



Universidad Central
"Marta Abreu"
de Las Villas

Facultad de
Matemática-Física-Computación

Estabilidad de polinomios con coeficientes en conjuntos cerrados de la recta

Tesis en opción del grado científico de
Master en Matemática Aplicada

Autor: Lic. Kenier Castillo Rodríguez

Tutora: Dra. Miriam Nicado García

2008

A Li sin cuya luz no puedo brillar.

A mi tutora la Dra. Miriam Nicado García mi madre intelectual a quien todo se lo debo. A Lilian por estar dispuesta siempre a revisarme cada palabra buscando armonía entre tanta disonancia. A todo el Departamento de Matemática-Física del Centro Universitario de Sancti-Spíritus por tanto apoyo. A Margarita por siempre estar dispuesta a imprimirme una copia que nunca entrego a tiempo.

El trabajo intelectual es una obra muy pesada, pero, no obstante, es indispensable hacer su aprendizaje al precio de muchos esfuerzos y también de un real espíritu de sacrificio.

María Curie-Sklodowska.

Resumen.

Para la elaboración de este trabajo se ha llevado a cabo una búsqueda bibliográfica con el objetivo de formular variantes para el análisis de la estabilidad (según Hurwitz y Schur) de sistemas lineales con coeficientes constantes, que permita establecer una conexión directa entre polinomios e intervalos de polinomios y además ofrezca ventajas prácticas, obteniendo así una estructura sólida y continua, capaz de mostrar como un todo la estabilidad para polinomios de diferente naturaleza (en este caso para polinomios con coeficientes numéricos y coeficientes dados por intervalos). Para ello se ha enfrentado el estudio de la estabilidad mediante el Teorema de Hermite-Biehler obteniéndose a partir de él resultados importantes. Se muestran varias e instructivas interpretaciones del Teorema de Kharitonov, como generalización del Teorema de Hermite-Biehler y en términos de la evolución en el plano complejo, aportando en esta una reducción. Se abordan las propiedades extremas de los polinomios de Kharitonov. El enfoque tomado permite obtener variantes algorítmicas muy superiores a los algoritmos clásicos actuales. La implementación de todos los resultados obtenidos facilita el estudio de las propiedades de los polinomios estables, como también es de gran utilidad para el trabajo investigativo, pues se cuenta con funciones de alto rendimiento obtenidas mediante deducciones teóricas y con todas las facilidades que ofrece la implementación.

Índice General

	Págs.
Introducción.....	1
Capítulo 1: Introducción al análisis de la Hurwitz y Schur-estabilidad de polinomios.	
1.0 Introducción.....	13
1.1 Definición de estabilidad.....	15
1.2 Teorema de Cruce de Fronteras.....	17
1.3 Hurwitz-estabilidad.....	25
1.3.1 Hurwitz-estabilidad para polinomios reales.....	25
1.4 Schur-estabilidad.	28
Capítulo 2: Estabilidad de polinomios con coeficientes puntuales.	
2.1 Hurwitz-estabilidad mediante el Teorema de Hermite-Biehler.....	31
2.1.1 Hurwitz-estabilidad para polinomios con coeficientes reales.....	31
2.1.2 Hurwitz-estabilidad para polinomios con coeficientes complejos.....	42
2.2 Schur-estabilidad mediante el Teorema de Hermite-Biehler.....	43
2.3 Búsqueda de polinomios estables mediante polinomios conocidos	49
2.4 Estabilidad en polinomios con coeficientes ajustables.....	52
2.4.1 Variante para la Hurwitz-estabilidad en polinomios con coeficientes reales ajustables.....	52
2.4.2 Variante para la Hurwitz-estabilidad en polinomios con coeficientes complejos ajustables.....	57
2.4.3 Variante para la Schur-estabilidad en polinomios con coeficientes ajustables.....	59

Capítulo 3: Estabilidad de polinomios con coeficientes dados por intervalos.

3.1 Estabilidad de polinomios dados por intervalos.....	65
3.1.1 Teorema de Kharitonov para polinomios con coeficientes reales dados por intervalos.....	66
3.1.2 Teorema de Kharitonov para polinomios con coeficientes complejos dados por intervalos.....	73
3.2 Generalización del Teorema de Hermite-Biehler.....	76
3.3 Interpretación del conjunto imagen.....	80
3.3.1 Reducción del conjunto imagen.....	81
3.3.2 Prueba del teorema de Kharitonov basada en el conjunto imagen....	82
3.4 Propiedades extremas de los polinomios de Kharitonov.....	84
3.4.1 Bola de polinomios estables.....	85
3.4.2 Propiedades del margen de estabilidad paramétrico.....	89
3.4 Schur-estabilidad para polinomios con coeficientes dados por intervalos...93	
Conclusiones.....	98
Recomendaciones.....	100
Referencias Bibliográficas.....	101
Bibliografía Consultada.....	106
Apéndice 1. Lugar de Tsytkin-Polyak.....	111
Apéndice 2. Implementaciones adicionales	
A.2.1 Lema de Hermite-Biehler caso Real.....	115

A.2.2	Teorema de Hermite-Biehler caso Real.....	117
A 2.3	Teorema de Hermite-Biehler caso Complejo.....	119
A 2.4	Definición de Schur-estabilidad.....	121
A 2.5	Equivalente para la Schur-estabilidad.....	123
A 2.6	Variante para la Schur-estabilidad.....	125
A 2.7	Variante del algoritmo de Routh para polinomios reales.....	127
A 2.8	Variante del algoritmo de Routh para polinomios complejos.....	130
A 2.9	Variante del algoritmo de Jury.....	133

Apéndice 3. Implementación del Teorema de Kharitonov.

A 3.1	Teorema de Kharitonov caso Real.....	135
A 3.2	Teorema de Kharitonov caso Complejo.....	139

Introducción.

Durante el estudio de cualquier modelo matemático surge el problema de la validez de la aplicación de los resultados matemáticos a la realidad objetiva. Si el resultado es fuertemente sensible a una pequeña modificación del modelo, entonces, variaciones tan pequeñas como se quiera del mismo, conducirán a un modelo con propiedades distintas [7]. No se pueden extender tales resultados al proceso real investigado, debido a que en la construcción del modelo se realiza siempre una cierta idealización y los parámetros se determinan solamente de manera aproximada.

El universo que describía Newton era, según sus propias palabras, continuo y matemático. A partir de su obra quedó claro que el mundo físico se describía y estudiaba mediante ecuaciones diferenciales. Nada esencial ha cambiado en los tres siglos de ciencia que nos separan de Newton. En el siglo XIX y en los comienzos del siglo XX esta idea fue llevada a sus últimas consecuencias. De allí que la "gran matemática" girara también alrededor de las ecuaciones diferenciales. Sin embargo no todo era éxito, algunos problemas fundamentales se presentaban increíblemente complejos, por ejemplo, el simple movimiento del Sol, la Tierra y la Luna. Las ecuaciones de Newton eran capaces de describirlo con una precisión asombrosa, sin embargo no era fácil saber si este movimiento continuaría para siempre; si las ecuaciones predecían el colapso de la Luna sobre la Tierra, si se perdería el satélite precipitándose hacia el Sol o cualquier otro resultado. Este problema se conocía como el problema de la estabilidad de la solución de las ecuaciones diferenciales [1]. Lyapunov (1857-1918) estableció en 1899 una base importante para resolver este problema cuando descubrió unas condiciones particulares que debían satisfacer las ecuaciones. Lyapunov estudió la estabilidad de sistemas no lineales usando la noción generalizada de energía. Sólo alrededor de 1960 la importancia de su teoría fue tenida en cuenta.

Lyapunov fue precedido por algunos trabajos sobre la estabilidad como los de G. B. Airy en 1840 y 1851 que mostraban cómo la dinámica de un gobernador puede ser descrita por medio de ecuaciones diferenciales. Airy publica sus trabajos relativos a la regulación de velocidad de telescopios. Su interés se debió a la necesidad de mantener el telescopio girando lentamente a una velocidad uniforme durante las observaciones astronómicas. Fue el primero en discutir la inestabilidad de los sistemas en lazo cerrado. El principal aporte de sus trabajos es el estudio de la influencia del amortiguamiento en la estabilidad. En 1868 James Clerk Maxwell (1831-1879) publicó su artículo "On Governors", en el cual describe cómo derivar ecuaciones diferenciales lineales para varios tipos de gobernadores. Este trabajo puede considerarse como el origen de la Teoría de Control.

Los matemáticos y físicos sabían que la estabilidad estaba determinada por los polos de la ecuación característica y que un sistema era estable si la parte real de las raíces de la ecuación características era negativa, pero no sabían cómo determinar la ubicación de la parte real de las raíces complejas sin calcular las raíces de la ecuación. Maxwell mostró que examinando los coeficientes de las ecuaciones de orden 2, 3 y 4 la estabilidad podía determinarse, dando condiciones necesarias y suficientes para ello. En su artículo, Maxwell también establece una diferenciación entre Regulators o Moderators (los conocidos actualmente como reguladores proporcionales) y Governors (reguladores con acción integral). La contribución importante de Maxwell estuvo en demostrar que el comportamiento de un sistema de control automático en la vecindad de una posición de equilibrio se podía aproximar por una ecuación diferencial lineal y por lo tanto la estabilidad se podía así discutir en términos de las raíces de la ecuación algebraica asociada. En 1874 Edward J. Routh (1831-1907) y en 1885 Adolf Hurwitz (1859-1919), dieron el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz. Routh se inspiró en el trabajo de Cauchy y Sturm. Hurwitz resuelve el problema en términos de un conjunto de determinantes. Bompiani demostraría en 1911 la equivalencia de los criterios de Routh y Hurwitz. En 1937 Andronov y Pontriaguin dan el concepto de sistemas gruesos o de estabilidad

estructural. Este concepto resultó muy fructífero, en el caso de los espacios de fases de dimensión pequeña (1 ó 2).

En los últimos años ha sido de gran interés sobre todo para la Teoría de Control el estudio de la estabilidad y su grado de generalización ha alcanzado alturas sorprendentes, los polinomios característicos han sido dotados con coeficientes de las más diversas estructuras matemáticas, muchos han quedado sólo en el plano teórico y otros son elementos fundamentales para aplicaciones diversas, ejemplo de ello es el Teorema de Kharitonov, demostrado en 1978 por el matemático Ruso V. L. Kharitonov. Este teorema ha sido desde su publicación motivo de gran revuelo en la comunidad matemática por su sorprendente resultado y no cesan los artículos al respecto, contenedores de nuevas variantes y aplicaciones.

La teoría de la estabilidad no es algo terminado actualmente. Son muchas las investigaciones para obtener variantes de la misma que dado el problema sean más eficientes, todo esto bien asociado al actual desarrollo computacional. Este aspecto presupone la elaboración de una teoría consecuente capaz de mostrar resultados concretos.

Fundamentos metodológicos del trabajo.

Situación Problémica.

La búsqueda de nuevos enfoques capaces de establecer una metodología común para tratar la estabilidad cuando los coeficientes provienen de diversa naturaleza y en grado más general cuando uno de los coeficientes viene dado como un parámetro ajustable, condición donde naufragan todos los procedimientos numéricos, es parte de las investigaciones sobre estabilidad. El enriquecimiento continuo de los software especializados, hacen que muchos algoritmos puedan ser constantemente modificados y esto no sólo desde el punto de vista algorítmico; los cambios sustanciales deben estar en

las propias investigaciones teóricas, las cuales deben ser orientadas sobre las posibilidades específicas del software seleccionado.

La carencia de implementaciones eficientes para casos más complejos, como es el caso del análisis de estabilidad en intervalos de polinomios, las pocas mejoras desde una óptica tanto teórica como computacional para algoritmos clásicos, hacen de ello un tema complejo. Todos estos aspectos presuponen que las ciencias básicas y en especial la matemática, esté en función de resolver complejos problemas basándose en el desarrollo de las técnicas aparejadas al vertiginoso progreso computacional.

Problema.

Enriquecer teóricamente los métodos de análisis de estabilidad de polinomios que permitan la elaboración de algoritmos más eficientes.

Interrogantes.

¿Será posible desde el punto de vista algorítmico obtener funciones de mayor rendimiento que las actuales, enfrentando enfoques no convencionales en la estructura teórica de la estabilidad?

¿Permitirán estos enfoques un enriquecimiento teórico de la actual teoría de la estabilidad?

Objeto de estudio.

El objeto de estudio es el análisis de la estabilidad de sistemas de ecuaciones diferenciales que permitan obtener un desarrollo teórico-práctico y en particular ecuaciones con coeficientes constantes.

Hipótesis.

El enfoque que brinda el Teorema de Hermite-Biehler, permitirá mejorar los actuales algoritmos para el análisis de la Hurwitz y Schur-estabilidad, y además facilitará la generalización de resultados.

Objetivo general.

Desarrollar variantes teóricas para formulaciones matemáticas en el análisis de la estabilidad que permitan obtener mejoras algorítmicas y que constituyan una herramienta eficaz para su generalización, contribuyendo a la evolución y desarrollo del estudio de la estabilidad.

Objetivos específicos.

- Desarrollar el análisis de la estabilidad mediante el Teorema de Hermite-Biehler.
- Obtener mejoras algorítmicas para el análisis de la estabilidad en polinomios con coeficientes ajustables.
- Generalizar el análisis de la estabilidad a intervalos de polinomios: Teorema de Kharitonov, mediante el enfoque de Hermite-Biehler.
- Implementación de todos los resultados correspondiente en el Mathematica v 6.0.

Tareas científicas a acometer.

- Recopilación bibliográfica preliminar, definición, aprobación del tema y elaboración del plan de trabajo.
- Estudio bibliográfico y análisis del estado clásico de la temática.
- Redacción de la primera versión del Capítulo I “Introducción al análisis de la Hurwitz y Schur-estabilidad de polinomios”.
- Obtención de mejoras algorítmicas para algoritmos clásicos en análisis de la Hurwitz y Schur-estabilidad.

- Redacción de la Primera versión del Capítulo II “Estabilidad de polinomios con coeficientes puntuales”.
- Aplicación de los resultados obtenidos para la generalización de ideas a polinomios con coeficientes dados por intervalos.
- Redacción de la Primera versión del Capítulo III “Estabilidad de polinomios con coeficientes dados por intervalos”.
- Desarrollo computacional de los resultados usando el *Matemática v 6.0*.
- Redacción de la primera versión de las “Conclusiones y Recomendaciones” del trabajo.
- Análisis del contexto global de la tesis y redacción definitiva de la misma.

Novedad científica.

Desarrollo de una formulación que permite realizar el análisis de la estabilidad con la obtención de resultados teóricos y que además ofrece mejoras algorítmicas dando funciones desarrolladas sobre el *Mathematica*, no implementadas anteriormente y capaces de afrontar la estabilidad de polinomios de forma generalizada y eficaz.

Aportes científicos relevantes.

- Obtención de una estructura lógica capaz de establecer una conexión directa entre el estudio de la estabilidad de polinomios e intervalos de polinomios.
- Mejoras a los algoritmos clásicos para el análisis de la Hurwitz y Schur-estabilidad de polinomios.
- Implementación de funciones capaces de enfrentar un amplio espectro de la problemática actual de la estabilidad.

Valor Científico de la Investigación.

El valor científico de la investigación se centra en el hecho de que con el desarrollo teórico de la misma, se muestran importantes resultados para el estudio de la estabilidad, vista esta como parte inseparable del desarrollo computacional.

Valor Metodológico de la Investigación.

El valor metodológico de la investigación se evidencia a través de dos aspectos fundamentales:

- El desarrollo desde sus bases de toda una teoría sobre el estudio de la estabilidad de polinomios que dota a los investigadores de los fundamentos matemáticos para enfrentar una gran cantidad de problemas actuales, abordado con un enfoque novedoso y actual, que muestra la estabilidad de intervalos de polinomios como una generalización de la estabilidad para polinomios.
- La obtención e implementación de una gran cantidad de los temas teóricos abordados que son útiles para confrontar problemáticas investigativas desde diversos criterios.

Valor Práctico de la Investigación.

El valor práctico de esta investigación está fundamentado sobre la base de que se dispone de la implementación de muchos de los aspectos teóricos tratados, no sólo limitándose a mostrar el resultado, muchos de ellos son enriquecidos con muestras gráficas, y en los casos que lo permiten animaciones de los distintos estados. Desde el punto de vista teórico-práctico este aspecto es de singular importancia ya que permite obtener resultados con gran rapidez y por varias vías, permitiendo comparar y ver aspectos no variables que puedan tener una significación especial dado el problema. Es también una herramienta eficaz para el estudio de la propia

teoría de la estabilidad tener implementado todos los resultados, además de ser un material útil para enfrentar la estabilidad de polinomios.

Beneficios de la investigación.

Las formulaciones desarrolladas en la investigación y su implementación computacional dotan de todo lo necesario para acometer el análisis de la estabilidad; una profunda investigación teórica, actualizada y generalizada, permitirá la implementación de nuevos algoritmos.

Metodología general de investigación.

Para dar cumplimiento a los objetivos trazados en la tesis y tomando en cuenta el volumen de tareas científicas a acometer fue necesario organizar y estructurar el trabajo en varias etapas, las cuales definen la metodología general de investigación.

Definición del problema de estudio.

Ya en los fundamentos conceptuales y metodológicos de la tesis se explicó la necesidad de la investigación en cuanto a la obtención de un desarrollo teórico capaz de ofrecer ventajas algorítmicas. Otro aspecto abordado es la obtención e implementación de estos resultados.

Recopilación bibliográfica.

El estudio de la bibliografía se efectuó en distintas etapas en correspondencia con las exigencias que iba generando el trabajo, aunque este se ubicó al comienzo de la investigación, el mismo se realizó de forma sistemática hasta el final. Se efectuaron búsquedas bibliográficas automatizadas en los principales centros de información del país, así como

por los métodos clásicos. La búsqueda bibliográfica incluye el empleo de sistemas de búsqueda de avanzada (current content, Internet, EBSCO, etc.).

Formación de la base teórica.

Por la complejidad matemática del tema tratado en la tesis se hace necesario tener una formación adicional, que permite enfrentar las distintas fases del desarrollo investigativo del trabajo; realizándose la formación de la base teórica relacionada con la tesis específicamente en temas avanzados de las Ecuaciones Diferenciales, la Teoría de Variable Compleja y algunos elementos de la Teoría de Control Moderna.

Diseño general de la investigación.

En esta etapa se efectuó la concepción general de la investigación, se definieron las hipótesis, los objetivos, las tareas científicas y la estrategia de trabajo para enfrentar la investigación. Estos aspectos fueron abordados con anterioridad y con los mismos queda definida la metodología de la investigación. Seguidamente, se estructuró la investigación en fases para ir dándole respuesta a cada uno de los objetivos y tareas científicas propuestas.

Desarrollo particular de cada fase de la investigación.

El desarrollo de la investigación queda estructurado en tres fases. La primera relacionada con el estudio bibliográfico y la obtención de mejoras en temas clásicos, lo que posibilita justificar el desarrollo de la investigación. En esta fase se exponen los antecedentes y el estado actual de la temática, destacándose los fundamentos teóricos principales, la obtención de mejoras algorítmicas como consecuencia del enfoque tratado y la obtención de resultados con posible aplicación frente a una generalización.

La segunda etapa está relacionada con la formulación del Teorema de Kharitonov, abarcando un estudio profundo del mismo y sus propiedades. En

este caso se logra formular un desarrollo del tema teniendo como elemento clave todo lo tratado en la primera etapa.

La tercera etapa se relaciona con la implementación de todos los aspectos tratados, enriquecidos por las posibilidades del software seleccionado, en este caso el Mathematica.

Elaboración de conclusiones y recomendaciones.

Finalmente se procede al análisis integral de los resultados obtenidos en cada una de las fases del desarrollo de la investigación, formulándose en cada caso las correspondientes conclusiones parciales, las generales, así como las recomendaciones definitivas del trabajo.

Estructura del trabajo.

La estructura de la tesis guarda una relación directa con la metodología de investigación establecida y, específicamente, con el desarrollo particular de cada una de las fases de la investigación. La misma se encuentra formada por una introducción general, tres capítulos, las conclusiones, las recomendaciones y la bibliografía, así como los apéndices necesarios. El orden es mostrado a continuación.

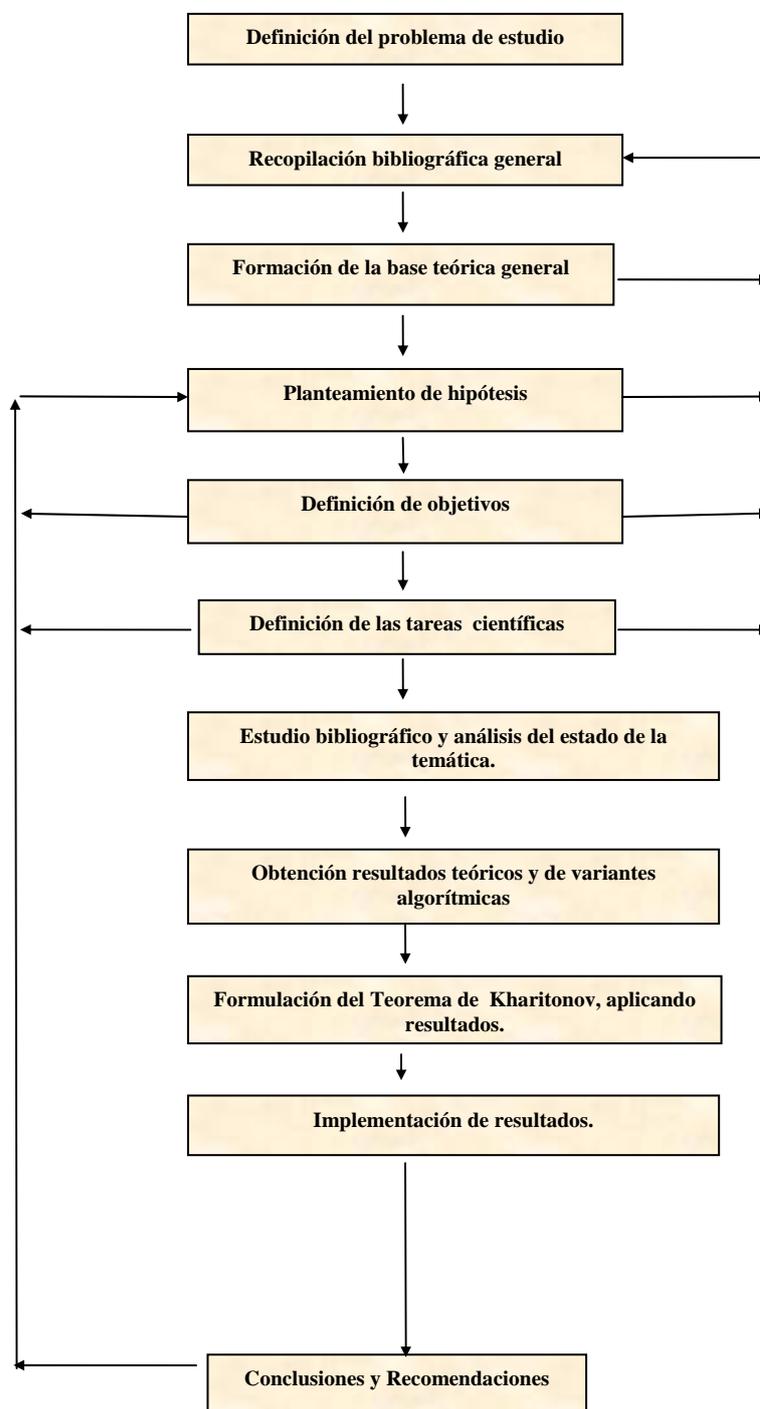
- **Resumen.**
- **Introducción.**
- **Capítulo I:** “Introducción al análisis de la Hurwitz y Schur-estabilidad de polinomios”.
- **Capítulo II:** “Estabilidad de polinomios con coeficientes puntuales”.
- **Capítulo III:** “Estabilidad de polinomios con coeficientes dados por intervalos”.
- **Conclusiones.**
- **Recomendaciones.**
- **Referencias Bibliográficas.**
- **Bibliografía Consultada.**

- **Apéndices.**

Campo de aplicación:

El campo de aplicación de este trabajo está estrechamente vinculado con el análisis de la estabilidad robusta en la Teoría de Control, y en los análisis de sistemas complejos, brindando desde el punto de vista computacional funciones de alto rendimiento soportadas por todo un desarrollo teórico enriquecido, novedoso y actualizado.

Estructura lógica del trabajo.



Capítulo 1: Introducción al análisis de la Hurwitz y Schur-estabilidad de polinomios.

Pretender que el conocimiento sustituya la ignorancia
es ciencia.

Hannes Alfvén.

1.0- Introducción.

El estudio de la estabilidad encuentra en la Teoría de Control sus principales aplicaciones. Básicamente, el diseño de sistemas de control lineal puede ser enunciado como un problema que consiste en adecuar la localización de polos y ceros de la función de transferencia del sistema, para que se comporte de acuerdo con las especificaciones prescritas [10].

Entre las muchas formas de especificaciones de funcionamiento utilizadas en el diseño, el requerimiento más importante es que el sistema sea estable. Por lo general, un sistema inestable se considera inútil.

Para propósitos de análisis y diseño de sistemas, la estabilidad se puede clasificar como estabilidad absoluta y estabilidad relativa. La estabilidad absoluta se refiere a la condición de si el sistema es o no estable. Una vez que se ha encontrado que el sistema es estable, es interesante encontrar qué tan estable es, y este grado de estabilidad es una medida de la estabilidad relativa [12].

Cuando se consideran todos los tipos de sistemas (lineales, no lineales, invariantes con el tiempo y variantes con el tiempo), la definición de estabilidad se puede dar en muchas formas diferentes [4].

En este caso se trabajará la estabilidad de un sistema lineal e invariante con el tiempo,

$$\dot{x} = A x + b \quad (1.0.1)$$

donde A es la matriz de coeficientes del sistema y b es un vector columna de términos independientes, la estabilidad del sistema (1.0.1) queda asegurada si todas las raíces del polinomio característico del sistema que en el caso de coeficientes reales se denota como,

$$P(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \dots + p_n s^n \quad (1.0.2)$$

y para el caso de coeficientes complejos se denota por,

$$P(s) = (a_0 + j b_0) + (a_1 + j b_1) s + \dots + (a_{n-1} + j b_{n-1}) s^{n-1} + (a_n + j b_n) s^n. \quad (1.0.3)$$

con,

$$a_n + j b_n \neq 0$$

se encuentran en el semiplano izquierdo del plano complejo (Hurwitz-estabilidad) o en la región definida por un disco unitario con centro en el origen (Schur-estabilidad) [14].

Por comodidad notacional se usará para el caso de la Schur-estabilidad el polinomio siguiente,

$$P(z) = p_n z^n + p_{n-1} z^{n-1} + \dots + p_1 z + p_0 \quad (1.0.4)$$

“*A priori*”, el problema del estudio de la estabilidad parece resuelto; lo que, sin duda, sería así, si se supiera resolver analíticamente ecuaciones polinómicas de cualquier grado n . Desgraciadamente esto no es posible. El famoso matemático noruego Abel (1802-1829) demostró que no existe fórmula de resolución genérica para ecuaciones polinómicas de grado superior a cuatro [1]. Esto condena a resolución numérica para ecuaciones características de grado mayor que cuatro, lo que no es un grave problema

ante las actuales posibilidades de factorización que cualquier software matemático actualmente puede realizar [17]. El problema se encuentra cuando uno de los coeficientes viene dado como un parámetro ajustable [9]: ahí naufragan todos los procedimientos numéricos. Por suerte, existen otros métodos que permiten estudiar la estabilidad de los sistemas, sin calcular exactamente la situación de las raíces, estos se dividen en dos grandes grupos [3][11]: gráfico y analítico.

Gracias a los trabajos iniciales de Maxwell [1] se sabe que la estabilidad de un sistema de tipo (1.0.1) viene dada por la estabilidad de su polinomio característico [5][7][10], por tanto a partir de este momento se tratará la estabilidad de sistemas como estabilidad de polinomios.

En este capítulo se abordarán los aspectos clásicos para la estabilidad de polinomios con el objetivo de dotar al lector de las herramientas fundamentales para la comprensión de los temas posteriores.

1.1- Definiciones de estabilidad.

De todo lo anterior, se observa que, para que el sistema (1.0.1) sea considerado estable (en todos los sentidos), todas las raíces de la ecuación característica deben localizarse en el semiplano izquierdo o en la región definida por un disco unitario en el plano complejo. Por esta razón, simplemente la condición de estabilidad del sistema (1.0.1) se refiere a estable o inestable. En general, la estabilidad de un sistema puede definirse de muchas formas diferentes, dependiendo de los requerimientos de alguna aplicación especial [16]. Para los sistemas (1.0.1), todas las definiciones comunes de estabilidad son equivalentes; cada una implica a las otras, y cada una es consistente si y sólo si todas las raíces del polinomio (1.0.2) pertenecen a la región indicada.

Las definiciones más comunes de la estabilidad son las siguientes:

➤ **Estabilidad en el sentido de Liapunov.**

“Los sistemas físicos, en particular aquellos que son variables en el tiempo y no lineales, se pueden considerar que son estables si se cumple en ellos el principio de conservación de la energía”. Para que su respuesta aumente se requiere un suministro continuo de energía. Al considerar las ecuaciones del sistema, cualquiera que sea su origen, para representar un sistema físico, se puede probar la estabilidad teniendo en cuenta que el sistema físico equivalente sea o no conservativo.

Lo que en términos matemáticos sería, que cualquier fenómeno que se describe por medio del sistema de ecuaciones diferenciales (1.0.1) o lo que es lo mismo por,

$$\frac{dy_i}{dt} = \Phi_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

con condiciones de frontera $y_i(t_0) = y_{i0}$ es estable si para cualquier $\varepsilon > 0$, se puede escoger un $\delta(\varepsilon) > 0$, tal que para cualquier solución $y_i(t)$ de dicho sistema, cuyos valores iniciales satisfacen las desigualdades,

$$|y_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta(\varepsilon)$$

se cumple para todas las $t \geq t_0$, las desigualdades,

$$|y_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon$$

es decir, las soluciones cercanas respecto a sus valores iniciales permanecen cercanas para todas las $t \geq t_0$ [5][7].

➤ **Estabilidad asintótica.**

Si $\varphi_i(t)$ no sólo es estable, sino que además satisface la condición,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_i(t) - \varphi_i(t)| = 0,$$

si $|y_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta_1$, $\delta_1 > 0$, se puede decir que se está frente a un sistema asintóticamente estable [5][7].

En cualquier caso, solamente se estudiarán sistemas del tipo (1.0.1), por lo que el problema de la estabilidad de un sistema se resume a demostrar que todas las raíces de su polinomio se encuentran en la región indicada, usando para ello cualquier método que se tenga al alcance.

1.2- Teorema de Cruce de Fronteras.

Un teorema de vital importancia en el desarrollo teórico del tema es el Teorema de Cruce de Fronteras, antes de enunciar dicho teorema, se mostrarán algunos resultados que serán de gran utilidad para su demostración [17]. Se comienza con el conocido Principio del Argumento de la teoría de variable compleja. Sea C un contorno simple cerrado en el plano complejo y $\omega = f(z)$ una función de variable compleja z , la cuál es analítica en C . Sean Z y P el número de ceros y polos, respectivamente, que $f(z)$ contiene en C . Se denota con $\Delta_C \arg[f(z)]$ al cambio de argumento (ángulo) de $f(z)$ cuando z recorre el contorno cerrado C .

Teorema 1.2.1. (Principio del Argumento)

$$\Delta_C \arg[f(z)] = 2\pi(Z - P)$$

Una consecuencia importante de este resultado es el Teorema de Rouché [6] que se muestra a continuación.

Teorema 1.2.2. (Teorema de Rouché)

Sean $f(z)$ y $g(z)$ dos funciones analíticas en el interior de un contorno cerrado simple C en el plano complejo. Si,

$$|g(z)| < |f(z)| \quad (1.2.1)$$

para cualquier z en C , entonces $f(z)$ y $f(z) + g(z)$ tienen el mismo número (multiplicidad incluida) de ceros dentro de C .

