

**Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas**  
Facultad de Ingeniería Eléctrica  
Departamento de Automática y Sistemas Computacionales



**Algoritmo matemático para el cálculo de la dinámica de  
vehículos terrestres en tiempo real**

**Tesis presentada en opción al grado de Máster en Ciencias Técnicas**

**Autor: Ing. Yandy Pérez Ramos**  
**Tutor: Dr. Ángel Ernesto Rubio Rodríguez**

**Santa Clara, 2011**

**Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas**  
Facultad de Ingeniería Eléctrica  
Departamento de Automática y Sistemas Computacionales



## **Algoritmo matemático para el cálculo de la dinámica de vehículos terrestres en tiempo real**

**Tesis presentada en opción al grado de Máster en Ciencias Técnicas**

**Autor: Ing. Yandy Pérez Ramos**

Especialista en Automática

CEDAI, Ciego de Ávila

E-mail: [ypramos1986@hotmail.com](mailto:ypramos1986@hotmail.com)

**Tutor: Dr. Ángel Ernesto Rubio Rodríguez**

Prof. Auxiliar, Dpto. Automática

Facultad de Ing. Eléctrica. UCLV.

E-mail: [rubio@uclv.edu.cu](mailto:rubio@uclv.edu.cu)

**Santa Clara, 2011**



Hago constar que el presente trabajo de diploma fue realizado en la Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas como parte de la culminación de estudios de la maestría de Ingeniería en Automática y Sistemas Informáticos.

---

Firma del Autor

Los abajo firmantes certificamos que el presente trabajo ha sido realizado según acuerdo de la dirección de nuestro centro y el mismo cumple con los requisitos que debe tener un trabajo de esta envergadura referido a la temática señalada.

---

Firma del Autor

---

Firma del Jefe de  
Departamento donde se  
defiende el trabajo

---

Firma del Responsable de  
Información Científico-Técnica

# ***PENSAMIENTO***

---

*“La energía no se crea, siempre existe, y no se destruye, solamente se transforma por medio del pensamiento o voluntad de quien la maneja”*

***Albert Einstein***

## ***DEDICATORIA***

---

*Esta tesis está dedicada a Aida Ramos Pino y a Ana María Sardiña Luque, por ser mi inspiración.*

---

---

## ***AGRADECIMIENTO***

---

La culminación de esta tesis se ha realizado gracias a una serie de personas que me han apoyado y siempre han estado presentes para tenderme una mano amiga:

- A mi familia por el apoyo incondicional que siempre me han brindado.
- A Aida por ser la mejor madre del mundo.
- A mi padre Tobio y su esposa Anabel, por siempre estar cuando los necesité.
- A mi novia Ana por brindarme su apoyo y su amor.
- A mi tía Nery por quererme como una madre.
- A Roberto por ser como un hermano para mí.
- A mis hermanos Michel, Yudeni y Yueli, por ese granito de arena que aportaron a mi formación.
- A mi tía Rosy y a mi abuelo Montoto por estar en todo momento.
- A mis compañeros y amigos Rigo, Angel, Maikel, Gilberto, Enmanuel, Michel, Roberto, Alex y en general a todos mis compañeros de CEDAI.
- A todos mis amigos, Lugo, Ofarril, Lisbey, etc, por soportarme durante estos años.
- A Babi, Alfredo, Alfre, Ayle, Celine, Mirita y a Kike, por hacerme sentir parte de su familia.
- A Allenis y Carlitos por ayudarme incondicionalmente.
- A mis profesores por ser formadores de lo que actualmente soy y en especial a mi tutor Ernesto Rubio.
- Y en general a todos los que de una forma u otra hicieron posible mi formación profesional.

---

## ***TAREAS TÉCNICAS***

---

- Análisis crítico de la bibliografía disponible.
- Estudio de las características físicas-matemáticas de los vehículos terrestres.
- Desarrollo de un modelo dinámico simplificado de un vehículo terrestre.
- Programación de algoritmos matemáticos en *Matlab* y *C* para el cálculo del modelo dinámico.
- Validación de los algoritmos.
- Análisis del desempeño de los algoritmos programados en tiempo real.
- Confección del informe final.

---

Firma del Autor

---

Firma del Tutor

---

## *SÍNTESIS*

---

En las últimas décadas los simuladores de vehículos terrestres han alcanzado gran relevancia, simultáneamente a esto se puede decir que la dinámica vehicular que en ellos está presente representa un tema de creciente interés científico, económico y social, ya que buena parte de estas investigaciones van encaminadas al desarrollo de entrenadores de conductores.

En la presente investigación se han desarrollado varios algoritmos matemáticos para calcular la dinámica de un vehículo terrestre, los mismos se han programado en *Matlab* y en *C*, obteniéndose algoritmos que se desempeñan en tiempo real y que se aproximan con buena exactitud al comportamiento de un vehículo real.

Los cálculos que realizan los algoritmos permiten generar señales que pueden ser tomadas como referencia para el mundo virtual y para el control de trayectoria de la plataforma de simulación.

Se ha evaluado el desempeño de los algoritmos en tiempo real, lo cual permite determinar el más adecuado según las prestaciones del sistema de cómputo disponible.

El empleo de una técnica de modelado propia, en contraposición con el uso de un programa de simulación comercial, implica alcanzar un conocimiento del sistema más profundo. Dentro de este planteamiento, se eligió principalmente el modelado dinámico, el cual utiliza las leyes físicas que rigen el mundo virtual, aunque existen determinados subsistemas que son modelados mediante funciones analíticas empíricas.

---

---

# ÍNDICE

---

<b>PENSAMIENTO</b> .....	<b>i</b>
<b>DEDICATORIA</b> .....	<b>ii</b>
<b>AGRADECIMIENTOS</b> .....	<b>iii</b>
<b>TAREAS TÉCNICAS</b> .....	<b>iv</b>
<b>SÍNTESIS</b> .....	<b>v</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>1</b>
Importancia y necesidad del tema .....	1
El problema y la hipótesis.....	5
Objetivos del trabajo.....	6
Estructura del informe .....	8
<b>CAPÍTULO 1. Análisis del estado del arte</b> .....	<b>10</b>
1.1 Los simuladores de conducción.....	10
1.2 Dinámica vehicular.....	13
1.2.1 Teoría de Julien.....	14
1.2.2 El modelo de bicicleta.....	15
1.2.3 El modelo <i>Yaw-Roll</i> .....	16
1.2.4 Técnica del <i>Bond Graph</i> .....	16
1.3 Herramientas existentes para la simulación de vehículos terrestres .....	18
1.4 Algoritmos matemáticos utilizados en el cálculo de modelos dinámicos	19
1.5 Complejidad computacional.....	20

---

Conclusiones parciales.....	22
<b>CAPÍTULO 2. Modelo dinámico simplificado de un vehículo terrestre .....</b>	<b>23</b>
2.1 Análisis de la dinámica de un cuerpo rígido en el espacio.....	23
2.2 Análisis de la dinámica del chasis del vehículo .....	25
2.3 Dinámica del motor y la transmisión del vehículo .....	27
2.4 Dinámica de los neumáticos .....	28
2.4.1 Deslizamiento longitudinal.....	29
2.4.2 Ángulo de deslizamiento.....	31
2.4.3 Fórmula mágica.....	33
2.4.4 Resistencia a la rodadura .....	35
2.5 Dinámica direccional del vehículo.....	35
2.6 Sistema de suspensión.....	37
2.7 Funciones aleatorias para la creación de superficies .....	39
2.8 Cambios de referencia.....	41
2.9 Fuerzas que actúan sobre el vehículo .....	42
Conclusiones parciales.....	45
<b>CAPÍTULO 3. Implementación de algoritmos matemáticos.....</b>	<b>46</b>
3.1 Transformación de un sistema de ecuaciones diferenciales en un problema de Cauchy .....	46
3.2 Método de Euler .....	50
3.2.1 Error en el método de Euler.....	52
3.3 Método de Runge-Kutta de orden dos.....	54
3.3.1 Error en el método de Runge-Kutta de orden dos .....	57
3.4 Método de Runge-Kutta de orden cuatro.....	58

---

3.5	Método de Adams-Bashforth de orden cuatro .....	63
	Conclusiones parciales.....	65
<b>CAPÍTULO 4. Validación y comparación de los algoritmos matemáticos utilizados.....</b>		<b>66</b>
4.1	Función impulso en el volante del vehículo (prueba 1).....	68
4.2	Aceleración y de desaceleración con el pedal de vehículo (prueba 2) ...	71
4.3	Irregularidad en la vía (prueba 3).....	73
4.4	Comparación entre los algoritmos propuestos .....	74
4.5	Análisis económico .....	78
	Conclusiones parciales.....	79
<b>CONCLUSIONES .....</b>		<b>80</b>
<b>RECOMENDACIONES .....</b>		<b>81</b>
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>		<b>82</b>
<b>ANEXOS .....</b>		<b>89</b>
Anexo I	Software <i>TruckSim</i> .....	89
Anexo II	Datos generales del <i>PIC32MX460F512L</i> .....	90
Anexo III	Pinout del <i>PIC32MX460F512L</i> .....	91
Anexo IV	Pinout del <i>DSPIC33FJ32GP204</i> .....	92
Anexo V	Simulación del <i>DSPIC33FJ32GP204</i> con <i>ISIS Professional</i> .....	93

---

# ***INTRODUCCIÓN***

---

En las últimas décadas los simuladores de vehículos terrestres han alcanzado gran relevancia, simultáneamente a esto, se puede decir que la dinámica vehicular que en ellos está presente, representa un tema de creciente interés científico, económico y social, ya que buena parte de estas investigaciones van encaminadas al desarrollo de entrenadores de conductores [Bogdevicius y col., 2004]. Son innumerables las instituciones y universidades del mundo que se han dedicado al desarrollo de estos simuladores, los cuales se pueden asociar a los grandes beneficios que traen aparejados consigo, como son: la utilización de estos con fines militares, en la solución de problemáticas del tráfico y la seguridad vial, en el análisis de variables psicofísicas y aspectos psicológicos tales como: la fatiga, los tiempos de reacción, la atención sostenida, las motivaciones del conductor, las actitudes hacia los demás usuarios o hacia la velocidad, aspectos que están íntimamente ligados al factor humano.

## **Importancia y necesidad del tema**

Aunque existen otros tipos de vehículos, como los aéreos y los marítimos, uno de los medios de transporte más empleados por el hombre es el vehículo terrestre, cuyo uso se ha vuelto indispensable en la vida cotidiana. De manera general, los vehículos terrestres pueden clasificarse como guiados y no guiados, siendo los primeros, aquellos que están restringidos a desplazarse sobre una estructura fija y que no tienen un control direccional, como es el caso del ferrocarril, mientras que los segundos poseen la capacidad de cambiar de dirección, según lo demanden las condiciones del entorno.

En la actualidad debido al gran costo que implica realizar maniobras tanto civiles como militares, apoyándose en vehículos terrestres, han tomado un gran auge los simuladores de conducción, se han ido aunando esfuerzos para la construcción

de los mismos y de esta forma poder utilizarlos en el entrenamiento de soldados y del personal necesario en la conducción de vehículos, los cuales tienen que estar en óptima forma en situaciones adversas, las que pueden generarse mediante los simuladores, obteniéndose un ahorro significativo en los gastos de entrenamiento; lo que implica que en poco tiempo se logre sufragar la inversión económica realizada en la construcción de los mismos.

El objetivo de un simulador de conducción es reproducir las sensaciones que un chófer recibe cuando tiene el mando del vehículo. El realismo de la simulación entonces depende de la fidelidad básica de las sensaciones, y la relación entre el mando del chófer y las respuestas del sistema [Huang y col., 2003].

La calidad y exactitud del seguimiento de trayectoria en los simuladores de conducción son elementos clave dentro del desempeño de los mismos, debido a que la calidad de este seguimiento repercute directamente sobre las sensaciones producidas por el simulador, las mismas deben ser muy similares a las producidas en un vehículo real, y debe existir un correcto sincronismo entre imagen y movimiento [Lee y col., 1998].

Para el seguimiento de trayectoria la mayoría de la literatura consultada propone prealimentar posición y sus dos primeras derivadas [Lozano, 1996]. El hecho de tener que derivar la señal de posición resulta un problema, por lo tanto se sugiere obtener la velocidad y la aceleración directamente para evitar derivar, y de esta forma mejorar significativamente el resultado del seguimiento de trayectoria sin necesidad de grandes procesos de filtraje [Jason, 2004], [Castaneda, 2007].

Para producir un correcto seguimiento de trayectoria se necesita prealimentar posición, velocidad y aceleración al sistema de control, para ello numerosos autores proponen la implementación de modelos matemáticos complejos en sistemas de cómputo potentes para garantizar que los cálculos se realicen en tiempo real [Naya y col., 2003], [Dopico, 2004], [Naya, 2007].

El empleo de una técnica de modelado propia, en contraposición con el uso de un programa de simulación comercial, implica alcanzar un conocimiento del sistema más profundo, al requerir que el simulador desarrolle su propio modelo, tomando las decisiones sobre la forma de consideración de cada uno de los elementos que

intervienen en el sistema y su interacción con el resto [Maint, 2006]. Dentro de este planteamiento se eligió principalmente el modelado físico-matemático, el cual está regido por las leyes físicas que gobiernan el mundo, aunque existen determinados subsistemas que son modelados mediante funciones analíticas empíricas.

Existen varios modelos matemáticos que se utilizan en la simulación y control de vehículos terrestres, estos generalmente son complejos y muy precisos [González y col., 2008].

La teoría de Julien es uno de los modelos antes mencionados que se utilizan en el mundo, en este, los neumáticos son tratados como bandas elásticas, la superficie de contacto se considera rectangular y la presión se considera que está uniformemente distribuida [Wong, 1978]. El denominado modelo de bicicleta es uno de los más usados hoy en día debido a su fácil implementación y comprensión, consiste en describir la dinámica que encierra una bicicleta, la cual tiene muchos fenómenos físicos en común con los vehículos terrestres [Jazar, 2008]. El modelo *Yaw-Roll* es un modelo de simulación teórico-numérico del comportamiento dinámico de vehículos pesados, con base en el dominio del tiempo, el mismo es utilizado para determinar la respuesta de coleo y balanceo de vehículos multiarticulados [Karnopp, 2004]. Otra de las técnicas importantes utilizadas en el modelado de vehículos terrestres es la de *Bond Graph*, esta técnica se basa en la integración de subsistemas mecánicos, dándole un gran peso a la conservación de energía presentes en los mismos [Filippini y col., 2005]. Sería interesante y novedoso implementar un modelo matemático simplificado de la dinámica del vehículo terrestre en tiempo real en un sistema basado en un microcontrolador de menos prestaciones que una computadora, para contar con una señal de referencia derivable, lo cual permitiría mejorar el seguimiento de trayectoria y liberar al sistema de cómputo de esta tarea de modo que solo necesita ocuparse de la visualización del mundo virtual y mejorar su calidad sin necesidad de aumentar su potencia de cálculo [Dopico, 2004].

Para lograr una simulación exitosa se necesita un algoritmo matemático capaz de realizar cálculos que se aproximen a los fenómenos físicos reales en tiempo real [Burgermeister, 2007].

Dentro de los algoritmos matemáticos que pueden ser utilizados para el cálculo del modelo dinámico simplificado están: el método de Euler, Runge Kutta de orden dos, Runge Kutta de orden cuatro y Adams-Bashforth, esto es debido a que estos métodos poseen gran exactitud de cálculo y un relativo bajo costo computacional [Burrage, 2006].

Se obtienen, con el desarrollo de este trabajo, varios algoritmos matemáticos que se utilizarán para realizar simulaciones en el simulador de tres grados de libertad, con que cuenta el Grupo de Automatización, Robótica y Percepción (GARP) de la Universidad Central Marta Abreu de las Villas.

A partir de la conferencia de Alma-Ata en 1978 se plantea la estrategia “Salud para todos en el año 2000”, basada en el enfoque de atención primaria en salud. Este enfoque, orientado a la atención de los principales problemas de salud de la comunidad, entre los que se encuentran los accidentes de tránsito, implica entre otras cosas, su prevención a través de la participación coordinada de todos los actores sociales vinculados al desarrollo nacional. El reconocimiento de la creciente importancia de este problema llevó a establecer programas de control de accidentes en todas las regiones que forman parte de la Organización Mundial de la Salud, promoviendo la utilización de tecnologías de seguridad efectiva y formulando políticas y programas preventivos adecuados, basados en el desarrollo de acciones por parte de la comunidad. El simulador de tres grados de libertad con que cuenta GARP, en conjunto con las herramientas de simulación de vehículos terrestres, forma parte de los pasos de avance que proporciona la tecnología.

La presente investigación, aunque logra un análisis profundo de los fenómenos que se abordan en ella, se puede definir como una investigación cuantitativa, debido a que plantea un problema de estudio delimitado y concreto, sobre la base de la revisión de la literatura se construye el marco teórico, de estas teorías se derivan hipótesis que son sometidas a pruebas empleando los diseños de investigación apropiados.

En el mundo existen varias instituciones y grupos de investigación que se dedican a la obtención de modelos dinámicos de vehículos terrestres y algoritmos para el cálculo de los mismos, entre ellos se encuentran:

- Asociación Argentina de Mecánica Computacional, donde sobresalen: A. Nacusse, G. Pierussi, S. Junco.
- Departamento de Mecánica del politécnico de Torino, donde se destacan: M. Fenoglio, A. Fornero, M. Velardocchia.
- Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales, Universidad Politécnica de Madrid, se destaca: J. Lozano, F. Jiménez, F. Aparicio.
- Centro Automotriz de Estados Unidos, se destacan: D. Assanis, Z. Filipi, S. Gravante, G. Rideout, Y. Wang.
- Instituto Mexicano del Transporte, se destacan los investigadores: O. Flores, M. Fabela, M. Martínez.
- Escuela de Ingeniería Mecánica, Universidad Nacional de Rosario, se destacan los investigadores: G. Filippini, N. Nigro, S. Junco.
- Departamento de Matemática, Universidad de Manchester, donde se destacan: C. Baker, C. Paul.
- Laboratorio de Computación y Matemática Aplicada de Brasil, se destacan los investigadores: M. Domínguez, O. Roussel, K. Schneider.

Las investigaciones en este campo en Cuba han sido lideradas fundamentalmente por SIMPRO, y junto a esta empresa, GARP está dando grandes pasos de avances en este campo científico en Cuba.

## **El problema y la hipótesis**

El correcto seguimiento de las trayectorias generadas por el mundo virtual depende de que la señal de referencia al sistema de control tenga múltiples derivadas para hacer una adecuada prealimentación. Los simuladores reportados que resuelven este problema, utilizan modelos matemáticos muy completos y medios de cómputo muy potentes, que permiten el cálculo muy preciso de la

dinámica del vehículo y su representación en el mundo virtual. Esto constituye un problema si no se cuentan con estos medios de cómputo. Una solución sería implementar un modelo relativamente simple de la dinámica vehicular con algoritmos de cálculo adecuados, en un sistema a microcontrolador. Pero hay muy poco reportado en este sentido por lo que constituye el problema científico abordado en este trabajo.

¿Qué simplificaciones se pueden hacer en el modelo de la dinámica vehicular sin que se pierda mucho en precisiones respecto a la dinámica real?

¿Cómo implementar ese modelo con algoritmos matemáticos que deben correr en tiempo real en un sistema basado en un microcontrolador?

Para el desarrollo de este trabajo se asume como hipótesis que, un modelo simplificado, implementado con un algoritmo adecuado, permitiría ejecutar en tiempo real, en un sistema basado en un microcontrolador, la dinámica de un vehículo en movimiento. Esto permitiría generar las señales de referencia derivables necesarias para un adecuado seguimiento de trayectorias en un simulador de conducción y por demás, permitiría liberar de esta tarea al sistema de cómputo del mundo virtual el cual pudiera ser calculado con una mejor precisión. Los resultados corroboran la hipótesis planteada, apoyados por datos numéricos y procedimientos estadísticos.

## **Objetivos del trabajo**

Atendiendo a la interrogante científica planteada, se propone el siguiente objetivo general:

- Proponer algoritmos matemáticos para el cálculo de la dinámica de un vehículo terrestre, adecuados para implementarse en un sistema de cómputo basado en microcontroladores y que pueda ser ejecutado en tiempo real.

Para llevar a cabo el objetivo antes mencionado, se proponen los siguientes objetivos específicos:

- Evaluar críticamente los modelos matemáticos reportados de vehículos en movimiento así como los algoritmos empleados para su cálculo.
- Sintetizar un modelo dinámico simplificado de un vehículo terrestre.
- Validar el modelo y los algoritmos propuestos utilizando *Matlab* y *C*.
- Evaluar los algoritmos propuestos, atendiendo a su desempeño computacional.

Y las tareas a realizar son las siguientes:

- Valoración crítica, en la bibliografía disponible, de los modelos de la dinámica vehicular así como de los algoritmos para su implementación.
- Análisis de las características físicas-matemáticas de los vehículos terrestres.
- Síntesis de un modelo dinámico simplificado de un vehículo terrestre.
- Validación del modelo propuesto.
- Programación de algoritmos matemáticos, en *Matlab* y *C*, para el cálculo del modelo dinámico.
- Validación de los algoritmos.
- Evaluación del desempeño de los algoritmos programados en tiempo real en un sistema basado en un microcontrolador.

Los resultados parciales de esta investigación se han venido presentando en numerosos eventos de carácter nacional e internacional y han quedado publicados en sus memorias:

- VIII Taller Internacional sobre la Enseñanza de la Física en la Ingeniería, EFING. La Habana, 2008: “Modelo dinámico de la suspensión de vehículos terrestres”. [Pérez, 2008b]
- 14 Convención Científica de Ingeniería y Arquitectura, CUJAE. La Habana, 2008: “Modelado de vehículos terrestres”. [Pérez, 2008a]

- Evento ITM. La Habana, 2009: “Modelo dinámico de vehículos terrestres”. [Pérez, 2009]
- II Taller de Aplicaciones Informáticas para la Automatización, UCIENCIA2010. La Habana, 2010: “Modelado y simulación dinámica de vehículos terrestres”. [Pérez, 2010a]
- XIV Convención y Feria Internacional de Informática, Informática2011. La Habana, 2011: “Modelo dinámico y simulación dinámica de vehículos terrestres en tiempo real”. [Pérez, 2011]

## Estructura del informe

El informe final de este trabajo tiene la siguiente estructura:

En el **primer capítulo** se establece el marco teórico. Se hace un análisis crítico de los modelos de vehículos más utilizados en el mundo, demostrando las capacidades y debilidades que poseen cada uno de ellos. También se analizan algunos métodos computacionales para la implementación de los modelos dinámicos y su complejidad computacional.

