

**MINISTERIO DE EDUCACIÓN SUPERIOR
UNIVERSIDAD CENTRAL "MARTA ABREU" DE LAS VILLAS
FACULTAD DE MATEMÁTICA, FÍSICA Y COMPUTACIÓN**



"CURVAS MARAVILLOSAS"

Trabajo de Diploma

**Autores: Raydel Rodríguez Estévez
Cindy Maybel Concepción López**

Tutora: Dra. C. Lucía Argüelles Cortés

**"Santa Clara, año 2011"
"Año 53 de la Revolución"**

DEDICATORIA

A:

Nuestros padres

Nuestros hermanos.

AGRADECIMIENTOS

A:

- Lucía por el apoyo y el conocimiento que nos proporcionó.
- Tamara quien nos ha guiado como una madre durante los cuatro años de la carrera.
- Nuestros amigos por su apoyo y comprensión.
- Sarah por la ternura que incorporó a nuestras vidas.
- Nuestros abuelos Maria Luisa, Pepe, Marisol, Blas, Margarita, Francelina y Francisco quienes nos han transmitido experiencia y amor.
- Nuestros compañeros de clases.
- Los profesores de la carrera de matemática que aportaron su granito de arena en nuestra formación como matemáticos y como personas.
- Los miembros del tribunal de la predefensa cuyas recomendaciones nos permitieron el perfeccionamiento de nuestro trabajo.
- Todos los que de una forma u otra han aportado a nuestra formación como profesionales.

SÍNTESIS

Esta investigación está dirigida al estudio de distintas familias de curvas planas, las cuales son:

- Funciones
- Secciones Cónicas
- Óvalos de Cassini
- Cisoides
- Concooides
- Espirales
- Ruletas
- Otras

Cada una de ellas cuenta con cierta cantidad de curvas que son analizadas según los siguientes criterios para clasificarlas como maravillosas o no:

• Historia

Surgimiento

Creador

Puntos de vista para clasificación

Justificación de la denominación “maravillosa”

• Descripción (caracterización)

Lugar geométrico

Ecuaciones paramétricas, cartesianas, en polares, implícita (forma de obtención)

Relación esencial con otras curvas (casos límites)

Propiedades esenciales (función o no, cerrada o no, etc.)

Gráfico (simetría, extensión, etc.)

• Curvas en la Naturaleza

Presentación natural, estilizada o como forma límite de otras.

• Aplicaciones

Aplicaciones teóricas o prácticas de la curva

Además se analizan, explican y ejemplifican todos aquellos conceptos que se consideran necesarios para la comprensión de la investigación, como por ejemplo la evoluta, la envolvente, etc.

A su vez se desarrolla una aplicación web que facilita el acceso a las distintas curvas desde diferentes puntos de vista garantizando así satisfacer las necesidades del usuario según sean sus características.

La aplicación web cuenta con la construcción animada en el MATHEMATICA (versión 6.0) de aquellas curvas que lo permiten, aclarando de esta manera la ingeniosa y compleja forma de construcción de las mismas y que de forma analítica se nos presentan con mayor grado de abstracción.

INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO I: CONCEPTOS PRELIMINARES	4
INTRODUCCIÓN	4
§1.1 Conceptos vinculados a la Geometría Analítica	7
1.1.1 Semejanzas entre razones trigonométricas e hiperbólicas.....	7
§1.2 Conceptos vinculados a la Gemoetría Diferencial	8
1.2.1 Longitud de arco	8
1.2.2 Recta tangente y recta normal	8
1.2.3 Podaria y antipodaria	9
1.2.4 Curvatura y radio de curvatura	10
1.2.5 Circunferencia osculatriz	11
1.2.5.1 Centro de curvatura (Centro de la circunferencia osculatriz)	11
1.2.6 Evoluta y evolvente	12
1.2.7 Envolvente.....	13
1.2.8 Inversión	14
RESUMEN DEL CAPÍTULO	14
CAPÍTULO II: CURVAS PLANAS MARAVILLOSAS	15
INTRODUCCIÓN	15
§2.1 Funciones	15
2.1.1 Origen de las funciones.....	15
2.1.2 Función afín.....	15
2.1.3 Función cuadrática.....	16
2.1.4 Parábola cúbica	17
2.1.5 Función de proporcionalidad inversa	17
2.1.6 Parábola semicúbica o de Neli	18
2.1.7 Funciones trigonométricas	19
2.1.8 Funciones exponenciales	19
2.1.9 Función logarítmica.....	19
2.1.10 Campana de Gauss	20
2.1.11 Funciones hiperbólicas	21
2.1.12 Catenaria	21
2.1.13 Versiera o curva de Agnesi	23
§2.2 Secciones Cónicas	25
2.2.1 Origen de las secciones cónicas	25
2.2.2 Secciones cónicas como lugar geométrico.....	26
2.2.2.1 Forma general de las secciones cónicas según su exentricidad	27
2.1.2.1.1 Parábola	27
2.2.2.2 Secciones cónicas a partir de dos focos.....	29
2.2.2.2.1 Elipse	29
2.2.2.2.1.1 Circunferencia, caso límite de la elipse	31

2.2.2.2.1.1	Construcción de la elipse a partir de circunferencias.....	33
2.2.2.2.2	Hipérbola.....	34
2.2.3	Ecuación polar de las secciones cónicas a partir de su excentricidad.....	36
2.2.4	Equivalencia entre las diversas formulas de hallar la excentricidad de las sección cónica.....	36
2.2.5	Aplicaciones generales de las secciones cónicas.....	37
§2.3	Óvalos de Cassini.....	37
2.3.1	Óvalos de Cassini como familia de curvas.....	37
2.3.1.1	Los óvalos de Cassini en relación con la hipérbola.....	38
2.3.2	Casos particulares de los óvalos de Cassini.....	38
2.3.2.1	Dos óvalos iguales geoméricamente.....	38
2.3.2.2	Lemniscata de Bernoulli.....	39
2.3.2.2.1	Otras construcciones de la Lemniscata de Bernoulli.....	40
2.3.2.3	Óvalo con talle.....	40
2.3.2.4	Óvalo con forma elíptica.....	40
2.3.3	Construcción de los óvalos de Cassini como secciones de un toro.....	41
§2.4	Las cisoides.....	41
2.4.1	Origen de las cisoides.....	41
2.4.2	Cisoide de Diocles.....	41
2.4.2.1	Otras generaciones de la cisoide de Diocles.....	41
2.4.2.1.1	Podaria de una parávola respecto a su vértice y la cisoide de Diocles.....	42
2.4.2.1.2	Entre dos rectas paralelas.....	42
2.4.3	Cisoide en sentido general.....	43
2.4.4	Otros casos particulares de cisoide.....	44
2.4.4.1	Lemniscata de Bernoulli.....	44
2.4.4.2	Estrofoide recto.....	44
2.4.4.3	Trisectriz de MacLaurin.....	45
§2.2	Concoides.....	46
2.5.1	Origen de las concoides.....	46
2.5.2	Concoide de Nicomedes.....	46
2.5.2.1	Concoide de Nicomedes, caso particular de cisoide.....	47
2.5.3	Concoide en sentido general.....	47
2.5.4	Otros casos particulares de concoide.....	47
2.5.4.1	Caracol de Pascal.....	47
2.5.4.2	Cardioide.....	48
§2.2	Espirales.....	49
2.6.1	Origen de las espirales.....	49
2.6.2	Descripción general de espiral.....	49
2.6.2.1	Espirales arquimedeanas.....	49
2.6.2.1.1	Espiral de Arquímedes.....	50
2.6.2.1.2	Espiral hiperbólica o recíproca.....	50
2.6.2.2	Espirales no arquimedeanas.....	50
2.6.2.2.1	Espiral logarítmica.....	51
2.6.2.2.2	Espiral aurea o de Durerol.....	52
§2.2	Ruletas.....	52
2.7.1	Ruletas cicloidaes.....	52
2.7.1.1	Epitrocoides.....	53

2.7.1.1.1	Epicloides ordinarias	53
2.7.1.1.1.1	Epicloide con un punto de retroceso (Cardioide).....	54
2.7.1.1.1.2	Nefroide.....	55
2.7.1.1.2	Epicloides alargadas y acortadas	55
2.7.1.2	Hipotrocoides.....	56
2.7.1.2.1	Hipocicloides ordinarias	56
2.7.1.2.1.1	Hipocicloide con dos cúspides	57
2.7.1.2.1.2	Deltoide	57
2.7.1.2.1.3	Astroide	57
2.7.1.2.2	Hipocicloides alargadas y acortadas	59
2.7.1.2.2.1	Otros casos particulares de hipocicloides alargadas y acortadas (Rosas) ..	59
2.7.1.3	Trocoides (Cicloides)	59
2.7.1.3.1	Cicloide ordinaria	59
2.7.2	Ruletas no cicloidales	60
2.7.2.1	Tractriz	61
§2.8	Otras	61
2.8.1	Espirales sinusoidales.....	61
2.8.2	Curvas de Lissajous.....	62
2.8.2.1	Principales casos particulares de las curvas de Lissajous	62
RESUMEN DEL CAPÍTULO	63
CAPÍTULO III: SISTEMA COMPUTACIONAL	65
INTRODUCCIÓN	65
§3.1	Generalidades de aplicación del sistema	65
§3.2	Ejemplos de aplicación del sistema.....	66
RESUMEN DEL CAPÍTULO	73
CONCLUSIONES	75
RECOMENDACIONES	76
BIBLIOGRAFÍA		

Introducción

INTRODUCCIÓN

De acuerdo con lo que se establece en la fundamentación de la disciplina Historia y Metodología de la Matemática, durante la carrera de Licenciatura en Matemática el estudiante conoce de algunas partes del “grandioso edificio de la Matemática“, el cual en el transcurso de muchos siglos ha sido reconstruido y transformado tantas veces, que es difícil comprender su forma original, cómo surgieron sus partes principales y cuáles son sus funciones sociales.

En particular, durante siglos al hombre le han llamado la atención las diferentes curvas halladas en la naturaleza y esto ha motivado que grandes figuras de la matemática se hayan dedicado al estudio de las mismas y hayan descubierto otras a través del análisis de problemas de la Física y la Geometría. Como resultado, existen curvas muy notables que los grandes científicos del pasado descubrieron con gran arte e ingeniosas técnicas, y que pueden ser denominadas “maravillosas”.

Los diferentes puntos de vista desde los que han sido vistas y estudiadas las curvas han dado como resultado la *diversidad* de criterios que se nos presenta al tratar de definir las y clasificarlas según la familia a la que pertenezcan. Por ejemplo: La elipse es un caso particular de elipse, es una de las secciones cónicas y un caso particular de curvas de Lissajous.

Para enfrentar de manera apropiada el estudio de las curvas planas *no bastan* los elementos de Análisis Matemático y Geometría Analítica que se imparten en los primeros años de la carrera, sino que se requieren conocimientos de Geometría Diferencial, la cual se imparte en cuarto año de la especialidad.

Algunas de las razones por las cuales una curva puede ser denominada maravillosa están relacionadas con su comportamiento con respecto a otras curvas (tales como la parábola), pero estos conceptos no se estudian en la carrera ni figuran en la mayor parte de los textos de carácter elemental.

La mencionada diversidad de criterios en la clasificación de las curvas, la necesidad de conocimientos más avanzados de matemática para su análisis y el carácter especial de muchos conceptos requeridos en la temática han tenido por consecuencia que existe una gran complejidad en la presentación didáctica de este tema, dificultando el cumplimiento de objetivos instructivos y educativos en la disciplina Historia y Metodología de la Matemática, tales como:

- Establecer las variadas relaciones entre las partes integrantes de la matemática.
- Adquirir la capacidad de captar la evolución de los criterios de elegancia y armonía de la conceptualización y modelación matemática.
- Consolidar la cultura general básica matemática y la conciencia de la necesidad de ampliar constantemente el nivel cultural, en particular en forma autodidacta.

La problemática observada condujo a plantear el siguiente **problema científico**:
¿Cómo abordar la enseñanza del tema de curvas maravillosas facilitando la comprensión de sus construcciones y las relaciones entre ellas?

Por tanto, el **objeto de estudio** es específicamente el conjunto de algunas curvas en el plano, sus propiedades más significativas, algunas de sus aplicaciones y todas aquellas características que nos demuestren que realmente se trata de una curva maravillosa.

El **objetivo general** perseguido mediante este trabajo es elaborar un sistema que sirva de guía a personas interesadas en el tema de curvas planas que pudieran denominarse maravillosas, con facilidades para su análisis, tanto desde el punto de vista pedagógico como computacional y con gran utilidad en la disciplina Historia y Metodología de la Matemática.

Los **objetivos específicos** son:

1. Presentar los conceptos básicos del Análisis Matemático, la Geometría Analítica y la Geometría Diferencial asociados a las relaciones especiales entre las curvas.
2. Desarrollar el enfoque metodológico seleccionado para la discusión de las curvas que se estudian.
3. Elaborar un sistema computacional para el análisis de las curvas atendiendo a diversas formas de acceso.

Para cumplir estos objetivos, se acometieron las **tareas de investigación** siguientes:

- Determinar las condiciones que nos conducen a considerar que una curva sea considerada maravillosa.
- Precisar cuál es el *enfoque* metodológico que resulta más apropiado para comprender las propiedades fundamentales de las curvas.
- Establecer la concepción de un sistema de computación que permita el estudio de las curvas atendiendo a diversas perspectivas.

Los resultados relacionados con el enfoque metodológico van a constituir la **contribución teórica** del trabajo y el sistema computacional asociado marcará un **aporte práctico** al mismo.

Para el desarrollo coherente de las tareas son utilizados distintos **métodos de investigación**, los cuales han sido:

Métodos del nivel teórico

Análisis-síntesis

Para el estudio de las fuentes de información, para extraer de ellas regularidades y tendencias vinculadas con la relación entre las curvas y para la discriminación lógica y la diferenciación necesaria.

Inducción-deducción

En la división del problema científico en subproblemas para conformar el grupo de tareas científicas que le dan una orientación a la investigación.

Histórico-lógico

Para analizar el origen y evolución histórica de las curvas atendiendo a las diferentes clasificaciones, conceptos y los principales aportes desde la perspectiva de un grupo representativo de estudiosos del tema.

Métodos del nivel empírico

Análisis documental

Para la revisión bibliográfica de un grupo significativo de documentos relacionado con el tema, el cual incluye libros, materiales impresos y sitios Web.

El trabajo cuenta con las siguientes partes: Introducción, tres Capítulos, Conclusiones, Recomendaciones, Bibliografía y Anexos.

En el primer capítulo se muestran los conceptos indispensables para hacer auto contenida la presentación del tema. Entre estas nociones figuran las de rectas tangente y normal, podaria, evoluta y envolvente, envolvente e inversión.

En el segundo capítulo se desarrolla el enfoque adoptado, el cual está en dependencia del árbol concebido para la concatenación de las relaciones y las clasificaciones en las familias.

En el tercer capítulo se describe la concepción de la aplicación Web que va a viabilizar el acceso a la información y a la animación de aquellas curvas cuya construcción lo permite.

Capítulo 1

Conceptos Preliminares

CAPÍTULO I: CONCEPTOS PRELIMINARES

“La mente humana, previa y libremente, tiene que construir formas antes de encontrarlas en las cosas”.

Albert Einstein

Introducción

A lo largo de la evolución de la ciencia matemática, han sido descubiertas muchas curvas muy notables que constituyeron objeto de investigación de grandes científicos, los cuales establecieron curiosas relaciones entre ellas que incidieron en las formas de clasificación.

De todas las que han sido recogidas por la historia de la matemática, se han seleccionado algunos tipos que son catalogadas como “maravillosas”, atendiendo al criterio de que cumplan una o varias de las siguientes condiciones:

1. Surgimiento histórico curioso, desde el punto de vista tratado por la Historia de la Matemática.
2. Construcción ingeniosa.
3. Relaciones interesantes de una curva con elementos de otras familias de curvas desde la perspectiva de la elegancia matemática.
4. Presentación en la Naturaleza.
5. Aplicaciones teóricas o prácticas de gran alcance.

En lo que concierne a la tercera condición, algunas de las relaciones están vinculadas con el comportamiento de la curva en cuestión con respecto a otras (tales como la podaria). Este concepto y algunos otros requeridos no son familiares para el estudiante de la carrera porque no figuran entre los contenidos de las diversas asignaturas que recibe, ni tampoco aparecen en la mayor parte de los textos de carácter elemental. Por esto, hemos escogido un conjunto de conceptos que se resumen y ejemplifican en este capítulo, con vista a facilitar la comprensión general del trabajo y a hacerlo auto contenido.

El concepto básico que será utilizado será el de curva. En Geometría Analítica, una curva se define como el lugar geométrico de aquellos puntos que satisfacen un conjunto de condiciones, las cuales se expresan en un sistema de coordenadas. La gráfica de una función también se denomina una curva. La intersección de dos superficies genera una curva y la trayectoria de un punto en movimiento describe una curva. Todos estos puntos de vista serán manejados en el trabajo.

Las relaciones existentes entre las distintas familias de curvas tratadas en nuestro trabajo, están representadas en el siguiente árbol de familias de curvas:

- **Funciones**

- Función afín
- Función cuadrática o parábola
- Parábola cúbica
- Función de proporcionalidad inversa
- Parábola semicúbica o de Neli
- Funciones trigonométricas

- Función exponencial
- La campana de Gauss
- Función logarítmica
- Funciones hiperbólicas
- La catenaria
- La versiera o curva de Agnesi

- **Secciones cónicas**
 - Secciones cónicas generadas
 - Parábola
 - Elipse
 - Circunferencia
 - Hipérbola
 - Secciones cónicas degeneradas
 - Un punto
 - Una recta
 - Dos rectas que se cortan

- **Óvalos de Cassini**
 - Dos óvalos iguales
 - Lemniscata de Bernoulli
 - Óvalo con talle
 - Óvalo en forma elíptica.

- **Cisoides**
 - Cisoides de una recta y un circunferencia
 - Cisoide de Diocles
 - Estrofoide
 - Trisectriz de Maclaurin
 - Circunferencia
 - Lemniscata de Bernoulli
 - Concoide de Nicomedes

- **Concoides**
 - Concoides de Nicomedes
 - Caracol de Pascal
 - Cardioide

- **Espirales**
 - Espirales Arquimedianas
 - Espiral de Arquímedes
 - Espiral parabólica o de Fermat
 - Espiral hiperbólica o recíproca
 - Espiral de Lituus

- Espiral equiangular (logarítmica)
 - Circunferencia
- Espiral áurea o de Durero
- **Ruletas** (curva rodando en una curva)
 - Ruletas cicloidales
 - Epitrocoides
 - Epicicloides ordinarias
 - Cardioide
 - Nefroide
 - Epicicloides alargadas
 - Caracol de Pascal
 - Epicicloides acortadas
 - Circunferencia
 - Hipotrocoides
 - Hipocicloides ordinarias
 - Hipocicloide de dos cúspides (diámetro de una circunferencia)
 - Deltoide
 - Astroide
 - Hipocicloides alargadas
 - Elipses
 - Rosas
 - Trifolium (Rosa de tres hojas)
 - Cuadrifolium (Rosa de cuatro hojas)
 - Octafoium (Rosa de ocho hojas)
 - Hipocicloides acortadas
 - Elipses
 - Trocoides (Cicloides)
 - Cicloide ordinaria
 - Cicloide alargada
 - Cicloide acortada
 - Recta
 - Ruletas no cicloidales
 - Cisoide de Diocles
 - Catenaria
 - Recta
 - Tractriz
 - Parábola
 - Elipse
- **Otras curvas maravillosas**
 - Espiral Sinusoidal
 - Hipérbola equilátera
 - Recta (caso no función)
 - Parábola

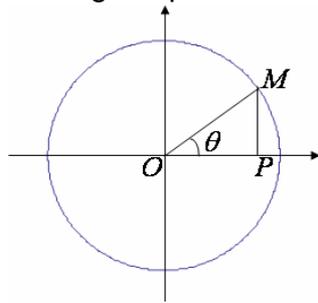
- Cardioide
- Circunferencia
- Lemniscata de Bernoulli
- Curvas de Lissajous
 - Elipse
 - Circunferencia
 - Recta (función lineal)

§1.1 Conceptos vinculados a la Geometría Analítica y al Análisis Matemático

1.1.1 Semejanza entre razones trigonométricas e hiperbólicas.

La primera semejanza existente entre las razones trigonométricas y las hiperbólicas se tiene en la forma en que se definen, es decir:

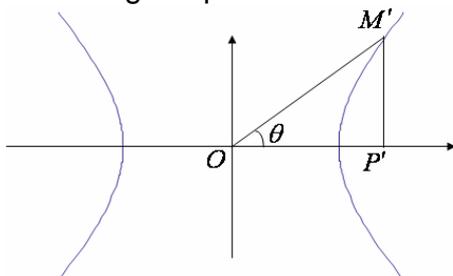
En las trigonométricas se usa una circunferencia centrada en el origen y radio $r = 1$ ($x^2 + y^2 = 1$) para, a partir de un triángulo rectángulo formado por los segmentos de coordenadas de uno de sus puntos y su radio vector, definir las razones trigonométricas relacionadas con el ángulo que se forma con el eje "x" y el radio vector, Fig. (c1. §1.1a).



$$\begin{cases} \text{sen } \theta = \overline{PM} \\ \text{cos } \theta = \overline{OP} \end{cases}$$

Fig. (c1. §1.1a)

En las hiperbólicas se usa una hipérbola equilátera centrada en el origen con semiejes $a = b = 1$ ($x^2 - y^2 = 1$) para, a partir de un triángulo rectángulo formado por los segmentos de coordenadas de uno de sus puntos y su radio vector, definir las razones hiperbólicas vinculadas con el ángulo que se forma con el eje "x" y el radio vector, Fig. (c1. §1.1b).



$$\begin{cases} \text{sh } \theta = \overline{P'M'} \\ \text{ch } \theta = \overline{OP'} \end{cases}$$

Fig. (c1. §1.1b)

Además, otra semejanza que se deriva de la definición anterior, es que al igual que existe la propiedad denominada identidad fundamental de la trigonométrica ($\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1$), también existe la propiedad, denominada identidad fundamental hiperbólica ($\text{ch}^2 \theta - \text{sh}^2 \theta = 1$). Como podemos observar, dichas identidades provienen de las propiedades de las curvas usadas en la definición.

§1.2 Conceptos vinculados a la Geometría Diferencial

1.2.1 Longitud de arco

La longitud de arco es el extremo superior de los perímetros de todas las quebradas inscritas en él. Cuando este extremo es finito, el arco se llama rectificable, cuando el extremo es $+\infty$, o sea cuando hay perímetros arbitrariamente grandes, se dice que el arco es no rectificable, o mejor que tiene longitud infinita. La operación de calcular la longitud de un arco se llama rectificación. Ahora veamos las fórmulas de la longitud de arco según como esté expresada la curva:

- Si la ecuación de una curva está dada explícitamente o en forma paramétrica ($y = f(x)$ ó $\{x = X(t), y = Y(t)\}$ respectivamente, entonces la longitud del arco delimitado por los puntos

$$A \text{ y } B \text{ de la curva, se calcula por } L_{AB} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \text{ [1a] ó } L_{AB} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[X'(t)]^2 + [Y'(t)]^2} dt$$

[2a], respectivamente.

- Si la curva está dada en coordenadas polares $\rho = \rho(\varphi)$, entonces la longitud del arco

$$\text{delimitado por los puntos } A \text{ y } B \text{ de la curva, se calcula por } L_{AB} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + (d\rho^2/d\varphi)^2} d\varphi .$$

Ejemplo: Rectifiquemos el caso particular de la curva conocida como catenaria, dada por la ecuación $y = 2ch(x/2)$, tomando los extremos del arco en los puntos $M_1 = (-p, q)$ y $M_2 = (p, q)$ (simétricos respecto al eje de las ordenadas), Fig. (c1. §2.1). Entonces, por la

fórmula [1], resulta que la longitud del arco que se desea es $L = \int_{-p}^p \sqrt{1 + [2ch'(x/2)]^2} dx$, de

donde se obtiene en virtud de la simetría que $L = 2 \int_0^p \sqrt{1 + sh^2(x/2)} dx$. Luego aplicando la

identidad fundamental hiperbólica, se tiene que $L = 2 \int_0^p ch(x/2) dx = 4sh(x/2) \Big|_0^p = 4sh(p/2)$.

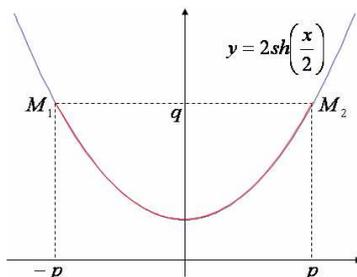


Fig. (c1. §2.1)

1.2.2 Recta Tangente y Recta Normal

Se llama recta tangente en el punto M a la posición límite de la recta secante MN , cuando $N \rightarrow M$ y se llama recta normal aquella que pasa por M y es perpendicular a la recta tangente. Veamos a continuación, mediante una tabla resumen las ecuaciones de la recta tangente y la recta normal, para distintas formas de representar una curva:

Expresión de la curva	Ecuación de la recta tangente	Ecuación de la recta normal
$F(x, y) = 0$	$F_x(X - x) + F_y(Y - y) = 0$	$(X - x)/F_x = (Y - y)/F_y$
$y = f(x)$	$Y - y = f'(x) \cdot (X - x)$	$Y - y = -(X - x)/f'(x)$
$\{x = x(t), y = y(t)\}$	$(Y - y)/y' = (X - x)/x'$	$(X - x)/x' + (Y - y)/y' = 0$

Nota: En la tabla se asume el punto M con coordenadas (x, y) y la notación X e Y como las coordenadas variables de los puntos de la tangente ó de la normal, por lo tanto los valores de la derivada se calculan para el punto M .

Ejemplo: Calculémosle la recta tangente y la recta normal a la curva $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$ (ecuación de una elipse centrada en el origen) en un punto arbitrario $M = (x_0, y_0)$, utilizando las fórmulas anteriores.

Como la ecuación de la curva dada es de forma implícita, calculando las derivadas en el punto arbitrario, se tiene que $F_x = 2x_0/a^2$ y $F_y = 2y_0/b^2$, luego utilizando las fórmulas de la primera fila de la tabla, las ecuaciones de la recta tangente y de la normal en el punto M son las siguientes:

La recta tangente: $2x_0(X - x_0)/a^2 + 2y_0(Y - y_0)/b = 0 \Leftrightarrow (Xx_0/a^2 + Yy_0/b^2) - (x_0^2/a^2 + y_0^2/b^2) = 0$ y como M pertenece a la elipse, podemos tomar $(x_0^2/a^2 + y_0^2/b^2) = 1$, por lo tanto la ecuación de la recta tangente se reduce a $Xx_0/a^2 + Yy_0/b^2 - 1 = 0$.

La recta normal: $a^2(X - x_0)/2x_0 = b^2(Y - y_0)/2y_0 \Leftrightarrow a^2X/x_0 - b^2Y/y_0 = (a^2 + b^2)$

1.2.3 Podaria y antipodaria.

Se llama podaria de una curva C respecto a un punto O al lugar geométrico de los pies de las normales trazadas por el punto O a las tangentes de C . Si C' es la podaria de una curva C , entonces se dice que C es la antipodaria de la curva C' .

Para hallar la ecuación de la podaria conviene en general tomar al punto O como el origen de coordenadas, si la curva C está dada de forma implícita $F(x, y) = 0$, la tangente en el punto (x_0, y_0) es: $(x - x_0)F_{x_0} + (y - y_0)F_{y_0} = 0$ [1b] y la recta normal a ella por el origen O será $F_{x_0}y - F_{y_0}x = 0$ [2b]. Así, las coordenadas del punto P son las soluciones del sistema [1b] y [2b], donde x_0, y_0 están ligadas por la ecuación de la curva $F(x, y) = 0$. Por tanto si entre las ecuaciones [1b], [2b] y $F(x, y) = 0$ se pueden eliminar x_0, y_0 , se tendrá una cierta ecuación $E(x, y) = 0$ que se satisfará para todos los pares de valores de x, y para los cuales existen ciertos x_0, y_0 que cumplen [1b], [2b] y $F(x, y) = 0$. En dicho caso, $E(x, y) = 0$ será la ecuación de la podaria.

Ejemplo: Hallemos la podaria respecto al centro de la elipse (curva que estudiaremos en el capítulo 2), cuya ecuación cartesiana es [3] $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$.

Primeramente se tiene que las ecuaciones [1b] y [2b], ahora serán [4] $xx_0/a^2 + yy_0/b^2 - 1 = 0$ y [5] $a^2xy_0 - b^2yx_0 = 0$ respectivamente y a partir de estas, se deducen $x_0 = a^2x/x^2 + y^2$ y

$y_0 = b^2 y/x^2 + y^2$, Sustituyendo estos valores en [3], resulta que la ecuación de la podaria buscada es la curva de cuarto orden $(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 - b^2 y^2$, la cual se conoce como cuártica bicircular.

1.2.4 Curvatura y radio de curvatura

La curvatura K de una curva en un punto M es el límite de la razón del ángulo de contingencia δ entre las direcciones positivas de las tangentes en los puntos M y N , Fig. (c1. §2. 2) sobre la longitud del arco $\overset{\frown}{MN}$, cuando $\overset{\frown}{MN} \rightarrow 0$, es decir $K = \lim \delta / \overset{\frown}{MN}$.

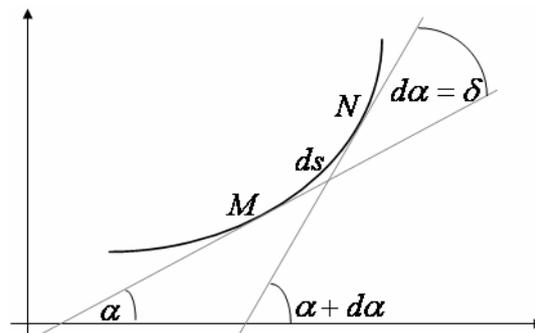


Fig. (c1. §2. 2)

La curvatura K tiene el signo + o - según sea el signo de este límite. El signo de K indica si la concavidad de la curva está dirigida hacia la semirrecta normal positiva (para $K > 0$). Frecuentemente se considera que la curvatura es un valor esencialmente positivo, entendiéndola como el límite del módulo del cociente anotado anteriormente.

Se denomina radio de curvatura R en un punto arbitrario M de una curva, al valor recíproco de la curvatura ($R = 1/K$) en dicho punto.

Veamos las distintas fórmulas para calcular K y R , teniendo en cuenta las diferentes formas de representar una curva.

1. Si la curva viene dada por la ecuación en forma implícita $F(x, y) = 0$ entonces:

$$K = \frac{\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}}{(F_x^2 + F_y^2)^{3/2}} \quad \text{y} \quad R = (F_x^2 + F_y^2)^{3/2} / \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}$$

2. Si la curva viene dada por la ecuación en forma explícita $y = f(x)$ entonces:

$$K = f''(x) / [1 + (f'(x))^2]^{3/2} \quad \text{y} \quad R = [1 + (f'(x))^2]^{3/2} / f''(x)$$

3. Si la curva que está dada en coordenadas paramétricas $\{x = x(t), y = y(t)\}$ entonces:

$$K = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \quad \text{y} \quad R = (x'^2 + y'^2)^{3/2} / \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}$$

4. Si la curva que está dada en coordenadas polares: $\rho = \rho(\varphi)$ entonces:

$$K = \rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' / (\rho^2 + \rho'^2)^{3/2} \quad \text{y} \quad R = (\rho^2 + \rho'^2)^{3/2} / \rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''$$

Ejemplo 1: Para la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, la curvatura es $K = 1/a$ y el radio de curvatura es $R = a$ (son constantes para todos los puntos) y para una recta, se tiene $K = 0$ y $R = \infty$.

Ejemplo 2: Calculemos la curvatura y el radio de curvatura de la curva $y^2(2-x) = x^3$ (caso particular de la cisoide de Diocles), en el punto $M = (1,1)$, aplicando las fórmulas dadas.

Como la curva se encuentra dada en la forma implícita $2y^2 - xy^2 - x^3 = 0$, la curvatura K y el radio de curvatura R en el punto $M = (1,1)$ se obtienen por las fórmulas indicadas en la primera forma de la siguiente manera:

Curvatura:
$$K = \frac{\begin{vmatrix} -6 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{(16+4)^{3/2}} = \frac{(16+16-[32-24])}{20\sqrt{20}} = \frac{24}{40\sqrt{5}} = \frac{3}{5\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{25}$$

Radio de curvatura: $R = 1/K = 25/3\sqrt{5} = 25\sqrt{5}/15 = 5\sqrt{5}/3$

1.2.5 Circunferencia oscultriz

Se llama circunferencia oscultriz de una curva en un punto M a la posición límite de la circunferencia que pasa por el punto M y otros dos puntos próximos de la curva N y P , cuando $N \rightarrow M$ y $P \rightarrow M$, Fig. (c1. §2.3).

