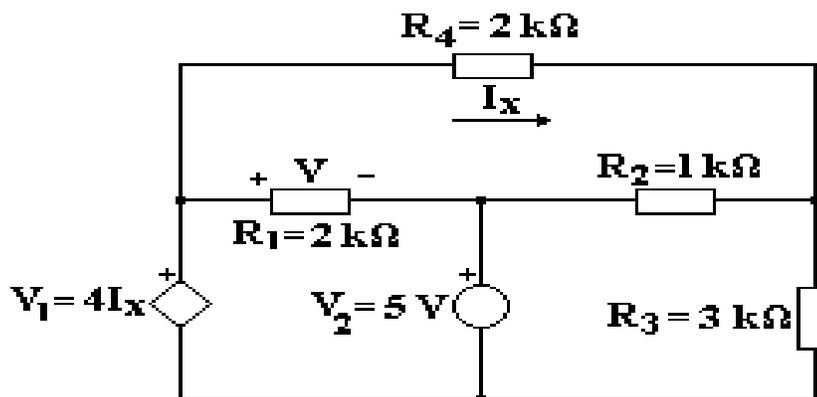


Figura 2.20 Circuito correspondiente al ejemplo 2.

Similar al ejemplo anterior, es necesario comprobar si las condiciones de aplicación del teorema se satisfacen:

- 1) La red eléctrica bajo estudio contiene una fuente dependiente (V_1) y una fuente independiente (V_2) y es una red completamente lineal pues todos los elementos circuitales que la conforman son lineales (resistencias).
- 2) La red contiene una fuente de tensión dependiente de la corriente I_x , que circula por la resistencia de R_4 , y la variable que se desea encontrar es la tensión V a través de los terminales de la resistencia R_1 . Por tanto la resistencia R_1 será la carga en este caso, y al desconectarla del circuito la dependencia entre la fuente dependiente y su variable permanece dentro de la red a analizar (fig. 2.21).

Después de comprobar que las condiciones se satisfacen, se procede a identificar el caso en cuestión. Como se observa en la figura anterior el circuito a analizar contiene los dos tipos

de fuentes, por lo que la metodología que se seguirá para su solución es similar al ejemplo 1 (caso 3).

En la solución, primero se desconecta la carga del resto de la red y se determina la tensión a circuito abierto o tensión de Thevenin.^[13]

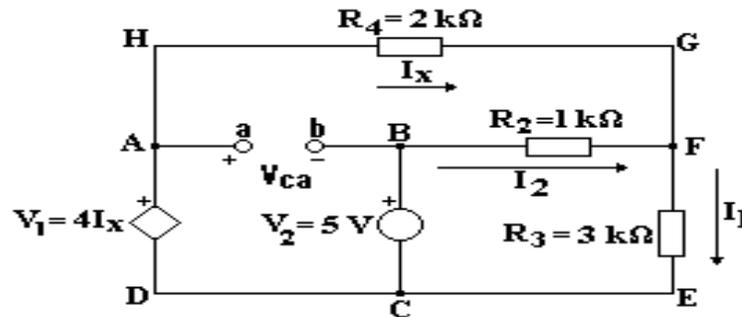


Figura 2.21 Circuito con carga desconectada y representación de la tensión a circuito abierto.

Al desconectar la carga del resto de la red, el circuito resultante no presenta ninguna conexión absurda. Es decir, no quedan fuentes de corrientes en serie ni fuentes de tensión en paralelo. Por tanto se puede determinar la tensión a circuito abierto sin dificultades. Para esto se usará la Ley de Kirchhoff de Voltaje (LKV) y la Ley de Kirchhoff de Corriente (LKC), a partir de la siguiente metodología.

Primero: Se escribe una LKV en la malla ABCDA.

$$V_1 - V_{ca} - V_2 = 0 \quad \dots (2.47)$$

Segundo: Se escribe una LKV en la malla DHGED.

$$V_1 - R_4 I_x - R_3 I_1 = 0 \quad \dots(2.48)$$

Donde:

$$2I_x - 3I_1 = 0 \quad \dots(2.49)$$

Tercero: Se escribe una LKV en la malla CBFEC.

$$V_2 - R_2 \cdot I_2 - R_3 \cdot I_1 = 0 \quad \dots (2.50)$$

Cuarto: Se escribe una LKC en el nodo F.

$$I_x + I_2 = I_1 \quad \dots (2.51)$$

Después de resolver el sistema de ecuaciones formado por (2.48), (2.49), (2.50) y (2.51), se obtiene que $v_{ca} = 7 \text{ V}$

Una vez determinada la tensión a circuito abierto se procede a hallar la corriente de cortocircuito, según la figura, para luego determinar la resistencia equivalente de Thevenin usando la expresión (2).