El **segundo capítulo** está dedicado al estudio de la dinámica de los vehículos terrestres, conformando un modelo dinámico simplificado de los mismos. Se hacen análisis del sistema de suspensión, del sistema de dirección, de la geometría del vehículo, y en general de los fenómenos más importantes que intervienen en la dinámica de los vehículos terrestre.

En el **tercer capítulo** se procede a realizar la implementación matemática de los métodos de Euler, Runge-Kutta de orden dos, Runge-Kutta de orden cuatro y Adams-Bashforth de orden cuatro para el modelo simplificado obtenido anteriormente.

A la validación del modelo dinámico y la comparación de los algoritmos se dedica el **cuarto capítulo**. En este capítulo se realiza la validación del modelo simplificado mediante tres pruebas, realizando una comparación de los resultados con un modelo patrón. También se realiza la comparación de los algoritmos

matemáticos que se han sintetizado, en cuanto a su desempeño computacional, y se hace énfasis en los tiempos de cálculos de los algoritmos.

Finalmente, se exponen las **conclusiones** y **recomendaciones** a las que se arribó tras el desarrollo de este trabajo, así como la **bibliografía** referenciada a lo largo del informe.

---

# *CAPÍTULO 1*

---

## **Análisis del estado del arte**

Durante los últimos años, se han producido una gran cantidad de trabajos en la construcción de modelos de vehículos muy complejos y con elevada no linealidad, buscando la simulación de la dinámica de estos con un excesivo número de grados de libertad. La evolución de los ordenadores ha contribuido en lo antes planteado, permitiendo el desarrollo de algoritmos para el cálculo de modelos muy complejos; sin embargo, la tarea de obtener las ecuaciones diferenciales del modelo ha demostrado ser una tarea difícil, costosa en términos de tiempo y tendente a errores.

Se hace necesario realizar un estudio que permita discernir qué elementos del vehículo deben ser modelados para cada caso de aplicación y qué grados de libertad son de relevancia, puesto que de otra forma se corre el riesgo de complicar demasiado el modelo sin obtener un beneficio claro.

Con esta investigación se llega a un modelo simplificado de un vehículo terrestre y el cálculo de su dinámica mediante algoritmos matemáticos en tiempo real, esto permitirá avanzar en el conocimiento de los sistemas de vehículos, así como en el comportamiento general del mismo y la influencia relativa de cada subsistema para obtener resultados realistas.

### **1.1 Los simuladores de conducción.**

Es difícil precisar cuándo y cómo surgió y a quién puede atribuírsele la primera idea, ensayo o experimento de lo que, con el tiempo, habría de denominarse automóvil. Se conoce, sí, que no fue el fruto del ingenio o del trabajo de un

hombre solo y determinado, sino la síntesis de las ideas y los esfuerzos de muchos a través de los años [Aird, 2000], [Bergolla, 2008].

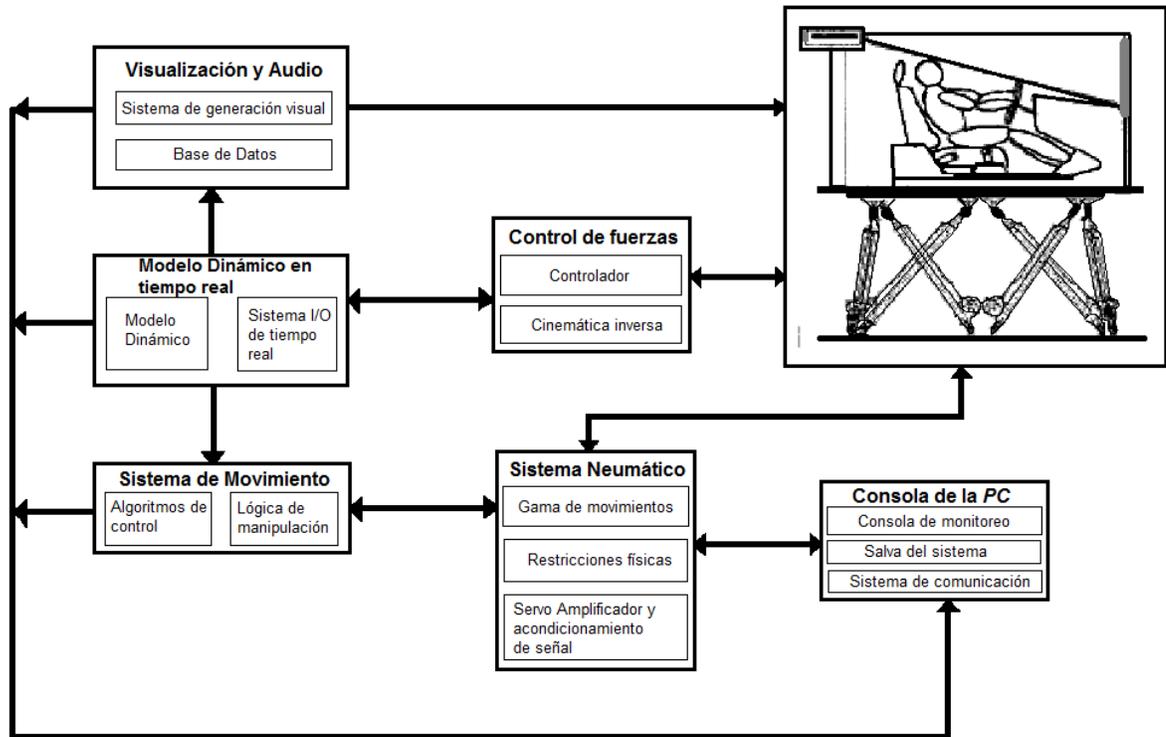
Con los autos llegaron los accidentes mortales y de ahí la necesidad de entrenar a los conductores para tratar de evitar pérdidas humanas y materiales. Por otra parte el equipamiento militar es cada vez más complejo y sofisticado por lo que implica también el empleo de simuladores para el entrenamiento de los soldados y de esta forma lograr una mejor preparación de los mismos con un menor gasto monetario.

Los vehículos terrestres han sido objeto del desarrollo tecnológico alcanzado por el hombre. A finales del siglo XX comienzan a surgir los simuladores de conducción los cuales han jugado un papel importante en la transición a formas alternativas de entrenamiento y también utilizados como vía de enfrentamiento a la problemática del tráfico y la accidentalidad.

A lo largo de estos últimos años ha existido una evolución de los simuladores de conducción, a continuación se mencionan algunos de ellos: en 1972, *General Electric*, bajo comisión de la Armada Norteamericana, desarrolla un simulador computarizado; en 1981, Thomas Furness desarrolló la "Cabina Virtual"; en el 2003, Honda construye un simulador de conducción; en el 2008, Toyota lanza al mercado una plataforma de conducción; en el 2010, Honda sacó al mercado un simulador de conducción enfocado a mejorar la seguridad vial, con 3 pantallas LCD de 42" de muy alta resolución, con mucha potencia de procesamiento gráfico y con un asiento que se mueve en función de tu estilo de conducción.

El objetivo de un simulador de conducción es reproducir las sensaciones que un chófer recibe cuando tiene el mando del vehículo. El realismo de la simulación entonces depende de la fidelidad básica de las sensaciones, y la relación entre el mando del chófer y las respuestas del sistema [Huang y col., 2003], [Rukgauer, 2006]. En la Fig. 1.1 se ilustran varios componentes que controlan y generan el movimiento, el mando cargado, la instrumentación y el ambiente visual. Las entradas de mando del chófer a la dinámica del vehículo generan la posición, la velocidad, la aceleración y las orientaciones del vehículo. Las señales generadas

deben ser exactas y bastante realistas para crear ambientes próximos a las de un vehículo real [Lee y col., 1998], [Duysinx y col., 2005].



**Fig. 1.1. Diagrama funcional de algunos simuladores de conducción.**

Existen varios tipos de simuladores de conducción, los más usados son los de tres y seis grados de libertad, el peso promedio de los mismos oscilan entre 1000 kg y 14500 kg. Algunas de las variables que se miden para determinar la calidad de un simulador de conducción son: los topes físicos, la velocidad, la aceleración, la carga que soporta, calidad de actuadores, consumo de energía, software y la electrónica [Haug, 1989], [Koplik y col., 2009].

En la actualidad existen varias compañías y centros de investigación que se dedican al trabajo con simuladores de conducción, entre ellos está la compañía Honda, Moog, la Universidad Politécnica de Valencia, la NASA, la Universidad de Tokio, la Universidad de Virginia, el MIT, SIMPRO y GARP, entre otros.

## 1.2 Dinámica vehicular

La dinámica vehicular, en su más amplio sentido, abarca todas las formas de transportación utilizadas por el hombre, como son: barcos, aviones, trenes, y vehículos terrestres guiados y no guiados. Los principios envueltos en el análisis de la dinámica de todos los tipos de vehículos son diversos y extensos. Este trabajo está orientado al caso de vehículos terrestres guiados [Muñoz, 1990]. Puesto que los vehículos responden ante fuerzas y momentos que provienen de fuentes externas al propio vehículo, el estudio de su comportamiento dinámico debe involucrar el estudio de cómo y por qué se producen estas fuerzas. Además, debido a que la mayoría de dichas fuerzas se transmiten hacia el vehículo a través de los neumáticos, resulta indispensable desarrollar un gran entendimiento del comportamiento de las llantas ante todas las posibles condiciones de operación. Otros puntos de interés en la dinámica de vehículos se refieren a la manejabilidad y al desempeño durante el frenado. En este sentido, la manejabilidad es la forma en que un vehículo responde ante perturbaciones externas y su capacidad para seguir una trayectoria destinada ante dichas circunstancias [Dukkipati, 2000].

La dinámica vehicular es un área de estudio relativamente moderna. Hasta principios del siglo pasado era virtualmente desconocida, aunque el entendimiento y desarrollo del sistema de dirección de Ackermann y algunas ideas fundamentales al respecto, mejoraron el confort de los pasajeros utilizando suspensiones en los vehículos [Choi y col., 2000], [Cotella y col., 2004].

A principios de los años 1930, Lanchester en Reino Unido, Olley en los Estados Unidos y Broulhiet en Francia, iniciaron independientemente estudios sobre el sistema de suspensión e identificaron los efectos de la cinemática de los elementos de este sistema, así como de la dirección. También, tomó mayor importancia el papel que desempeñan las llantas generando fuerzas laterales, relacionado con la manejabilidad de un vehículo.

El primero en presentar un análisis de manejabilidad fue probablemente el ingeniero inglés Olley, dando además una definición formal de subviraje y sobreviraje [Gillespie, 1992]. En los siguientes años se lograron pequeños

progresos hasta llegar al desarrollo definitivo del tratado del comportamiento de manejabilidad por Olley, Milliken, Segel y Whitcomb; además, Gough aportó nuevos conocimientos sobre el comportamiento de las llantas, aplicados al análisis para un intervalo lineal de aceleraciones laterales de 0 a 0,3 g ( $3 \text{ m/s}^2$ ) [Featherstone, 2008], [Parra y col., 2008]. Así, el desarrollo de los distintos componentes ha obtenido un mayor refinamiento, lo que se reflejó en los vehículos que pueden observarse hoy en día.

La presente investigación utiliza una mezcla de modelado dinámico y analítico, aprovechando las bondades que ofrecen estos, como son, comprensión del fenómeno físico y simplicidad en la solución del problema, estos elementos unidos entre ellos permiten que el modelo físico-matemático que se propone posea cualidades únicas con respecto a los modelos que existen en la actualidad, los cuales se abordarán posteriormente.

### 1.2.1 Teoría de Julien

En la teoría de Julien los neumáticos son tratados como bandas elásticas, la superficie de contacto es rectangular, la presión se considera que está uniformemente distribuida.

Cuando un torque es aplicado al neumático, este produce una región de compresión longitudinal  $\epsilon$ . Se define  $e_0$  como la deformación longitudinal en el punto de contacto, y  $e$  es la deformación longitudinal del neumático a una distancia  $x$  del punto de contacto y se puede obtener de la siguiente forma [Wong, 1978]:

$$e = e_0 + x\epsilon$$

Asumiendo que  $e_0$  es proporcional a  $\epsilon$ , y  $e_0 = \lambda\epsilon$  entonces:

$$e = (\lambda + x)\epsilon$$

Tomando en cuenta lo anteriormente dicho se puede obtener la fuerza de tracción del neumático de la forma siguiente:

$$F_x = \int_0^x k_t(\lambda + x)\epsilon dx = k_t\lambda x\epsilon(1 + x/2\lambda)$$

Con la teoría de Julien se obtiene un análisis físico de los fenómenos que existen en los neumáticos, pero realmente existen formulas empíricas con las cuales se obtienen mejores resultados y con un menor costo computacional, ejemplo de esto es la denominada fórmula mágica.

### 1.2.2 El modelo de bicicleta

El denominado modelo de bicicleta es uno de los más usados hoy en día debido a su fácil implementación y comprensión. Este modelo consiste en describir la dinámica que encierra una bicicleta o la mitad de un vehículo que es aproximadamente lo mismo [Jazar, 2008]. Esta vía de modelar un vehículo solo es utilizada cuando únicamente es relevante la posición  $X$ ,  $Y$  y el ángulo  $\psi$ , ver Fig. 1.2. Este modelo está constituido por un sistema de tres ecuaciones diferenciales, las cuales tienen que ser resueltas mediante métodos numéricos.

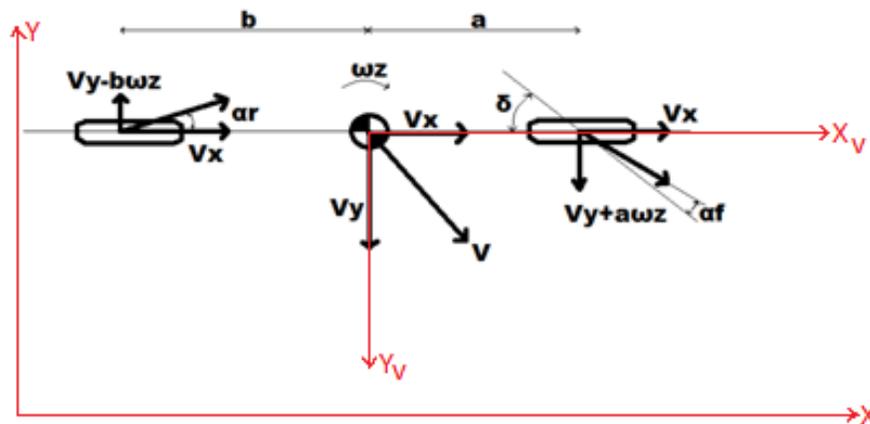


Fig. 1.2. Modelo de Bicicleta.

Con apoyo de la figura anterior se puede llegar a las siguientes expresiones [Rajamani, 2006]:

$$m(\dot{V}_x - V_y \dot{\psi}) = F_{xf} \cos \delta_f + F_{xr} - F_{yf} \sin \delta_f$$

$$m(\dot{V}_y + V_x \dot{\psi}) = F_{yr} + F_{yf} \cos \delta_f + F_{xf} \sin \delta_f$$

$$I_z \ddot{\psi} = a F_{yf} \cos \delta_f - b F_{yr} + a F_{xf} \sin \delta_f$$

El modelo de bicicleta no resulta factible para el sistema que se tiene, debido a que se necesita un modelo de seis grados de libertad y este modelo solo es de tres grados de libertad. Pero realmente resulta útil una comprensión de este modelo, puesto que es representativo de un importante número de fenómenos físicos que existen en la dinámica lateral de los vehículos terrestres.

### **1.2.3 El modelo *Yaw-Roll***

El modelo *Yaw-Roll* es un modelo de simulación teórico-numérico del comportamiento dinámico de vehículos pesados, con base en el dominio del tiempo. Esencialmente, es utilizado para determinar la respuesta de coleo y balanceo de vehículos multiarticulados. Este modelo, inicialmente desarrollado por el *Transportation Research Institute de la University of Michigan (UMTRI)*, fue formulado con el propósito de analizar combinadamente el comportamiento direccional y de balanceo de vehículos de carga como camiones, tractocamiones con semitraileres y combinaciones de unidades dobles, durante maniobras de conducción en condiciones dinámicas que se aproximan al límite de volcadura [Brayshaw, 2005]. En su versión pública original, el modelo fue limitado para simular el movimiento de hasta cuatro unidades vehiculares con once ejes en total, distribuidos en las unidades como se desee. El modelo, además, puede simular el acoplamiento entre las unidades con una variedad de mecanismos de enganche.

El modelo está compuesto en su núcleo por dos ecuaciones diferenciales, las cuales se resuelven mediante métodos numéricos [Karnopp, 2004].

Este modelo es de dos grados de libertad y al igual que el modelo de bicicleta, no resuelve la problemática del sistema que se tiene, pero puede ser utilizado para entender algunos fenómenos físicos que intervienen en la dinámica lateral y longitudinal de los vehículos terrestres.

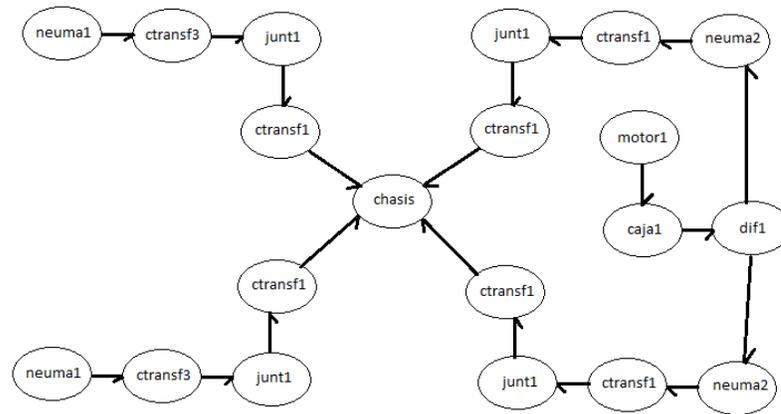
### **1.2.4 Técnica del *Bond Graph***

La técnica de modelado mediante diagramas de enlaces, es conocida por su nombre en inglés *Bond Graphs (BGs)*. Esta posee propiedades muy atractivas como su alta extensibilidad por ser orientado a objetos, la facilidad para desarrollar

aplicaciones por su natural sentido físico y la posibilidad de integrar subsistemas de diferentes campos de aplicación, lo que hoy suele denominarse multifísica [Filippini y col., 2005].

Cada línea o enlace en un *BG* implica la existencia de un par de señales, las cuales fluyen en dirección opuesta. Este par tiene dimensiones de potencia y pueden ser tensión y corriente para un sistema eléctrico, fuerza y velocidad para un sistema mecánico, presión y caudal para uno hidráulico, etc. En general suele hablarse de variables de esfuerzo y variables de flujo con lo cual se le da carácter general al tratamiento, permitiendo que con este tipo de técnicas no solo sea factible abordar problemas de muy diversa índole sino que puedan acoplarse entre sí para formar sistemas complejos e híbridos. Por último para organizar las leyes constitutivas de los componentes en forma de ecuaciones diferenciales se necesita tomar decisiones acerca de la causalidad, es decir identificar causas y efectos. Este es otro concepto importante acerca de los *BGs*, los sistemas o subsistemas físicos que procesan energía son acausales. La causalidad es necesaria para procesar matemáticamente señales (fuerzas, velocidades, desplazamiento, etc.). Al poner causalidad lo que se hace es definir matemáticamente para cada subsistema cuáles son las entradas y cuáles son las salidas, es decir se ensambla un esquema de cómputo, se ordena y se acoplan las ecuaciones estructurales y constitutivas del sistema.

El modelado de sistemas mecánicos mediante la teoría de *BGs* permite armar modelos no lineales y de muchos grados de libertad, pero sus componentes son unidimensionales con lo cual la aplicación en sistemas mecánicos tridimensionales queda limitada a pequeñas rotaciones resolviéndose estas de forma aproximada. Pero este inconveniente se resuelve utilizando simultáneamente la teoría de multicuerpos para poder extender su aplicación a sistemas mecánicos con grandes rotaciones para lo cual se debe desarrollar con los componentes unidimensionales de *BGs* otros componentes que modelen cuerpos rígidos, traslaciones y rotaciones en las tres dimensiones, ver Fig. 1.3 [Mera, 2001].



**Fig. 1.3. Modelado BGs de vehículo.**

Esta técnica es muy útil en la comprensión de la distribución de energía cinética dentro del vehículo terrestre, su comprensión permite que se realice un modelo dinámico con un balance energético correcto. Todos los modelos analizados hasta el momento presentan ecuaciones diferenciales, las cuales son generalmente resueltas mediante algoritmos matemáticos como: el método de Euler, Runge Kutta de orden dos, Runge Kutta de orden cuatro y Adams-Bashforth.

### 1.3 Herramientas existentes para la simulación de vehículos terrestres

En la actualidad existen herramientas que son utilizadas para la simulación de vehículos terrestres, entre estas están, el programa *BONDYN*, *SINRAT*, *SMAC*, *CRASH*, *OLDMISS* los cuales son utilizados en la reconstrucción de accidentes, el *ADAMS/Car*, *CARSIMED Educational* producido por la *Mechanical Simulation Corporation*, el *20sim™* que permite la especificación directa del problema en el dominio *BG*, el *TruckSim*, *Simulink-Matlab*, *GAMBIT-FLUENT*, *CAD*, *CAE*, ver Anexo I. La gran mayoría de estas herramientas poseen dinámicas vehiculares ya definidas, esto puede frenar en algunas circunstancias la investigación que se esté realizando [Edward, 2004]. En la investigación actual se utilizó *Matlab* y *C*, debido

a que da la libertad de poder programar el modelo dinámico que se requiera, además de contar con la potencialidad de obtener algoritmos en tiempo real.

#### **1.4 Algoritmos matemáticos utilizados en el cálculo de modelos dinámicos**

Las ecuaciones diferenciales aparecen naturalmente al modelar situaciones físicas en las ciencias naturales, ingeniería, y otras disciplinas, donde hay envueltas razones de cambio de una ó varias funciones desconocidas con respecto a una ó varias variables independientes. Estos modelos varían entre los más sencillos que envuelven una sola ecuación diferencial para una función desconocida, hasta otros más complejos que envuelven sistemas de ecuaciones diferenciales acopladas para varias funciones desconocidas. Por ejemplo, la ley de enfriamiento de Newton y las leyes mecánicas que rigen el movimiento de los cuerpos, al ponerse en términos matemáticos dan lugar a ecuaciones diferenciales [Engquist y col., 2005]. Usualmente estas ecuaciones están acompañadas de una condición adicional que especifica el estado del sistema en un tiempo o posición inicial. Esto se conoce como la condición inicial y junto con la ecuación diferencial forman lo que se conoce como el problema de valor inicial [Nevanlinna, 1977], [Edalat y col., 2009]. Por lo general, la solución exacta de un problema de valor inicial es imposible ó difícil de obtener en forma analítica. Por tal razón los métodos numéricos se utilizan para aproximar dichas soluciones.