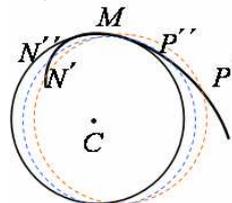


Fig. (c1. §2.3)

1.2.5.1 Centro de curvatura

El centro de la circunferencia oscultriz C se llama centro de curvatura correspondiente al punto M y se encuentra en la normal a la curva en la dirección de su concavidad. Las coordenadas del centro de curvatura (x_c, y_c) se determinan mediante las siguientes fórmulas:

- Si la curva viene dada por la ecuación en forma implícita $F(x, y) = 0$ entonces:

$$x_c = x + F_x(F_x^2 + F_y^2) \left/ \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} \right. \quad \text{y} \quad y_c = y + F_y(F_x^2 + F_y^2) \left/ \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} \right.$$

- Si la curva viene dada por la ecuación en forma explícita $y = f(x)$ entonces:

$$x_c = x - f'(x)(1 + (dy/dx)^2) / f''(x) \quad \text{y} \quad y_c = y + (1 + [f'(x)]^2) / f''(x)$$

- Si la curva está dada en coordenadas paramétricas $\{x = x(t), y = y(t)\}$ entonces:

$$x_c = x - y'(x'^2 + y'^2) \left/ \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \right. \quad \text{y} \quad y_c = y - x'(x'^2 + y'^2) \left/ \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \right.$$

- Si la curva que está dada en coordenadas polares: $\rho = \rho(\varphi)$ entonces:

$$x_c = \rho \cos \varphi - (\rho^2 + \rho'^2)^{3/2} / (\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'') \quad \text{y} \quad y_c = \rho \sin \varphi - (\rho^2 + \rho'^2)^{3/2} / (\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'')$$

Como podemos notar, con las fórmulas de radio de curvatura y las de centro de curvatura, se puede definir, apoyándonos en la ecuación general de una circunferencia (vea capítulo 2), la circunferencia oscultriz como $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$.

Ejemplo: Calculemos el centro de curvatura y la circunferencia oscultriz de la curva $y^2(2 - x) = x^3$ (ya vista en el ejemplo anterior), en el punto $M = (1, 1)$, aplicando las fórmulas dadas.

Como la curva se encuentra dada en la forma implícita $2y^2 - xy^2 - x^3 = 0$, el centro de curvatura $C = (x_c, y_c)$ de la curva en el punto $M = (1, 1)$ se obtiene por las fórmulas dadas en el primer punto de la siguiente manera:

$$x_c = 1 + \frac{-4(16 + 4)}{-6 - 2 - 4} = 1 + \frac{-80}{-12} = 1 + \frac{20}{3} = \frac{23}{3}$$

$$y_c = 1 + \frac{2(16 + 4)}{-6 - 2 - 4} = 1 + \frac{40}{-12} = 1 - \frac{10}{3} = -\frac{7}{3}$$

Luego, como ya se había calculado el radio de curvatura $R = 5\sqrt{5}/3$, podemos hallar la ecuación cartesiana de la circunferencia oscultriz $(x + 7/3)^2 + (y - 8/3)^2 = 125/9$, Fig. (c1. §2.4).

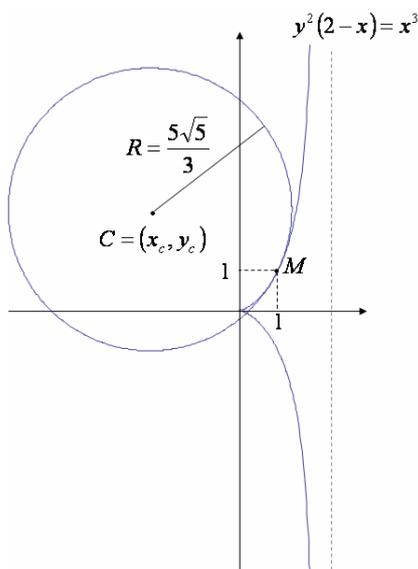


Fig. (c1. §2.4)

1.2.6 Evoluta y evolvente

La evoluta de una curva dada es la curva formada por los centros de curvatura de todos los puntos de la curva dada; la misma es la evolvente de las normales de la curva dada. La evolvente de la curva dada A es una curva B respecto a la cual la curva A es la evoluta.

Ejemplo: Hallar la evoluta de la curva $y^2 - 12x = 0$ (parábola).

Como la curva se encuentra dada de forma implícita, apoyándonos en las fórmulas de centro de curvatura para el punto arbitrario $M = (x_0, y_0)$, se tiene para la curva:

$$x = x_c = x_0 - 12(144 + 4y_0^2) \left/ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & -12 \\ 0 & 2 & 2y_0 \\ -12 & 2y_0 & 0 \end{array} \right. = x_0 + \frac{36 + y_0^2}{6} = \frac{y_0^2}{6} + x_0 + 6 = 3x_0 + 6$$

$$y = y_c = y_0 + 2y_0(144 + 4y_0^2) \left/ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & -12 \\ 0 & 2 & 2y_0 \\ -12 & 2y_0 & 0 \end{array} \right. = y_0 - \frac{36y_0 + y_0^3}{36} = -\frac{y_0^3}{36}$$

Por lo tanto, se deduce la ecuación paramétrica de la evoluta $\{x = 6 + t^2/4, y = -t^3/36\}$, haciendo $y_0 = t$ y evaluando en x . Además eliminando los parámetros, obtenemos su ecuación en coordenadas cartesianas $y^2 = 4(x - 6)^3/81$, Fig. (c1. §2.5).

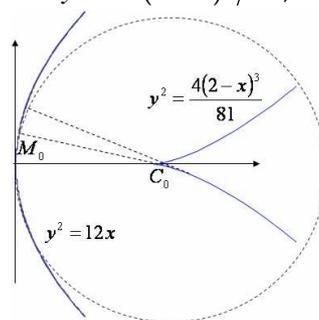


Fig. (c1. §2.5)

1.2.7 Envolverte

Se denomina envolvente de una familia de curvas a la curva tangente a cada elemento de la familia.

Ejemplo: Como podemos ver en la Fig. (c1. §2.6), se tiene una familia de circunferencias centradas en una hipérbola equilátera, donde cada una pasa por su centro. Además, se tiene que la lemniscata de Bernoulli es la curva tangente a cada circunferencia con dichas condiciones.

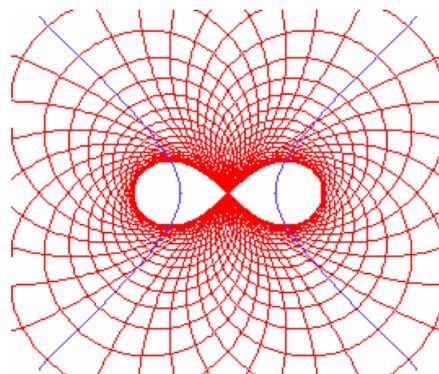


Fig. (c1. §2.6)

1.2.8 Inversión

Sean dados un punto fijo O del plano y un número k . Se llama inversión de centro O y potencia k a la transformación que a cada punto P del plano le asigna P' situado sobre la recta OP y tal que $OP \cdot OP' = k$.

Ejemplo: Hallar la inversión de la hipérbola equilátera $\rho = 1/\sqrt{\cos(2\theta)}$ (centrada en el origen, con focos sobre el eje "x" y semiejes $a = b = 1$), con respecto a su centro y potencia igual a uno, Fig. (c1. §2.7).

De $\rho = 1/\sqrt{\cos(2\theta)}$, se deduce de la definición que la ecuación de la curva inversión de la hipérbola con respecto a su centro es $1/\rho = 1/\sqrt{\cos(2\theta)} = 1/\sqrt{2\cos^2\theta - 1} \Leftrightarrow \rho = \sqrt{2\cos^2\theta - 1}$ (la ecuación de la lemniscata con vértices $A, B = (\pm 1, 0)$, ver Capítulo 2).

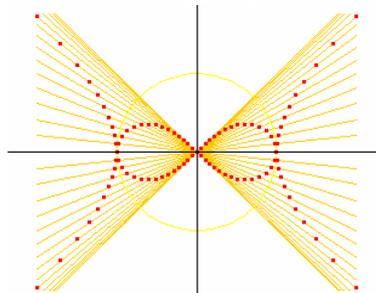


Fig. (c1. §2.7)

Resumen del Capítulo

Se ha resaltado la analogía geométrica que existe entre las definiciones formales de las funciones trigonométricas y las funciones hiperbólicas, con el objetivo de contribuir a la comprensión cabal de las semejanzas generales que se observan en el comportamiento de ambos tipos de funciones y que fundamentan su condición de ser maravillosas. Nuestro interés en el tratamiento de las funciones hiperbólicas está dado porque constituyen la base de la definición de la catenaria, función maravillosa en muchos sentidos que se analizará en el próximo capítulo.

Se han mostrado diversas formulaciones para el cálculo de la curvatura en dependencia de la representación de la curva, en particular para los casos explícito e implícito, con la finalidad de facilitar la opción de que el lector tenga la posibilidad de comprobar los resultados de los ejemplos propuestos en caso de querer utilizar otra variante. Esto de manera general fortalece la utilidad de este trabajo.

Se ha agrupado la presentación de conceptos relacionados en varios epígrafes, con vista a facilitar la comprensión de los mismos y a unificar el desarrollo de los ejemplos. Esto puede observarse en los epígrafes donde se analizan Podaria y antipodaria, Curvatura y radio de curvatura, así como Evoluta y evolvente.

También se ha agrupado el tratamiento de las temáticas en los ejemplos de las definiciones consideradas. En la selección de estos ejemplos se ha tomado en consideración que ilustren adecuadamente los conceptos y que muestren curvas que se verán en el siguiente capítulo, lo que indica la idoneidad de los mismos.

Capítulo 2

Curvas Planas Maravillosas

CAPITULO II: CURVAS PLANAS MARAVILLOSAS

“El Universo es un libro escrito en el lenguaje de las matemáticas, siendo sus caracteres triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es humanamente imposible comprender una sola palabra; sin ellos solo se conseguirá vagar por un oscuro laberinto”

Galileo Galilei

Introducción

Para el análisis de cada curva con vista a justificar su condición de maravillosa, consideramos la posibilidad de responder las siguientes interrogantes:

- ¿Cuándo, por quiénes y por qué comienza el estudio de la curva?
- ¿De qué forma está definida la curva?
- ¿Cuáles son sus métodos de construcción?
- ¿Con qué propiedades cuenta?
- ¿Cuáles son sus aplicaciones dentro y fuera de la matemática?

A través del estudio de los métodos de construcción y de las propiedades, cada curva quedará clasificada dentro de una o varias familias, ya que veremos que puede pertenecer a más de una de ellas.

§2.1 Funciones

En el epígrafe se analizarán algunas de las funciones definidas sobre el plano real, aquellas que por su historia, propiedades o aplicaciones se denominan curvas maravillosas. Además, veremos que varias de estas curvas se encuentran orientadas a otros epígrafes, donde forman parte de otras familias de curvas o sencillamente se utilizan como herramienta para generar otras curvas.

2.1.1 Origen de las funciones

La noción de función y su influencia significativa en el desarrollo de las ciencias se tiene a partir del siglo XVII. El concepto aparece explícitamente en Leibniz (1691) y es utilizado por los Bernoulli desde 1694. Euler (1707-1783) introdujo la notación $f(x) = y$ y las separó en algebraicas (aquellas que satisfacen una ecuación polinómica cuyos coeficientes son a su vez polinomios) y trascendentes (aquellas funciones que no son algebraicas).

2.1.2 Función afín

Los tratados superiores de Geometría, construidos sobre bases axiomáticas, admiten la existencia de la recta como un postulado. Nosotros en el presente epígrafe estudiaremos un caso particular de recta conocida como función afín y definida por relación $f(x) = mx + n$, donde $m, n \in \mathfrak{R}$ y admiten la interpretación siguiente:

El parámetro m se conoce como pendiente (cambio de las ordenadas, cuando la abscisa aumenta una unidad) y se obtiene a partir de una de las propiedades más importantes de una recta, debido a su aplicación: “Por dos puntos pasa una y sólo una recta”, es decir,

dados dos puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ del plano real tales que $x_1 \neq x_2$ (para que se cumpla la definición de función), entonces se tiene una y sólo una recta que contiene a ambos puntos, por lo tanto se puede establecer la relación $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$. La pendiente también es conocida como grado de inclinación de la recta, por la relación que tiene con la tangente del ángulo α formado por la misma y el eje "x", es decir, la pendiente se puede hallar por la relación $m = \tan \alpha$. El parámetro n se obtiene a partir de la expresión, sustituyendo la pendiente hallada y uno de sus puntos. Éste es conocido como la intersección con el eje "y" debido a que gráficamente se corresponde con el valor $y = f(0)$. En el caso en que $n = 0$ la función recibe el nombre de función lineal, debido a que cumple con los axiomas de linealidad de funciones, conocidos del Álgebra.

Como hemos notado, en la obtención de la pendiente, se ha excluido el caso en que los puntos P_1 y P_2 posean iguales abscisas, debido a que la definición de función no lo admite, sin embargo por dichos puntos también pasa una y sólo una recta. Es por esto que se hace necesaria una expresión más general, es decir, la expresión implícita o ecuación general de una recta $Dx + Ey + F = 0$, donde $D, E, F \in \mathfrak{R}$, pero D y E no pueden tomar valor cero simultáneamente. Mediante esta expresión, veremos luego que pertenece a la familia de las cónicas. Además, en el caso en que la recta no es función ($Dx + F = 0$), demostraremos que también constituye un caso particular de las espirales sinusoidales.

Si conocemos solamente de manera explícita la pendiente de una recta y un punto sobre ella, podemos realizar el siguiente análisis que da lugar a una ecuación paramétrica de la recta:

Sea $P_1 = (x_1, y_1)$ el punto sobre la recta y m su pendiente, entonces se puede considerar que $m = (y - y_1)/(x - x_1)$, de donde despejando se tiene $y - y_1 = m(x - x_1)$ y de aquí puede derivarse fácilmente la función paramétrica $f(t) = (x(t), y(t))$, haciendo $x(t) = x_1 + at$ y $y(t) = y_1 + bt$ con $t \in \mathfrak{R}$. De esta forma luego veremos que la recta pertenece como caso particular a la familia de las curvas de Lissajous.

Entre las aplicaciones prácticas más útiles podemos citar las siguientes:

- La función $y = x$, tiene una gran importancia en la realización del gráfico de las funciones inversas, pues toda función y su inversa son simétricas respecto a dicha recta.
- Es una herramienta importante para la construcción de otras curvas como la conoide de Nicomedes y algunas ruletas, las cuales veremos en epígrafes posteriores.
- La trayectoria más corta entre dos puntos es la longitud del segmento rectilíneo que los une.
- Muchas curvas poseen asíntotas que aportan determinadas propiedades tales como la posibilidad de dar sentido a la noción de área bajo la curva.

2.1.3 Función cuadrática

Las funciones cuadráticas se asocian de forma natural a las ecuaciones de segundo grado, las cuales tienen un origen antiguo. Se conocieron algoritmos para resolverlas en Babilonia y Egipto. En Grecia fue desarrollada por el matemático Diofanto de Alejandría y la solución fue introducida en Europa por el matemático judeoespañol Abraham bar Hiyya, en su Liber

embadorum. En el siglo XVII la aparición del concepto de función dio lugar al estudio de las funciones cuadráticas, también conocidas como parábolas por ser un caso particular de las secciones cónicas, de esta forma la analizaremos más adelante, en el epígrafe relacionado con el tema. Como función, se define por la expresión $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a, b, c \in \mathfrak{R}$ y $a \neq 0$. Veamos a continuación algunas de sus aplicaciones prácticas más significativas:

- Galileo Galilei descubrió a finales de siglo XVI que la trayectoria descrita por un proyectil (se denomina proyectil a cualquier objeto impulsado con una velocidad que sigue una trayectoria determinada por la fuerza gravitacional que actúa sobre él y por la resistencia de la atmósfera) es una curva específica llamada parábola.
- En la Física, los problemas de caída son modelados por la función $y = -gt^2/2 + h$, donde $g \approx 9.81 \text{ m/seg}^2$ es la aceleración de la gravedad y h el valor de la altura inicial del problema. La función $S = at^2/2$ con $t \geq 0$, expresa la ley de movimiento uniforme con velocidad inicial nula y aceleración a . También la energía cinética de un cuerpo está dada por la expresión $K = mv^2/2$ donde m es la masa y v su velocidad.

2.1.4 Parábola cúbica

Las funciones cúbicas están asociadas por definición a las ecuaciones cúbicas, las cuales eran conocidas por indios y griegos antiguos desde el 5to siglo A.C. y anteriormente por los egipcios antiguos debido al problema de la duplicación del cubo, es decir, de encontrar la arista del cubo cuyo volumen sea el doble de un volumen dado. Se cree que Hipócrates y Arquímedes estuvieron cerca de solucionar este problema intersecando secciones cónicas, aunque los historiadores tales como Reviel Netz disputan si los griegos conocían las ecuaciones cúbicas o los problemas que pueden conducirnos a ellas. En el siglo XVI el matemático italiano Scipione del Ferro (1465-1526) encontró un método para solucionar las ecuaciones cúbicas del tipo $x^3 + Mx = n$ y lo mantuvo en secreto hasta días antes de su muerte. Más tarde en 1530, Niccoló Fontana (Tartaglia) realiza un método para otra familia de ecuaciones cúbicas, a saber, las de la forma $x^3 + Mx^2 = n$, el cual solo reveló este secreto al famoso matemático Gerolamo Cardano. Éste notó que era necesario el cálculo de raíces cuadradas de números negativos y realizó un estudio sobre esta nueva materia, así en 1545 publicó el libro *Magna de Ars*, donde se encuentran las primeras soluciones de ecuaciones de tercer grado. Su estudio como función algebraica surge a finales del siglo XVII con el manejo de este concepto y de esta manera se define por la expresión explícita $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, donde $a, b, c, d \in \mathfrak{R}$ y $a \neq 0$. Una aplicación práctica importante se puede citar que la función es comúnmente utilizada para relacionar volúmenes con determinados tiempo o espacio, por ejemplo: la relación de los vientos o la energía eólica con respecto a su intensidad y tiempo de duración y el crecimiento de un feto en gestación, donde en términos de su distancia de los pies a la cabeza se puede determinar las semanas de gestación del mismo mediante una función cúbica.

2.1.5 Función de proporcionalidad inversa

La proporcionalidad inversa surge unida a la necesidad de relacionar dos magnitudes, de forma tal, que a medida en que una aumente la otra disminuya. En el presente epígrafe la estudiaremos como una función algebraica definida por la expresión $f(x) = k/x$, donde

$k \in \mathfrak{R}^*$ y se denomina constante de proporcionalidad inversa y tiene la siguiente característica: Si $|k| > 1$ sus ramas se alejan del origen progresivamente y si $|k| < 1$, se acercan. Dicha curva constituye un ejemplo clave de curva maravillosa por el hecho de que además de tener impresionantes propiedades y aplicaciones como una función, veremos en el epígrafe posterior que también se encuentra en la familia de las secciones cónicas, como caso particular de la hipérbola equilátera. Veamos a continuación algunas de sus aplicaciones prácticas más significativas:

- Las ondas electromagnéticas se propagan por el aire o por el vacío, ya que no necesitan un medio material para hacerlo a una velocidad $c = 300000 \text{ km/s}$ (velocidad de la luz), siguiendo un movimiento ondulatorio cuyas características están definidas por su longitud de onda λ , que se mide en metros, y su frecuencia F , en hertzios, que es el número de oscilaciones o ciclos que en un punto A se dan por segundo. La relación entre la longitud de onda y la frecuencia, está dada por una función de proporcionalidad inversa, con la velocidad de la luz como constante de proporcionalidad $F = c/\lambda$.
- Robert Boyle demostró en 1662 que la presión que soportaba el aire encerrado en una vejiga, y el volumen de la misma, se encuentran relacionados por esta función.

2.1.6 Parábola semicúbica o de Neli

La parábola semicúbica, fue descubierta por William Neli en 1657 y tiene la característica de ser la primera curva algebraica a la que se calculó la longitud de un arco, hasta entonces esto sólo se había hecho con algunas curvas trascendentes. En 1687 Leibniz planteó la siguiente interrogante: “¿cuál es la curva en la que, al moverse una partícula bajo la acción de la gravedad, desciende distancias verticales iguales en tiempos iguales?, luego Huygens probó que la parábola semicúbica satisface esta propiedad y por ello, muchos autores la estudian por el nombre de curva isócrona. La parábola de Neli que estudiaremos, está definida explícitamente por la expresión $y = a\sqrt[3]{x^2}$, con $a \in \mathfrak{R}^*$, constante cuyo valor absoluto garantiza la amplitud de la curva, a menor valor menor amplitud, además si $a > 0$ la parábola abre hacia arriba y si $a < 0$ la parábola abre hacia abajo, Fig. (c2. §1.1). Veamos a continuación algunas de sus propiedades más características:

- En el origen de coordenadas tiene un mínimo si $a > 0$ y un máximo si $a < 0$. Además, este punto se denomina cúspide de la curva.
- La curvatura se calcula por la fórmula $K = 6a/\sqrt{x} \sqrt[3]{(4+9a^2x)^2}$.
- La longitud de un arco de la curva con extremidades en un punto arbitrario y el origen de coordenadas esta dada por la fórmula $L = \left(\sqrt[3]{(4+9a^2x)^2} - 8 \right) / 27a^2$.

Comúnmente se define constructivamente a la parábola semicúbica, como la evoluta de una función cuadrática. Concretemos esta idea tomando como ejemplo la parábola $y = x^2 - \frac{1}{2}$, entonces se tiene que las coordenadas de los centros de curvatura k están dadas por las relaciones $X = -4x^3$ y $Y = 3x^2$ (ver la justificación en el capítulo 1), por lo tanto se deriva la ecuación de la evoluta de dicha parábola $y = 3\sqrt[3]{x^2}/2\sqrt[3]{2}$ (parábola de Neli con $a = 3/2\sqrt[3]{2}$).

Además, como podemos notar, la curva está dada por la colección de puntos $k = (X, Y)$, esto nos lleva a la obtención de la ecuación paramétrica de la curva $\{x = t^3, y = at^2\}$ con $t \in \mathfrak{R}$.

Como una aplicación de la curva en la matemática y en especial en nuestro trabajo, se destaca el hecho de que la parábola de una parábola semicúbica con respecto a su punto cuspidal, es una parábola con vértice en dicho punto. Esto significa que se pueden generar parábolas con esta metodología.

2.1.7 Funciones trigonométricas

El primer escrito que aparece en la historia con el uso de las razones trigonométricas es el Sulba Sutras, escrito en la India del siglo VIII al VI a. C con la hoy conocida como función seno. La obra de Leonhard Euler "Introductio in analysin infinitorum" (1748) fue la que estableció el tratamiento analítico de las funciones trigonométricas en Europa, definiéndolas como series infinitas presentadas en las llamadas "Fórmulas de Euler". Las funciones trigonométricas son del tipo trascendente ya que se definen a partir de las razones trigonométricas (seno y coseno fundamentalmente). Una de las aplicaciones más importantes de esta función se tiene en la física acústica donde se utiliza una función derivada de la función seno conocida como senoide, es decir, una deformación de la función seno dada por la relación $y = A \operatorname{sen}(wx + \varphi)$, donde las constantes tienen la siguiente interpretación $|A|$ es la amplitud de onda, w la frecuencia y φ la fase inicial. En la función senoide, el período se halla por la fórmula $T = 2\pi/w$. De igual modo se utilizan en esta rama de la física, otras como la cosenoide, la tangentoide y la cotangentoide.

2.1.8 Funciones exponencial

Los matemáticos han usado un sistema con exponentes desde el siglo XIV sin embargo, el concepto moderno no alcanzó su uso generalizado hasta la llegada del matemático francés René Descartes en el siglo XVII el cual inventó el método de los exponentes. En sus inicios los exponentes fueron trabajados de forma numérica con valores constantes ya sean naturales, entero o fraccionarias, luego con la terminología de variabilidad en sus exponente y con la aparición del concepto de funciones trascendentes, se llevaron a cabo estudios más profundos que dieron lugar a las funciones exponenciales, definidas por la expresión $f(x) = e^x$, donde $e \approx 2,718$ es la constante de Euler. Estas funciones constituyen el fundamento de la definición de curvas que consideramos como maravillosas, tales como la campana de Gauss y la catenaria. Además, en la física se aplica en algunos elementos radioactivos que son de tal naturaleza que su cantidad disminuye con respecto al tiempo, donde se cumple la ley exponencial y dicta si el elemento decrece o decae (por ejemplo: el descubrimiento del Polonio (elemento radioactivo) descubierto por Marie Curie en 1898 decae exponencialmente de acuerdo a la función $m = m_0 e^{-0.005 t}$, donde m_0 es la masa inicial del Polonio, m es la masa al cabo de un tiempo y t es el tiempo en días).

2.1.9 Función logarítmica

Joost Bürgi, un matemático y relojero suizo al servicio del duque de Hesse-Kassel, concibió por vez primera los logaritmos. El método de logaritmos naturales fue propuesto inicialmente

en 1614, en un libro intitulado *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, escrito por John Napier (latinizado Neperus). Luego con la terminología de variabilidad en su argumento y con la aparición del concepto de funciones trascendentes a finales de este mismo siglo, se dio lugar a las funciones logarítmicas definidas por la expresión $f(x) = \ln x$ (logaritmo en base e). De esta forma la función logarítmica está estrechamente relacionada con la función exponencial, como la función inversa de la misma. Entre las aplicaciones prácticas más útiles de la función logarítmica podemos citar:

- La Geología, como ciencia, requiere del planteamiento de ecuaciones logarítmicas para el cálculo de la intensidad de un evento, tal como es el caso de un sismo, por ejemplo: La magnitud R de un terremoto está definida como $R = \log(a/a_0)$ en la escala de Richter, donde a es la intensidad y a_0 es la amplitud de un sismógrafo a 100 km del epicentro.
- En la química, el pH (término que indica la concentración de iones hidrógeno en una disolución), se trata de una medida de la acidez de la disolución y se define como el logaritmo de la concentración de iones hidrógeno (H^+), es decir: $pH = -\log(H^+)$
- Los astrónomos para determinar una magnitud estelar de una estrella o planeta utilizan ciertos cálculos de carácter logarítmico: la ecuación logarítmica les permite determinar la brillantez.
- En la Física la función logarítmica tiene muchas aplicaciones entre las cuales se puede mencionar el cálculo del volumen " L " en decibeles de un sólido, para el cual se emplea la siguiente ecuación $L = 10\log(I/IO)$, donde I es la intensidad del sonido (la energía cayendo en una unidad de área por segundo), IO es la intensidad de sonido más baja que el oído humano puede oír (llamado umbral auditivo). Una conversación en voz alta tiene un ruido de fondo de 65 decibeles.
- En Matemática Difusa se necesita una noción, que se denomina entropía difusa o vaguedad, para expresar el nivel de dificultad que se tiene para decidir qué elementos pertenecen y cuáles no pertenecen a un conjunto difuso dado. Así como caso particular surge en el análisis de la capacidad de comunicación de canales en la Teoría de la Información, donde la definición entropía guarda relación con la que se maneja en Mecánica Estadística, conocida como función de Shannon y esta dada por la expresión $f_D = - \sum_{\mu_A(x) \neq 0,1} [\mu_A(x)\log_2 \mu_A(x) + (1 - \mu_A(x))\log_2 (1 - \mu_A(x))]$.

2.1.10 Campana de Gauss

En 1823 Carl Friedrich Gauss publica "Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae", dedicado a la estadística, concretamente a la distribución normal cuya curva característica es denominada Campana de Gauss. Dicha curva es una función trascendente, definida como una función exponencial compuesta con una cuadrática, es decir la expresión $f(x) = Ke^{-m^2x^2}$, donde $K \in \mathfrak{R}_+^*$. Gráficamente, como su nombre indica, la curva hace una campana, la cual es simétrica respecto al eje vertical y se aproxima asintóticamente al eje " x ", tanto más rápidamente cuanto mayor sea $|m|$, Fig. (c2. §1.2a). Además, se tiene una interpretación de los parámetros si fijamos el valor m y variamos el valor de K , entonces tomando como referencia $K = 1$, podemos obtener la deformación que sufre la curva: Si $K > 1$ se dilata y si $K < 1$ se contrae, Fig. (c2. §1. 2b). Entre las propiedades más características de la curva se pueden citar las siguientes:

- El punto A de intercepción con el eje “ y ”, es un máximo y tiene dos puntos de inflexión en $P_{1,2} = (\pm 1/a\sqrt{2}, 1/\sqrt{e})$, donde las rectas tangentes a la curva en los mismos tienen pendientes $m = \mp a\sqrt{2/e}$ respectivamente. Por lo tanto para toda $x \in]-\infty, P_1[\cup]P_2, +\infty[$ es convexa y para toda $x \in]P_1, P_2[$ es cóncava.

La campana de Gauss aparece aplicada en numerosos contextos de las ciencias, debido a la necesidad que éstas tienen de la Estadística, donde la curva modela multitud de problemas:

- La primitiva de una función gaussiana es $y = e^{-x^2/2\sigma^2} / \sigma\sqrt{2\pi}$ y se denomina función error.
- En Estadística y Teoría de Probabilidades, la función gaussiana aparece como la función de densidad de la distribución normal, la cual es una distribución de probabilidad límite de sumas complicadas, según el teorema del límite central. Desde este punto de vista es utilizada en estudios poblacionales.
- Los rayos gaussianos se usan en sistemas ópticos y de microondas.
- Se utilizan como filtro de suavizado en el procesamiento digital de imágenes.
- Es la función de onda del estado fundamental del oscilador armónico cuántico.
- Los orbitales moleculares usados en química computacional son combinaciones lineales de funciones gaussianas llamados orbitales gaussianos.
- Matemáticamente juega un papel importante en la definición de los polinomios de Hermite.

2.1.11 Funciones hiperbólicas

Las llamadas funciones hiperbólicas fueron introducidas en el siglo XVIII por el matemático Johann Heinrich Lambert (1728-1777). Son funciones del tipo trascendente y se encuentran definidas, a partir de las razones hiperbólicas (seno hiperbólico y coseno hiperbólico fundamentalmente), que en buena parte, son análogas a las razones trigonométricas, como pudimos observar en el primer epígrafe del capítulo 1. Entre las aplicaciones más características de dichas curvas, se tienen:

- Estas funciones desempeñan un papel importante en la Geometría no Euclidiana, donde participa, prácticamente en todas las dependencias trigonométricas dentro de la misma.
- En la ecuación de la curva conocida como catenaria (curva que estudiaremos a continuación), donde podremos notar que la reduce a una expresión más sencilla.

2.1.12 Catenaria

Los primeros matemáticos que abordaron el problema de hallar la ecuación de la curva que adopta la forma de una cadena suspendida por sus extremos y sometida a la acción de la gravedad, pensaron que era una parábola. Huygens, a los 17 años, demostró que no lo era, pero no encontró la ecuación de la curva que llamo “Catenaria” (derivado del latín de la palabra catenarius, propia de cadena), en una carta dirigida a Leibniz en 1690. Luego, la ecuación en términos de exponenciales ($y = a(e^{x/a} + e^{-x/a})/2$) fue obtenida por Gottfried Leibniz, Christian Huygens y Johann Bernoulli en 1691, en respuesta al desafío planteado por Jakob Bernoulli. En la actualidad se usa una simplificación a esta ecuación con los conocimientos de funciones hiperbólicas, quedando de esta manera definida por la expresión

trascendente $f(x) = a \operatorname{ch}(x/a)$, donde $a \in \mathfrak{R}_+^*$. Por extensión matemática, se denomina catenaria a la curva que adopta la forma de una cuerda o un hilo pesado, flexible e inextensible, suspendida por sus extremos y sometida a la acción de un campo gravitatorio uniforme. Analizando la deducción de la ecuación dada mediante esta definición, se tiene que aplicando el equilibrio de fuerzas a una porción infinitesimal de catenaria, obtenemos las fuerzas horizontales y verticales dadas por las fórmulas: [1c]

$$F_H = T \cos(x + \Delta x) - T \cos \alpha(x) = 0 \quad \text{y} \quad [2c] \quad F_V = T \operatorname{sen} \alpha(x + \Delta x) - T \operatorname{sen} \alpha(x) = \int_{s_1}^{s_2} \omega ds, \quad \text{donde } \alpha, \text{ es}$$

el ángulo formado por la catenaria y la horizontal, $T(x)$, es la tensión total del cable para cada punto y ω , es el peso por unidad de longitud. De esta forma la ecuación [1c] implica que $T \cos \alpha = T_H$ (una constante), mientras que la ecuación [2] puede escribirse escogiendo adecuadamente el origen de la longitud de arco como $T \operatorname{sen} \alpha = \omega(s - s_0)$. Entonces de las dos relaciones se obtiene $\tan \alpha = (s - s_0)\omega/T_H$ que introduciendo la relación entre la tangente del ángulo de la pendiente y la longitud de arco, es decir, las relaciones $\tan \alpha = dy/dx$ y

$$s = s_0 + \int_{x_0}^x \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx, \quad \text{se obtiene la expresión} \quad dy/dx = \omega \int_{x_0}^x \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx / T_H \quad \text{y derivando}$$

esta última expresión se obtenemos la ecuación diferencial de segundo orden $d^2y/dx^2 = \lambda \sqrt{1 + (dy/dx)^2} / T_H$, que da la condición de equilibrio local de cada punto para la pendiente de la catenaria, que relaciona las tensiones en los extremos de un tramo y el peso del mismo Fig. (c2. §1. 3). La solución de esta ecuación diferencial de segundo orden es precisamente la ecuación de la catenaria $y(x) = T_H \operatorname{ch}(\lambda/T_H (x - C_1)) / \lambda + C_2 = a \operatorname{ch}(x - C_1/a) + C_2$, así, para $C_1 = C_2 = 0$, se tiene la ecuación de la catenaria que se buscaba $f(x) = a \operatorname{ch}(x/a)$.