Demostración. Dado que $f(z)$ no puede hacerse cero en C , puesto que de (1.2.1), se tiene,

$$\begin{aligned} \Delta_C \arg[f(z) + g(z)] &= \Delta_C \arg \left\{ f(z) \left[1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right] \right\} \\ &= \Delta_C \arg[f(z)] + \Delta_C \arg \left[1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right]. \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Además, dado que,

$$\left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| < 1$$

para todo $z \in C$, el punto variable,

$$\omega = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$$

permanece en el disco $|\omega - 1| < 1$ cuando z describe la curva C . Por consiguiente ω no puede girar alrededor del origen, lo cuál significa que,

$$\Delta_C \arg \left[1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right] = 0. \quad (1.2.3)$$

Combinando (1.2.2) y (1.2.3), se tiene que,

$$\Delta_C \arg[f(z) + g(z)] = \Delta_C \arg[f(z)].$$

Dado que $f(z)$ y $g(z)$ son analíticas en C , el teorema anterior es una consecuencia inmediata del principio del argumento. ■

Se puede notar que la condición $|g(z)| < |f(z)|$ en C implica que $f(z)$ y $f(z) + g(z)$ no pueden tener ceros en C . El siguiente teorema [4] [5] es una simple aplicación del Teorema de Rouché, que es, sin embargo, muy útil dado que se aplica a polinomios.

Teorema 1.2.3. Sean,

$$P(s) = p_0 + p_1s + \cdots + p_n s^n = \prod_{j=1}^m (s - s_j)^{t_j}, \quad p_n \neq 0,$$

$$Q(s) = (p_0 + \varepsilon_0) + (p_1 + \varepsilon_1)s + \cdots + (p_n + \varepsilon_n)s^n,$$

y considerando un círculo C_k , de radio r_k , centrado en s_k que es una raíz de $P(s)$ de multiplicidad t_k . Con r_k tal que,

$$0 < r_k < \min |s_k - s_j|, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, m.$$

Entonces, existe un número positivo ε , tal que $|\varepsilon_i| \leq \varepsilon$, para $i = 0, 1, \dots, n$, implica que $Q(s)$ tiene t_k ceros en el interior del círculo C_k .

Demostración. $P(s)$ no tiene ceros y es continua en el conjunto compacto C_k y además es posible encontrar $\delta_k > 0$ tal que,

$$|P(s)| \geq \delta_k > 0, \quad \text{para todo } s \in C_k.$$

Por otra parte, considerando el polinomio $R(s)$, definido por,

$$R(s) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 s + \dots + \varepsilon_n s^n.$$

Si s pertenece al círculo C_k , entonces,

$$\begin{aligned} |R(s)| &\leq \sum_{j=0}^n |\varepsilon_j| |s^j| \leq \sum_{j=0}^n |\varepsilon_j| (|s - s_k| + |s_k|)^j \\ &\leq \varepsilon \underbrace{\sum_{j=0}^n (r_k + |s_k|)^j}_{M_k}. \end{aligned}$$

Así si ε es escogido tal que $\varepsilon < \frac{\delta_k}{M_k}$, se puede concluir que,

$$|R(s)| < |P(s)| \quad \text{para todo } s \text{ en } C_k,$$

tal que por el Teorema de Rouché, $P(s)$ y $Q(s) = P(s) + R(s)$ tienen el mismo número de ceros en el interior de C_k . Dado que la elección r_k asegura que $P(s)$ tiene un cero de multiplicidad t_k en s_k , se observa que $Q(s)$ tiene precisamente t_k ceros en C_k . ■

Se puede ver un importante colorario [6], con el cual se completan los elementos necesarios para deducir el Teorema de Cruce de Fronteras.

Colorario 1.2.1. Arreglando m círculos C_1, \dots, C_m disjuntos y centrados en s_1, s_2, \dots, s_m respectivamente, se aplica reiteradamente el teorema anterior, es siempre posible encontrar un $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier conjunto de números $\{\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n\}$, satisfaciendo $|\varepsilon_i| \leq \varepsilon$ para $i=1, \dots, n$, $Q(s)$ tiene precisamente t_j ceros dentro de cada círculo C_j .

Se puede notar, que en este caso, $Q(s)$ siempre tiene $t_1 + t_2 + \dots + t_m = n$ ceros y debe permanecer por consiguiente de grado n , para que necesariamente $\varepsilon < |p_n|$. El teorema anterior y su colorario, llevan al principal resultado, el Teorema de Cruce de Fronteras.

Considerando el plano complejo C y sea $S \subset C$ cualquier conjunto abierto.

Se conoce que S , su frontera ∂S conjuntamente con el interior \mathcal{U}^0 del conjunto cerrado $\mathcal{U} = C - S$ forman una partición del plano complejo, que es,

$$S \cup \partial S \cup \mathcal{U}^0 = C, \quad S \cap \mathcal{U}^0 = S \cap \partial S = \partial S \cap \mathcal{U}^0 = \emptyset.$$

Se asume además que cada uno de los tres conjuntos es no vacío. Esta asunción es muy general. En la teoría de la estabilidad se podría escoger para S la mitad izquierda abierta del plano C (Hurwitz-estabilidad) o un disco unitario abierto \mathcal{D} (Schur-estabilidad) o subconjuntos adecuados de estos, como los que se ilustran en la Figura 1.2.1.

Considerando una familia de polinomios $P(\lambda, s)$ que satisfacen las siguientes condiciones.

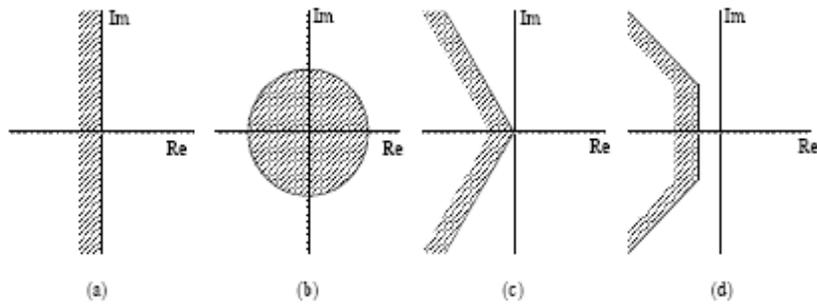


Figura 1.2.1. Algunas regiones típicas de estabilidad.

Condiciones 1.2.1. $P(\lambda, s)$ es una familia de polinomios de,

- 1) grado fijo n , (invariante al grado),
- 2) continuo con respecto a λ en un intervalo fijo $I = [a, b]$.

En otras palabras, un elemento típico de $P(\lambda, s)$ puede ser escrito como,

$$P(\lambda, s) = p_0(\lambda) + p_1(\lambda)s + \cdots + p_n(\lambda)s^n,$$

donde $p_0(\lambda), p_1(\lambda), \dots, p_n(\lambda)$ son funciones continuas de λ en I y donde $p_n(\lambda) \neq 0$ para toda $\lambda \in I$. Por los resultados del Teorema 1.2.3 y su Colorario 1.2.1, es inmediato que en general, para cualquier conjunto abierto O , el conjunto de polinomios de grado n que tiene todas sus raíces en O es así mismo abierto. En el caso anterior, si para algún $t \in I$, $P(t, s)$ tiene todas sus raíces en S , entonces es siempre posible encontrar un número real positivo α tal que,

para todo $t' \in (t - \alpha, t + \alpha) \cap I$, $P(t', s)$ también tiene todas sus raíces en S .

Esto conlleva al siguiente resultado fundamental [4].

Teorema 1.2.4. (Teorema de Cruce de Fronteras).

Dadas las Condiciones 1.1, se supone que $P(a, s)$ tiene todas su raíces en S mientras que $P(b, s)$ tiene al menos una raíz en \mathcal{U} . Entonces, existe al menos un ρ en $(a, b]$ tal que,

- a) $P(\rho, s)$ tiene todas sus raíces en $S \cup \partial S$,
- b) $P(\rho, s)$ tiene al menos una raíz en ∂S .

Demostración. Para probar el resultado, se necesita introducir el conjunto E de todos los números reales t que pertenecen al intervalo $(a, b]$ y satisface la siguiente propiedad:

\mathcal{P} : para todo $t' \in (a, t)$, $P(t', s)$ tiene todas sus raíces en S .

Por el supuesto, se conoce que $P(a, s)$ tiene todas sus raíces en S , y por consiguiente por lo anterior es posible encontrar $\alpha > 0$ tal que,

para todo $t' \in [a, a + \alpha] \cap I$, $P(t', s)$ también tiene todas sus raíces en S .

Por todo esto es fácil concluir que E no es vacío, por ejemplo, $a + \frac{\alpha}{2}$ pertenece a E .

Además por la definición de E la siguiente propiedad es obvia:

$t_2 \in E$, y $a < t_1 < t_2$, implica que t_1 pertenece a E .

Dado esto, es fácil ver que E es un intervalo y si,

$$\rho = \sup_{t \in E} t \tag{1.2.4}$$

entonces se concluye que $E = (a, \rho]$.

A) Por una parte es imposible que $P(\rho, s)$ tenga todas sus raíces en S .

Si este fuera el caso, entonces necesariamente $\rho < b$, y podría ser posible encontrar un $\alpha > 0$ tal que $\rho + \alpha < b$ y para todo $t' \in (\rho - \alpha, \rho + \alpha) \cap I$, $P(t', s)$ también tiene todas sus raíces en S .

Como resultado, $\rho + \frac{\alpha}{2}$ pertenece a E y esto contradeciría la definición de ρ en (1.2.4).

B) Por otra parte es imposible que $P(\rho, s)$ tenga incluso una raíz en el interior de \mathcal{U} , porque una aplicación directa del Teorema 1.2.3 no concedería la posibilidad de encontrar un $\alpha > 0$ tal que,

para todo $t' \in (\rho - \alpha, \rho + \alpha) \cap I$, $P(t', s)$ tiene al menos una raíz en \mathcal{U}^0 .

Y esto contradice el hecho de que $\rho - \varepsilon$ pertenece a E por suficientemente pequeño que sea ε .

Por A) y B) se puede concluir que $P(\rho, s)$ tiene todas sus raíces en $S \cup \partial S$, y al menos una raíz en ∂S . ■

El resultado anterior es un hecho muy intuitivo cuyo estado va de un conjunto abierto a otro conjunto abierto disjunto del primero, el conjunto de raíces de una familia continua de polinomios $P(\lambda, s)$ de grado fijo puede cortar en alguna etapa intermedia la frontera del primer conjunto abierto. Si $P(\lambda, s)$ pierde grado sobre el intervalo $[a, b]$ tal que si $p_n(\lambda)$ en $P(\lambda, s) = p_0(\lambda) + p_1(\lambda)s + \dots + p_n(\lambda)s^n$ se anula para algún valor de λ , entonces el Teorema de Cruce de Fronteras no se puede sostener.

1.3- Hurwitz-estabilidad.

La positividad de los coeficientes es una condición necesaria para el análisis de la estabilidad de sistemas de tipo (1.0.1) pero no suficiente (en caso de ecuaciones de 1^{er} y 2^{do} orden es también una condición suficiente) para que las raíces de una ecuación algebraica tengan parte real negativa (Hurwitz-estabilidad) [5]. Las condiciones necesarias y suficientes para que sean negativas las partes reales de una ecuación algebraica las dieron Edward J. Routh (1831-1907) en 1874 y Adolf Hurwitz (1859-1919) en 1885. Routh se inspiró en el trabajo de Cauchy (variable compleja) y Sturm. Hurwitz resuelve el problema en términos de un conjunto de determinantes. Bompiani demostraría en 1911 la equivalencia de los criterios de Routh y Hurwitz, aunque será tratado como Hurwitz-estabilidad, por ser así como es abordada en la mayoría de los textos. Primero se observará el caso de polinomios reales y después se extenderán los resultados a polinomios complejos como una consecuencia inmediata de ello.

1.3.1- Hurwitz-estabilidad para polinomios reales.

Se empieza por definir formalmente la Hurwitz-estabilidad para polinomios para ello se enuncia la siguiente definición.

Definición 1.3.1. (Polinomio de Hurwitz)

Se puede decir que el polinomio (1.0.2) de grado n , es un polinomio de Hurwitz si y sólo si todas sus raíces están contenidas en el semiplano izquierdo del Diagrama de Argan. En lo adelante se considerará que $p_0 > 0$, y $p_n \neq 0$.

Hay dos propiedades importantes [5] para estos polinomios que por ser fundamentales para un importante teorema del capítulo siguiente se enuncian y demuestran seguidamente.

Propiedad 1.3.1. Si el polinomio (1.0.2) es de Hurwitz entonces todos sus coeficientes son positivos.

Demostración. Sea $s_j = -a_j \pm ib_j$, con $j=1,2,\dots,p$ todas las raíces complejas del polinomio $P(s)$ de Hurwitz y $s_k = -c_k$, con $k=1,2,\dots,q$ las raíces reales de $P(s)$. Representétese con m_j , el grado de multiplicidad de la raíz $s_j = -a_j + ib_j$. Por tener $P(s)$ todos sus coeficientes reales, también $s_j = -a_j - ib_j$ es una raíz del polinomio, con multiplicidad m_j .

Sea l_k el grado de multiplicidad de la raíz $s_k = -c_k$. Evidentemente,

$$\sum_{j=1}^p 2m_j + \sum_{k=1}^q l_k = n.$$

$P(s)$ puede ser escrito como,

$$\begin{aligned} P(s) &= p_n \prod_{j=1}^p (s + a_j + ib_j)^{m_j} (s + a_j - ib_j)^{m_j} \prod_{k=1}^q (s + c_k)^{l_k} \\ &= p_n \prod_{j=1}^p (s^2 + 2a_j s + a_j^2 + b_j^2)^{m_j} \prod_{k=1}^q (s + c_k)^{l_k}. \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

donde los coeficientes del polinomio (1.3.1) son combinaciones de sumas y productos de cantidades estrictamente positivas multiplicadas por p_n , por tanto tienen el mismo signo. Igualando los coeficientes de la misma potencia de s en (1.3.1) se obtiene que todos los coeficientes de $P(s)$ son del mismo signo y como $p_0 > 0$, por la definición de polinomio estándar, los restantes coeficientes serán también positivos. ■

Propiedad 1.3.2. Si $P(s)$ es un polinomio de Hurwitz de grado n , entonces el argumento de $P(j\omega)$, es continuo y estrictamente creciente en función de ω en el intervalo $(-\infty, +\infty)$. Además el factor de incremento de $-\infty$ a $+\infty$ es,

$$\arg[P(+j\infty)] - \arg[P(-j\infty)] = n\pi .$$

Demostración. Si $P(s)$ es Hurwitz entonces puede ser rescrito como,

$$P(s) = p_n \prod_{i=1}^n (s - s_i), \text{ con } s_i = a_i + jb_i, \text{ y } a_i < 0.$$

De donde se tiene que,

$$\begin{aligned} \arg[P(j\omega)] &= \arg[p_n] + \sum_{i=1}^n \arg[j\omega - a_i - jb_i] \\ &= \arg[p_n] + \sum_{i=1}^n \arctan\left[\frac{\omega - b_i}{-a_i}\right] \end{aligned}$$

y así $\arg[P(j\omega)]$ es la suma de una constante más n funciones continuas y estrictamente crecientes. Además cada una de las n funciones tiene un incremento de π desde $\omega = -\infty$ a $\omega = +\infty$, como se muestra en la Figura 1.3.1, donde,

$$\begin{aligned} \arg[P(+j\infty)] - \arg[P(-j\infty)] &= \sum_{i=1}^n \arctan\left[\frac{+\infty - b_i}{-a_i}\right] - \sum_{i=1}^n \arctan\left[\frac{-\infty - b_i}{-a_i}\right] \\ &= \frac{\pi}{2} n + \frac{\pi}{2} n = n\pi . \blacksquare \end{aligned}$$

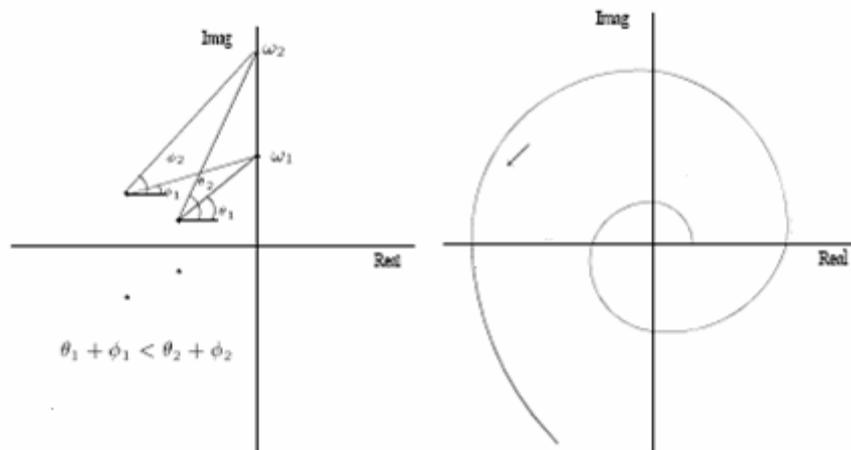


Figura 1.3.1. s-plano y curva de Mijailov.

1.4- Schur-estabilidad.

En el caso de la Schur-estabilidad se hará como en la Hurwitz-estabilidad, se comenzará definiéndola formalmente.

Definición 1.4.1. El polinomio (1.0.4) se dice que es un polinomio de Schur si todas sus raíces están situadas en un disco unitario abierto del plano complejo. Una condición necesaria para la Schur-estabilidad es $|p_n| > |p_0|$.

$P(z)$ puede ser escrito como,

$$P(z) = p_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

donde las z_i con $i = \overline{1, n}$ son las n raíces de $P(z)$. Si $P(z)$ es un polinomio de Schur entonces todas las raíces están localizadas en un disco unitario $|z| < 1$, tal que cuando z varía a lo largo del círculo unitario, $z = e^{j\theta}$, el argumento de $P(e^{j\theta})$ se incrementa monótonamente. Para los polinomios de Schur de grado n , $P(e^{j\theta})$ tiene un incremento neto de argumento $2n\pi$, y así la gráfica de $P(e^{j\theta})$ circunscribe el origen n veces. Se verá con un ejemplo lo anteriormente expuesto.

Ejemplo 1.4.1. Considerando el polinomio estable,

$$\begin{aligned} P(z) &= 2z^4 - 3.2z^3 + 1.24z^2 + 0.192z - 0.1566 \\ &= 2(z + 0.3)(z - 0.5 + 0.2j)(z - 0.5 - 0.2j)(z - 0.9). \end{aligned}$$

Se puede evaluar $P(e^{j\theta})$ cuando z varía alrededor del círculo unitario. La gráfica obtenida en la Figura 1.4.1 circunscribe al origen cuatro veces, con lo que se muestra que el polinomio de orden cuatro es un polinomio de Schur.

Una simple aplicación puede ser elaborada considerando el polinomio inverso $z^n P(z^{-1})$

$$\begin{aligned} z^n P(z^{-1}) &= p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \dots + p_n \\ &= p_n (1 - z_1 z)(1 - z_2 z) \dots (1 - z_n z) \end{aligned}$$

$z^n P(z^{-1})$ tiene ceros en $z = z_i^{-1}$, $i=1, \dots, n$. Si $P(z)$ es Schur z_i es modularmente menor que uno, tal que $z = z_i^{-1}$ son localizados en el interior del disco unitario.

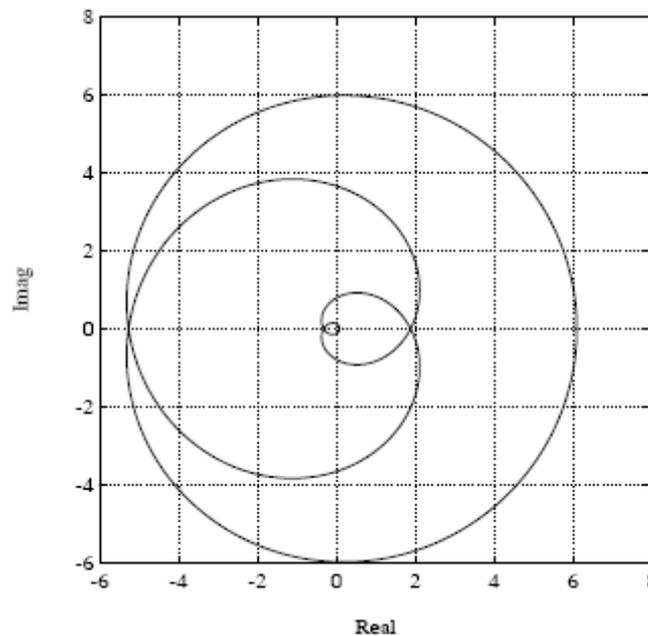


Figura 1.4.1. Gráfica de $P(e^{j\theta})$.

Si se tiene $z = e^{j\theta}$ variando a lo largo del círculo unitario con incremento del argumento de $e^{jn\theta} P(e^{-j\theta})$ deba ser por consiguiente cero. Esto significa que para la Schur-estabilidad de $P(z)$ es necesario y suficiente que la frecuencia gráfica, $e^{jn\theta} P(e^{-j\theta})$ del polinomio inverso no circunscriba al origen. Se muestra en el siguiente ejemplo lo anteriormente planteado.

Ejemplo 1.4.2. Considerando el polinomio del ejemplo anterior. La gráfica de $z^n P(z^{-1})$ cuando z describe el círculo unitario se muestra en la Figura 1.4.2. Como se observa, la gráfica no circunscribe al origen y se concluye que $P(z)$ es estable.

Se ha observado que usando la gráfica de $P(z)$ debe verificarse que la gráfica de $P(e^{j\theta})$ circunscribe el origen el número correcto de veces, n , mientras que usando el polinomio inverso $R(z) = z^n P(z^{-1})$ se necesita sólo chequear que la gráfica de $R(e^{j\theta})$ excluye el origen. Este resultado se sostiene para polinomios tanto reales como complejos.

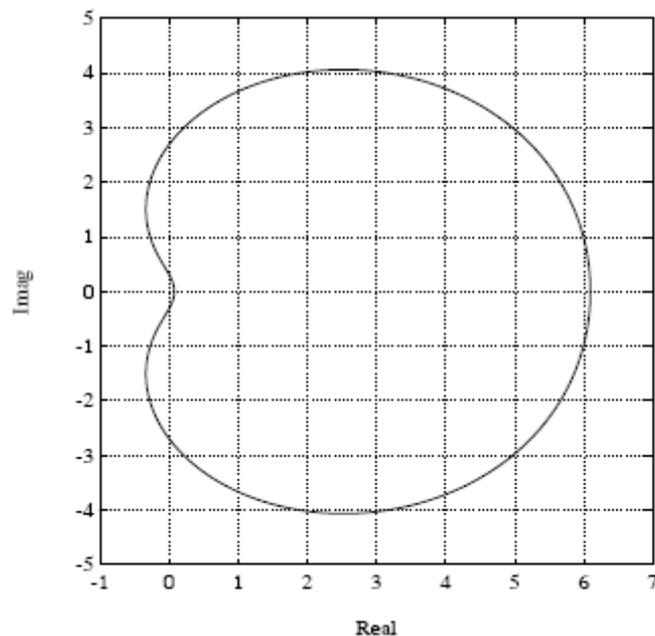


Figura 1.4.2. Gráfica de $e^{j4\theta} P(e^{-j\theta})$.

Existen otros resultados en la teoría clásica de la estabilidad, pero se consideran suficientes los anteriormente expuestos para todo el desarrollo posterior.

Capítulo 2: Estabilidad de polinomios con coeficientes puntuales.

Se necesitan herramientas para fabricar herramientas.

Henry Bergson.

En este capítulo se emplearán los resultados expuestos en el anterior especialmente el Teorema de Cruce de Fronteras [4] para obtener derivaciones simples del Teorema de Hermite-Biehler [15], la prueba de Routh para la estabilidad en el semiplano izquierdo (Hurwitz-estabilidad) y la prueba de Jury para la estabilidad en el disco unitario (Schur-estabilidad) [20] empleadas en polinomios con coeficientes ajustables, para ello se partirá de un desarrollo teórico con el fin de obtener mejoras algorítmicas; pasando a ver un ejemplo comparativo con los métodos tradicionales. Además se ofrecen algunos resultados importantes que pueden ser de gran utilidad para la demostración y útil enfoque de un teorema importante de la teoría actual de la estabilidad de polinomios que será estudiado en el próximo capítulo.

2.1- Hurwitz-estabilidad mediante el teorema de Hermite-Biehler.

El teorema de Hermite- Biehler es una fuerte herramienta para el análisis de la Hurwitz-estabilidad pero son muchas las ideas nuevas que pueden surgir de él mejorándolo e incluso empleándolo en el análisis de la Schur-estabilidad o de variantes para algoritmos clásicos como los de Routh y Jury.

2.1.1- Hurwitz-estabilidad para polinomios con coeficientes reales.

Las partes par e impar del polinomio $P(s)$ dado por (1.0.2) pueden ser definidas como,

$$P^{par}(s) = p_0 + p_2s^2 + p_4s^4 + \dots$$

$$P^{impar}(s) = p_1s + p_3s^3 + p_5s^5 + \dots.$$

Se define a partir de ellas,

$$P^e(\omega) = P^{par}(j\omega) = p_0 - p_2\omega^2 + p_4\omega^4 - \dots$$

$$P^0(\omega) = \frac{P^{impar}(j\omega)}{j\omega} = p_1 - p_3\omega^2 + p_5\omega^4 - \dots.$$

donde $P^e(\omega)$ y $P^0(\omega)$ son polinomios en ω^2 siendo esto una consecuencia inmediata de que el conjunto de sus raíces sean simétricas respecto al origen del plano complejo.

Suponiendo ahora que el grado del polinomio $P(s)$ es par, o sea $n = 2m$, para $m > 0$. En este caso se tendrá,

$$P^e(\omega) = p_0 - p_2\omega^2 + p_4\omega^4 - \dots + (-1)^m p_{2m}\omega^{2m}$$

$$P^0(\omega) = p_1 - p_3\omega^2 + p_5\omega^4 - \dots + (-1)^{m-1} p_{2m-1}\omega^{2m-2}.$$

Si por el contrario, el grado de $P(s)$ es impar, entonces $n = 2m + 1$, para $m \geq 0$, y,

$$P^e(\omega) = p_0 - p_2\omega^2 + p_4\omega^4 - \dots + (-1)^m p_{2m}\omega^{2m}$$

$$P^0(\omega) = p_1 - p_3\omega^2 + p_5\omega^4 - \dots + (-1)^m p_{2m+1}\omega^{2m}.$$

Se define para cada caso la propiedad de interrelación de las raíces de estos polinomios.

Definición 2.1.1. Un polinomio real $P(s)$ par satisface la propiedad de interrelación si,

a) p_{2m} y p_{2m-1} tienen el mismo signo.

b) todas las raíces de $P^e(\omega)$ y $P^0(\omega)$ son reales y distintas y las m raíces positivas de $P^e(\omega)$ conjuntamente con las $m-1$ raíces positivas de $P^0(\omega)$ están ordenadas de la siguiente manera,

$$0 < \omega_{e,1} < \omega_{0,1} < \omega_{e,2} < \cdots < \omega_{e,m-1} < \omega_{0,m-1} < \omega_{e,m}.$$

Definición 2.1.2. Un polinomio real $P(s)$ impar satisface la propiedad de interrelación si,

a) p_{2m+1} y p_{2m} tienen el mismo signo.

b) todas las raíces de $P^e(\omega)$ y $P^0(\omega)$ son reales y las m raíces positivas de $P^e(\omega)$ conjuntamente con las m raíces positivas de $P^0(\omega)$ están ordenadas de la siguiente manera,

$$0 < \omega_{e,1} < \omega_{0,1} < \cdots < \omega_{e,m-1} < \omega_{0,m-1} < \omega_{e,m} < \omega_{0,m}.$$

Una descripción alternativa de la propiedad de interrelación puede ser dada como sigue.

Definición 2.1.3. $P(s) = P^{par}(s) + P^{impar}(s)$ satisface la propiedad de interrelación si y sólo si,

a) los coeficientes principales de $P^{par}(s)$ y $P^{impar}(s)$ son del mismo signo.

b) todos los ceros de $P^{par}(s) = 0$ y de $P^{impar}(s) = 0$ son distintos, y están alternados a lo largo del eje imaginario.

Ahora se está en condiciones de enunciar el Teorema de Interrelación o de Hermite-Biehler [4][9].

Teorema 2.1.1. (Teorema de Interrelación o de Hermite-Biehler) Un polinomio real $P(s)$ dado en (1.0.2) es Hurwitz-estable si y sólo si satisface la propiedad de interrelación.

Demostración. Dado que $P(s)$ es un polinomio de Hurwitz, se tiene por la Propiedad 1.3.1 que todos los coeficientes p_i con $i = \overline{1, n}$, tienen el mismo signo, con esto queda probada la parte a) de la propiedad de interrelación y sin pérdida de generalidad se puede asumir que todos los coeficientes son positivos.

Para probar la parte b) de dicha propiedad se asumirá arbitrariamente que $P(s)$ es de grado par o sea $n = 2m$. Ahora, se conoce por la Propiedad 1.3.2 que $P(j\omega)$ es estrictamente creciente en el intervalo de $-\pi/2$ a $\pi/2$ con ω de $+\infty$ a $-\infty$. Debido al hecho de que las raíces de $P(s)$ son simétricas respecto al eje real y además de esto $\arg[P(j\omega)]$ crece de 0 a $+\pi/2 = m\pi$ con ω de 0 a $+\infty$. Por lo tanto si ω va de 0 a $+\infty$, $P(j\omega)$ comienza en el eje real positivo ($P(0) = p_0 > 0$), a hacer círculos en contra de las manecillas del reloj alrededor del origen con radio $m\pi$ antes de partir al infinito, y nunca pasa a por origen dado $P(j\omega) \neq 0$, para toda ω . Tal resultado es muy simple de ver en la gráfica de $P(j\omega)$ que hace cortes en el eje imaginario m veces y la parte real de $P(j\omega)$ tiene m ceros en ω creciente, con los valores positivos,

$$\omega_{\Re,1}, \omega_{\Re,2}, \dots, \omega_{\Re,m}. \quad (2.1.1)$$

Similarmente la gráfica de $P(j\omega)$ comienza en el eje real positivo y corta el eje real $m-1$ veces con ω incrementándose por lo que la parte imaginaria de $P(j\omega)$ también llega a tener m cero (incluyendo $\omega = 0$) en,

$$0, \omega_{\Im,1}, \omega_{\Im,2}, \dots, \omega_{\Im,m-1} \quad (2.1.2)$$

antes de crecer al infinito. Dado que $P(j\omega)$ hace círculos alrededor del origen es obvio tener,

$$0 < \omega_{\Re,1} < \omega_{\Im,1} < \omega_{\Re,2} < \omega_{\Im,2} < \dots < \omega_{\Re,m-1} < \omega_{\Im,m-1} < \omega_{\Re,m}.$$

Ahora la prueba de la necesidad es completada por una advertencia simple de que la parte real de $P(j\omega)$ es nula para $P^e(\omega)$, y la parte imaginaria de $P(j\omega)$ es $\omega P^0(j\omega)$.

Por el contrario se asume que $P(s)$ satisface la propiedad de interrelación y suponiendo por ejemplo que $P(s)$ es de grado $n = 2m$ y que p_{2m} , p_{2m-1} son ambas positivas.