Existen muchos métodos algoritmos que se utilizan en el cálculo de modelos, entre ellos tenemos:

- El método de Euler, el cual es uno de los métodos más antiguos, pero al mismo tiempo eficiente que existe en la matemática numérica. Este método numérico consistente en ir incrementando paso a paso la variable independiente y hallando la siguiente imagen con la derivada [Fisette y col., 2007].

- El método de Euler mejorado se basa en la misma idea del método anterior, pero hace un refinamiento en la aproximación, tomando un promedio entre ciertas pendientes.
- Los métodos de Runge Kutta de orden dos y de orden cuatro, son una importante familia de métodos iterativos tanto implícitos como explícitos para aproximar las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. Estos logran la exactitud del procedimiento de una serie de Taylor sin requerir el cálculo de derivadas superiores [Baker, 1992], [Hoffmann, 1997].
- Los métodos de Adams-Bashforth forman una familia de métodos de paso múltiple típica, uno de los más usados es el de paso cuádruple.
- El método de los elementos finitos es utilizado para el cálculo de ecuaciones de diferenciales parciales.

Todos estos métodos son utilizados en el cálculo de modelos dinámicos, debido a que estos presentan múltiples ecuaciones diferenciales, las cuales poseen un grado de complejidad alto, y gracias al análisis numérico se pueden calcular soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales [Berger, 1984]. Los métodos utilizados suelen basarse en discretizar la ecuación correspondiente. Para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias los métodos más utilizados son el método de Euler y los métodos de Runge-Kutta.

### **1.5 Complejidad Computacional**

La teoría de la complejidad computacional es la rama de la teoría de la computación que estudia, de manera teórica, la complejidad inherente a la resolución de un problema computable. Los recursos comúnmente estudiados son el tiempo (mediante una aproximación al número y tipo de pasos de ejecución de un algoritmo para resolver un problema) y el espacio (mediante una aproximación a la cantidad de memoria utilizada para resolver un problema). Se pueden estudiar igualmente otros parámetros, tales como el número de procesadores necesarios para resolver el problema en paralelo [Fillottrani, 2010].

Hoy en día las computadoras resuelven problemas mediante algoritmos que tienen como máximo una complejidad o costo computacional polinómico, es decir, la relación entre el tamaño del problema y su tiempo de ejecución es polinómica. Estos son problemas agrupados en la clase  $P$ . Los problemas que no pueden ser resueltos por nuestras computadoras (las cuales son máquinas determinísticas), que en general poseen costo factorial o combinatorio pero que podrían ser procesados por una máquina no-determinista, están agrupados en la clase  $NP$ . Estos problemas no tienen una solución práctica, es decir, una máquina determinística (como una computadora actual) no puede resolverlos en un tiempo razonable [Werschulz, 2008].

La complejidad temporal de un problema es el número de pasos que toma resolver una instancia de un problema, a partir del tamaño de la entrada utilizando el algoritmo más eficiente a disposición. Intuitivamente, si se toma una instancia con entrada de longitud  $n$  que puede resolverse en  $n^2$  pasos, se dice que ese problema tiene una complejidad en tiempo de  $n^2$  [Stoer, 1991]. Por supuesto, el número exacto de pasos depende de la máquina en la que se implementa, del lenguaje utilizado y de otros factores. Para no tener que hablar del costo exacto de un cálculo se utiliza la notación  $O$ . Cuando un problema tiene costo en tiempo  $O(n^2)$  en una configuración de computador y lenguaje dado, este costo será el mismo en todos los computadores, de manera que esta notación generaliza la noción de costo independientemente del equipo utilizado [Werschulz, 2010].

La complejidad computacional de los algoritmos posee dos formas clásicas de clasificación; la primera en la cual es independiente de la arquitectura utilizada para el algoritmo; y la segunda, que depende de la arquitectura computacional que se utilice [Suli, 2003]. Generalmente en los algoritmos que se utilizan para el cálculo de modelos dinámicos es importante utilizar la segunda clasificación, esto se debe a que es necesario e importante realizar las comparaciones entre los distintos métodos atendiendo al tiempo de cómputo, al espacio de almacenamiento tanto en *RAM* (*Random Access Memory*) como en *ROM* (*Read*

*Only Memory*) y al orden de error. De esta forma se pueden realizar valoraciones críticas atendiendo a la complejidad computacional de cada algoritmo.

## Conclusiones parciales

De todo lo anterior se puede concluir lo siguiente:

- La gran mayoría de las plataformas de conducción utilizan modelos dinámicos muy exactos y computadoras con gran poder de cómputo.
- La teoría de Julien para los neumáticos, no es aplicable a la investigación actual, debido al gran costo computacional que implica y debido a que existe una marcada tendencia a la utilización de formulas empíricas para el cálculo de los fenómenos presentes en los neumáticos.
- Los modelos *Yaw-Roll*, de bicicleta y la técnica de *Bond Graph* representan una fuente de conocimiento para poder comprender la gran mayoría de los fenómenos que actúan en los vehículos terrestres.
- Existen muchos software que se utilizan para calcular la dinámica de vehículos terrestres, estos son software comerciales que no pueden ser montados en una arquitectura con microcontroladores.
- En la actualidad el método de Euler y los de Runge-Kutta son los más utilizados para el cálculo de las ecuaciones diferenciales que presentan los modelos dinámicos de vehículos terrestres.
- El tiempo de cómputo, el espacio utilizado en *RAM* y *ROM* y el orden de error de los algoritmos, representan la principal manera de comparar la complejidad computacional de los mismos.

---

## CAPÍTULO 2

---

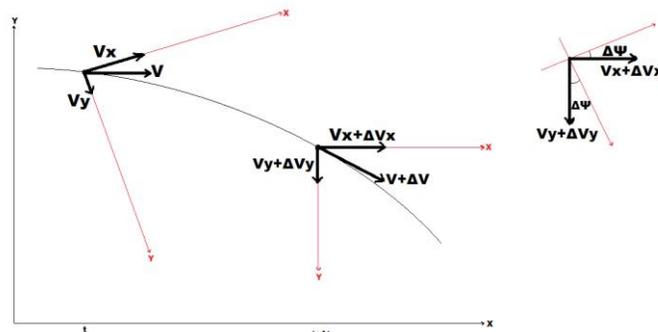
### Modelo dinámico simplificado de un vehículo terrestre

En el capítulo anterior se realizó una revisión bibliográfica del marco teórico de la investigación, en este capítulo se procederá a realizar el desarrollo físico-matemático del modelo dinámico simplificado de un vehículo terrestre. Se utilizará en su mayoría elementos del modelado físico, pero también estarán presentes funciones empíricas, lo que posibilitará obtener un modelo simplificado y con una buena aproximación a los fenómenos que ocurren en un vehículo real.

#### 2.1 Análisis de la dinámica de un cuerpo rígido en el espacio

Para determinar el comportamiento de un cuerpo rígido en el espacio se necesita la posición del cuerpo y su orientación, lo cual se puede determinar apoyándonos en la cinemática del movimiento y en su dinámica.

Se empezará haciendo un análisis en dos dimensiones del movimiento de un cuerpo en dos intervalos de tiempo, ver Fig. 2.1.



**Fig. 2.1. Análisis del movimiento en 2D de un cuerpo.**

De la Figura se puede obtener:

$$V_{x\ t+\Delta t} = (V_x + \Delta V_x) \cos \Delta\Psi - (V_y + \Delta V_y) \sin \Delta\Psi$$

$$V_{x \Delta t} = V_{x t + \Delta t} - V_{x t}$$

$$V_{x \Delta t} = V_x \cos \Delta \Psi + \Delta V_x \cos \Delta \Psi - V_x - V_y \sin \Delta \Psi - \Delta V_y \sin \Delta \Psi$$

Como el cuerpo posee mayor velocidad en el eje  $X$ , y el ángulo de desplazamiento es muy pequeño, se pueden hacer las siguientes aproximaciones,  $\Delta V_y \approx 0$ ;  $\cos \Delta \Psi \approx 1$ ;  $\sin \Delta \Psi \approx \Delta \Psi$ .

$$V_{x \Delta t} = \Delta V_x - V_y \Delta \Psi$$

Dividiendo entre el tiempo:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} - V_y \frac{d\Psi}{dt} = \dot{V}_x - V_y \dot{\Psi}$$

Realizando el mismo procedimiento que se hizo anteriormente y considerando ahora que existe un movimiento primario en el eje  $Y$  ( $\Delta V_x \approx 0$ ), se obtiene:

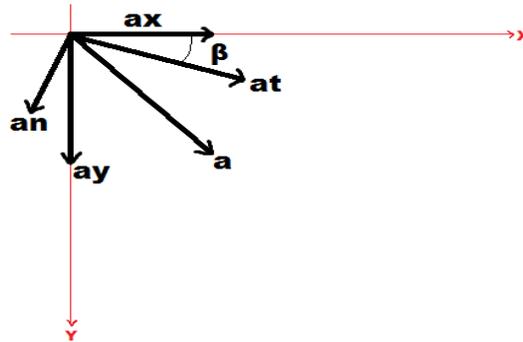
$$V_{y \Delta t} = V_y \cos \Delta \Psi + \Delta V_y \cos \Delta \Psi - V_y + V_x \sin \Delta \Psi + \Delta V_x \sin \Delta \Psi$$

$$V_{y \Delta t} = \Delta V_y + V_x \Delta \Psi$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} + V_x \frac{d\Psi}{dt} = \dot{V}_y + V_x \dot{\Psi}$$

Aunque el procedimiento se ha desarrollado para el movimiento del cuerpo en dos dimensiones se puede extender a tres dimensiones.

Otra forma de obtener el comportamiento del cuerpo en el espacio mediante su cinemática se muestra en la Fig. 2.2.



**Fig. 2.2. Análisis del movimiento en 2D de un cuerpo, mediante aceleración normal y tangencial.**

$$a_{ny} = a_n \cos \Psi = V^2/R \cos \Psi = V_x \dot{\Psi}$$

$$a_{nx} = -a_n \sin \Psi = -V^2/R \sin \Psi = -V_y \dot{\Psi}$$

$$a_x = \dot{V}_x + a_{nx}$$

$$a_y = \dot{V}_y + a_{ny}$$

Para obtener el comportamiento de un cuerpo rígido en el espacio mediante el momento cinético, se debe utilizar la regla de la mano derecha, con lo cual se obtienen las siguientes expresiones denominadas ecuaciones de Euler, las cuales definen la posición y la orientación de un cuerpo rígido en el espacio [García, 1999].

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{p}$$

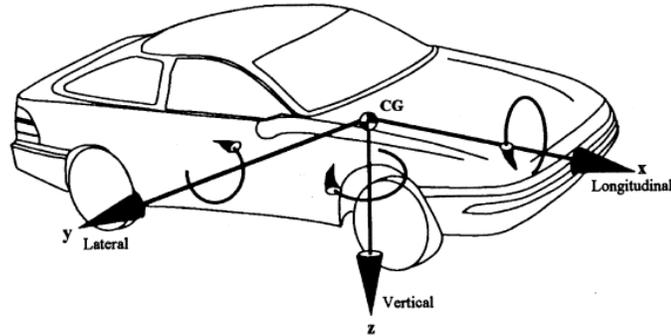
$$\sum \vec{M} = \frac{d\vec{h}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{h}$$

## 2.2 Análisis de la dinámica del chasis del Vehículo

La dinámica de un vehículo es afectada o incluye los subsistemas de las gomas, el timón, la suspensión, la aceleración y desaceleración. Se adiciona a todo lo anterior, muchos factores externos, como la inclinación de la carretera, la carga del vehículo y su distribución, la velocidad y dirección del viento. La tarea de realizar el análisis dinámico de un vehículo no es tarea fácil ya que al unirse todos estos factores internos y externos se forma un gran sistema con múltiples variables. Pero se puede analizar sus características una a una y a continuación integrar algunas de estas para estudiar sus interacciones.

Un vehículo constituye un cuerpo rígido con seis grados de libertad, el sistema coordinado del cuerpo rígido se muestra en la Fig. 2.3. Los tres movimientos del cuerpo del vehículo son: longitudinal, lateral y vertical, que también son conocidos por X, Y, Z. Las velocidades que pueden ser alcanzadas en estos ejes, son

$V_x, V_y, V_z$ , respectivamente. También se definen las velocidades angulares en este sistema, como,  $w_x$  (alabeo),  $w_y$  (cabeceo),  $w_z$  (guiñada), respectivamente.



**Fig. 2.3. Sistema coordenado del vehículo.**

El chasis del vehículo es modelado como un cuerpo rígido, cuyo sistema de coordenadas local ( $X, Y, Z$ ) está sujeto al centro de masas del mismo y alineado con respecto a sus ejes principales como se muestra en la Fig. 2.3 [Jiménez, 2004], [Filippini y col., 2005].

El chasis tiene masa  $m$ , y momentos de inercia  $I_x, I_y, I_z$ . Para determinar el movimiento en el espacio de un cuerpo rígido se dispone de las ecuaciones de Euler, que en su forma expandida están determinadas por seis ecuaciones diferenciales, estas ecuaciones están definidas en un sistema no inercial de referencia en este caso en el sistema de referencia del cuerpo del vehículo [Blundell y col., 2004].

$$\sum F_x = m\dot{V}_x + m\omega_y V_z - m\omega_z V_y$$

$$\sum F_y = m\dot{V}_y + m\omega_z V_x - m\omega_x V_z$$

$$\sum F_z = m\dot{V}_z + m\omega_x V_y - m\omega_y V_x$$

$$\sum M_x = I_x \dot{\omega}_x + I_z \omega_y \omega_z - I_y \omega_z \omega_y$$

$$\sum M_y = I_y \dot{\omega}_y + I_x \omega_x \omega_z - I_z \omega_x \omega_z$$

$$\sum M_z = I_z \dot{\omega}_z + I_y \omega_x \omega_y - I_x \omega_y \omega_x$$

### 2.3 Dinámica del motor y la transmisión del vehículo

En la Fig. 2.4, se muestra de forma simplificada la dinámica del motor y la transmisión de un vehículo terrestre.

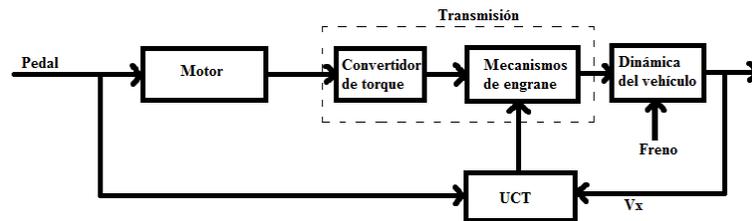


Fig. 2.4. Esquema de funcionamiento del motor y la transmisión.

El motor recibe la señal del pedal, que manipula la apertura del flujo de combustible, la salida del primero se conecta al impulsor del convertidor de torque el cual se acopla a la transmisión, todo lo anteriormente dicho se puede modelar de la siguiente manera:

$$I_{ei} \dot{\omega}_e = M_e - M_i$$

Donde  $\omega_e$  es la velocidad angular de la salida del motor, dada en *rpm*,  $I_{ei}$  el momento de inercia del motor y el impulsor,  $M_e$  es el torque del motor y  $M_i$  es el torque del impulsor [Assanis y col., 2000].

La característica entrada-salida del convertidor de torque puede ser expresada como función de la velocidad angular de salida del motor y la velocidad angular de la turbina. La dirección del flujo de potencia se asume que es desde el impulsor a la turbina [Bertollini y col., 1994].

$$M_i = (\omega_e / K)^2$$

$$K = f_2(\omega_{in} / \omega_e)$$

$$M_t = R_{TQ} M_i$$

$$R_{TQ} = f_3(\omega_{in}/\omega_e)$$

Donde  $K$  es el factor de capacidad,  $\omega_{in}$  es la velocidad de entrada de la transmisión,  $M_t$  es el torque de la turbina,  $R_{TQ}$  es la razón de torque.

El modelo de la transmisión es expresado como relación estática de los engranajes, asumiendo que estos posean pequeños movimientos.

$$R_{TR} = f_4(\text{velocidades})$$

$$M_{out} = R_{TR}M_{in}$$

$$\omega_{in} = R_{TR}\omega_{out}$$

Donde  $M_{in}, M_{out}$  es el torque de entrada y salida de la transmisión,  $\omega_{in}, \omega_{out}$  es la velocidad angular de entrada y salida de la transmisión y  $R_{TR}$  es la razón de la transmisión [Genta, 1997].

Para ganar en simplicidad en el modelo se puede aplicar la siguiente expresión para la fuerza de tracción:

$$F_{xT} = 40A_p$$

## 2.4 Dinámica de los neumáticos

Los neumáticos, como parte de un vehículo, son de gran importancia en el comportamiento dinámico de éste y en el conjunto de sus prestaciones. Todas las fuerzas exteriores que actúan sobre el vehículo, a excepción de las aerodinámicas, son aplicadas a través de los neumáticos [Ackermann y col., 1985], [Bakker y col., 1987].

Sus funciones básicas son:

- Soportar y transmitir al terreno la carga vertical.
- Desarrollar los esfuerzos longitudinales necesarios para la tracción y frenado.
- Proporcionar los esfuerzos laterales precisos para lograr el control y estabilidad de la trayectoria.

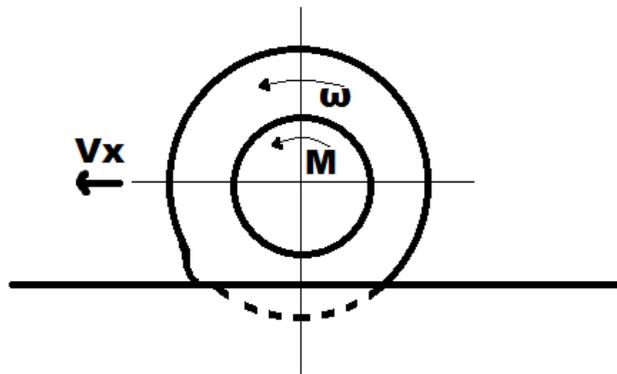
- Actuar como amortiguador de las acciones dinámicas originadas por las irregularidades de la pista.

En los neumáticos ocurren una serie de fenómenos físicos, los cuales son de gran importancia en el comportamiento del vehículo, dentro ellos están [Pacejka, 2006]:

- Deslizamiento longitudinal.
- Ángulo de deslizamiento (deslizamiento lateral).
- La resistencia a la rodadura.

### 2.4.1 Deslizamiento longitudinal

Cuando un torque es aplicado una fuerza de tracción o de frenado es desarrollada en el neumático, lo que provoca una compresión no uniforme y al mismo tiempo una deformación del material, estos fenómenos hacen que un punto cercano a la superficie de contacto tenga que recorrer menos distancia para hacer contacto con la superficie, a esta situación se le conoce como deslizamiento longitudinal, ver Fig. 2.5 [Haro, 2008].



**Fig. 2.5. Deformación que sufre el neumático debido a la aplicación de un torque.**

El deslizamiento longitudinal se define para la fuerza de tracción como sigue:

$$i = \left( 1 - V_x / r\omega \right) \times 100\%$$

Y para fuerzas de frenado:

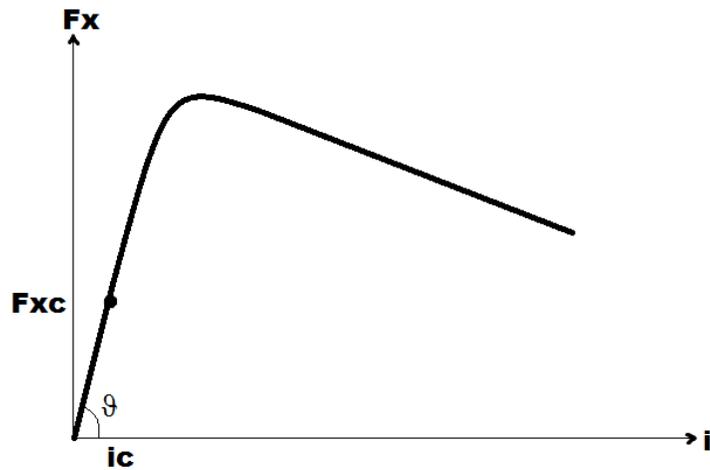
$$i_s = \left(1 - r\omega/V_x\right) \times 100\%$$

Existiendo una relación entre ellos, que se define como:

$$|i| = \left| i_s / (1 - i_s) \right|$$

Donde  $V_x$  es la velocidad lineal del centro del neumático,  $\omega$  es la velocidad angular y  $r$  es el radio del neumático libre de rodadura [Moon, 2009].

La fuerza de tracción desarrollada por un neumático es proporcional al torque aplicado en la rueda y es función del deslizamiento longitudinal, para valores pequeños del deslizamiento ( $i < i_c$ ) la fuerza de tracción posee relación lineal con el deslizamiento, mientras que para valores de  $i > i_c$  la relación es no lineal, ver Fig. 2.6.



**Fig. 2.6. Curva que muestra la dependencia entre la fuerza de tracción y el deslizamiento longitudinal.**

Para  $i < i_c$ , no hay deslizamiento del neumático sobre la superficie:

$$F_x = C_i i$$

$$C_i = \tan \vartheta = \left. \frac{dF_x}{di} \right|_{i=0}$$

$$i_c = \mu_p W_n / 2C_i$$

De datos experimentales se puede obtener  $0.8 < \mu_p < 0.9$ .

Para  $i > i_c$ , existe deslizamiento del neumático sobre el pavimento:

$$F_x = F_{xd} + F_{xa} = \mu_p W_n (1 - \mu_p W_n / 4C_i i)$$

Para calcular la fuerza de frenado, se procede similarmente.

Para  $i_s < i_{sc}$ , no hay deslizamiento del neumático sobre la superficie:

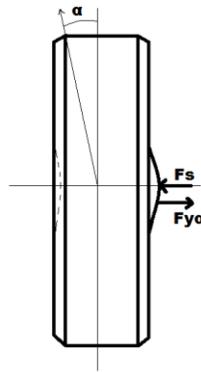
$$F_{xf} = C_s i_s / 1 - i_s$$

Para  $i_s > i_{sc}$ , existe deslizamiento del neumático sobre el pavimento:

$$F_{xf} = F_{xfd} + F_{xfa} = \mu_p W_n (1 - \mu_p W_n (1 - i_s) / 4C_s i_s)$$

## 2.4.2 Ángulo de deslizamiento

Cuando una fuerza lateral es aplicada al neumático en la zona de contacto con la superficie, aparece una fuerza denominada fuerza de giro, la cual produce que el neumático tenga una trayectoria que difiere en un ángulo  $\alpha$  del plano del neumático, a este fenómeno se le denomina ángulo de deslizamiento, ver Fig. 2.7 [Garmendia y col., 2007], [Ortiz y col., 2007].