Como podemos observar, un caso particular de la catenaria es la función coseno hiperbólico cuando $a = 1$.

Otra interpretación del parámetro a es que la curva posee un vértice V y las coordenadas son $(0, a)$, además, determina la amplitud, a mayor valor menor amplitud. Para $a > 1$ se contrae y para $a < 1$ se dilata, Fig. (c2. §1.4).

Otra forma de obtener su ecuación y además, obtener una parametrización de la catenaria se tiene a partir del hecho de que la curva, se puede construir como la evoluta de una tractriz (vea ejemplo de evoluta en el capítulo 1, epígrafe 2), curva que estudiaremos en el epígrafe de ruletas, como caso particular de las ruletas no cicloidales.

Entre las propiedades más características de la curva podemos citar:

- Es simétrica respecto al eje "y", pasando por encima de la parábola $y = (x^2/2a) + a$.
- La longitud de un arco delimitado por dos puntos $M_1 = (-p, q)$ y $M_2 = (p, q)$ de la curva (simétricos respecto al eje de las ordenadas) esta dada por relación $L = 2a \operatorname{sh}(x/a)$ y el

área debajo del arco (área de la figura limitada por el arco, el eje de las abscisas y las rectas $x = \pm p$) es $A = 2aL = 2a^2 \operatorname{sh}(x/a)$.

- El radio de curvatura es $r = a \operatorname{ch}^2(x/a)$. [Semendiaev, 1971]

Entre sus aplicaciones más útiles se tienen:

- Puede ser aplicada en la ingeniería civil, para resolver problemas específicos, por ejemplo, en la construcción de puentes colgantes.
- Dado un elemento lineal sometido sólo a cargas verticales, la forma de la catenaria es precisamente la forma del eje baricéntrico que minimiza las tensiones. Esa propiedad puede aprovecharse para el diseño de arcos. Así puede demostrarse que un arco en forma de catenaria invertida es precisamente la forma que minimiza los esfuerzos de compresión sobre dicho arco. Por esa razón, una curva catenaria invertida es un trazado útil para un arco en la arquitectura, forma que fue aplicada, entre otros y fundamentalmente, por Antoni Gaudí. Ejemplo de esto son las columnas de La Sagrada Familia en Barcelona.

2.1.13 Versiera o curva de Agnesi

Esta curva fue estudiada por Pierre de Fermat en 1666, Guido Grandi en 1701, y por Maria Gaetana Agnesi en 1748. Grandi llamó a la curva versoria, del latín *vertere*, que significa virar, girar, que en italiano se escribe *versiera*. María Gaetana Agnesi escribió a su vez la *versiera*, añadiendo el artículo femenino llama la *versiera di Agnesi* que significa la curva de Agnesi. Los principios de esta curva fueron traducidos al inglés por el profesor de la Universidad de Cambridge, John Colson, con poco conocimiento del italiano, como “*avversiera di Agnesi*”, debido a que confundió *versiera* con *avversiera* (que en italiano significa “diablesa”, “demonio”), se tradujo como *witch*, “mujer contraria a Dios”, es decir, “bruja”. El error de la traducción al inglés permanece hasta nuestros días, dando lugar a su nombre actual “Bruja de Agnesi” (este término se usa en inglés y en las lenguas que han copiado el nombre del inglés). La dependencia que el idioma español tenía del idioma inglés en cuanto a información científica acabó por embrujarla también en castellano. En otros idiomas se habla de *loci* (en latín, “lugar” geométrico, curva) de Agnesi. Es una función algebraica, definida por la expresión $f(x) = d^3 / (x^2 + d^2)$, donde $d \in \mathfrak{R}$ y se deduce a partir de una maravillosa construcción, la cual realizaremos a continuación:

Sea $C(M, r)$ una circunferencia de radio r y centro M representada en un sistema de coordenadas cartesianas, de forma tal que el centro se encuentre sobre el eje “ y ” y el origen O pertenezca a la misma, es decir, el eje “ x ” es tangente a la circunferencia en el origen. Entonces existe un punto $Q = (0, 2r)$ diametralmente opuesto al origen y si trazamos la recta tangente a este punto Q (recta $y = 2r$), se tiene que dicha recta es paralela al eje “ x ” y además, para todo punto $B = (x, 2r)$ sobre ella, las rectas que pasan por el origen lo contienen, tienen un punto de intersección con la circunferencia en $A = (x_a, y)$. Luego, si el punto B recorre toda la recta $y = 2r$, la curva que surge de la unión de todos los pares $P = (x, y)$, formado por las abscisas de B y las ordenadas de A es la llamada Bruja de Agnesi, Fig. (c2. §1. 5).

Ya dada la construcción de la curva daremos respuesta a nuestro problema principal, el cual está formulado por la interrogante: ¿Cómo obtener la ecuación de la función a partir de la construcción?

Para dar respuesta a dicho problema es necesario primeramente realizar un razonamiento analítico sobre su construcción, Fig. (c2. §1. 6).

- 1) Los triángulos $\triangle AEO$ y $\triangle BDO$, donde $E = (x_a, 0)$ y $D = (x, 0)$, son triángulos rectos en E y D respectivamente, además son semejantes, por lo que se cumple la relación de proporcionalidad $\overline{AE}/\overline{OE} = \overline{BD}/\overline{OD}$, de donde se conoce que $\overline{AE} = y$, $\overline{BD} = 2r$, $\overline{OE} = x_a$ y $\overline{OD} = x$ por la fórmula de distancia entre dos puntos. Entonces sustituyendo se tiene la expresión $y/x_a = 2r/x$ [1d].
- 2) El valor del radio r de la circunferencia está dado por $r = \overline{OM}$. Además, para todo $A = (x_a, y)$, se tiene que el triángulo $\triangle MFA$, con $F = (0, y)$ es rectángulo con hipotenusa $\overline{AM} = r$, por lo tanto, aplicando el teorema de Pitágoras $r^2 = \overline{FA}^2 + \overline{FM}^2 = (x_a)^2 + \overline{FM}^2$ y por suma de segmentos sobre una misma recta $r = \overline{OM} = \overline{OF} + \overline{FM} = y + \overline{FM}$ y despejando \overline{MF} se tiene que $\overline{MF} = r - y$. De esta forma se obtiene la expresión:

$$r^2 = (x_a)^2 + (r - y)^2 \Rightarrow x_a = \pm \sqrt{y(2r - y)} \quad [2d]$$

Luego sustituyendo [1d] en [2d] y realizando transformaciones algebraicas se obtiene la relación $y = 8r^3/(x^2 + 4r^2)$, de donde si sustituimos el radio por el diámetro obtenemos la ecuación buscada $f(x) = d^3/(x^2 + d^2)$.

Además, notemos que $\tan \alpha = y/x_a = 2r/x$, donde α representa el ángulo común entre los triángulos $\triangle AEO$ y $\triangle BDO$, luego se tiene que $x = 2r/\tan \alpha$ y $\tan \alpha = y/x_a$, en la cual sustituyendo la expresión [2] se llega a $\tan \alpha = y/\sqrt{y(2r - y)}$ y que aplicando propiedades trigonométricas y elevando al cuadrado ambos miembros, se tiene $\sin^2 \alpha / \cos^2 \alpha = y/2r - y$, que implica la relación $2r/y = 1/\sin^2 \alpha$. De esta forma obtenemos que $x = 2r/\tan \alpha$ y $y = 2r \sin^2 \alpha$. Si hacemos un cambio de parámetro de $t = 1/\tan \alpha$ y sustituimos el radio en función del diámetro se tiene la ecuación paramétrica $\{x = dt, y = d/t^2 + 1\}$, de la versiera.

La versiera cuenta con ciertas propiedades características de las cuales veremos algunas:

- Posee una asíntota en el eje "x" (la recta $y = 0$) y un máximo en el punto $Q = (0, d)$.
- Tiene dos puntos de inflexión, los cuales son $P_{1,2} (\pm d/2\sqrt{3}, 3d/8)$.
- El área de la zona comprendida entre la bruja y su asíntota es cuatro veces el área del círculo (es decir, $A_{zc} = 4\pi r^2 = \pi d^2$)

Entre las aplicaciones prácticas más útiles podemos citar:

- En Estadística, la Distribución de Cauchy de una variable aleatoria, se expresa por una Bruja de Agnesi.

- En la descripción física de los fenómenos de resonancia, por ejemplo, un átomo afectado por una radiación monocromática emite una radiación cuya intensidad depende de la frecuencia de la radiación emitida, y la relación entre las dos radiaciones viene dada por la Bruja de Agnesi, con el máximo en la longitud de onda de luz incidente.

§2.2 Secciones Cónicas

2.2.1 Origen común de las secciones cónicas

Las secciones cónicas fueron descubiertas por los antiguos griegos entre los años 600 y 300 a.C. Éstos las definían en términos de intersecciones de planos y conos, de aquí el nombre de "secciones cónicas". Luego, al comienzo del período de Alejandría, se conocía ya lo bastante sobre estas curvas, como para que Apolonio (269-190 a.C.) escribiera una obra de ocho volúmenes sobre ellas, donde las distingue unas de otras y las nombra como elipse, parábola e hipérbola (derivados del griego) y además describe algunas de sus propiedades fundamentales. Más tarde hacia el final éste período, Hypatia (370-415 d.C.) escribió un libro titulado: "*Sobre las cónicas de Apolonio*", con el objetivo de interpretar las obras de Apolonio y así facilitar el entendimiento de los conceptos que allí se trataban. Después de la muerte de Hypatia, las secciones cónicas cayeron en el olvido, y no fue hasta comienzos del siglo XVII, cuando los científicos se dieron cuenta de que muchos fenómenos naturales se describían mejor por medio de estas curvas.

Antes de proseguir con el estudio de las secciones cónicas es importante aclarar que los antiguos griegos, no se referían precisamente a un cono, sino a una superficie cónica, es decir, la superficie generada por una recta g en revolución con respecto a otra recta r que la corta en un punto V formando un ángulo fijo ψ , tal que $0^\circ < \psi < 90^\circ$. A la recta g y todas las homólogas se conocen como generatrices, el punto V por cúspide y la recta r como eje de revolución, Fig. (c2. §2. 7).

De esta forma se tiene como sección cónica a la curva plana que resulta al cortar una superficie cónica con un plano π que no contiene a la cúspide y forma un ángulo φ con el eje de revolución r , donde $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$. Entonces, partiendo de que una sección cónica en particular, queda definida de manera única por el valor del ángulo φ , para un ángulo ψ constante y un punto A fijado en la superficie cónica (vértice de la cónica), por el cual se trazará el plano, veamos los siguientes resultados:

1^{ro}) Relación con la nomenclatura dada por Apolonio,

- Si $\psi < \varphi \leq 90^\circ$, se tiene una elipse, Fig. (c2. §2. 8a).
- Si $\varphi = \psi$, se tiene una parábola, Fig. (c2. §2. 8b).
- Si $0 \leq \varphi < \psi$, se tiene una hipérbola, Fig. (c2. §2. 8c).

2^{do}) Constante de excentricidad e : Es la forma de medir el grado de alargamiento de la cónica y se halla por la relación de proporcionalidad $e = \cos \varphi / \cos \psi$.

A continuación veamos el comportamiento de e con respecto a la nomenclatura de Apolonio:

- Si se tiene que $\psi < \varphi \leq 90^0$ (la elipse), entonces $\cos\psi > \cos\varphi \geq 0$ y por lo tanto $0 \leq e < 1$. Además, en el caso en que se tiene $e = 0$ se le conoce como circunferencia (caso límite de la elipse). En esta terminología de excentricidad, es conveniente separar la circunferencia de la elipse ya que esta curva no es una cónica excéntrica, sino que es totalmente céntrica.
- Si se tiene que $\psi = \varphi$ (la parábola), entonces $\cos\psi = \cos\varphi$ y por lo tanto, todas las parábolas tienen excentricidad $e = 1$.
- Si se tiene que $0 \leq \varphi < \psi$ (la hipérbola), entonces $\cos\psi < \cos\varphi \leq 1$ y por lo tanto las hipérbolas poseen una excentricidad $e > 1$.

Analizando detalladamente la definición constructiva de las secciones cónicas, según su origen común, surgen otras curvas que satisfacen parcialmente las condiciones de la definición: las llamadas cónicas degeneradas y surgen a partir de la siguiente interrogante: ¿Qué curva se obtiene si el plano corta la superficie cónica de forma tal que contenga a su cúspide? Este pensamiento dio lugar a las curvas, denominadas cónicas degeneradas, que como su nombre indica se corresponde con la definición de sección cónica, en casi todos los sentidos, excepto que tales secciones contienen a la cúspide de la superficie cónica. Veamos para qué valores de φ se tienen las distintas curvas y cuáles se degeneran para formarlas:

- Si tomamos la elipse ($\psi < \varphi \leq 90^0$), la curva se degenera a un punto, el cual coincide con la cúspide de la superficie cónica.
- Si tomamos la parábola, la curva se degenera a una recta, la cual coincide con una generatriz de la superficie cónica.
- Si tomamos la hipérbola con $\varphi = 0^0$, la curva se degenera a dos rectas que se cortan en el vértice, las cuales coinciden con dos generatrices de la superficie cónica.

Apoyándonos en los conocimientos de la Geometría Analítica podemos realizar la deducción de la ecuación general de una cónica, a partir de la ecuación general de una superficie cónica $Ax^2 + Cy^2 + Mz^2 + Bxy + Nxz + Pyz + Dx + Ey + Pz + F = 0$, ya que dicha superficie siempre se intercepta con el plano coordenado x e y (el plano $z = 0$), dando como resultado una sección cónica. Por lo tanto, calculando la ecuación resultante del sistema de ecuaciones planteado por la intersección, se obtiene la ecuación general de segundo grado en dos variables $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (la ecuación general de una cónica). Una observación importante que se deriva de la ecuación obtenida es que toda ecuación de segundo grado en dos variables describe una cónica y viceversa.

2.2.2 Secciones cónicas como lugar geométrico

Como se conoce, la definición de cónicas como secciones fue la primera idea que se tuvo de estas curvas, sin embargo no fue de esta forma como surgen sus propiedades más importantes, debido a los pocos conocimientos que se tenían de superficies de revolución, entre otras materias de la geometría, sino que se llevó a cabo el estudio de las mismas como lugar geométrico de un plano, que no es más que la forma de construirlas a partir de un conjunto de puntos que cumplen ciertas propiedades geométricas. De esta forma han surgido a lo largo de la historia varias definiciones de estas curvas, tanto generales, como particulares. En el epígrafe estudiaremos a continuación algunas de estas definiciones.

2.2.2.1 Forma general de cónicas según su excentricidad

Salvo la circunferencia, que no es una curva excéntrica una cónica se puede definir de forma general a partir de un punto fijo F llamado foco, una recta fija d llamada directriz y su excentricidad $e > 0$ del siguiente modo:

El lugar geométrico de los puntos P , del plano que se encuentran a una distancia no nula de F y d , respectivamente $d(P,F)$ y $d(P,d)$, tales que el cociente $d(P,F)/d(P,d) = e$ sea un valor constante, es una cónica de excentricidad e .

Supongamos que $P = (x, y)$ son los puntos de la curva y para fijar las ideas, tomaremos el foco en $F = (p, 0)$ y la directriz $x + k = 0$, donde $|k| > |p|$. Entonces, se tiene que

$e = d(P,F)/d(P,d) = \sqrt{(x-p)^2 + y^2} / |x+k| = \sqrt{x^2 - 2px + p^2 + y^2} / (x+k)$. Luego, elevando al cuadrado en ambos miembros y agrupando términos semejantes, se tiene la ecuación $(1 - e^2)x^2 - 2(p + ke^2)x + (p^2 - k^2e^2) + y^2 = 0$, conocida como ecuación general de una cónica según su excentricidad con foco sobre el eje "x", Fig. (c2. §2. 9).

Si sustituimos los valores de excentricidad en la ecuación sabremos cuando se trata de una elipse ($0 < e < 1$), Fig. (c2. §2. 10a) una parábola ($e = 1$), Fig. (c2. §2.10b) o una hipérbola ($e > 1$), Fig. (c2. §2. 10c). Además, en el caso de la elipse y la hipérbola, se tiene que existen dos puntos F_1 y F_2 distintos que generan mediante esta construcción la misma curva de forma independiente, es decir, si $F_1 = (p, 0)$, con la directriz $x + k = 0$ generan la elipse (la hipérbola), entonces existe $F_2 = (-p, 0)$ que con la directriz $x - k = 0$ genera la misma elipse (la hipérbola), Fig. (c2. §2. 11). En el caso de la parábola, se tiene definida de forma única por uno y sólo un foco, por lo que la estudiaremos particularmente definida a partir de esta construcción y que se conoce como definición clásica de la parábola.

2.2.2.1.1 Parábola

Los historiadores consideran que la parábola fue una de las primeras secciones cónicas que se descubrieron, debido a la aplicación en la búsqueda de la solución de uno de los tres problemas clásicos, la duplicación del cubo, por Menecmo. Sin embargo, el primero en usar el término de parábola (proveniente del griego de παραβολή), fue el matemático Apolonio de Perge. Esta curva fue estudiada también por Arquímedes, con la búsqueda de la solución de uno de los problemas famosos, la cuadratura del círculo y de donde resulta el libro titulado: "Sobre la cuadratura de la parábola".

Definición clásica: En un plano, dado un punto F (foco) fijo y una recta d (directriz) fija, se define como parábola al lugar geométrico de los puntos P del plano para los cuales se cumple la igualdad $d(P,F) = d(P,d)$, es decir $e = d(P,F)/d(P,d) = 1$. De este resultado se tiene para $d: x + p = 0$ y $F = (p, 0)$, la ecuación $y^2 = 4px$, (ecuación de una parábola con vértice en el origen y foco sobre el eje "x"). Si tomamos el foco sobre el eje "y", ($F = (0, p)$) y la directriz $d: y + p = 0$, entonces se tiene como ecuación de una parábola $x^2 = 4py$, en este caso coincide con la estudiada antes como función cuadrática, ya que despejando se tiene la ecuación $y = x^2/4p$.

Si realizamos una traslación $\{x = x' + a, y = y' + b\}$ sobre la curva, se tienen las ecuaciones respectivas $(y - b)^2 = 4p(x - a)$ y $(x - a)^2 = 4p(x - b)$, de una parábola con vértice $V = (a, b)$, y por consiguiente simétrica respecto a la recta $y = b$, con directriz $x = a - p$ y foco $F = (a + p, b)$, si abre hacia el lado y $x = a$, con directriz $y = b - p$ y foco $F = (a, b + p)$ si abre hacia arriba o hacia abajo (función). En el caso $(y - b)^2 = 4p(x - a)$, si tomamos $b = 0$ y $p = -a = -1/4$, transformando la ecuación a coordenadas polares, se tiene $\rho = r/2 \cos^2(\theta/2)$. Representada de ésta forma, tenemos que la parábola es un caso particular de la espiral sinusoidal, curvas que estudiaremos en un epígrafe posterior.

Una observación del comportamiento maravilloso de la parábola se tiene por el hecho de que queda totalmente definida como la cónica de excentricidad $e = 1$, lo cual nos lleva al estudio de la semejanza entre ellas y se obtiene como resultado que todas las parábolas son semejantes, es decir, tienen la misma forma, salvo su escala, Fig. (c2. §2.12). Por este veamos algunas de sus propiedades principales, tomando como base la parábola $y^2 = 4px$:

- La recta que une al vértice con el foco se le conoce como el semieje de la parábola o recta de simetría, ya que como su nombre indica, la curva es simétrica respecto a ésta. El segmento de recta que une estos puntos se denomina distancia focal debido a que su longitud se corresponde con $L_{\overline{PF}} = p$ (distancia de la curva al foco).
- La recta tangente a la parábola $y^2 = 4px$ en un punto $M = (x_0, y_0)$ viene dada por la ecuación $yy_0 = 2p(x + x_0)$ y la normal en este punto, por $y/y_0 = [(x_0 - x)/2p] + 1$.
- Los segmentos de recta que unen dos puntos de una parábola P_1 y P_2 , se llaman cuerdas y la porción de la parábola que los une se denominan arcos parabólicos $\widetilde{P_1P_2}$. Así, para dos puntos de una parábola, la cuerda y el arco que los une, delimitan un segmento de parábola, cuya área es $S = 2A_p/3$, donde A_p es el área del paralelogramo formado por la cuerda y una tangente, paralela a dicha cuerda.
- En particular, la cuerda que corta perpendicularmente el eje de la parábola y contiene al foco, se denomina lado recto y su longitud está dado por $l = 4p$. Éste resultado se puede demostrar fácilmente, tomando los puntos extremos $P_1 = (p, 2p)$ y $P_2 = (p, -2p)$ de la cuerda hallando $d(P_1, P_2) = l = \sqrt{(p - p)^2 + (2p + 2p)^2} = 4p$. De esta forma la ecuación de la parábola queda simplificada a $y^2 = lx$.
- Las semirectas paralelas al semieje de simetría se llaman diámetros de la parábola y tienen la propiedad de bisecar a todas las cuerdas paralelas a la tangente de la curva en el punto de contacto con el diámetro.
- La longitud de un arco parabólico con extremos en el origen y un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ se calcula por $L_{\widetilde{P_0O}} = m/2 \left[\sqrt{2x_0/m(1 + (2x_0/m))} + \ln \left(\sqrt{2x_0/m} + \sqrt{1 + (2x_0/m)} \right) \right]$, donde $m = l/2$. [Semendiaev, 1971]
- El Radio de curvatura en un punto $M = (x_1, y_1)$ es $R = (m + 2x_1)^{3/2} / \sqrt{m} = m / \sin^3 \alpha = n^3 / m^2$, con $m = l/2$ y donde α es el ángulo que forma la tangente con el eje de la parábola y n la

longitud del segmento \overline{MN} de la normal en el punto M , hasta el punto N de intersección con el eje “ y ”. [Semendiaev, 1971]

Entre las aplicaciones más importantes de esta cónica se tienen:

- Una antena de seguimiento de satélites, debido a las grandes distancias en juego, puede recibir señales cuyas intensidades son del orden de solo una millonésima de vatio. Con el fin de amplificar la intensidad de la señal recibida, se utiliza en el diseño de antenas la propiedad reflexiva de la parábola (La parábola refleja sobre el foco los rayos paralelos al eje y análogamente un emisor situado sobre el foco refleja rayos paralelos al eje)
- La propiedad reflexiva de esta curva también es la base para la construcción de los espejos parabólicos de los telescopios.
- Los focos de los automóviles en general están hechos basados en secciones parabólicas, debido a que en la parábola los rayos que pasan por el foco salen paralelos al eje y viceversa.
- También describen parábolas las trayectorias de cualquier cuerpo (bolas, pelotas, chorro de agua y otros) que cae atraído por La Tierra.
- En la construcción de curvas que estudiaremos en epígrafes posteriores como la cisoide de Diocles (como podaria respecto al vértice y como inversión respecto al foco), la trisectriz de MacLaurin (podaria respecto al foco) y la cardioide (como la inversión respecto al vértice).

2.2.2.2 Cónicas a partir de dos focos

Otra manera antigua de definir una elipse y una hipérbola como lugar geométrico se tiene a partir de la relación que tienen los puntos de la curva con respecto a sus dos focos. Veamos a continuación un estudio de estas curvas en particular como cónicas a partir de dos focos.

2.2.2.2.1 La Elipse

La elipse como curva geométrica en un plano, tuvo lugar primeramente por Menaechmus (380-320 a.C.), quien las introduce a partir de dos puntos fijos en el plano y una distancia constante, luego fue estudiada con mayor profundidad por Euclides (300 a.C.), quien dio sus principales propiedades y más características. De esta forma se estudia la elipse en la mayoría de los libros y se dan la mayor cantidad de propiedades de la misma, por lo que se considera como la construcción de definición clásica de una elipse. En el epígrafe referido a las ruletas veremos, esta curva tiene una importancia significativa como caso particular, ya que pertenece como tal, a distintas clasificaciones.

Definición clásica: Dado dos puntos fijos F_1 y F_2 en el plano y un valor fijo $d = 2a$, tal que $d > d(F_1, F_2)$, la elipse se define como el lugar geométrico de los puntos P del plano, tales que la suma de las distancia a los puntos F_1 y F_2 es constantemente igual a d . A los puntos fijos se les conoce como focos de la elipse. Además, cualquiera de estos focos se corresponden con los antes dicho en la definición según su excentricidad.

Mediante ésta definición de elipse, se le atribuye como su ecuación generadora, la relación $d(P, F_1) + d(P, F_2) = d = 2a$, colocando sus focos en un sistema de coordenadas cartesianas y considerando sus puntos por coordenadas variables. Para realizar más fácil esta deducción,

consideremos todos los casos posibles como una traslación y/o una rotación del caso que posee los focos dados por los pares $F_1 = (-c, 0)$ y $F_2 = (c, 0)$, así mediante las fórmulas de distancia entre dos puntos en el plano conocidas de la Geometría analítica, se tiene que el lugar geométrico de los puntos $P = (x, y)$ de la elipse se rigen por la ecuación $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = d = 2a$ y eliminando radicales adopta la forma simplificada $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, donde $b^2 = a^2 - c^2$ y se conoce como ecuación canónica de la elipse centrada en el origen y focos sobre el eje "x", Fig. (c2. §2.13). Si intercambiamos a por b , entonces se tiene la ecuación de una elipse centrada en el origen, pero con focos sobre el eje de "y".

Si realizamos una traslación $\{x = x' + p, y = y' + q\}$ sobre la curva en el plano coordenado se tiene la ecuación $(x-p)^2/a^2 + (y-q)^2/b^2 = 1$, de una elipse con centro en el punto $O = (p, q)$.

Estudiaremos varias de sus propiedades principales a partir de la ecuación canónica:

- Los interceptos con los ejes de coordenadas se encuentran en los puntos $A_1 = (-a, 0)$, $A_2 = (a, 0)$, $B_1 = (0, b)$ y $B_2 = (0, -b)$, los cuales son conocidos como sus vértices y los segmentos $\overline{A_1A_2}$ y $\overline{B_1B_2}$ sus semiejes, Fig. (c2. §2. 13).
- Los segmentos de recta que unen dos puntos de una elipse se denominan cuerdas elípticas. La cuerda perpendicular al semieje de la elipse $\overline{A_1A_2}$ que contiene a un foco o al otro se denomina lado recto de la elipse y tienen una longitud $p = 2b^2/a$. Las cuerdas que pasan por el centro de la elipse se les llaman diámetros y poseen las siguientes características:

1) Todos los diámetros se cortan en su punto medio.

2) Sea d_1 un diámetro de la elipse, entonces existe un único diámetro d_2 que corta todas las cuerdas paralelas a d_1 por su punto medio, a tal diámetro se le conoce como diámetro conjugado de d_1 y se denota por $d_2 = \overline{d_1}$. Además, si d_1 coincide con su semieje $\overline{A_1A_2}$ se tiene que el conjugado d_2 coincide con el semieje $\overline{B_1B_2}$.

3) Sean m_1 y $\overline{m_1}$ las pendientes del d_1 y su conjugado $\overline{d_1}$ respectivamente, entonces

$$m_1 \overline{m_1} = -\frac{b^2}{a^2}. \text{ Además supongamos que } \alpha \text{ y } \beta \text{ sean los ángulos formados por } d_1 \text{ y } \overline{d_1}$$

con el semieje $\overline{A_1A_2}$ de la elipse, entonces si $L_{d_1} = 2a_1$ y $L_{\overline{d_1}} = 2b_1$, se tiene que $ab = a_1 b_1 \text{ sen}(\alpha + \beta)$. De este resultado se deriva el teorema de Apolonio para una elipse, el cual dice que: en una elipse se verifica la relación $a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$.

- En un punto $M = (x_0, y_0)$ de la elipse, la recta tangente está dada por la ecuación $xx_0/a^2 + yy_0/b^2 = 1$. y la normal por $a^2 x / (a^2 - b^2) x_0 - b^2 y / (a^2 - b^2) y_0 = 1$. [Semendiaev, 1971]
- En un punto $M = (x_0, y_0)$ el radio de curvatura de la elipse está dado por la fórmula:

$$R = a^2 b^2 (x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4)^{3/2} = (r_1 r_2)^{3/2} / ab = p / \text{sen}^3 u$$

Donde r_1 y r_2 son las distancias del punto a los focos F_1 y F_2 respectivamente, p es la longitud del lado recto y u el ángulo entre la recta tangente y el radio vector del punto de tangencia. [Semendiaev, 1971]

- La constante de excentricidad de una elipse se obtiene a partir de los parámetros que se derivan de esta nueva definición por la relación $e = c/a$.
- El área de una elipse esta dada por la fórmula $A = \pi ab$, de un sector elíptico (región limitada por dos diámetros de la elipse) por $A_s = ab$ y de un segmento limitado por una cuerda de elipse con extremos $p_1 = (x, y)$ y $p_2 = (x, -y)$ es $S = ab \arccos(x/a) - xy$.

2.2.2.2.1.1 La circunferencia como caso límite de la elipse

A partir de la definición clásica de una elipse se puede incluir como caso particular y de gran importancia la circunferencia (caso límite de la elipse, cónica céntrica), adoptando así la siguiente definición.

Definición clásica: Es la curva resultante de los puntos que equidistan de un punto fijo conocido como centro a un distancia r llamado radio.

Como podemos observar, esta definición relaciona estrechamente a la circunferencia como caso particular de elipse por la definición clásica de la misma, pues, es el resultado del proceso de convergencia en la traslación de los dos focos de la elipse por el semieje $\overline{A_1A_2}$ tendiendo a unirse en el centro de la misma. Por lo tanto F_1 y F_2 coinciden y por consiguiente $c = 0$ y $d(P, F_1) = d(P, F_2) = a = b = r$, entonces $d(P, F_1) + d(P, F_2) = d = 2r$ y tiene por ecuación cartesiana $x^2 + y^2 = r^2$. Si realizamos al igual que en la elipse una traslación $\{x = x' + p, y = y' + q\}$ se tiene que la ecuación de la circunferencia con centro en el punto (p, q) es $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$.

Veamos algunas de las propiedades principales de la circunferencia centrada en el origen:

- Los segmentos de recta que unen dos puntos de una circunferencia se llaman cuerdas y aquellas que además contienen a su centro se denominan diámetros. Los diámetros de esta curva son iguales y como en la elipse se cortan en su punto medio, de aquí que la mitad de la longitud de los diámetros son los radios de la circunferencia, es decir el valor r . También cumplen que un diámetro $\overline{d_1}$ es conjugado de otro d_1 , si el ángulo entre ellos es 90° .
- La porción de la circunferencia entre dos puntos P_1 y P_2 de la curva se denomina arco circular, se denota por $\widehat{P_1P_2}$ y su longitud se calcula por la fórmula $L_{\widehat{P_1P_2}} = \pi \alpha r / 180^\circ$. Si el arco es toda la circunferencia, la fórmula de longitud se reduce a $L = 2\pi r$.
- Aquellas rectas que cortan la circunferencia en un solo punto $M = (x_0, y_0)$, son las rectas tangentes y tienen la ecuación $x_0x + y_0y = 0$. Además, cumplen la propiedad de formar un ángulo recto con el radio de la circunferencia en dicho punto, por lo tanto la recta que contiene a este radio es precisamente la recta normal a la curva en el punto M y tienen como ecuación $y_0x - x_0y = 0$.

- En una circunferencia se tienen tres tipos de ángulos importantes, los centrales, los inscritos y los semi-inscritos, Fig. (c2. §2. 14).
 - Los centrales α : Son aquellos cuyo vértice es el centro de la circunferencia y sus lados son dos radios y tienen la propiedad de tener igual *amplitud del arco*¹ que encierra.
 - Los inscritos β : Son aquellos cuyo vértice es un punto de la circunferencia y sus lados son dos cuerdas. Estos ángulos tienen la propiedad de ser iguales si son inscritos sobre la misma cuerda y tienen una amplitud igual a la mitad del ángulo central sobre la misma cuerda.
 - Los semi-inscritos γ : Son aquellos cuyo vértice es un punto de la circunferencia y sus lados están formados por una cuerda y la recta tangente a la curva en dicho vértice. Estos ángulos tienen una amplitud igual a la de un ángulo inscrito sobre la cuerda que forma al semi-inscrito.
- Un sector circular es la porción de la región limitada por la circunferencia formada por un ángulo central y se tiene que el área del sector está dada por la fórmula $A_s = \pi r^2 \alpha / 360^\circ$, donde α es el ángulo central que la forma. De aquí que el área de la región limitada por la curva (el círculo) esta dada por la fórmula $A = \pi r^2$, ya que $\alpha = 360^\circ$. Además si el ángulo es un inscrito la porción del círculo se denomina segmento de circunferencia y tiene el área dada por $S = r^2 \left[\left(\frac{\pi \alpha}{180^\circ} \right) - \text{sen} \alpha \right] / 2$, para un ángulo central sobre la misma cuerda que el inscrito.