Considerando las raíces de $P^e(\omega)$ y $P^0(\omega)$,

$$0 < \omega_{e,1}^p < \omega_{0,1}^p < \dots < \omega_{e,m-1}^p < \omega_{0,m-1}^p < \omega_{e,m}^p. \quad (2.1.3)$$

Por esto $P^e(\omega)$ y $P^0(\omega)$ pueden ser escrito como,

$$P^e(\omega) = p_{2m} \prod_{i=1}^m (\omega^2 - \omega_{e,i}^p)^2$$

$$P^0(\omega) = p_{2m-1} \prod_{i=1}^{m-1} (\omega^2 - \omega_{0,i}^p)^2.$$

Ahora se considerará un polinomio $Q(s)$ del cual es sabida su estabilidad, del mismo grado $2m$ con todos sus coeficientes positivos. Por ejemplo, se toma $Q(s) = (s + 1)^{2m}$. En cualquier caso, se escribe,

$$Q(s) = q_0 + q_1 s + q_2 s^2 + \dots + q_{2m} s^{2m}.$$

Dado que $Q(s)$ es estable, se puede prestar atención a la primera parte del teorema donde $Q(s)$ satisface la propiedad de interrelación, tal que $Q^e(\omega)$

tiene m raíces positivas $\omega_{e,1}^q, \dots, \omega_{e,m}^q$ y $Q^0(\omega)$ tiene $m-1$ raíces positivas $\omega_{0,1}^q, \dots, \omega_{0,m-1}^q$, y,

$$0 < \omega_{e,1}^q < \omega_{0,1}^q < \dots < \omega_{e,m-1}^q < \omega_{0,m-1}^q < \omega_{e,m}^q. \quad (2.1.4)$$

Por consiguiente se puede escribir,

$$Q^e(\omega) = q_{2m} \prod_{i=1}^m (\omega^2 - \omega_{e,i}^q)^2$$

$$Q^0(\omega) = q_{2m-1} \prod_{i=1}^{m-1} (\omega^2 - \omega_{0,i}^q)^2.$$

Considerando ahora el polinomio $P_\lambda(s) = P_\lambda^{par}(s) + sP_\lambda^{impar}(s)$ definido por,

$$P_\lambda^e(\omega) = ((1-\lambda)q_{2m} + \lambda p_{2m}) \prod_{i=1}^m (\omega^2 - [(1-\lambda)(\omega_{e,1}^q)^2 + \lambda(\omega_{e,i}^p)^2])$$

$$P_\lambda^0(\omega) = ((1-\lambda)q_{2m-1} + \lambda p_{2m-1}) \prod_{i=1}^{m-1} (\omega^2 - [(1-\lambda)(\omega_{0,1}^q)^2 + \lambda(\omega_{0,i}^p)^2]).$$

Obviamente, los coeficientes de $P_\lambda(s)$ son funciones polinomiales en λ las cuales por consiguiente son continuas en $[0,1]$. Además, el coeficiente del término de mayor grado en $P_\lambda(s)$ es $(1-\lambda)q_{2m} + \lambda p_{2m}$ y siempre permanece positivo con λ variando de 0 a 1. Para $\lambda=0$ se tiene que $P_0(s) = Q(s)$ y para $\lambda=1$, $P_1(s) = P(s)$. Se puede suponer ahora que $P(s)$ no es un polinomio de Hurwitz. Por el Teorema de Cruce de Frontera es claro que necesariamente existe algún λ en $(0, 1]$ tal que $P_\lambda(s)$ tiene una raíz en el eje imaginario.

Sin embargo, $P_\lambda(s)$ tiene una raíz en el eje imaginario, si y sólo si $P_\lambda^e(\omega)$ y $P_\lambda^0(\omega)$ tienen una raíz real común. Pero obviamente, las raíces de $P_\lambda^e(\omega)$ satisfacen,

$$\omega_{e,i}^{\lambda^2} = (1 - \lambda)\omega_{e,i}^{q^2} + \lambda\omega_{e,i}^{p^2}, \quad (2.1.5)$$

y las de $P_\lambda^0(\omega)$,

$$\omega_{0,i}^{\lambda^2} = (1 - \lambda)\omega_{0,i}^{q^2} + \lambda\omega_{0,i}^{p^2}. \quad (2.1.6)$$

Ahora, se tienen dos raíces cualquiera de $P_\lambda^e(\omega)$ en (2.1.5). Si $i < j$, por (2.1.3) $\omega_{e,i}^{p^2} < \omega_{e,j}^{p^2}$, y similarmente por (2.1.4), $\omega_{e,i}^{q^2} < \omega_{e,j}^{q^2}$, por lo que,

$$\omega_{e,i}^{\lambda^2} < \omega_{e,j}^{\lambda^2}.$$

De la misma manera, puede verse que el mismo ordenamiento de (2.1.3) y (2.1.4) se conserva entre las raíces de $P_\lambda^0(\omega)$ y también entre cualquier raíz de $P_\lambda^e(\omega)$ y cualquier raíz de $P_\lambda^0(\omega)$. En otras palabras la parte b) de la propiedad de interrelación es invariante bajo tales combinaciones convexas, esto se tendrá para cada λ en $[0, 1]$

$$0 < \omega_{e,1}^{\lambda^2} < \omega_{0,1}^{\lambda^2} < \dots < \omega_{e,m-1}^{\lambda^2} < \omega_{0,m-1}^{\lambda^2} < \omega_{e,m}^{\lambda^2}.$$

Esto muestra que, cualquiera que sean los valores de λ en $[0, 1]$, $P_\lambda^e(\omega)$ y $P_\lambda^0(\omega)$ nunca pueden tener una raíz común, y esto lleva por consiguiente a una contradicción con lo cual se completa la demostración. ■

Es claro que la propiedad de interrelación es equivalente al Criterio de Mijailov. Si la región de estabilidad \mathcal{D} es tal que un polinomio estable no cumple con el Criterio de Mijailov, el entrelazamiento de la parte real e imaginaria en general falla. Sin embargo, hasta en el caso de una región \mathcal{D} la propiedad de cruzamiento de fronteras debe sostenerse. Esto significa

que la transición de la estabilidad a la inestabilidad sólo puede ocurrir si las partes reales e imaginarias simultáneamente se vuelven cero en algún punto de la frontera.

La propiedad de interrelación de un polinomio puede ser verificada trazando los gráficos de $P^e(\omega)$ y $P^0(\omega)$ o el de $P(j\omega)$, como se muestra a continuación.

Ejemplo 2.1.1.

$$P(s) = s^9 + 11s^8 + 52s^7 + 145s^6 + 266s^5 + 331s^4 + 280s^3 + 155s^2 + 49s + 6.$$

Entonces,

$$P(j\omega) = P^e(\omega) + j\omega P^0(\omega)$$

con,

$$P^e(\omega) = 11\omega^8 - 145\omega^6 + 331\omega^4 - 155\omega^2 + 6$$

$$P^0(\omega) = \omega^8 - 52\omega^6 + 266\omega^4 - 280\omega^2 + 49.$$

Las gráficas de $P^e(\omega)$ y $P^0(\omega)$ se muestran en la Figura 2.1.1. Se ve que el polinomio $P(s)$ es un polinomio de Hurwitz ya que satisface la propiedad de interrelación.

Ejemplo 2.1.2.

$$P(s) = s^9 + 21s^8 + 52s^7 + 145s^6 + 266s^5 + 331s^4 + 280s^3 + 155s^2 + 49s + 6.$$

Entonces,

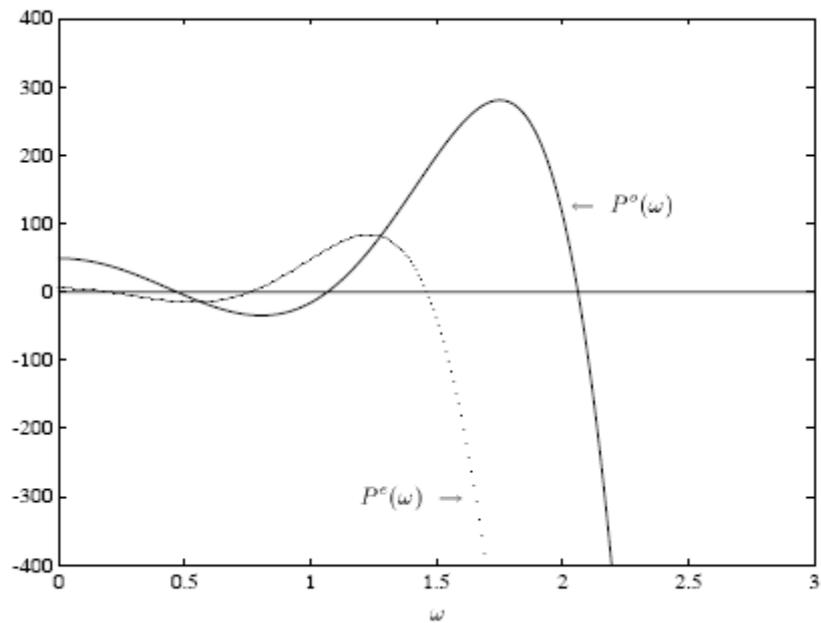


Figura 2.1.1. Propiedad de interrelación para polinomios de Hurwitz.

$$P(j\omega) = P^e(\omega) + j\omega P^o(\omega)$$

donde,

$$P^e(\omega) = 21\omega^8 - 145\omega^6 + 331\omega^4 - 155\omega^2 + 6$$

$$P^o(\omega) = \omega^8 - 52\omega^6 + 266\omega^4 - 280\omega^2 + 49.$$

Las gráficas de $P^e(\omega)$ y $P^o(\omega)$ se muestran en la Figura 2.1.2. Se ve que el polinomio $P(s)$ no es un polinomio de Hurwitz ya que no satisface la propiedad de interrelación.

Ambas gráficas son ilimitadas cuando $\omega \rightarrow \infty$, por lo que se obtuvo un resultado importante para eliminar este inconveniente. Un ploteo limitado conteniendo la misma información puede ser construido de la forma siguiente.

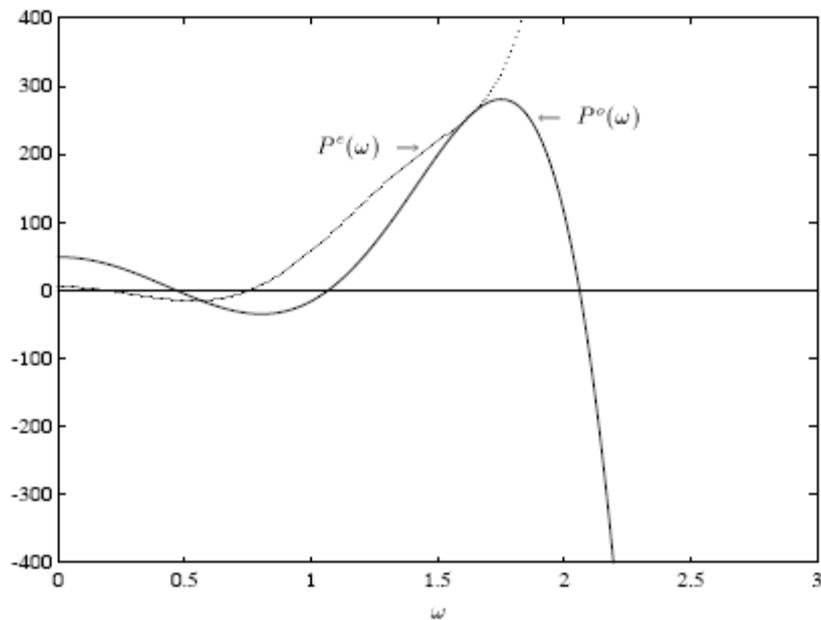


Figura 2.1.2. Fallo de interrelación por polinomios no ser Hurwitz.

Para un polinomio como el (1.0.2) escrito usualmente como,

$$P(j\omega) = P^e(\omega) + j\omega P^o(\omega)$$

y sea $S(\omega)$ y $T(\omega)$ denotan funciones positivas arbitrarias y continuas en $0 \leq \omega \leq \infty$.

Sea,

$$x(\omega) = \frac{P^e(\omega)}{S(\omega)}, \quad y(\omega) = \frac{P^o(\omega)}{T(\omega)}.$$

se puede plantear el siguiente lema.

Lema 2.1.1. Un polinomio real $P(s)$ es de Hurwitz si y sólo si la frecuencia de la gráfica $z(\omega) = x(\omega) + jy(\omega)$ se mueve estrictamente en sentido contrario a las agujas del reloj y pasa a su vez por n cuadrantes en su giro.

Demostración. El Teorema de Hermite-Biehler y la Propiedad 1.3.2 de polinomios de Hurwitz muestra la gráfica de $P(j\omega)$ debe ir a través de n

cuadrantes si y sólo si $P(s)$ es de Hurwitz. Desde que los signos de $P^e(\omega)$ y $x(\omega)$, $\omega P^0(\omega)$ y $y(\omega)$ coincide para $\omega > 0$, siendo el lema verdadero. ■

Aunque la gráfica de $P(j\omega)$ es ilimitada, la gráfica de $z(\omega)$ siempre puede limitarse escogiendo las funciones $T(\omega)$ y $S(\omega)$ apropiadas. Por ejemplo, como $T(\omega)$ y $S(\omega)$ pueden escogerse polinomios con el mismo grado de $P^e(\omega)$ y $P^0(\omega)$ respectivamente. Un resultado similar puede ser derivado para el caso complejo. El Lema 1.3.1 es ilustrado con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1.3. Tomando el mismo polinomio que en el Ejemplo 2.1.2

$$P(s) = s^9 + 11s^8 + 52s^7 + 145s^6 + 266s^5 + 331s^4 + 280s^3 + 155s^2 + 49s + 6.$$

Entonces,

$$P(j\omega) = P^e(\omega) + j\omega P^0(\omega)$$

se tiene,

$$P^e(\omega) = 11\omega^8 - 145\omega^6 + 331\omega^4 - 155\omega^2 + 6$$

$$P^0(\omega) = \omega^8 - 52\omega^6 + 266\omega^4 - 280\omega^2 + 49.$$

Se elige,

$$S(\omega) = \omega^8 + \omega^6 + \omega^4 + \omega^2 + 1$$

$$T(\omega) = \omega^8 + \omega^6 + \omega^4 + \omega^2 + 1.$$

La función $z(\omega)$ en la Figura 2.1.3 gira estrictamente en contra de las manecillas del reloj a través de nueve cuadrantes, y esto muestra que el polinomio $P(s)$ es de Hurwitz acorde con el Lema 1.3.1.

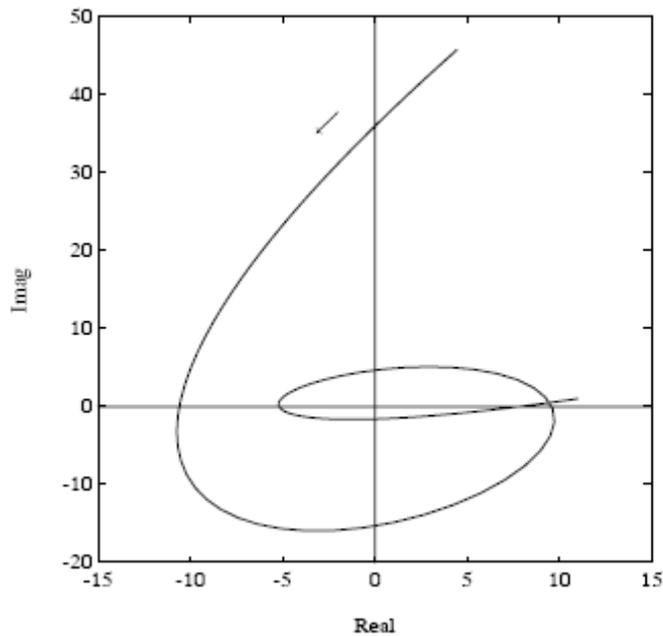


Figura 2.1.3. Frecuencia de la gráfica de $z(\omega)$.

2.1.2- Hurwitz-estabilidad para polinomios con coeficientes complejos.

Se mostrará ahora el Teorema de Hermite-Biehler para polinomios con coeficientes complejos. Su demostración no es más que una extensión del caso real por lo que no se desarrollará. Sea $P(s)$ un polinomio con coeficientes complejo dado en (1.0.3). Se define,

$$P_R(s) = a_0 + jb_1s + a_2s^2 + jb_3s^3 + \dots$$

$$P_I(s) = jb_0 + a_1s + jb_2s^2 + a_3s^3 + \dots$$

y se escribe,

$$P(j\omega) = P^r(\omega) + jP^i(\omega),$$

donde,

$$P^r(\omega) = P_R(j\omega) = a_0 - b_1\omega - a_2\omega^2 + b_3\omega^3 + \dots,$$

$$P^i(\omega) = \frac{1}{j} P_1(j\omega) = b_0 + a_1\omega - b_2\omega^2 - a_3\omega^3 + \dots$$

El Teorema de Hermite-Biehler para polinomios complejos puede ser presentado como sigue [2] [9].

Teorema 2.1.2. El polinomio complejo $P(s)$ de (1.0.3) es un polinomio de Hurwitz si y sólo si,

$$1) \quad a_{n-1}a_n + b_{n-1}b_n > 0,$$

2) los ceros de $P^r(\omega)$ y $P^i(\omega)$ son todos simples, reales y se entrelazan, con ω variando de $-\infty$ a $+\infty$.

Se puede notar que la condición 1) se deriva del hecho de que la suma de las raíces del polinomio $P(s)$ de (1.0.3) es igual a,

$$-\frac{a_{n-1} + jb_{n-1}}{a_n + jb_n} = -\frac{a_{n-1}a_n + b_{n-1}b_n + j(b_{n-1}a_n - a_{n-1}b_n)}{a_n^2 + b_n^2},$$

para que $P(s)$ sea Hurwitz, entonces la parte real del número complejo anterior debe ser negativa.

2.2- Schur-estabilidad mediante el teorema de Hermite-Biehler.

Con todo lo anterior se derivó un resultado similar del Teorema de interrelación con respecto a cualquier región S que tiene la propiedad de que la fase de un polinomio estable evaluado a lo largo en la frontera de S aumenta monótonamente. En este caso la estabilidad de un polinomio con respecto a S es equivalente a la interrelación de sus partes real e imaginaria

evaluadas a lo largo de la frontera de S . Aquí se considera el caso donde S es un disco unitario abierto.

Para polinomios reales, es sencillo ver que la estabilidad de $P(z)$ es equivalente al entrelazamiento de la parte real e imaginaria de $P(z)$ evaluada a lo largo de la mitad superior del círculo unitario. Escribiendo $P(e^{j\omega}) = R(\theta) + jI(\theta)$ se tiene,

$$R(\theta) = p_n \cos(n\theta) + \dots + p_1 \cos(\theta) + p_0, \text{ y}$$

$$I(\theta) = p_n \text{sen}(n\theta) + \dots + p_1 \text{sen}(\theta).$$

Con lo que sin ninguna dificultad se enuncia el siguiente Lema.

Lema 2.2.1. Un polinomio real $P(z)$ es Schur con $|p_n| > |p_0|$ si y sólo si:

- a) $R(\theta)$ tiene exactamente n ceros en $[0, \pi]$,
- b) $I(\theta)$ tiene exactamente $n + 1$ ceros en $[0, \pi]$,
- c) los ceros de $R(\theta)$ y $I(\theta)$ están entrelazados.

Se muestra este resultado con dos ejemplos esclarecedores.

Ejemplo 2.2.1. Considerando el polinomio,

$$P(z) = z^5 + 0.2z^4 + 0.3z^3 + 0.4z^2 + 0.03z + 0.02.$$

Como se observa en la Figura 2.2.1 el polinomio $P(z)$ es Schur dado que $\text{Re}[P(e^{j\theta})]$ y $\text{Im}[P(e^{j\theta})]$ tienen respectivamente 5 y 6 ceros distintos para $\theta \in [0, \pi]$, y los ceros de $\text{Re}[P(e^{j\theta})]$ se entrelazan con los de $\text{Im}[P(e^{j\theta})]$.

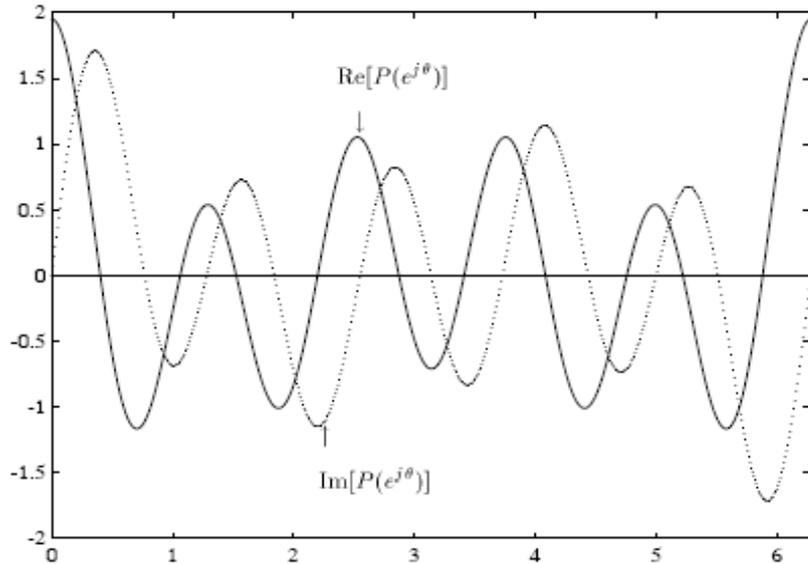


Figura 2.2.1. $\text{Re}[P(e^{j\theta})]$ y $\text{Im}[P(e^{j\theta})]$.

Ejemplo 2.2.2. Considerando el polinomio,

$$P(z) = z^5 + 2z^4 + 0.3z^3 + 0.4z^2 + 0.03z + 0.02.$$

Puesto que $\text{Re}[P(e^{j\theta})]$ y $\text{Im}[P(e^{j\theta})]$ cada uno no tiene $2n = 10$ ceros distintos para $0 \leq \theta < 2\pi$, como se muestra en la Figura 2.2.2, el polinomio $P(z)$ no es Schur.

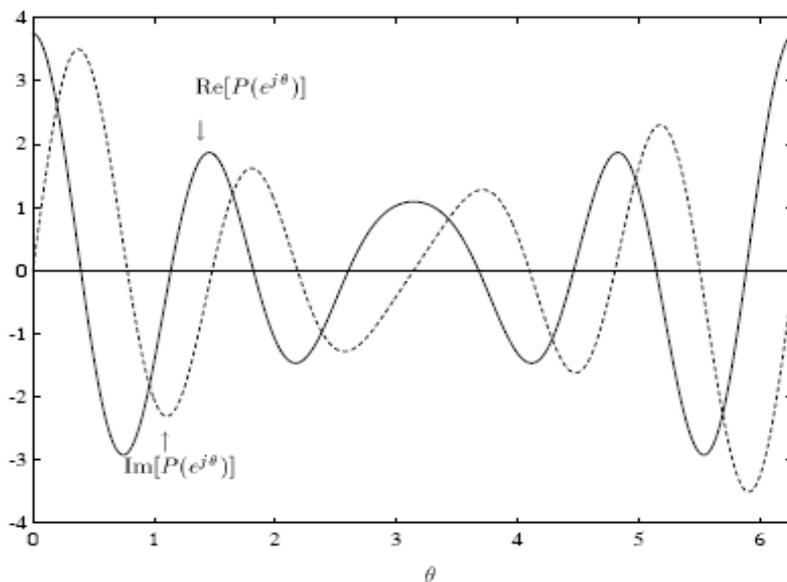


Figura 2.2.2. $\text{Re}[P(e^{j\theta})]$ y $\text{Im}[P(e^{j\theta})]$.

Estas condiciones, pueden refinarse de hecho más allá, al entrelazar en el círculo unitario dos polinomios $P_s(z)$ y $P_a(z)$ los cuales representan las partes simétrica y no simétrica del polinomio real $P(z) = P_s(z) + P_a(z)$ donde

$$P_s(z) = \frac{1}{2} \left[P(z) + z^n P\left(\frac{1}{z}\right) \right], \text{ y } P_a(z) = \frac{1}{2} \left[P(z) - z^n P\left(\frac{1}{z}\right) \right].$$

Teorema 2.2.1. Un polinomio $P(z)$ es Schur si y sólo si $P_s(z)$ y $P_a(z)$ satisfacen las siguientes propiedades:

- a) $P_s(z)$ y $P_a(z)$ son polinomios de grado n con sus mayores coeficientes del mismo signo.
- b) $P_s(z)$ y $P_a(z)$ sólo tienen ceros simples los cuales pertenecen al círculo unitario.
- c) Los ceros de $P_s(z)$ y $P_a(z)$ se entrelazan en el círculo unitario.

Demostración. Sea $P(z) = p_0 + p_1z + p_2z^2 + \dots + p_nz^n$. La condición a) es equivalente a $p_n^2 - p_0^2 > 0$, lo cual es claramente necesario para la Schur-estabilidad. Ahora se aplicará la transformación bilinial del círculo unitario dentro de la mitad izquierda del plano y se usará el Teorema de Hermite-Biehler para la Hurwitz-estabilidad. Es conocido que el mapeo bilinial,

$$z = \frac{s+1}{s-1}$$

transforma el disco unitario abierto en la mitad abierta izquierda del plano. Puede usarse para transformar un polinomio $P(z)$ en $P(s)$ de la siguiente forma,

$$(s-1)^n P\left(\frac{s+1}{s-1}\right) = \hat{P}(s).$$

Se escribe,

$$\hat{P}(s) = \hat{p}_0 + \hat{p}_1 s + \cdots + \hat{p}_{n-1} s^{n-1} + \hat{p}_n s^n$$

donde cada \hat{p}_i es una función de la cual dependen los coeficientes de $P(z)$. La siguiente transformación preserva el grado entonces $P(z)$ es Schur-estable si y sólo si $\hat{P}(s)$ es Hurwitz-estable. Es muy sencillo verificar que la transformación descrita preserva el grado si y sólo si,

$$\hat{p}_n = \sum_{i=0}^n p_i = P(1) \neq 0$$

y esto se cumple por la condición c).

La transformación de $P(z)$ en $\hat{P}(s)$ es una transformación lineal T . Lo que es lo mismo, $\hat{P}(s)$ es la imagen de $P(z)$ bajo el mapeo T . Entonces $\mathcal{T}P(z) = \hat{P}(s)$ lo que puede ser escrito explícitamente como sigue,

$$(s-1)^n P\left(\frac{s+1}{s-1}\right) = \mathcal{T}P(z) = \hat{P}(s). \blacksquare$$

Por ejemplo, para $n=4$, expresando a $P(z)$ y $\hat{P}(s)$ en términos del vector de sus coeficientes,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ -4 & 2 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{p}_0 \\ \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 \\ \hat{p}_4 \end{bmatrix}.$$

Considerando las partes simétrica y asimétrica de $P(z)$, y su imagen por la transformación, dada por $TP_s(z)$ y $TP_a(z)$ respectivamente. Un cómputo fiel muestra que,

$$TP_s(z) = \hat{P}^{par}(s), \quad TP_a(z) = \hat{P}^{impar}(s), \quad n \text{ par}$$

y,

$$TP_s(z) = \hat{P}^{impar}(s), \quad TP_a(z) = \hat{P}^{par}(s), \quad n \text{ impar.}$$

Las condiciones b) y c) quedan mostradas a partir de la propiedad de interrelación para polinomios de Hurwitz, aplicada a $\hat{P}(s)$.

Las funciones $P_s(z)$ y $P_a(z)$ con z a través del círculo unitario. El entrelazamiento puede ser verificado con la gráfica de los ceros de las funciones, ver Figura 2.2.3.

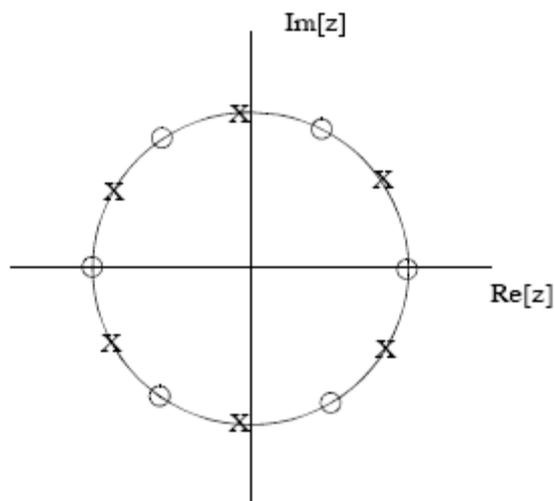


Figura 2.2.3. Entrelazado de las partes simétrica y asimétrica de un polinomio en un círculo unitario.

2.3- Búsqueda de polinomios estable mediante polinomios conocidos.

Se obtienen dos lemas que aunque de apariencia insignificante será de vital importancia a la hora de generalizar ideas.

Lema 2.3.1. Sean,

$$P_1(s) = P^{par}(s) + P_1^{impar}(s)$$

$$P_2(s) = P^{par}(s) + P_2^{impar}(s)$$

dos polinomios estables y del mismo grado con la misma parte par $P^{par}(s)$ y diferentes partes impares $P_1^{impar}(s)$ y $P_2^{impar}(s)$ satisfaciendo,

$$P_1^0(\omega) \leq P_2^0(\omega), \quad \text{para todo } \omega \in [0, \infty].$$

Entonces,

$$P(s) = P^{par}(s) + P^{impar}(s),$$

es estable para cada polinomio $P(s)$ con parte impar $P^{impar}(s)$ satisfaciendo,

$$P_1^0(\omega) \leq P^0(\omega) \leq P_2^0(\omega), \quad \text{para todo } \omega \in [0, \infty].$$

Demostración. Teniendo que $P_1(s)$ y $P_2(s)$ son estables, $P_1^0(\omega)$ y $P_2^0(\omega)$ satisfacen la propiedad de interrelación con $P^e(\omega)$. En particular, $P_1^0(\omega)$ y $P_2^0(\omega)$ no son sólo de igual grado, sino que el signo de sus mayores coeficientes es también el mismo dado el hecho de que es el mismo del mayor coeficiente de $P^e(\omega)$. Determinado esto es fácil ver que $P_0(\omega)$ no satisface $P_1^0(\omega) \leq P^0(\omega) \leq P_2^0(\omega)$, para todo $\omega \in [0, \infty]$, a menos que tengan el

mismo grado y el mismo signo para sus mayores coeficientes. Entonces la condición anterior fuerza a las raíces de $P_0(\omega)$ a interrelacionarse con las de $P^e(\omega)$. Por consiguiente de acuerdo con el Teorema de Hermite-Biehler, $P^{par}(s) + P^{impar}(s)$ es estable. ■

Para esclarecer los resultados obtenidos con el lema anterior se puede desarrollar el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3.1. Sean,

$$P_1(s) = s^7 + 9s^6 + 31s^5 + 71s^4 + 111s^3 + 109s^2 + 76s + 12$$

$$P_2(s) = s^7 + 9s^6 + 34s^5 + 17s^4 + 111s^3 + 109s^2 + 83s + 12.$$

Entonces se tiene que,

$$P^{par}(s) = 9s^6 + 71s^4 + 109s^2 + 12$$

$$P_1^{impar}(s) = s^7 + 31s^5 + 111s^3 + 76s$$

$$P_2^{impar}(s) = s^7 + 34s^5 + 111s^3 + 83s.$$

La Figura 2.3.1 muestra a $P^e(\omega)$ y la franja que forman $P_1^0(s)$ y $P_2^0(s)$ satisfaciendo la propiedad de interrelación.

De esto se puede concluir que cualquier polinomio $P(s)$ con parte impar $P^{impar}(s)$ que satisfaciendo,

$$P_1^0(\omega) \leq P^0(\omega) \leq P_2^0(\omega), \quad \text{para todo } \omega \in [0, \infty]$$

es estable. Un ejemplo de ello es el siguiente polinomio que queda contenido en la franja,

$$P^{impar}(s) = s^7 + 32s^5 + 111s^3 + 79s.$$

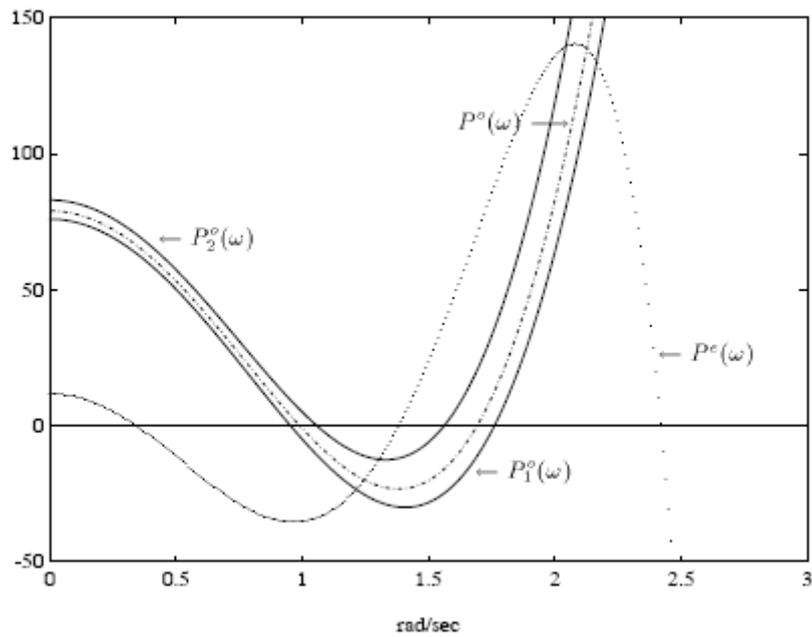


Figura 2.1.1. $P^e(\omega)$ y $(P_1^0(s), P_2^0(s))$.