**Fig. 2.7. Ángulo de deslizamiento del vehículo cuando se aplica una fuerza lateral.**

Realizando el análisis matemático de la Fig. 2.8, se puede determinar  $\alpha$ .

$$\alpha_f = \delta - \tan^{-1} \left( \frac{V_y + a\omega_z}{V_x} \right)$$

$$\alpha_r = -\tan^{-1} \left( \frac{V_y - b\omega_z}{V_x} \right)$$

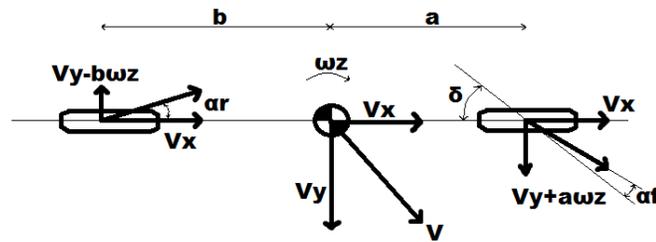


Fig. 2.8. Modelo de la mitad de un vehículo.

Para valores de  $\alpha < \alpha_c$  :

$$F_{y\alpha} = C_\alpha \tan \alpha \approx C_\alpha \alpha$$

$$C_\alpha = \left. \frac{dF_{y\alpha}}{d\alpha} \right|_{\alpha=0}$$

$$\alpha_c = \frac{\mu_p W_n}{2C_\alpha}$$

Para valores de  $\alpha > \alpha_c$  :

$$F_{y\alpha} = \mu_p W_n \left( 1 - \frac{\mu_p W_n}{4C_\alpha \tan \alpha} \right)$$

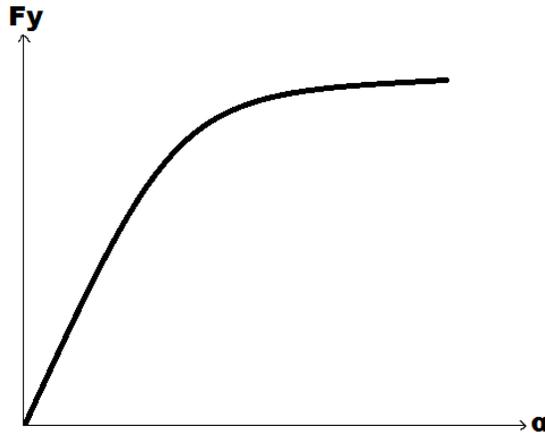
La fuerza resultante que se aplica al neumático en el eje Y, es [Ryu y col., 2005]:

$$F_y = F_{y\alpha} \pm F_{y\gamma}$$

$$F_{y\gamma} = C_\gamma \gamma$$

Para la mayoría de los vehículos  $\gamma$  puede ser despreciado puesto que este ángulo es sumamente pequeño y se tiene que  $F_{y\alpha} \gg F_{yy}$ .

En la Fig. 2.9, se nota el comportamiento no lineal de la fuerza de giro [Lozano, 1996].



**Fig. 2.9. Efecto del ángulo de deslizamiento del vehículo en función de la fuerza de giro.**

### 2.4.3 Fórmula mágica

En años recientes un método empírico denominado fórmula mágica ha sido desarrollado, el mismo permite calcular la fuerza de tracción en función de  $i$ , la fuerza de frenado en función de  $i_s$ , la fuerza de giro en función de  $\alpha$  y el torque de autoalineamiento en función de  $\alpha$ , todo esto mediante la siguiente función [Pacejka, 2006], [Otero, 2009]:

$$y(x) = D \sin\{C \tan^{-1}[Bx - E(Bx - \tan^{-1} Bx)]\}$$

$$Y(X) = y(x) + S_v$$

$$x = X + S_h$$

$$D = a_1 F_z^2 + a_2 F_z$$

Para obtener la fuerza de giro,  $BCD$  se obtiene como:

$$BCD = a_3 \sin[a_4 \tan^{-1}(a_5 F_z)]$$

Para obtener la fuerza longitudinal y el torque de autoalineamiento,  $BCD$  se obtiene como:

$$BCD = a_3 F_z^2 + a_4 F_z / e^{a_5 F_z}$$

Para la fuerza de giro,  $C=1.30$ .

Para el torque de autoalineamiento,  $C=2.40$ .

Para la fuerza longitudinal,  $C=1.65$ .

$$B = BCD / CD$$

$$E = a_6 F_z^2 + a_7 F_z + a_8$$

$$\Delta S_h = a_9 \gamma$$

$$\Delta S_v = (a_{10} F_z^2 + a_{11} F_z) \gamma$$

Donde  $Y(X)$  representa la fuerza de giro, la fuerza de tracción, la fuerza de frenado y el torque de autoalineamiento [Ortiz y col., 2007].

Mientras que  $X$  denota el ángulo de deslizamiento dado en grados o el deslizamiento dado en por ciento.

$F_z$  es la carga vertical sobre el neumático dada en kilonewton, los demás parámetros se encuentran de manera experimental y se muestran en la Tabla 2.1.

**Tabla 2.1. Parámetros utilizados en la fórmula mágica.**

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$a_{11}$
$F_y, N$	-22	1011	1078	1.8	0.21	0.00	-0.4	0.71	0.028	0.00	14.8
$M_z, Nm$	-2.7	-2.3	-1.9	-2.7	0.11	-0.07	0.64	-4.04	0.015	-0.07	0.945
$F_x, N$	-21	1144	49.6	226	0.069	-0.006	0.06	0.49	--	--	--

### 2.4.4 Resistencia a la rodadura

La resistencia a la rodadura causada en el neumático es producida por la deformación del material, con los cuales se construyen los mismos, al existir una pequeña zona la cual está en contacto directo con la superficie y simultáneamente un deslizamiento provoca una fuerza de fricción entre el neumático y la superficie.

Basados en resultados experimentales, varias fórmulas empíricas han sido propuestas para el cálculo de la resistencia a la rodadura ( $f_r$ ), entre ellas se encuentra la siguiente:

$$f_r = 0.0136 + 0.40 \times 10^{-7} V_x^2$$

Por lo tanto la fuerza de resistencia a la rodadura se determina de la siguiente forma:

$$F_{rr} = f_r W_n$$

Se define  $W_n$  como la carga vertical que sostiene el neumático [Wong, 1978].

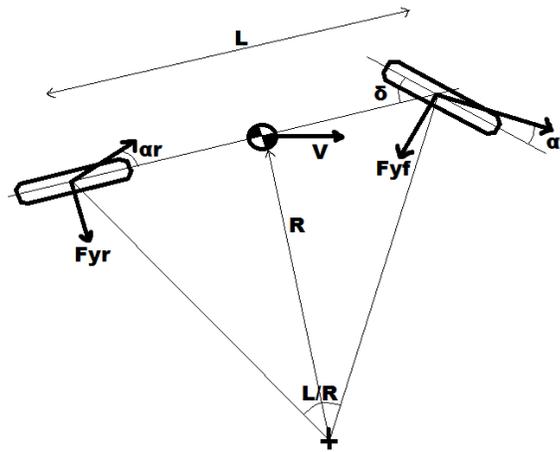
### 2.5 Dinámica direccional del vehículo

Para obtener una mejor comprensión del tema que se abordará, el estudio se realizará con un modelo de la mitad de un vehículo [Escalona, 2008].

La respuesta de un vehículo a un cambio de dirección cuando circula a mediana y alta velocidad es más compleja que cuando lo hace a baja velocidad, puesto que en las primeras circunstancias la fuerza centrífuga toma notable importancia.

De la geometría mostrada en la Fig. 2.10, se puede obtener la relación entre el ángulo de dirección ( $\delta$ ), el radio de giro ( $R$ ), el largo del vehículo ( $L$ ), y los ángulos de deslizamientos ( $\alpha_f, \alpha_r$ ) [Jover y col., 2002].

$$\delta = L/R + \alpha_f - \alpha_r$$



**Fig. 2.10. Modelo simplificado de un cambio de dirección.**

Para pequeños ángulos de cambio de dirección, las fuerzas de giro que actúan sobre el neumático trasero y delantero son las siguientes:

$$F_{yf} = m_f V^2 / R = C_\alpha \alpha_f$$

$$F_{yr} = m_r V^2 / R = C_\alpha \alpha_r$$

Por lo tanto se obtiene:

$$\alpha_f = m_f V^2 / C_\alpha R$$

$$\alpha_r = m_r V^2 / C_\alpha R$$

$$\delta = L/R + (W_f - W_r) V^2 / C_\alpha g R$$

$$\delta = L/R + K_{us} a_y / g$$

Para  $K_{us} = 0$ , el vehículo posee una dirección neutral, para  $K_{us} > 0$ , una subdirección y para  $K_{us} < 0$ , una sobredirección, este aspecto es de gran

importancia dentro de la dinámica vehicular pues determina la dirección a seguir del cuerpo, ver Fig. 2.11 y Fig. 2.12.

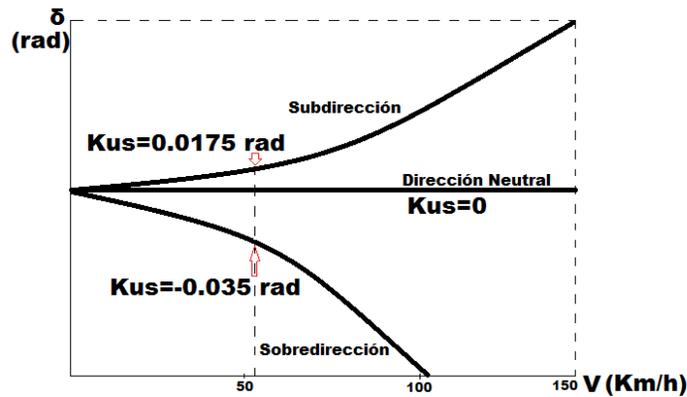


Fig. 2.11. Relación entre el ángulo de dirección y la velocidad.

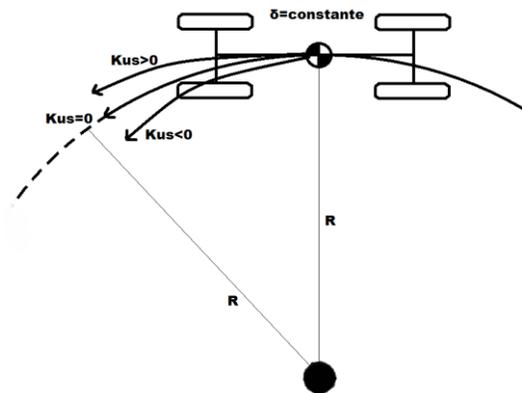


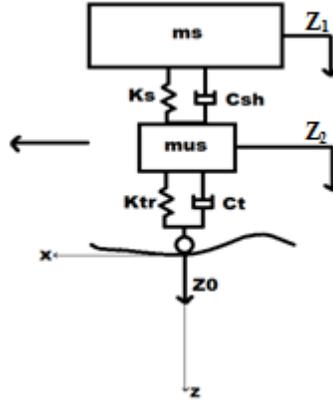
Fig. 2.12. Curvas representativas de dirección neutral, sobredirección, subdirección de un vehículo.

## 2.6 Sistema de Suspensión

La suspensión de un vehículo puede ser modelada por una masa no suspendida (neumáticos) y por una masa suspendida, las cuales se encuentran ligadas por fuerzas de amortiguación [Cotella y col., 2004], [Nacusse y col., 2006]. El movimiento en el plano vertical puede ser descrito por dos coordenadas  $z_1$  y  $z_2$ , con origen en el punto de equilibrio de la masa suspendida y no suspendida. Se

estudiará la suspensión de un cuarto de vehículo, para luego generalizar los resultados [Bastow, 1990], [Sharp y col., 2008].

Aplicando la segunda Ley de Newton a la masa suspendida y no suspendida separadamente, se pueden obtener las ecuaciones del movimiento del sistema, ver Fig. 2.13 [Nacusse y col., 2006].



**Fig. 2.13. Modelo de 1/4 de vehículo.**

Para la masa suspendida se puede obtener:

$$m_s \ddot{z}_1 + c_{sh}(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + k_s(z_1 - z_2) = 0$$

Para la masa no suspendida el análisis físico toma la forma siguiente:

$$m_{us} \ddot{z}_2 + c_{sh}(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + k_s(z_2 - z_1) + c_t \dot{z}_2 + k_{tr} z_2 = F(t) = c_t \dot{z}_0 + k_{tr} z_0$$

Apoyándonos en la Transformada de Laplace para llevar el sistema al espacio de la frecuencia, se pueden obtener las funciones transferenciales que se muestran a continuación [Pérez, 2008b].

$$Z_1(s) / Z_0(s) =$$

$$\frac{[c_t c_{sh} s^2 + (c_t k_s + k_{tr} c_{sh})s + k_{tr} k_s]}{[m_{us} m_s s^4 + (m_s c_{sh} + m_s c_t + m_{us} c_{sh})s^3 + ((k_s + k_{tr})m_s + c_{sh}(c_{sh} + c_t) + m_{us} k_s)s^2 \dots]}$$

$$\frac{1}{\dots + (c_{sh}(k_s + k_{tr}) + k_s(c_{sh} + c_t) - c_{sh}(c_{sh} + k_s))s + (k_s(k_s + k_{tr}) - (c_{sh} + k_s)k_s)}$$

$$\frac{Z_2(s)}{Z_0(s)} = \frac{[c_t m_s s^3 + (c_t c_{sh} + k_{tr} m_s) s^2 + (c_t k_s + k_{tr} c_{sh}) s + k_{tr} k_s]}{[m_{us} m_s s^4 + (m_s c_{sh} + m_s c_t + m_{us} c_{sh}) s^3 + ((k_s + k_{tr}) m_s + c_{sh} (c_{sh} + c_t) + m_{us} k_s) s^2 + \dots]} \frac{1}{\dots + (c_{sh} (k_s + k_{tr}) + k_s (c_{sh} + c_t) - c_{sh} (c_{sh} + k_s)) s + (k_s (k_s + k_{tr}) - (c_{sh} + k_s) k_s)}$$

En la Tabla 2.2, se muestran los valores que poseen los parámetros con los cuales se ha realizado el estudio del sistema de suspensión [Iijima y col., 2009].

**Tabla 2.2. Constantes del sistema de suspensión.**

$m_s$	454.5 [kg]
$m_{us}$	45.45[kg]
$k_s$	22000 [N/m]
$c_{sh}$	2500 [N*s/m]
$k_{tr}$	176000 [N/m]
$c_t$	2500 [N*s/m]

## 2.7 Funciones aleatorias para la creación de superficies

Para tratar de lograr una superficie se pueden utilizar funciones predefinidas, como una rampa, un paso, una senoide, pero una superficie puede ser descrita con mayor aproximación a la realidad mediante las funciones aleatorias. La característica de una función aleatoria es que un valor instantáneo, no puede ser determinado de manera determinística [Pérez, 2009].

En las vibraciones aleatorias el valor cuadrático-medio de la amplitud, es de gran interés, y está asociado con la energía promedio. Para un armónico  $z_n(x)$  con amplitud  $Z_n$  y con una longitud de onda  $\lambda_{wn}$ , puede ser expresado como:

$$z_n(x) = Z_n \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda_{wn}}\right) = Z_n \sin \Omega_n x$$

Donde  $\Omega_n = 2\pi/\lambda_{wn}$  es la frecuencia espacial circular de los armónicos, expresado en *rad/m*.

El valor cuadrático-medio de la amplitud, se puede determinar de la siguiente forma:

$$\bar{z}_n^2 = \frac{1}{\lambda_{wn}} \int_0^{\lambda_{wn}} \left[ Z_n \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda_{wn}}\right) \right]^2 dx = Z_n^2/2$$

Para una función contener un número discreto de frecuencias, el contenido de la frecuencia puede ser expresado en términos de valores cuadráticos-medios, y el resultado es un espectro discreto que se muestra en la Fig. 2.14 [Poppire y col., 2010].

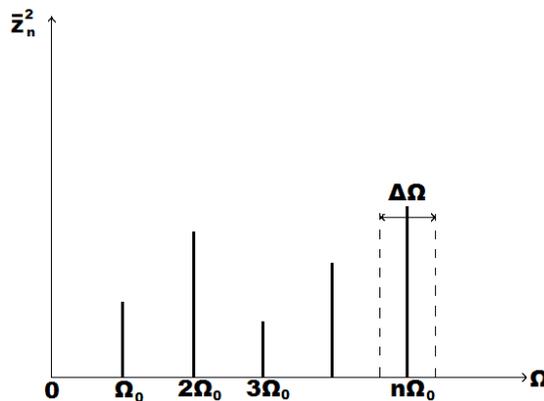


Fig. 2.14. Espectro de frecuencia discreta de una función aleatoria.

## 2.8 Cambios de referencia

En muchas ocasiones es necesario hacer cambios de referencia de un sistema de referencia inercial a uno no inercial o al contrario.

La matriz de transformación  $T$  tiene la forma siguiente:

$$T = \begin{bmatrix} \text{Rotación} & \text{Traslación} \\ \text{Perspectiva} & \text{Escalado} \end{bmatrix}$$

Si se considera  $X_i, Y_i, Z_i$ ; como las coordenadas del sistema de referencia inercial (Tierra), y  $X, Y, Z$ ; como las coordenadas del sistema de referencia no inercial, entonces para realizar el cambio de coordenadas se utiliza la expresión siguiente:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de rotación para el cambio de referencia de un sistema inercial a uno no inercial toma la forma que se muestra a continuación, ver Fig. 2.15 [Pérez, 2010a]:

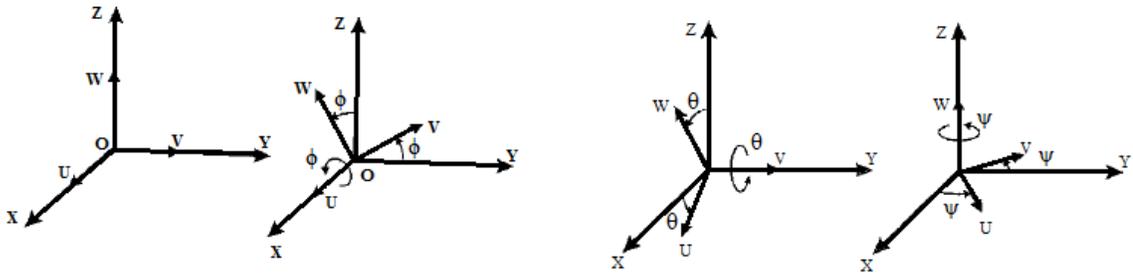


Fig. 2.15. Rotación del sistema de coordenadas.

$$\begin{bmatrix} X_T \\ Y_T \\ Z_T \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \Psi & (\sin \Phi \sin \theta \cos \Psi - \cos \Phi \sin \Psi) & (\cos \Phi \sin \theta \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Psi)h \\ \cos \theta \sin \Psi & (\sin \Phi \sin \theta \sin \Psi + \cos \Phi \cos \Psi) & (\cos \Phi \sin \theta \sin \Psi - \sin \Phi \cos \Psi)h \\ -\sin \theta & \sin \Phi \cos \theta & \cos \Phi \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_b \\ Y_b \\ Z_b \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_T \\ \dot{\theta}_T \\ \dot{\psi}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi / \cos \theta & \cos \phi / \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

## 2.9 Fuerzas que actúan sobre el vehículo

Para aplicar la 2da Ley de Newton, lo primero que se debe hacer es conformar un sistema que está integrado por varios subsistemas, entre ellos, el sistema de suspensión, el sistema de dirección, el chasis, etc., todos estos subsistemas conforman el sistema “vehículo”, sobre el cual actúan fuerzas externas que son las que se están analizando [Diego, 2008].

Se realizará un análisis de las fuerzas actuantes sobre el vehículo por ejes, se aclara que en este análisis se han despreciado y aproximado algunas fuerzas actuantes con el objetivo de facilitar el análisis correspondiente, pero se aclara que lo anteriormente dicho no afecta en gran medida el análisis dinámico que se realiza, por lo tanto el mismo es una buena aproximación a la dinámica real de un vehículo [Nantais, 2006]. El análisis se realiza en el sistema de referencia ligado al vehículo.

Se empezará haciendo el análisis por el eje X:

$$\begin{aligned} \sum F_x = & F_{xtfd} + F_{xtfi} + F_{xtrd} + F_{xtri} - F_{ra} - F_{rrfd} - F_{rrfi} - F_{rrrd} - F_{rrri} - F_{xffd} \\ & - F_{xffi} - F_{xfrd} - F_{xfri} - F_{rt} \pm F_{gx} \end{aligned}$$

$F_{xtfd}$ ,  $F_{xtfi}$ ,  $F_{xtrd}$ ,  $F_{xtri}$ , son las fuerzas de tracción frontal y trasera, derecha e izquierda.

$F_{ra}$ , es la fuerza de resistencia del aire, estas fuerzas aerodinámicas pueden expresarse en función de la presión dinámica y de una superficie característica, mediante un coeficiente adimensional de proporcionalidad, determinado experimentalmente, que se conserva prácticamente constante para valores del

número de Reynolds suficientemente altos; los cuales se presentan en condiciones operativas normales del vehículo [Sacco y col., 2005].

$$F_{ra} = \rho C_x A_f V_x^2 / 2$$

Donde  $\rho$  es la densidad de aire,  $C_x$  es el coeficiente de *drag* que es particular del vehículo que se trate,  $A_f$  es el área frontal del vehículo y  $V_x$  es la velocidad de avance del vehículo relativa al viento.

$F_{rrfd}, F_{rrfi}, F_{rrrd}, F_{rrri}$ , son las fuerzas de resistencia a la rodadura frontal y trasera, derecha e izquierda. .

$F_{xffd}, F_{xffi}, F_{xfrd}, F_{xfri}$ , son las fuerzas de frenado frontal y trasera, derecha e izquierda, estas fuerzas existen solo en el momento de frenado.

$F_{rt}$ , es la fuerza de resistencia al tráiler, si el vehículo posee el mismo.

$F_{gx}$ , es la fuerza de gravedad, la cual puede ayudar el movimiento del vehículo ( $+F_{gx}$ ), en el caso de que el vehículo se mueva pendiente abajo, o puede frenar el movimiento del mismo ( $-F_{gx}$ ), en el caso de que el vehículo se mueva pendiente arriba [Pérez, 2008a].

Análisis en el eje Y:

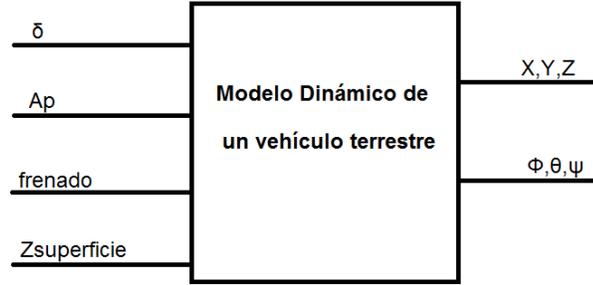
$$\sum F_y = F_{xfd} \sin \delta + F_{xfi} \sin \delta + F_{yfd} \cos \delta + F_{yfi} \cos \delta + F_{yrd} + F_{yri}$$

Análisis en el eje Z:

$$\sum F_z = c_t \dot{z}_0 + k_{tr} z_0 + N - F_{gz}$$

La fuerza normal a la superficie ( $N$ ) y la fuerza de gravedad en el eje Z, se cancelan mutuamente siempre que exista contacto con la superficie.