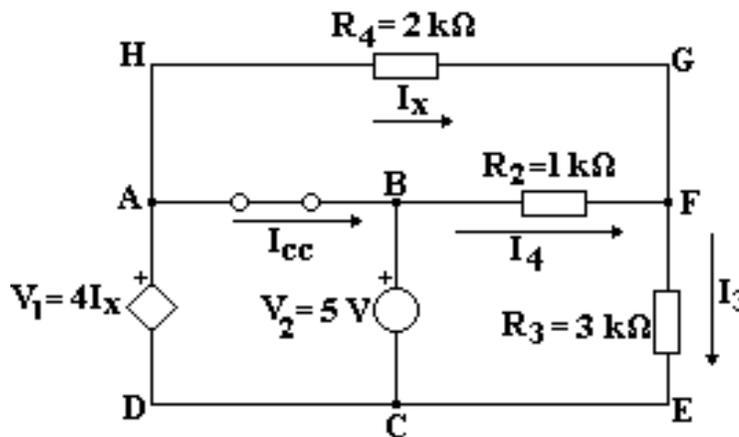


Figura 2.22. Circuito con carga desconectada y representación de la corriente de cortocircuito.

Al cortocircuitar los terminales de carga las fuentes de tensión V_1 y V_2 quedan conectadas en paralelo, lo cual **no es posible**, debido a que solo pueden estar conectadas en paralelo, teóricamente, si son iguales. Si no son iguales aparece, como en este caso, **una conexión absurda**.

En el caso de dos fuentes de tensión independientes, conectadas en paralelo y de diferente valor cada una, es evidente que la conexión que aparece es totalmente absurda. Cuando

existen, como en este caso, una fuente de tensión dependiente en paralelo con una fuente de tensión independiente, la conexión absurda no resulta tan evidente. Se puede pensar que si las fuentes V_1 y V_2 están en paralelo, entonces ellas son iguales, por lo que entregarían la misma tensión. Esto se haría planteando que:

$$V_1 = V_2 \quad \dots (2.52)$$

De donde se obtiene que $I_x = 1.25$ mA.

O sea, se podría asumir que como las fuentes están en paralelo, ellas entregan la misma tensión, de manera que al igualarse se determina la variable de dependencia de la fuente dependiente. Ahora es necesario comprobar si el valor obtenido para I_x es cierto o no:

Primero: Se escribe una LKV en la malla DHGED.

$$V_1 - R_4 \cdot I_x - R_3 \cdot I_3 = 0$$

donde ... (2.53)

$$2 \cdot I_x - 3 \cdot I_3 = 0$$

Segundo: Se escribe una LKV en la malla CBFEC.

$$V_2 - R_2 \cdot I_4 - R_3 \cdot I_3 = 0 \quad \dots (2.54)$$

Tercero: Se escribe una LKC en el nodo F.

$$I_x + I_4 = I_3 \quad \dots (2.55)$$

Después de resolver el sistema de ecuaciones formado por (2.53), (2.54) y (2.55), se obtiene que $I_x = 3$ mA.

Como se aprecia, los resultados obtenidos para la variable de dependencia I_x **son totalmente diferentes**, por lo que se demuestra que no es posible realizar el análisis para encontrar la corriente de cortocircuito I_{cc} , quedando evidenciado que para casos como estos, donde cortocircuitar los terminales de carga para hallar I_{cc} , conduce a una **conexión absurda**, no es válido aplicar el teorema de Thevenin.

En cualquiera de los ejemplos anteriores, no es posible determinar las variables en cuestión aplicando el Teorema de Thevenin. Sin embargo, usando cualquiera de las restantes técnicas de análisis de circuitos eléctricos lineales, los métodos generales: Análisis de Malla o Análisis Nodal o las propias Leyes de Kirchhoff, es posible hallarlas y darles una interpretación desde el punto de vista físico.