El lema dual del Lema 2.3.1 es el siguiente el cual se dará sin demostración por ser esta una consecuencia inmediata del anterior.

Lema 2.3.2. Sean,

$$P_1(s) = P_1^{par}(s) + P^{impar}(s)$$

$$P_2(s) = P_2^{par}(s) + P^{impar}(s)$$

dos polinomios estables del mismo grado con la misma parte impar $P^{impar}(s)$ y diferentes partes par P_1^{par} y P_2^{par} satisfaciendo,

$$P_1^e(\omega) \leq P_2^e(\omega), \quad \text{para todo } \omega \in [0, \infty].$$

Entonces,

$$P(s) = P^{par}(s) + P^{impar}(s)$$

es estable para cada polinomio $P(s)$ con parte par $P^{par}(s)$ satisfaciendo,

$$P_1^e(\omega) \leq P^e(\omega) \leq P_2^e(\omega), \quad \text{para todo } \omega \in [0, \infty].$$

2.4- Estabilidad en polinomios con coeficientes ajustables.

Para el análisis de la estabilidad en polinomios con coeficientes ajustables son conocidos los algoritmos Routh [2][3] y Jury [10] para la Hurwitz y Schur-estabilidad respectivamente, y han sido demostrados basados en el Teorema de Cruce de Fronteras por Chapellat, Mansour, y Bhattacharyya [4]. En este epígrafe se mostrará una variante algorítmica con mejoras tanto desde el punto de vista computacional como teórico. Para ello se enfrentará un desarrollo teórico que permita la obtención de procedimientos capaces de superar estos algoritmos en algunos aspectos.

2.4.1- Variante para la Hurwitz-estabilidad en polinomios con coeficientes reales ajustables.

Sea $P(s)$ un polinomio real de grado n positivo dado en (1.0.2), y se asume que todos los coeficientes de $P(s)$ son positivos.

Recordando que $P(s)$ puede ser descompuesto en dos partes una par y otra impar, como se muestra a continuación.

$$P(s) = P^{par}(s) + P^{impar}(s).$$

Ahora, se define un polinomio $Q(s)$ de grado $n - 1$ por,

$$\text{Si } n = 2m: \quad Q(s) = \left[P^{par}(s) - \frac{P_{2m}}{P_{2m-1}} s P^{impar}(s) \right] + P^{impar}(s),$$

$$\text{Si } n = 2m + 1: \quad Q(s) = \left[P^{impar}(s) - \frac{P_{2m+1}}{P_{2m}} s P^{par}(s) \right] + P^{par}(s),$$

se puede definir de forma general, con $\mu = \frac{p_n}{p_{n-1}}$, de la forma siguiente,

$$Q(s) = p_{n-1}s^{n-1} + (p_{n-2} - \mu p_{n-3})s^{n-2} + p_{n-3}s^{n-3} + (p_{n-4} - \mu p_{n-5})s^{n-4} + \dots \quad (2.4.1)$$

De ello se obtiene el siguiente resultado clave para la reducción del grado.

Lema 2.4.1. Si $P(s)$ tiene todos sus coeficientes positivos,

$$P(s) \text{ es estable} \Leftrightarrow Q(s) \text{ es estable.}$$

Demostración. Asumiendo, por ejemplo que $n = 2m$, y usando el Teorema 2.1.1 (Teorema de Hermite-Biehler) se tiene,

(a) Se asume que $P(s) = p_0 + \dots + p_{2m}s^{2m}$ y por consiguiente satisface el teorema de interrelación. Sea,

$$0 < \omega_{e,1} < \omega_{0,1} < \omega_{e,2} < \omega_{0,2} < \dots < \omega_{e,m-1} < \omega_{0,m-1} < \omega_{e,m},$$

el entrelazamiento de las raíces de $P^e(\omega)$ y $P^0(\omega)$. Se puede verificar fácilmente que $Q^e(\omega)$ y $Q^0(\omega)$ vienen dados por,

$$Q^e(\omega) = P^e(\omega) + \mu\omega^2 P^0(\omega), \quad \mu = \frac{p_{2m}}{p_{2m-1}},$$

$$Q^0(\omega) = P^0(\omega).$$

Dado esto se puede concluir que $Q^0(\omega)$ tiene el número requerido de raíces positivas, particularmente $m - 1$ raíces de $P^0(\omega)$:

$$\omega_{0,1}, \omega_{0,2}, \dots, \omega_{0,m-1}.$$

De $Q^e(\omega)$, se puede deducir que,

$$\begin{aligned} Q^e(0) &= P^e(0) > 0, \\ Q^e(\omega_{0,1}) &= P^e(\omega_{0,1}) < 0, \\ &\vdots \\ Q^e(\omega_{0,m-2}) &= P^e(\omega_{0,m-2}), \text{ tiene el signo de } (-1)^{m-2}, \\ Q^e(\omega_{0,m-1}) &= P^e(\omega_{0,m-1}), \text{ tiene el signo de } (-1)^{m-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se está listo para establecer que $Q^e(\omega)$ tiene $m-1$ raíces positivas $\omega'_{e,1}, \omega'_{e,2}, \dots, \omega'_{e,m-1}$, que se entrelazan con las raíces de $Q^0(\omega)$. Dado que además $Q^e(\omega)$ es de grado $m-1$ en ω^2 , éstas son las únicas raíces positivas que puede tener. Finalmente, se ha visto que el signo de $Q^e(\omega)$ en la última raíz $\omega_{0,m-1}$ de $Q^0(\omega)$ es el de $(-1)^{m-1}$. Pero el coeficiente más alto de $Q^e(\omega)$ es nada más que,

$$q_{2m-2}(-1)^{m-1}.$$

De esto q_{2m-2} debe ser estrictamente positivo, como $q_{2m-1} = p_{2m-1}$, por otra parte $Q^e(\omega)$ tendrían un cambio de signo de nuevo entre $\omega_{0,m-1}$ y $+\infty$, que produciría la contradicción de $Q^e(\omega)$ que tiene m raíces positivas (mientras es un polinomio de grado $m-1$ en ω^2). Por lo tanto $Q(s)$ satisface la propiedad de interrelación y es estable si $P(s)$ lo es.

(b) A la inversa se asume que $Q(s)$ es estable. Se escribe,

$$P(s) = [Q^{par}(s) + \mu s Q^{impar}(s)] + Q^{impar}(s), \quad \mu = \frac{P_{2m}}{P_{2m-1}}.$$

Por la misma razón que en (a) se puede ver que $P^0(\omega)$ ya tiene el número requerido de $m-1$ raíces positivas, y que $P^e(\omega)$ ya tiene $m-1$ en el intervalo $(0, \omega_{0,m-1})$ que se entrelazan con las raíces de $P^0(\omega)$. Además el signo de $P^e(\omega)$ en $\omega_{0,m-1}$ es el mismo que $(-1)^{m-1}$, mientras que el término $p_{2m}s^{2m}$ en $P(s)$ genera el signo de $P^e(\omega)$ en $+\infty$ que es $(-1)^m$. Así $P^e(\omega)$ tiene una raíz m -ésima positiva,

$$\omega_{e,m} > \omega_{0,m-1},$$

tal que $P(s)$ satisface la propiedad de interrelación y es por consiguiente estable. ■

El lema anterior demuestra que la estabilidad de un polinomio $P(s)$ puede ser verificada mediante la reducción sucesiva del grado por tanto se está en condiciones de elaborar un algoritmo para verificar la estabilidad.

Algoritmo 2.4.1.

- 1) Se fija $P^{(0)}(s) = P(s)$,
- 2) Se verifica que todos los coeficientes de $P^{(i)}(s)$ son positivos,
- 3) Se construye $P^{(i+1)}(s) = Q(s)$ acorde a (2.4.1),
- 4) Se regresa a 2) hasta que 2) sea violado ($P(s)$ no es Hurwitz) o hasta alcanzar $P^{(n-2)}(s)$ (el cual es de grado 2) en este caso la condición 2) es también suficiente ($P(s)$ es Hurwitz).

Se puede verificar que este procedimiento es similar a la prueba de Routh [3] que genera la tabla de Routh. La prueba también muestra una propiedad conocida como lo es la de que para un polinomio estable no sólo la primera columna de la tabla entera de Routh debe consistir en números positivos. Sin embargo el procedimiento descrito aquí no permite contar los ceros estables e inestables del polinomio como puede hacerse con el Teorema de Routh, aunque puede verificarse sin tanto costo computacional la estabilidad. Seguidamente mediante un ejemplo se dará una comparación entre ambos algoritmos.

Ejemplo 2.4.1. Considerando el polinomio real de grado 4,

$$P(s) = s^4 + as^3 + bs^2 + cs + d .$$

Siguiendo el algoritmo descrito anteriormente se forman los polinomios,

$$\mu = \frac{1}{a}, \text{ y } P^{(1)}(s) = as^3 + \left(b - \frac{c}{a}\right)s^2 + cs + d ,$$

y entonces,

$$\mu = \frac{a^2}{ab - c}, \text{ y } P^{(s)}(s) = \left(b - \frac{c}{a}\right)s^2 + \left(c - \frac{a^2d}{ab - c}\right)s + d .$$

Observando que en cada caso sólo la parte par o impar del polinomio es modificada, se necesita verificar la positividad del siguiente conjunto de coeficientes,

$$\begin{bmatrix} 1 & b & d \\ a & c & \\ b - \frac{c}{a} & d & \\ c - \frac{a^2d}{ab - c} & & \end{bmatrix}$$

Pero esto es justamente la tabla de Routh para este polinomio.

Se nota que un lema similar puede ser derivado si se asume que todos los coeficientes de $P(s)$ positivos son remplazados por la asunción de que sólo los dos coeficientes de mayor grado p_{n-1} y p_n son positivos. El algoritmo correspondiente llevaría entonces exactamente a verificar que la primera columna de la tabla de Routh es positiva. Sin embargo desde que el algoritmo requiere que la tabla entera se construya, es más eficiente verificar que cada nuevo coeficiente es positivo.

2.4.2- Variante para la Hurwitz-estabilidad en polinomios con coeficientes complejos ajustables.

Un algoritmo similar puede ser derivado para chequear la estabilidad según Hurwitz para polinomios complejos [2]. La demostración es muy similar a la del caso real por lo que es omitida. Seguidamente se pasará a dar una descripción precisa del algoritmo.

Sea $P(s)$ un polinomio complejo de grado n dado en (1.0.3), donde,

$$T(s) = \frac{1}{a_n + jb_n} P(s).$$

Así $T(s)$ puede ser escrito como,

$$T(s) = (c_0 + jd_0) + (c_1 + jd_1)s + \cdots + (c_{n-1} + jd_{n-1})s^{n-1} + s^n,$$

y se puede notar que,

$$c_{n-1} = \frac{a_{n-1}a_n + b_{n-1}b_n}{a_n^2 + b_n^2}.$$

Se asumirá que $c_{n-1} > 0$, lo cual es una condición necesaria para que $P(s)$ sea de Hurwitz. Como es usual se escribe, $T(s) = T_R(s) + T_I(s)$, donde,

$$T_R(s) = c_0 + jd_1s + c_2s^2 + jd_3s^3 + \dots,$$

$$T_I(s) = jd_0 + c_1s + jd_2s^2 + c_3s^3 + \dots.$$

Ahora se define el polinomio $Q(s)$ de grado $m-1$ por,

$$\text{Si } n = 2m: \quad Q(s) = \left[T_R(s) - \frac{1}{c_{2m-1}} s T_I(s) \right] + T_I(s),$$

$$\text{Si } n = 2m + 1: \quad Q(s) = \left[T_I(s) - \frac{1}{c_{2m}} s T_R(s) \right] + T_R(s),$$

esto es en general con $\mu = \frac{1}{c_{n-1}} a$,

$$Q(s) = [c_{n-1} + j(d_{n-1} - \mu d_{n-2})]s^{n-1} + [(c_{n-2} - \mu c_{n-3}) + jd_{n-2}]s^{n-2}$$

$$+ [c_{n-3} + j(d_{n-3} - \mu d_{n-4})]s^{n-3} + \dots.$$

Ahora es exactamente como para el caso real, por lo que el siguiente lema puede ser demostrado sin dificultad.

Lema 2.4.2. Si $P(s)$ satisface $a_{n-1}a_n + b_{n-1}b_n > 0$, entonces,

$$P(s) \text{ es Hurwitz-estable} \Leftrightarrow Q(s) \text{ es Hurwitz-estable.}$$

Se está en condiciones de expresar esta idea de forma algorítmica.

Algoritmo 2.4.2.

- 1) Se fija $P^{(0)}(s) = P(s)$,
- 2) Se verifica que los últimos dos coeficientes de $P^{(i)}(s)$ satisfacen $a_{n-1}^{(i)}a_n^{(i)} + b_{n-1}^{(i)}b_n^{(i)} > 0$,
- 3) Se construye $T^{(i)}(s) = \frac{1}{a_n^{(i)} + jb_n^{(i)}} P^{(i)}(s)$,
- 4) Se construye $P^{(i+1)}(s) = Q(s)$ como anteriormente,
- 5) Se vuelve al paso 2) hasta que se encuentre alguna violación en 2) ($P(s)$ no es Hurwitz) o hasta que se alcance $P^{(n-1)}(s)$ (que es de grado 1) en cuyo caso la condición 2) es suficiente ($P(s)$ es Hurwitz).

2.4.3- Variante para la Schur-estabilidad en polinomios con coeficientes ajustables.

Se dará aquí un desarrollo general para polinomios complejos de una variante para el algoritmo de Jury, lo que claramente es aplicado para el caso real, el algoritmo de Jury puede ser visto en [15]. Se tiene, un polinomio de grado n dado en (1.0.4), se dará ahora una simple condición necesaria.

Propiedad 2.4.1. Una condición necesaria para que $P(z)$ sea un polinomio de Schur es que,

$$|p_n| > |p_0|.$$

Ciertamente si $P(z)$ tienen todas sus raíces z_1, \dots, z_n en el interior del círculo unitario entonces el producto de sus raíces viene dado por,

$$(-1)^n \prod_{i=1}^n z_i = \frac{p_0}{p_n},$$

por lo tanto,

$$\left| \frac{p_0}{p_n} \right| = \prod_{i=1}^n |z_i|.$$

Ahora se considera el polinomio $P(z)$ de grado n ,

$$P(z) = p_0 + p_1 z + \cdots + p_n z^n.$$

Se denota con \bar{z} el conjugado de z y se define,

$$Q(z) = z^n \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \bar{p}_0 z^n + \bar{p}_1 z^{n-1} + \cdots + \bar{p}_{n-1} z + \bar{p}_n,$$

$$R(z) = \frac{1}{z} \left(P(z) - \frac{p_0}{\bar{p}_n} Q(z) \right).$$

Es fácil ver que $R(z)$ es siempre de grado menor o igual $n-1$. Se define un lema de gran importancia pues permite una reducción de grado sin pérdida de la información sobre la estabilidad al igual que fue trabajado en el caso de la Hurwitz-estabilidad.

Lema 2.4.3. Si $P(z)$ satisface $|p_n| > |p_0|$, se tendrá la siguiente equivalencia,

$$P(z) \text{ es un polinomio de Schur} \Leftrightarrow R(z) \text{ es un polinomio de Schur.}$$

Demostración. Se observa primero algo obvio,

$$R(z) \text{ es un polinomio de Schur} \Leftrightarrow zR(z) \text{ es un polinomio de Schur.}$$

Se considera ahora la familia de polinomios,

$$P_\lambda(z) = P(z) - \lambda \frac{P_0}{\bar{P}_n} Q(z), \text{ donde } \lambda \in [0,1].$$

Se puede ver que $P_0(z) = P(z)$, y $P_1(z) = zR(z)$. Además el coeficiente de grado n de $P_\lambda(z)$ es,

$$p_n - \lambda \frac{|p_0|^2}{\bar{p}_n}$$

y satisface,

$$\left| p_n - \lambda \frac{|p_0|^2}{\bar{p}_n} \right| > |p_n| - \lambda \left| \frac{p_0}{p_n} \right| |p_0| > |p_n| - |p_0| > 0,$$

para que $P_\lambda(z)$ tenga restos fijos de grado n .

Se asume en busca de una contradicción que uno de los dos polinomios $P_0(z)$ o $P_1(z)$ es estable mientras que el otro no lo es. Entonces por el Teorema 1.2.4 (Teorema de Cruce de Fronteras) se concluye que podría existir un λ en $[0,1]$, tal que $P_\lambda(z)$ tiene una raíz en el círculo unitario en el punto $z_0 = e^{j\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$, o sea,

$$P_\lambda(z_0) = P(z_0) - \lambda \frac{P_0}{\bar{P}_n} z_0^n \overline{P\left[\frac{1}{\bar{z}_0}\right]} = 0.$$

Pero para cualquier número complejo z en el círculo unitario, $\bar{z} = \frac{1}{z}$, y además implica que,

$$P_\lambda(z_0) = P(z_0) - \lambda \frac{p_0}{\bar{p}_n} z_0^n \overline{P(z_0)} = 0. \quad (2.4.1)$$

Tomando el complejo conjugado de esta última expresión se concluye que,

$$\overline{P(z_0)} - \lambda \frac{\bar{p}_0}{p_n} \bar{z}_0^n P(z_0) = 0. \quad (2.4.2)$$

Además por (2.4.1) y por (2.4.2) y después usando el hecho de que $|z_0| = 1$,

$$P(z_0) \left(1 - \lambda^2 \frac{|p_0|^2}{|p_n|^2} \right) = 0. \quad (2.4.3)$$

Asumiendo $\lambda^2 \frac{|p_0|^2}{|p_n|^2} < 1$, además (2.4.3) implica que,

$$P(z_0) = 0. \quad (2.4.4)$$

Pero esto implica que,

$$\overline{P(z_0)} = \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}_0}\right)} = 0,$$

y por consiguiente,

$$R(z_0) = 0. \quad (2.4.5)$$

Por (2.4.4) y (2.4.5) se contradice la suposición de que uno de los dos polinomios $P(z)$ y $zR(z)$ es estable, y con esto se concluye la demostración del lema. ■

El lema anterior conduce al siguiente procedimiento para reducir el grado y probar la estabilidad. Seguidamente se pasa a mostrar el algoritmo correspondiente.

Algoritmo 2.4.3.

1) Sea $P^0(z) = P(z)$,

2) Comprobar $|p_n^{(i)}| > |p_0^{(i)}|$,

3) Construir $P^{(i+1)}(z) = \frac{1}{z} \left[P^{(i)}(z) - \frac{P_0^{(i)}}{\overline{P_n^{(i)}}} z^n \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \right]$,

4) Volver a 2) hasta que 2) sea violado ($P(z)$ no es Schur) o hasta alcanzar $P^{(n-1)}(z)$ (cuyo grado es 1), en cuyo caso la condición 2) es además suficiente y $P(z)$ es un polinomio de Schur.

Se puede verificar que este procedimiento es superior al Jury [15] para el análisis de la Schur-estabilidad, ello se ilustra con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4.2. Considerando un polinomio real de grado 3, en función de z ,

$$P(z) = z^3 + az^2 + bz + c.$$

Acorde con el algoritmo, se forma el siguiente polinomio,

$$\begin{aligned} P^{(1)}(z) &= \frac{1}{z} \left[P(z) - cz^3 \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \right] \\ &= (1 - c^2)z^2 + (a - bc)z + b - ac, \end{aligned}$$

y entonces,

$$\begin{aligned}
P^2(z) &= \frac{1}{z} \left[P^{(1)}(z) - \left(\frac{b-ac}{1-c^2} \right) z^2 \overline{P^{(1)}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \right] \\
&= \frac{(1-c^2)^2 - (b-ac)^2}{1-c^2} z + (a-bc) \left(1 - \frac{b-ac}{1-c^2} \right).
\end{aligned}$$

Por otra parte, la tabla del procedimiento de Jury viene dada por,

$$\begin{bmatrix}
c & b & a & 1 \\
1 & a & b & c \\
c^2 - 1 & cb - a & ca - b & \\
ca - b & cb - a & c^2 - 1 & \\
(c^2 - 1)^2 - (ca - b)^2 & (cb - a)[(c^2 - 1) - (ca - b)] & &
\end{bmatrix}$$

Aquí, las primeras dos líneas de la tabla corresponden a los coeficientes de $P(z)$, la tercera y cuarta líneas los de $P^{(1)}(z)$ y la última a $P^{(2)}(z)$, se puede ver que el procedimiento llevado a cabo es similar al de Jury aunque con resultados algorítmicos superiores.

Capítulo 3: Estabilidad de polinomios con coeficientes dados por intervalos.

El fin debe justificar los medios.

Matthew Prior.

Se consagrará este capítulo principalmente a un resultado demostrado inicialmente en 1978 por V. L. Kharitonov [36] [38], relativo al análisis de la Hurwitz-estabilidad de una familia de intervalos de polinomios [34]. Este resultado es tan sorprendente y elegante que ha sido punto llamativo de un interés renovado en la actual Teoría de la Estabilidad. En las siguientes secciones se mostrará el Teorema de Kharitonov y variantes para su demostración haciendo uso de todos los elementos desarrollados en los capítulos precedentes; mostrando así la estabilidad de polinomios con coeficientes dados por intervalos como una consecuencia inmediata de la estabilidad para polinomios con coeficientes puntuales. Se enfatizará en un resultado fundamental de este trabajo como lo es el de que este teorema generaliza el Teorema de Interrelación o de Hermite-Biehler. Se estudiarán algunas propiedades de los polinomios de Kharitonov y por último se demostrará que el Teorema de Kharitonov no es válido para el análisis de la Schur-estabilidad [28] empleando para el análisis de la misma otros teoremas clásicos a modo de conclusión sobre este tópico [39][40].

3.1- Estabilidad de polinomios con coeficientes dados por intervalos.

Como se conoce un conjunto de polinomios es Hurwitz-estable si y sólo si cada elemento del conjunto es un polinomio de Hurwitz, pero evidentemente esto no servirá de mucho en la práctica, es necesario reducir a un número finito de casos los elementos a comprobar, tarea que a simple vista es

engorrosa, pero el Teorema de Kharitonov brinda una sorprendente reducción. Para facilitar la comprensión de este teorema se mostrará primero un análisis para polinomios con coeficientes reales dados por intervalos y después con más elementos conformados se enfrentará una generalización para coeficientes complejos dados por intervalos.

3.1.1- Teorema de Kharitonov para polinomios con coeficientes reales dados por intervalos.

La principal meta de este capítulo es mostrar el Teorema de Kharitonov como una generalización del Teorema de Hermite-Biehler y por lo tanto se desarrollará toda una teoría con ese objetivo. Se definirán algunos elementos útiles para nuestro posterior desarrollo.

Considerando el conjunto $\mathcal{I}(s)$ de polinomios de grado n de la forma,

$$\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \delta_2 s^2 + \delta_3 s^3 + \delta_4 s^4 + \dots + \delta_n s^n$$

donde los coeficientes se encuentran dentro del siguiente rango,

$$\delta_0 \in [x_0, y_0], \delta_1 \in [x_1, y_1], \dots, \delta_n \in [x_n, y_n].$$

Denotando el conjunto de estos intervalos como sigue,

$$\underline{\delta} = [\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n]$$

e identificando al polinomio $\delta(s)$ con el vector de coeficientes $\underline{\delta}$, se introduce el hiper-cubo,

$$\Delta = \{ \underline{\delta} : \underline{\delta} \in \mathbb{R}^{n+1}, x_i \leq \delta_i \leq y_i, i = 0, 1, \dots, n \} .$$

Se asume que el grado se mantiene invariante sobre la familia, o lo que es lo mismo $0 \notin [x_n, y_n]$ [26]. Tales conjuntos de polinomios son llamados familia de intervalos reales, lo que es una forma más relajada de referirse a $\mathcal{I}(s)$ como intervalo polinomial. Ahora se está en condiciones de plantear el Teorema de Kharitonov para intervalos de polinomios.

Teorema 3.1.1. (Teorema de Kharitonov).

Cada polinomio de la familia $\mathcal{I}(s)$ es Hurwitz si y sólo si los siguientes cuatro polinomios extremos son Hurwitz,

$$\begin{aligned}
 K^1(s) &= x_0 + x_1s + y_2s^2 + y_3s^3 + x_4s^4 + x_5s^5 + y_6s^6 + \dots, \\
 K^2(s) &= x_0 + y_1s + y_2s^2 + x_3s^3 + x_4s^4 + y_5s^5 + y_6s^6 + \dots, \\
 K^3(s) &= y_0 + x_1s + x_2s^2 + y_3s^3 + y_4s^4 + x_5s^5 + x_6s^6 + \dots, \\
 K^4(s) &= y_0 + y_1s + x_2s^2 + x_3s^3 + y_4s^4 + y_5s^5 + x_6s^6 + \dots.
 \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

El hiper-cubo Δ y los vértices que corresponden a los polinomios de Kharitonov se muestran en la Figura 3.1.1.

Para desarrollar una demostración del Teorema de Kharitonov mediante el Teorema de Hermite-Biehler se hará uso de dos lemas obtenidos y demostrados en el capítulo anterior. La demostración del teorema a sido enriquecida con variantes y reducciones desde su aparición, ahora se tomarán elementos de las más clásicas [22][25][26][30][33][34][44][47] y se conformará una demostración con los elementos tratados en los capítulos precedentes.

Los polinomios de Kharitonov señalados en (3.1.1) son construidos de dos partes pares diferentes $K_{\max}^{par}(s)$ y $K_{\min}^{par}(s)$ y de dos partes impares $K_{\max}^{impar}(s)$ y $K_{\min}^{impar}(s)$ definidas debajo.

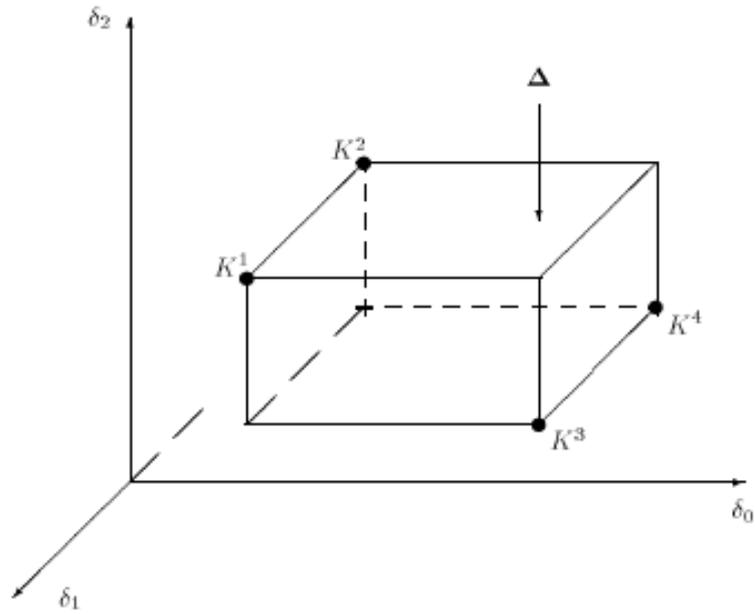


Figura 3.1.1. Hiper-cubo Δ y los cuatro vértices de Kharitonov.

Las partes pares son,

$$K_{\max}^{par}(s) = y_0 + x_2s^2 + y_4s^4 + x_6s^6 + y_8s^8 + \dots,$$

$$K_{\min}^{par}(s) = x_0 + y_2s^2 + x_4s^4 + y_6s^6 + x_8s^8 + \dots,$$

y las impares,

$$K_{\max}^{impar}(s) = y_1s + x_3s^3 + y_5s^5 + x_7s^7 + y_9s^9 + \dots,$$

$$K_{\min}^{impar}(s) = x_1s + y_3s^3 + x_5s^5 + y_7s^7 + x_9s^9 + \dots.$$

Ahora se pueden describir los polinomios de Kharitonov dados en (3.1.1) de la siguiente forma,

$$K^1(s) = K_{\min}^{par}(s) + K_{\min}^{impar}(s),$$

$$K^2(s) = K_{\min}^{par}(s) + K_{\max}^{impar}(s),$$

$$K^3(s) = K_{\max}^{par}(s) + K_{\min}^{impar}(s), \quad (3.1.2)$$

$$K^4(s) = K_{\max}^{par}(s) + K_{\max}^{impar}(s).$$

La motivación para los subíndices “*max*” y “*min*” es la siguiente. Sea $\delta(s)$ un polinomio arbitrario con sus coeficientes dentro del hiper-cubo Δ y sea $\delta^{par}(s)$ su parte par. Entonces,

$$K_{\max}^e(\omega) = y_0 - x_2\omega^2 + y_4\omega^4 - x_6\omega^6 + y_8\omega^8 + \dots,$$

$$\delta^e(\omega) = \delta_0 - \delta_2\omega^2 + \delta_4\omega^4 - \delta_6\omega^6 + \delta_8\omega^8 + \dots,$$

$$K_{\min}^e(\omega) = x_0 - y_2\omega^2 + x_4\omega^4 - y_6\omega^6 + x_8\omega^8 + \dots,$$

por lo que,

$$K_{\max}^e(\omega) - \delta^e(\omega) = (y_0 - \delta_0) + (\delta_2 - x_2)\omega^2 + (y_4 - \delta_4)\omega^4 + (\delta_6 - x_6)\omega^6 + \dots,$$

y,

$$\delta^e(\omega) - K_{\min}^e(\omega) = (\delta_0 - x_0) + (y_2 - \delta_2)\omega^2 + (\delta_4 - x_4)\omega^4 + (y_6 - \delta_6)\omega^6 + \dots.$$

Por consiguiente,

$$K_{\min}^e(\omega) \leq \delta^e(\omega) \leq K_{\max}^e(\omega), \quad \text{para todo } \omega \in [0, \infty] \quad (3.1.3)$$

Similarmenete, si $\delta^{impar}(s)$ denota la parte impar de $\delta(s)$ y,

$$\delta^{impar}(j\omega) = j\omega\delta^0(\omega)$$

se puede verificar que,

$$K_{\min}^0(\omega) \leq \delta^0(\omega) \leq K_{\max}^0(\omega), \quad \text{para todo } \omega \in [0, \infty]$$

En la Figura 3.1.2 se ilustran estos resultados.

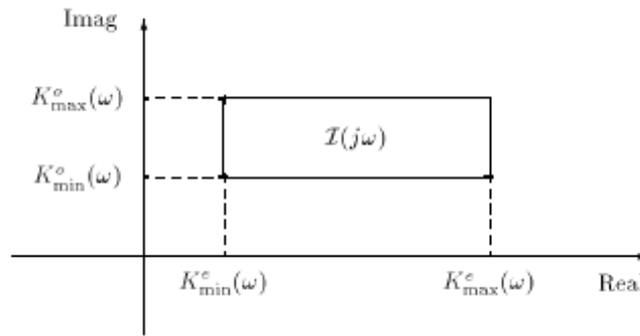


Figura 3.1.2. Rectángulo $\mathcal{I}(j\omega)$ paralelo al eje [33].

Ahora se esta en condiciones de pasar a demostrar el Teorema de Kharitonov.

Demostración. (Teorema de Kharitonov).