Una parametrización de la circunferencia es $C : \{x = r \cos \theta, y = r \text{sen} \theta\}$. Representada de esta forma veremos en el epígrafe relacionado con las curvas de Lissajous, que esta curva es uno de sus casos particulares.

La circunferencia, como habíamos dicho no es excéntrica ($e = 0$), por lo que no se le puede atribuir la ecuación polar de las cónicas a partir de su excentricidad, sin embargo, se calcula muy fácil para una circunferencia centrada en el origen ya que $\rho^2 = x^2 + y^2$, por lo tanto la ecuación polar de la circunferencia es $\rho = r$. En el caso en que se tenga una circunferencia centrada en el punto (p, q) , al llevar la ecuación a coordenadas polares se tiene $\rho^2 - 2\rho(p \cos \theta + q \text{sen} \theta) = r^2 - (p^2 + q^2)$ y como $r^2 = (p^2 + q^2)$ se puede simplificar la ecuación polar a $\rho = 2(p \cos \theta + q \text{sen} \theta)$. De esta forma, cuando $q = 0$, veremos que la curva es también conocida como caso particular de una espiral sinusoidal (epígrafe posterior).

Entre las aplicaciones más importantes de la circunferencia se tienen:

- Se utiliza en el desarrollo y comprensión de la Trigonometría (ver capítulo 1, epígrafe 1).
- Existencia del número $\pi \approx 3,14$ (Pi).
- Sirve de herramienta básica para varias de las construcciones que veremos en epígrafes posteriores, como la cisoide de Diocles y todas las ruletas cicloidales. Además, se deriva una construcción de la elipse conocida como construcción paramétrica o construcción Point-wise, de la cual se obtiene la ecuación paramétrica de la elipse.

¹ Amplitud de arco: Es la longitud del arco que medido en grado por la conversión $L/\pi = \text{ángulo}/180^\circ$.

2.2.2.2.1.1 Construcciones de elipse a partir de circunferencias

❖ Construcción paramétrica de la elipse o construcción de Point-wise (método de puntos):

Dibujemos dos circunferencias C_1 y C_2 concéntricas en un punto O de radios r_1 y r_2 respectivamente, donde $r_1 < r_2$ y tomemos dos puntos P_1 y P_2 sobre las circunferencias C_1 y C_2 respectivamente, tales que los puntos O, P_1 y P_2 se encuentren alineados por el radio vector $v = \overline{OP_2}$. Luego tracemos una recta l_1 por el punto P_1 , paralela al eje “x” y una recta l_2 por el punto P_2 , paralela al eje “y”. Entonces los puntos de intersección entre las rectas l_1 y l_2 cuando el radio vector v recorre todos los radios de la circunferencia C_2 , generan una elipse centrada en O con semiejes $a = r_2$ y $b = r_1$.

Si tomamos O en el origen de coordenada, se tiene que las ecuaciones de las rectas l_1 y l_2 son $y = r_1 \operatorname{sen} \theta$ y $x = r_2 \operatorname{cos} \theta$ respectivamente y por lo tanto se deduce una parametrización de la elipse $E : \{x = a \operatorname{cos} \theta, y = b \operatorname{sen} \theta\}$, Fig. (c2. §2.15).

❖ Podarias y envolventes: Una propiedad importante de la elipse con respecto a la circunferencia se tiene con la podaria de la curva con respecto a un foco, la cual es una circunferencia circunscrita. Además inversamente, la antipodaria de una circunferencia con respecto a un punto O' interior, es una elipse inscrita en la circunferencia donde el punto O' es uno de sus focos. Este hecho puede ser utilizado para dibujar elipses como envolventes de rectas de la siguiente forma, Fig. (c2. §2.16).

- 1) Sea un círculo y un punto O interior del mismo.
- 2) Dibujar una recta L desde un punto P del círculo hasta O .
- 3) Dibujar una línea M perpendicular a L y que pase por P .
- 4) Repetir los pasos 2 y 3 para otros puntos P del círculo.
- 5) La envolvente de las líneas M es una elipse con un foco en O .

❖ La elipse como anamorfosis de la circunferencia: Cierta transformación de la circunferencia al deformar ortogonalmente el plano cartesiano asociado a la circunferencia, se denomina anamorfosis. El término anamorfosis proviene del idioma griego y significa transformar. En el caso de la circunferencia, si el plano cartesiano se divide en cuadrados, cuando dicho plano se «deforma» en sentido del eje “x”, el “y”, o ambos, la circunferencia se transforma en una elipse, y los cuadrados en rectángulos, Fig. (c2. §2. 17).

Entre las aplicaciones más importantes de una elipse podemos citar:

- La Luna describe en torno a La Tierra una órbita elíptica con La Tierra en uno de sus focos.
- El cometa Halley, probablemente el más famoso de todos los cometas describe una órbita elíptica.
- Los rayos luminosos que parten de un foco, deben reflejarse en el otro.
- Como inversión de una elipse se puede construir un caracol de Pascal, curva que estudiaremos en un epígrafe posterior.

2.2.2.2 La Hipérbola

Los historiadores consideran que la hipérbola fue una de las primeras secciones cónicas que se descubrieron, debido a la aplicación en la búsqueda de la solución de uno de los tres problemas clásicos, la duplicación del cubo, por Menecmo. Sin embargo el primero en estudiarla como lugar geométrico a partir de dos focos y usar el término de hipérbola (proveniente del griego de *ὑπερβολή* (exceso)), fue el matemático Apolonio de Perge y al igual que la elipse podemos ver que de esta forma se estudia la hipérbola en la mayoría de los libros y se dan la mayor cantidad de sus propiedades, por lo que se considera como la construcción de definición clásica de una hipérbola.

Definición clásica: Dado dos puntos fijos F_1 y F_2 en el plano y un valor fijo $d = 2a$, tal que $d < d(F_1, F_2)$, la hipérbola se define como el lugar geométrico de los puntos P del plano, tales que el valor absoluto (módulo) de la diferencia entre las distancias de P a los puntos F_1 y F_2 sea constantemente igual a d . A los puntos fijos se les conoce como focos de la hipérbola. Además, cualquiera de estos focos se corresponde con los antes mencionados en la definición según su excentricidad.

Mediante esta definición de hipérbola, se puede atribuir como ecuación generadora de la misma, la relación $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = d = 2a$, colocando sus focos en un sistema de coordenadas cartesianas y considerando sus puntos por coordenadas variables. Para realizar más fácil esta deducción, sin pérdida de generalidad consideremos todos los casos posibles como una traslación y/o una rotación del caso que posee los focos dados por los pares $F_1 = (-c, 0)$ y $F_2 = (c, 0)$, así mediante las fórmulas de distancia entre dos puntos en el plano, conocidas de la Geometría Analítica, se tiene que el lugar geométrico de los puntos $P = (x, y)$ de la hipérbola se rigen por la ecuación $|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| = d = 2a$ y eliminando radicales (elevando al cuadrado) adopta la forma simplificada $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, donde $b^2 = c^2 - a^2$ y se conoce como ecuación canónica de la hipérbola centrada en el origen, Fig. (c2. §2. 18).

De la relación se tiene que la curva es simétrica respecto a los ejes de coordenadas (las rectas $x = 0$ y $y = 0$) y el origen de coordenadas, el cual coincide con su centro. Además, los interceptos con los mismos se encuentran en los puntos $A_1 = (-a, 0)$ y $A_2 = (a, 0)$, los cuales se conocen como vértices, al segmento $\overline{A_1A_2}$ se le llama semieje de la hipérbola. También, posee dos asíntotas, las rectas $bx + ay = 0$ y $bx - ay = 0$, las cuales se cortan formando un ángulo $\varphi = 180^\circ - 2 \arctan(b/2a)$ y en el origen de coordenadas, Fig. (c2. §2. 18).

Veamos a continuación algunos casos específicos de hipérbolas:

- En el caso particular en que $a = b$, se le conoce a la curva como hipérbola equilátera, tiene la ecuación $x^2 - y^2 = a^2 = b^2$. Tiene la propiedad de que sus asíntotas son las rectas $y = \pm x$ y se cortan formando un ángulo de 90° . Además, como habíamos anunciado, la función de proporcionalidad inversa constituye un caso particular, pues si realizamos una rotación de 45° , se tiene como resultado la expresión explícita $y = k/x$,

para $k = a^2/2$. La hipérbola expresada en coordenadas polares, es decir por la ecuación $\rho = 1/\sqrt{\cos(2\theta)}$, constituye uno de los casos particulares de las espirales sinusoidales (ver epígrafe relacionado).

- b) Si realizamos una rotación de 90° sobre la hipérbola $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, se obtiene la llamada hipérbola conjugada $y^2/b^2 - x^2/a^2 = 1$.
- c) Si realizamos una traslación $\{x = x' + p, y = y' + q\}$ sobre la curva en el plano coordenado se tiene la ecuación $(x - p)^2/a^2 - (y - q)^2/b^2 = 1$, de una hipérbola con centro en el punto $O = (p, q)$, focos en $F_{1,2} = (c = \pm\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ y vértices $A_{1,2} = (\pm a, 0)$.

Entre las propiedades principales de la hipérbola, a partir de su ecuación canónica se tienen:

- Los segmentos de recta que unen dos puntos de una hipérbola se denominan cuerdas hiperbólicas. Las cuerdas perpendiculares al semieje de la hipérbola A_1A_2 que contienen a un foco o al otro se denominan lados rectos de la hipérbola y tienen una longitud $p = 2b^2/a$. Las cuerdas que pasan por el centro de la hipérbola se les llama diámetros y poseen la siguientes características:
 - 1) Todos los diámetros se cortan en su punto medio.
 - 2) Sea d_1 un diámetro de la hipérbola, entonces existe un único diámetro d_2 de su hipérbola conjugada que corta todas las cuerdas paralelas a d_1 por su punto medio, a tal diámetro se le conoce como diámetro conjugado de d_1 y se denota por $d_2 = \overline{d_1}$. Además, si d_1 coincide con su semieje $\overline{A_1A_2}$ se tiene que el conjugado d_2 coincide con el semieje $\overline{B_1B_2}$.
 - 3) Sean m_1 y $\overline{m_1}$ las pendientes del diámetro d_1 y su conjugado $\overline{d_1}$ respectivamente, entonces $m_1\overline{m_1} = b^2/a^2$. Además supongamos que α y β sean los ángulos formados por d_1 y $\overline{d_1}$ con el semieje $\overline{A_1A_2}$ de la hipérbola ($\alpha > \beta$), entonces si $L_{d_1} = 2a_1$ y $L_{\overline{d_1}} = 2b_1$, se tiene que $ab = a_1b_1 \text{sen}(\alpha - \beta)$. De este resultado se deriva el teorema de Apolonio para la hipérbola, el cual dice que en una hipérbola se verifica la relación $a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2$.
- En un punto $M = (x_0, y_0)$ de la hipérbola, la recta tangente está dada por la ecuación $xx_0/a^2 - yy_0/b^2 = 1$. Calculando su pendiente $m = -A/B = (x_0/a^2)/(y_0/b^2) = x_0b^2/y_0a^2$, se tiene que la recta normal en $M = (x_0, y_0)$ tiene pendiente $m' = -y_0a^2/x_0b^2$ y por lo tanto su ecuación está dada por la expresión $a^2x/(a^2 + b^2)x_0 + b^2y/(a^2 + b^2)y_0 = 1$. [Semendiaev, 1971]
- En un punto $M = (x_0, y_0)$ el radio de curvatura de la hipérbola está dado por fórmula $R = a^2b^2(x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4)^{3/2} = (r_1r_2)^{3/2}/ab = p/\text{sen}^3u$, donde r_1 y r_2 son las distancias del punto a los focos F_1 y F_2 respectivamente, p es la longitud del lado recto y u el ángulo entre la recta tangente y el radio vector del punto de tangencia. [Semendiaev, 1971]

- En una hipérbola el área limitada por una cuerda perpendicular al eje "x" y el arco hiperbólico está dada por $A = xy - ab \ln(x/a - y/b) = xy - ab \operatorname{Arcoch}(x/a)$. [Semendiaev, 1971]

Entre las aplicaciones más importantes se tienen:

- El sistema LORAN (long distance radio navigation) de uso en aviones y barcos utiliza pulsos sincronizados transmitidos por dos estaciones separadas por gran distancia entre sí, Estos pulsos viajan a la velocidad de la luz (186 000 millas/s) la diferencia entre los tiempos de llegada al barco o al avión de esos pulsos está sobre una hipérbola que tiene a las dos estaciones como focos. Este sistema les permite determinar su posición sobre una carta marina.
- Como la circunferencia en la Trigonometría, la hipérbola equilátera constituye la base para obtener las razones hiperbólicas.
- Las hipérbolas se usan en Arquitectura, basta ver la Sagrada Familia de Gaudí, por formar arcos más esbeltos y estéticos que con una parábola.
- En el epígrafe siguiente analizaremos, los óvalos de Cassini como podaria de una hipérbola respecto al centro. En el caso en que la curva sea una hipérbola equilátera, la curva resultante es la lemniscata.

2.2.3 Ecuación polar de las cónicas a partir de su excentricidad

Las cónicas definidas a partir de su excentricidad e con foco en $F = (0,0)$ y directriz $d: x \pm k = 0$, donde $k \in \mathfrak{R}_+^*$ (representadas por la ecuación $e = \sqrt{x^2 + y^2} / |x \pm k|$), tienen como ecuación en coordenadas polares $\rho = p / (1 \pm e \cos \theta)$, donde p es el parámetro focal y el eje polar se encuentra dirigido desde el foco hasta el vértice mas próximo, Fig. (c2. §2.19). [Semendiaev, 1971]

2.2.4 Equivalencia entre las distintas formulas de la excentricidad de una cónica

A través del epígrafe, se ha tratado el tema de la excentricidad de una cónica como una constante que juega un papel importante en el estudio de esta familia de curvas, debido a que su valor determina los distintos casos particulares. Se han dado tres fórmulas con distinta apariencia para calcular esta constante, por lo que debido a que se trata de la misma, tomaremos como ejemplo una elipse E ($0 < e < 1$) y demostraremos la equivalencia existente entre las distintas expresiones dadas anteriormente, es decir, probemos la relación $e = d(P, F) / d(P, D) \Leftrightarrow e = c/a \Leftrightarrow e = \cos \phi / \cos \psi$. En lo sucesivo consideraremos que k es la distancia entre el origen y la directriz.

1^o) Comencemos la demostración con la relación: (I) $e = d(P, F) / d(P, D) \Leftrightarrow$ (II) $e = c/a$ y supongamos la elipse E con focos en $F_{1,2} = (\pm c, 0)$ y vértices en $A_{1,2} = (\pm a, 0)$ y $B_{1,2} = (\pm b, 0)$, entonces la ecuación (I), tomando F_1 como el foco F de la definición, se puede escribir por la ecuación $e = d(P, F) / d(P, d) = ((x - c)^2 + y^2)^{1/2} / |x - k|$, donde $k > a$ y evaluando en ella los vértices A_1 y B_1 se tienen las relaciones $e_{A_1} = ((c - a)^2)^{1/2} / k - a = a - c / k - a$ y $e_{B_1} = a / k$, por lo

tanto despejando se tiene que $k = a/e_B$. Como e es constante, se tiene que $e_A = e_B$ y entonces $e = a - c/(a/e - a) = a - c/a(1/e - 1) \Rightarrow e(1/e - 1) = a - c/a \Rightarrow 1 - e = 1 - e/a \Rightarrow e = c/a$.

2^o) Para demostrar la equivalencia entre (I) $e = d(P,F)/d(P,D)$ y (III) $e = \cos \varphi / \cos \psi$, sea $0 < p/k = \text{absisa focal/distancia a la directriz (con relación al origen)} < 1$ y tomemos la forma general de las cónicas con vértice en el origen y foco sobre el eje "x", la cual sabemos que está dada por la ecuación $(1 - e^2)x^2 - 2(p + ke)x + (p^2 - e^2k^2) + y^2 = 0$. Entonces, para $x = 0$ y $y = 0$ como e es una constante, tenemos que $p^2 - e^2k^2 = 0$ y por lo tanto $e = p/k$. Si se toma $p = a \cos \varphi$ y consideramos $k = a \cos \psi$ para $\psi < \varphi$, se cumple la relación que se buscaba $0 < p/k = a \cos \varphi / a \cos \psi = \cos \varphi / \cos \psi < 1$.

2.2.5 Aplicaciones generales de las cónicas

Una aplicación interesante de las cónicas en general tiene que ver con las órbitas de los cometas de nuestro sistema solar. De los 610 cometas identificados hasta 1970, 245 tienen órbitas elípticas, 295 parabólicas y 70 hiperbólicas y s. Todas estas órbitas tienen como foco el Sol y como vértice el punto en que el cometa está más cercano al Sol. Podemos percatarnos de que los cometas con órbitas hiperbólicas y parabólicas solo conseguimos verlos una vez mientras que los cometas con una órbita elíptica permanecen en nuestro sistema solar indefinidamente hasta que un suceso fuera de lo común perturbe su trayectoria ejemplo de ello es el famoso cometa Halley.

§2.3 Óvalos de Cassini

2.3.1 Óvalos de Cassini como familia de curvas

Los óvalos de Cassini fueron estudiados por el astrónomo Giovanni Domenico Cassini en 1680. Este pretendía descubrir una curva que representara el movimiento relativo de la tierra y el sol mejor que la elipse (aplicación propuesta por Kepler) y así propuso esta familia de curvas como una mejor descripción de las órbitas planetarias. Sin embargo a lo largo de la historia otros científicos demostraron que no es correcta esta afirmación, ya que estas órbitas son elípticas. Cassini define éstas curvas como un lugar geométrico de los puntos en el plano, para los cuales el producto de las distancias a dos puntos fijos es constante. Veamos analíticamente esta definición de los óvalos de Cassini y obtendremos su ecuación cartesiana para cuando los puntos fijos se encuentran sobre el eje "x".

Definición: Sean dos puntos $F_1 = (p, 0)$ y $F_2 = (-p, 0)$ fijados en el plano, entonces se define como óvalo de Cassini al lugar geométrico que describe un punto $P = (x, y)$ tales que $d(P, F_1) \cdot d(P, F_2) = k^2$, donde k es una constante. De esta definición se tiene la relación $d(P, F_1) \cdot d(P, F_2) = \sqrt{(x - p)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x + p)^2 + y^2} = k^2$ y se deduce la ecuación cartesiana de los óvalos de Cassini $(x^2 + y^2)^2 - 2p^2(x^2 - y^2) = k^4 - p^4$. Veamos a continuación algunas propiedades generales que se derivan de la ecuación cartesiana:

- Son curvas cerradas y simétricas respecto al origen, cuyas diversas formas que adopta, se encuentran en correspondencia con la relación entre los valores de los parámetros k y p :
 - Si $k < p$, se tienen dos óvalos iguales geoméricamente, Fig. (c2. §3.20).
 - Si $k = p$, se tiene una Lemniscata de Bernoulli, Fig. (c2. §3.21).
 - Si $p < k < p\sqrt{2}$, se tiene un óvalo con "talle" (cintura), Fig. (c2. §3.22).
 - Si $k > p\sqrt{2}$, se tiene un óvalo de forma elíptica, Fig. (c2. §3.23).
- Su ecuación en coordenadas polares es $\rho^4 - 2\rho^2 p^2 \cos 2\theta + p^4 = k^4$.

2.3.1.1 Los óvalos de Cassini en relación con la hipérbola

Como habíamos anunciado en el epígrafe anterior, la podaria de una hipérbola respecto a su centro son las curvas conocidas como óvalos de Cassini. Veamos a continuación la deducción matemática de este enunciado:

Sea H la hipérbola $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, entonces la ecuación de la recta tangente en un punto $M = (x_0, y_0)$ de H es $xx_0/a^2 - yy_0/b^2 - 1 = 0$ y la de la normal que pasa por su centro es $x_0^2/a^2 - y_0^2/b^2 - 1 = 0$. De éstas ecuaciones, se deducen las relaciones $x_0 = a^2x/(x^2 + y^2)$ y $y_0 = b^2y/(x^2 + y^2)$, por lo tanto como $M \in H$, sustituyendo en la ecuación de la hipérbola se tiene la ecuación de la podaria buscada $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2$, es decir, la ecuación cartesiana de los óvalos de Cassini con focos $F_1 = (a/\sqrt{2}, 0)$ y $F_2 = (b/\sqrt{2}, 0)$. Si la hipérbola usada es equilátera, se tiene que $a = b$ y por tanto la ecuación de la podaria resultante es $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ y coincide, como se verá posteriormente, con la ecuación de la lemniscata de Bernoulli.

2.3.2 Casos particulares

En este punto analizaremos de forma particular cada una de estas curvas, viendo en cada caso las propiedades más características y en especial veremos detalladamente el caso de la lemniscata de Bernoulli, ya que en nuestro trabajo, esta curva es esencial debido a su conexión con otras curvas estudiadas como lo es una construcción de la misma tomando una hipérbola como herramienta, además de formar parte, como caso particular de la familia de las cisoides, la cual estudiaremos en el próximo epígrafe. También estudiaremos en el caso de la lemniscata, su origen independientemente de los óvalos de Cassini y sus principales aplicaciones.

2.3.2.1 Dos óvalos iguales geoméricamente

Como habíamos obtenido, la ecuación de los dos óvalos iguales geoméricamente se tiene para cuando $k < p$ y como su nombre indica, su gráfica viene dada por dos figuras ovaladas independientes que forman una sola figura. Además, estos óvalos son simétricos respecto al origen de coordenadas.

Veamos a continuación algunas de sus propiedades esenciales:

- Las intersecciones con el eje "x", se encuentran en los puntos $A, B = (\pm \sqrt{k^2 + p^2}, 0)$, para un óvalo y $P, Q = (\pm \sqrt{p^2 - k^2}, 0)$, para el otro.
- Los extremos máximos y mínimos se alcanzan en los puntos $E, G = (\sqrt{4p^4 - k^4}/2p, k^2/2p)$ y $K, I = (-\sqrt{4p^4 - k^4}/2p, -k^2/2p)$ respectivamente.
- El radio de curvatura es $r = 2k^2\rho^3/(p^4 - k^4 + 3\rho^4)$, donde ρ es el radio vector de la ecuación en coordenadas polares.

2.3.2.2 Lemniscata

De la familia de óvalos de Cassini, la curva más conocida es la llamada lemniscata de Bernoulli y como habíamos obtenido es el caso en que $a = c$. Además, como su nombre indica, no fue descubierta por Cassini, sino por los matemáticos Jacobo y Johann Bernoulli en 1694, quienes la obtuvieron al estudiar un problema planteado por Leibniz, el de encontrar la isócrona paracéntrica (la curva que describe un punto que se mueve de modo que la distancia a un punto fijo O, varía proporcionalmente al tiempo empleado en recorrer el arco de dicha curva). Ellos resuelven el problema modificando el método de construcción de una elipse como lugar geométrico a partir de dos focos, es decir: como es conocido una elipse se define por los puntos que se encuentran a una distancia a dos puntos fijados en el plano tales que la suma de estas distancias es un valor constante y la lemniscata en contraposición, es el lugar geométrico de los puntos tales que el producto de estas distancias es constante e igual al cuadrado de la mitad de la distancia focal. Bernoulli la llamó lemniscus, que en latín significa "cinta colgante"

La curva cuenta con la ecuación cartesiana $(x^2 + y^2)^2 = 2p^2(x^2 - y^2)$ pero como habíamos dicho su estudio se facilita mediante la conversión a la ecuación en polar $\rho = p\sqrt{2\cos 2\theta}$, ya que se logra despejar el radio vector en función del ángulo, de esta forma veremos en el epígrafe referido a la espiral sinusoidal que constituye un caso particular.

Veamos algunas de sus propiedades más características, Fig. (c2. §3.21):

- El origen de coordenadas es conocido como nodo (punto doble por donde pasan dos tangentes) y además es un punto de inflexión.
- Los puntos de intersección con el eje "x", además del origen, son los puntos $A, C = (\pm p\sqrt{2}, 0)$.
- Los extremos máximos y mínimos se alcanzan en los puntos $E, G = (p\sqrt{3}/3, p/2)$ y $K, I = (-p\sqrt{3}/3, -p/2)$ respectivamente.
- El radio de curvatura es $r = 2p^2/3\rho$, donde ρ es el radio vector.
- La normal en cualquier punto $P = (\rho, \theta)$ de la lemniscata, forma un ángulo $\varphi = 2\theta$, con el radio vector y $\psi = 3\theta$, con el eje polar.
- El área interior de cada lazo está dada por la fórmula $A = p^2$.
- La inversión de la lemniscata con respecto al nodo es una hipérbola equilátera.

2.3.2.2.1 Otras construcciones de la lemniscata

- La lemniscata puede ser obtenida como la envolvente de un conjunto de circunferencias centradas en una hipérbola equilátera tales que contengan su centro, (Ver Capítulo 1, Fig. (c1. §2. 6 y 7)).
- La podaria de una hipérbola equilátera con respecto a su centro es una lemniscata de Bernoulli, (Ver Capítulo 1, Fig. (c2. §3. 24)).

Entre las aplicaciones más importantes de la lemniscata podemos citar:

- La determinación del parámetro longitud de arco de la lemniscata, llevó a las integrales elípticas, que fueron descubiertas durante el siglo XVIII. Alrededor de 1800, las funciones elípticas que intervienen en estas integrales fueron estudiadas por Carl Friedrich Gauss. No serían publicadas hasta mucho tiempo después, pero se hacían alusiones a ellas en las notas de su obra *Disquisitiones Arithmeticae*. La base del retículo definido por los pares fundamentales de períodos (pares ordenados de números complejos) tiene una forma muy especial, siendo proporcional a los enteros de Gauss. Por esta razón el conjunto de funciones elípticas con el producto complejo por la unidad imaginaria se denomina conjunto lemniscático.
- La lemniscata tiene radio de curvatura variable por lo que junto a un peralte² adecuado puede minimizar el efecto de la fuerza centrífuga.

2.3.2.3 Óvalos con talle

Como habíamos obtenido antes, la ecuación del óvalo con " talle " se tiene para cuando $p < k < p\sqrt{2}$ y como su nombre indica se refiere a un óvalo que tiene una cintura en su parte más achatada. Veamos algunas de sus propiedades más características:

- Las intersecciones con el eje " x ", se encuentran en los puntos $A, B = (\pm \sqrt{k^2 + p^2}, 0)$.
- Los extremos máximos y mínimos se alcanzan en los puntos $C = (0, \sqrt{k^2 - p^2})$ y $D = (0, -\sqrt{k^2 - p^2})$ respectivamente.
- Posee cuatro puntos de inflexión, los cuales son $P, L, M, N = (\sqrt{1/2(m-n)}, \sqrt{1/2(m+n)})$, donde $n = (k^4 - p^4)/3p^2$ y $m = \sqrt{k^4 - p^4}/3$

2.3.2.4 Óvalo de forma elíptica

Como habíamos obtenido antes la ecuación del óvalo de forma elíptica se tiene para cuando $k \geq p\sqrt{2}$ y tiene las siguientes características:

Los vértices de son $A_{1,2} = (\pm \sqrt{k^2 + p^2}, 0)$ y $B_{1,2} = (0, \pm \sqrt{k^2 - p^2})$. Las semirrectas $\overline{A_1A_2}$ y $\overline{B_1B_2}$ se denomina semiejes.

² Se denomina peralte a la pendiente transversal que se da en las curvas a la plataforma de una vía férrea o a la calzada de una carretera.

2.3.4 Construcción de los Óvalos de Cassini como secciones de un toro

Los óvalos de Cassini son la intersección de un toro y un plano en cierta posición. Sea $r = b - a$ el radio interior de un toro cuyo círculo generatriz tiene radio $r' = a$. Los óvalos de Cassini son la intersección de un plano paralelo al eje del toro y a distancia a de éste. En el caso particular en que $b = 2a$, entonces se tiene que la sección del toro resultante describe una lemniscata de Bernoulli, Fig. (c2. §3.25).

§2.4 Las cisoides

2.4.1 Origen de las cisoides

La primera curva cisoide fue descubierta por Diocles (250-100 a.C.) con la conocida como cisoide de Diocles. Esta curva fue materia de estudio e investigaciones de diversos matemáticos debido a su aplicación en la solución de uno de los problemas clásicos de la antigüedad, "La duplicación del cubo". La cisoide de Diocles, no solo fue una curva que impresionó a grandes figuras de las ciencias, sino que además, llevó a muchas de estas personalidades a realizar estudios más profundos que dieron como resultado un método para generar cisoides a partir de dos curvas.

2.4.2 La cisoide de Diocles

Definición primaria: Sea C una circunferencia y O un punto sobre ésta, además tracemos una recta l tangente a la circunferencia por el punto diametralmente opuesto a O . Si se traza por O una recta secante s a la circunferencia que la corta en P_1 y corta a l en P_2 , se tiene que los puntos P sobre la secante tales que $\overline{OP} = \overline{P_1P_2}$, forman la cisoide de Diocles cuando P_1 recorre la circunferencia, Fig. (c2. §4.26).

Supongamos que la circunferencia C se encuentra centrada en el punto $F = (r, 0)$, donde r representa su radio, es decir, la circunferencia de ecuación polar $\rho_1 = 2r \cos \theta$ y tomemos $O = (0, 0)$, entonces se tiene que la recta tangente l esta dada por la ecuación $\rho_2 = 2r / \cos \theta$ y como el segmento de la recta secante $\overline{OP_2}$ coincide con el radio vector ρ_2 y el segmento $\overline{OP_1}$ con el radio vector ρ_1 , se tiene que los radio vectores ρ de la cisoide de Diocles, vienen dados por la formula $\rho = \overline{OP} = \overline{P_1P_2} = \overline{OP_2} - \overline{OP_1} = \rho_2 - \rho_1$. Entonces, la ecuación polar de la cisoide de Diocles es $\rho = (2r / \cos \theta) - 2r \cos \theta = 2r \operatorname{sen}^2 \theta / \cos \theta = 2r \operatorname{sen} \theta \tan \theta$.

2.4.2.1 Otras generaciones de la cisoide de Diocles

Como habíamos anunciado, para la cisoide de Diocles se han realizado varios métodos de construcción que la generan y con ellos otras definiciones, que la relacionan con otras familias de curvas. Veamos a continuación algunos de estos métodos, que hacen que la cisoide de Diocles sea una curva maravillosa.

2.4.2.1.1 Podaria de una parábola respecto al vértice y la cisoide de Diocles

Este método consiste en tomar una parábola y hallar su podaria, tomando como polo su vértice. Veamos paso por paso, el desarrollo constructivo y demostremos que la curva resultante es una cisoide de Diocles.

Sea la parábola $y^2 = -2mx$, donde m es la mitad de longitud del lado recto. Entonces se deduce que la recta tangente a la parábola en un punto arbitrario $M = (x_0, y_0)$ tiene por ecuación, la expresión $Yy_0 = -m(X + x_0)$, (vea §2). Si trazamos una recta perpendicular a la tangente, que contenga al vértice de la parábola, ésta tiene la ecuación $Y = y_0X/m$, por lo tanto, por definición se tiene que la curva C , formada por los puntos $P = (X, Y)$ que son pies de las perpendiculares cuando M recorre la parábola, es la podaria de la parábola respecto a su vértice, además se tiene mediante la solución del sistema que resulta y aplicando transformaciones algebraicas, la ecuación paramétrica $C : \{x = pt^2/t^2 + 4p^2, y = t^3/t^2 + 4p^2\}$, con $t \in \Re$ y $p = m/2$ (coordenada "x" del foco).

Luego de haber visto el desarrollo del método, demostremos que la curva resultante es precisamente una cisoide de Diocles. Para ello nos apoyaremos en la ecuación polar $\rho = 2r \operatorname{sen} \theta \tan \theta$, obtenida en la construcción primaria de la curva:

1^o) Transformar la ecuación paramétrica de la podaria a una ecuación en cartesiana:

Despejando el parámetro t en una rama y sustituyendo en la otra, se llega a la ecuación cartesiana $y^2 = 2x^3/p - 2x$

2^o) Transformar la ecuación cartesiana resultante a una ecuación polar, nos queda la relación $\rho^2 \operatorname{sen}^2 \theta = 2\rho^3 \cos^3 \theta / p - 2\rho \cos \theta$ y simplificando obtenemos la ecuación polar $p\rho^2 \operatorname{sen}^2 \theta - 2\rho^3 \cos \theta = 0$, o bien por $\rho = p \operatorname{sen}^2 \theta / 2 \cos \theta = p \operatorname{sen} \theta \tan \theta$, la cual coincide con la ecuación polar de una cisoide de Diocles, que al ser generada por el método primario se utiliza una circunferencia de radio $r = 2p$ y centrada en el foco de la parábola, Fig. (c2. §4.27).

Notemos que mediante la deducción y demostración de este método para generar la cisoide de Diocles, hemos obtenido dos ecuaciones que la representan, es decir:

- La ecuación paramétrica es $\{x = pt^2/t^2 + 4p^2, y = t^3/t^2 + 4p^2\}$, con $t \in \Re$.
- La ecuación en coordenadas cartesianas es $y^2 = 2x^3/p - 2x$.