De esta manera el modelo del vehículo se puede expresar de la siguiente forma, ver Fig. 2.16 [Pérez, 2011]:



**Fig. 2.16. Esquema de entradas-salidas del modelo dinámico.**

$$F_{xtfd} + F_{xtfi} + F_{xtrd} + F_{xtri} - F_{ra} - F_{rrfd} - F_{rrfi} - F_{rrrd} - F_{rrri} - F_{xffd} - F_{xffi} \\ - F_{xfrd} - F_{xfri} - F_{rt} \pm F_{gx} = m\ddot{X} + m\dot{\theta}\dot{Z} - m\dot{\psi}\dot{Y}$$

$$F_{yfd} \sin \delta + F_{yfi} \sin \delta + F_{yfd} \cos \delta + F_{yfi} \cos \delta + F_{yrd} + F_{yri} = m\ddot{Y} + m\dot{\psi}\dot{X} - m\dot{\phi}\dot{Z} \\ c_t\dot{z}_{ofd} + k_{tr}z_{ofd} + c_t\dot{z}_{ofi} + k_{tr}z_{ofi} + c_t\dot{z}_{ord} + k_{tr}z_{ord} + c_t\dot{z}_{ori} + k_{tr}z_{ori} - N + F_{gz} \\ = m\ddot{Z} + m\dot{\phi}\dot{Y} - m\dot{\theta}\dot{X}$$

$$(c_t\dot{z}_{ofi} + k_{tr}z_{ofi} + c_t\dot{z}_{ori} + k_{tr}z_{ori})d - (c_t\dot{z}_{ofd} + k_{tr}z_{ofd} + c_t\dot{z}_{ord} + k_{tr}z_{ord})d \\ = I_x\ddot{\phi} + I_z\dot{\theta}\dot{\psi} - I_y\dot{\psi}\dot{\theta}$$

$$(c_t\dot{z}_{ord} + k_{tr}z_{ord} + c_t\dot{z}_{ori} + k_{tr}z_{ori})b - (c_t\dot{z}_{ofd} + k_{tr}z_{ofd} + c_t\dot{z}_{ofi} + k_{tr}z_{ofi})a \\ = I_y\ddot{\theta} + I_x\dot{\phi}\dot{\psi} - I_z\dot{\psi}\dot{\phi}$$

$$a(F_{xtfd} + F_{xtfi} + F_{xtrd} + F_{xtri}) \sin \delta \\ + 2C_\alpha a \left( \delta - u_4 + au_{12}/u_2 \right) \cos \delta - 2C_\alpha b \left( bu_{12} - u_4/u_2 \right) \\ = I_z\ddot{\psi} + I_y\dot{\phi}\dot{\theta} - I_x\dot{\theta}\dot{\phi}$$

## **Conclusiones parciales**

De todo lo anterior se puede concluir lo siguiente:

- Con el modelo simplificado obtenido a partir de las consideraciones antes mencionadas se logra un modelo que gana en simplicidad, ayudando esto a que el mismo posea un menor costo computacional.
- El modelo dinámico simplificado obtenido se puede utilizar como material de estudio, debido que en el mismo se explican detalladamente la gran mayoría de los fenómenos físicos presentes en un vehículo terrestre.
- En el modelo dinámico de un vehículo de seis grados de libertad, la dinámica longitudinal, lateral y transversal están íntimamente ligadas, lo que trae como consecuencia que exista dependencia entre sus variables.

---

## CAPÍTULO 3

---

### Implementación de algoritmos matemáticos

En este capítulo se llevará a cabo la implementación matemática de los métodos de Euler, Runge-Kutta de orden dos, Runge-Kutta de orden cuatro y Adams-Bashforth de orden cuatro. También se realizara un análisis matemático del orden del error que se comete cuando se realiza el cálculo del modelo con cada algoritmo.

#### 3.1 Transformación de un sistema de ecuaciones diferenciales en un problema de Cauchy

Casi todas las ecuaciones diferenciales de orden  $m$  con condiciones iniciales pueden ser transformadas en problemas de Cauchy de orden  $m$  [Dokainish y col., 2005]. Todo lo que se requiere es que la ecuación diferencial pueda ser expresada en la forma que sigue:

$$d^m y / dx^m = G \left( x, y, dy / dx, d^2 y / dx^2, \dots, d^{m-1} y / dx^{m-1} \right)$$

$$y(x_0) = c_1$$

$$y'(x_0) = c_2$$

$$\vdots$$

$$y^{m-1}(x_0) = c_m$$

Para el modelo desarrollado anteriormente se pueden realizar los cambios de variables que se muestran:

$$u_1 = X_b$$

$$u_2 = \dot{X}_b$$

$$u_3 = Y_b$$

$$u_4 = \dot{Y}_b$$

$$u_5 = Z_b$$

$$u_6 = \dot{Z}_b$$

$$u_7 = \phi$$

$$u_8 = \dot{\phi}$$

$$u_9 = \theta$$

$$u_{10} = \dot{\theta}$$

$$u_{11} = \psi$$

$$u_{12} = \dot{\psi}$$

Teniendo en cuenta todo lo anteriormente desarrollado, se puede hacer notar que el modelo propuesto es un sistema de ecuaciones diferenciales, por lo tanto puede reducirse a un problema de Cauchy, aplicando la técnica anterior al modelo propuesto, se obtiene el sistema siguiente:

$$du_1/dt = u_2$$

$$du_2/dt = 40/m A_p \cos \delta + 40/m A_p - 0.5/m u_2^2 - 80/m A_{pf}$$

$$- 2C_\alpha/m \left( \delta - u_4 + a u_{12}/u_2 \right) \sin \delta - Fg/m \sin u_9 - u_{10} u_6 + u_{12} u_4$$

$$du_3/dt = u_4$$

$$du_4/dt = 40/m A_p \sin \delta + 2C_\alpha/m \left( \delta - u_4 + au_{12}/u_2 \right) \cos \delta + 2C_\alpha/m \left( bu_{12} - u_4/u_2 \right) - u_{12}u_2 + u_8u_6$$

$$du_5/dt = u_6$$

$$du_6/dt = \left( -C_{sh}/m (u_{2sfd} - u_{4sfd}) - K_s/m (u_{1sfd} - u_{3sfd}) \right) + \left( -C_{sh}/m (u_{2sfi} - u_{4sfi}) - K_s/m (u_{1sfi} - u_{3sfi}) \right) + \left( -C_{sh}/m (u_{2srd} - u_{4srd}) - K_s/m (u_{1srd} - u_{3srd}) \right) + \left( -C_{sh}/m (u_{2sri} - u_{4sri}) - K_s/m (u_{1sri} - u_{3sri}) \right) - u_8u_4 + u_{10}u_2$$

$$du_7/dt = u_8$$

$$du_8/dt = \left( \left( -C_{sh}/m (u_{2sfi} - u_{4sfi}) - K_s/m (u_{1sfi} - u_{3sfi}) \right) + \left( -C_{sh}/m (u_{2sri} - u_{4sri}) - K_s/m (u_{1sri} - u_{3sri}) \right) \right) d/I_x -$$

$$\begin{aligned}
& - \left( \left( -C_{sh}/m (u_{2sfd} - u_{4sfd}) - K_s/m (u_{1sfd} - u_{3sfd}) \right) \right. \\
& \quad \left. + \left( -C_{sh}/m (u_{2srd} - u_{4srd}) - K_s/m (u_{1srd} - u_{3srd}) \right) \right) d/I_x \\
& \quad - I_z u_{10} u_{12}/I_x + I_y u_{10} u_{12}/I_x
\end{aligned}$$

$$du_9/dt = u_{10}$$

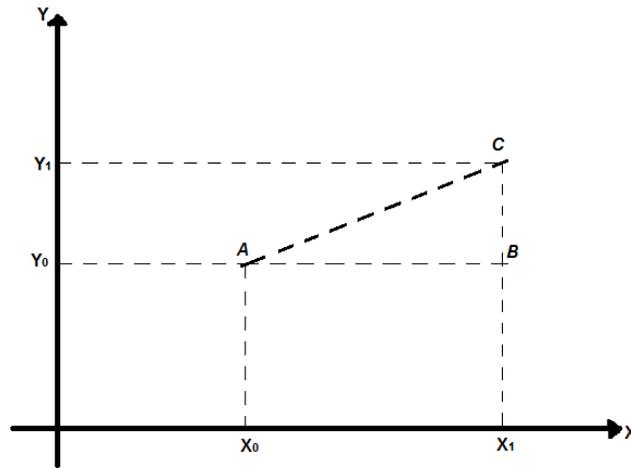
$$\begin{aligned}
du_{10}/dt = & \left( \left( -C_{sh}/m (u_{2srd} - u_{4srd}) - K_s/m (u_{1srd} - u_{3srd}) \right) \right. \\
& \left. + \left( -C_{sh}/m (u_{2sri} - u_{4sri}) - K_s/m (u_{1sri} - u_{3sri}) \right) \right) b/I_y \\
& - \left( \left( -C_{sh}/m (u_{2sfd} - u_{4sfd}) - K_s/m (u_{1sfd} - u_{3sfd}) \right) \right. \\
& \left. + \left( -C_{sh}/m (u_{2sfi} - u_{4sfi}) - K_s/m (u_{1sfi} - u_{3sfi}) \right) \right) a/I_y - I_x u_8 u_{12}/I_y \\
& + I_z u_8 u_{12}/I_y
\end{aligned}$$

$$du_{11}/dt = u_{12}$$

$$\begin{aligned} \frac{du_{12}}{dt} = & \left( 40A_p \sin \delta + 2C_\alpha \left( \delta - u_4 + au_{12}/u_2 \right) \cos \delta \right) a/I_z \\ & - 2C_\alpha b/I_z \left( bu_{12} - u_4/u_2 \right) - I_y u_8 u_{10}/I_z + I_x u_8 u_{10}/I_z \end{aligned}$$

### 3.2 Método de Euler

El método de Euler es el más elemental de los métodos de paso simple, y también es uno de los más utilizados en el cálculo dinámico de modelos. Como se conoce el primer elemento  $(x_0, y_0)$  de la solución, se puede determinar el campo de direcciones en ese punto:  $f(x_0, y_0)$ . Para hallar el segundo punto de la solución aproximada  $(x_1, y_1)$  se sigue una trayectoria rectilínea en esa dirección hasta alcanzar la abscisa  $x_1$ , ver Fig. 3.1 [Martin, 2007], [Luca y col., 2009].



**Fig. 3.1. Representación gráfica de dos valores consecutivos.**

Como la pendiente del segmento AC es  $f(x_0, y_0)$ , entonces:

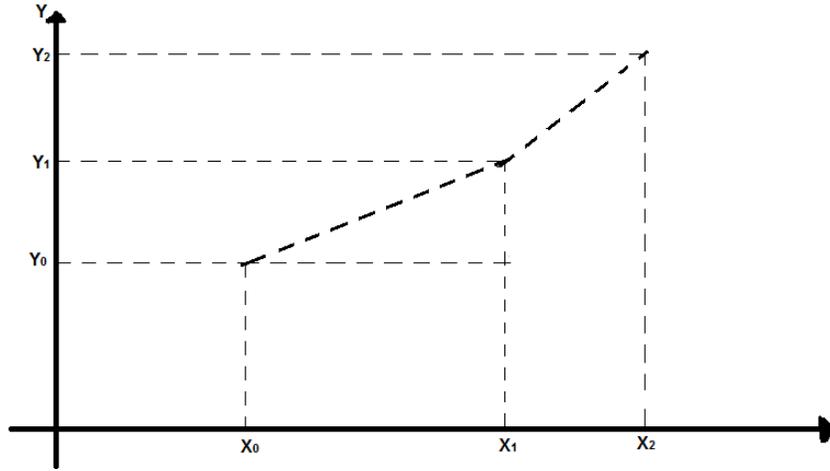
$$y_1 = y_0 + (x_1 - x_0)f(x_0, y_0)$$

Llamando  $h = x_1 - x_0$ , esta ecuación queda:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

Una vez conocido  $(x_1, y_1)$ , se aplica la misma idea para determinar  $(x_2, y_2)$ . Como se ve de la Fig. 3.2, y teniendo  $h = x_2 - x_1$  resulta:

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$



**Fig. 3.2. Representación gráfica de cambios de pendiente de la función.**

En general, si se toma un paso  $h$  como incremento de la variable independiente, resulta:

$$\begin{aligned} \text{Para } n = 0, 1, 2, \dots \quad x_{n+1} &= x_n + h \\ y_{n+1} &= y_n + hf(x_n, y_n) \end{aligned}$$

Aplicando todo lo anteriormente mencionado al modelo dinámico del vehículo, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} u_{1(n+1)} &= u_{1n} + hf(u_2) \\ u_{2(n+1)} &= u_{2n} + hf(A_p, t, u_2, u_4, u_6, u_9, u_{10}, u_{12}) \\ u_{3(n+1)} &= u_{3n} + hf(u_4) \\ u_{4(n+1)} &= u_{4n} + hf(A_p, t, u_2, u_4, u_6, u_8, u_{12}) \\ u_{5(n+1)} &= u_{5n} + hf(u_6) \\ u_{6(n+1)} &= u_{6n} + hf(u_2, u_4, u_8, u_{10}, u_{1sfd}, u_{1sfi}, u_{1srd}, u_{1sri}, u_{2sfd}, \end{aligned}$$

$$u_{2sfi}, u_{2srd}, u_{2sri}, u_{3sfd}, u_{3sfi}, u_{3srd}, u_{3sri}, u_{1sfd}, u_{1sfi}, u_{1srd}, u_{1sri})$$

$$u_{7(n+1)} = u_{7n} + hf(u_8)$$

$$u_{8(n+1)} = u_{8n} + hf(u_{10}, u_{12}, u_{1sfd}, u_{1sfi}, u_{1srd}, u_{1sri}, u_{2sfd},$$

$$u_{2sfi}, u_{2srd}, u_{2sri}, u_{3sfd}, u_{3sfi}, u_{3srd}, u_{3sri}, u_{1sfd}, u_{1sfi}, u_{1srd}, u_{1sri})$$

$$u_{9(n+1)} = u_{9n} + hf(u_{10})$$

$$u_{10(n+1)} = u_{10n} + hf(u_8, u_{12}, u_{1sfd}, u_{1sfi}, u_{1srd}, u_{1sri}, u_{2sfd},$$

$$u_{2sfi}, u_{2srd}, u_{2sri}, u_{3sfd}, u_{3sfi}, u_{3srd}, u_{3sri}, u_{1sfd}, u_{1sfi}, u_{1srd}, u_{1sri})$$

$$u_{11(n+1)} = u_{11n} + hf(u_{12})$$

$$u_{12(n+1)} = u_{12n} + hf(A_p, t, u_2, u_4, u_8, u_{10}, u_{12})$$

### 3.2.1 Error en el Método de Euler

Considérese el problema de Cauchy:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0$$

Sea  $y(x)$ : la solución exacta del problema.

$\{y_0, y_1, y_2, \dots, y_n\}$ : la solución obtenida por el método de Euler con paso  $h$ .

$e_n = error(y_n) = y(x_n) - y_n$ : el error que afecta a  $y_n$ .

Se supondrá que  $y(x)$  posee segunda derivada continua, de modo que puede usarse el polinomio de Taylor de primer grado con resto de Lagrange, alrededor de  $x_n$ :

$$y(x) = y(x_n) + y'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2} y''(\xi)(x - x_n)^2$$

Donde  $\xi$  es algún valor entre  $x_n$  y  $x$ . Evaluando para  $x = x_{n+1}$  y considerando que  $h = x_{n+1} - x_n$  resulta:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{1}{2} y''(c)h^2$$

Donde  $x_n < c < x_{n+1}$ .

Después de realizar un desarrollo matemático se obtiene:

$$e_{n+1} = e_n + h[f(x_n, y(x_n)) - f(x_n, y_n)] + \frac{1}{2}y''(c)h^2$$

Mediante el teorema del valor medio del cálculo diferencial, la diferencia entre corchetes puede escribirse:

$$f(x_n, y(x_n)) - f(x_n, y_n) = f_y(x_n, \bar{y})[y(x_n) - y_n]$$

Donde  $f_y$ : representa la derivada parcial de  $f$  respecto a  $y$ , que se supone continua;  $\bar{y}$ : es un número entre  $y(x_n)$  y  $y_n$ .

Ahora queda:

$$e_{n+1} = e_n[1 + hf_y(x_n, \bar{y})] + \frac{1}{2}y''(c)h^2$$

Se puede observar que, aun en el caso en que  $y_n$  fuera exacto ( $e_n = 0$ ), el error  $e_{n+1}$  tomaría el valor  $\frac{1}{2}y''(c)h^2$ .

Así que este término es el error nuevo que se incorpora en el paso  $n + 1$ ; por esta razón suele llamarse error local [Sciavicco y col., 2006].

El otro sumando se conoce como error propagado y representa la parte del error  $e_{n+1}$  que se debe al error que ya existía en el paso anterior.

El signo de  $f_y(x_n, y)$  es fundamental en el comportamiento del error propagado, y como  $h$  es usualmente pequeño, se obtiene:

$$\begin{aligned} f_y(x_n, \bar{y}) > 0 &\Rightarrow 1 + hf_y(x_n, \bar{y}) > 1 \\ f_y(x_n, \bar{y}) < 0 &\Rightarrow 0 < 1 + hf_y(x_n, \bar{y}) < 1 \end{aligned}$$

La ecuación del error es una ecuación en diferencias finitas (ecuación recursiva) de primer orden, que puede ser resuelta, de modo que su variable  $e_n$  quede como función explícita de  $n$  como se muestra:

$$|e_n| \leq hY/2F [e^{(x_n - x_0)F} - 1]$$

Donde:

$F$ : Cota superior de  $|f_y(x, y)|$  en toda la región del plano  $xy$  donde se desarrolla el problema.

$Y$ : Cota superior de  $y''(x)$  para  $x_0 \leq x \leq x_n$ .

De la ecuación anterior se llega a dos conclusiones de gran importancia teórica y práctica:

- Para una  $x_n$  fija, si se toman valores de  $h$  cada vez menores, se cumple que  $\lim_{h \rightarrow 0} e_n = 0$ .
- El error total del método de Euler depende de  $h$  de tal modo que esta dependencia no sobrepasa una cierta función lineal  $e_n = O(h)$ .

### 3.3 Método de Runge-Kutta de orden dos

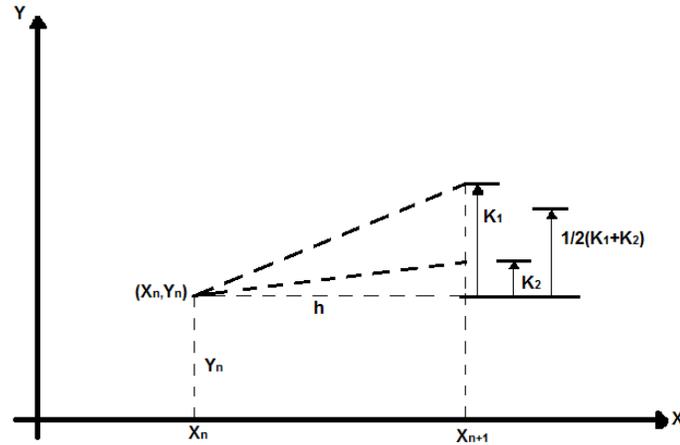
Los términos  $f(x_n, y_n)$  y  $f(x_n + h, y_n + K_1)$  corresponde con la pendiente del campo de direcciones en los puntos  $(x_n, y_n)$  y  $(x_n + h, y_n + K_1)$ , ver Fig. 3.3. Estas pendientes, multiplicadas por el incremento horizontal  $h$ , corresponden con incrementos verticales  $K_1$  y  $K_2$  [Dopico, 2004]. Entonces, geoméricamente, el método Runge-Kutta de orden dos (RK2) consiste en determinar el valor  $K_1$  utilizando la pendiente del campo de direcciones en  $(x_n, y_n)$ . Una vez conocido el punto  $(x_n + h, y_n + K_1)$ , tomar en él la pendiente del campo de direcciones y determinar el valor  $K_2$ . El promedio de  $K_1$  y  $K_2$  es equivalente a haber promediado las pendientes del campo de direcciones en  $(x_n, y_n)$  y  $(x_n + h, y_n + K_1)$  y calcular:

$$y_{n+1} = y_n + h(\text{pendiente promedio})$$

$$K_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$K_2 = hf(x_n + h, y_n + K_1)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$$