Al proceder con la demostración del Teorema de Kharitonov se nota que la condición necesaria es trivial dado que si todos los polinomios con coeficientes en el hiper-cubo Δ son estables, es claro que los polinomios de Kharitonov deben ser estables también ya que sus coeficientes están en Δ . Para la condición suficiente, se asume que los polinomios de Kharitonov son estables, y se tiene que $\delta(s) = \delta^{par}(s) + \delta^{impar}(s)$ es un polinomio arbitrario perteneciente a la familia $\mathcal{I}(s)$, con parte par $\delta^{par}(s)$ y parte impar $\delta^{impar}(s)$. Se concluye, por Lema 2.3.1. aplicado a los polinomios estables $K^3(s)$ y $K^4(s)$ en (3.1.2) que,

$$K_{\max}^{par}(s) + \delta^{impar}(s) \text{ es estable.}$$

Similarmente, por Lema 2.3.1. aplicado a los polinomios estables $K^1(s)$ y $K^2(s)$ en (3.1.2) se concluye que,

$$K_{\min}^{par}(s) + \delta^{impar}(s) \text{ es estable.}$$

Ahora, de (3.1.3) se tiene que aplicando el Lema 2.3.2 a dos polinomios estables,

$$K_{\max}^{par}(s) + \delta^{impar}(s) \quad \text{y} \quad K_{\min}^{par}(s) + \delta^{impar}(s)$$

se concluye que,

$$\delta^{par}(s) + \delta^{impar}(s) = \delta(s) \text{ es estable}$$

Puesto que $\delta(s)$ es un polinomio arbitrario de $\mathcal{I}(s)$ se puede llegar a la conclusión que la familia de polinomios $\mathcal{I}(s)$ es estable, con lo que queda probado el teorema. ■

Se puede notar que para coeficientes de orden superior se dan los polinomios de Kharitonov de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \hat{K}^1(s) &= x_n s^n + y_{n-1} s^{n-1} + y_{n-2} s^{n-2} + x_{n-3} s^{n-3} + x_{n-4} s^{n-4} + \dots, \\ \hat{K}^2(s) &= x_n s^n + x_{n-1} s^{n-1} + y_{n-2} s^{n-2} + y_{n-3} s^{n-3} + x_{n-4} s^{n-4} + \dots, \\ \hat{K}^3(s) &= y_n s^n + x_{n-1} s^{n-1} + x_{n-2} s^{n-2} + y_{n-3} s^{n-3} + y_{n-4} s^{n-4} + \dots, \\ \hat{K}^4(s) &= y_n s^n + y_{n-1} s^{n-1} + x_{n-2} s^{n-2} + x_{n-3} s^{n-3} + y_{n-4} s^{n-4} + \dots. \end{aligned}$$

Ahora se verá un ejemplo de gran sencillez para reafirmar todo lo anteriormente expuesto.

Ejemplo 3.1.1. Considere el problema de chequear la estabilidad del siguiente polinomio,

$$\delta(s) = \delta_4 s^4 + \delta_3 s^3 + \delta_2 s^2 + \delta_1 s + \delta_0$$

cuyos coeficientes están definidos en,

$$\delta_4 \in [x_4, y_4], \quad \delta_3 \in [x_3, y_3], \quad \delta_2 \in [x_2, y_2], \quad \delta_1 \in [x_1, y_1], \quad \delta_0 \in [x_0, y_0].$$

De donde la asociación de los polinomios par e impar de la prueba de Kharitonov son los siguientes,

$$\begin{aligned} K_{\min}^{par}(s) &= x_0 + y_2 s^2 + x_4 s^4, & K_{\max}^{par}(s) &= y_0 + x_2 s^2 + y_4 s^4, \\ K_{\min}^{impar}(s) &= x_1 s + y_3 s^3, & K_{\max}^{impar}(s) &= y_1 s + x_3 s^3. \end{aligned}$$

Quedando definidos los polinomios de Kharitonov como,

$$\begin{aligned} K^1(s) &= x_0 + x_1 s + y_2 s^2 + y_3 s^3 + x_4 s^4, & K^2(s) &= x_0 + y_1 s + y_2 s^2 + x_3 s^3 + x_4 s^4, \\ K^3(s) &= y_0 + x_1 s + x_2 s^2 + y_3 s^3 + y_4 s^4, & K^4(s) &= y_0 + y_1 s + x_2 s^2 + x_3 s^3 + y_4 s^4. \end{aligned}$$

El problema de chequear la estabilidad de la familia se reduce a chequear la Hurwitz-estabilidad en estos cuatro polinomios. Esto se reduce a chequear que los coeficientes tienen el mismo signo, y que se cumplen las siguientes desigualdades,

$$\begin{aligned} K^1(s) \quad \text{Hurwitz:} & \quad y_2 y_3 > x_1 x_4, & x_1 y_2 y_3 &> x_1^2 x_4 + y_3^2 x_0, \\ K^2(s) \quad \text{Hurwitz:} & \quad y_2 x_3 > y_1 x_4, & y_1 y_2 x_3 &> y_1^2 x_4 + x_3^2 x_0, \\ K^3(s) \quad \text{Hurwitz:} & \quad x_2 y_3 > x_1 y_4, & x_1 x_2 y_3 &> x_1^2 y_4 + y_3^2 y_0, \\ K^4(s) \quad \text{Hurwitz:} & \quad x_2 x_3 > y_1 y_4, & y_1 x_2 x_3 &> y_1^2 y_4 + x_3^2 y_0. \end{aligned}$$

Por lo que sin gran dificultad queda resuelto el problema, ahora se está en condiciones de pasar a ver el Teorema de Kharitonov para polinomios con coeficientes complejos dados por intervalos.

3.1.2- Teorema de Kharitonov para polinomios con coeficientes complejos dados por intervalos.

Hecho ya un análisis del Teorema de Kharitonov para polinomios con coeficientes reales se está en condiciones de generalizar algunas ideas.

Considerando el conjunto $\mathcal{I}^*(s)$ de todos los polinomios complejos [28] [33][41] de la siguiente forma,

$$\delta(s) = (\alpha_0 + j\beta_0) + (\alpha_1 + j\beta_1)s + \dots + (\alpha_n + j\beta_n)s^n$$

con,

$$\alpha_0 \in [x_0, y_0], \alpha_1 \in [x_1, y_1], \dots, \alpha_n \in [x_n, y_n]$$

y,

$$\beta_0 \in [u_0, v_0], \beta_1 \in [u_1, v_1], \dots, \beta_n \in [u_n, v_n].$$

Esta familia de intervalos complejos de polinomios de grado n los cuales incluyen la familia de intervalos reales estudiados es un caso especial de la misma. Esto naturalmente es considerado la generalización del Teorema de Kharitonov para el caso de una familia real. Se asumirá que el grado se mantiene invariante, introduciendo dos conjuntos de polinomios siguientes,

$$\begin{aligned} K_1^+(s) &= (x_0 + ju_0) + (x_1 + jv_1)s + (y_2 + jv_2)s^2 + (y_3 + ju_3)s^3 \\ &\quad + (x_4 + ju_4)s^4 + (x_5 + jv_5)s^5 + \dots, \\ K_2^+(s) &= (x_0 + jv_0) + (y_1 + jv_1)s + (y_2 + ju_2)s^2 + (x_3 + ju_3)s^3 \\ &\quad + (x_4 + jv_4)s^4 + (y_5 + jv_5)s^5 + \dots, \\ K_3^+(s) &= (y_0 + ju_0) + (x_1 + ju_1)s + (x_2 + jv_2)s^2 + (y_3 + jv_3)s^3 \quad (3.1.4) \\ &\quad + (y_4 + ju_4)s^4 + (x_5 + ju_5)s^5 + \dots, \\ K_4^+(s) &= (y_0 + jv_0) + (y_1 + ju_1)s + (x_2 + ju_2)s^2 + (x_3 + jv_3)s^3 \\ &\quad + (y_4 + jv_4)s^4 + (y_5 + ju_5)s^5 + \dots. \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}
K_1^-(s) &= (x_0 + ju_0) + (y_1 + ju_1)s + (y_2 + jv_2)s^2 + (x_3 + jv_3)s^3 \\
&\quad + (x_4 + ju_4)s^4 + (y_5 + ju_5)s^5 + \dots, \\
K_2^-(s) &= (x_0 + jv_0) + (x_1 + ju_1)s + (y_2 + ju_2)s^2 + (y_3 + jv_3)s^3 \\
&\quad + (x_4 + jv_4)s^4 + (x_5 + ju_5)s^5 + \dots, \\
K_3^-(s) &= (y_0 + ju_0) + (y_1 + jv_1)s + (x_2 + jv_2)s^2 + (x_3 + ju_3)s^3 \quad (3.1.5) \\
&\quad + (y_4 + ju_4)s^4 + (y_5 + jv_5)s^5 + \dots, \\
K_4^-(s) &= (y_0 + jv_0) + (x_1 + jv_1)s + (x_2 + ju_2)s^2 + (y_3 + ju_3)s^3 \\
&\quad + (y_4 + jv_4)s^4 + (x_5 + jv_5)s^5 + \dots.
\end{aligned}$$

Teorema 3.1.2. La familia de polinomios $\mathcal{I}^*(s)$ es Hurwitz si y sólo si los ocho polinomios de Kharitonov $K_1^+(s)$, $K_2^+(s)$, $K_3^+(s)$, $K_4^+(s)$, $K_1^-(s)$, $K_2^-(s)$, $K_3^-(s)$, $K_4^-(s)$, son todos de Hurwitz.

Demostración. La condición necesaria es obvia porque los ocho polinomios de Kharitonov están en $\mathcal{I}^*(s)$. Para la prueba de la condición suficiente hay que prestar atención al Teorema de Hermite-Biehler para polinomios complejos.

Se puede observar que los polinomios de Kharitonov (3.1.4) y (3.1.5) son compuestos de los siguientes polinomios extremos.

Para los polinomios de Kharitonov “positivos” se define,

$$\begin{aligned}
R_{\max}^+(s) &= y_0 + ju_1s + x_2s^2 + jv_3s^3 + y_4s^4 + \dots \\
R_{\min}^+(s) &= x_0 + jv_1s + y_2s^2 + ju_3s^3 + x_4s^4 + \dots \\
I_{\max}^+(s) &= jv_0 + y_1s + ju_2s^2 + x_3s^3 + jv_4s^4 + \dots \\
I_{\min}^+(s) &= ju_0 + x_1s + jv_2s^2 + y_3s^3 + ju_4s^4 + \dots
\end{aligned}$$

por tanto,

$$K_1^+(s) = R_{\min}^+(s) + I_{\min}^+(s)$$

$$K_2^+(s) = R_{\min}^+(s) + I_{\max}^+(s)$$

$$K_3^+(s) = R_{\max}^+(s) + I_{\min}^+(s)$$

$$K_4^+(s) = R_{\max}^+(s) + I_{\max}^+(s).$$

Para los polinomios “negativos” se tienen,

$$R_{\max}^-(s) = y_0 + jv_1s + x_2s^2 + ju_3s^3 + y_4s^4 + \dots$$

$$R_{\min}^-(s) = x_0 + ju_1s + y_2s^2 + jv_3s^3 + x_4s^4 + \dots$$

$$I_{\max}^-(s) = jv_0 + x_1s + ju_2s^2 + y_3s^3 + jv_4s^4 + \dots$$

$$I_{\min}^-(s) = ju_0 + y_1s + jv_2s^2 + x_3s^3 + ju_4s^4 + \dots$$

y por tanto,

$$K_1^-(s) = R_{\min}^-(s) + I_{\min}^-(s)$$

$$K_2^-(s) = R_{\min}^-(s) + I_{\max}^-(s)$$

$$K_3^-(s) = R_{\max}^-(s) + I_{\min}^-(s)$$

$$K_4^-(s) = R_{\max}^-(s) + I_{\max}^-(s).$$

$R_{\max}^\pm(j\omega)$ y $R_{\min}^\pm(j\omega)$ son reales y $I_{\max}^\pm(j\omega)$ y $I_{\min}^\pm(s)$ son imaginarios. Donde $\text{Re}[\delta(j\omega)] = \delta^r(\omega)$ y $\text{Im}[\delta(j\omega)] = \delta^i(\omega)$ denotan la parte real e imaginaria de $\delta(s)$ evaluado en $s = j\omega$. Se tiene entonces,

$$\delta^r(\omega) = \alpha_0 - \beta_1\omega - \alpha_2\omega^2 + \beta_3\omega^3 + \dots,$$

$$\delta^i(\omega) = \beta_0 + \alpha_1\omega - \beta_2\omega^2 - \alpha_3\omega^3 + \dots.$$

Es fácil verificar que,

$$\begin{cases} R_{\min}^+(j\omega) \leq \delta^r(\omega) \leq R_{\max}^+(j\omega) \\ \frac{I_{\min}^+(j\omega)}{j} \leq \delta^i(\omega) \leq \frac{I_{\max}^+(j\omega)}{j} \end{cases} \quad \omega \in [0, \infty] \quad (3.1.6)$$

$$\begin{cases} R_{\min}^-(j\omega) \leq \delta^r(\omega) \leq R_{\max}^-(j\omega) \\ \frac{I_{\min}^-(j\omega)}{j} \leq \delta^i(\omega) \leq \frac{I_{\max}^-(j\omega)}{j} \end{cases} \quad \omega \in [0, -\infty] \quad (3.1.7)$$

La estabilidad de los cuatro polinomios positivos de Kharitonov garantizan la interrelación en la franja real delimitada por $R_{\max}^+(j\omega)$ y $R_{\min}^+(j\omega)$ con la franja imaginaria delimitada por $I_{\max}^+(j\omega)$ y $I_{\min}^+(j\omega)$ para $\omega \geq 0$. La relación (3.1.6) garantiza que la parte real e imaginaria de un polinomio arbitrario en $\mathcal{I}^*(s)$ están forzadas a entrelazarse para $\omega \geq 0$. Análogamente, usando (3.1.7) y los polinomios negativos de Kharitonov entrelazados para $\omega \leq 0$. Ahora por el Teorema de Hermite-Biehler para polinomios complejos $\delta(s)$ es Hurwitz. Dado que $\delta(s)$ es arbitrario, cualquier polinomio de $\mathcal{I}^*(s)$ es Hurwitz. ■

En el caso complejo la parte real e imaginaria de $\delta(j\omega)$ son polinomios en ω y no en ω^2 , por lo que es necesario ver la interrelación de la raíces en el eje imaginario completo y no sólo en la parte positiva. Esta es la razón por la que hay que chequear ocho en vez de cuatro polinomios para el caso complejo.

3.2- Generalización del Teorema de Hermite-Biehler.

En el epígrafe anterior se usó el Teorema de Hermite-Biehler en conjunto con importantes resultados obtenidos en el capítulo anterior para demostrar el Teorema de Kharitonov, mostrando así un orden lógico de ideas, en esta sección se interpretará el Teorema de Kharitonov en términos de las propiedades de interrelación o Teorema de Hermite-Biehler mostrándolo

como una generalización del mismo. En el Capítulo 2 se pudo ver que la Hurwitz-estabilidad para un polinomio simple,

$$\delta(s) = \delta^{par}(s) + \delta^{impar}(s)$$

es equivalente a la propiedad de interrelación de,

$$\begin{aligned} \delta^e(\omega) &= \delta^{par}(j\omega), \text{ y} \\ \delta^o(\omega) &= \frac{\delta^{par}(j\omega)}{j\omega}. \end{aligned}$$

Considerando la Hurwitz-estabilidad de una familia de intervalos $\mathcal{I}(s)$ se observa que la familia es estable si y sólo si cada elemento satisface la propiedad de interrelación. En vista de que los cuatro polinomios de Kharitonov deben cumplir con la propiedad de interrelación, dicha propiedad debe cumplirse por cualquier miembro de la familia. Este punto de vista es tratado en la siguiente variante del Teorema de Kharitonov. Sea, $\omega_{e_i}^{\max}(\omega_{e_i}^{\min})$ denota las raíces positivas de $K_{\max}^e(\omega)(K_{\min}^e(\omega))$ y $\omega_{0_i}^{\max}(\omega_{0_i}^{\min})$ denota las raíces positivas de $K_{\max}^o(\omega)(K_{\min}^o(\omega))$.

Se enunciará un teorema que mostrará la estabilidad entre intervalos de polinomios como una generalización de la estabilidad de polinomios el cual no se demostrará por ser una consecuencia evidente. De todo lo anteriormente expuesto.

Teorema 3.2.1.

La familia $\mathcal{I}(s)$ contiene sólo polinomios estables si y sólo si,

- 1) Los polinomios $K_{\max}^e(\omega)$, $K_{\min}^e(\omega)$, $K_{\max}^o(\omega)$, $K_{\min}^o(\omega)$ tiene sólo raíces reales y el conjunto de raíces positivas entrelazadas es el siguiente,

$$0 < \omega_{e_1}^{\min} < \omega_{e_1}^{\max} < \omega_{0_1}^{\min} < \omega_{0_1}^{\max} < \omega_{e_2}^{\min} < \omega_{e_2}^{\max} < \omega_{0_2}^{\min} < \omega_{0_2}^{\max} < \dots,$$

2) $K_{\max}^e(0)$, $K_{\min}^e(0)$, $K_{\max}^o(0)$, $K_{\min}^o(0)$ no son ceros y tienen el mismo signo.

Este teorema es ilustrado en la Figura 3.2.1, la cual muestra el entrelazamiento de las franjas impar y par implicando el entrelazamiento de las partes par e impar de cada polinomio en la familia de intervalos. Ahora se puede ilustrar la propiedad de interrelación de intervalos de polinomios [29] [42] con un ejemplo.

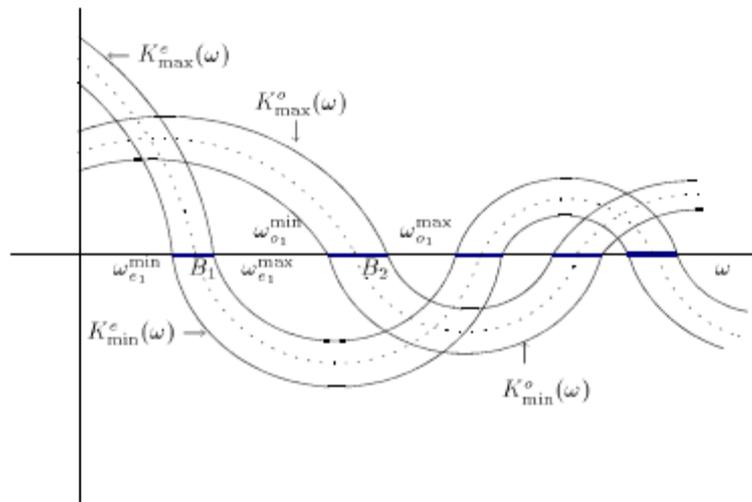


Figura 3.2.1. Entrelazamiento de las franjas par e impar.

Ejemplo 3.2.1. Considerando la familia de intervalos,

$$\delta(s) = s^7 + \delta_6 s^6 + \delta_5 s^5 + \delta_4 s^4 + \delta_3 s^3 + \delta_2 s^2 + \delta_1 s + \delta_0,$$

donde,

$$\delta_6 \in [9, 9.5], \quad \delta_5 \in [31, 31.5], \quad \delta_4 \in [71, 71.5]$$

$$\delta_3 \in [111, 111.5], \quad \delta_2 \in [109, 109.5], \quad \delta_1 \in [76, 76.5]$$

$$\delta_0 \in [12, 12.5]$$

entonces,

$$K_{\max}^e(\omega) = -9\omega^6 + 71.5\omega^4 - 109\omega^2 + 12.5$$

$$K_{\min}^e(\omega) = -9.5\omega^6 + 71\omega^4 - 109.5\omega^2 + 12$$

$$K_{\max}^0(\omega) = -\omega^6 + 31.5\omega^4 - 111\omega^2 + 76.5$$

$$K_{\min}^0(\omega) = -\omega^6 + 31\omega^4 - 111.5\omega^2 + 76$$

Se puede verificar la propiedad de interrelación de estos polinomios (ver Figura 3.2.2).

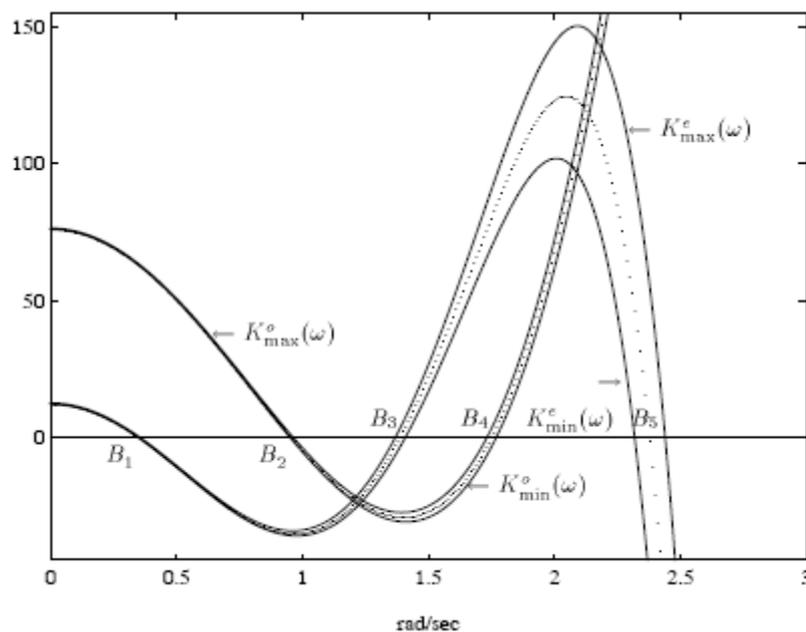


Figura 3.2.2. Propiedad de entrelazamiento de un intervalo de polinomio.

La Figura 3.2.2 muestra como todos los polinomios con partes par limitadas por $K_{\max}^e(\omega)$, $K_{\min}^e(\omega)$ y partes impar limitadas por $K_{\max}^0(\omega)$, $K_{\min}^0(\omega)$ en el eje imaginario satisfaciendo la propiedad de interrelación donde los polinomios de Kharitonov son estables. La Figura 3.2.2 además muestra que la propiedad de entrelazamiento para un polinomio simple estable correspondiente a un punto δ como coeficiente del espacio generalizado al hiper-cubo Δ de polinomios estables con el requerimiento de “entrelazado” de las franjas par e impar. Esta interpretación es útil [39] [46], por ejemplo puede usarse para mostrar que para los polinomios de orden menor que

seis, menos que cuatro polinomios de Kharitonov son necesarios para ser probar la estabilidad.

Se puede enriquecer mucho estas ideas anteriores haciendo un estudio de las propiedades de los polinomios de Kharitonov lo que puede aportar mucho desde el punto de vista teórico.

3.3- Interpretación del conjunto imagen.

Es importante en este punto extraer la mayor cantidad de resultados posibles respecto a los aspectos tratados, para ello se mostrará una instructiva interpretación del Teorema de Kharitonov [35] [39] [43] en términos de la imagen en el plano complejo del conjunto de polinomios $\mathcal{I}(s)$ [21], evaluados en $s = j\omega$ para cada $\omega \in [0, \infty]$. Se puede denotar con $\mathcal{I}(j\omega)$ el conjunto de números complejos $\delta(j\omega)$ de la siguiente forma,

$$\mathcal{I}(j\omega) = \{\delta(j\omega) : \delta \in \Delta\}$$

Se sabe que por,

$$\begin{aligned} K_{\min}^e(\omega) \leq \delta^e(\omega) \leq K_{\max}^e(\omega), & \quad \text{para todo } \omega \in [0, \infty] \\ K_{\min}^0(\omega) \leq \delta^0(\omega) \leq K_{\max}^0(\omega), & \quad \text{para todo } \omega \in [0, \infty] \end{aligned}$$

$\mathcal{I}(j\omega)$ es un rectángulo en el plano complejo con las esquinas $K_1(j\omega)$, $K_2(j\omega)$, $K_3(j\omega)$, $K_4(j\omega)$ correspondiente a los polinomios de Kharitonov evaluados en $s = j\omega$. Esto se muestra en la Figura 3.3.1. Como ω corre desde 0 a ∞ el rectángulo $\mathcal{I}(j\omega)$ varía en tamaño y localización pero siempre se mantiene paralelo a los ejes real e imaginario del plano complejo. Se ilustrará esto usando un ejemplo numérico.

Ejemplo 3.3.1. Considerando el intervalo de polinomio del Ejemplo 3.2.1. El conjunto imagen de esta familia es calculado por varias frecuencias. De estas frecuencias dependen los rectángulos que se muestran en la Figura 3.3.1.

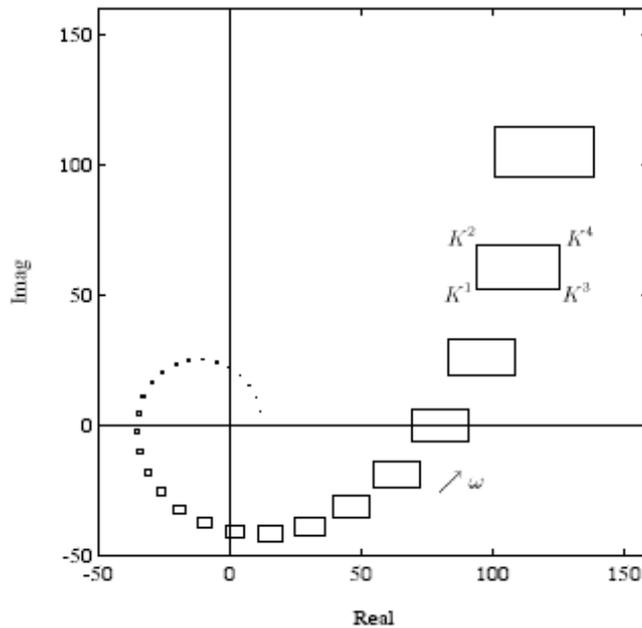


Figura 3.3.1. Conjunto imagen de intervalos de polinomio.

3.3.1.- Reducción del conjunto imagen.

Una noble y sencilla reducción se puede obtener dado que $I(j\omega)$ es un rectángulo paralelo a los ejes con $K_1(j\omega)$, $K_2(j\omega)$, $K_3(j\omega)$, $K_4(j\omega)$, como esquinas, lo que motiva a introducir una familia reducida $I_R(s) \subset I(s)$ la cual genera el conjunto imagen $I(j\omega)$ en cada ω . Sea $\beta_0(s)$ denota el polinomio central de la familia $I(s)$.

$$\beta_0(s) = \frac{x_0 + y_0}{2} + \frac{x_1 + y_1}{2}s + \dots + \frac{x_n + y_n}{2}s^n$$

e introduciendo los polinomios par e impar,

$$\beta_e(s) = K_{\max}^{par}(s) - K_{\min}^{par}(s)$$

$$\beta_0(s) = K_{\max}^{impar}(s) - K_{\min}^{impar}(s).$$

Se define,

$$\mathcal{I}_R(s) = \{\beta(s) = \beta_0(s) + \lambda_1 \beta_e(s) + \lambda_2 \beta_0(s) : |\lambda_i| \leq 1, i = 1, 2\}$$

Es fácil ver que,

$$\mathcal{I}_R(s) \subset \mathcal{I}(s),$$

pero,

$$\mathcal{I}_R(j\omega) = \mathcal{I}(j\omega), \quad \text{para todo } \omega \geq 0.$$

Se muestra que los $n + 1$ parámetros de la familia de intervalos de polinomios $\mathcal{I}(s)$ pueden ser siempre reemplazados por los dos parámetros experimentados de la familia $\mathcal{I}_R(s)$ donde los dos generan la misma imagen a cada frecuencia. Se enfatiza que este tipo de reducción de parámetros basada en propiedades del conjunto imagen se cumple en los casos más generales, hasta incluso cuando la familia no es un intervalo y la región de estabilidad no es la mitad izquierda del plano. Claro está que para el caso de Hurwitz intervalos, el Teorema de Kharitonov muestra como esta reducción reduce a los cuatro vértices $K_i(s)$.

3.3.2- Prueba del Teorema de Kharitonov basada en el conjunto imagen.

Se dará una prueba del Teorema de Kharitonov basado en un análisis del conjunto imagen [27] [29] [45]. Suponiendo que la familia $\mathcal{I}(s)$ es de grado

n y contiene al menos un polinomio estable. La estabilidad de la familia $\mathcal{I}(s)$ puede determinarse verificando que ningún polinomio en la familia tenga una raíz en el eje imaginario. Esto es inmediato a partir del Teorema de Cruce de Fronteras del Capítulo 1. Ciertamente si algún elemento de $\mathcal{I}(s)$ tiene raíz inestable entonces allí también debe existir una frecuencia ω^* y un polinomio con una raíz en $s = j\omega^*$. El caso $\omega^* = 0$, queda fuera dado que esto entraría en contradicción con que $K_{\max}^e(0)$ y $K_{\min}^0(0)$ son del mismo signo.

Así es sólo necesario chequear que el rectángulo $\mathcal{I}(j\omega^*)$ excluye al origen del plano complejo para cada $\omega^* > 0$, suponiendo que los polinomios de Kharitonov son estables. Por la propiedad de monotonía del argumento del ángulo del polinomio de Hurwitz se puede decir que las esquinas $K_1(j\omega)$, $K_2(j\omega)$, $K_3(j\omega)$, $K_4(j\omega)$, de $\mathcal{I}(s)$ comienzan en el eje real positivo, girando estrictamente en contra de las manecillas del reloj alrededor del origen y no pasa sobre él, cuando ω corre desde 0 hasta ∞ . Ahora suponiendo por contradicción que $0 \in \mathcal{I}(j\omega^*)$ para algún $\omega^* > 0$. Dado que $\mathcal{I}(j\omega)$ se mueve continuamente con respecto a ω y el origen está fuera de $\mathcal{I}(0)$ se tiene que existe $\omega_0 \leq \omega^*$ para el cual el origen simplemente está en el conjunto $\mathcal{I}(j\omega_0)$. Ahora se puede considerar la situación límite en la cual el origen está en la frontera de $\mathcal{I}(j\omega_0)$ y es justamente por estar en este conjunto como ω aumenta a partir de ω_0 .

Esto es representado en la Figura 3.3.2. El origen puede estar en uno de los cuatro lados del rectángulo del conjunto imagen, se puede decir, en AB . Se puede verificar esto fácilmente en cada uno de los casos en que la entrada del origen implica que el argumento del ángulo de una de las esquinas, A o B en la cara a través de la cual la entrada toma lugares, decrece cuando se incrementa ω a $\omega = \omega_0$. Dado que las cuatro esquinas correspondientes a los polinomios de Kharitonov son Hurwitz-estables, se tiene una

contradicción con la propiedad de aumento monótono del argumento del ángulo para polinomios de Hurwitz.

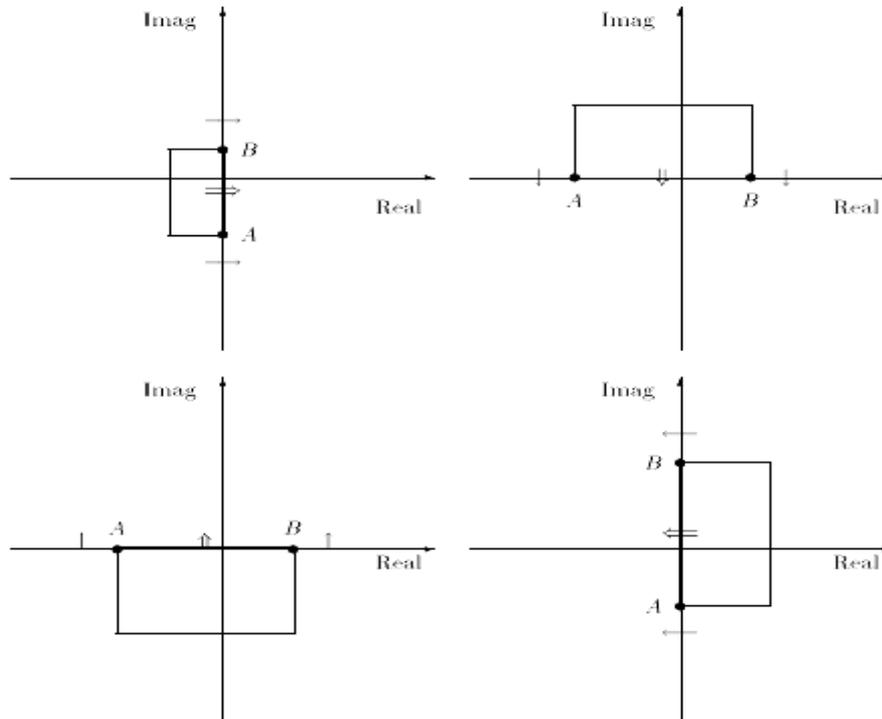


Figura 3.3.2. Prueba alternativa del Teorema de Kharitonov.

3.4- Propiedades extremas de los polinomios de Kharitonov.