2.4.2.1.2 Entre dos rectas paralelas se tiene una cisoide de Diocles

Se toman dos rectas paralelas d_1 y d_2 , sobre d_1 se fija un punto O y se traza una recta variable r que pasa por O y corta en P a d_2 , además, consideremos el segmento \overline{PQ} que se proyecta ortogonalmente en Q sobre d_1 . Si desde Q se traza una perpendicular a \overline{OP} , el pie de dicha perpendicular M describe una cisoide de Diocles cuando P recorre toda la recta d_2 , Fig. (c2. §4.28).

Entre las propiedades características de la cisoide de Diocles tenemos que, tiene una asíntota en la recta $x = a$ y además, el área entre la asíntota y la curva es $A = 3\pi r^2$, es decir tres veces el área interior de la circunferencia utilizada en la construcción que la define. La inversión de la cisoide de Diocles respecto a su cúspide es una parábola, Fig. (c2. §4. 29).

Una aplicación de la cisoide de Diocles surge de la antigüedad donde existieron tres problemas que se hicieron famosos por los grandes esfuerzos de los griegos para resolverlos utilizando solo regla y compás, uno de ellos se conoce como duplicación de cubo. En la actualidad se demostró que era imposible realizar esta construcción solamente con regla y compás, sin embargo se llegó al resultado siguiente: "La cisoide de Diocles sirve para duplicar un cubo", es decir, se demostraron varios métodos constructivos que dan solución a dicho problema, donde se incluye a la cisoide como punto clave. Veamos a continuación algunos de estos métodos:

- Sea dada una cisoide construida por la definición primaria, donde el diámetro $d = \overline{OA}$ de la circunferencia, con A el punto de tangencia sea el valor de la arista de un cubo y tomemos sobre el eje "y" (recta tangente en O) un punto B situado a una distancia $2d$ del origen (el punto O). Si trazamos el segmento \overline{AB} , éste se corta con la cisoide en un punto M y la recta s que contiene al segmento \overline{OM} , entonces se tiene que $\overline{AX} = \sqrt[3]{2} \overline{OA}$, donde X es el punto de intersección entre s y r (recta tangente de la definición), Fig. (c2. §4. 30a).
- Sea $C = (a,0)$ el centro de la circunferencia, donde a es su radio, entonces la cisoide de Diocles que se genera a partir de la circunferencia por el método primario tiene por ecuación cartesiana $y^2 = x^3/2a - x$. Tracemos un segmento $\overline{CD} = 2a$ perpendicular en C al diámetro \overline{OA} de la circunferencia, además, tracemos el segmento \overline{AD} que se corta en un punto E con la cisoide y sea F el pie de una perpendicular trazada sobre el diámetro desde el punto E (ordenada del punto E de la cisoide), entonces se demuestra que los triángulos rectos $\triangle ACD$ y $\triangle AFE$ son semejantes, por lo que se deduce que $\overline{AF}/\overline{EF} = \overline{AC}/\overline{CD} = a/2a = 1/2 \Rightarrow \overline{AF} = \overline{EF} \overline{AC}/\overline{CD} = \overline{EF}/2$. Luego, por ser E un punto de la cisoide, tenemos que $(\overline{EF})^2 = (\overline{OF})^3 / (\overline{OA} - \overline{OF}) = (\overline{OF})^3 / \overline{AF} = (\overline{OF})^3 \overline{CD} / \overline{EF} \overline{AC} = 2(\overline{OF})^3 / \overline{EF}$, lo que implica que $(\overline{EF})^3 = 2(\overline{OF})^3$, Fig. (c2. §4. 30b).

2.4.3 Cisoide en sentido general

Como habíamos dicho, la cisoide de Diocles indujo un método para generar cisoides mediante dos curvas en polares. Este método consiste en la resta, suma o semisuma de los radio vectores de las curvas a las cuales se les quiere hallar su cisoide, es decir, una definición general de las cisoides es:

Definición: Sean dos curvas C_1 y C_2 cualesquiera dadas en la forma $\rho_1(\theta)$ y $\rho_2(\theta)$ respectivamente, entonces se pueden generar tres tipos de cisoides de las curvas:

- La cisoide adición $\rho(\theta) = \rho_1(\theta) + \rho_2(\theta)$.
- La cisoide diferencia $\rho(\theta) = \rho_1(\theta) - \rho_2(\theta)$.
- La cisoide semisuma $\rho(\theta) = [\rho_1(\theta) + \rho_2(\theta)]/2$.

2.4.4 Otros casos particulares de cisoide

2.4.4.1 La lemniscata

En este punto, se analizará un método propuesto por MacLaurin para generar la lemniscata de Bernoulli y demostraremos que dicho método, puede ser tratado como la obtención de la cisoide de una circunferencia consigo misma, mediante la diferencia de los radio vectores y por lo tanto, la lemniscata también pertenece a la familia de las cisoides.

- Método propuesto por MacLaurin: Sean dos puntos F_1 y F_2 fijados en el plano tales que $\overline{F_1F_2} = 2c$, donde c es constante. Con estas condiciones realicemos la siguiente construcción, Fig. (c2. §4.31).

1^o) Construir dos circunferencias C_1 y C_2 , una centrada en F_1 y la otra en F_2 ambas con radio $r = c/\sqrt{2}$.

2^o) Sobre el segmento $\overline{F_1F_2}$ sea O el punto medio, es decir, se encuentra a una distancia $d = c$ de los centros de las circunferencias.

3^o) Trazar una recta secante a la circunferencia C_1 que contenga a O , supongamos que ésta se intercepta con la circunferencia en los puntos P_1 y Q_1 , es decir, la secante $\overline{OP_1Q_1}$. Entonces también es secante a C_2 y se intercepta con ésta en los puntos P_2 y Q_2 , es decir, la secante $\overline{OP_2Q_2}$.

4^o) Sean los vectores v_1 y v_2 con origen en O , paralelos a las secante $\overline{OP_1Q_1}$ y $\overline{OP_2Q_2}$ respectivamente y cuyos módulos sean las distancias $\rho_1 = d(P_1, Q_1)$ y $\rho_2 = d(P_2, Q_2)$.

5^o) El lugar geométrico que generan los vectores v_1 y v_2 cuando los arcos P_1Q_1 y P_2Q_2 tienden a cero es una lemniscata de Bernoulli. Si tomamos O en el origen de coordenadas y los puntos F_1 y F_2 sobre el eje horizontal, el método anterior coincide con el de construcción de la cisoide de una circunferencia con ella misma.

2.4.4.2 El estrofoide recto

El estrofoide aparece en primer lugar en trabajos de Isaac Barrow en 1670. Sin embargo Torricelli describe dicha curva en algunas de sus cartas escritas con fecha de 1645. El nombre significa "cinta con una vuelta" y fue propuesto por Montucci en 1846. Se denomina estrofoide recto a la curva derivada de la siguiente construcción Fig. (c2. §4. 32).

- 1) En un sistema de coordenadas cartesianas, tomemos sobre el eje "x" el punto $A = (-a, 0)$ y tracemos la recta $x = a$.
- 2) Ahora tracemos una recta r que pase por A y corte $x = a$, entonces corta al eje "y" en un punto P .
- 3) Entonces si tomamos dos puntos M_1 y M_2 sobre la recta r , tales que $\overline{PM_1} = \overline{PM_2} = k$ (constante), entonces decimos que la curva formada por los puntos M_1 y M_2 cuando P recorre todo el eje "y" es la curva estrofoide recto con vértice en el punto A .

Una parametrización del estrofoide recto es $\{x = a(t^2 - 1)/(t^2 + 1), y = at(t^2 - 1)/(t^2 + 1)\}$ y la ecuación en coordenadas polares es $\rho = -a \cos 2\theta / \cos \theta$. A partir de su ecuación en coordenadas polares, se puede demostrar que es una cisoide diferencia, es decir si tomamos las ecuaciones en coordenadas polares $\rho_1 = 2a \cos \theta$ y $\rho_2 = a / \cos \theta$ de una circunferencia centrada en $(a, 0)$ con radio $r = a$ y la recta $x = a$ respectivamente, entonces si restamos $\rho_2 - \rho_1$, se tiene la ecuación en coordenadas polares del estrofoide recto $\rho = \rho_2 - \rho_1 = (a / \cos \theta) - 2a \cos \theta = -a[(2 \cos^2 \theta - 1) / \cos \theta] = -a \cos 2\theta / \cos \theta$.

Entre sus propiedades principales podemos citar:

- En el origen de coordenadas tiene un nodo, donde las rectas tangentes son $y = \pm x$. Además, el radio de curvatura en este punto es $\rho = a\sqrt{2}$.
- El área del lazo del estrofoide es $S = a^2(4 - \pi)/2$. [Semendiaev, 1971]

2.4.4.3 La trisectriz de MacLaurin

Fue estudiada en primer lugar por Colin MacLaurin en 1742 y al igual que otras muchas curvas se estudió con la finalidad de solucionar uno de los problemas clásicos griegos, en concreto en relación con la trisección del ángulo. El nombre trisectriz proviene de este hecho y fue definida inicialmente por el siguiente método de construcción, Fig. (c2. §4. 33a):

- 1) Sea A un punto del plano y tracemos una circunferencia $C(r, O)$ tal que $A \in C$. Además tracemos una recta l perpendicular a la recta que contiene al radio \overline{OA} , exterior a la circunferencia y tal que $d(O, l) > d(A, l)$.
- 2) Tomemos una recta m que pase por A y corte la recta l en un punto Q , entonces corta la circunferencia en un punto $P \neq A$.
- 3) Luego, denotemos por M al punto medio del segmento \overline{PQ} .
- 4) Entonces, se define como trisectriz de MacLaurin a la trayectoria del punto M cuando el punto P recorre toda la circunferencia C .

Como podemos notar, si tomamos el punto A en el origen de coordenadas ($A = (0, 0)$), la recta $l: x + 2a = 0$ y la circunferencia C de radio $r = 4a$ y centro en $O = (4a, 0)$, la construcción dada anteriormente coincide con la de una cisoide semisuma, ya que los radio vectores ρ de los puntos medios M coinciden gráficamente con el valor de la semisuma de las ecuaciones en coordenadas polares $\rho_1 = -2a / \cos \theta$ y $\rho_2 = 8a \cos \theta$, de la recta l y la circunferencia C respectivamente, es decir $\rho = [-(2a / \cos \theta) + 8a \cos \theta] / 2 = a(4 \cos^2 \theta - 1) / \cos \theta$, es la ecuación en coordenadas polares de la trisectriz de MacLaurin.

Una aplicación de la curva se deriva del problema antiguo de la trisección de un ángulo, es decir, supongamos que tenemos una trisectriz de MacLaurin con nodo en el origen de coordenadas y vértice en el punto $V = (-3, 0)$ y sea P un punto cualquiera en el bucle de la curva. Entonces el ángulo $\sphericalangle VWP = 3 \sphericalangle WOP$, donde $W = (-2, 0)$. Fig. (c2. §4. 33b)

§2.5 Concoides

2.5.1 Origen de las Concoides

Las concoides surgen en torno al 200 a.C., al intentar generalizar el método de la concoide de Nicomedes, descrito por Nicomedes en torno al 225 a.C., quien la descubre en sus intentos para trisecar un ángulo. Según Pappus y otros autores clásicos, fue una de las curvas favoritas de los matemáticos del siglo XVII para los nuevos métodos de Geometría Analítica y Cálculo.

2.5.2 Concoide de Nicomedes

A continuación, veamos la explicación paso a paso del método constructivo de la concoide de Nicomedes, Fig. (c2. §5. 34).

- 1) Dada una recta l y un punto O fijos en un plano, tal que $O \notin l$.
- 2) Tracemos una recta m que pase por O y corte la recta en un punto P .
- 3) Entonces el lugar geométrico de los puntos $M^\pm \in m$ tales que $d(O, M^\pm) = d(O, P) \pm k$ (k es una constante arbitraria), cuando P recorre toda la recta l se denomina concoide de Nicomedes con polo en O .

Llevando dicho método constructivo a un sistema de coordenadas polares, tomando la recta l como $\rho_1 = a/\cos\theta$ y el punto $O = (0,0)$, se obtiene la ecuación en coordenadas polares de la curva haciendo $\rho = d(O, M) = \rho_1 \pm k = (a/\cos\theta) \pm k$, es decir la ecuación en coordenadas polares de la concoide de Nicomedes es $\rho = (a/\cos\theta) \pm k$.

Entre las propiedades más características de la curva se tienen:

- Como hemos podido notar, todas las ecuaciones que representan la concoide de Nicomedes tienen la característica de trabajar con los signos " \pm " consecutivamente. Esto se debe a que la curva posee dos ramas, una interior para el signo "+" (a la derecha de la recta l) y una exterior para el signo "-" (a la izquierda de la recta l). Ver Fig. (c2. §5. 34).
- En la rama exterior posee la asíntota $x = a$ y dos puntos de inflexión.
- En la rama interior posee la asíntota $x = a$ y en el origen de coordenadas tiene un punto doble O , cuyo carácter depende de la relación entre a y k , es decir:
 - Para $k < a$ el punto es un punto aislado. Además la curva tiene los puntos de inflexión E, F .
 - Para $k > a$ el punto es un nodo. Además, para $x = a - \sqrt[3]{ak^2}$, la curva tiene un máximo M y un mínimo N , la pendiente de las rectas tangentes en el origen de coordenadas es $m = \pm \sqrt{k^2 - a^2}/a$ y el radio de curvatura en el origen es $r = \pm k \sqrt{k^2 - a^2}/2$.
 - Para $k = a$ el punto es un punto de retroceso.

De la ecuación obtenida se deduce la ecuación cartesiana $(x-a)^2(x^2+y^2) - k^2x^2 = 0$ y la parametrización de la curva $\{x = a + k \cos\theta, y = a \tan\theta + k \operatorname{sen}\theta\}$.

2.5.2.1 La Concoide de Nicomedes como cisoide

Algunos años mas tarde, con los conocimientos de cisoide se obtiene que la concoide de Nicomedes puede ser expresada como una cisoide adición o diferencia, es decir si tomamos las ecuaciones en coordenadas polares $\rho_1 = a/\cos\theta$ y $\rho_2 = k$ de la recta $x-a=0$ y de la circunferencia centrada en el origen y radio $r=k$ respectivamente, entonces si sumamos $\rho_1 + \rho_2$ o restamos $\rho_1 - \rho_2$, se tiene la ecuación en coordenadas polares de la concoide de Nicomedes $\rho = \rho_1 \pm \rho_2 = (a/\cos\theta \pm k)$.

Al igual que la trisectriz, la concoide de Nicomedes, también se aplica en la solución del clásico problema de trisecar un ángulo. Veamos a continuación, cómo dado un ángulo agudo $\sphericalangle AOB$, construimos un ángulo tal que sea $1/3$ de $\sphericalangle AOB$, con la ayuda de la concoide de Nicomedes:

- 1) Dibujar una línea recta m que corte perpendicularmente el segmento \overline{OA} que forma el ángulo dado.
- 2) Sea el punto D el intercepto entre la recta m y el segmento \overline{OA} y sea el punto L el intercepto entre la recta m y el segmento \overline{OB} .
- 3) Supongamos dada la concoide de Nicomedes, con polo en O y sea la recta l de definición de la curva tal que $l \equiv m$. Además tomemos $k = 2d(O, L)$.
- 4) Dibujar la línea n que pase por L y sea perpendicular a m .
- 5) Sea C la intersección de la curva y n , en el lado contrario del polo. Entonces el ángulo $\sphericalangle AOB = 3b$, donde b es el ángulo $\sphericalangle AOC$, lo que implica que $\sphericalangle AOC = \sphericalangle AOB/3$.

2.5.3 Concoide en general

Como habíamos mencionado, a partir del método para generar la concoide de Nicomedes se obtuvo como resultado un método que define una concoide en sentido general. Así pues, se llama concoide a la curva obtenida por la prolongación o disminución de los segmentos de recta que conectan cada punto de la curva con un punto fijo del plano (este punto se conoce como polo de la concoide) un valor constante k . Entonces, si conocemos la ecuación polar $\rho = f(\theta)$ de una curva C y tomamos como polo el origen de coordenadas, se tiene como ecuación polar de la concoide de intervalo k de la curva C , la relación $\rho = f(\theta) \pm k$.

2.5.4 Otros casos particulares de concoide

2.5.4.1 Caracoles de Pascal

Su nombre fue dado por Roberval en 1650, en honor a su descubridor Etienne Pascal (padre de Blaise Pascal). Los caracoles de Pascal se obtienen a partir del siguiente método constructivo como una concoide de la circunferencia:

Sea C una circunferencia de radio a y tomemos sobre C un punto fijo O (el polo). Entonces, si trazamos las rectas que pasan por O y cortan a la circunferencia en un punto Q , tenemos que: Los puntos P y P' de dichas rectas que se encuentran a una distancia fija

k de Q (por la derecha y por la izquierda del mismo), forman la familia de curvas conocidas como caracoles de Pascal.

Para el caso en que el polo se encuentra en el origen de coordenadas y además los vértices de las curvas se encuentran sobre el eje “ x ”, se tienen las ecuaciones:

- Ecuación en coordenadas cartesianas $(x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 + y^2) + (a^2 - k^2)x^2 - k^2y^2 = 0$.
- Ecuación paramétrica $\{a \cos^2 \varphi + k \cos \varphi, a \cos \varphi \sin \varphi + k \sin \varphi\}$, con $0 < \varphi < 2\pi$.
- Ecuación en coordenadas polares $\rho = a \cos \theta \pm k$.

Mediante esta construcción, se pueden obtener diversas curvas como son la circunferencia cuando $k = 0$, un caracol abollado cuando $0 < k < a$, una cardioide cuando $k = a$, Fig. (c2. §5. 35a) y un caracol con lazo interior o caracol de Pascal si $k > a$, Fig. (c2. §5. 35b). En el caso del caracol de Pascal veremos en el epígrafe de las ruletas que constituye un caso particular de las epitrocoides (ruleta cicloidal)

En el caso en que la circunferencia a la cual se le halla la concoide se encuentre centrada en el punto $O = (a, 0)$ se tienen las siguientes propiedades:

- Los puntos de intersección A y B (diferentes del polo en la concoide) entre la curva y la recta que contiene al centro de la circunferencia C y al polo O , se denominan vértices del caracol de Pascal.
- Es una curva simétrica respecto a la recta que une sus vértices.
- Encierra un área dada por: $A = \pi \left[\left(\frac{a^2}{2} \right) + k^2 \right]$
- El radio de curvatura es $\rho = a\sqrt{3}/2$.
- La podaria de una circunferencia respecto a cualquier punto en el plano es un caracol de Pascal.
- La envolvente de un conjunto de circunferencias centradas en un punto de una circunferencia dada y tales que todas contengan a un punto O fijado del plano es un caracol de Pascal.
- Como habíamos anunciado, la inversión de una elipse con respecto a uno de los focos es un caracol de Pascal. Veamos a continuación la demostración de dicho resultado:
Supongamos una elipse con uno de sus focos en el origen de coordenadas, entonces se puede representar por la ecuación polar $\rho = 2p/(1 + e \cos \theta)$, con $0 < e < 1$ y además, el punto de inversión (un foco) coincide con el polo, por lo tanto la curva inversión tiene la ecuación $1/\rho = 2p/(1 + e \cos \theta) \Rightarrow \rho = (1 + e \cos \theta)/2p = a \cos \theta + (1/2p)$, con $a = e/2p$. Como podemos notar, la ecuación coincide con un caracol de Pascal para $k = 1/2p$.

Un dato curioso de esta curva maravillosa es que describe casi idénticamente las conchas que comúnmente encontramos en nuestras playas.

2.5.4.2 La Cardioide

La cardioide fue estudiada por Roemer (1674) en una investigación sobre la mejor forma de los engranajes. El nombre cardioide (con forma de corazón) fue usado por primera vez por de Castillon en Philosophical Transactions of the Royal Society of 1741.

La cardioide como caso particular de caracol de Pascal adopta los mismos métodos de construcción, es decir, las podemos encontrar como epitrocoides (ruleta cicloidal) y como la conchoide de una circunferencia de radio a y distancia fijada $k = a$, de esta forma tiene la ecuación en coordenadas polares $\rho = a(\cos\theta \pm 1)$, de donde se deriva para $a = 1$ la ecuación en coordenadas cartesianas $(x^2 + y^2 - x)^2 = x^2 + y^2$. En el epígrafe de las ruletas daremos a conocer las principales propiedades con que cuenta la curva ya que definida como tal se garantiza un manejo de las mismas y en el epígrafe referido a las curvas espirales sinusoidales, veremos que representada por la ecuación en coordenadas polares $\rho = a(\cos\theta + 1)$, constituye un caso particular.

§2.6 Espirales

2.6.1 Origen de las espirales

La terminología de curva espiral surge con el matemático siciliano Arquímedes (siglo III a.C.), con el aporte de una curva conocida como espiral aritmética o de Arquímedes. Esta curva inspira a grandes científicos a descubrir otras espirales y así descubren que esta maravillosa familia de curvas puede ser contemplada en la naturaleza de diversas formas como en ciclones y caracoles. Además, las espirales fueron utilizadas por grandes artistas como símbolos para representar el pensamiento cíclico, en diversas propuestas filosóficas, estéticas y tecnológicas, por lo que puede hablarse en rigor de cierto espiralismo o concepción espiralista, como sucede en el arte del escultor canario Martín Chirino o el pintor cubano Ángel Laborde Wilson. Vea en Fig. (c2. §6. 36) una foto de una obra del escultor estadounidense Robert Smithson, llamada "Malecón espiral" (1970), fundador del movimiento artístico conocido como Land Art.

2.6.2 Descripción general de espiral

Se denomina espiral a aquellas curvas que se inician en un punto central (denominado polo de la espiral), y se van alejando progresivamente del centro a la vez que gira alrededor de él. Normalmente se definen las espirales en coordenadas polares por el par ordenado (ρ, φ) , donde φ es el ángulo del radio vector de un punto respecto a un eje de referencia y ρ es la distancia desde este punto al punto central en base al ángulo.

- Una característica de las espirales en sentido general se tiene por el hecho de que comenzando en uno de sus puntos P y moviéndose hacia su polo, a todo lo largo de la espiral, hay que rodear el polo infinitas veces antes de alcanzarlo, sin embargo, la distancia total de este camino es finita. El primero en darse cuenta de esto fue Torricelli incluso antes de que se ideara el cálculo infinitesimal.

2.6.2.1 Espirales arquimedeanas

Las espirales arquimedeanas, como su nombre indica fueron primeramente estudiadas por Arquímedes en torno a 225 a.C. en un trabajo sobre espirales *On Spira*. Como se había anunciado, las espirales son las curvas descritas por un punto que se mueve con velocidad constante V con un radio que gira alrededor del polo con velocidad angular constante W , de

esta forma se define como espiral arquimediana a las curvas representadas por la ecuación polar $\rho = a\varphi^n$, donde $a = V/W$. Para algunos valores de n tiene nombres especiales como:

- Espiral de Arquímedes (en honor a su descubridor, el matemático griego Arquímedes), si $n = 1$, Fig. (c2. §6. 37a)
- Espiral parabólica o de Fermat (en honor al matemático francés Pierre de Fermat), si $n = 1/2$, Fig. (c2. §6. 37b).
- Espiral hiperbólica o recíproca, si $n = -1$, Fig. (c2. §6. 37c).
- Espiral de Lituus (denominada así por el matemático inglés Roger Cotes, debida a la similitud con el lituus romano), si $n = -1/2$, Fig. (c2. §6. 37d).

2.6.2.1.1 La espiral de Arquímedes

Esta espiral introducida por Arquímedes, tiene una plétora de aplicaciones en el mundo real. Veamos a continuación algunas de ellas:

- Muelles de compresión, hechos de dos espirales de Arquímedes del mismo tamaño, intercaladas, son usados para comprimir líquidos y gases.
- Los surcos de las primeras grabaciones para gramófonos (disco de vinilo) forman una espiral de Arquímedes, haciendo los surcos igualmente espaciados y maximizando el tiempo de grabación que podría acomodarse dentro de la grabación (aunque esto fue cambiado posteriormente para incrementar la cantidad del sonido).
- Pedirle a un paciente que dibuje una espiral de Arquímedes es una manera de cuantificar el temblor humano, esta información ayuda en el diagnóstico de enfermedades neurológicas. Estas espirales son también usadas en sistemas DLP de proyección para minimizar el Efecto del Arco iris, que hace que parezca que se proyectan varios colores al mismo tiempo, cuando en realidad se proyectan ciclos de rojo, verde y azul rápidamente.
- Un método para la Cuadratura del Círculo, relajando las limitaciones estrictas en el uso de una regla y un compás en las pruebas geométricas de la Grecia antigua, hace uso de la espiral de Arquímedes. Además, también existe un método para trisecar ángulos basados en el uso de esta espiral.

2.6.2.1.2 La espiral hiperbólica

Fue descubierta por Pierre Varignon en 1704 y luego estudiada por Johann Bernoulli entre 1710 y 1713 y por Cotes en 1722 quienes aportan la mayoría de sus propiedades. Veamos a continuación algunas de las más características:

- La curva se va cerrando indefinidamente hacia el polo. Éste se denomina punto asintótico.
- La recta $y = a$ es una asíntota.
- El radio de curvatura es $\rho = (a/\varphi)\left(\sqrt{1+\varphi^2}/\varphi\right)$.

2.6.2.2 Espirales no arquimedeanas

Como su nombre indica son aquellas espirales que no cumplen con la definición dada de espirales arquimedianas, es decir la velocidad con que se aleja del polo o la velocidad

angular no es constante. Existen numerosas espirales no arquimedeanas, en nuestro trabajo estudiaremos algunas de ellas que por sus características las denominamos curvas maravillosas.

2.6.2.2.1 La espiral logarítmica

Según E. H. Lockwood (1961): La espiral equiangular fue primero considerada en 1638 por Descartes, el cual partió de la propiedad $s = ar$. Torricelli, que murió en 1647, trabajó en ella independientemente y usó una definición en la que utilizó el hecho de que el radio está en progresión geométrica si el ángulo se incrementa uniformemente en progresión aritmética. De aquí descubrió la relación $s = ar$, es decir, encontró la rectificación de la curva. Jacob Bernoulli (1654-1705), unos años después encontró todas las propiedades de la curva y estas propiedades casi místicas de la maravillosa espiral le hicieron que pidiera grabar en su tumba: "Eadem mutata resurgo" ("Aún siendo modificada, surjo de nuevo la misma").

Como podemos observar, la espiral logarítmica fue tratada por varios de los matemáticos más reconocidos de la historia y esto trajo consigo que existan varias formas de definirla. Veamos la definición actual de esta maravillosa curva.

- Se define como espiral logarítmica a la curva que corta bajo un mismo ángulo todos los rayos que parten de un mismo punto, es decir, para todo punto P de la curva, la tangente correspondiente y el radio vector (los rayos) forman un ángulo constante $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, Fig. (c2. §6.38).

En el caso específico en que $\alpha = 0$ o $\alpha = \pi/2$ (casos límites) se obtiene como curva resultante una recta y una circunferencia centrada en el origen de radio a respectivamente. Para el caso en que la curva tiene su polo en el origen de coordenadas y tomando $k = \cot \alpha$, cuenta con las siguientes ecuaciones:

- La ecuación Paramétrica es $\{x = e^{kt} \cos t, y = e^{kt} \sin t\}$.
- La ecuación Cartesiana es $x^2 + y^2 = e^{k \arctan(y/x)}$.
- La ecuación Polar es $\rho = ae^{k\theta}$

Entre las aplicaciones más importantes de la espiral logarítmica podemos citar:

- Es utilizada en el estudio del crecimiento de los animales como el Nautilus.
- Es utilizada en el estudio de la formación de algunos fenómenos meteorológicos que describen dicha curva, como son: los tornados, huracanes, ciclones, etc.

Un dato curioso de la curva se tiene con su presencia en la naturaleza, donde existe una larga historia que se remonta a Christopher Wren (1632-1723). Éste observó que muchas conchas animales formaban una espiral logarítmica, Fig. (c2. §6. 39a). Henry Nottidge Moseley describió la matemática de las conchas y notó cómo muchas conchas como el Nautilus, se forman haciendo rotar una curva cerrada en torno a un eje fijo, de modo que la forma de la curva permanece constante pero su tamaño aumenta en progresión geométrica, Fig. (c2. §6. 39b). Thompson estudió también la aparición de espirales en la anatomía de los cuernos, los dientes, las uñas y las plantas.

2.6.2.2.2 La espiral de Durero

La espiral áurea o de Durero, como su nombre indica fue descubierta por este pintor italiano y se obtiene uniendo con arcos de circunferencias los vértices de los cuadrados auxiliares en la construcción de rectángulos áureos unos dentro del otro, Fig. (c2. §6.40). Esta espiral no es una espiral logarítmica como muchos creen, sin embargo gráficamente están muy aproximadas.

La ecuación de la espiral de Durero resulta un tanto compleja debido a que está compuesta de cuartos de circunferencia cuyos radios forman una progresión geométrica de razón áurea y centros distintos, es decir, no se puede expresar mediante una sola fórmula. Cada uno de esos “trozos” se puede expresar por tanto con la ecuación de la circunferencia, teniendo en cuenta los distintos centros y radios, de la siguiente manera:

Sea $O = (a, b)$ es el centro de un cuarto de circunferencia, r su radio y β el ángulo respecto a la horizontal del radio vector del primer punto, las ecuaciones paramétricas de este arco serán $\{x = a + r \cos \alpha, y = b + r \sin \alpha\}$, con $\beta \leq \alpha \leq \beta + (\pi/2)$. Así, los valores correspondientes al siguiente cuarto de circunferencia se pueden obtener mediante las formulas $\beta' = \beta + (\pi/2)$, $r' = (\sqrt{5} - 1)r/2$, $a' = a - [(3 - \sqrt{5})r \sin \beta/2]$ y $b' = b + [(3 - \sqrt{5})r \cos \beta/2]$.

§2.7 Ruletas

Se definen como ruleta a cada miembro de la familia de curvas planas que se generan por el siguiente método constructivo:

1^{ro}. Sean C_M y C_E dos curvas planas tales que se intercepten de forma tangencial en un punto Q .

2^{do}. Tomemos un punto P (punto generador) en el plano y lo conectamos a la curva C_M .

3^{ro}. Se denomina curva ruleta o simplemente ruleta a la traza del punto generador P conectado a la curva C_M (curva móvil) cuando ésta rueda sin deslizarse sobre la curva C_E (curva estacionaria), la cual se mantiene fijada en el plano.

Como podemos notar, mediante esta maravillosa construcción se pueden generar una gran cantidad de curvas planas, por lo que con el objetivo de facilitar su estudio, algunos científicos han dividido este amplio conjunto de curvas en subfamilias (vea árbol de familia de curvas).

La primera división de este amplio conjunto está dada por la clasificación de ruletas cicloidales y ruletas no cicloidales. En el epígrafe profundizaremos en las ruletas cicloidales, ya que como veremos son entre las ruletas las más aplicadas y posee en su conjunto un amplio número de curvas estudiadas anteriormente. De ruletas no cicloidales se trabajarán algunos ejemplos, donde se volverán a estudiar algunas curvas ya analizadas como la catenaria, la recta, la parábola, la elipse y la cisoide de Diocles, además de otras que analizaremos en el epígrafe.

2.7.1 Ruletas Cicloidales

Las ruletas cicloidales fueron primeramente estudiadas por Roemer (1674) en su búsqueda de la forma óptima para los engranajes.

Las ruletas cuya curva móvil es una circunferencia y la curva estacionaria puede ser una circunferencia o una recta, se conocen como ruletas cicloidales.

Veamos tres nuevas clasificaciones que se derivan de las ruletas cicloidales, en dependencia de si la curva estacionaria es una circunferencia o una recta y en el caso en que ésta sea una circunferencia, se puede hacer rodar la circunferencia móvil exterior o interiormente.

- Si la curva estacionaria es una circunferencia y la circunferencia rodante rueda por su exterior, se denominan epitrocoides.
- Si la curva fijada es una circunferencia y la circunferencia rodante rueda por su interior, se denominan hipotrocoides.
- Si la curva fijada es una recta, se denominan trocoides o simplemente cicloides

2.7.1.1 Las epitrocoides

Comenzaremos el estudio de las epitrocoides analizando las distintas clasificaciones para las diferentes posiciones del punto generador P conectado a la circunferencia móvil, ya que con respecto a la misma, un punto sobre ella, exterior o interior, es decir:

- Si $P \in C_M$, las curvas resultantes se denominan epicicloides ordinarias.
- Si P es exterior a C_M , las curvas resultantes se denominan epicicloides alargadas.
- Si P es interior a C_M , las curvas resultantes se denominan epicicloides acortadas.