**Fig. 3.3. Representación gráfica del método de RK2.**

Aplicando el método de RK2 al modelo del vehículo se puede obtener  $K_{1x}$  de la siguiente manera:

$$K_{11} = hf(u_2)$$

$$K_{12} = hf(A_p, t, u_2, u_4, u_6, u_9, u_{10}, u_{12})$$

$$K_{13} = hf(u_4)$$

$$K_{14} = hf(A_p, t, u_2, u_4, u_6, u_8, u_{12})$$

$$K_{15} = hf(u_6)$$

$$K_{16} = hf(u_2, u_4, u_8, u_{10}, u_{1sfd}, u_{1sfi}, u_{1srd}, u_{1sri}, u_{2sfd}, u_{2sfi}, u_{2srd}, u_{2sri}, u_{3sfd}, u_{3sfi}, u_{3srd}, u_{3sri}, u_{1sfd}, u_{1sfi}, u_{1srd}, u_{1sri})$$

$$K_{17} = hf(u_8)$$

$$K_{18} = hf(u_{10}, u_{12}, u_{1sfd}, u_{1sfi}, u_{1srd}, u_{1sri}, u_{2sfd}, u_{2sfi}, u_{2srd}, u_{2sri}, u_{3sfd}, u_{3sfi}, u_{3srd}, u_{3sri}, u_{1sfd}, u_{1sfi}, u_{1srd}, u_{1sri})$$

$$K_{19} = hf(u_{10})$$

$$K_{110} = hf(u_8, u_{12}, u_{1sfd}, u_{1sfi}, u_{1srd}, u_{1sri}, u_{2sfd}, u_{2sfi}, u_{2srd}, u_{2sri}, u_{3sfd}, u_{3sfi}, u_{3srd}, u_{3sri}, u_{1sfd}, u_{1sfi}, u_{1srd}, u_{1sri})$$

$$K_{111} = hf(u_{12})$$

$$K_{112} = hf(A_p, t, u_2, u_4, u_8, u_{10}, u_{12})$$

También se determinan las  $K_{2x}$ :

$$K_{21} = hf(u_2 + K_{12})$$

$$K_{22} = hf(A_p, t + h, u_2 + K_{12}, u_4 + K_{14}, u_6 + K_{16}, u_8 + K_{18}, u_{10} + K_{110}, u_{12} + K_{112})$$

$$K_{23} = hf(u_4 + K_{14})$$

$$K_{24} = hf(A_p, t + h, u_2 + K_{12}, u_4 + K_{14}, u_6 + K_{16}, u_8 + K_{18}, u_{12} + K_{112})$$

$$K_{25} = hf(u_6 + K_{16})$$

$$K_{26} = hf(u_2 + K_{12}, u_4 + K_{14}, u_8 + K_{18}, u_{10} + K_{110}, u_{1sfd}, u_{1sfi}, u_{1srd}, u_{1sri}, u_{2sfd},$$

$$u_{2sfi}, u_{2srd}, u_{2sri}, u_{3sfd}, u_{3sfi}, u_{3srd}, u_{3sri}, u_{1sfd}, u_{1sfi}, u_{1srd}, u_{1sri})$$

$$K_{27} = hf(u_8 + K_{18})$$

$$K_{28} = hf(u_{10} + K_{110}, u_{12} + K_{112}, u_{1sfd}, u_{1sfi}, u_{1srd}, u_{1sri}, u_{2sfd},$$

$$u_{2sfi}, u_{2srd}, u_{2sri}, u_{3sfd}, u_{3sfi}, u_{3srd}, u_{3sri}, u_{1sfd}, u_{1sfi}, u_{1srd}, u_{1sri})$$

$$K_{29} = hf(u_{10} + K_{110})$$

$$K_{210} = hf(u_8 + K_{18}, u_{12} + K_{112}, u_{1sfd}, u_{1sfi}, u_{1srd}, u_{1sri}, u_{2sfd},$$

$$u_{2sfi}, u_{2srd}, u_{2sri}, u_{3sfd}, u_{3sfi}, u_{3srd}, u_{3sri}, u_{1sfd}, u_{1sfi}, u_{1srd}, u_{1sri})$$

$$K_{211} = hf(u_{12} + K_{112})$$

$$K_{212} = hf(A_p, t + h, u_2 + K_{12}, u_4 + K_{14}, u_8 + K_{18}, u_{10} + K_{110}, u_{12} + K_{112})$$

Y por último se obtienen las variables que se requieren:

$$u_{1(n+1)} = u_{1n} + K_{11} + K_{21}/2$$

$$u_{2(n+1)} = u_{2n} + K_{12} + K_{22}/2$$

$$u_{3(n+1)} = u_{3n} + K_{13} + K_{23}/2$$

$$u_{4(n+1)} = u_{4n} + K_{14} + K_{24}/2$$

$$u_{5(n+1)} = u_{5n} + K_{15} + K_{25}/2$$

$$u_{6(n+1)} = u_{6n} + K_{16} + K_{26}/2$$

$$u_{7(n+1)} = u_{7n} + K_{17} + K_{27}/2$$

$$u_{8(n+1)} = u_{8n} + K_{18} + K_{28}/2$$

$$u_{9(n+1)} = u_{9n} + K_{19} + K_{29}/2$$

$$u_{10(n+1)} = u_{10n} + K_{110} + K_{210}/2$$

$$u_{11(n+1)} = u_{11n} + K_{111} + K_{211}/2$$

$$u_{12(n+1)} = u_{12n} + K_{112} + K_{212}/2$$

### 3.3.1 Error en el método de Runge-Kutta de orden dos

El método de RK2 posee errores local y total del orden que se muestra:

Error local:  $O(h^3)$

Error total:  $O(h^2)$

El error total se puede estimar por doble cálculo mediante la fórmula:

$$e_h = (y_h - y_{2h}) / (2^p - 1)$$

Donde:

$y_h$ : solución obtenida para un cierto  $x$  mediante RK2 con paso  $h$ ;

$y_{2h}$ : solución obtenida para el mismo  $x$  mediante RK2 con paso  $2h$ ;

$e_h$ : error total en  $y_h$ .

### 3.4 Método de Runge-Kutta de orden cuatro

El método de Runge-Kutta de orden cuatro (RK4), se define de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= hf(x_n, y_n) \\
 K_2 &= hf(x_n + h/2, y_n + K_1/2) \\
 K_3 &= hf(x_n + h/2, y_n + K_2/2) \\
 K_4 &= hf(x_n + h, y_n + K_3) \\
 y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)
 \end{aligned}$$

El método de RK4 posee los siguientes errores:

Error local:  $O(h^5)$

Error total:  $O(h^4)$

Podemos también aplicar el método de RK4 al modelo del vehículo, para determinar las  $K_{1x}$  se procede de la siguiente manera [Yu, 2001]:

$$\begin{aligned}
 K_{11} &= hf(u_2) \\
 K_{12} &= hf(A_p, t, u_2, u_4, u_6, u_9, u_{10}, u_{12}) \\
 K_{13} &= hf(u_4) \\
 K_{14} &= hf(A_p, t, u_2, u_4, u_6, u_8, u_{12}) \\
 K_{15} &= hf(u_6) \\
 K_{16} &= hf(u_2, u_4, u_8, u_{10}, u_{1sfd}, u_{1sfi}, u_{1srd}, u_{1sri}, u_{2sfd}, \\
 &u_{2sfi}, u_{2srd}, u_{2sri}, u_{3sfd}, u_{3sfi}, u_{3srd}, u_{3sri}, u_{1sfd}, u_{1sfi}, u_{1srd}, u_{1sri}) \\
 K_{17} &= hf(u_8) \\
 K_{18} &= hf(u_{10}, u_{12}, u_{1sfd}, u_{1sfi}, u_{1srd}, u_{1sri}, u_{2sfd}, \\
 &u_{2sfi}, u_{2srd}, u_{2sri}, u_{3sfd}, u_{3sfi}, u_{3srd}, u_{3sri}, u_{1sfd}, u_{1sfi}, u_{1srd}, u_{1sri})
 \end{aligned}$$

$$K_{19} = hf(u_{10})$$

$$K_{110} = hf(u_8, u_{12}, u_{1sfd}, u_{1sfi}, u_{1srd}, u_{1sri}, u_{2sfd}, u_{2sfi}, u_{2srd}, u_{2sri}, u_{3sfd}, u_{3sfi}, u_{3srd}, u_{3sri}, u_{1sfd}, u_{1sfi}, u_{1srd}, u_{1sri})$$

$$K_{111} = hf(u_{12})$$

$$K_{112} = hf(A_p, t, u_2, u_4, u_8, u_{10}, u_{12})$$

Obtenemos las  $K_{2x}$ :

$$K_{21} = hf(u_2 + K_{12}/2)$$

$$K_{22} = hf(A_p, t + h/2, u_2 + K_{12}/2, u_4 + K_{14}/2, u_6 + K_{16}/2, u_8 + K_{18}/2, u_{10} + K_{110}/2, u_{12} + K_{112}/2)$$

$$K_{23} = hf\left(u_4 + K_{14}/2\right)$$

$$K_{24} = hf\left(A_p, t + h/2, u_2 + K_{12}/2, u_4 + K_{14}/2, u_6 + K_{16}/2, u_8 + K_{18}/2, u_{12} + K_{112}/2\right)$$

$$K_{25} = hf\left(u_6 + K_{16}/2\right)$$

$$K_{26} = hf(u_2 + K_{12}/2, u_4 + K_{14}/2, u_8 + K_{18}/2, u_{10}$$

$$+ K_{110}/2, u_{1sfd}, u_{1sfi}, u_{1srd}, u_{1sri}, u_{2sfd},$$

$$u_{2sfi}, u_{2srd}, u_{2sri}, u_{3sfd}, u_{3sfi}, u_{3srd}, u_{3sri}, u_{1sfd}, u_{1sfi}, u_{1srd}, u_{1sri})$$

$$K_{27} = hf(u_8 + K_{18}/2)$$

$$K_{28} = hf(u_{10} + K_{110}/2, u_{12} + K_{112}/2, u_{1sfd}, u_{1sfi}, u_{1srd}, u_{1sri}, u_{2sfd},$$

$$u_{2sfi}, u_{2srd}, u_{2sri}, u_{3sfd}, u_{3sfi}, u_{3srd}, u_{3sri}, u_{1sfd}, u_{1sfi}, u_{1srd}, u_{1sri})$$

$$K_{29} = hf\left(u_{10} + K_{110}/2\right)$$

$$K_{210} = hf(u_8 + K_{118}/2, u_{12} + K_{112}/2, u_{1sfd}, u_{1sfi}, u_{1srd}, u_{1sri}, u_{2sfd},$$

$$u_{2sfi}, u_{2srd}, u_{2sri}, u_{3sfd}, u_{3sfi}, u_{3srd}, u_{3sri}, u_{1sfd}, u_{1sfi}, u_{1srd}, u_{1sri})$$

$$K_{211} = hf\left(u_{12} + K_{112}/2\right)$$

$$K_{212} = hf(A_p, t + h/2, u_2 + K_{12}/2, u_4 + K_{14}/2, u_8 + K_{18}/2, u_{10} + K_{110}/2, u_{12} + K_{112}/2)$$

Obtenemos las  $K_{3x}$ :

$$K_{31} = hf(u_2 + K_{22}/2)$$

$$K_{32} = hf(A_p, t + h/2, u_2 + K_{22}/2, u_4 + K_{24}/2, u_6 + K_{26}/2, u_8 + K_{28}/2, u_{10} + K_{29}/2, u_{12} + K_{210}/2, u_{12} + K_{212}/2)$$

$$K_{33} = hf\left(u_4 + K_{24}/2\right)$$

$$K_{34} = hf\left(A_p, t + h/2, u_2 + K_{22}/K_{12}, u_4 + K_{24}/2, u_6 + K_{26}/2, u_8 + K_{28}/2, u_{12} + K_{212}/2\right)$$

$$K_{35} = hf \left( u_6 + K_{26}/2 \right)$$

$$K_{36} = hf(u_2 + K_{22}/2, u_4 + K_{24}/2, u_8 + K_{28}/2, u_{10} + K_{210}/2, u_{1sfd}, u_{1sfi}, u_{1srd}, u_{1sri}, u_{2sfd},$$

$$u_{2sfi}, u_{2srd}, u_{2sri}, u_{3sfd}, u_{3sfi}, u_{3srd}, u_{3sri}, u_{1sfd}, u_{1sfi}, u_{1srd}, u_{1sri})$$

$$K_{37} = hf(u_8 + K_{28}/2)$$

$$K_{38} = hf(u_{10} + K_{210}/2, u_{12} + K_{212}/2, u_{1sfd}, u_{1sfi}, u_{1srd}, u_{1sri}, u_{2sfd},$$

$$u_{2sfi}, u_{2srd}, u_{2sri}, u_{3sfd}, u_{3sfi}, u_{3srd}, u_{3sri}, u_{1sfd}, u_{1sfi}, u_{1srd}, u_{1sri})$$

$$K_{39} = hf \left( u_{10} + K_{210}/2 \right)$$

$$K_{310} = hf(u_8 + K_{28}/2, u_{12} + K_{212}/2, u_{1sfd}, u_{1sfi}, u_{1srd}, u_{1sri}, u_{2sfd},$$

$$u_{2sfi}, u_{2srd}, u_{2sri}, u_{3sfd}, u_{3sfi}, u_{3srd}, u_{3sri}, u_{1sfd}, u_{1sfi}, u_{1srd}, u_{1sri})$$

$$K_{311} = hf \left( u_{12} + K_{212}/2 \right)$$

$$K_{312} = hf(A_p, t + h/2, u_2 + K_{22}/2, u_4 + K_{24}/2, u_8 + K_{28}/2, u_{10} + K_{210}/2, u_{12} + K_{212}/2)$$

Obtenemos las  $K_{4x}$ :

$$K_{41} = hf(u_2 + K_{32})$$

$$K_{42} = hf(A_p, t + h, u_2 + K_{32}, u_4 + K_{34}, u_6 + K_{36}, u_8 + K_{38}, u_{10} + K_{310}, u_{12} + K_{312})$$

$$K_{43} = hf(u_4 + K_{34})$$

$$K_{44} = hf(A_p, t + h, u_2 + K_{32}, u_4 + K_{34}, u_6 + K_{36}, u_8 + K_{38}, u_{12} + K_{312})$$

$$K_{45} = hf(u_6 + K_{36})$$

$$K_{46} = hf(u_2 + K_{32}, u_4 + K_{34}, u_8 + K_{38}, u_{10} + K_{310}, u_{1sfd}, u_{1sfi}, u_{1srd}, u_{1sri}, u_{2sfd}, u_{2sfi}, u_{2srd}, u_{2sri}, u_{3sfd}, u_{3sfi}, u_{3srd}, u_{3sri}, u_{1sfd}, u_{1sfi}, u_{1srd}, u_{1sri})$$

$$K_{47} = hf(u_8 + K_{38})$$

$$K_{48} = hf(u_{10} + K_{310}, u_{12} + K_{312}, u_{1sfd}, u_{1sfi}, u_{1srd}, u_{1sri}, u_{2sfd}, u_{2sfi}, u_{2srd}, u_{2sri}, u_{3sfd}, u_{3sfi}, u_{3srd}, u_{3sri}, u_{1sfd}, u_{1sfi}, u_{1srd}, u_{1sri})$$

$$K_{49} = hf(u_{10} + K_{310})$$

$$K_{410} = hf(u_8 + K_{38}, u_{12} + K_{312}, u_{1sfd}, u_{1sfi}, u_{1srd}, u_{1sri}, u_{2sfd}, u_{2sfi}, u_{2srd}, u_{2sri}, u_{3sfd}, u_{3sfi}, u_{3srd}, u_{3sri}, u_{1sfd}, u_{1sfi}, u_{1srd}, u_{1sri})$$

$$K_{411} = hf(u_{12} + K_{312})$$

$$K_{412} = hf(A_p, t + h, u_2 + K_{32}, u_4 + K_{34}, u_8 + K_{38}, u_{10} + K_{310}, u_{12} + K_{312})$$

Y por último se procede a la obtención de las variables:

$$u_{1(n+1)} = u_{1n} + (K_{11} + 2K_{21} + 2K_{31} + K_{41})/6$$

$$u_{2(n+1)} = u_{2n} + (K_{12} + 2K_{22} + 2K_{32} + K_{42})/6$$

$$u_{3(n+1)} = u_{3n} + (K_{13} + 2K_{23} + 2K_{33} + K_{43})/6$$

$$u_{4(n+1)} = u_{4n} + (K_{14} + 2K_{24} + 2K_{34} + K_{44})/6$$

$$u_{5(n+1)} = u_{5n} + (K_{15} + 2K_{25} + 2K_{35} + K_{45})/6$$

$$u_{6(n+1)} = u_{6n} + (K_{16} + 2K_{26} + 2K_{36} + K_{46})/6$$

$$u_{7(n+1)} = u_{7n} + (K_{17} + 2K_{27} + 2K_{37} + K_{47})/6$$

$$u_{8(n+1)} = u_{8n} + (K_{18} + 2K_{28} + 2K_{38} + K_{48})/6$$

$$u_{9(n+1)} = u_{9n} + (K_{19} + 2K_{29} + 2K_{39} + K_{49})/6$$

$$u_{10(n+1)} = u_{10n} + (K_{110} + 2K_{210} + 2K_{310} + K_{410})/6$$

$$u_{11(n+1)} = u_{11n} + (K_{111} + 2K_{211} + 2K_{311} + K_{411})/6$$

$$u_{12(n+1)} = u_{12n} + (K_{112} + 2K_{212} + 2K_{312} + K_{412})/6$$

### 3.5 Método de Adams-Bashforth de orden cuatro

Los métodos de Adams-Bashforth forman una familia de métodos de paso múltiple típica, uno de los más usados es el de paso cuádruple [Potra, 1994].

En un problema de Cauchy,  $y(x)$  es la solución, y se cumple que:

$$dy(x)/dx = f(x, y(x))$$

Despejando:  $dy(x) = f(x, y(x))dx$

Integrando y generalizando se obtiene:

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} p(x) dx$$

Donde  $p(x)$  es un polinomio interpolador, el cual puede expresarse mediante la fórmula de Lagrange como:

$$p(x) = L_n(x)f_n + L_{n-1}(x)f_{n-1} + L_{n-2}(x)f_{n-2} + L_{n-3}(x)f_{n-3}$$

$$\text{Donde: } L_n(x) = \frac{(x-x_{n-1})(x-x_{n-2})(x-x_{n-3})}{(x_n-x_{n-1})(x_n-x_{n-2})(x_n-x_{n-3})}$$

$$L_{n-1}(x) = \frac{(x-x_n)(x-x_{n-2})(x-x_{n-3})}{(x_{n-1}-x_n)(x_{n-1}-x_{n-2})(x_{n-1}-x_{n-3})}$$

$$L_{n-2}(x) = \frac{(x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-3})}{(x_{n-2}-x_n)(x_{n-2}-x_{n-1})(x_{n-2}-x_{n-3})}$$

$$L_{n-3}(x) = \frac{(x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-2})}{(x_{n-3}-x_n)(x_{n-3}-x_{n-1})(x_{n-3}-x_{n-2})}$$

Realizando algunos cambios de variables y desarrollando las expresiones anteriores se obtiene:

$$y_{n+1} = y_n + h/24 (55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$$

Este método posee los siguientes errores:

$$\text{Error local: } \frac{251}{720} y^{(5)}(c)h^5$$

$$\text{Error total: } O(h^4)$$

Utilizando el método de AB4 para calcular el modelo dinámico propuesto, el desarrollo matemático realizado queda de la siguiente manera:

$$u_{1(n+1)} = u_{1n} + h/24 (55f_{1n} - 59f_{1(n-1)} + 37f_{1(n-2)} - 9f_{1(n-3)})$$

$$u_{2(n+1)} = u_{2n} + h/24 (55f_{2n} - 59f_{2(n-1)} + 37f_{2(n-2)} - 9f_{2(n-3)})$$

$$u_{3(n+1)} = u_{3n} + h/24 (55f_{3n} - 59f_{3(n-1)} + 37f_{3(n-2)} - 9f_{3(n-3)})$$

$$u_{4(n+1)} = u_{4n} + h/24 (55f_{4n} - 59f_{4(n-1)} + 37f_{4(n-2)} - 9f_{4(n-3)})$$

$$u_{5(n+1)} = u_{5n} + h/24 (55f_{5n} - 59f_{5(n-1)} + 37f_{5(n-2)} - 9f_{5(n-3)})$$

$$u_{6(n+1)} = u_{6n} + h/24 (55f_{6n} - 59f_{6(n-1)} + 37f_{6(n-2)} - 9f_{6(n-3)})$$

$$u_{7(n+1)} = u_{7n} + h/24 (55f_{7n} - 59f_{7(n-1)} + 37f_{7(n-2)} - 9f_{7(n-3)})$$

$$u_{8(n+1)} = u_{8n} + h/24 (55f_{8n} - 59f_{8(n-1)} + 37f_{8(n-2)} - 9f_{8(n-3)})$$

$$u_{9(n+1)} = u_{9n} + h/24 (55f_{9n} - 59f_{9(n-1)} + 37f_{9(n-2)} - 9f_{9(n-3)})$$

$$u_{10(n+1)} = u_{10n} + \frac{h}{24} (55f_{10n} - 59f_{10(n-1)} + 37f_{10(n-2)} - 9f_{10(n-3)})$$

$$u_{11(n+1)} = u_{11n} + \frac{h}{24} (55f_{11n} - 59f_{11(n-1)} + 37f_{11(n-2)} - 9f_{11(n-3)})$$

$$u_{12(n+1)} = u_{12n} + \frac{h}{24} (55f_{12n} - 59f_{12(n-1)} + 37f_{12(n-2)} - 9f_{12(n-3)})$$

## Conclusiones parciales

De todo lo anterior se puede concluir lo siguiente:

- Los cuatro algoritmos propuestos presentan gran exactitud y un relativo bajo costo computacional, lo que da la posibilidad de su implementación en arquitecturas basadas en microcontroladores.
- El método de Euler representa la mejor variante para realizar el cálculo del modelo dinámico, debido a su gran eficiencia y bajo costo computacional.
- El método de Adams-Bashforth de orden cuatro, para obtener los cuatro primeros resultados necesita un gran costo computacional, pero luego este disminuye, permitiendo que se obtengan resultados muy exactos con un bajo costo computacional.

---

## *CAPÍTULO 4*

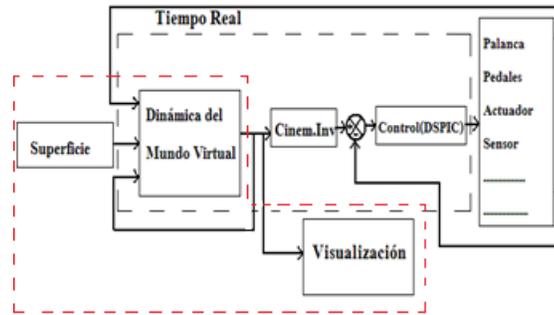
---

### **Validación y comparación de los algoritmos matemáticos propuestos**

Para realizar el proceso de validación del modelo creado, se realizaron simulaciones utilizando los algoritmos matemáticos de Euler, RK2, RK4 y Adams-Bashforth, aunque solo se mostrara la validación del modelo utilizando el método de Euler. También se realizarán comparaciones entre estos algoritmos y se seleccionará el más adecuado para la utilización en la plataforma con que cuenta GARP.

En el proceso de validación de los resultados obtenidos utilizaremos un modelo patrón (MP) y el modelo a validar (MV). Para actuar como modelo patrón se escogió el obtenido en la tesis de grado de Yandy Pérez Ramos [Pérez, 2010b], este modelo demostró que reproduce con bastante fidelidad los fenómenos reales que intervienen en un vehículo terrestre [Garmendia y col., 2007].

Las dos exigencias más relevantes que debe satisfacer el algoritmo seleccionado es que, debe ser un algoritmo que arroje resultados próximos a la dinámica de un vehículo real y que debe realizar el proceso de cómputo en tiempos menores a un milisegundo, debido a la necesidad de controlar la plataforma con tiempos próximos a este valor, ver Fig. 4.1 [Cuadrado, 1997].



**Fig. 4.1. Modelo general de la plataforma de conducción.**

En la Tabla 4.1, se muestran todas las constantes que se utilizarán para llevar a cabo la simulación.