Ejemplos como los analizados existen, generalmente, en una gran infinidad de aplicaciones reales, lo cual puede ser catastrófico pues se podrían dañar equipos y componentes. Desde el punto de vista teórico-práctico se debe tener mucho cuidado a la hora de aplicar este importante teorema, pues, como se trata en la literatura especializada el teorema no está completo. Además de las dos condiciones señaladas se le debe agregar una tercera:

- 3) Al desconectar la carga del resto de la red, con vistas a determinar la tensión a circuito abierto y/o al cortocircuitar los terminales de carga, con vista a determinar la corriente de cortocircuito, el circuito resultante no debe contener ninguna conexión absurda. Entiéndase por conexión absurda aquellas que se forman cuando quedan conectadas, en serie, al menos dos fuentes de corriente de diferentes valores y, en paralelo, al menos dos fuentes de tensión de diferentes valores. ^[12]

2.10 Teorema unificado de Thevenin

Este método permite obtener simultánea y sistemáticamente la impedancia (Z_{th}) y la fuente de thevenin (V_{th}).

Se basan en el hecho de que si el circuito (el original y el de Thevenin) son equivalentes, deben producir los mismos efectos externos, es decir, si se conecta a ambos el mismo circuito externo, los resultados son idénticos. ^[3]

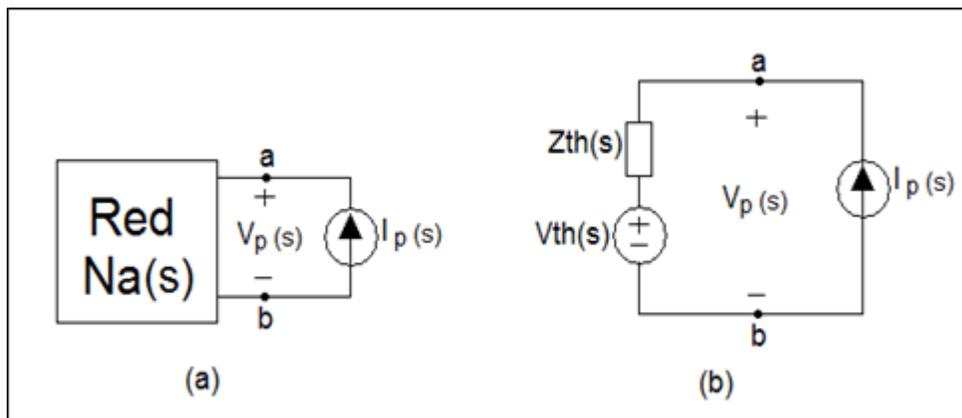


Figura 2.23 Equivalentes de Thevenin.

En la figura 2.23 se muestran ambos circuitos, a los que se ha conectado una fuente independiente de corriente como carga.

Al ser equivalente, $V_p(s)$ será el mismo en ambos

En la figura 2.23 (b), tomando una sumatoria de voltaje en el anillo (malla) se tiene:

$$-V_p(s) + Z_{th}(s)I_p(s) + V_{th}(s) = 0 \text{ por tanto } V_p(s) = Z_{th}(s)I_p(s) + V_{th}(s) \quad \dots (2.56)$$

Si se resuelve el circuito mostrado en la figura 2.23a) y se despeja $V_p(s)$ se tendrá una expresión de la forma:

$$V_p(s) = A I_p(s) + B \quad \dots (2.57)$$

Por simple comparación el primero de estos términos A es $Z_{th}(s)$ y el segundo B es $V_{th}(s)$.

Un ejemplo mostrará la facilidad del método, se realizará uno de los ejemplo del articulo como homenaje a los autores.

Determinar el equivalente de Thevenin entre los terminales a y b del circuito de la figura 2.24.