Tomemos la circunferencia estacionaria C_M con radio R , centrada en el origen de coordenadas y supongamos que la circunferencia móvil de radio r , se encuentra en una posición inicial, centrada en $O = (R+r, 0)$. Además, teniendo en cuenta las tres clasificaciones dadas anteriormente, supongamos que el punto generador P , conectado a la circunferencia móvil se encuentra a una distancia d del su centro O . Entonces, una parametrización general de las curvas epitrocoides, construidas bajo estas condiciones es:

$$\{x = (R+r)\cos\theta - d\cos((R+r)\theta/r), y = (R+r)\sin\theta - d\sin((R+r)\theta/r)\}.$$

Veamos a continuación para cada caso, algunas de las propiedades mas significativas, que de una forma u otra la dotan de la denominación de “Curvas Maravillosas”.

2.7.1.1.1 Las epicicloides ordinarias

Como habíamos informado, las epicicloides ordinarias son aquellas epitrocoides tales que, el punto conectado a la circunferencia móvil le pertenece. Por lo tanto, se tiene que $d = r$ y su ecuación paramétrica es $\{x = (R+r)\cos\theta - d\cos((R+r)\theta/r), y = (R+r)\sin\theta - r\sin((R+r)\theta/r)\}$.

- En el proceso de construcción de una epicicloide los puntos generadores poseen dos momentos importantes:
 - 1) Cuando el punto generador se hace coincidir con el punto de tangencia entre las circunferencias estacionarias y la móvil, se denominan punto de retroceso (punto que se encuentra a menor distancia del origen) y se denota por la letra A . Este punto determina dónde culmina una rama de la curva y comienza otra de igual longitud.

2) Cuando el punto generador se encuentra a mayor distancia del origen, se denominan vértices de la curva, se denota por la letra B y pertenecen a una circunferencia centrada en el origen y radio $\rho = R + 2r$.

- El número de puntos de retroceso (a su vez el número de ramas y de vértices) que posee una epicicloide se encuentra en dependencia del valor real $m = R/r$, valor que a su vez determina la forma que tiene la curva, es decir:
 - Si m es un número entero, la epicicloide está formada por m ramas que rodean la circunferencia estacionaria al volver el punto generador a su posición inicial, Fig. (c2. §7.41a). Además, los puntos de retroceso A_m tienen las coordenadas en el valor del parámetro $\theta = 2k\pi/m$ y los vértices B_m en el valor del parámetro $\theta = 2\pi(k + \frac{1}{2})/m$, con $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$.
 - Si m es un número fraccionario, las ramas de la epicicloide se cruzan, sin embargo cuando el punto generador P halla descrito un número finito de ramas (después de un número finito de vueltas dadas por la circunferencia móvil sobre la estacionaria), vuelve a su posición inicial, Fig. (c2. §7.41b).
 - Si m es un número irracional, entonces la epicicloide posee una cantidad infinita de ramas y el punto generador P nunca vuelve a su posición inicial.
- La longitud de una rama es $L_r = 8(R+r)/m$ y para el caso en que m sea un valor entero, la longitud de toda la curva es $L = 8(R+r)$.
- El área de un sector delimitado por la circunferencia estacionaria y una de sus ramas tiene la fórmula $S = (3R + 2r)\pi r^2 / R$.
- El radio de curvatura para un punto con parámetro θ_0 es $\rho = 4r(R+r)\text{sen}(R\theta_0/2r)/2r + R$.

A continuación, veamos algunos de los casos particulares más relevantes de estas curvas:

2.7.1.1.1 La epicicloide con un punto de retroceso (la cardioide)

En el caso particular en que $m = 1$, la curva que se tiene posee un solo punto de retroceso y es la curva conocida como cardioide, la cual fue estudiada anteriormente como concoide de una circunferencia con respecto a uno de sus puntos, es decir:

Conociendo que $m = 1$, se tiene entonces $R = r$ y por lo tanto la ecuación paramétrica de la curva es $\{x = 2r \cos \theta - r \cos(2\theta), y = 2r \text{sen} \theta - r \text{sen}(2\theta)\}$. Luego realizando transformaciones algebraicas la ecuación se reduce a $\{x = a \cos \theta (1 - \cos(\theta)) + a/2, y = a \text{sen} \theta (1 - \cos(\theta))\}$, la cual coincide con la ecuación paramétrica de una cardioide obtenida como la concoide de una circunferencia de radio $a = 2r$ y centrada en el origen, que además fue trasladada r unidades sobre el eje "x", Fig. (c2. §7.42). Entre las propiedades más importantes de la curva como epicicloide, se tienen:

- Se denomina diámetro de la cardioide al segmento que une el punto de retroceso (cúspide) y el centro de la circunferencia estacionaria.
- El área de una cardioide es $A = 4\pi r^2$, es decir cuatro veces el área de la circunferencia móvil.

- La cardioide es la inversa de una parábola con respecto a su foco.
- La podaria de una circunferencia con respecto a uno de sus puntos es una cardioide con cúspide en dicho punto, además el diámetro de la circunferencia con respecto al punto podario coincide con el de la cardioide.

2.7.1.1.1.2 La nefroide

La nefroide fue primeramente estudiada por Huygens y Tschirnhausen en torno a 1679. Sin embargo el nombre de nefroide ("forma de riñón") fue utilizado por Proctor en 1878 quien fue el primero en estudiarlas como una epicicloide de dos puntos de retroceso. En la actualidad existen dos curvas conocidas por nefroide, debido a que unos años después de que Proctor diera este nombre a la epicicloide, el matemático Freeth usó el mismo nombre para otra curva, la cual no es una epicicloide, sin embargo muchas veces nos confundimos.

Como se había anunciado, la nefroide es el caso particular de la epicicloide ordinaria con $m=2$, por lo que la curva posee dos puntos de retroceso (cúspides), Fig. (c2. §7.43). Posteriormente en este mismo epígrafe, estudiaremos también a la nefroide, como un caso particular de las hipotrocoides

Entre las propiedades mas características de la nefroide como epicicloide, se tienen:

- Se denomina diámetro de una nefroide a la longitud de la recta que une sus vértices. La ecuación cartesiana de una nefroide con diámetro $d = 12r$ es $(x^2 + y^2 - 4r^2)^3 = 81r^4 y^2$
- La nefroide es la envolvente de un conjunto de circunferencias con centros en una circunferencia base C y tangentes a un diámetro de C . Además, también es la envolvente de un diámetro de la circunferencia que genera una cardioide como una epicicloide.
- La normal de una nefroide en un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ es la recta que pasa por P_0 y por el punto de tangencia entre las circunferencias móvil y estacionaria.
- La evoluta de una nefroide es una transformación en el plano de la misma nefroide.
- El área de una nefroide es $A = 2\pi r^2$, es decir la mitad del área de una cardioide generada como epicicloide, con la misma circunferencia estacionaria.

2.7.1.1.2 Epicicloides alargadas y acortadas

En el caso de las epicicloides alargadas (acortadas), las estudiaremos representadas por la ecuación $\{x = (R+r)\cos\theta - d\cos((R+r)\theta/r), y = (R+r)\sin\theta - d\sin((R+r)\theta/r)\}$ y teniendo en cuenta que $d > r$ ($d < r$), analizaremos los distintos casos particulares de estas curvas, anunciados en epígrafes anteriores.

Para facilitar el manejo con la ecuación en el análisis de sus casos particulares, pongamos d en función de r , tomando $d = \lambda r$, donde λ es una constante tal que $\lambda > 1$ ($\lambda < 1$) para el caso de las epicicloides alargadas (respectivamente para el caso de las epicicloides acortadas). Como podemos observar, esta transformación no afecta la curva y garantiza que siempre se cumpla la condición $d > r$ ($d < r$). Además, de esta forma se tienen los distintos casos particulares vistos anteriormente de las epicicloides alargadas (acortadas) en función de r y los diferentes valores de λ .

Veamos a continuación como ejemplo el caracol de Pascal como caso particular de epicicloide alargada y la circunferencia como caso particular de las epicicloides acortadas.

Ejemplo de epicicloide alargada: Si hallamos la epicicloide alargada para $R = r$ y $\lambda > 1$, se tiene la ecuación paramétrica de la curva $\{x = 2r \cos \theta - r\lambda \cos 2\theta, y = 2r \operatorname{sen} \theta - r\lambda \operatorname{sen} 2\theta\}$, la cual se transforma en $\{x = 2r \cos \theta - r\lambda \cos 2\theta, y = 2r \operatorname{sen} \theta - r\lambda \operatorname{sen} 2\theta\}$. De esta forma coincide con la ecuación paramétrica del caracol de Pascal como una concoide tomando apropiadamente los valores de los parámetros.

Ejemplo de epicicloide acortada: Si hallamos la epicicloide alargada para $R = r$ y $\lambda = 0$, se obtiene como ecuación de la curva $\{x = 2r \cos \theta, y = 2r \operatorname{sen} \theta\}$, la cual coincide con la ecuación paramétrica de una circunferencia centrada en el origen y radio $2r$.

2.7.1.2 Las hipotrocoides

Al igual que con las epitrocoides, comenzaremos el estudio de las hipotrocoides analizando las distintas clasificaciones para las diferentes posiciones del punto generador P conectado a la circunferencia móvil, ya que con respecto a la misma éste puede ser un punto sobre ella, exterior o interior, es decir:

- Si $P \in C_M$, las curvas resultantes se denominan hipotrocoides ordinarias.
- Si P es exterior a C_M , las curvas resultantes se denominan hipotrocoides alargadas.
- Si P es interior a C_M , las curvas resultantes se denominan hipotrocoides acortadas.

Tomemos la circunferencia estacionaria C_M con radio R , centrada en el origen de coordenadas y supongamos que la circunferencia móvil de radio r , se encuentra centrada en el punto $O = (R+r, 0)$ como posición inicial. Además, teniendo en cuenta las tres clasificaciones dadas anteriormente, supongamos que el punto generador P , conectado a la circunferencia móvil se encuentra a una distancia d de su centro O . Entonces, una parametrización general de las curvas epitrocoides, construidas bajo estas condiciones es:

$$\{x = (R-r)\cos \theta + d \cos(-(R-r)\theta/r), y = (R-r)\operatorname{sen} \theta + d \operatorname{sen}(-(R-r)\theta/r)\}.$$

Veamos para cada caso, algunas de las propiedades mas significativas, que de una forma u otra la dotan de la denominación de "Curvas Maravillosas".

2.7.1.2.1 Hipocicloides ordinarias

Como habíamos informado, las hipocicloides ordinarias son aquellas hipotrocoides tales que, el punto conectado a la circunferencia móvil le pertenece. Por lo tanto, se tiene que $d = r$ y la ecuación paramétrica queda de la siguiente forma:

$$\{x = (R-r)\cos \theta + r \cos(-(R-r)\theta/r), y = (R-r)\operatorname{sen} \theta + r \operatorname{sen}(-(R-r)\theta/r)\}.$$

Como se puede observar, la ecuación paramétrica de las hipocicloides difiere de la ecuación de las epicicloides solo en la sustitución de $\langle r \rangle$ por $\langle -r \rangle$, lo que hace que muchas propiedades como las coordenadas de los vértices, de los puntos de retroceso y las fórmulas para el cálculo de longitud de arco, área y radio de curvatura, también difieren en dependencia de esta sustitución, es decir:

- En el proceso de construcción de una hipocicloide ordinaria, los puntos generadores que coinciden con el punto de tangencia entre las circunferencias estacionarias y la móvil, se denominan punto de retroceso o cúspide y se denota por la letra A . Este punto determina dónde culmina una rama de la curva y comienza otra de igual longitud.

- El número de puntos de retroceso (a su vez el número de ramas) que posee una epicicloide se encuentra en dependencia del valor real $m = R/r > 1$, valor que a su vez determina la forma que tiene la curva, es decir:
 - Si m es un número entero, la epicicloide está formada por m ramas que rodean el interior de la circunferencia estacionaria al volver el punto generador a su posición inicial. Los puntos de retroceso A_m tienen las coordenadas en el valor del parámetro $\theta = 2k\pi/m$ y los vértices B_m en el valor del parámetro $\theta = 2\pi(k + \frac{1}{2})/m$, con $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$.
 - Si m es un número fraccionario, las ramas de la epicicloide se cruzan, sin embargo cuando el punto generador P haya descrito un número finito de ramas (después de un número finito de vueltas dadas por la circunferencia móvil sobre la estacionaria), vuelve a su posición inicial.
 - Si m es un número irracional, entonces la epicicloide posee una cantidad infinita de ramas y el punto generador P nunca vuelve a su posición inicial.
- La longitud de una rama es $L_r = 8(R-r)/m$ y para el caso en que m sea un valor entero, la longitud de toda la curva es $L = 8(R-r)$.
- El área de un sector delimitado por la circunferencia estacionaria y una de sus ramas tiene la fórmula $S = (3R - 2r)\pi r^2 / R$.
- El radio de curvatura es $\rho = 4r(R-r)\text{sen}(-R\theta_0/2r)/(R-2r)$.

Veamos a continuación algunos de los casos particulares más relevantes de estas curvas.

2.7.1.2.1.1 La hipocicloide de dos cúspides

En el caso particular en que $m = 2$, la curva que se genera es el diámetro de la circunferencia estacionaria que une los dos puntos de retroceso. Fig. (c2. §7. 44).

2.7.1.2.1.2 La deltoide

En el caso particular en que $m = 3$, la curva que se genera se denomina deltoide o hipocicloide tetracúspide, debido a que posee tres ramas y por consiguiente tres puntos de retroceso (cúspides). Fig. (c2. §7. 45). Como caso particular de hipocicloide adopta la ecuación paramétrica reducida $\{x = r(2\cos\theta + \cos 2\theta), y = r(2\text{sen}\theta - \text{sen} 2\theta)\}$ y sus propiedades más características, las cuales son:

- La longitud de toda la curva es $L = 16r$ (dieciséis veces el radio de la circunferencia móvil).
- El área interior de la curva es $A = 2\pi r^2$ (Dos veces el área de la circunferencia móvil).

2.7.1.2.1.3 El astroide

El astroide fue una de las primeras ruletas cicloidales que se estudiaron desde esta perspectiva, ya que fue descubierta por Roemer (1674) en su búsqueda de la forma óptima para los engranajes. El nombre de astroide apareció por vez primera en 1838, en un libro publicado en Viena; antes era conocida por distintos nombres como cubocicloide, paraciclo o curva tetracúspide.

El astroide es el caso especial de hipocicloide, donde $m = 4$, es decir, cuando el radio de la circunferencia estacionaria es cuatro veces mayor que el radio de la circunferencia móvil ($R = 4r$), Fig. (c2. §7. 46a).

En 1725 Daniel Bernoulli encuentra otro método de construcción, también como hipocicloide y lo llamó doble generación del astroide, este método consiste en tomar $R = 4r/3$, es decir cuando $m = 4/3$, Fig. (c2. §7. 46b). Lo curioso de estos dos valores tomados para la constante m es que si tomamos el mismo valor de R y el mismo punto generador inicial, ambos métodos generan punto por punto, exactamente la misma astroide, Fig. (c2. §7.46c).

Si $m = 4$, se tiene la ecuación paramétrica $\{x = 3r \cos \theta + r \cos(3\theta), y = 3r \sin \theta - r \sin(3\theta)\}$ y si $m = 4/3$ se tiene la ecuación paramétrica $\{x = (r \cos \theta/3) + r \cos(\theta/3), y = (r \sin \theta/3) - r \sin(\theta/3)\}$. Si tomamos $r = 1$, ambas ecuaciones se reducen a $\{x = r \cos^3 \theta, y = r \sin^3 \theta\}$.

Entre las propiedades más características del astroide podemos citar:

- El astroide es la envolvente de elipses coaxiales cuya suma de ejes menor y mayor es constante.
- La evoluta de un astroide es otro astroide.
- La podaria de un astroide con respecto a su centro es una rosa de 4 pétalos, llamada cuadrifolia.

2.7.1.2.2 Hipocicloides alargadas y acortadas

En el caso de las hipocicloides alargadas (acortadas), las estudiaremos representadas por la ecuación $\{x = (R - r) \cos \theta + d \cos(-(R - r)\theta/r), y = (R - r) \sin \theta + d \sin(-(R - r)\theta/r)\}$ y teniendo en cuenta que $d > r$ ($d < r$), analizaremos los distintos casos particulares de estas curvas, anunciados en epígrafes anteriores, así como también se analizaran otras que por sus características constituyen un ejemplo clásico en la denominación de "Curvas Maravillosas". Para facilitar el manejo de la ecuación en el análisis de sus casos particulares, pongamos d en función de r , tomando $d = \lambda r$, donde λ es una constante tal que $\lambda > 1$ ($\lambda < 1$) para el caso de las hipocicloides alargadas (respectivamente para el caso de las hipocicloides acortadas). Como podemos observar, esta transformación no afecta la curva y garantiza que siempre se cumpla la condición $d > r$ ($d < r$). Además, de esta forma se tienen los distintos casos particulares vistos anteriormente de las hipocicloides alargadas (acortadas) en función r y los diferentes valores de λ .

Veamos a continuación como ejemplo, la elipse como caso particular de las hipocicloides alargadas y como caso particular de las hipocicloides acortadas.

Ejemplo de epicicloide alargada: Si hallamos la hipocicloide alargada para $R = 2r$ y $\lambda = 7$, se tiene la ecuación paramétrica de la curva $\{x = r \cos \theta + 7r \cos(-\theta), y = r \sin \theta + 7r \sin(-\theta)\}$, la cual se transforma en $\{x = 8r \cos \theta, y = 6r \sin \theta\}$. De esta forma coincide con la ecuación paramétrica de la elipse deducida por la construcción de Point-wise con $a = 8r$ y $b = 6r$.

Ejemplo de epicicloide acortada: Si hallamos la hipocicloide acortada para $R = 2r$ y $\lambda = 1/2$, se obtiene la ecuación de la curva $\{x = r \cos \theta + r/2 \cos(-\theta), y = r \sin \theta + r/2 \sin(-\theta)\}$, la cual se

transforma en $\{x = 3r/2 \cos \theta, y = -r/2 \operatorname{sen} \theta\}$. De esta forma coincide con la ecuación paramétrica de la elipse deducida por la construcción de Point-wise con $a = 3r/2$ y $b = r/2$.

2.7.1.2.2.1 Otros casos particulares de hipocicloides alargadas (las rosas)

En el presente aspecto se analizará una subfamilia de las hipocicloides alargadas, conocidas como rosas y que se definen como las hipocicloides alargadas tales que $R = kr$ y $\lambda = k - 1$, con $k \in \mathbb{Q}_+^*$, por lo tanto la representación en forma paramétrica general y simplificada de una rosa es $\{x = (k - 1)r[\cos \theta + \cos(-(k - 1)\theta)], y = (k - 1)r[\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen}(-(k - 1)\theta)]\}$ y los distintos casos particulares dependen del valor de k , por ejemplo:

- Si $k = 3$, la curva resultante es el trifolium, Fig. (c2. §7. 47).
- Si $k = 4$, la curva resultante es el cuatrifolium, Fig. (c2. §7. 48).

2.7.1.3 Las trocoides (cicloides)

Al igual que con las epitrocoides y las hipotrocoides, comenzaremos el estudio de las trocoides dando tres nuevas clasificaciones que surgen dependiendo de las distintas posiciones del punto generador P conectado a la circunferencia móvil con respecto a la misma (exterior, interior y perteneciente a la circunferencia móvil) y que dan a nuestro árbol de familias de las ruletas un mayor orden. Sin embargo, como la curva estacionaria es una recta, se puede obtener una parametrización general de estas curvas, que dependa de la distancia del punto generador al centro de la circunferencia móvil, tomando la recta en el eje "x", es decir la ecuación en coordenadas paramétricas $\{rt - d \operatorname{sen} t, r - d \operatorname{cos} t\}$, donde r es el radio de la circunferencia y d la distancia del punto P al centro de la circunferencia. De esta forma simplificaremos el estudio de estas curvas y el trabajo de sus propiedades a través de la relación existente entre los parámetros r y d .

- Si $r = d$ (el punto generador P conectado a la circunferencia móvil le pertenece), las curvas resultantes se denominan cicloide ordinaria. Fig. (c2. §7. 49a).
- Si $r < d$ (el punto generador P conectado a la circunferencia móvil, se encuentra exterior a dicha circunferencia), las curvas resultantes se denominan cicloides alargadas. Fig. (c2. §7. 49b).
- Si $r > d$ (el punto generador P conectado a la circunferencia móvil se encuentra interior a dicha circunferencia), las curvas resultantes se denominan cicloides acortadas. Un caso extremo es cuando P es el propio centro de la circunferencia ($d = 0$), en este caso la curva resultante sería una recta paralela al eje "x". Fig. (c2. §7. 49c).

Veamos a continuación algunas de las características propias de la cicloide ordinaria, ya que este caso particular fue el que dio paso al estudio de las propias trocoides, cuando los matemáticos intentaron generalizar su método de construcción.

2.7.1.3.1 Cicloide ordinaria

La cicloide ordinaria fue estudiada por primera vez por Nicolás de Cusa. Galileo en el año 1599 estudió la curva e intentó hallar algunas de sus propiedades, éste fue el primero en darle el nombre con la que la conocemos. Esta curva también tiene una larga historia ligada al problema de hallar la forma que debe tener un camino que una dos puntos fijos A y B para que una partícula impulsada por la aceleración de la gravedad, emplee un tiempo

mínimo en recorrerlo, ya que aunque se conoce que el camino más corto es el segmento de la recta que pasa por éstos, el tiempo no depende sólo de la longitud del camino sino también de la velocidad de la partícula. Galileo pensó que el camino debería tener la forma de un arco de circunferencia, pero los hermanos Bernoulli entre finales del siglo XVII y principios del siglo XVIII demostraron que el camino debería tener la forma de un arco de cicloide ordinaria. Desde ese momento la cicloide recibió el nombre de braquistócrona (palabra griega derivada de tiempo y mínimo).

Entre las propiedades más significativas de la cicloide podemos citar:

- El área limitada por un arco de cicloide y la recta por la que rueda la circunferencia es exactamente igual a tres veces el área de ésta circunferencia.
- La longitud de un arco de cicloide es igual a cuatro veces la longitud del diámetro de la circunferencia generatriz.

Un uso práctico de esta curva se tiene en el diseño de ciertos toboganes, los hechos con forma de cicloide que se utilizaron en la industria aeronáutica, pues se requería una forma apropiada de salir deslizándose desde un avión en caso de emergencia.

2.7.2 Ruletas no cicloidales

Como su nombre indica las ruletas que estudiaremos en este tema no se generan solamente con circunferencias o con circunferencias y una recta, es decir sencillamente son aquellas que quedan fuera de la definición de ruletas cicloidales. Veamos a continuación mediante una tabla resumen, algunos casos particulares de gran importancia, para así obtener mayor claridad en este tema.

Curva estacionaria C_E	Curva móvil C_M	Posición del punto P conectado a C_M	Posición de la curva C_M con respecto a la curva C_E	Curva resultante (Ruleta no cicloidal)
Parábola	Parábola	P es el vértice de la parábola	C_M rueda exterior a la parábola	La cicloide de Diocles
Recta	Parábola	P es el foco de la parábola	C_M rueda sobre la recta	La catenaria
Recta	Espiral logarítmica	P es cualquier punto de la espiral	C_M rueda sobre la recta	La recta
Recta	Espiral hiperbólica	P es el polo de la espiral	C_M rueda sobre la recta	La tractriz
Recta	Involuta de una circunferencia	P es el centro de la involuta	C_M rueda sobre la recta	La parábola
Recta	Cicloide	P es el centro de la cicloide	C_M rueda sobre la recta	La elipse

Como podemos notar casi todas estas curvas ya han sido estudiadas en epígrafes anteriores, excepto la tractriz que solamente fue anunciada su evoluta (la catenaria). Por este hecho en el epígrafe estudiaremos solamente con profundidad esta curva.

2.7.2.1 La tractriz

Se dice que en 1670, el médico y arquitecto francés Claude Perrault se acercó a Leibniz en París y puso sobre la mesa su reloj de bolsillo, lo arrastró con la cadena procurando que su extremo se moviera sobre una línea recta y preguntó a Leibniz por la curva descrita por el reloj. Posiblemente no era la primera vez que Perrault le hacía esta pregunta a un matemático, pero hasta entonces no había obtenido respuesta. En marzo de 1694 Leibniz describe a su corresponsal Tschirnhaus el método que condujo a la formulación de las ecuaciones que explicaban la construcción de aquella curva trazada mecánicamente desde el eje perpendicular a una recta. La trayectoria del objeto fue bautizada por Huygens como la curva tractoriis (tractriz) que alude al movimiento que desde el plano horizontal tira del objeto. Ésta curva también es conocida como “curva del perro”, al reemplazar el objeto por el animal que atado a la cuerda de su amo le persigue mientras este se desplaza por el plano horizontal. En función de ésta definición de la tractriz, se obtuvo mediante diversas leyes físicas ligadas a varios conocimientos matemáticos, la parametrización de la curva $\{\pm a(t - tht), a \operatorname{sech} t\}$, de donde se obtiene la ecuación en coordenadas cartesianas $x - a \operatorname{Arsech}(a/y) = \pm \sqrt{a^2 - y^2}$.

La curva tractriz como caso particular de ruleta no cicloidal, se hace un poco compleja en el estudio de sus propiedades e incluso de su representación gráfica, debido a la abstracción de su construcción, por ser el polo de la espiral hiperbólica un punto asintótico. Por este hecho estudiaremos sus principales propiedades a partir de su definición primaria:

- Tiene una asíntota en el eje “ x ”.
- La longitud del segmento de la tangente desde el punto de tangencia M hasta el punto de intersección P con la asíntota es un valor constante a .
- El punto $A = (0, a)$ es un punto de retroceso. La recta tangente en dicho punto es la perpendicular a la asíntota (el eje “ y ”).
- La longitud del arco $\overset{\sim}{AM}$ es $L = a \ln(a/y)$.
- El radio de curvatura en es $r = a \cot(x/y)$.

Una aplicación maravillosa de la tractriz es que partir de su evoluta, se pueden generar las curvas catenarias (ver capítulo 1, epígrafe 2).

§2.8 Otras curvas maravillosas

2.8.1 Espirales sinusoidales

Estas curvas fueron primeramente estudiadas por MacLaurin en 1718 y su nombre fue dado por Haton del Goupillère en 1857, sin embargo está demostrado que no son verdaderas espirales (su radio vector crece y decrece de forma "sinuosa"³.) como su nombre indica. Como hemos enunciado en el transcurso del capítulo la consideramos como una curva maravillosa, ya que debido a sus características, muchas curvas estándar pertenecen a esta familia de curvas.

³Sinuosa: Que tiene senos, ondulaciones o recodos

Se denomina espiral sinusoidal a la curva cuya ecuación en coordenadas polares es del tipo $\rho^n = 2r^n \cos n\theta$, donde a es una constante positiva cualquiera y n el parámetro que determina las distintas formas que adopta la curva.

A continuación veamos para qué valores de n se tienen las distintas curvas que se han ido anunciando en el transcurso del capítulo como casos particulares de esta curva:

- Para $n = -2$, se tiene la ecuación $\rho^{-2} = 2r^{-2} \cos(-2\theta)$, la cual es equivalente a la ecuación $\rho = r/\sqrt{2\cos 2\theta}$ y coincide con la ecuación en coordenadas polares de una hipérbola equilátera con centro en el origen.
- Para $n = -1$, se tiene la ecuación $\rho^{-1} = 2r^{-1} \cos(-\theta)$, la cual es equivalente a la ecuación $\rho = r/2 \cos \theta$. Transformando esta última ecuación a coordenadas cartesianas, se tiene la ecuación $x - r = 0$ y coincide con la ecuación de una recta perpendicular al eje "x".
- Para $n = -1/2$, se tiene la ecuación $\rho^{-1/2} = 2r^{-1/2} \cos(-\theta/2)$, la cual es equivalente a la ecuación $\rho = r/4 \cos^2(\theta/2)$ y coincide con la ecuación en coordenadas polares de una parábola que abre hacia la izquierda, con foco en $F = (0, -r/2)$ y vértice en $V = (r/2, 0)$.
- Para $n = 1/2$, se tiene la ecuación $\rho^{1/2} = 2r^{1/2} \cos(\theta/2)$, la cual es equivalente a la ecuación $\rho = r \cos^2(\theta/2)$ y coincide con la ecuación en coordenadas polares de una cardioide, ya que se puede demostrar mediante identidades trigonométricas que la ecuación obtenida es la misma que $\rho = a(\cos \theta + 1)$, con $a = r$.
- Para $n = 1$, se tiene la ecuación $\rho = 2r \cos \theta$ que es una circunferencia centrada en $O = (r, 0)$ y de radio r .
- Para $n = 2$, se tiene la ecuación $\rho^2 = 2r^2 \cos(2\theta)$, la cual es equivalente a la ecuación $\rho = r\sqrt{2\cos 2\theta}$ y coincide con la ecuación en coordenadas polares de una lemniscata de Bernoulli simétrica respecto al origen y a los ejes coordenados.

2.8.2 Curvas de Lissajous

Las curvas o figuras de Lissajous fueron descubiertas y estudiadas en 1857 por el físico matemático francés Jules-Antoine Lissajous (1822-1880), al intentar hacer visible el movimiento vibratorio provocado por el sonido. Sin embargo Lissajous no fue el primero en considerar estas curvas, pues en 1815, el astrónomo y matemático Salem Massachusetts Nathaniel Bowditch (1773-1838) ya las había considerado cuando estudiaba el movimiento del péndulo compuesto, por lo que también son conocidas como curvas de Bowditch.

2.8.2.1 Las curvas de Lissajous y sus casos particulares

Las curvas de Lissajous, matemáticamente se encuentran definidas por la ecuación paramétrica $\{x = a \operatorname{sen}(mt + c), y = b \operatorname{sen}(nt + q)\}$, con $t \in \mathfrak{R}$ y su deducción proviene de los conocimientos de física, donde se conoce que:

- La función horizontal de amplitud unitaria variable en el tiempo de un Movimiento Armónico Simple es $x = a \operatorname{sen}(mt + c)$.

- La función vertical de amplitud unitaria variable en el tiempo de un Movimiento Armónico Simple es $y = b\text{sen}(nt + q)$.

Por lo tanto la trayectoria denominada *Figuras de Lissajous*, viene dada por los puntos de coordenadas (x, y) , para diferentes instantes de tiempo t .

A continuación daremos a conocer mediante una tabla algunos casos particulares de las curvas de Lissajous.

Casos particulares					
Curvas	Comportamiento de los parámetros				Ecuación
	a y b	n y m	p	q	
Función lineal	arbitrarios	$n = m$	0	0	$\{x = at, y = bt\}$
Elipse	$a \neq b$	$n = m$	$\pi/2$	0	$\{x = a \cos \theta, y = b \text{sen} \theta\}$
Circunferencia	$a = b$	$n = m$	$\pi/2$	0	$\{x = a \cos \theta, y = a \text{sen} \theta\}$

Entre las aplicaciones más significativas que caracterizan estas curvas en sentido general podemos citar:

- Las curvas de Lissajous fueron utilizadas para determinar las frecuencias de sonidos o de señales de radio y permiten el estudio de los movimientos vibratorios.
- Se utiliza en el calculo de la medida de fase, es decir, el desfase en grados existente entre dos señales distintas de la misma frecuencia

Como curiosidad, comentaremos que estas bellas figuras han sido empleadas ampliamente en estudios físicos y de ingeniería, además en labores de diseño gráfico, hasta tal punto que empresas y asociaciones como la Australian Broadcasting Company o el Laboratorio Lincoln hacen uso de ellas en sus respectivos logotipos.

Resumen del Capítulo

Se aprecia que la complejidad constructiva no ha sido el único criterio para considerar una curva maravillosa, puesto que en esta categoría hemos incluido a la recta por sus múltiples aplicaciones en la construcción de otras familias de curvas.

El enfoque que se ha dado al tratamiento de las funciones está dirigido a fundamentar el estudio de la campana de Gauss, la catenaria y la bruja de Agnesi.

Con relación a las secciones cónicas, se muestra la equivalencia de tres formas de la noción de excentricidad. Se establecen analogías y diferencias entre los miembros de esta familia, en particular, la elipse y la circunferencia, puesto que aunque a partir de la primera puede determinarse la otra y viceversa, mediante un proceso de anamorfosis, existe una diferencia teórica esencial debida a que la circunferencia es un caso límite de la elipse que hace que se pierda la noción de excentricidad.

Se observa la diversidad en el comportamiento topológico en cuanto a la conexidad de los óvalos de Cassini, en función del parámetro.

Se muestra la generalidad de las familias de las cisoides y de las concoides, puesto que incluyen muchas curvas que pueden también ser clasificadas dentro de otras familias.

Se evidencia la amplitud de la familia de las ruletas que admite una gran cantidad de subclasificaciones asociadas a ella.

En la explicación de las propiedades fundamentales se hace referencia a las gráficas ilustrativas que figuran en el Anexo de este capítulo, lo cual contribuye favorablemente a la comprensión de las mismas.

Se ha abordado el estudio de las curvas a partir de su surgimiento histórico curioso aludiendo su surgimiento desde el punto de vista tratado por la Historia de la Matemática, ejemplo de ello es la tractriz. Hemos constatado que algunos métodos de construcción son muy ingeniosos, como pudimos ver en las ruletas y pueden llegar a ser realmente sorprendentes. Además se desarrollan y justifican diferentes relaciones interesantes de una curva con elementos de otras familias de curvas desde la perspectiva de la elegancia matemática, como sucedió con la elipse y la cardioide. También observamos cómo muchas de estas curvas están presentes en la Naturaleza. Finalmente insistimos en la multitud de aplicaciones prácticas y teóricas con que cuenta la gran mayoría de ellas.