En este epígrafe se derivarán algunas propiedades extremas muy útiles de los polinomios de Kharitonov [27][46]. Suponiendo que se ha probado la estabilidad de una familia de polinomios,

$$\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \delta_2 s^2 + \dots + \delta_n s^n ,$$

con coeficientes en el hiper-cubo,

$$\Delta = [x_0, y_0] \times [x_1, y_1] \times \dots \times [x_n, y_n] .$$

Cada polinomio de la familia es estable. Una pregunta natural es la siguiente: ¿Qué punto en Δ está más cercano a la inestabilidad? El margen de estabilidad de este punto es el peor margen de estabilidad del sistema de intervalos. Resulta que una respuesta precisa a esta pregunta puede darse por lo que se refiere al margen de estabilidad paramétrico así como por lo que se refiere a los márgenes de ganancia de un sistema del intervalo asociado. Se tratará con el problema del margen de estabilidad paramétrico. Para ello se introducirán previamente algunos aspectos teóricos fundamentales para el futuro desarrollo de esta idea.

3.4.1- Bola de polinomios estables.

Recordando el Teorema de Cruce de Fronteras del Capítulo 1. Sea la región de estabilidad S de cualquier conjunto abierto del plano complejo \mathbb{C} , ∂S es la frontera, y \mathcal{U}^0 el interior del conjunto cerrado $\mathcal{U} = \mathbb{C} - S$. Se asume que estos tres conjuntos, S , ∂S , y \mathcal{U}^0 son no vacíos. Para cualquier n , el conjunto \mathcal{P}_n de los polinomios reales de grado menor o igual a n es un vector del espacio de dimensión $n+1$, que como es usual se identificará con \mathbb{R}^{n+1} , con el cual es isomorfo. Sea $\|\cdot\|$ una norma arbitraria definida en \mathcal{P}_n . Las bolas abiertas introducidas por esta norma tienen la forma siguiente,

$$B(P_0(s), r) = \{P(s) \in \mathcal{P}_n : \|P(s) - P_0(s)\| < r\}.$$

La bola abierta está asociada a la hiper-esfera,

$$S(P_0(s), r) = \{P(s) \in \mathcal{P}_n : \|P(s) - P_0(s)\| = r\},$$

la cual es justamente la frontera de $B(P_0(s), r)$. Ahora, como se mencionó en el Capítulo 1, el subconjunto \mathcal{P}_n que consiste en todos los polinomios $\delta(s)$

los cuales son de grado n y tienen todas sus raíces en \mathcal{S} , es un conjunto abierto. Como una consecuencia directa, dado un polinomio $\delta(s)$ de grado n con todas sus raíces contenidas en \mathcal{S} , existe un número real positivo ε tal que para cada polinomio contenido en $B(\delta(s), \varepsilon)$ es de grado n y tiene todas sus raíces en \mathcal{S} . En otras palabras, se puede denotar con $d^0(\cdot)$ el grado de un polinomio, y se tiene que ε , satisface la siguiente propiedad [24].

Propiedad 3.4.1.

$$\|\beta(s) - \delta(s)\| < \varepsilon \Rightarrow \begin{cases} d^0(\beta(s)) = n \\ \beta(s) \text{ tienen todas sus raíces en la región de estabilidad.} \end{cases}$$

Como en la prueba del Teorema de Cruce de Fronteras, es posible considerar para el polinomio estable dado $\delta(s)$, el subconjunto de todos los números reales positivos, considerando la propiedad anterior.

$$R_\delta = \{t : t > 0, t \text{ satisface propiedad} \}$$

Se ha visto que R_δ no es vacío. Pero obviamente los elementos de R_δ satisfacen,

$$t_2 \in R_\delta \text{ y } 0 < t_1 < t_2 \Rightarrow t_1 \in R_\delta.$$

Por consiguiente R_δ es de hecho un intervalo,

$$(0, \rho(\delta)] \text{ donde } \rho(\delta) = \sup_{t \in R_\delta} t.$$

Claramente, $\rho(\delta)$ tiene que ser finito y también satisface la propiedad (es por eso que se cierra el intervalo por la derecha). Simplemente se ha demostrado la existencia y unicidad de un número real $\rho(\delta)$ caracterizado por:

- 1) $\rho(\delta)$ satisface la propiedad.
- 2) Ningún r real mayor que $\rho(\delta)$ satisface la propiedad.

Teorema 3.4.1. Dado un polinomio $\delta(s)$, de grado n , que tiene todas sus raíces en S , existe un número real positivo $\rho(\delta)$ tal que,

- a) Cada polinomio contenido en $B(\delta(s), \rho(\delta))$ tiene todas sus raíces en S y es de grado n .
- b) Por los menos un polinomio en la hiper-esfera $S(\delta(s), \rho(\delta))$ tiene una de sus raíces en ∂S o es de grado menor que n .
- c) Sin embargo, ningún polinomio en la hiper-esfera (hasta incluso los de grado $< n$) puede tener una raíz en \mathcal{U}^0 .

Demostración. Claramente a) es verdadero dado que $\rho(\delta)$ satisface la propiedad. Seguidamente se probará b) y c). Dado que ningún r mayor que $\rho(\delta)$ satisface la propiedad, entonces para cada $n \geq 1$ existe un polinomio de grado menor que n o con una raíz en $\mathcal{U} = \mathbb{C} - S$, se puede decir $\gamma_n(s)$, contenida en la bola $B(\delta(s), \rho(\delta) + \frac{1}{n})$. Contenido en la clausura de $B(\delta(s), \rho(\delta))$ que es un conjunto compacto, esta sucesión podría contener una subsucesión convergente $\gamma_{\phi(n)}(s)$. Sea $\gamma(s)$ su límite. Entonces $\gamma(s)$ está necesariamente en la hiper-esfera $S(\delta(s), \rho(\delta))$, y es además necesariamente de grado menor que n o con una raíz en \mathcal{U} , por otro lado la existencia de $\rho(\gamma)$ podría ser contradictorio al hecho de que $\gamma(s)$ es límite de una sucesión de polinomios de grado menor que n o con una raíz en \mathcal{U} .

Para proceder se necesita invocar al Teorema de Rouché. Suponiendo que hay un polinomio en $S(\delta(s), \rho(\delta))$, se puede decir $\gamma(s)$, el cual es de grado

n pero tiene al menos una raíz s_k en \mathcal{U}^ρ . Una consecuencia es que el conjunto de polinomios de grado n con al menos una raíz en el conjunto abierto \mathcal{U}^ρ , es abierto. Esto sería posible encontrando una bola de radio $\varepsilon > 0$ alrededor de $\gamma(s)$ conteniendo sólo polinomios de grado n con al menos una raíz en \mathcal{U}^ρ . Esto resultaría entonces una contradicción dada que $\gamma(s)$ está en la hiper-esfera $S(\delta(s), \rho(\delta))$, la intersección,

$$B(\gamma(s), \varepsilon) \cap B(\delta(s), \rho(\delta))$$

es ciertamente no vacía.

Por otra parte suponiendo que el polinomio $\gamma(s)$ con al menos una raíz en \mathcal{U}^ρ es de grado menor que n . Para $\varepsilon > 0$ se considera el polinomio,

$$\gamma_\varepsilon(s) = \varepsilon\delta(s) + (1 - \varepsilon)\gamma(s).$$

Es claro que $\gamma_\varepsilon(s)$ es siempre de grado menor que n y está dentro de la bola $B(\delta(s), \rho(\delta))$ dado que,

$$\|\delta(s) - \gamma_\varepsilon(s)\| = (1 - \varepsilon)\|\delta(s) - \gamma(s)\| < \rho(\delta).$$

Esto significa que $\gamma_\varepsilon(s)$ tiene todas sus raíces en \mathcal{S} . Ahora, una aplicación del Teorema de Rouché muestra que para valores suficientemente pequeños de ε , $\gamma_\varepsilon(s)$ además tiene al menos una raíz en \mathcal{U}^ρ , y ésta es de nuevo una contradicción. ■

Está claro que estos resultados son aplicados a una número de situaciones dependientes de la región \mathcal{S} de interés y de la norma $\|\cdot\|$ elegida en \mathcal{P}_n .

3.4.2- Propiedades del margen de estabilidad paramétrico.

Considerando una familia estable de intervalos de polinomios a la que a cada miembro se le asocia la mayor bola de estabilidad asociada a él.

Se escribe,

$$\underline{\delta} = [\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n],$$

y estimar $\underline{\delta}$ como un punto en \mathbb{R}^{n+1} . Se puede denotar con $\|\underline{\delta}\|_p$ la p norma en \mathbb{R}^{n+1} y asociar esta con $\delta(s)$. El conjunto de polinomios los cuales son inestables de grado n o de grado menor que n son denotados por \mathcal{U} . Entonces el radio de de la bola de estabilidad centrada en δ es,

$$\rho(\delta) = \inf_{u \in \mathcal{U}} \|\underline{\delta} - u\|_p.$$

Definiendo un mapeo de Δ al conjunto de todos los números reales positivos,

$$\begin{aligned} \Delta &\xrightarrow{\rho} \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \\ \delta(s) &\rightarrow \rho(\delta). \end{aligned}$$

Una interrogante pudiera ser la siguiente. ¿Hay un punto en Δ que sea el más cercano a la inestabilidad? O en términos de funciones. ¿Tiene la función ρ un mínimo y hay un punto preciso en Δ dónde se localiza? La respuesta a esta pregunta se dará en el siguiente teorema [23].

Teorema 3.4.2.

La función,

$$\Delta \xrightarrow{\rho} \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$$

$$\delta(s) \rightarrow \rho(\delta)$$

tiene un mínimo que se alcanza a uno de los cuatro polinomios de Kharitonov asociados a Δ .

Demostración. Denotando $K^i(s)$, $i=1,2,3,4$ los cuatro polinomios de Kharitonov, se puede considerar los cuatro radios asociados con estos cuatro polinomios extremos, y se asume por ejemplo que,

$$\rho(K^1) = \min[\rho(K^1), \rho(K^2), \rho(K^3), \rho(K^4)] \quad (3.4.1)$$

Se asume en busca de alguna contradicción, que algún polinomio $\gamma(s)$ en la caja es tal que,

$$\rho(\gamma) < \rho(K^1). \quad (3.4.2)$$

Por conveniencia se denotará a $\rho(\gamma)$ por ρ_γ , y a $\rho(K^1)$ por ρ_1 .

Por definición, hay al menos algún polinomio situado en la hiper-esfera $S(\gamma(s), \rho_\gamma)$ el cual es inestable o de grado menor que n . Sea $\beta(s)$ tal polinomio. Dado que $\beta(s)$ está en $S(\gamma(s), \rho_\gamma)$, existe $\underline{\alpha} = [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n]$ con $\|\underline{\alpha}\| = 1$, tal que,

$$\beta(s) = \gamma_0 + \alpha_0 \rho_\gamma + (\gamma_1 + \alpha_1 \rho_\gamma)s + \dots + (\gamma_n + \alpha_n \rho_\gamma)s^n,$$

$(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, α_n puede ser positivo o negativo aquí.

Por (3.4.1) ρ_1 es el menor de los cuatro radios extremos y por (3.4.2) $\rho(\gamma)$ es menor que ρ_1 . Como consecuencia, los cuatro nuevos polinomios extremos son,

$$\delta_n^1(s) = (x_0 - |\alpha_0| \rho_\gamma) + (x_1 - |\alpha_1| \rho_\gamma)s + (y_2 - |\alpha_2| \rho_\gamma)s^2 + (y_3 - |\alpha_3| \rho_\gamma) + \dots$$

$$\delta_n^2(s) = (x_0 - |\alpha_0| \rho_\gamma) + (y_1 + |\alpha_1| \rho_\gamma)s + (y_2 + |\alpha_2| \rho_\gamma)s^2 + (x_3 - |\alpha_3| \rho_\gamma) + \dots$$

$$\delta_n^3(s) = (y_0 + |\alpha_0| \rho_\gamma) + (x_1 - |\alpha_1| \rho_\gamma)s + (x_2 - |\alpha_2| \rho_\gamma)s^2 + (y_3 + |\alpha_3| \rho_\gamma) + \dots$$

$$\delta_n^4(s) = (y_0 + |\alpha_0| \rho_\gamma) + (y_1 + |\alpha_1| \rho_\gamma)s + (x_2 - |\alpha_2| \rho_\gamma)s^2 + (x_3 - |\alpha_3| \rho_\gamma) + \dots$$

son todos estables porque,

$$\|\delta_n^i - K^i\| = \rho_\gamma < \rho_i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Aplicando el Teorema de Kharitonov, se puede concluir que el nuevo hiper-cubo,

$$\Delta_n = [x_0 - |\alpha_0| \rho_\gamma, y_0 + |\alpha_0| \rho_\gamma] \times \dots \times [x_n - |\alpha_n| \rho_\gamma, y_n + |\alpha_n| \rho_\gamma]$$

contiene sólo polinomios estables de grado n . La contracción se ve claramente dado el hecho de que $\beta(s)$ ciertamente pertenece a Δ_n , y sin embargo es inestable o de grado menor que n , lo que prueba el teorema. ■

El resultado anterior dice que, sobre el hiper-cubo completo, lo más cercano a la inestabilidad es una de las esquinas de Kharitonov, se puede decir $K^i(s)$. Es claro que si se tiene el hiper-cubo Δ_n , construido en la demostración anterior, y reemplazando ρ_γ por $\rho(K^i)$, el hiper-cubo resultante es más amplio que el hiper-cubo original Δ . Este hecho puede ser utilizado para desarrollar un algoritmo que amplíe al hiper-cubo de estabilidad a su límite máximo. Se darán todos los detalles con un ejemplo ilustrativo.

Ejemplo 3.4.1. Dado el polinomio característico,

$$\delta(s) = \delta_6 s^6 + \delta_5 s^5 + \delta_4 s^4 + \delta_3 s^3 + \delta_2 s^2 + \delta_1 s + \delta_0.$$

con los coeficientes en los siguientes intervalos,

$$\begin{aligned} \delta_0 &\in [300,400], & \delta_1 &\in [600,700], & \delta_2 &\in [450,500] \\ \delta_3 &\in [240,300], & \delta_4 &\in [70,80], & \delta_5 &\in [12,14], & \delta_6 &\in [1,1]. \end{aligned}$$

Se desea verificar que el sistema es estable, y en caso de serlo calcular el menor valor del radio de estabilidad en el espacio $\delta = [\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5]$ cuando estos coeficientes están sobre el hiper-cubo de incertidumbre.

Aplicando el Teorema de Kharitonov se obtienen los cuatro polinomios a chequear,

$$\begin{aligned} K^1(s) &= 300 + 600s + 500s^2 + 300s^3 + 70s^4 + 12s^5 + s^6 \\ K^2(s) &= 300 + 700s + 500s^2 + 240s^3 + 70s^4 + 14s^5 + s^6 \\ K^3(s) &= 400 + 600s + 450s^2 + 300s^3 + 80s^4 + 12s^5 + s^6 \\ K^4(s) &= 400 + 700s + 450s^2 + 240s^3 + 80s^4 + 14s^5 + s^6. \end{aligned}$$

Dado que los cuatro polinomios son de Hurwitz, se puede proceder a calcular el peor caso de margen de estabilidad.

De los resultados establecidos con anterioridad, del Teorema se conoce que esto ocurre en uno de los vértices de Kharitonov, por lo tanto es suficiente para determinar el radio de estabilidad de los cuatro vértices. El radio de estabilidad puede determinarse usando la norma ℓ_p .

Se asume que $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6] = [43, 33, 25, 15, 5, 1.5, 1]$. Se puede computar el radio de estabilidad aplicando técnicas simples, como lo son por ejemplo Lugar Tsytkin-Polyak (ver Apéndice 1) para cada uno de los polinomios de Kharitonov y tomando el mínimo valor del margen de estabilidad. Se ilustrará el cálculo usando dos normas diferentes, correspondientes a $p = 2$ y $p = \infty$.

La Figura 3.4.1 muestra los cuatro lugares de Tsytkin-Polyak [21] [37] correspondientes a los cuatro polinomios de Kharitonov.

El radio del círculo inscrito indica el mínimo margen de estabilidad ℓ_2 en coeficientes espaciales.

La Figura 3.4.2 muestra el margen de estabilidad extremo ℓ_∞ . Para estas imágenes, se tiene,

$$\rho_2(\delta) = 1 \quad \text{y} \quad \rho_\infty(\delta) = 0.4953.$$

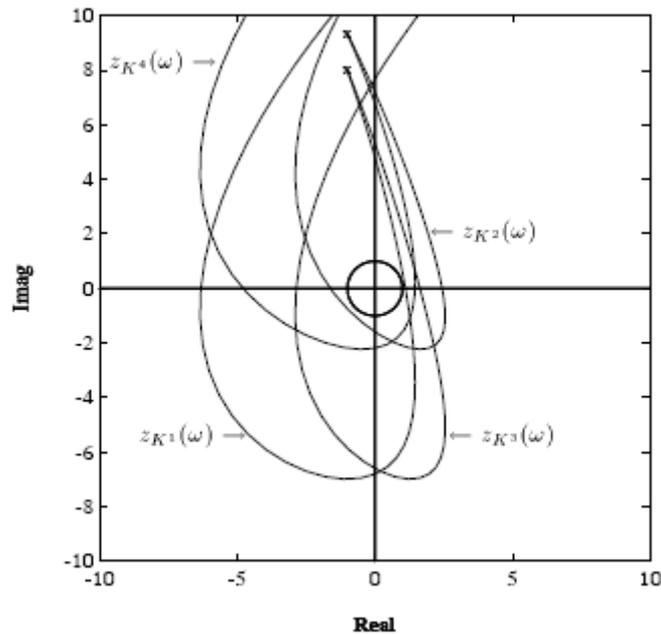


Figura 3.4.1. Margen de estabilidad ℓ_2 .

Sólo quedaría hacer un análisis para la Schur-estabilidad para intervalos de polinomios.

3.5- Schur-estabilidad para polinomios con coeficientes dados por intervalos.

Como parece lógico se debería empezar por pensar en aplicar el Teorema de Kharitonov al análisis de la Schur-estabilidad, pero en general esto no es aplicable a regiones arbitrarias. En los siguientes ejemplos se ilustra este hecho para el caso de la Schur-estabilidad demostrando su inaplicabilidad.

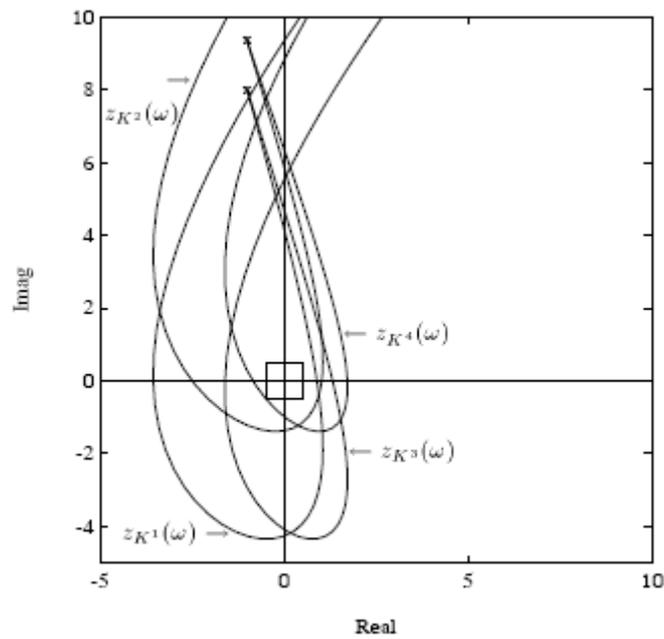


Figura 3.4.2. Margen de estabilidad ℓ_∞ .

Ejemplo 3.5.1. El intervalo de polinomio,

$$\delta(z, p) = z^4 + pz^3 + \frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{3}, \quad p \in \left[-\frac{17}{8}, \frac{17}{8} \right]$$

es en los puntos extremos $\delta(z, -\frac{17}{8})$ y $\delta(z, \frac{17}{8})$ Schur-estable, pero en el punto medio $\delta(z, 0)$ no lo es.

Se muestra un ejemplo más completo con el que queda totalmente claro la imposibilidad de aplicar Kharitonov en caso de Schur-estabilidad.

Ejemplo 3.5.2. Considerando el intervalo de polinomios,

$$\delta(z) = z^4 + \delta_3 z^3 + \delta_2 z^2 + \delta_1 z - \frac{1}{2}$$

con,

$$\delta_3 \in [-1, 0], \quad \delta_2 \in \left[\frac{109}{289}, \frac{109}{287} \right], \quad \delta_1 \in \left[\frac{49}{100}, \frac{51}{100} \right].$$

Los cuatro polinomios de Kharitonov asociados con $\delta(z)$ son,

$$K^1(z) = -\frac{1}{2} + \frac{49}{100}z + \frac{109}{287}z^2 + z^4$$

$$K^2(z) = -\frac{1}{2} + \frac{51}{100}z + \frac{109}{287}z^2 - z^3 + z^4$$

$$K^3(z) = -\frac{1}{2} + \frac{49}{100}z + \frac{109}{289}z^2 + z^4$$

$$K^4(z) = -\frac{1}{2} + \frac{51}{100}z + \frac{109}{289}z^2 - z^3 + z^4$$

son todos Schur-estables. Además el resto de los polinomios vértices,

$$\hat{K}^1(z) = -\frac{1}{2} + \frac{49}{100}z + \frac{109}{289}z^2 - z^3 + z^4$$

$$\hat{K}^2(z) = -\frac{1}{2} + \frac{49}{100}z + \frac{109}{287}z^2 - z^3 + z^4$$

$$\hat{K}^3(z) = -\frac{1}{2} + \frac{51}{100}z + \frac{109}{289}z^2 + z^4$$

$$\hat{K}^4(z) = -\frac{1}{2} + \frac{51}{100}z + \frac{109}{287}z^2 + z^4$$

son todos también Schur-estables. Además, el polinomio,

$$\hat{\delta}(z) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z + \frac{109}{288}z^2 - \frac{1}{4}z^3 + z^4$$

de esta familia tiene dos raíces en $0.25 \pm 0.9694i$ las cuales no están en el círculo unitario. Esto muestra que ni la estabilidad de los polinomios de Kharitonov ni incluso la estabilidad de todos los polinomios vértices garantiza la Schur-estabilidad de la familia entera.

La Schur-estabilidad de polinomios es equivalente al entrecruzamiento de las partes simétrica y antisimétrica del polinomio evaluado a lo largo del círculo unitario. Está claro del ejemplo anterior que el entrecruzamiento de los polinomios vértices no garantiza el entrecruzamiento de las partes simétrica y antisimétrica de cualquier miembro de la familia de intervalos. En el caso de la Hurwitz-estabilidad, el entrelazado de las partes par e impar de los cuatro polinomios de Kharitonov era un hecho que garantizaba el entrelazado a lo largo del eje $j\omega$ para cada polinomio en la familia.

En vista del hecho anterior se verá que se puede decir sobre la Schur-estabilidad de una familia de polinomios reales. Sea $\mathcal{I}(z)$ una familia de polinomios de la siguiente forma,

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$$

con coeficientes en la caja A,

$$A = \{ \underline{a} = (a_0, \dots, a_n) \mid a_i \in [a_i^-, a_i^+], i = 0, \dots, n \}.$$

se introducirán los vértices V y las aristas E de la caja A ,

$$V = \{ (a_n, \dots, a_0) : a_i = a_i^- \text{ o } a_i^+, i = 0, \dots, n \}$$

y,

$$E_k = \{ (a_n, \dots, a_0) : a_i = a_i^- \text{ o } a_i^+, i = 0, \dots, n, i \neq k, a_k \in [a_i^-, a_i^+] \}$$

y,

$$E = \bigcup_{k=0}^n E_k .$$

La familia correspondiente a los vértices y aristas polinomiales están definidas por,

$$\mathcal{I}_V(z) = \{P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 : (a_n, \dots, a_0) \in V\}$$

$$\mathcal{I}_E(z) = \{P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 : (a_n, \dots, a_0) \in E\}$$

Es obvio que la familia de intervalos es una familia de politopos y por tanto la estabilidad de la familia puede ser determinada por las aristas expuestas, se mostrará para finalizar y no dejar inconcluso el trabajo con polinomios dados por intervalos un teorema con su lema correspondiente demostrados por Kraus Mansour y Jury en 1989, cuya demostración no se dará por no aportar cambios sustanciales en la misma [40].

Teorema 3.5.1. Se asume que la familia de polinomios $\mathcal{I}(z)$ es de grado constante. Entonces $\mathcal{I}(z)$ es Schur-estable si y solo si $\mathcal{I}_E(z)$ es Schur-estable.

El resultado anterior es un hecho que se cumple para cualquier región de estabilidad. Resulta que cuando se trata específicamente con Schur-estabilidad, el número de aristas puede ser reducido y esto queda expuesto en el siguiente resultado.

Lema 3.5.1. Sea $n > 1$ y se asume que en la familia $\mathcal{I}(z)$ se tienen fijos los coeficientes de orden superior, particularmente $a_i^- = a_i^+$ para $i = \frac{n}{2} + 1, \dots, n$ si n es par, y $i = \frac{(n+1)}{2} + 1, \dots, n$ si n es impar. Entonces la familia $\mathcal{I}(z)$ es Schur-estable si y sólo si la familia de polinomios vértices $\mathcal{I}_V(z)$ es Schur-estable.

Conclusiones.

Después de haber realizado una exhaustiva investigación en un tema específico de las Ecuaciones Diferenciales como lo es el estudio de la estabilidad de polinomios e intervalos de polinomios se ha llegado a un grupo de conclusiones:

- El enfoque abordado mediante el Teorema de Hermite-Biehler para el análisis de la estabilidad de polinomios además de generar mejoras sustanciales en algoritmos clásicos brinda la posibilidad de desarrollar la estabilidad para intervalos de polinomios como una generalización de la estabilidad de polinomios.
- Este enfoque ofrece mayores ventajas que el enfoque tradicional, siendo de mejor comprensión el tema por la gran cantidad de elementos gráficos que ofrece, y facilita así el análisis de los resultados.
- La implementación de cada uno de los resultados tratados permite su estudio y la obtención de respuestas en tiempo cero a cualquier problema que se presente.
- El uso del Teorema de Cruce de Fronteras, permite demostrar con gran facilidad el Teorema de Hermite-Biehler y sustentar las bases de toda la investigación.
- El tratamiento de distintas variantes para el análisis de la estabilidad de polinomios con su respectiva implementación facilitan la solución de problemas prácticos y agilizan el trabajo experimental mostrando resultados sobre los que se pueden formular hipótesis para futuras investigaciones.

- La implementación del Teorema de Kharitonov, y la posibilidad de usar en él todas las variantes estudiadas, muestran de forma clara el comportamiento de los polinomios extremos, los cuales pueden ser representados.
- La reducción del conjunto imagen para intervalos de polinomios facilita notablemente el trabajo computacional.
- Las variantes obtenidas de los algoritmos clásicos son sustancialmente superior.

Recomendaciones.

La culminación de un trabajo científico siempre conduce a una serie de ideas que marcan pautas para futuros trabajos de investigación, a partir de las conclusiones enunciadas se considera oportuno realizar las siguientes recomendaciones:

- Computar el radio de estabilidad aplicando otras técnicas además del Lugar Tsytkin-Polyak.
- Estudiar la complejidad y desempeño de los algoritmos propuestos.
- Aplicar las formulaciones realizadas a la resolución de diversos problemas de la matemática.
- Insertar el enfoque usado para el análisis de la estabilidad en este trabajo en el plan de estudio de las Ecuaciones Diferenciales.

Referencias Bibliográficas.

Capítulo 1 y 2

- [1] Bell, E. T. The Development of Mathematics. McGraw-Hill Book Co, 1940.
- [2] Bose, N. K. and Shi, Y. Q. Network realizability theory approach to stability of complex polynomials. IEEE Transactions on Automatics Control, vol. 34, no. 2 (February 1987), pp. 216-218.
- [3] Bose, N. K. Digital Filters. Elsevier-Science North-Holland, Krieger Publishing Co., New York, NY, 1993.
- [4] Chapellat, H., Mansour, M., and Bhattacharyya, S. P. Elementary proofs of some classical stability criteria. IEEE Transactions on Education, vol. 33, no.3 (March 1990), pp. 232-239.
- [5] Colectivo de autores, Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas, Cuba. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Editorial Pueblo y Educación, 1987.
- [6] Dieudonné, J. Eléments d’analyse, Tome I: Fondements de l’analyse moderne. Gauthier-Villars, Editeur, Paris, 1969.
- [7] Elsgoltz, L. Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional. Editorial Mir, 1977.
- [8] Gantmacher, F. R. The Theory of Matrices, Vol 2. Chelsea Publishing Company, New York, NY, 1959.
- [9] Guillemin, E. A. The Mathematics of Circuit Analysis. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, 1949.
- [10] Hale, J. K. Functional Differential Equations. Applied Mathematical Sciences, vol. 3, Springer-Verlang, New York, 1971.
- [11] Haykin, S. Adaptive Filter Theory. Prentice-Hall publishing Co., Englewood Cliffs, NJ, 1986.
- [12] Jury, E. I. Sampled-data Control Systems. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, 1958.

- [13] Karlson, P. La magia de los números Editorial Labor, S.A, 1966.
- [14] Krasnov, M. L, Kiselev, A. I, Makárenko, G. I. Funciones de variable compleja. Cálculo Operacional. Teoría de la estabilidad. Editorial Mir, 1983.
- [15] Levin, B. J. Distribution of zeros of entire functions, vol. 5. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1980.
- [16] Mansour, M. Robust stability in systems described by rational function. In Control and Dynamic Systems, C. T. Leondes, Ed., vol. 51. Academic Press, 1992, pp. 79-128.
- [17] Marden, M. Geometry of Polynomial. American Mathematical Society, Providence, RI, 1966.
- [18] Pontryagin, L. S. On the zeros of some elementary transcendental function. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., vol. 6 (1942), pp. 115-134. English translation, American Mathematical Society Translation, vol. 2 (1955), pp. 95-110.
- [19] Ríbnikov, K. Historia de las matemáticas. Editorial Mir, 1991.
- [20] Vaidyanathan, P. and Mitra, S. K. A unified structural interpretation of some well-known stability test procedure for linear systems. IEEE Proceedings, vol. 75, no. 4 (April 1987), pp. 478-497.

Capítulo 3

- [21] Barmish, B. R. A generalization of Kharitonov's four polynomial concept for robust stability problems with linearly dependent coefficient perturbations. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 34, no. 2 (February, 1989).
- [22] Barmish, B. R. Invariance of strict Hurwitz property of polynomials with perturbed coefficients. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-29, no. 10 (October, 1984).
- [23] Barmish, B. R. New Tools for Robustness of Linear Systems. Macmillan Publishing Co., NY, 1994.

- [24] Basu, S. On boundary implications of stability and positivity properties of multidimensional system. IEEE Proceedings, vol. 78, no. 4 (April, 1990).
- [25] Bialas, S. A. A necessary and sufficient condition for the stability of interval matrices. International Journal of Control, vol. 37 (1983).
- [26] Bose, N. K. A system-theoretic approach to stability of sets of polynomials. Contemporary Mathematics, vol. 47 (1985).
- [27] Bose, N. K. Robust multivariable scattering Hurwitz interval polynomials. Linear Algebra and its Application, vol. 98 (1988).
- [28] Bose, N. K. Test of Hurwitz and Schur properties of convex combination of complex polynomials. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 36, no. 9 (September, 1989).
- [29] Champellat, H. and Bhattacharyya, S. P. A generalization of Kharitonov's theorem: Robust stability of interval plants. IEEE Transactions on Automatic Control. Vol. AC-34, no. 3 (March, 1989).
- [30] Champellat, H. and Bhattacharyya, S. P. An alternative proof of Kharitonov's theorem. . IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-34, no. 4 (April, 1989).
- [31] Champellat, H. and Bhattacharyya, S. P. Calculation of maximal stability domains using an optimal property of Kharitonov polynomials. In Analysis and Optimization of Systems. Lecture Note in Control and Information Sciences, vol. 2, Springer-Verlag, 1988.
- [32] Champellat, H. and Bhattacharyya, S. P. Robust stability and stabilization of interval plants. In Robustness in Identification and Control, M. Milanese, R. Tempo, and A. Vicino, Eds. Plenum Press, New York, 1989.
- [33] Dasgupta, S. Kharitonov's theorem revisited. Systems Control Letters, vol. 11 (1988).
- [34] Faedo, S. A new stability problem for polynomials with real coefficients. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Sci. Fis. Mat. Ser. 3-7 (1953), pp. 53-63.