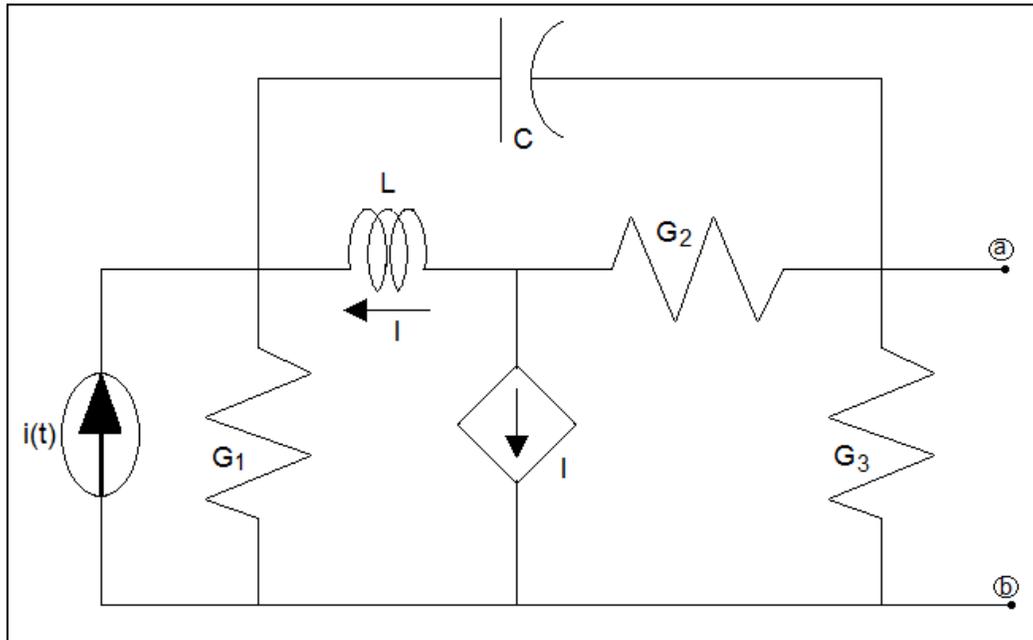


Figura 2.24

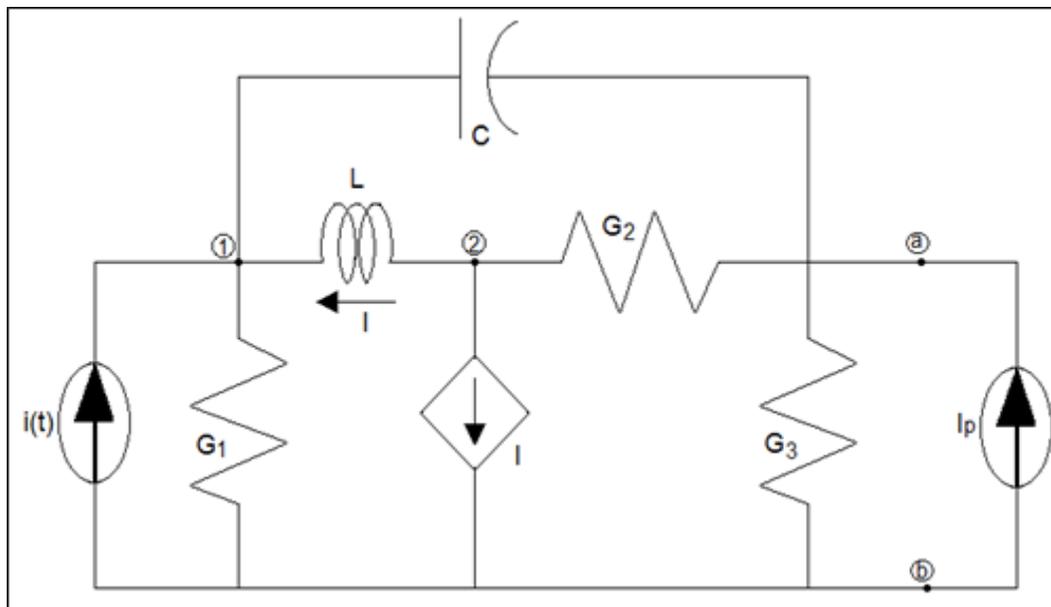


Figura 2.25. Ejemplo del teorema unificado de Thevenin

Solución:

Primero se aplica una fuente de corriente de prueba (I_p) entre los terminales a y b de la figura 2.25

Aplicando sumatoria de corriente en los nodo 1, 2 se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} (G_1 + 1/LS + CS) & -1/LS & -CS \\ 0 & G_2 & -G_2 \\ -CS & -G_2 & (G_2 + CS + G_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \\ V_a(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I(s) \\ 0 \\ I_p(s) \end{pmatrix}$$

Resolviendo para $V_a(s)$ se obtiene:

$$V_a(s) = (S^2LC + SG_1L + 1)I_p(s) + S^2LC(s) / \Delta(s) \quad \dots (2.58)$$

Organizando:

$$V_a(s) = (S^2LC + SG_1L + 1 / \Delta(s))I_p(s) + S^2LC / \Delta(s) I(s) \quad \dots (2.59)$$