Capítulo 3

Sistema Computacional

CAPÍTULO III: SISTEMA COMPUTACIONAL

Introducción

En este capítulo se muestra la herramienta computacional elaborada para que los estudiosos del tema puedan acceder a los diversos aspectos de la información ofrecida para las curvas en dependencia del criterio del usuario, en particular a la formación animada de muchas de ellas, lo cual incide extraordinariamente en la comprensión de su construcción.

§3.1 Generalidades del sistema.

Este trabajo presenta un formato poco común debido a que se tuvo en cuenta que cada curva como tema principal cuenta con varios sub temas, los cuales de una forma u otra están relacionados con ella, por ello se desarrolló un sistema que basándose en hipervínculos permite acceder a toda la información que se necesita, ya sea de manera general o específica, según sean las necesidades del usuario. Un logro extraordinario del trabajo consiste en la obtención animada mediante la programación en el MATHEMATICA (versión 6.0) de las curvas definidas a partir de un punto móvil con respecto a otras curvas móviles o fijas, lo cual incide definitivamente en la comprensión de la significación de los elementos que las definen y en el esclarecimiento de su relación con otras curvas.

La aplicación Web cuenta con dos menús básicos, uno en la parte superior y otro a la izquierda de cada página, independientemente del tema que se esté abordando, el primero cuenta con cuatro temas básicos que se describen seguidamente.

Inicio: nos lleva directamente a la página de bienvenida a nuestra aplicación.

Árbol de familia de curvas: Nos lleva al árbol en el cual están representadas todas las familias estudiadas en nuestra investigación y muestra cuáles son las curvas que pertenecen a cada una de ellas.

Curvas: Presenta por orden alfabético todas las curvas estudiadas.

Ayuda: Está dividida en dos partes, una de ellas es aquella con todos los conocimientos que el usuario necesita para la comprensión del trabajo en general y la otra es una pequeña ayuda de utilización de la aplicación.

El segundo menú se refiere a las distintas familias de curvas que analizamos en nuestro trabajo, las cuales son:

- Funciones
- Secciones cónicas
- Óvalos de Cassini
- Cisoides
- Concooides
- Espirales
- Ruletas
- Otras

A partir de estos temas básicos se puede acceder mediante los hipervínculos existentes en cada uno de ellos a nuevas páginas, las cuales contienen la historia y las características generales de cada familia de curvas. Existe también en cada una de estas páginas un tema llamado *Vínculos relacionados*, a partir de donde se puede acceder a las distintas clasificaciones, casos particulares o temas relacionados.

Cada curva a su vez cuenta en su página con una representación gráfica que según sea el caso analizado puede ser animada o no, dependiendo de su método de construcción. Cada animación tiene dos botones, los cuales nos sirven para indicar que la construcción del gráfico se detenga o avance, según sea necesario.

§3.2 Ejemplo de aplicación del sistema.

Ahora se muestra un ejemplo del caso general en que se pretende llegar a la cardioide. Caso 1: Se puede acceder desde el menú de la parte superior de cada página por el botón Curvas Fig. (c3. §2. 1), donde veremos todas las analizadas en orden alfabético como se observa en la Fig. (c3. §2. 2),



Fig. (c3. §2. 1)



Fig. (c3. §2. 2)

Ya teniendo localizada la curva en cuestión se puede acceder a ella mediante el hipervínculo existente en el nombre de cada una de las curvas.

Caso 2: Se supone que queremos llegar a esta misma curva (la cardioide) pero también se necesita saber a qué familia de curvas pertenece; esto se puede hacer mediante el mismo menú existente en la parte superior de cada página, pero ahora a través del botón Árbol de familia de Curvas (Fig. (c3. §2. 3)).



Fig. (c3. §2. 3)

Luego localizando a qué familias pertenece la curva analizada se sabrá de cuántas formas puede ser estudiada, en este caso pertenece a dos: las ruletas y las concoides (Fig. (c3. §2. 4 y 5)).

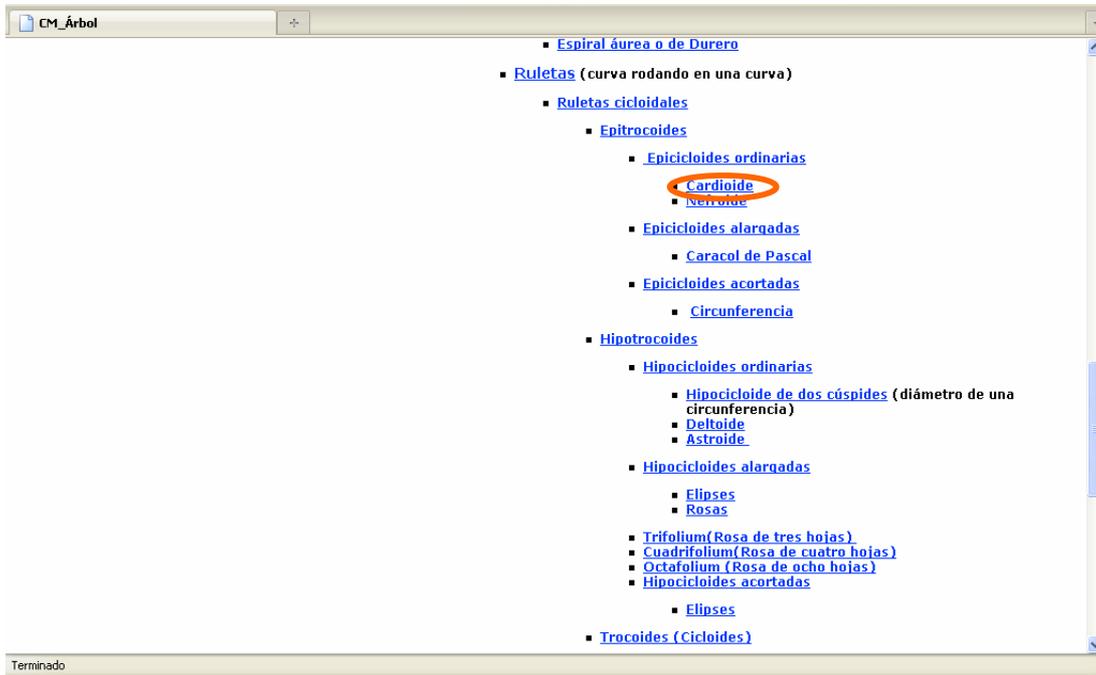


Fig. (c3. §2. 4)



Fig. (c3. §2. 5)

Caso3: Suponer que se conoce a qué familia de curvas pertenece la que es de interés (la cardioide), entonces sencillamente se puede llegar a ella mediante el menú existente en el

lado izquierdo de cada una de las páginas, en este caso a través de Ruleta (Fig. (c3. §2. 6)) o de Concoides (Fig. (c3. §2. 11)).



Fig. (c3. §2. 6)

Conociendo que la cardioide es una ruleta cicloidal entonces se accede al hipervínculo de ruletas cicloidales (Fig. (c3. §2. 7)).

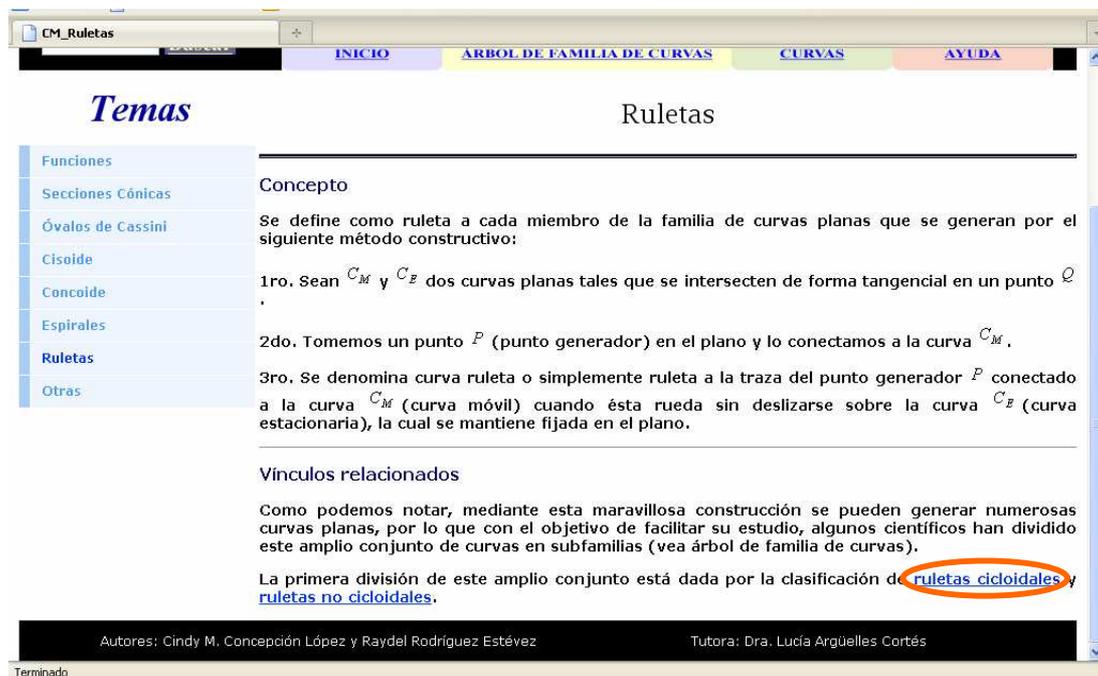


Fig. (c3. §2. 7)

Luego se llega a la página donde se define lo que son las ruletas cicloidales y como la cardioide es una epicicloide, entonces se accede a este hipervínculo (Fig. (c3. §2. 8))

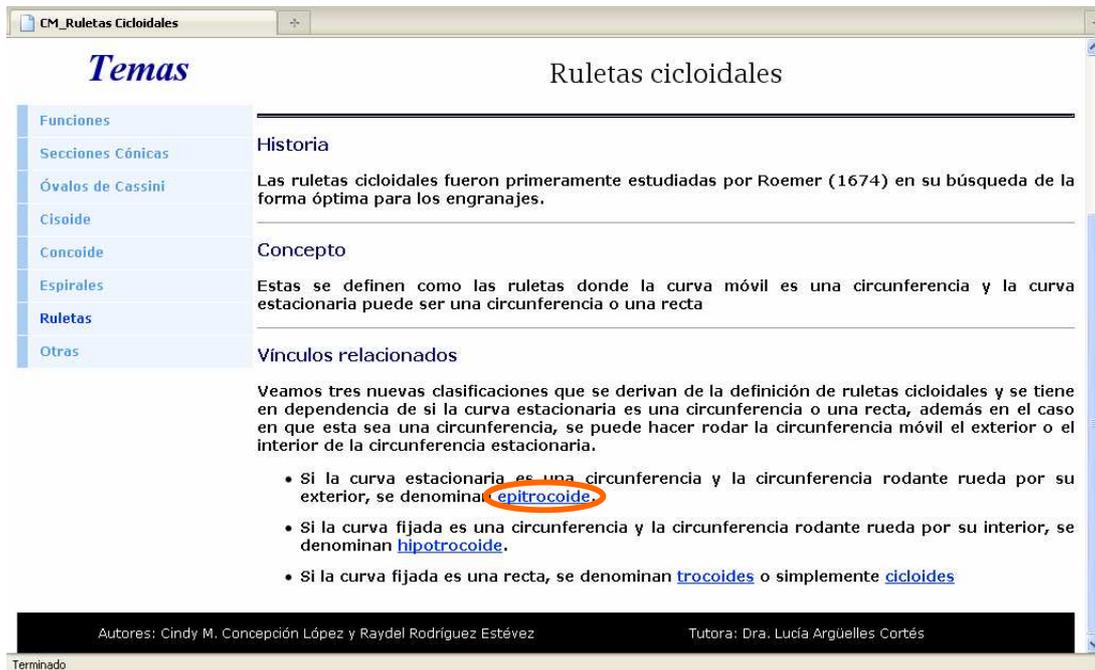


Fig. (c3. §2. 8)

Al estar en la página de epitrocoides y como se conoce que la cardioide es una epicicloide ordinaria se puede entonces acceder al hipervínculo de epicicloide ordinaria (Fig. (c3. §2. 9))

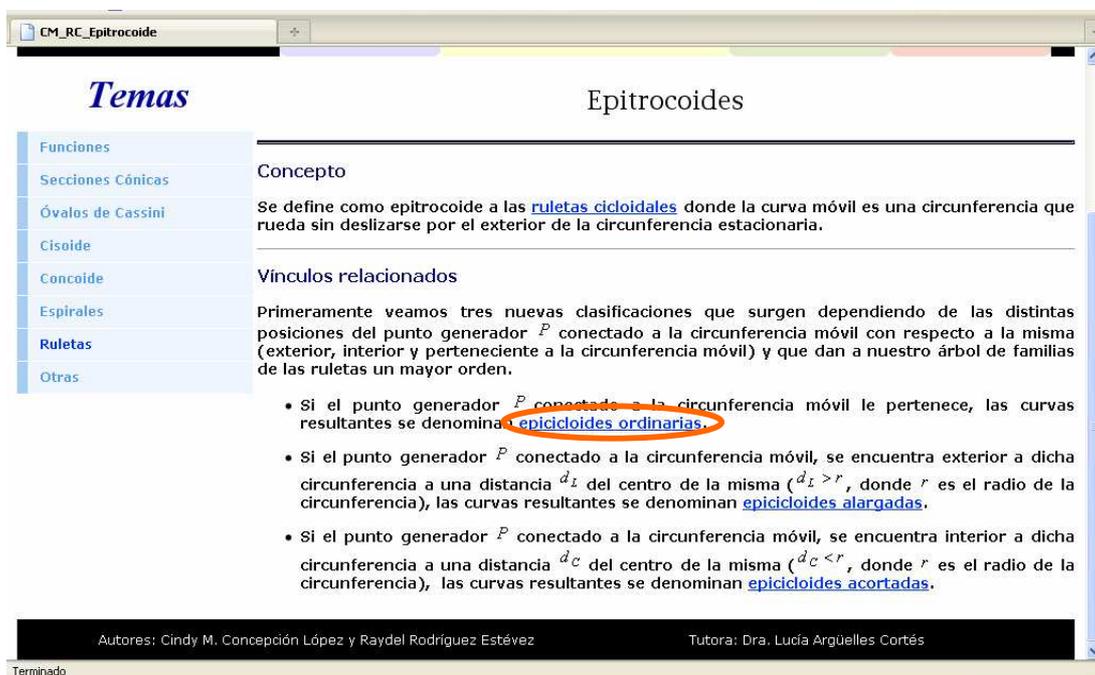


Fig. (c3. §2. 9)

Al estar en esta página, se observa que dentro de Vínculos relacionados está la cardioide Fig. (c3. §2. 10). De esta forma, ya se puede acceder a ella conociendo a qué familias pertenece y algunas de sus características generales.

CM_RCE_Epicicloides

- Si m es un número entero, la epicicloide esta formada por m ramas que rodean al círculo estacionario al volver el punto generador a su posición inicial, Fig. (). Los puntos de retroceso A_m tienen las coordenadas en el valor del parámetro $\theta = 2k\pi/m$ y los vértices B_m en el valor del parámetro $\theta = 2\pi(k + \frac{1}{2})/m$, con $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$.
- Si m es un número fraccionario, las ramas de la epicicloide se cruzan, sin embargo cuando el punto generador P halla descrito un número finito de ramas (después de un número finito de vueltas dadas por la circunferencia móvil sobre la estacionaria), vuelve a su posición inicial.
- Si m es un número irracional, entonces la epicicloide posee una cantidad infinita de ramas y el punto generador P nunca vuelve a su posición inicial.

- Longitud de una rama es $L_r = 8(R+r)/m$ y para el caso en que m sea un valor entero, la longitud de toda la curva es $L = 8(R+r)$.
- Área de un sector delimitado por la circunferencia estacionaria y una de sus ramas tiene la formula $S = (3R+2r)\pi r^2 / R$.
- El radio de curvatura para un punto con parámetro θ_0 es $\rho = \frac{4r(R+r)}{2r+R} \operatorname{sen} \frac{R\theta_0}{2r}$.

Vínculos relacionados

Veamos algunos de los casos particulares más relevantes de epicicloides.

- Si $m = 1$ se tiene una **cardioide**.
- Si $m = 2$ se tiene una **nefroide**.

Autores: Cindy M. Concepción López y Raydel Rodríguez Estévez Tutora: Dra. Lucía Argüelles Cortés

Terminado

Fig. (c3. §2. 10)

Curvas Maravillosas

Curvas Maravillosas

MENÚ

Buscar INICIO ÁRBOL DE FAMILIA DE CURVAS CURVAS AYUDA

Temas Página de Inicio

Funciones	<p>Las curvas han sido vistas y estudiadas desde diferentes puntos de vista, lo que ha causado que algunas tengan diferentes definiciones y pertenezcan a distintas clasificaciones. Por ejemplo: la elipse es un caso particular de ruleta, es una de las secciones cónicas y un caso particular de curvas de Lissajous. Algunas propiedades requieren elementos de geometría diferencial, ejemplo de ello es la curvatura, por tanto conocimientos más avanzados de matemática. Estos hechos han tenido por consecuencia que existe una gran complejidad en la presentación didáctica de este tema.</p> <p>Nosotros estudiaremos específicamente las curvas en el plano, sus propiedades más significativas, algunas de sus aplicaciones y todas aquellas características que demuestren la denominación de curvas maravillosas.</p> <p>Mediante este trabajo esperamos elaborar un sistema suficientemente abarcador, que sirva de guía a personas interesadas en este tema tan apasionante, con facilidades para su análisis, tanto desde el punto de vista pedagógico como computacional, con gran utilidad en la disciplina Historia y Metodología de la Matemática.</p>
Secciones Cónicas	
Óvalos de Cassini	
Cisoide	
Concoide	
Espirales	
Ruletas	
Otras	

Terminado

Fig. (c3. §2. 11)

Al acceder a la página principal de concoide se está dentro de los vínculos relacionados con la cardioide (Fig. (c3. §2. 12)).

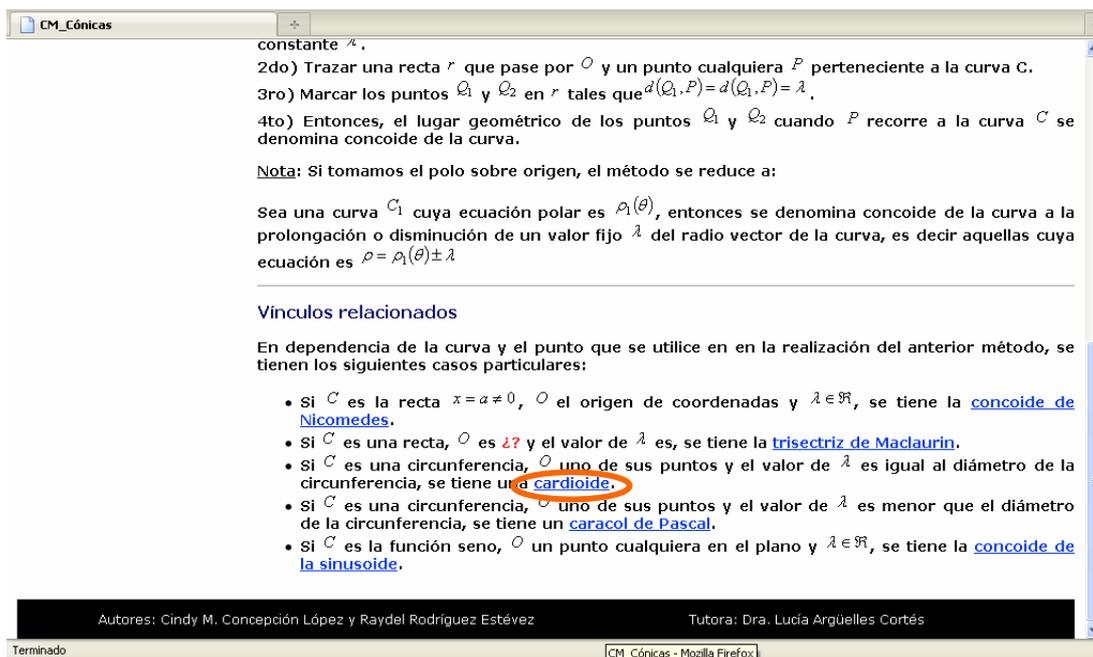


Fig. (c3. §2. 12)

Caso 4: Es aquel en el que el usuario no busca nada en específico y mediante los hipervínculos encontrados en cada una de las páginas se sumergirá en nuevos conocimientos que le harán plantearse nuevas interrogantes, llevándolo a un nuevo hipervínculo de esta forma motivando el uso completo de este material.

Como se había dicho anteriormente, las curvas cuyos métodos de construcción lo permitan cuentan con una representación animada (Fig. (c3. §2. 13)), la cual se va a encontrar en el formato que se muestra en la Fig. (c3. §2. 13.a). Como se puede observar, se cuenta con dos botones: PLAY y PAUSE, los cuales permiten activar o detener la animación respectivamente.

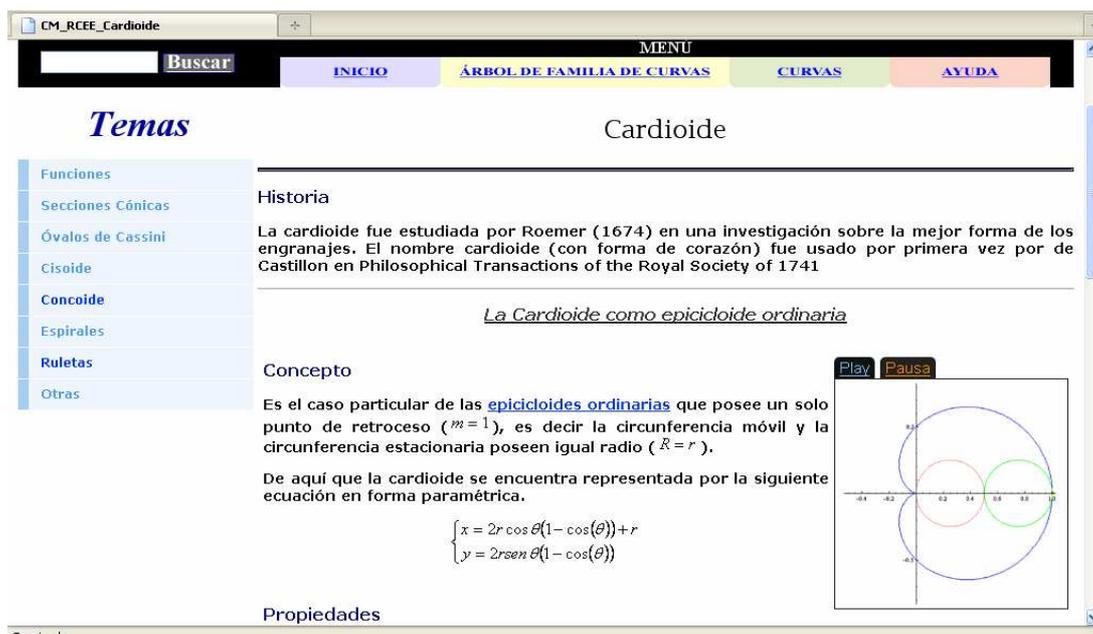


Fig. (c3. §2. 13)

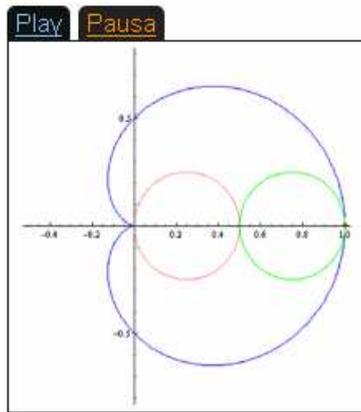


Fig. (c3. §2. 13.a)

Resumen del capítulo

En este capítulo se describe la concepción del sistema computacional que permite al usuario acceder a la información en dependencia de su interés o de la información de que dispone.

Se explican las posibilidades que ofrecen los botones que conforman los menús y los que poseen las opciones de visualizar el gráfico animado.

Se desarrolla un ejemplo para mostrar las diferentes posibilidades de acceso a la información que brinda al usuario el sistema y se ilustran paso a paso las acciones mediante señalamientos circulados en la página correspondiente, lo cual contribuye a la comprensión del lector.

Conclusiones

CONCLUSIONES

- Se logró la presentación clara y concisa de los conceptos básicos que el estudiante necesitará para la comprensión del trabajo, en los cuales no se profundiza en la bibliografía usual.
- Se mostraron ejemplos acompañando a los conceptos que esclarecieron y concatenaron las definiciones utilizadas.
- Se abordó desde todos los puntos de vistas planteados (Historia, Características y Aplicaciones) las familias de curvas encontradas en el árbol.
- Se profundizó en aquellas características que hacen que las curvas trabajadas sean consideradas "maravillosas".
- Se demostraron diferentes propiedades y características que garantizan la veracidad de la investigación.
- Se desarrolló una aplicación web que facilita el trabajo del usuario, haciendo del momento de aprender algo útil, novedoso y llamativo.
- Se graficó en el MATHEMATICA (versión 6.0) todas las curvas trabajadas y se realizó la animación de la construcción de aquellas curvas que lo permiten.

Recomendaciones

RECOMENDACIONES

- Utilizar este trabajo como material de apoyo en las disciplinas Historia y Metodología de la Matemática, Geometría Analítica, Geometría Diferencial y Análisis Matemático, donde facilitará la comprensión de algunos temas allí tratados.
- Continuar desarrollando investigaciones en este tema, ya que cada rama del árbol de familias de curvas pudiera ampliarse e incluso incorporarse nuevas ramas a éste. En particular profundizar en las propiedades y gráficas animadas de las ruletas no cicloidales.
- Facilitar el acceso de los usuarios a la aplicación web, ya que esta ofrece mayor comodidad y visibilidad al tema tratado.
- Actualizar la aplicación web según se incorpore nueva información a la investigación.

Bibliografía

BIBLIOGRAFÍA

1. Álvarez, Pérez, J.M. (2006): Curvas en la historia. Editorial Nivola.
2. Bronshtein, I. y Semendiaev, K. (1971): Manual de matemáticas para ingenieros y estudiantes. Editorial MIR. Moscú.
3. Ayres, F. (1950): Theory and Problems of Differential and Integral Calculus. Edición Revolucionaria.
4. Hofmann, J. E. (1972): Historia de la matemática. Volumen 1. Edición Revolucionaria. Habana. Cuba.
5. Hernández, Cuéllar, G. (2007): Perfeccionamiento del proceso de enseñanza-aprendizaje de la disciplina Programación y Algoritmo en la carrera de Matemática a través de la aplicación del método de investigación-acción. Tesis presentada en opción del grado académico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. UCLV. Santa Clara. Cuba.
6. Larson, R. E., Hostetler, R. P. y Edwards, B. H. (1996) Cálculo y Geometría Analítica. Editorial McGraw-Hill. Aravaca. Madrid.
7. Lehmann, C. H. (1965): Geometría Analítica. Edición Revolucionaria. Habana. Cuba.
8. Lipschutz, M. M. (1969): Teoría y Problemas de Geometría Diferencial. Editorial McGraw-Hill.
9. Páramo, Fonseca, A. (2004): Temas de Cálculo Integral. La gran belleza de las trocoides. Departamento de Matemáticas. Universidad de Los Andes. Bogotá. Colombia.
10. Pérez, Sanz, A. (2005 y 2006): Curvas con historia: de las cónicas a las ecuaciones de las flores. Publicación en CD. Ciclos de Talleres divulgativos. Matemáticas en acción. Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación. Universidad de Cantabria. España. <http://platea.pntic.mec.es/~aperez4>
11. Pérez Sanz, A. (2002): El vídeo: un recurso para ver las matemáticas de la Naturaleza. El lenguaje de las matemáticas en sus aplicaciones. MECD. Madrid.
12. Pérez, Sanz, A. (2005): Las ecuaciones de las flores. Revista SIGMA. Bilbao.
13. Reguera V. R. (1982): Geometría Analítica. Editorial Pueblo y Educación. Habana. Cuba.
14. Rey, P. J., Santaló, L. A. y Balanzat, M. (1966): Geometría Analítica. Edición Revolucionaria. Habana. Cuba.
15. Rey, P. J., Pi, C. P y Trejo, C. A. (1963): Análisis Matemático. Volumen 1. Editorial Kapelusz. Buenos Aires. Argentina.

16. Ríbnikov, K. (1987): Historia de las matemáticas. Editorial MIR. Moscú.

17. Thomas, G. B. (1968): Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica. Edición Revolucionaria. Habana. Cuba.

18. Vygodsky, M. (1971): Mathematical Handbook, Higher Mathematics. Editorial MIR. Moscú.

Vídeos

- Serie Universo Matemático. RTVE Pitágoras. Mucho más que un teorema Historias de pi. Orden y caos. La búsqueda de un sueño.
- Serie Más por menos. RTVE. El mundo de las espirales. Cónicas: del baloncesto a los cometas. Fractales. La geometría del caos
- Universo mecánico. Annenberg TV. Las Leyes de Kepler

Otros Sitios Visitados:

- http://es.wikipedia.org/wiki/Funci3n_gaussiana
- <http://es.wikipedia.org/wiki/Cicloide>
- <http://es.wikipedia.org/wiki/Cisoide>
- http://es.wikipedia.org/wiki/Maria_Gaetana_Agnesi
- http://es.wikipedia.org/wiki/Espiral_de_Fermat
- http://es.wikipedia.org/wiki/Espiral_de_Arqu3medes
- <http://es.wikipedia.org/wiki/Espiral>
- http://es.wikipedia.org/wiki/Espiral_logar3tmica
- http://es.wikipedia.org/wiki/Funci3n_exponencial
- http://es.wikipedia.org/wiki/Funciones_hiperb3licas
- <http://es.wikipedia.org/wiki/Imagen:Logarithms.png>
- <http://es.wikipedia.org/wiki/Trigonometr3a#F.C3>

Anexos

ANEXO: GRÁFICAS DEL CAPÍTULO II

Para la comprensión de la numeración de los anexos es recomendable guiarse por la siguiente leyenda: Fig. (cA. §B. C). Capítulo A, epígrafe B, figura C.

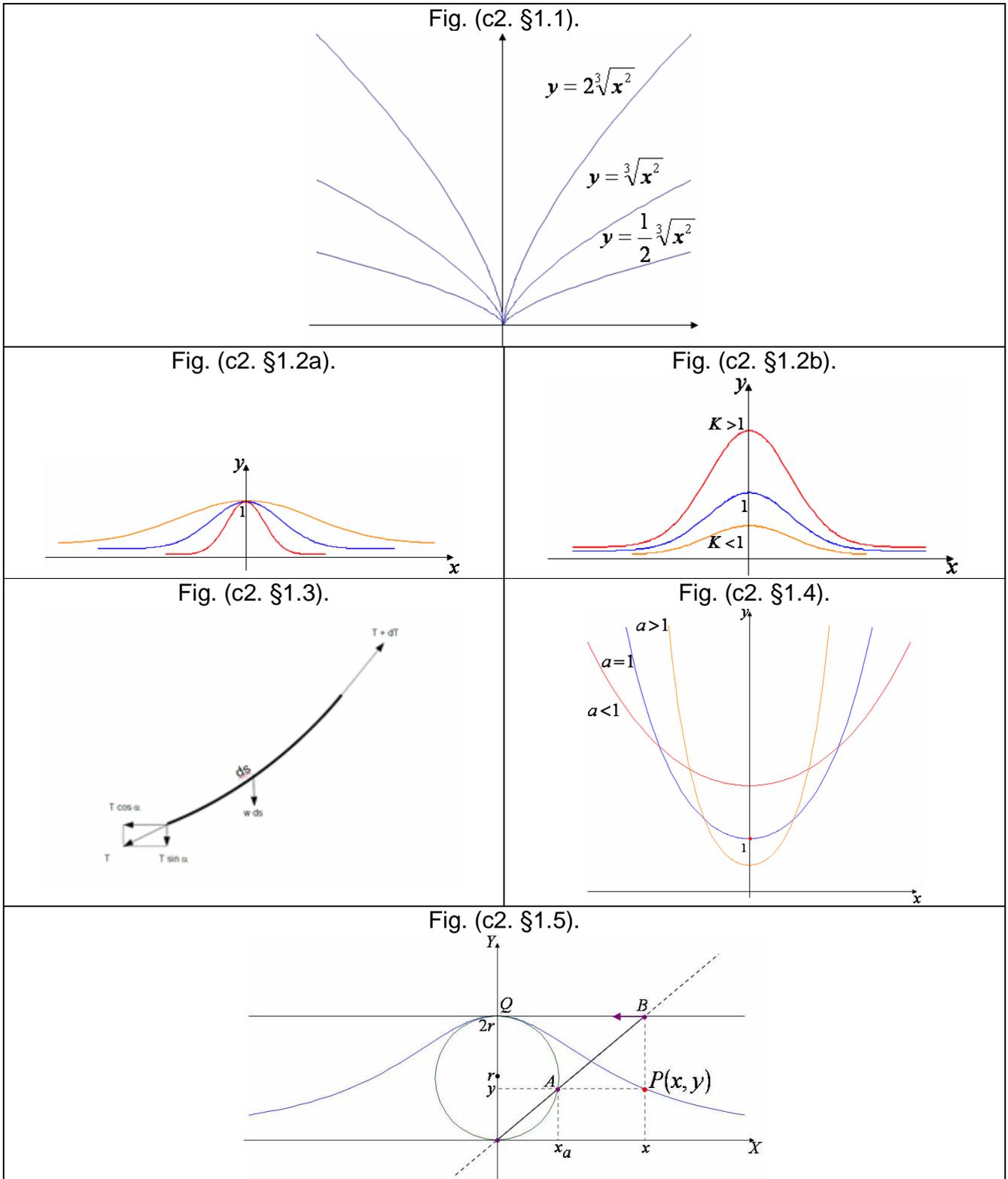


Fig. (c2. §1.6).