**Tabla 4.1. Constantes del modelo del vehículo terrestre.**

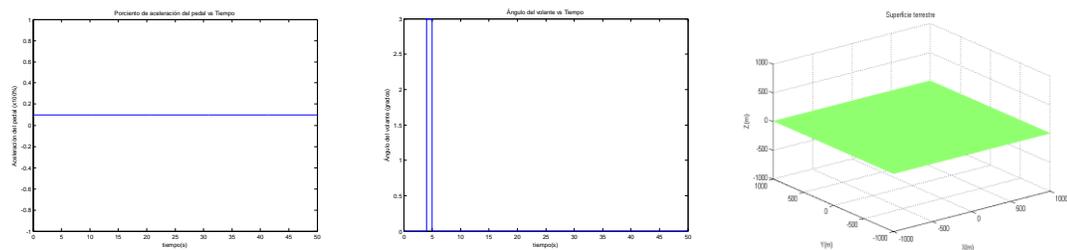
$m$	1818 [kg]
$m_s$	454.5 [kg]
$m_{us}$	45.45[kg]
$k_s$	22000 [N/m]
$c_{sh}$	2500 [N*s/m]
$k_{tr}$	176000 [N/m]
$c_t$	2500 [N*s/m]
$a$	1.267 [m]
$b$	1.254 [m]
$d$	0.9 [m]
$C_i$	30000 [N]
$C_\alpha$	40000 [N/rad]
$C_x$	0.5 [1/m]
$g$	9.8 [m/s <sup>2</sup> ]
$I_x$	265.8 [kg * m <sup>2</sup> ]

$I_y$	685.6 [kg * m <sup>2</sup> ]
$I_z$	694.2 [kg * m <sup>2</sup> ]
$r$	0.4 [m]
<i>Se incluyen las variables que se muestran en la Tabla 2.1.</i>	

A lo largo de este capítulo se realizarán una serie de pruebas para poder determinar si el modelo que se propone posee una buena aproximación al comportamiento de un vehículo real, esta es una de las maneras de validar el modelo que se utilizó, también se validó mediante la percepción de la realidad física que posee un conductor [Poppire y col., 2010].

#### 4.1 Función impulso en el volante del vehículo (prueba 1)

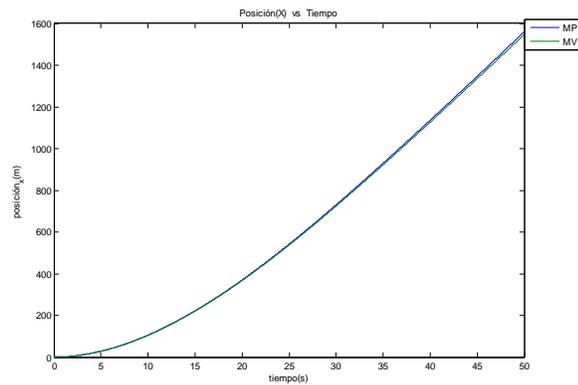
En esta prueba se somete al vehículo a un ángulo en el volante tipo paso y transcurrido un tiempo se retorna el volante a su posición inicial. Esta maniobra se desarrolla en una superficie lisa, con una aceleración en el pedal constante, ver Fig. 4.2.



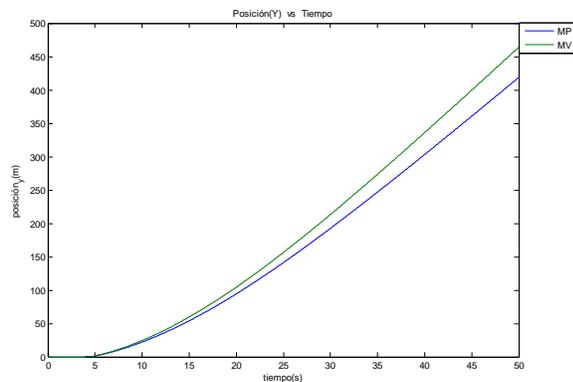
**Fig. 4.2. Variables de entrada del modelo dinámico.**

En la Fig. 4.3 y Fig. 4.4, se hace notar que la posición en X y en Y aumentan con el tiempo, debido a la presencia de las fuerzas de tracción y laterales que actúan sobre el vehículo. Existe diferencia entre el error de la dinámica longitudinal y

lateral, debido a que las mismas presentan significativas diferencias, esto se puede observar en las Fig. 4.3, Fig. 4.4, Fig. 4.5 y Fig. 4.6 debido a la simplificación realizada en la dinámica de los neumáticos, pero en la literatura consultada existen varios modelos con errores mayores o similares [González y col., 2008].



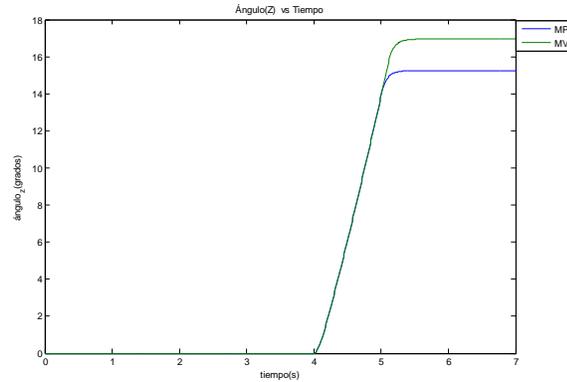
**Fig. 4.3. Posición en X del modelo a validar y del modelo patrón.**



**Fig. 4.4. Posición en Y del modelo a validar y del modelo patrón.**

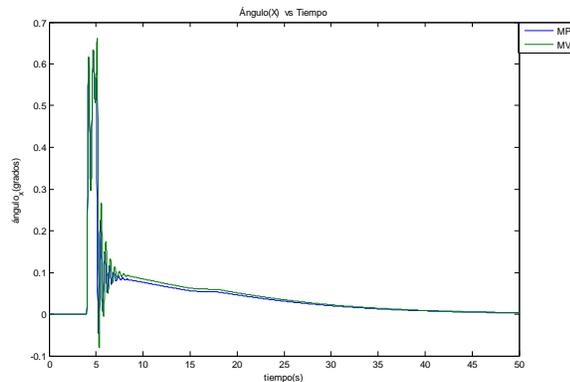
En la Fig. 4.5, se ve como el ángulo  $\psi$  de orientación del vehículo aumenta con el tiempo y luego alcanza un valor constante, esto se debe a la actuación de los

torque producidos por las fuerzas laterales que actúan directamente sobre los neumáticos.



**Fig. 4.5. Ángulos  $\psi$  del modelo a validar y del modelo patrón.**

Uno de los fenómenos que actúan sobre los vehículos es el denominado balanceo, el mismo es muy dependiente de las aceleraciones laterales que producen las fuerzas centrípetas y centrífugas, ver Fig. 4.6.



**Fig. 4.6. Ángulos  $\phi$  del modelo a validar y del modelo patrón.**

El error absoluto que se comete con el modelo a validar se puede calcular de la siguiente manera, ver Tabla 4.2 [Nevanlinna, 1983], [González y col., 2008]:

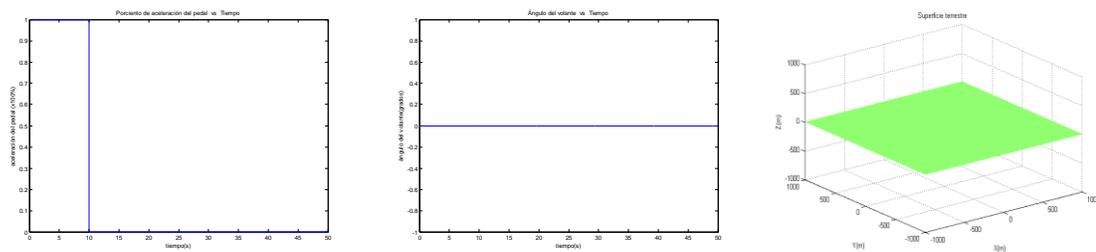
$$error\ absoluto = \frac{|MV - MP|}{MP} \times 100\%$$

**Tabla 4.2. Error absoluto para las variables estudiadas en la prueba 1.**

	X	Y	$\psi$	$\phi$
<b>Error absoluto (%)</b>	1.912	7.608	8.226	3.231

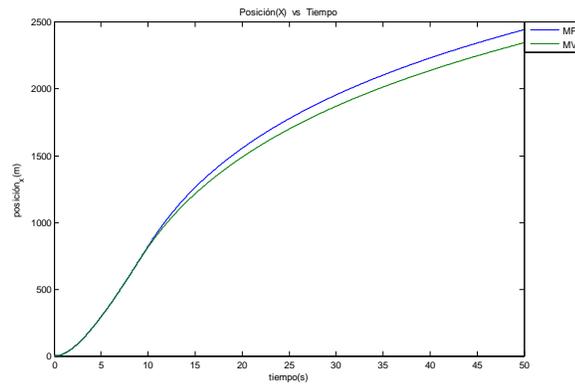
## 4.2 Aceleración y desaceleración con el pedal del vehículo (prueba 2)

En esta prueba el vehículo no tiene cambio de dirección, se desarrolla en una superficie lisa y con aceleración y desaceleración en el pedal, ver Fig. 4.7.



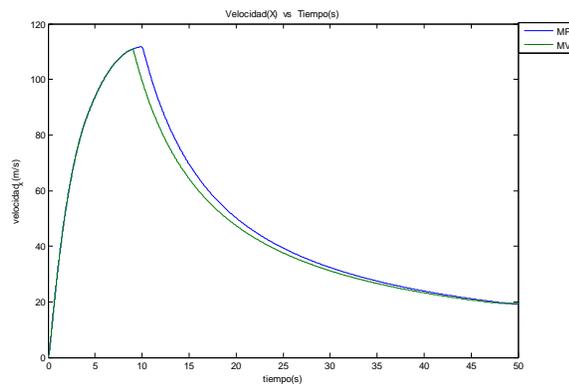
**Fig. 4.7. Variables de entrada del modelo dinámico.**

En la Fig. 4.8 se puede observar como la posición en X del vehículo en los primeros instantes posee una pendiente mayor que en instantes de tiempo posteriores, lo que demuestra que existió un proceso de aceleración y luego uno de desaceleración. La diferencia existente en la Fig. 4.8 se produce por la simplificación del modelo del motor del vehículo terrestre.



**Fig. 4.8. Posición en X del modelo a validar y del modelo patrón.**

La velocidad en X por su parte comienza aumentando su valor pero luego tiende a cero debido a que actúan las fuerzas resistivas presentes en el vehículo terrestre, ver Fig. 4.9.



**Fig. 4.9. Velocidad en X del modelo a validar y del modelo patrón.**

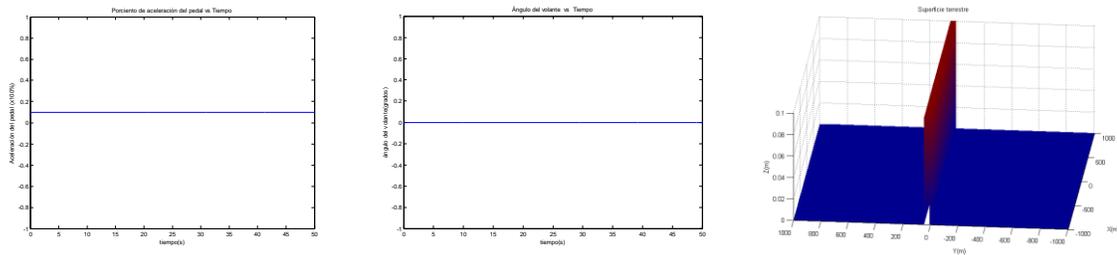
En la Tabla 4.3 se muestran los errores absolutos para las variables estudiadas en esta prueba.

**Tabla 4.3. Error absoluto para las variables estudiadas en la prueba 2.**

	<b>X</b>	<b>Velocidad Inercial en X</b>
<b>Error absoluto (%)</b>	4.163	1.782

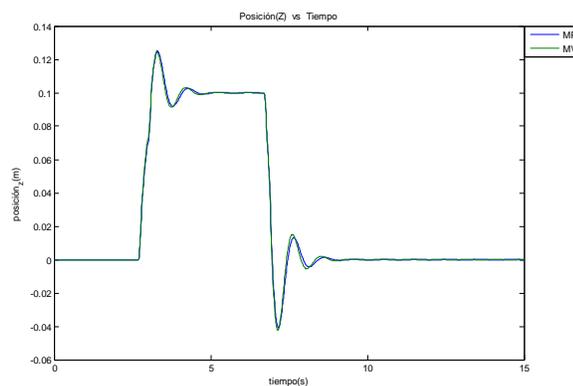
### 4.3 Irregularidad en la vía (prueba 3)

En esta prueba el vehículo no tiene cambio de dirección y posee una aceleración en el pedal constante, pero en la superficie existen dos irregularidades, ver Fig. 4.10.



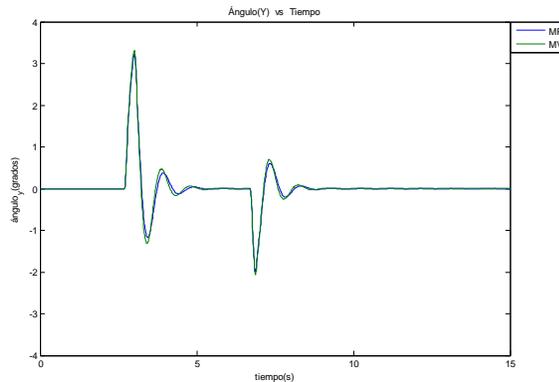
**Fig. 4.10. Variables de entrada del modelo dinámico.**

En la Fig. 4.11 nos percatamos de que la posición del vehículo en el eje  $Z$  cambia como consecuencia de las irregularidades, cuando el mismo se encuentra sobre la superficie terrestre, actúa sobre él la fuerza de gravedad y la fuerza de reacción de la superficie, estas fuerzas se contrarrestan permitiendo que el mismo se mantenga en el piso.



**Fig. 4.11. Posición en  $Z$  del modelo a validar y del modelo patrón.**

El ángulo  $\theta$  de orientación del vehículo primero tiene un cambio hacia valores positivos y luego a valores negativos, lo anterior se puede explicar porque existen impulsos positivos y negativos en los valores de la fuerza en el eje  $Z$  y cambios similares en el torque en el eje  $Y$ , ver Fig. 4.12.



**Fig. 4.12. Ángulos  $\theta$  del modelo a validar y del modelo patrón.**

En la Tabla 4.4 se muestran los errores absolutos para las variables estudiadas en esta prueba.

**Tabla 4.4. Error absoluto para las variables estudiadas en la prueba 3.**

	<b>Z</b>	<b><math>\theta</math></b>
<b>Error absoluto (%)</b>	0.832	0.303

#### 4.4 Comparación entre los algoritmos propuestos

Para realizar la comparación de los algoritmos propuestos nos basaremos en varios criterios [Gunston y col., 2005]:

- Número de operaciones. Se utiliza para dar una idea general de la complejidad de los algoritmos, este criterio es independiente de la plataforma, del hardware y del software que se utilicen.
- Error en el cálculo que se lleva a cabo. Este criterio nos da una medida de la proximidad de las soluciones calculadas con el valor real.

- Uso de memoria *ROM (Read Only Memory)*, que es la memoria del programa.
- Uso de memoria *RAM (Random Access Memory)*, que es la memoria de datos.
- Tiempo de cálculo del algoritmo. Este criterio para esta aplicación en particular, toma un valor esencial, debido a que existe una restricción de tiempo para el control de la plataforma (1ms).

La primera variante para poder comparar los algoritmos es implementar los algoritmos en una *Pentium D*, con 3GHz de frecuencia y 512 MB de RAM. En este proceso se utilizó una *S-Function* de *Matlab* con cada algoritmo implementado, se instaló el *toolbox* de *Real Time* que posee *Matlab*, se pone a uno el puerto paralelo de la computadora cuando comienza, y se pone a cero cuando termina el algoritmo en cuestión, con el objetivo de poder captar la señal con un osciloscopio y de esta manera poder medir el tiempo del pulso que coincide con el tiempo de cálculo del algoritmo en cuestión, ver Tabla 4.5.

**Tabla 4.5. Comparación de los algoritmos matemáticos utilizados en el cálculo de la dinámica del vehículo, utilizando una Pentium D, 3.0GHz, 512MB.**

<b>Algoritmo</b>	<b>Número de operaciones</b>	<b>Error total</b>	<b>Tiempo</b>
<b>Euler</b>	65042	$e_n = O(h) = O(0.01)$	4.5 $\mu$ s-1.5 $\mu$ s=3.0 $\mu$ s
<b>RK2</b>	96428	$e_n = O(h^2) = O(0.0001)$	6.0 $\mu$ s-1.5 $\mu$ s=4.5 $\mu$ s
<b>RK4</b>	169990	$e_n = O(h^4) = O(0.00000001)$	8.5 $\mu$ s-1.5 $\mu$ s=7.0 $\mu$ s
<b>AB4</b>	88427478	$e_n = O(h^4) = O(0.00000001)$	25.0 $\mu$ s-1.5 $\mu$ s=23.5 $\mu$ s(CI) 5.0 $\mu$ s-1.5 $\mu$ s=3.5 $\mu$ s(CE)

CAPÍTULO 4. VALIDACIÓN Y COMPARACIÓN DE LOS ALGORITMOS MATEMÁTICOS PROPUESTOS

Como se puede ver en la Tabla 4.5, el tiempo de escritura en el puerto paralelo de la computadora es de 1.5µs, por lo tanto hay que restarle ese número al valor que se obtiene mediante el osciloscopio, la cifra que se obtiene es el tiempo que se demora puramente en el cálculo del algoritmo.

La segunda variante es implementar los algoritmos en un *PIC32MX460F512L*, el mismo posee un núcleo de 32-Bit con 5 estados del *pipeline*, un voltaje de trabajo de 2.3V a 3.6V, ver Fig. 4.13, Tabla 4.6, Anexo II y Anexo III.

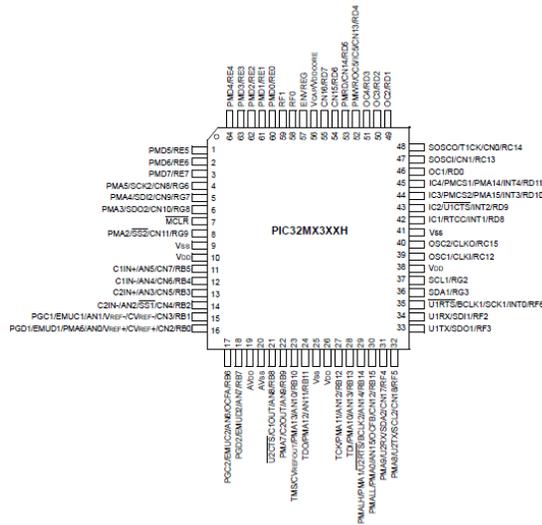


Fig. 4.13. Distribución de pines del *PIC32MX460F512L*.

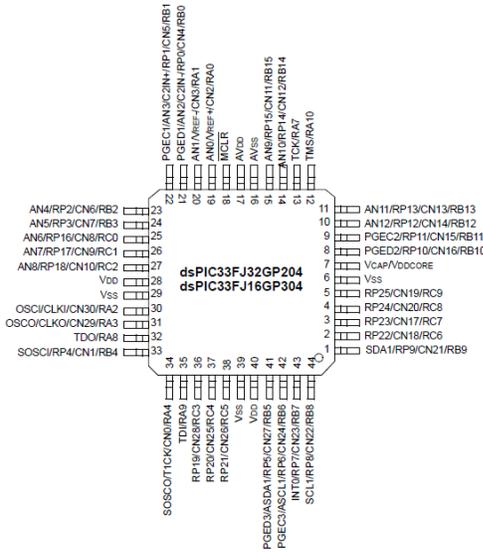
Tabla 4.6. Comparación de los algoritmos matemáticos utilizados en el cálculo de la dinámica del vehículo, utilizando un *PIC32MX460F512L*.

Algoritmo	Uso de memoria ROM(Byte)	Uso de memoria RAM(Byte)	Tiempo
<b>Euler</b>	9410	3500	0.813 ms
<b>RK2</b>	12501	3788	1.205 ms
<b>RK4</b>	19763	4172	2.124 ms
<b>AB4</b>	26097	5096	1.05 ms

CAPÍTULO 4. VALIDACIÓN Y COMPARACIÓN DE LOS ALGORITMOS MATEMÁTICOS PROPUESTOS

Se hace notar que utilizando esta arquitectura el único algoritmo que nos sirve es el de Euler, puesto que los demás están limitados por el tiempo de cómputo.

La tercera variante es la implementación en un *DSPIC33FJ32GP204*, con 40MIPS (Millones de Instrucciones Por Segundo) y con un voltaje de trabajo de 3.0V-3.6V, ver Fig. 4.14, Tabla 4.7 y Anexo IV.



## 4.5 Análisis económico

Este trabajo constituye un subsistema en el desarrollo del simulador de conducción de tres grados de libertad con que cuenta GARP, el precio de un simulador de conducción de tres grados de libertad hoy en día se encuentra entre los 60 000 y los 90 000 USD [Pérez, 2010b].

Con la arquitectura con microcontrolador para realizar el proceso de cómputo de los algoritmos matemáticos, se logra un mejor control del seguimiento de trayectoria en la plataforma de conducción, también se logra una mejor visualización del mundo virtual sin necesidad de obtener computadoras más potentes, todo lo anteriormente dicho tiene una repercusión directa sobre el costo de las mismas.

En la Tabla 4.8, se muestra que existe un significativo ahorro de recursos cuando se implementa la arquitectura con microcontroladores, esto tiene un impacto social, debido a que los países del tercer mundo pueden acceder a tecnologías que no podían adquirir fácilmente.

**Tabla 4.8. Costo que implica el proyecto en Cuba, implementándolo en una Computadora.**

<b>Arquitectura utilizada</b>	<b>Arquitectura con computadora</b>	<b>Arquitectura con microcontrolador y computadora (Variante 1)</b>	<b>Arquitectura con microcontrolador y computadora (Variante 2)</b>
<b>Computadora</b>	Dual Core, 3GHz, 4GB, 320GB (997.00 USD)	Pentium 4, 1.8GHz, 1GB, 80GB. (290 USD)	Pentium 4, 1.8GHz, 1GB, 80GB. (290 USD)
<b>Microcontrolador</b>	-----	PIC32MX460F512L (11.39 USD)	dsPIC33FJ32GP202 (4.10 USD)
<b>Costos Total</b>	997.00 USD	301.39 USD	294.1 USD

## Conclusiones parciales

De todo lo anterior se puede concluir lo siguiente:

- Los resultados que arroja el modelo propuesto posee gran similitud con los fenómenos que se presentan en un vehículo real, esto se puede comprobar al ver que el error absoluto para las variables estudiadas no supera el 10%, esto se considera un resultado muy positivo para el caso de un modelo simplificado [González y col., 2008].
- Debido a la simplicidad del modelo dinámico propuesto se ha podido reducir el costo computacional, garantizando que el tiempo de cómputo sea menor a un milisegundo lo cual es un valor extremadamente bueno y permite que los algoritmos puedan ser implementados en una arquitectura con microcontroladores [Cuadrado, 1997], [Naya y col., 2003].
- Con el método de Euler se ha logrado calcular la dinámica del modelo con tiempos de cómputo menores a un milisegundo, lo que permitiría generar las señales de referencia para el control de la plataforma en tiempo real.
- El método de Euler representa la mejor variante para realizar el cálculo del modelo dinámico, debido a que se obtienen resultados con un error absoluto bajo y con un tiempo de cómputo del orden de los microsegundos para algunos microcontroladores.