Donde $\Delta(s) = S^2L(G_1C + G_3) + SG_1LG_3 + G_3 \quad \dots (2.60)$

De este modo se conocen $Z_{th}(s)$ y $V_{th}(s)$:

$$Z_{th}(s) = (S^2LC + SG_1L + 1 / \Delta(s)) \quad \dots (2.61)$$

$$V_{th}(s) = S^2LC / \Delta(s) \quad \dots (2.62)$$

2.11 Consideraciones generales del capítulo.

- Con los avances de las nuevas tecnologías es posible la aplicación de los métodos de los voltajes de nodos en circuitos con inductancia mutua.
- Existen determinados casos en que no es posible la aplicación del teorema de Thevenin lo que se conoce como conexiones absurdas.

Conclusiones

- En el trabajo se muestra los resultados de la recopilación bibliográfica realizada sobre los métodos generales de solución y teoremas aplicados en la solución de circuitos lineales.
- Contiene los métodos generales tradicionales y no tradicionales aplicados en la solución de circuitos eléctricos.
- Se evidencian los resultados de la aplicación de los métodos no tradicionales verificando su correspondencia con los resultados con métodos tradicionales y se argumentan las ventajas en la aplicación de estos, en lo fundamental, cuando se trata de la programación.
- Se muestran los circuitos, en los cuales, la aplicación del Teorema de Thevenin y Norton surgen las llamadas conexiones absurdas que imposibilitan la aplicación del teorema.
- Brinda una metodología para aplicar el método de las corrientes de mallas en los circuitos no planos, aspecto que no es tratado en pregrado.
- Se brinda una metodología para aplicar el método de los voltajes de nodos en circuitos acoplados magnéticamente, aspecto que no es tratado en pregrado.
- Como elemento novedoso se prueba la aplicación del Principio de la Superposición en circuitos con fuentes dependientes considerándola como independiente.

Recomendaciones

- Incluir los resultados encontrados en el material en el contenido de las conferencias, seminarios y clases prácticas impartidos en el curso regular diurno y el curso por encuentros.
- Continuar el estudio de los métodos no convencionales de solución de los circuitos eléctricos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. A.J. CONEJO, A. C., J.L. POLO, N. ALGUACIL. 2004. *Circuitos Eléctricos para la Ingeniería*. McGraw-Hill. Madrida.
2. ALVAREZ, R. J. A. 2006. implementación de un Tutorial en Matlab para Aplicación en la solución de ejercicio de circuito 1. Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas.
3. CHAN, L.-M. J. Y. S. P. 1989 TEOREMA UNIFICADO DE THEVENIN. 32.
4. DAVID IRWIN, J. 1997. *Análisis Básico de Circuitos en Ingeniería*. , Ed. Prentice-Hall, Inc., México.
5. J.W. NILSSON, S. A. R. 2005. *Circuitos Eléctricos*, Pearson Prentice Hall.
6. JAMES LEY, B., LUTS G., SAMUEL & REHBERG F., CHARLES 1963. *Linear Circuit Analysis*, Asociación de Estudiantes de Tecnología, New York University, USA.
7. LIN, R. A. D. C. A. P.-M. 2001. *Linear circuito analysis*, Perdue University.
8. NEAL P., J. 1960. *Electrical Engineering Fundamentals*. , McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, USA,.
9. OLIVERA, M. 1989. *Fundamentos de la Teoría de Circuitos I*. , Ed. Pueblo y Educación, Ciudad de La Habana, Cuba.
10. PARAMIO, J. B. C. A. F. T. 2007. método y teorema fundamentales de análisis.
11. WILLIAM H., H. J. E., KEMMERLY 1986. *Engineering Circuit Analysis*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, USA, .
12. WILLIAM H., H. J. E., KEMMERLY 1993. *Análisis de Circuitos en Ingeniería*. , McGraw-Hill Book Company, Inc., México, .
13. SOME FALLACIES IN THE CIRCUIT ANALYSIS COURSE. Artice M. Davis. Department of Electrical Engineering. San José Estate University. San José California 95192-0084.
14. AYLLÓN, E (1987). *Fundamentos de la Teoría de Circuitos Eléctricos II*. Impreso por el Combinado Poligráfico Haydée Santamaría: Pueblo y Educación.