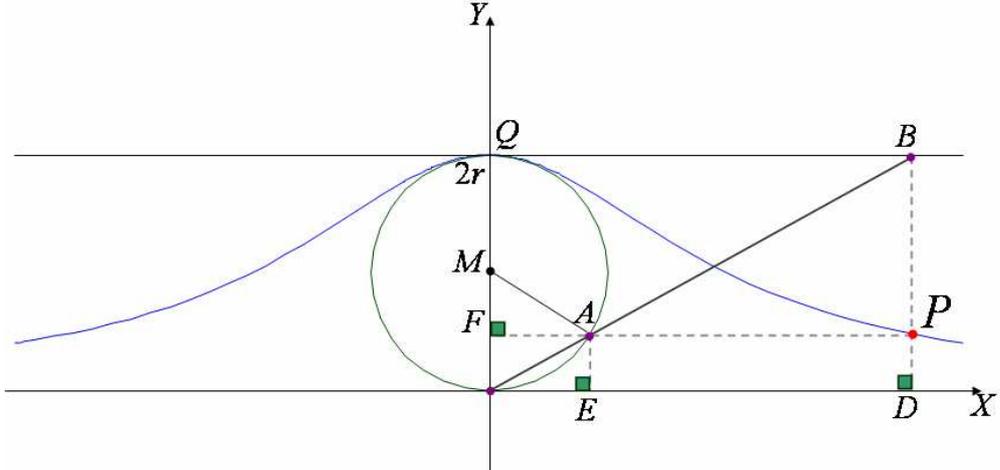


Fig. (c2. §2.7).

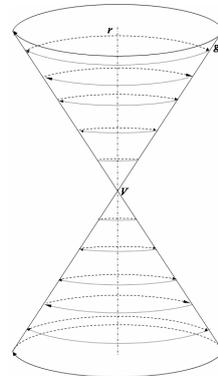
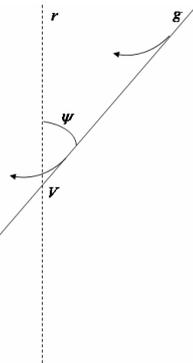


Fig. (c2. §2.8a).

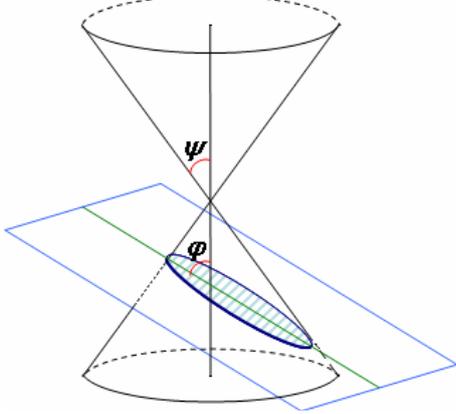


Fig. (c2. §2.8b).

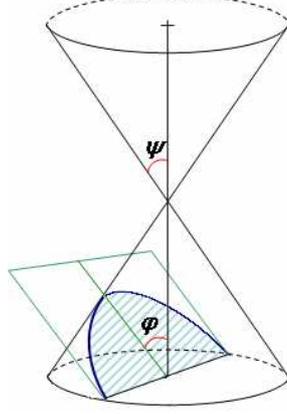


Fig. (c2. §2.8c).

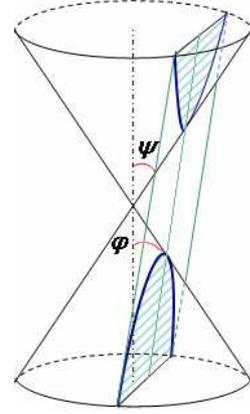


Fig. (c2. §2.9).

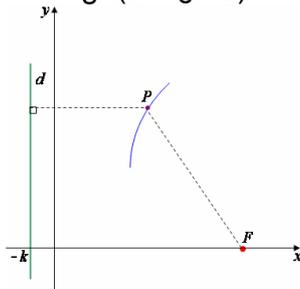


Fig. (c2. §2.10a).

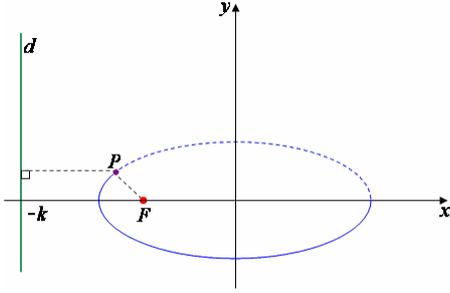


Fig. (c2. §2.10b).

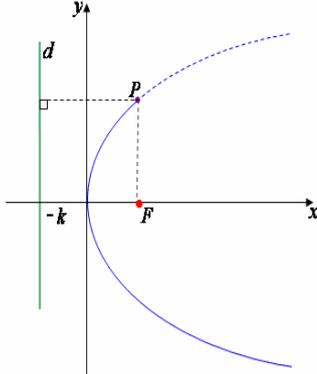


Fig. (c2. §2.10c).

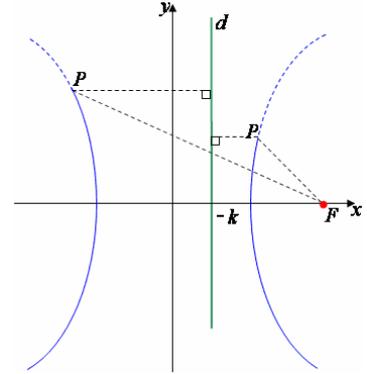


Fig. (c2. §2.11).

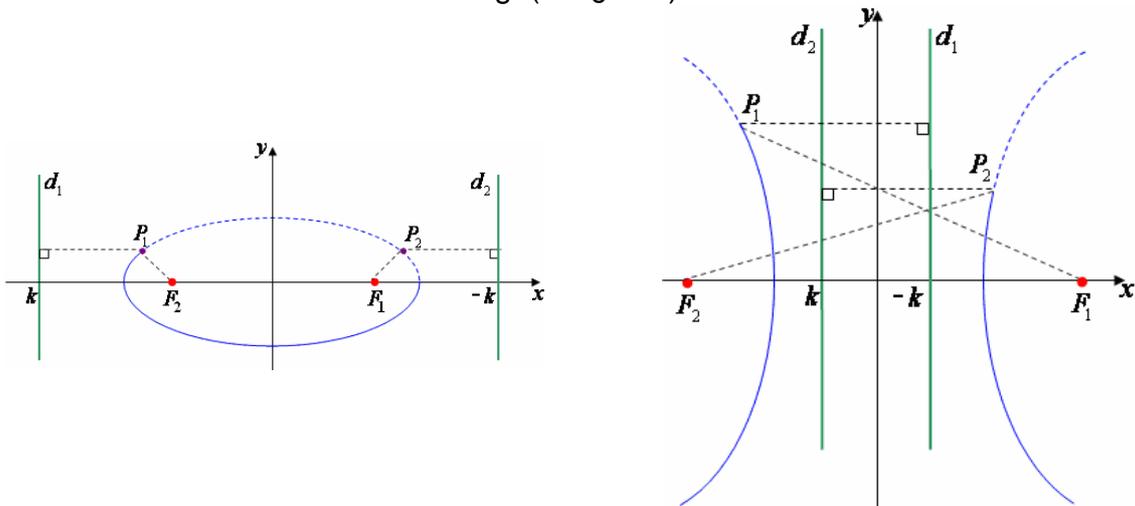


Fig. (c2. §2.12).

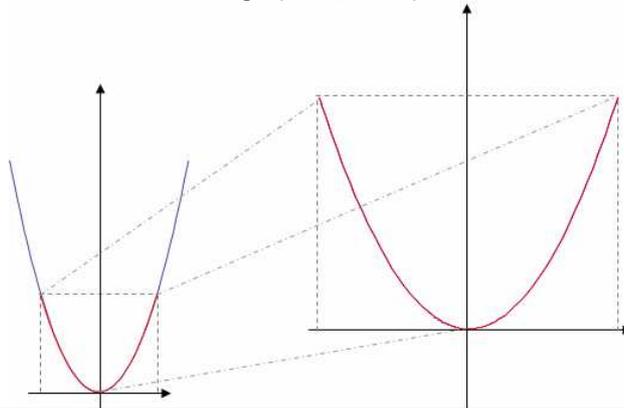


Fig. (c2. §2.13).

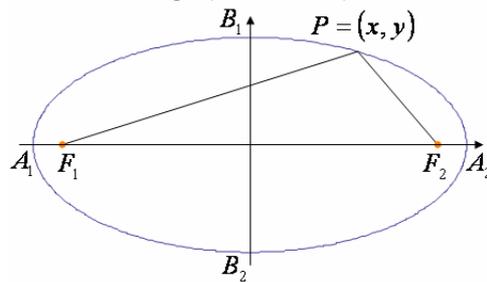


Fig. (c2. §2.14).

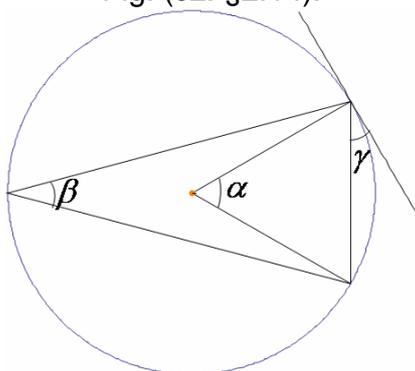


Fig. (c2. §2.15).

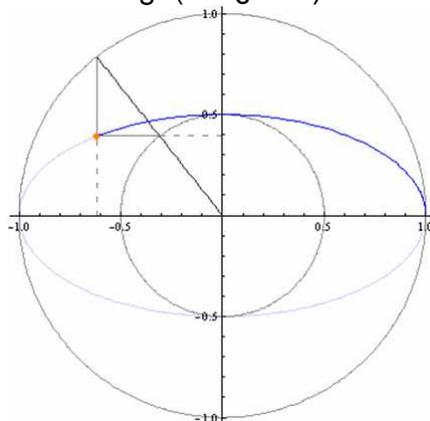


Fig. (c2. §2.16)

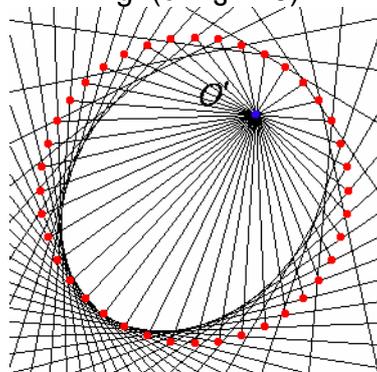


Fig. (c2. §2.17)

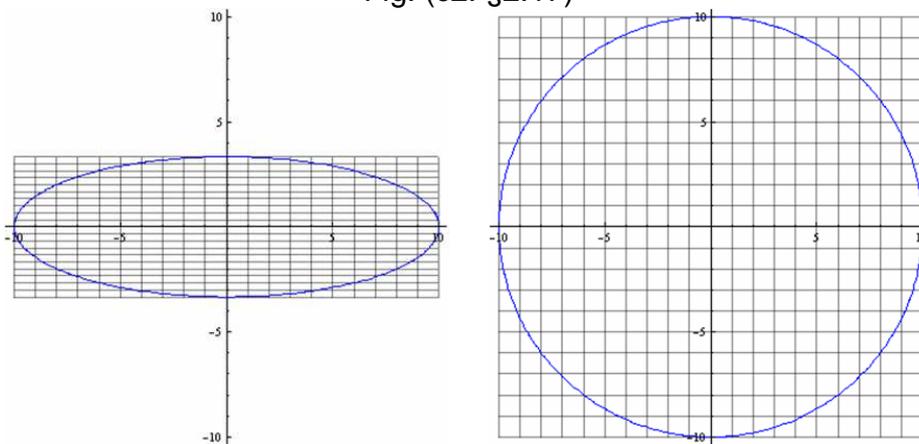


Fig. (c2. §2.18)

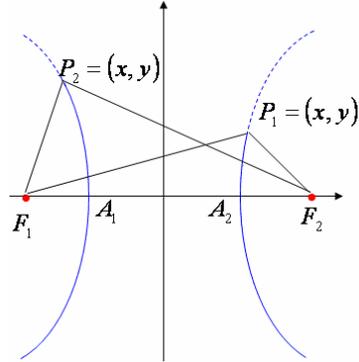


Fig. (c2. §2.19).

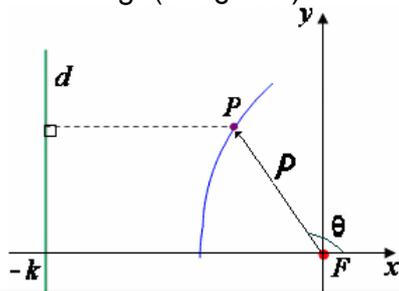


Fig. (c2. §3.20).



Fig. (c2. §3.21).

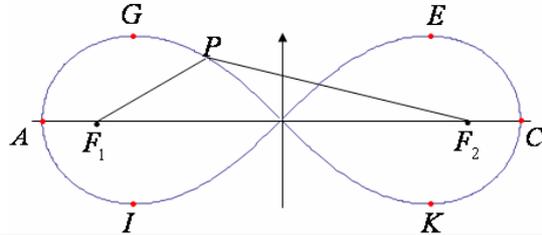


Fig. (c2. §3.22).

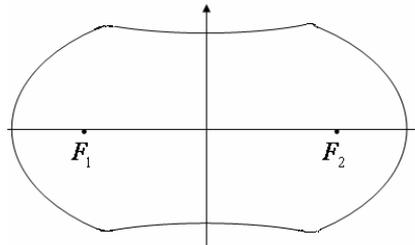


Fig. (c2. §3.23).

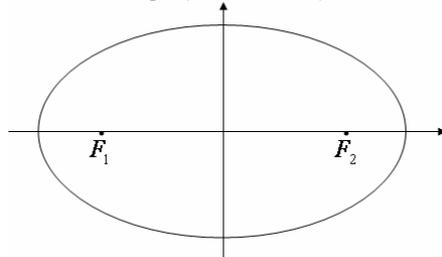


Fig. (c2. §3.24).

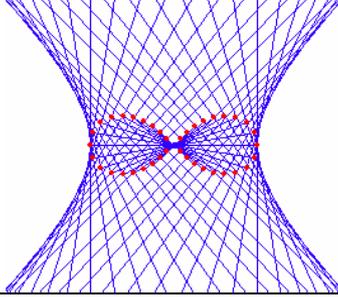


Fig. (c2. §3.25).

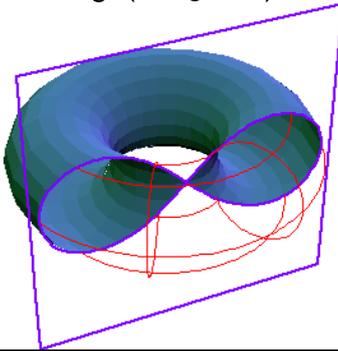


Fig. (c2. §4.26)

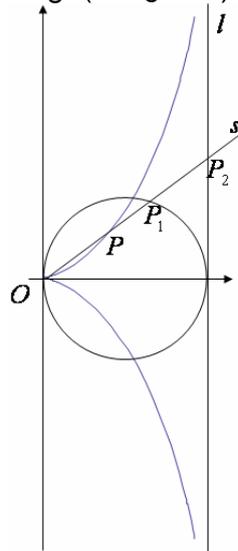


Fig. (c2. §4.27)

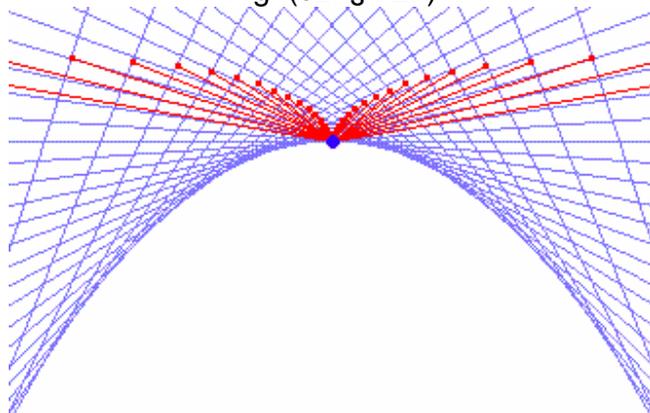


Fig. (c2. §4.28)

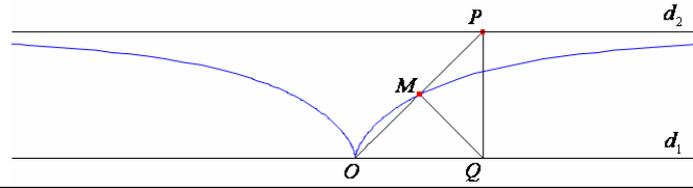


Fig. (c2. §4.29)

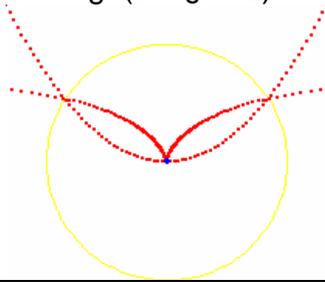


Fig. (c2. §4. 30a)

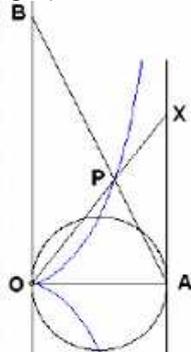


Fig.(c2. §4. 30b)

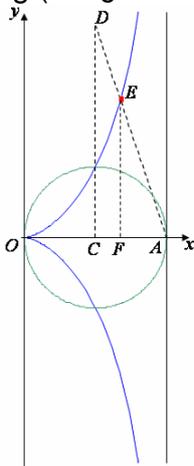


Fig. (c2. §4.31)

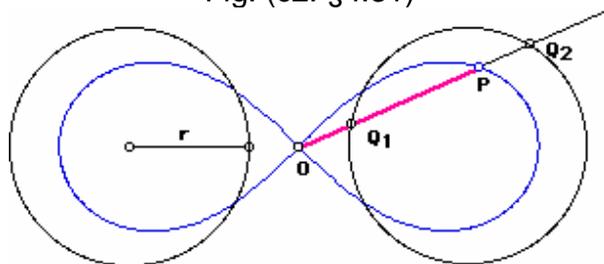


Fig. (c2. §4. 32)

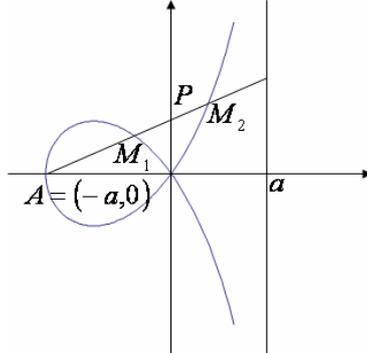


Fig. (c2. §4. 33a)

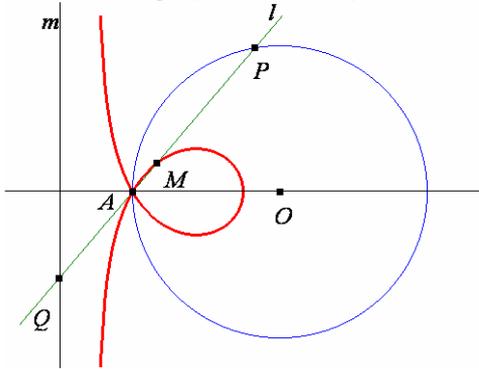


Fig. (c2. §4. 33b)

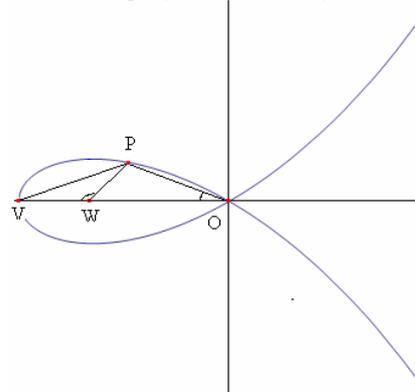


Fig. (c2. §5. 34)

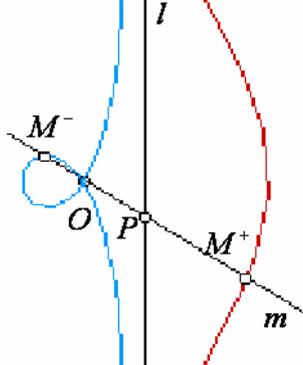


Fig. (c2. §5. 35a)

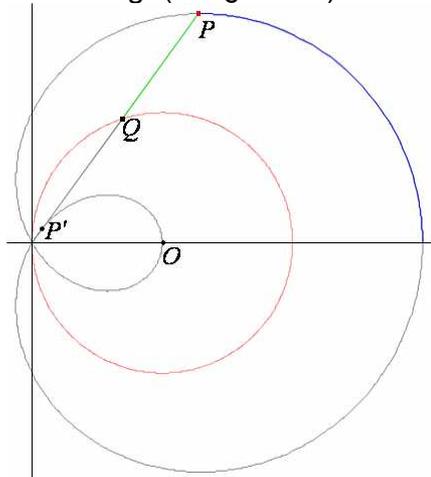


Fig. (c2. §5. 35b)

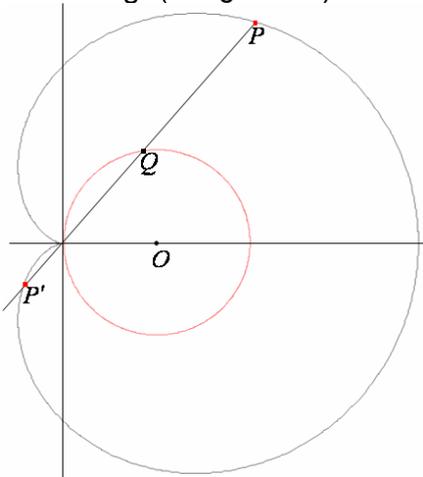


Fig. (c2. §6. 36)



Fig. (c2. §6. 37a)

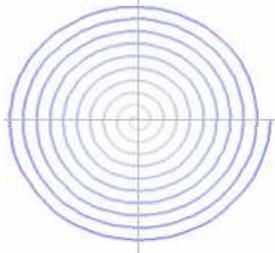


Fig. (c2. §6. 37b)

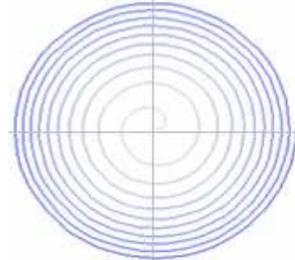


Fig. (c2. §6. 37c)

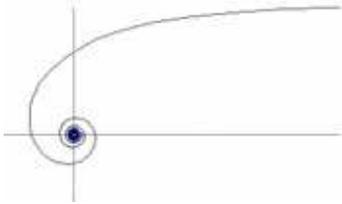


Fig. (c2. §6. 37d)

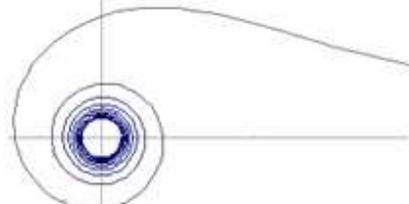


Fig. (c2. §6.38)

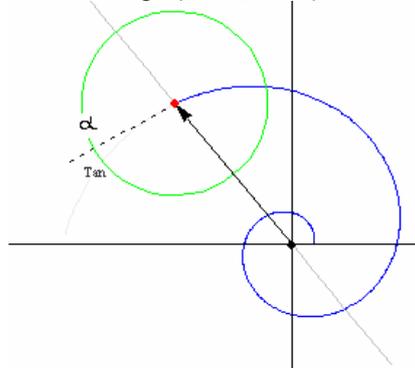


Fig. (c2. §6. 39a)



Fig. (c2. §6. 39b)

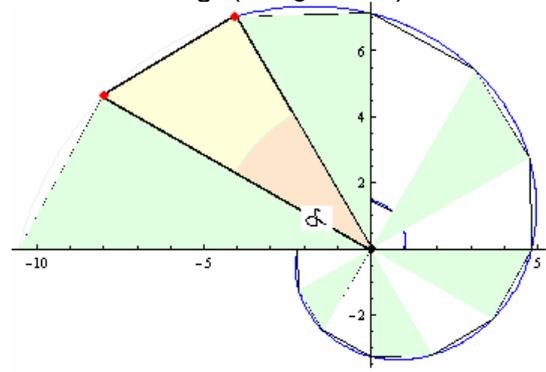


Fig. (c2. §6.40)

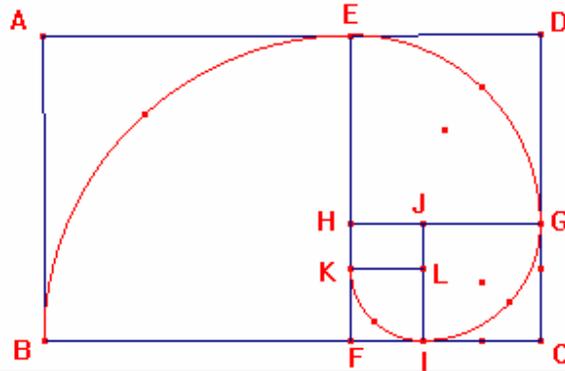


Fig. (c2. §7.41a)

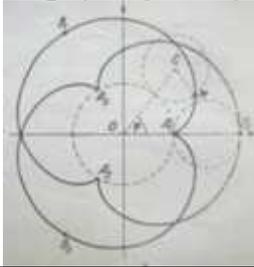


Fig. (c2. §7.41b)

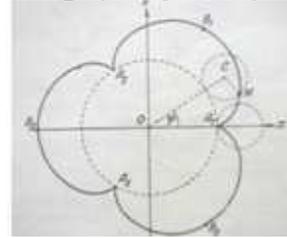


Fig. (c2. §7.42)

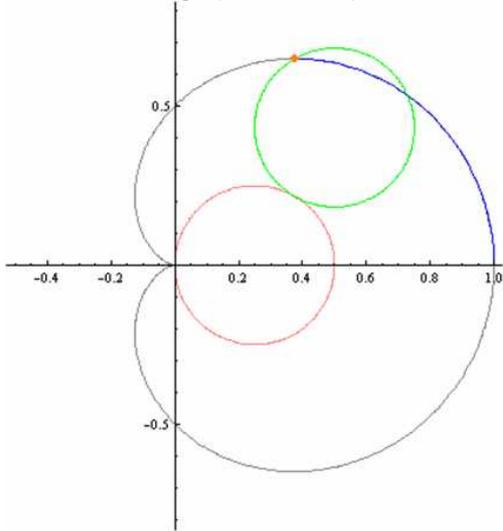


Fig. (c2. §7.43)

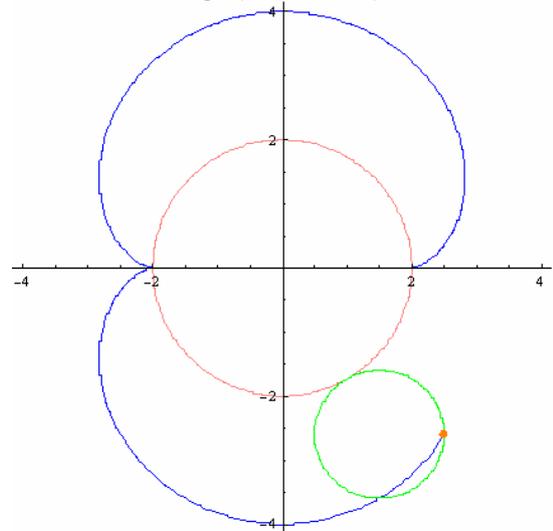


Fig. (c2. §7. 44)

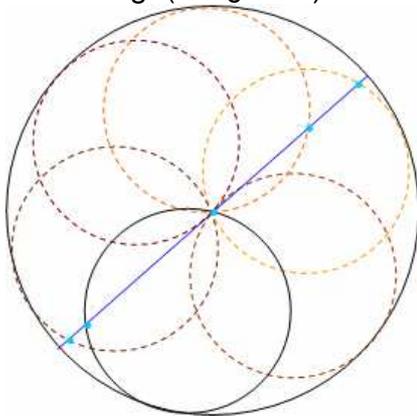


Fig. (c2. §7. 45)

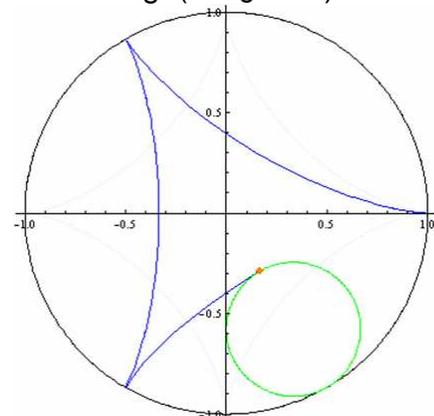


Fig. (c2. §7. 46a)

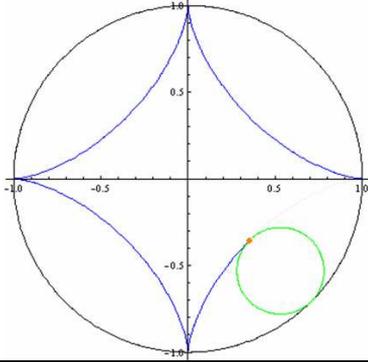


Fig. (c2. §7. 46b)

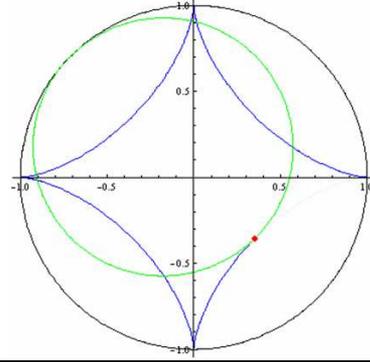


Fig. (c2. §7. 46c)

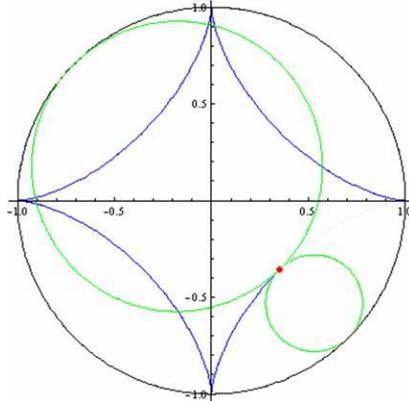


Fig. (c2. §7.47)

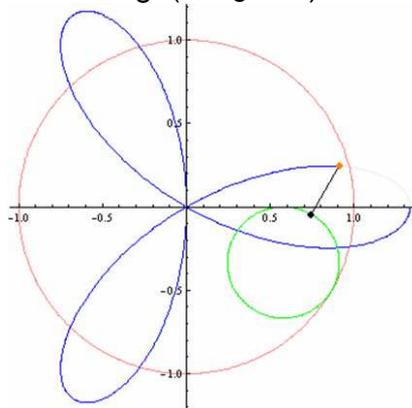


Fig. (c2. §7. 48)

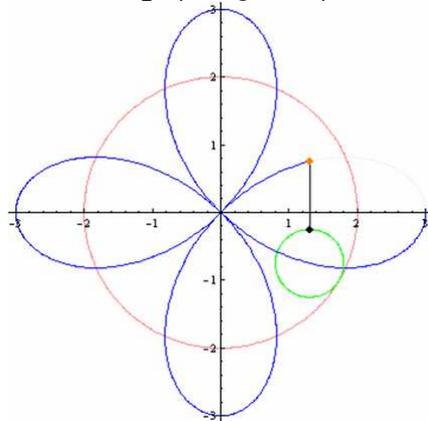


Fig. (c2. §7. 49a)

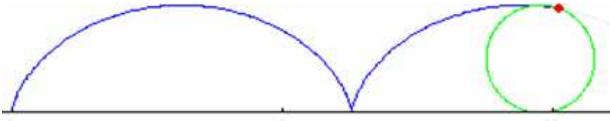


Fig. (c2. §7. 49a)

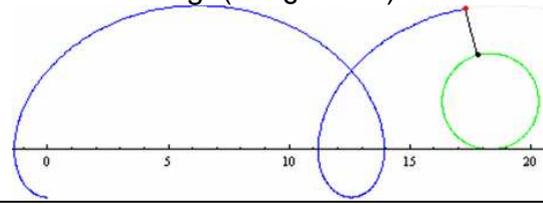


Fig. (c2. §7. 49c)