- [35] Hollot, C. V. and Bartlett, A. C. Some discrete-time counterparts to Kharitonov's stability criterion for uncertain systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-31, no.4 (April, 1986).
- [36] Kharitonov, V. L. Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of system of linear differential equations. *Differential Uravnen*, vol. 14 (1978), pp. 2086-2088. Translation in *Differential Equations*, vol. 14, pp. 1483-1485, 1979.
- [37] Kharitonov, V. L. Robust stability of nested polynomial families. Tech. rep., institut fur Dynamische Systeme, Germany, May, 1994.
- [38] Kharitonov, V. L. The Routh-Hurwitz problem for families of polynomials and quasipolynomials. *Izvetiy Akademii Nauk Kazakhskoi SSR, Seria fizikomatematicheskaja*, vol. 26 (1979).
- [39] Kraus, F. J., Anderson, B. D. O., and Mansour, M. Robust Schur polynomial stability and Kharitonov's theorem. *International Journal of Control*, vol. 47 (1988).
- [40] Kraus, F. J., Mansour, M., and Jury, E. I. Robust Schur stability of interval polynomial. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control* (Tampa, FL, 1989).
- [41] Mansour, M. and Anderson, B. D. O. Kharitonov's theorem and the second method of Lyapunov. In *Robustness of Dynamic Systems with Parameter Uncertainties*, M. Mansour, S. Balemi, and W. Truol, Eds. Birkhauser, Berlin, 1992.
- [42] Mansour, M., Kraus, F. J., Anderson, B. D. O. Strong Kharitonov theorem for discrete systems. In *Robustness in Identification and Control*, M. Milanese, R. Tempo, and A. Vicino, Eds. Plenum Press, New York, 1989.
- [43] Meressi, T., Chen, D., and Paden, B. Application of Kharitonov's theorem to mechanical system. *IEEE Transactions on Automatic Control*. Vol. 38, no. 3 (March, 1993).
- [44] Minnichelli, R. J., Anagnost, J. J., and Desoer, C. A. An elementary proof of Kharitonov's stability theorem with extensions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-34, no. 9 (September, 1989).

- [45] Mori, T. and Kokame, H. Stability of interval polynomials with vanishing extreme coefficients. In *Recent Advances in Mathematical Theory of System Control, Network, and Signal Processing*, I. Mita Press, Tokyo, Japan, 1992.
- [46] Pérez, F., Abadía, C., and Docampo, D. Extreme point stability tests for discrete-time polynomials. In *Proceedings of the 31th IEEE Conference on Decision and Control (Tucson, AZ, December, 1992)*.
- [47] Yeung, K. S. and Wang, S. S. A simple proof of Kharitonov's theorem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.32, no. 4 (April, 1987).

Bibliografía Consultada.

- Ackerman, J. Robust Control, Springer-Verlag, 1993.
- Barmish, B. R. New Tools for Robustness of Linear System, Macmillan, 1994.
- Barmish, B. R. New tools for robustness of linear systems, Macmillan, New York, 1994.
- Barmish, B. R., Kang, H. I. A survey of extreme point results for robustness of control system. Automatica, 1993.
- Bartlett, A. C., Hollot, C. V., Lin, H. Root locations of an entire polytope of polynomials: it suffices to check the edge. Math. Control Signals Systems. Vol. 1, 1988.
- Bayarre, H. y cols. Metodología de la investigación en la APS, 1994.
- Bellman, R., Cooke, K. L. Differential Equation, Academic Press, 1963.
- Bhattacharyya, S. P., Champellat. H., and Keel, L. H. Robust control, the parametric approach. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1995.
- Bialas, S. A necessary and sufficient condition for the stability of interval matrices, Int. J. Control, pp. 717-722, 1983.
- Comisión Nacional de Grado Científico. Normas para la redacción y presentación de las tesis de Doctor en Ciencias de determinada

especialidad. En Normas para la obtención de Grados científicos. República de Cuba, 2005.

- Dasgupta, S. Kharitonov's theorem revisited. System Control Letters. Vol. 11, 1988.
- Demmel, J. W. On condition numbers and the distance to the nearest ill-posed problem. Numer. Math. Vol. 13, 1987.
- Eco, Umberto. Como hacer una tesis. Ed. Gedisa España, 1991.
- Foo, Y. K., Soh, Y. C. Root clustering of interval polynomials in the left-sector. Systems and Control Letters, Vol. 13, 1989.
- Frazer, R. A., Duncan, W. J On the criteria for stability for small motions. Proceedings of the Royal Society A, Vol. 124, 1929.
- Gantmacher, F. R. Matrix Theory. Chelsea Publishing Company, New York, N. Y, 1959.
- Green, M., Limebeer, D. J. N. Linear Robust Control, Prentice Hall, 1995.
- Hale, J. K., Verduyn-Lunel, S. M. Introduction to Functional Differential Equation, Springer-Verlag, 1993.
- Horn, R. A., and Johnson, C. R. Matrix analysis, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1985.
- Jiang, C. I. Sufficient and necessary conditions for the asymptotic stability of discrete linear interval systems, Int. J. Control, pp. 1563-1565, 1988.

- Juang, Y. T., and Shao, C. S. Stability analysis of dynamic interval system, *Int. J. Control*, 1989, pp. 1401-1408.
- Kaltofen, E. Computing the irreducible real factors and components of an algebraic curve. *AAECC*, Vol. 1, 1990.
- Karmarkar, N., Lakshman, Y. N. Approximate polynomials greatest common divisors and nearest singular polynomials. In Lakshman, Y. N., editor, *Proc. Internat. Symp. Symbolic Algebraic Comput. ISSAC '96*, New York, N. Y. ACM Press, 1996.
- Kharinov, V. L. *Asymptotic Stability of an Equilibrium Point Position of a Family of System of Linear Differential Equations*, Plenum Publishing Corporation, 1979.
- Kharitonov, V. L. Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of system of linear differential equation. *Differensial' nye Uravneniya*, Vol. 14, 1978.
- Kharitonov, V. L. Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations. *Differential Equations*, Vol. 14, 1979.
- Kharitonov, V. I. On a generalization of stability criterion. *Akademiia nauk Kazakhskoi SSR, Seria fiziko-matematicheskaja*. Vol. 1, 1978.
- Kharitonov, V. L., Melchor, D. A. Some Remarks on Transformations used for Stability and Robust Stability Analysis of Time-Delay System, *Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control*, December, 1999.
- Kharitonov, V. L., Zhabko A. P. Robust Stability of Time Delay System. *IEEE T-AC*, Vol. 39, No. 12, 1994.

- Kogan, J., Leizarowitz A. Frequency Domain Criterion for Robust Stability of Interval Time Delay System, IFAC Automatica, Vol. 31, No. 3, 1995.
- Kolmanovskii, V. B., Niculescu, S. I., Gu, K., Delay Effects on Stability: A Survey, Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control, pp. 1993-1998, December, 1999.
- Malek-Zavarei, M., Jamshidi, M. Time Delay Systems, North-Holland, 1987.
- Marden, M. Geometry of Polynomials. No. 3 Mathematical Surveys, American Mathematical Society, Providence, R. I., 2da edition, 1966.
- Minnichelli, R. J., Anagnost, J. J., Desoer, C. A. An elementary proof of Kharitonov's stability theorem with extensions. IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 34, No. 9, 1989.
- Niculescu, S. I., Chen, J. Frequency Sweeping Test for Asymptotic Stability: A Model Transformation for Multiple Delay, Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control, pp. 4678-4683, December, 1999.
- Rantzer, A. Stability conditions for polytopes of polynomials. IEEE Trans. Auto. Control, Vol. 37, No. 1, 1992.
- Rantzer, A., Stability Conditions for Polytopes of Polynomials, IEEE T-AC, Vol. 37, No. 2, pp. 79-89, 1992.
- Schonhage, A. The fundamental theorem of algebra in terms of computational complexity. Tech. report, Univ. Tubingen.

- Schonhage, A., Grotefeld, A. F. W., Vetter, E. Fast algorithms a multiple Turing machine implementation. Bibliographisches Institut, Mannheim, Germany, 1994.
- Soh, C. B. Necessary and sufficient conditions for stability of symmetric interval matrices, *Int. J. Control*, pp. 243-248, 1990.
- Thowsen, A. The Routh-Hurwitz Method for Stability Test for as Class of Time Delay Systems, *I. J. Control*, Vol. 33, No. 5, 1981.
- Yedevally, R. K. An extreme point necessary and sufficient condition for checking interior instability of interval matrices in the march towards a necessary and sufficient result. *Proc. 37th IEEE Conf. on Decision and Control*, Tampa, FL., 16-18, December, 1998, pp. 2780-2785.

Apéndice 1: Lugar de Tsytkin-Polyak.

Teorema A.1.1. (Lugar Tsytkin-Polyak).

Cada polinomio de la bola $\mathcal{B}_p(a^0, p)$ es Hurwitz-estable si y sólo si la gráfica de $z(\omega) = x(\omega) + jy(\omega)$ cumple las siguientes propiedades:

- a) pasa a través de los n cuadrantes en la dirección contraria a las manecillas del reloj,
- b) no se intersecta ℓ_p al disco con radio ρ , $\mathcal{D}_p(\rho)$, y
- c) los puntos fronteras $z(0)$, $z(\infty)$ tienen coordenadas con valores absolutos mayores que ρ .

Se asumirán los resultados del teorema para los casos especiales, $p = 1$, $p = 2$ y $p = \infty$, en término de sus necesidades computacionales.

En el caso de $p = 1$, $z(\omega)$ viene dado por,

$$x(\omega) = \frac{\alpha_0^0 - \alpha_2^0 \omega^2 + \alpha_4 \omega^4 - \dots}{\max_{k \text{ par}} \alpha_k \omega^k},$$

$$y(\omega) = \frac{\alpha_1^0 - \alpha_3^0 \omega^2 + \alpha_5 \omega^4 - \dots}{\max_{k \text{ impar}} \alpha_k \omega^{k-1}}$$

y el la gráfica no debe intersectar el rombo $|x| + |y| \leq p$.

Cuando $p = 2$, es dado por,

$$x(\omega) = \frac{\alpha_0^0 - \alpha_2^0 \omega^2 + \alpha_4^0 \omega^4 - \dots}{\left(\alpha_0^2 + \alpha_2^2 \omega^4 + \alpha_4^2 \omega^8 + \dots\right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$y(\omega) = \frac{\alpha_1^0 - \alpha_3^0 \omega^2 + \alpha_5^0 \omega^4 - \dots}{(\alpha_1^2 + \alpha_3^2 \omega^4 + \alpha_5^2 \omega^8 + \dots)^{\frac{1}{2}}}$$

en este caso la gráfica no debe intersecarse con el círculo $|x|^2 + |y|^2 \leq p^2$.

Cuando $p = \infty$, la frecuencia de $z(\omega) = x(\omega) + jy(\omega)$ viene dada por,

$$x(\omega) = \frac{\alpha_0^0 - \alpha_2^0 \omega^2 + \alpha_4^0 \omega^4 - \dots}{\alpha_0 + \alpha_2 \omega^2 + \alpha_4 \omega^4 + \dots},$$

$$y(\omega) = \frac{\alpha_1^0 - \alpha_3^0 \omega^2 + \alpha_5^0 \omega^4 - \dots}{\alpha_1 + \alpha_3 \omega^2 + \alpha_5 \omega^4 + \dots}$$

y no debería intersecar el cuadrado $|x| \leq p, |y| \leq p$.

Se ilustra el teorema con el siguiente ejemplo.

Ejemplo A.1.1. Considerando el polinomio,

$$A(s) = s^6 + 14s^5 + 80.25s^4 + 251.25s^3 + 502.25s^2 + 667.25s + 433.5.$$

Con los siguientes valores de,

$$\alpha = [0.1, 1.4, 5.6175, 15.075, 25.137, 33.36, 43.35]$$

se tienen los siguientes márgenes de estabilidad:

$$p = 1, \quad \rho = 3.6252$$

$$p = 2, \quad \rho = 2.8313$$

$$p = \infty, \quad \rho = 1.2336.$$

Se requiere la gráfica de $z(\omega)$ y de los discos $\mathcal{D}_1(p)$, $\mathcal{D}_2(p)$ y $\mathcal{D}_\infty(p)$ como se muestra en las Figuras A.1.1, A.1.2 y A.1.3.

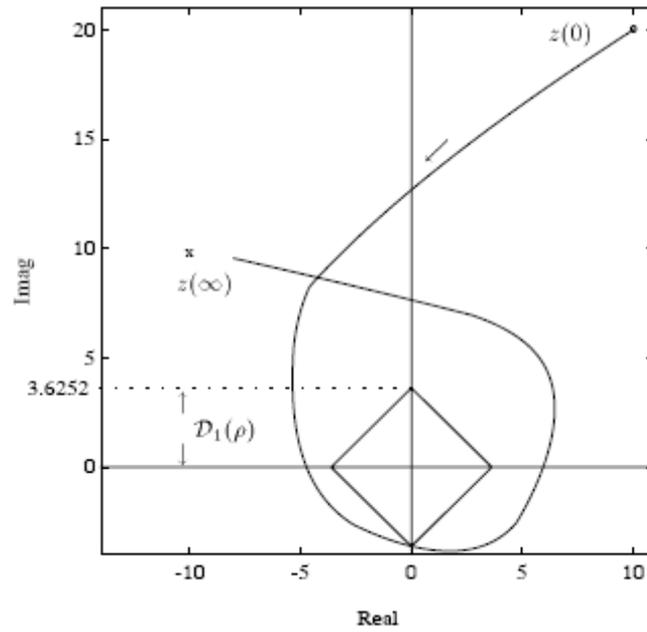


Figura A.1.1. Lugar de Tsytkin-Polyak: margen de estabilidad ℓ_1 .

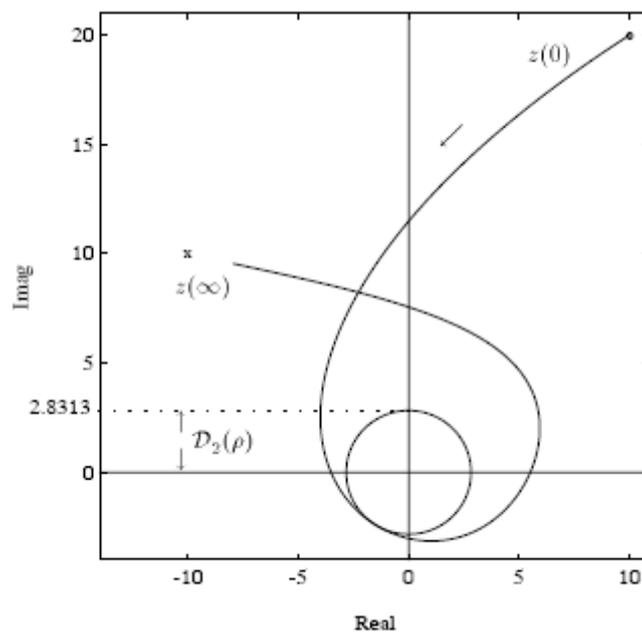


Figura A.1.2. Lugar de Tsytkin-Polyak: margen de estabilidad ℓ_2 .

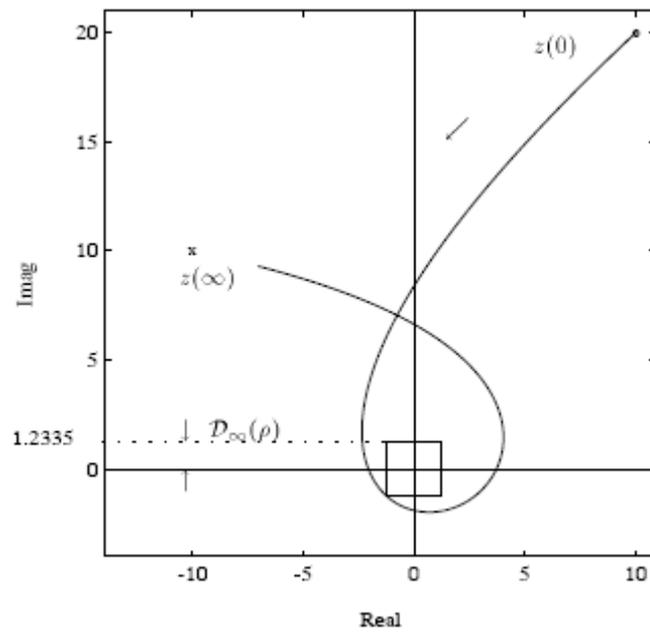


Figura A.1.2. Lugar de Tsykin-Polyak: margen de estabilidad ℓ_∞ .

Apéndice 2: Implementaciones.

A 2.1- Lema de Hermite-Biehler caso Real.

```
In[1]:= (*paquetes y campo de Galois sobre el que se trabaja*)
<< Algebra`FiniteFields`
fld = GF[81];

In[3]:= (*Ppar*)
Ppar[poli_] :=
  Module[{aux},
    aux = CoefficientList[poli, x];
    Do[
      aux[[i]] = 0,
      {i, 2, Length[aux], 2}
    ];
    ExtensionDegree[fld] = Length[aux];
    ElementToPolynomial[fld[aux], x]
  ];

In[4]:= (*Pimpar*)
Pimpar[poli_] :=
  Module[{aux},
    aux = CoefficientList[poli, x];
    Do[
      aux[[i]] = 0,
      {i, 1, Length[aux], 2}
    ];
    ExtensionDegree[fld] = Length[aux];
    ElementToPolynomial[fld[aux], x]
  ];

In[5]:= (*Pe*)
Pe[poli_] :=
  Module[{}],
  Expand[Ppar[poli] /. x -> i w]
  ]
```

```

In[6]:= (*P0*)
Po[poli_] :=
Module[{},
Expand[
(Pmpar[poli] /. x -> n w) 1 / (n w)
]
]

```

```

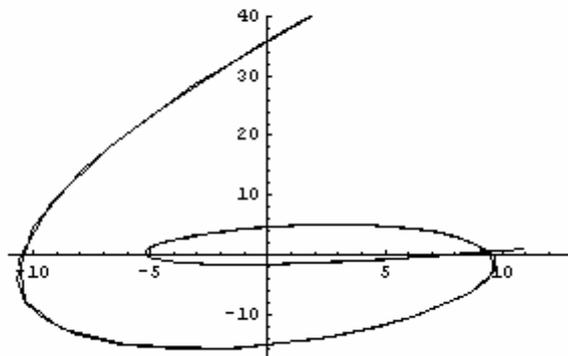
In[7]:= (*cuerpo del lema*)
LHB[poli_, xmin_, xmax_, ymin_, ymax_] :=
Module[{},
ExtensionDegree[fld] = Length[poli];
graf = ElementToPolynomial[
fld[Table[If[EvenQ[i], 0, 1],
{i, Length[poli]}]], w];
ParametricPlot[{Pe[poli] / graf, Po[poli] / graf},
{w, xmin, ymax},
PlotRange -> {{xmin, xmax}, {ymin, ymax}}]
]

```

```

In[8]:= LHB[x9 + 11 x8 + 52 x7 + 145 x6 + 266 x5 + 331 x4 +
280 x3 + 155 x2 + 49 x + 6, -11, 13, -18, 40]

```

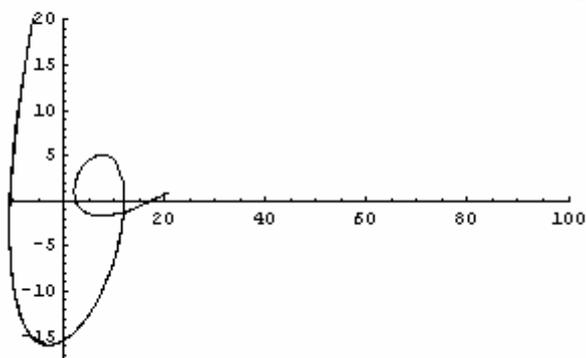


Out[8]= - Graphics -

```

In[9]:= LHB[x9 + 21 x8 + 52 x7 + 145 x6 + 266 x5 + 331 x4 +
280 x3 + 155 x2 + 49 x + 6, -11, 100, -18, 20]

```



Out[9]= - Graphics -

A 2.2- Teorema de Hermite-Biehler caso Real.

```

In[1]:= (*paquetes y campo de Galois sobre el que se trabaja*)
<< Algebra`FiniteFields`
fld = GF[81];

In[3]:= (*PPar*)
Ppar[poli_] :=
  Module[{aux},
    aux = CoefficientList[poli, x];
    Do[
      aux[[i]] = 0,
      {i, 2, Length[aux], 2}
    ];
    ExtensionDegree[fld] = Length[aux];
    ElementToPolynomial[fld[aux], x]
  ];

In[4]:= (*Pimpar*)
Pimpar[poli_] :=
  Module[{aux},
    aux = CoefficientList[poli, x];
    Do[
      aux[[i]] = 0,
      {i, 1, Length[aux], 2}
    ];
    ExtensionDegree[fld] = Length[aux];
    ElementToPolynomial[fld[aux], x]
  ];

In[5]:= (*Pe*)
Pe[poli_] :=
  Module[{}],
    Expand[Ppar[poli] /. x ->  $\hat{n} w$ ]
  ];

In[6]:= (*P0*)
Po[poli_] :=
  Module[{}],
    Expand[
      (Pimpar[poli] /. x ->  $\hat{n} w$ ) 1 / ( $\hat{n} w$ )
    ]
  ];

(*cuerpo del lema*)
LHB[poli_, xmin_, xmax_, ymin_, ymax_] :=
  Module[{}],
    ExtensionDegree[fld] = Length[poli];
    graf = ElementToPolynomial[

```

```

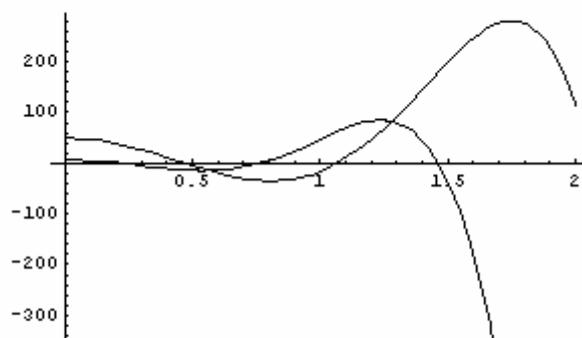
fld[Table[If[EvenQ[i], 0, 1], {i, Length[poli]}]],
w];
ParametricPlot[{{ $\frac{Pe[poli]}{graf}$ ,  $\frac{Po[poli]}{graf}$ },
{w, xmin, ymax},
PlotRange -> {{xmin, xmax}, {ymin, ymax}}]
]

```

```

In[9]:= THBR[ $x^9 + 11x^8 + 52x^7 + 145x^6 +$ 
 $266x^5 + 331x^4 + 280x^3 + 155x^2 + 49x + 6, 2]$ 

```

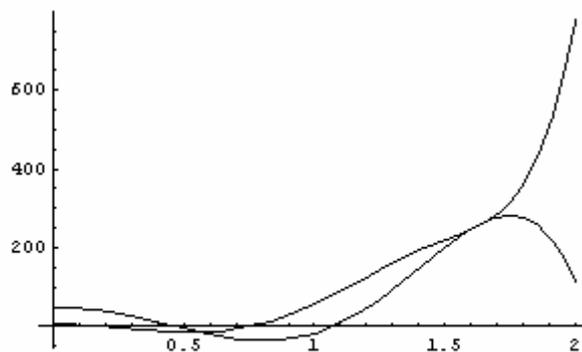


Out[9]= - Graphics -

```

In[10]:= THBR[ $x^9 + 21x^8 + 52x^7 + 145x^6 +$ 
 $266x^5 + 331x^4 + 280x^3 + 155x^2 + 49x + 6, 2]$ 

```



Out[10]= - Graphics -

A 2.3- Teorema de Hermite-Biehler caso Complejo.

```
In[1]:= (*paquete y campo de Galois sobre el que se trabaja*)
<< Algebra`FiniteFields`
fld = GF[81];

In[3]:= (*Función  $T_R$ *)
TR[poli_] :=
  Module[{aux},
    aux1 = CoefficientList[poli, x];
    aux = Table[
      If[OddQ[i],
        Re[aux1[[i]]],
        Im[aux1[[i]]] I
      ],
      {i, 1, Length[aux1]}
    ];
    ExtensionDegree[fld] = Length[aux];
    ElementToPolynomial[fld[aux], x]
  ];

In[4]:= (*Función  $T_I$ *)
TI[poli_] :=
  Module[{aux},
    aux1 = CoefficientList[poli, x];
    aux = Table[
      If[EvenQ[i],
        Re[aux1[[i]]],
        Im[aux1[[i]]] I
      ],
      {i, 1, Length[aux1]}
    ];
    ExtensionDegree[fld] = Length[aux];
    ElementToPolynomial[fld[aux], x]
  ];

In[5]:= (* $P^f$ *)
Pr[poli_] :=
  Module[{}],
  Expand[TR[poli] /. x -> i w]
  ]
```

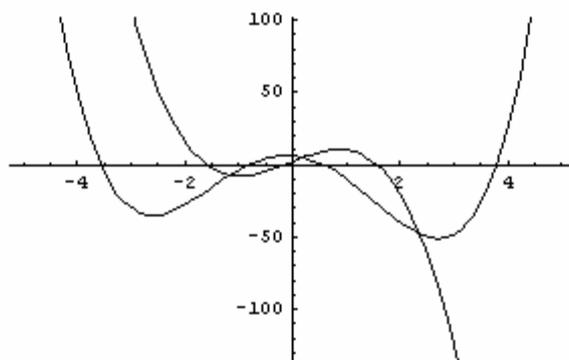
```

In[6]:= (*Pí*)
Pe[poli_] :=
Module[{},
Expand[(TI[poli] /. x -> ñ w) 1 / ñ ]
]

In[7]:= (*cuerpo del teorema*)
THBC[poli_, a_, b_] :=
Module[{},
Plot[{Pr[poli], Pe[poli]}, {w, a, b}]
]

In[8]:= THBC[
 $x^4 + 6x^3 + (14 + I)x^2 + (15 + 3I)x + (6 + 2I)$ , -5, 5]

```



Out[8]= - Graphics -

A 2.4- Definición de Schur-estabilidad.

In[1]:= (*paquete necesario*)

```
<< Graphics`Graphics`
```

In[2]:= (*cuerpo de la definición*)

```
DefSchur[poli_] :=
```

```
Module[{},
```

```
PartReal = ComplexExpand[
```

```
Re[poli /. z -> Cos[t] + I Sin[t]]];
```

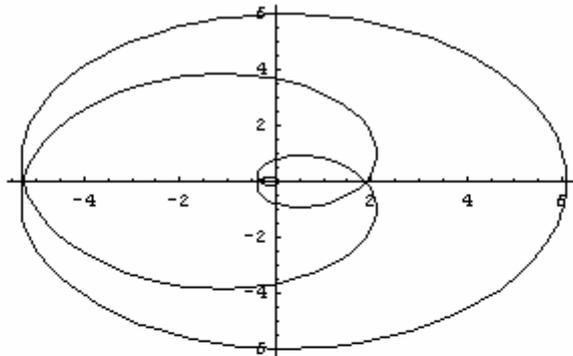
```
PartIm = ComplexExpand[
```

```
Im[poli /. z -> Cos[t] + I Sin[t]]];
```

```
ParametricPlot[{PartReal, PartIm}, {t, 0, 2 Pi}]
```

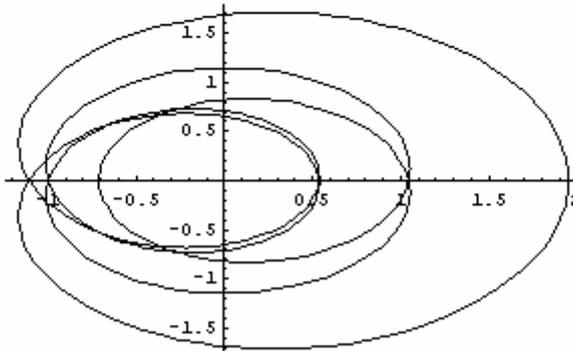
```
]
```

In[3]:= DefSchur[$2 z^4 - 3.2 z^3 + 1.24 z^2 + 0.192 z - 0.1566$]



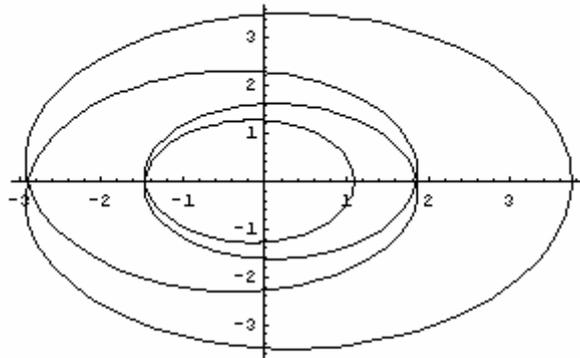
Out[3]= - Graphics -

In[4]:= DefSchur[$z^5 + .2 z^4 + 0.3 z^3 + 0.4 z^2 + 0.03 z + 0.02$]



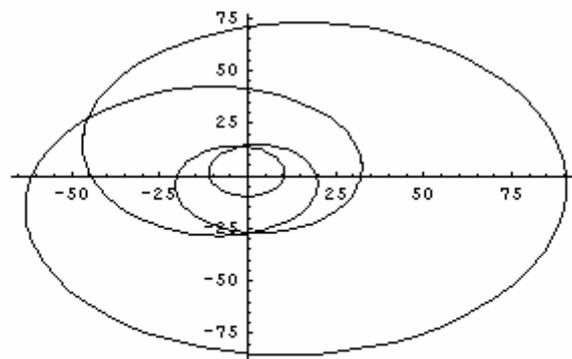
Out[4]= - Graphics -

In[5]= DefSchur [$z^5 + 2 z^4 + 0.3 z^3 + 0.4 z^2 + 0.03 z + 0.02$]



Out[5]= - Graphics -

In[6]= DefSchur [$32 z^4 + (8 + 32 I) z^3 + (-16 + 4 I) z^2 - (2 + 8 I) z + (2 - I)$]



Out[6]= - Graphics -

A 2.5- Equivalente para la Schur-estabilidad.

In[1]:= (*paquete necesario*)

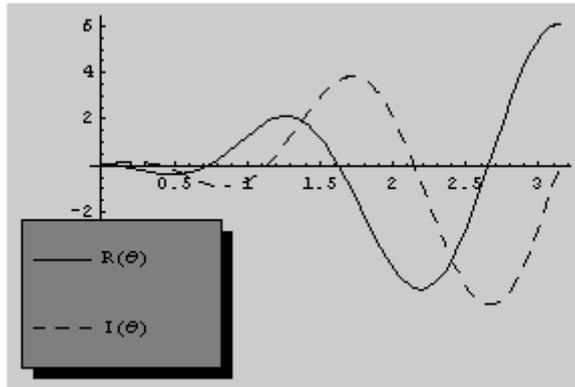
```
<< Graphics`Graphics`
```

```
<< Graphics`Legend`
```

In[3]:= (*cuerpo de la definición*)

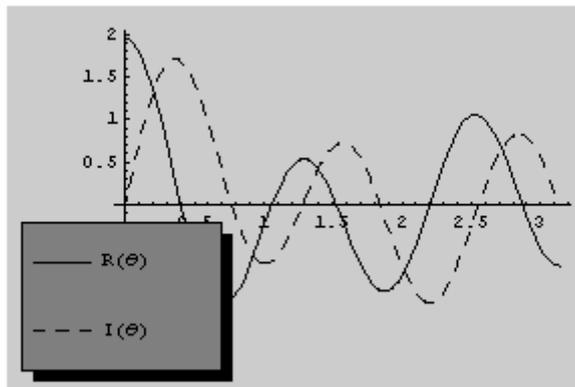
```
EqSchurR[poli_] :=  
  Module[{},  
    PartReal = ComplexExpand[  
      Re[poli /. z -> Cos[t] + I Sin[t]]];  
    PartIm = ComplexExpand[  
      Im[poli /. z -> Cos[t] + I Sin[t]]];  
    Plot[{PartReal, PartIm}, {t, 0, Pi},  
      Background -> GrayLevel[.8],  
      LegendBackground -> GrayLevel[.5],  
      PlotStyle -> {GrayLevel[0], Dashing[{.03]}},  
      PlotLegend -> {"R(θ)", "I(θ)"}  
    ]
```

In[4]:= **EqSchurR[2 z⁴ - 3.2 z³ + 1.24 z² + 0.192 z - 0.1566]**



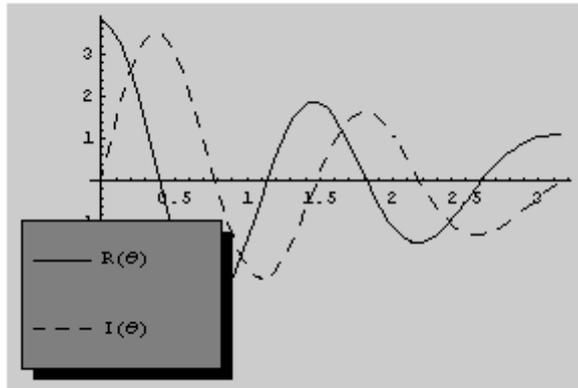
Out[4]= - Graphics -

In[5]:= **EqSchurR[z⁵ + .2 z⁴ + 0.3 z³ + 0.4 z² + 0.03 z + 0.02]**



Out[5]= - Graphics -

In[6]:= **EqSchurR**[$z^5 + 2 z^4 + 0.3 z^3 + 0.4 z^2 + 0.03 z + 0.02$]



Out[6]= - Graphics -

A 2.6- Variante para la Schur-estabilidad.

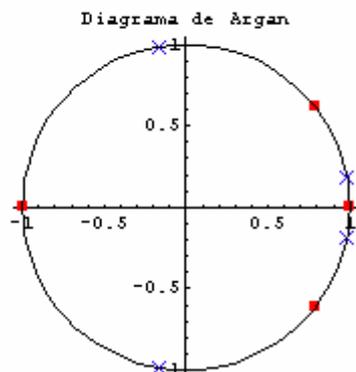
```

In[1]:= << Graphics`ImplicitPlot`
        <<Graphics`MultipleListPlot`

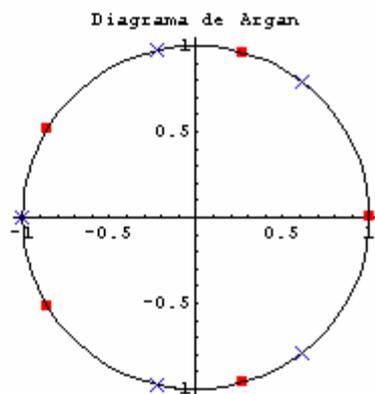
In[4]:= VarSchurR[poli_] :=
Module[{},
  grado = Length[CoefficientList[poli, z]] - 1;
  Ps = 1/2 (poli + zgrado (poli /. z -> 1/z));
  Pa = 1/2 (poli - zgrado (poli /. z -> 1/z));
  auxPs = z /. Solve[Ps == 0, z];
  auxPa = z /. Solve[Pa == 0, z];
  cerosPs =
Table[{Re[auxPs[[i]]], Im[auxPs[[i]]]},
  {i, 1, grado}];
  cerosPa = Table[{Re[auxPa[[i]]],
  Im[auxPa[[i]]]}, {i, 1, grado}];
  gralist = MultipleListPlot[cerosPs,
  cerosPa, SymbolShape ->
  {MakeSymbol[{Line[{{3, 3}, {-3, -3}], Line[
  {{-3, 3}, {3, -3}]}], PlotSymbol[Box]},
  SymbolStyle -> {Hue[0.7], Hue[1]},
  DisplayFunction -> Identity];
  gradisco = ImplicitPlot[x^2 + y^2 == 1,
  {x, -1.2, 1.2}, DisplayFunction -> Identity];
  Show[gralist, gradisco, AspectRatio -> Automatic,
  DisplayFunction -> $DisplayFunction,
  PlotLabel -> "Diagrama de Argan"];
]

```

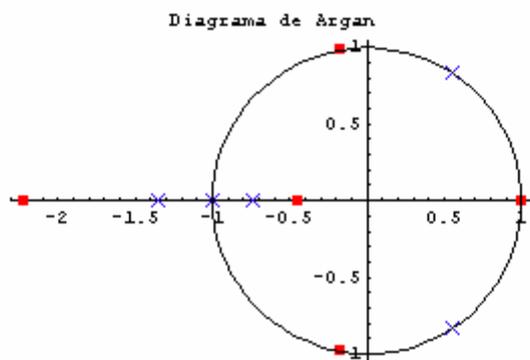
```
In[5]:= VarSchurR[2 z4 - 3.2 z3 + 1.24 z2 + 0.192 z - 0.1566]
```



ln[6]:= VarSchurR[$z^5 + .2 z^4 + 0.3 z^3 + 0.4 z^2 + 0.03 z + 0.02$]



ln[7]:= VarSchurR[$z^5 + 2 z^4 + 0.3 z^3 + 0.4 z^2 + 0.03 z + 0.02$]



A 2.7- Variante del algoritmo de Routh para polinomios reales.

In[1]:= (*paquetes y campo de Galois sobre el que se trabaja*)

```
<< Algebra`FiniteFields`
<< Graphics`Legend`
fld = GF[81];
```

In[4]:= (*Ppar*)

```
Ppar[poli_] :=
Module[{aux},
aux = CoefficientList[poli, x];
Do[
aux[[i]] = 0,
{i, 2, Length[aux], 2}
];
ExtensionDegree[fld] = Length[aux];
ElementToPolynomial[fld[aux], x]
];
```

In[5]:= (*Pimpar*)

```
Pimpar[poli_] :=
Module[{aux},
aux = CoefficientList[poli, x];
Do[
aux[[i]] = 0,
{i, 1, Length[aux], 2}
];
ExtensionDegree[fld] = Length[aux];
ElementToPolynomial[fld[aux], x]
];
```

In[7]:= (*Qpar*)

```
Qpar[poli_] :=
Module[{aux},
aux = CoefficientList[poli, x];
Expand[

$$\left( \text{Ppar}[poli] - \frac{\text{aux}[\text{Length}[aux]]}{\text{aux}[\text{Length}[aux] - 1]} \right) + \text{Pimpar}[poli]$$

];
```

```

In[9]:= (*Q^impar*)
Qimpar[poli_] :=
  Module[{aux},
    aux = CoefficientList[poli, x];
    Expand[(Pimpar[poli] -
aux[[Length[aux]]] / aux[[Length[aux] - 1]]
x Ppar[poli]) + Ppar[poli]]
  ];

(*cuerpo del algoritmo*)
VarianteRouth[poli_, gra_] :=
  Module[{} ,
    P[0] = poli;
    i = 0;
    While[! MemberQ[NonNegative[
CoefficientList[P[i], x]], False] &&
Length[CoefficientList[P[i], x]] > 3,
      If[
OddQ[Length[CoefficientList[P[i], x]]],
        P[i + 1] =
Qpar[P[i]],
        P[i + 1] =
Qimpar[P[i]]
      ];
    ];

(*graficas*)
If[gra == 1,
  Plot[{P[i], P[i + 1]},
{x, -1000, 1000}, Background -> GrayLevel[.8],
LegendBackground -> GrayLevel[.5],
AxesLabel -> P[i + 1],
PlotStyle -> {GrayLevel[0], Dashing[ {.03} ]},
PlotLegend -> {"Polinomio", "Reducción"},
Axes -> {True, False}]
];
i++;
];

StylePrint[
"Polinomio de entrada:", "DefinitionBox"];
Print[poli];
StylePrint["Mínima reducción necesaria:",
"DefinitionBox"];
P[i]
]

```

In[11]= VarianteRouth[$x^9 + 11x^8 + 52x^7 + 145x^6 + 266x^5 + 331x^4 + 280x^3 + 155x^2 + 49x + 6, 0$]

Polinomio de entrada:

$$6 + 49x + 155x^2 + 280x^3 + 331x^4 + 266x^5 + 145x^6 + 52x^7 + 11x^8 + x^9$$

Mínima reducción necesaria:

Out[11]= $6 + \frac{164324160x}{5405927} + \frac{10811854x^2}{182177}$

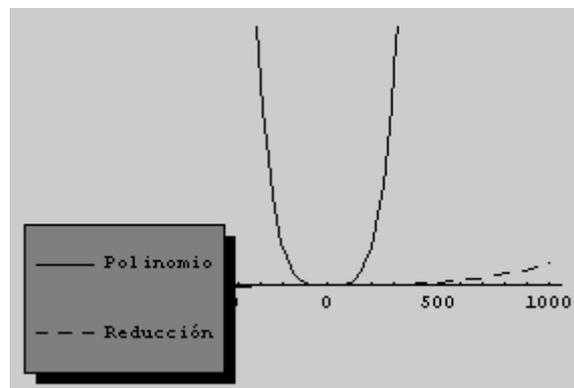
In[13]= VarianteRouth[$331x^4 + 280x^3 + 155x^2 + 49x + 6, 1$]

Polinomio de entrada:

$$6 + 49x + 155x^2 + 280x^3 + 331x^4$$

Mínima reducción necesaria:

Out[13]= $6 + \frac{123067x}{3883} + \frac{3883x^2}{40}$



A 2.8- Variante del algoritmo de Routh para polinomios complejos.

```

In[1]:=
(*paquete y campo de Galois sobre el que se trabaja*)
<< Algebra`FiniteFields`
fld = GF[81];

In[3]:= (*Función T*)
T[poli_] :=
Module[{},
Expand[
1/Last[CoefficientList[poli, x]] poli
]

In[4]:= (*Función TR*)
TR[poli_] :=
Module[{aux},
aux1 = CoefficientList[T[poli], x];
aux = Table[
If[OddQ[i],
Re[aux1[[i]]],
Im[aux1[[i]]] I
],
{i, 1, Length[aux1]}
];
ExtensionDegree[fld] = Length[aux];
ElementToPolynomial[fld[aux], x]
];

(*Función TI*)
TI[poli_] :=
Module[{aux},
aux1 = CoefficientList[T[poli], x];
aux = Table[
If[EvenQ[i],
Re[aux1[[i]]],
Im[aux1[[i]]] I
],
{i, 1, Length[aux1]}
];
ExtensionDegree[fld] = Length[aux];
ElementToPolynomial[fld[aux], x]
];

```

```

In[7]:= (*Qpar*)
Qpar[poli_] :=
  Module[{aux},
    tpoli = T[poli];
    aux = CoefficientList[tpoli, x];
    Expand[
      (TR[tpoli] -  $\frac{1}{\text{Re}[aux[[\text{Length}[aux] - 1]]]}$ 
      x TI[tpoli]) + TI[tpoli]
    ];

```

```

In[8]:= (*Qimpar*)
Qimpar[poli_] :=
  Module[{aux},
    tpoli = T[poli];
    aux = CoefficientList[tpoli, x];
    Expand[
      (TI[tpoli] -  $\frac{1}{\text{Re}[aux[[\text{Length}[aux] - 1]]]}$ 
      x TR[tpoli]) + TR[tpoli]
    ];

```

```

(*Cuerpo del Algoritmo*)
VarianteRouthCompleja[poli_] :=
  Module[{},
    ListaCoeffic[i_] :=
      Module[{},
        CoefficientList[P[i], x]
      ];
    P[0] = poli;
    i = 0;
  StylePrint["Polinomio de entrada:", "DefinitionBox"]
  Print[poli];
  While[
    (Re[ListaCoeffic[i][[\text{Length}[ListaCoeffic[i]]]])
      Re[ListaCoeffic[i][[\text{Length}[ListaCoeffic[i] - 1]]]] +
      Im[ListaCoeffic[i][[\text{Length}[ListaCoeffic[i]]]])
      Im[ListaCoeffic[i][[\text{Length}[ListaCoeffic[i] - 1]]]]) > 0 &&
    Length[CoefficientList[P[i], x]] > 2,

```

```

If[OddQ[Length[ListaCoefic[i]]],
    P[i + 1] = Qpar[P[i]],
    P[i + 1] = Qimpar[P[i]]
];
i++;
];
StylePrint[
    "Mínima reducción necesaria:", "DefinitionBox"];
P[i]
]

```

```

In[10]:= VarianteRouthCompleja[
    x4 + 6 x3 + (14 + I) x2 + (15 + 3 I) x + (6 + 2 I) ]

```

Polinomio de entrada:

$$(6 + 2 i) + (15 + 3 i) x + (14 + i) x^2 + 6 x^3 + x^4$$

Mínima reducción necesaria:

$$\text{Out[10]= } \left(\frac{1151444}{2244637} + \frac{453474 i}{2244637} \right) + \left(\frac{2294628}{2244637} + \frac{202394367 i}{2078533862} \right) x$$

A 2.9- Variante del algoritmo de Jury.

```

In[1]:=
(*paquete y campo de Galois sobre el que se trabaja*)
<< Algebra`FiniteFields`
fld = GF[81];

In[3]:= (*Actualizador de P*)
P[poli_] :=
  Module[{aux, poliforma},
    aux = CoefficientList[poli, z];
    ExtensionDegree[fld] =
      Length[aux];
    Expand[ $\frac{1}{z} \left( \text{poli} - \frac{\text{aux}[[1]]}{\text{aux}[[\text{Length}[aux]]]} \right)$ 
      ElementToPolynomial[
        fld[Reverse[aux]], z]
    ];

(*cuerpo del algoritmo *)
VarianteJury[poli_] :=
  Module[{}],
    ListaCoefic[i_] :=
      Module[{}],
        CoefficientList[P[i], z]
      ];
    P[0] = poli;
    i = 0;
    While[
      (Abs[ListCoefic[Length[ListCoefic[i]]]] >
        Abs[ListCoefic[
          Length[ListCoefic[i]] - 1]]) &&
      Length[ListCoefic[i]] > 2,
      P[i + 1] = P[i];
      i++;
    ];
    StylePrint[
      "Polinomio de entrada:", "DefinitionBox"];
    Print[poli];
    StylePrint["Mínima reducción necesaria:",
      "DefinitionBox"];
    P[i]
  ]

```

In[21]= VarianteJury[

$$32 z^4 + (8 + 32 I) z^3 + (-16 + 4 I) z^2 - (2 + 8 I) z + 2 - I]$$

Polinomio de entrada:

$$(2 - i) - (2 + 8 i) z - (16 - 4 i) z^2 + (8 + 32 i) z^3 + 32 z^4$$

Mínima reducción necesaria:

Out[21]= $(2 - i) - (2 + 8 i) z - (16 - 4 i) z^2 + (8 + 32 i) z^3 + 32 z^4$

Apéndice 3: Implementación del Teorema de Kharitonov.

A 3.1- Teorema de Kharitonov caso Real.

```
In[1]:= (*paquetes y campo de Galois sobre el que se trabaja*)
<< Algebra`FiniteFields`
fld = GF[81];
(*Ppar*)
Ppar[poli_] :=
Module[{aux},
aux = CoefficientList[poli, x];
Do[
aux[[i]] = 0,
{i, 2, Length[aux], 2}
];
ExtensionDegree[fld] =
Length[aux];
ElementToPolynomial[fld[aux], x]
];
(*Pimpar*)
Pimpar[poli_] :=
Module[{aux},
aux = CoefficientList[poli, x];
Do[
aux[[i]] = 0,
{i, 1, Length[aux], 2}
];
ExtensionDegree[fld] = Length[aux];
ElementToPolynomial[fld[aux], x]
];
(*Qpar*)
Qpar[poli_] :=
Module[{aux},
aux = CoefficientList[poli, x];
Expand[
(Ppar[poli] -  $\frac{\text{aux}[[\text{Length}[\text{aux}]]]}{\text{aux}[[\text{Length}[\text{aux}] - 1]}}$ 
x Pimpar[poli]) + Pimpar[poli]
];
```

```

(*Qimpar*)
Qimpar[poli_] :=
  Module[{aux},
    aux = CoefficientList[poli, x];
    Expand[(Pimpar[poli] -
    aux[[Length[aux]]] / aux[[Length[aux] - 1]]
    x Ppar[poli]) + Ppar[poli]]
  ];
(*cuerpo del algoritmo*)
VarianteRouth[poli_] :=
  Module[{}],
    P[0] = poli;
    i = 0;
    While[!MemberQ[NonNegative[
    CoefficientList[P[i], x], False] &&
    Length[CoefficientList[P[i], x]] > 3,
      If[
    OddQ[Length[CoefficientList[P[i], x]]],
      P[i + 1] =
    Qpar[P[i]],
      P[i + 1] =
    Qimpar[P[i]]
    ];
    i++;
  ];
  P[i]
]

```

(*selección de polinomios de Kharitonov*)

(*KminPar*)

```

KminPar[poli_] :=
  Module[{aux},
    aux = CoefficientList[poli, x];
    Do[
      aux[[i]] = 0,
      {i, 2, Length[aux], 2}
    ];
    aux = Min /@ aux;
    ExtensionDegree[fld] = Length[aux];
    ElementToPolynomial[fld[aux], x]
  ];

```

(*KminImpar*)

```

KminImpar[poli_] :=
  Module[{aux},
    aux = CoefficientList[poli, x];
    Do[

```

```

aux[[i]] = 0,
      {i, 1, Length[aux], 2}
    ];
aux = Min /@ aux;
ExtensionDegree[fld] = Length[aux];
ElementToPolynomial[fld[aux], x]
];
(*KmaxPar*)
KmaxPar[poli_] :=
  Module[{aux},
    aux = CoefficientList[poli, x];
    Do[
      aux[[i]] = 0,
      {i, 2, Length[aux], 2}
    ];
    aux = Max /@ aux;
    ExtensionDegree[fld] = Length[aux];
    ElementToPolynomial[fld[aux], x]
  ];
(*KmaxImpar*)
KmaxImpar[poli_] :=
  Module[{aux},
    aux = CoefficientList[poli, x];
    Do[
      aux[[i]] = 0,
      {i, 1, Length[aux], 2}
    ];
    aux = Max /@ aux;
    ExtensionDegree[fld] = Length[aux];
    ElementToPolynomial[fld[aux], x]
  ];
(*Teorema de Kharitonov*)
Kharitonov[poli_] :=
  Module[{},
    (*Polinomios de Kharitonov*)
    K1 =
    KminPar[poli] + KminImpar[poli];
    K2 =
    KminPar[poli] + KmaxImpar[poli];
    K3 =
    KmaxPar[poli] + KminImpar[poli];
    K4 =
    KmaxPar[poli] + KmaxImpar[poli];
  ];

```

```

StylePrint["Polinomios de Kharitonov:",
  "DefinitionBox"];
Print[K1, "\n", K2, "\n", K3, "\n", K4];
StylePrint["Reducción:", "DefinitionBox"];
Print[VarianteRouth[K1]];
      Print[VarianteRouth[K2]];
      Print[VarianteRouth[K3]];
      Print[VarianteRouth[K4]];

];
In[18]:= Kharitonov[Interval[{1, 2}] x^4 +
  Interval[{3, 4}] x^3 + Interval[{5, 6}] x^2 +
  Interval[{7, 8}] x + Interval[{9, 10}]]

```

Polinomios de Kharitonov:

$$9 + 7x + 5x^2 + 3x^3 + x^4$$

$$9 + 8x + 5x^2 + 4x^3 + x^4$$

$$10 + 7x + 6x^2 + 3x^3 + 2x^4$$

$$10 + 8x + 6x^2 + 4x^3 + 2x^4$$

Reducción:

$$9 - \frac{25x}{8} + \frac{8x^2}{3}$$

$$9 - 4x + 3x^2$$

$$10 - \frac{31x}{2} + \frac{4x^2}{3}$$

$$10 - 12x + 2x^2$$

A 3.2- Teorema de Kharitonov caso Complejo.

```

In[1]:= (*paquetes y campo de Galois sobre el que se trabaja*)
<< Algebra`FiniteFields`
fld = GF[81];

In[3]:= (*Función T*)
T[poli_] :=
Module[{},
Expand[
1/Last[CoefficientList[poli, x]] poli
]

In[4]:= (*Función TR*)
TR[poli_] :=
Module[{aux},
aux1 = CoefficientList[T[poli], x];
aux = Table[
If[OddQ[i],
Re[aux1[[i]]],
Im[aux1[[i]]] I
],
{i, 1, Length[aux1]}
];
ExtensionDegree[fld] = Length[aux];
ElementToPolynomial[fld[aux], x]
];

In[5]:= (*Función TI*)
TI[poli_] :=
Module[{aux},
aux1 = CoefficientList[T[poli], x];
aux = Table[
If[EvenQ[i],
Re[aux1[[i]]],
Im[aux1[[i]]] I
],
{i, 1, Length[aux1]}
];
ExtensionDegree[fld] = Length[aux];
ElementToPolynomial[fld[aux], x]
];

(*Qpar*)
Qpar[poli_] :=
Module[{aux},
tpoli = T[poli];

```

```

aux = CoefficientList[tpoli, x];
Expand[
  (TR[tpoli] -  $\frac{1}{\text{Re}[aux[[\text{Length}[aux] - 1]]]}$ 
  x TI[tpoli]) + TI[tpoli]
];
In[8]:= (*Qimpar*)
Qimpar[poli_] :=
Module[{aux},
tpoli = T[poli];
aux = CoefficientList[tpoli, x];
Expand[
  (TI[tpoli] -  $\frac{1}{\text{Re}[aux[[\text{Length}[aux] - 1]]]}$ 
  x TR[tpoli]) + TR[tpoli]
];
In[9]:= (*Cuerpo del Algoritmo*)
VarianteRouthCompleja[poli_] :=
Module[{},
ListaCoefic[i_] :=
Module[{},
CoefficientList[
P[i], x]
];
P[0] = poli;
i = 0;
While[
(Re[ListaCoefic[i][[\text{Length}[ListaCoefic[i]]]]]
Re[ListaCoefic[i][[\text{Length}[ListaCoefic[i] - 1]]]] +
Im[ListaCoefic[i][[\text{Length}[ListaCoefic[i]]]]]
Im[ListaCoefic[i][[\text{Length}[ListaCoefic[i] - 1]]]]) >
0 && Length[CoefficientList[P[i], x]] > 2,
If[
OddQ[Length[ListaCoefic[i]]],
P[i + 1] = Qpar[P[i]],
P[i + 1] = Qimpar[P[i]]
];
i++;
];
P[i]
];

```

```

In[10]:= (*Función RpostMax*)
RpostMax[poli_] :=
  Module[{aux},
    aux1 = CoefficientList[poli, x];
    aux = Table[
      If[(Sin[ $\frac{i \pi}{2}$ ] + Cos[ $\frac{i \pi}{2}$ ])] > 0,
        If[OddQ[i],
          Max[Re[aux1[[i]]]],
          Max[Im[aux1[[i]]]] I
        ],
        If[OddQ[i],
          Min[Re[aux1[[i]]]],
          Min[Im[aux1[[i]]]] I
        ]
      ],
    {i, 1, Length[aux1]}
  ];
  ExtensionDegree[fld] = Length[aux];
  ElementToPolynomial[fld[aux], x]
];

```

(*Función RpostMin*)

```

RpostMin[poli_] :=
  Module[{aux},
    aux1 = CoefficientList[poli, x];
    aux = Table[
      If[(Sin[ $\frac{i \pi}{2}$ ] + Cos[ $\frac{i \pi}{2}$ ])] > 0,
        If[OddQ[i],
          Min[Re[aux1[[i]]]],
          Min[Im[aux1[[i]]]] I
        ],
        If[OddQ[i],
          Max[Re[aux1[[i]]]],
          Max[Im[aux1[[i]]]] I
        ]
      ],
    {i, 1, Length[aux1]}
  ];
  ExtensionDegree[fld] = Length[aux];
  ElementToPolynomial[fld[aux], x]
];

```

In[13]:= (*Función IpostMax*)

```
IpostMax[poli_] :=  
  Module[{aux},  
    aux1 = CoefficientList[poli, x];  
    aux = Table[  
      If[(Sin[ $\frac{i \pi}{2}$ ] - Cos[ $\frac{i \pi}{2}$ ])] > 0,  
        If[OddQ[i],  
          Max[Im[aux1[[i]]]] I,  
          Max[Re[aux1[[i]]]]  
        ],  
        If[OddQ[i],  
          Min[Im[aux1[[i]]]] I,  
          Min[Re[aux1[[i]]]]  
        ]  
      ],  
    {i, 1, Length[aux1]}  
  ];  
ExtensionDegree[fld] = Length[aux];  
ElementToPolynomial[fld[aux], x]  
];
```

In[15]:= (*Función IpostMin*)

```
IpostMin[poli_] :=  
  Module[{aux},  
    aux1 = CoefficientList[poli, x];  
    aux = Table[  
      If[(Sin[ $\frac{i \pi}{2}$ ] - Cos[ $\frac{i \pi}{2}$ ])] > 0,  
        If[OddQ[i],  
          Min[Im[aux1[[i]]]] I,  
          Min[Re[aux1[[i]]]]  
        ],  
        If[OddQ[i],  
          Max[Im[aux1[[i]]]] I,  
          Max[Re[aux1[[i]]]]  
        ]  
      ],  
    {i, 1, Length[aux1]}  
  ];  
ExtensionDegree[fld] = Length[aux];  
ElementToPolynomial[fld[aux], x]  
];
```

In[16]:= (*Función RnegatMax*)

```
RnegatMax[poli_] :=  
  Module[{aux},  
    aux1 = CoefficientList[poli, x];  
    aux = Table[  
      If[(Sin[ $\frac{i \pi}{2}$ ] - Cos[ $\frac{i \pi}{2}$ ])] > 0,  
        If[OddQ[i],  
          Max[Re[aux1[[i]]]],  
          Max[Im[aux1[[i]]]] I  
        ],  
        If[OddQ[i],  
          Min[Re[aux1[[i]]]],  
          Min[Im[aux1[[i]]]] I  
        ]  
      ],  
    {i, 1, Length[aux1]}  
  ];  
ExtensionDegree[fld] = Length[aux];  
ElementToPolynomial[fld[aux], x]  
];
```

In[17]:= (*Función RnegatMin*)

```
RnegatMin[poli_] :=  
  Module[{aux},  
    aux1 = CoefficientList[poli, x];  
    aux = Table[  
      If[(Sin[ $\frac{i \pi}{2}$ ] - Cos[ $\frac{i \pi}{2}$ ])] > 0,  
        If[OddQ[i],  
          Min[Re[aux1[[i]]]],  
          Min[Im[aux1[[i]]]] I  
        ],  
        If[OddQ[i],  
          Max[Re[aux1[[i]]]],  
          Max[Im[aux1[[i]]]] I  
        ]  
      ],  
    {i, 1, Length[aux1]}  
  ];  
ExtensionDegree[fld] = Length[aux];  
ElementToPolynomial[fld[aux], x]  
];
```

In[19]:= (*Función InegatMax*)

```
InegatMax[poli_] :=  
  Module[{aux},  
    aux1 = CoefficientList[poli, x];  
    aux = Table[  
      If[(Sin[ $\frac{i \pi}{2}$ ] + Cos[ $\frac{i \pi}{2}$ ])] > 0,  
        If[OddQ[i],  
          Max[Im[aux1[[i]]]] I,  
          Max[Re[aux1[[i]]]]  
        ],  
        If[OddQ[i],  
          Min[Im[aux1[[i]]]] I,  
          Min[Re[aux1[[i]]]]  
        ]  
      ],  
    {i, 1, Length[aux1]}  
  ];  
ExtensionDegree[fld] = Length[aux];  
ElementToPolynomial[fld[aux], x]  
];
```

In[21]:= (*Función InegatMin*)

```
InegatMin[poli_] :=  
  Module[{aux},  
    aux1 = CoefficientList[poli, x];  
    aux = Table[  
      If[(Sin[ $\frac{i \pi}{2}$ ] + Cos[ $\frac{i \pi}{2}$ ])] > 0,  
        If[OddQ[i],  
          Min[Im[aux1[[i]]]] I,  
          Min[Re[aux1[[i]]]]  
        ],  
        If[OddQ[i],  
          Max[Im[aux1[[i]]]] I,  
          Max[Re[aux1[[i]]]]  
        ]  
      ],  
    {i, 1, Length[aux1]}  
  ];  
ExtensionDegree[fld] = Length[aux];  
ElementToPolynomial[fld[aux], x]  
];
```

In[28]:= (*Teorema de Kharitonov*)

```
KharitonovComplex[poli_] :=  
  Module{{,  
    (*Polinomios de Kharitonov positivos*)  
    Kpost[1] = RpostMin[poli] + IpostMin[poli];  
    Kpost[2] = RpostMin[poli] + IpostMax[poli];  
    Kpost[3] = RpostMax[poli] + IpostMin[poli];  
    Kpost[4] = RpostMax[poli] + IpostMax[poli];  
    (*Polinomios de Kharitonov negativos*)  
    Knegat[1] =  
  RnegatMin[poli] + InegatMin[poli];  
    Knegat[2] =  
  RnegatMin[poli] + InegatMax[poli];  
    Knegat[3] =  
  RnegatMax[poli] + InegatMin[poli];  
    Knegat[4] =  
  RnegatMax[poli] + InegatMax[poli];  
  StylePrint["Polinomios de Kharitonov:", "DefinitionBox"];  
  Do[Print[Kpost[i]]  
    , {i, 4}];  
  Do[Print[Knegat[i]]  
    , {i, 4}];  
  StylePrint["Reducciones:", "DefinitionBox"];  
    (*POSITIVOS*)  
    Do[  
      Kmas = VarianteRouthCompleja[Kpost[i]];  
      auxKmas = CoefficientList[Kmas, x];  
      Print[  
        VarianteRouthCompleja[Kpost[i]] // N]  
      , {i, 4}];  
      Print[""];  
    (*NEGATIVOS*)  
    Do[  
      Kneg[i] = VarianteRouthCompleja[Knegat[i]];  
      auxKneg[i] = CoefficientList[Kneg[i], x];  
      Print[VarianteRouthCompleja[Kneg[i]] // N]  
      , {i, 4}];  
    ];
```

```
In[29]:= KharitonovComplex[
  (Interval[{17, 18}] + Interval[{19, 20}] I) x^4 +
  (Interval[{13, 14}] + Interval[{15, 16}] I) x^3 +
  (Interval[{9, 10}] + Interval[{11, 12}] I) x^2 +
  (Interval[{5, 6}] + Interval[{7, 8}] I) x +
  (Interval[{1, 2}] + Interval[{3, 4}] I)]
```

Polinomios de Kharitonov:

```
(1 + 3 i) + (5 + 8 i) x + (10 + 12 i) x^2 + (14 + 15 i) x^3 + (17 + 19 i) x^4
(1 + 4 i) + (6 + 8 i) x + (10 + 11 i) x^2 + (13 + 15 i) x^3 + (17 + 20 i) x^4
(2 + 3 i) + (5 + 7 i) x + (9 + 12 i) x^2 + (14 + 16 i) x^3 + (18 + 19 i) x^4
(2 + 4 i) + (6 + 7 i) x + (9 + 11 i) x^2 + (13 + 16 i) x^3 + (18 + 20 i) x^4
(1 + 3 i) + (6 + 7 i) x + (10 + 12 i) x^2 + (13 + 16 i) x^3 + (17 + 19 i) x^4
(1 + 4 i) + (5 + 7 i) x + (10 + 11 i) x^2 + (14 + 16 i) x^3 + (17 + 20 i) x^4
(2 + 3 i) + (6 + 8 i) x + (9 + 12 i) x^2 + (13 + 15 i) x^3 + (18 + 19 i) x^4
(2 + 4 i) + (5 + 8 i) x + (9 + 11 i) x^2 + (14 + 15 i) x^3 + (18 + 20 i) x^4
```

Reducciones:

```
(0.500871 + 0.505682 i) - (1.59147 + 0.45998 i) x
(0.500871 + 0.505682 i) - (1.59147 + 0.45998 i) x
(0.500871 + 0.505682 i) - (1.59147 + 0.45998 i) x
(0.500871 + 0.505682 i) - (1.59147 + 0.45998 i) x

(0.277096 - 0.225165 i) - (0.421886 + 0.106743 i) x
(0.381049 - 0.272039 i) - (0.714598 - 0.521267 i) x
(-0.0281521 + 0.338044 i) - (0.566492 + 2.35432 i) x
(-0.00591768 + 0.719202 i) - (1.87529 + 4.91693 i) x
```