---

## *CONCLUSIONES*

---

Después de realizar un análisis detallado de cada uno de los resultados obtenidos en esta investigación, así como de su aplicación práctica y aportes tanto desde el punto de vista teórico como metodológico podemos llegar a las siguientes conclusiones:

- En la actualidad existe una tendencia a que los simuladores de conducción presenten modelos dinámicos muy complejos y computadoras con un alto poder de cómputo, por esa razón se hace difícil la implementación de estos algoritmos en arquitecturas basadas en microcontroladores.
- Se ha desarrollado un modelo físico-matemático simplificado de un vehículo terrestre, el cual se validó mediante comparación con un modelo patrón y la percepción de la realidad física que posee un conductor, arrojando resultados satisfactorios. Dentro del modelo se logra unificar simplicidad con exactitud, lo cual trae consigo que se logren obtener buenas respuestas con un costo computacional aceptable.
- El método de Euler es el más conveniente para esta aplicación, debido a que presenta exactitud y permite realizar el cálculo del modelo en tiempo real.
- Los simuladores de conducción basados en microcontroladores abren una ventana de posibilidades para los países subdesarrollados que no pueden comprar las caras tecnologías en el mercado mundial.
- Con la reducción del costo computacional en el cálculo de los algoritmos, se puede realizar un mejor control sobre el seguimiento de trayectoria en las plataformas de conducción y obtener mejores desempeños del mundo virtual.

---

## ***RECOMENDACIONES***

---

A continuación se plantean algunas recomendaciones:

- Rediseñar y reprogramar un mundo virtual más complejo, para poder explotar el poder de cómputo que se liberó con la introducción de la arquitectura con microcontroladores, que se utilizaba en el cálculo de los algoritmos matemáticos.
- Implementar la prealimentación de la velocidad y aceleración en el control de la plataforma a partir de la señal de referencia derivable que se ha obtenido en este trabajo.

---

## ***REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS***

---

[Ackermann y col., 1985] Ackermann, J. y Bunte, T., "Robust Prevention of Limit Cycles for Robustly Decoupled Car Steering Dynamics", German Aerospace Research Establishment, University of Berlin, 1985.

[Aird, 2000] Aird, F., *Automotive math handbook*, USA, Springer, 2000.

[Assanis y col., 2000] Assanis, D. y Filipi, Z., "Validation and Use of SIMULINK Integrated, High Fidelity, Engine-In-Vehicle Simulation of the International Class VI Truck", *Congress of the Society of Automotive Engineers*, Londres, 2000.

[Baker, 1992] Baker, C., "Computing stability regions Runge-Kutta methods for delay differential equations", *IMA Journal of Numerical Analysis*, vol. 14, pp. 247-362, 1992.

[Bakker y col., 1987] Bakker, E. y Pacejka, H. B., "Tyre modeling for use in vehicle dynamic studies", *SAE Paper*, vol. 2, pp. 21-34, 1987.

[Bastow, 1990] Bastow, D., *Car Suspension and Handling*, London, U.K, 1990.

[Berger, 1984] Berger, M., "Adaptative mesh refinement for hyperbolic partial differential equations", *Journal of Computational Physics*, vol. 53, pp. 484-512, 1984.

[Bergolla, 2008] Bergolla, Y. C., "Control del tránsito en un simulador de auto", Facultad 5, UCI, 2008.

[Bertollini y col., 1994] Bertollini, G. P. y Johnston, C. M., "Driving simulation at General Motors", *Auto Eng.*, vol. 5, pp. 14-19, 1994.

[Blundell y col., 2004] Blundell, M. y Harty, D., *Multibody systems approach to vehicle dynamics*, USA, Springer, 2004.

[Bogdevicius y col., 2004] Bogdevicius, M., Prentkovskis, O. y Vladimirov, O., "Engineering Solutions of Traffic Safety Problems of Road Transport", *Transport*, vol. XIX, pp. 43-50, 2004.

[Brayshaw, 2005] Brayshaw, L., "A quasi steady state approach to race car lap simulation in order to understand the effects of racing line and centre of gravity location", *Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 219, pp. 24-34, 2005.

- [Burgermeister, 2007] Burgermeister, B., "Linearly implicit time integration methods in real-time applications ", *Mechanical Engineering*, vol. 17, pp. 99-117, 2007.
- [Burrage, 2006] Burrage, K., "A special family of Runge-Kutta methods for solving stiff differential equations ", *BIT Numerical Mathematics*, vol. 18, pp. 22-41, 2006.
- [Castaneda, 2007] Castaneda, N., "A new bearings-only tracking algorithm for ground moving targets constrained to roads", *IEEE Workshop*, Helsinki, 2007.
- [Choi y col., 2000] Choi, G., Yoo, Y. y Lees, K., "A real-time multibody vehicle dynamic analysis method using suspension composite joints", *International Journal of Vehicle Design*, vol. 24, pp. 259-273, 2000.
- [Cotella y col., 2004] Cotella, N., Manelli, A. y Antonelli, S., "Análisis de los efectos de las irregularidades de la carretera sobre la dinámica del vehículo ", *Mecánica Computacional*, vol. XXIII, pp. 2179-2187, 2004.
- [Cuadrado, 1997] Cuadrado, J., "Simulación dinámica en tiempo real de sistemas multicuerpos complejos en computadores de gama media", Dep. Ing. Naval y Oc. e Ing. Mecánica Universidad de La Coruña, 1997.
- [Diego, 2008] Diego, D., "Model-Driven Development of Reliable Automotive Services", *Automotive*, vol. 4922, pp. 34-47, 2008.
- [Dokainish y col., 2005] Dokainish, M. y Subbaraj, K., "A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics", *Computer & Structures*, vol. 32, pp. 1371-1386, 2005.
- [Dopico, 2004] Dopico, D., "Comportamiento de integradores estructurales y Runge-Kutta implícitos en la dinámica en tiempo real de sistemas multicuerpos", *Métodos Matemáticos y Numéricos en Ingeniería Mecánica*, León, 2004.
- [Dukkipati, 2000] Dukkipati, R. V., *Vehicle Dynamic*, Berlin, Colleng, 2000.
- [Duysinx y col., 2005] Duysinx, P. y Bruls, O., "Optimization of mechatronic systems ", *6th World Congresses of Structural and Multidisciplinary Optimization*, Rio de Janeiro, 3 june, 2005.
- [Edalat y col., 2009] Edalat, A. y Pattinson, D., "A Domain Theoretic Account of Euler's Method for Solving Initial Value Problems", *IEEE*, pp. 26-28, 2009.
- [Edward, 2004] Edward, N., "Defining Interfaces as Services in Embedded Vehicle Software", *Research and Advanced Engineering*, vol. 3, pp. 45-54, 2004.
- [Engquist y col., 2005] Engquist, B. y Tsai, Y., "Heterogeneous multiscale methods for stiff ordinary differential equations", *Mathematics of Computation*, vol. 74, pp. 1707-1742, 2005.

- [Escalona, 2008] Escalona, J., "Stability analysis of vehicles on circular motions using multibody dynamics", *Mathematics of Computation*, vol. 53, pp. 237-250, 2008.
- [Featherstone, 2008] Featherstone, R., *Dynamics*, Italy, Springer, 2008.
- [Filippini y col., 2005] Filippini, G., Nigro, N. y Junco, S., "Estudio del comportamiento dinámico de vehículos terrestres utilizando la técnica de Bond Graphs", *Mecánica Computacional*, vol. XXIV, pp. 29-34, 2005.
- [Filottrani, 2010] Filottrani, P., "Algoritmo y Complejidad", *II Conferencia de Algoritmos Matemáticos*, Universidad Nacional del Sur, 2010.
- [Fisette y col., 2007] Fisette, P. y Samin, J., "Symbolic generation of large multibody system dynamic equations using a new semi-explicit Newton/Euler recursive scheme ", *Mathematics of Computation*, vol. 8, pp. 117-140, 2007.
- [García, 1999] García, J., "Dinámica no lineal de sistemas multicuerpo flexible mediante algoritmo conservativo", Tesis Doctoral, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Madrid, 1999.
- [Garmendia y col., 2007] Garmendia, L., Carrera, X., Savall, J. y Viñolas, J., "Modelización dinámica de un vehículo monoplaza y validación experimental del vehículo ", Departamento de Mecánica Aplicada TECNUN, 2007.
- [Genta, 1997] Genta, G., *Motor vehicle dynamics*, Italy, Spene, 1997.
- [Gillespie, 1992] Gillespie, T., *Fundamentals of vehicle dynamics*, USA, Allen, 1992.
- [González y col., 2008] González, M., Cuadrado, J., González, F. y Dopico, D., "Optimization of an off-road bicycle with four-bar linkage rear suspension", *The International Symposium on Multibody Systems and Mechatronics*, San Juan, Argentina, 8-12 April, 2008.
- [Gunston y col., 2005] Gunston, T. y Rebelle, J., "A comparison of two methods of simulating seat suspension dynamic performance ", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 278, pp. 117-134, 2005.
- [Haro, 2008] Haro, E., "Estimación de los parámetros físicos de un automóvil", *Revista Iberoamericana de Automática e Informática*, vol. 5, pp. 28-35, 2008.
- [Haug, 1989] Haug, E., *Computer aided kinematics and dynamics of mechanical systems*, Toronto, Canadá, Allyn and Bacon, 1989.
- [Hoffmann, 1997] Hoffmann, W., "Approximating Runge-Kutta matrices by triangular matrices ", *BIT Numerical Mathematics*, vol. 37, pp. 319-325, 1997.

- [Huang y col., 2003] Huang, A. y Chen, C., "A low-cost driving simulator for full vehicle dynamics simulation", *IEEE Transactions on vehicular technology*, vol. 52, pp. 162-172, 2003.
- [Iijima y col., 2009] Iijima, Y. y Noguchi, H., "The development of a high-performance suspension", *SAE Paper*, vol. 15, pp. 23-28, 2009.
- [Jason, 2004] Jason, C., "Three Degree-of-Freedom Simulator Motion Cueing Using Classical Washout Filters and Acceleration Feedback", Master of Science, Polytechnic Institute, University of Virginia, 2004.
- [Jazar, 2008] Jazar, R. N., *Vehicle Dynamic*, USA, Springer, 2008.
- [Jiménez, 2004] Jiménez, F., "Experimental analysis of vehicle dynamics", INSIA, Polytecnic university of Madrid, 2004.
- [Jover y col., 2002] Jover, R., Bañón, L. y Ferreiro, J., "La estabilidad del vehículo en las curvas ", *XVI Congreso Internacional de Ingeniería Gráfica*, España, 2002.
- [Karnopp, 2004] Karnopp, D., *Vehicle stability*, KG, Hollen, 2004.
- [Koplik y col., 2009] Koplik, J. y Leu, M., "Computer generation of robot dynamics equations and the related issues", *J. of Robotic System*, vol. 3, pp. 301-319, 2009.
- [Lee y col., 1998] Lee, W., Kim, J. y Cho, J., "A driving simulator as a virtual reality tool", *International Conference on Robotics & Automation*, Leuven, Belgium, May 1998.
- [Lozano, 1996] Lozano, J., "Modelo para la reconstrucción de accidentes ", Doctor Ingeniero Industrial, Escuela Técnica Superior de Ing. Industriales, Universidad Politécnica de Madrid, 1996.
- [Luca y col., 2009] Luca, A. D. y Ferrajoli, L., "A Modified Newton-Euler Method for Dynamic Computations in Robot Fault Detection and Control", *IEEE Internatinal Conference on Robotics and Automation*, Kobe, Japan, 12-17 Mayo, 2009.
- [Maint, 2006] Maint, C., "Vehicle dynamics terminology", *SAE*, vol. 10, pp. 6-7, 2006.
- [Martin, 2007] Martin, M., "A Modified Implicit Euler Algorithm for Solving Vehicle Dynamic Equations ", *Mechanical Engineering*, vol. 17, pp. 54-60, 2007.
- [Mera, 2001] Mera, M., "Modelos complejos de sistemas vehiculares empleando Bond Graph", Departamento de Ingeniería Mecánica, ETSII, 2001.
- [Moon, 2009] Moon, K., "Method for control of steering angles for articulated vehicles using virtual rigid axles ", *International Journal of Automotive Technology*, vol. 10, pp. 441-449, 2009.

- [Muñoz, 1990] Muñoz, R., "La industria de automoción su evolución e incidencia social", Departamento de Mecánica, UCM, 1990.
- [Nacusse y col., 2006] Nacusse, M., Pierucci, G., Junco, S. y Romero, M., "Diagnóstico de fallas en suspensión activas de automóviles sobre modelos Bond Graph", *Mecánica Computacional*, vol. XXV, pp. 1357-1376, 2006.
- [Nantais, 2006] Nantais, N., "Active Brake Proportioning and its effects on safety and performance", Department of Mechanical Engineering, University of Windsor, 2006.
- [Naya, 2007] Naya, M., "Aplicación de la dinámica multicuerpo en tiempo real a las simulaciones y el control de automóviles", Doctor Ingeniero Industrial, Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad de La Coruña, 2007.
- [Naya y col., 2003] Naya, M. y Cuadrado, J., "Computer-based development of control strategies for ground vehicles", Escuela Politécnica Superior, Universidad de La Coruña, 2003.
- [Nevanlinna, 1977] Nevanlinna, O., "Stability of explicit time discretizations for solving initial value problems", *BIT Numerical Mathematics*, vol. 17, pp. 58-71, 1977.
- [Nevanlinna, 1983] Nevanlinna, O., "Recent developments in stability and error analysis of numerical methods for ordinary differential equations", *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1017, pp. 420-431, 1983.
- [Ortiz y col., 2007] Ortiz, A., Cabrera, J., Guerra, A. y Simón, A., "Determinación de los parámetros de modelos de neumáticos usando algoritmos genéticos", *Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica*, Cuzco, 23-25 de octubre, 2007.
- [Otero, 2009] Otero, J., "Study of Rail Vehicle Dynamics in Curved Tracks", *Revista Colombiana de Tecnologías de Avanzada*, vol. 2, pp. 14-21, 2009.
- [Pacejka, 2006] Pacejka, H. B., *Tyre and Vehicle Dynamic*, USA, Butterworth-Heinemann, 2006.
- [Parra y col., 2008] Parra, J. y Tornero, J., "Modelo de dinámica lateral de vehículos mediante Bond Graph", *Ingeniería Industrial*, vol. 2, pp. 3-6, 2008.
- [Pérez, 2008a] Pérez, Y., "Modelado de vehículos terrestres", *14 Convención Científica de Ingeniería y Arquitectura, CUJAE*, La Habana, 2008a.
- [Pérez, 2008b] Pérez, Y., "Modelo dinámico de la suspensión de vehículos terrestres", *VIII Taller Internacional sobre la Enseñanza de la Física en la Ingeniería, EFING*, La Habana, 2008b.
- [Pérez, 2009] Pérez, Y., "Modelo dinámico de vehículos terrestres", *Evento ITM*, La Habana, 2009.

- [Pérez, 2010a] Pérez, Y., "Modelado y simulación dinámica de vehículos terrestres", *II Taller de Aplicaciones Informáticas para la Automatización, UCIENCIA*, La Habana, 2010a.
- [Pérez, 2010b] Pérez, Y., "Modelado y Simulación Dinámica de Vehículos Terrestres", Departamento de Automática y Sistemas Computacionales, Universidad Marta Abreu de las Villas, 2010b.
- [Pérez, 2011] Pérez, Y., "Modelo dinámico y simulación dinámica de vehículos terrestres", *XIV Convención y Feria Internacional de Informática, Informática2011*, La Habana, 2011.
- [Poppire y col., 2010] Poppire, K. y Schiehlen, W., *Ground Vehicle Dynamics*, USA, Springer, 2010.
- [Potra, 1994] Potra, A., "Numerical Methods for Differential-Algebraic Equations with Application to Real-Times Simulation of Mechanical Systems", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 74, pp. 177-187, 1994.
- [Rajamani, 2006] Rajamani, R., *Vehicle dynamics and control*, Germany, Birkhäuser, 2006.
- [Rukgauer, 2006] Rukgauer, A., "Simulation of modular mechatronic systems with application to vehicle dynamics", *Computational Mechanics*, vol. 15, pp. 497-510, 2006.
- [Ryu y col., 2005] Ryu, J. y Rossetter, E., "Vehicle Sideslip and Roll Parameter Estimation using GPS", Department of Mechanical Engineering, Stanford, 2005.
- [Sacco y col., 2005] Sacco, C. y E.Gonzalez, "Análisis de la Aerodinámica de un Automovil de Competición", *Mecánica Computacional*, vol. XXIV, pp. 234-243, 2005.
- [Sciavicco y col., 2006] Sciavicco, L. y Siciliano, B., "Lagrange and Newton-Euler dynamic model", *Advanced Robotics*, vol. 10, pp. 317-334, 2006.
- [Sharp y col., 2008] Sharp, R. S. y Crolla, D. A., "Road vehicle suspension system design", *Vehicle System Dynamic*, vol. 16, pp. 3-6, 2008.
- [Stoer, 1991] Stoer, J., *Introduction to Numerical Analysis*, 2nd ed., Berlin, Springer, 1991.
- [Suli, 2003] Suli, E., "An Introduction to Numerical Analysis", Department of mathematic, Cambridge, 2003.
- [Werschulz, 2008] Werschulz, A., "Computational Complexity of One-Step Methods for Systems of Differential Equations", *Mathematics of Computation*, vol. 34, pp. 155-174, 2008.
- [Werschulz, 2010] Werschulz, G., "Computational Complexity of One-Step Methods for the Numerical Solution of Initial Value Problems", *Numerical Mathematics*, vol. 12, pp. 23-25, 2010.

[Wong, 1978] Wong, J. Y., "Theory of Ground Vehicles". New York: Wiley, 1978.

[Yu, 2001] Yu, G., "On Efficient Application of Implicit Runge-Kutta Methods to Large-Scale Systems of Index 1 Differential-Algebraic Equations ", *Computer Science*, vol. 2073, pp. 832-841, 2001.

# ANEXOS

---

## Anexo I Software *TruckSim*

El TruckSim es uno de los software comerciales que más se utilizan en la simulación de vehículos terrestres, ver Fig. A.1.



**Fig. A.1. Vista del *TruckSim*.**

## Anexo II Datos generales del *PIC32MX460F512L*

El PIC32MX460F512L posee varias características técnicas, las mismas pueden ser revisadas en su *Data Sheet*, ver Fig. A.2.

General Purpose												
Device	Pins	Program/ Data Memory (KB)	Timers/C apture/ Compare	Programmable DMA Channels	VREG	Prefetch Cache	Trace	EUART/ SPI/ I <sup>2</sup> C™	10-Bit A/D (ch)	Comparators	PMP/PSP	JTAG
PIC32MX320F032H	64	32/8	5/5/5	0	Yes	Yes	No	2/2/2	16	2	Yes	Yes
PIC32MX320F064H	64	64/16	5/5/5	0	Yes	Yes	No	2/2/2	16	2	Yes	Yes
PIC32MX320F128H	64	128/16	5/5/5	0	Yes	Yes	No	2/2/2	16	2	Yes	Yes
PIC32MX340F256H	64	256/32	5/5/5	4	Yes	Yes	No	2/2/2	16	2	Yes	Yes
PIC32MX320F128L	100	128/16	5/5/5	0	Yes	Yes	No	2/2/2	16	2	Yes	Yes
PIC32MX360F256L	100	256/32	5/5/5	4	Yes	Yes	Yes	2/2/2	16	2	Yes	Yes
PIC32MX360F512L	100	512/32	5/5/5	4	Yes	Yes	Yes	2/2/2	16	2	Yes	Yes

USB													
Device	Pins	Program /Data Memory (KB)	Timers/ Capture/ Compare	Programmable DMA Channels	Dedicated USB DMA Channels	Vreg	Prefetch Cache	Trace	EUART/ SPI/ I <sup>2</sup> C™	10-bit A/D (ch)	Comparators	PMP/PSP	JTAG
PIC32MX420F032H	64	32/8	5/5/5	0	2	Yes	Yes	No	2/1/2	16	2	Yes	Yes
PIC32MX440F256H	64	256/32	5/5/5	4	2	Yes	Yes	No	2/1/2	16	2	Yes	Yes
PIC32MX440F128L	100	128/32	5/5/5	4	2	Yes	Yes	No	2/2/2	16	2	Yes	Yes
PIC32MX460F256L	100	256/32	5/5/5	4	2	Yes	Yes	Yes	2/2/2	16	2	Yes	Yes
PIC32MX460F512L	100	512/32	5/5/5	4	2	Yes	Yes	Yes	2/2/2	16	2	Yes	Yes

Fig. A.2. Datos generales del *PIC32MX460F512L*.

### Anexo III Pinout del *PIC32MX460F512L*

Otros de los aspectos técnicos importantes del PIC32MX460F512L es su *pinout*, ver Fig. A.3, Fig. A.4 y Fig. A.5.

Function	Pin Number		I/O	Input Buffer	Description
	64-pin	100-pin			
AN0	16	25	I	ANA	A/D Analog Inputs.
AN1	15	24	I	ANA	
AN2	14	23	I	ANA	
AN3	13	22	I	ANA	
AN4	12	21	I	ANA	
AN5	11	20	I	ANA	
AN6	17	26	I	ANA	
AN7	18	27	I	ANA	
AN8	21	32	I	ANA	
AN9	22	33	I	ANA	
AN10	23	34	I	ANA	
AN11	24	35	I	ANA	
AN12	27	41	I	ANA	
AN13	28	42	I	ANA	
AN14	29	43	I	ANA	
AN15	30	44	I	ANA	
AVDD	19	30	P	—	Positive Supply for Analog Modules.
AVSS	20	31	P	—	Ground Reference for Analog Modules.
BCLK1	35	48	O	—	UART1 IrDA® Baud Clock.
BCLK2	29	39	O	—	UART2 IrDA Baud Clock.
C1IN-	12	21	I	ANA	Comparator 1 Negative Input.
C1IN+	11	20	I	ANA	Comparator 1 Positive Input.
C1OUT	21	32	O	—	Comparator 1 Output.
C2IN-	14	23	I	ANA	Comparator 2 Negative Input.
C2IN+	13	22	I	ANA	Comparator 2 Positive Input.
C2OUT	22	33	O	—	Comparator 2 Output.
CLKI	39	63	I	ANA	Main Clock Input Connection.
CLKO	40	64	O	—	System Clock Output.

**Fig. A.3. Pinout del *PIC32MX460F512L*.**

## Anexo IV Pinout del *DSPIC33FJ32GP204*

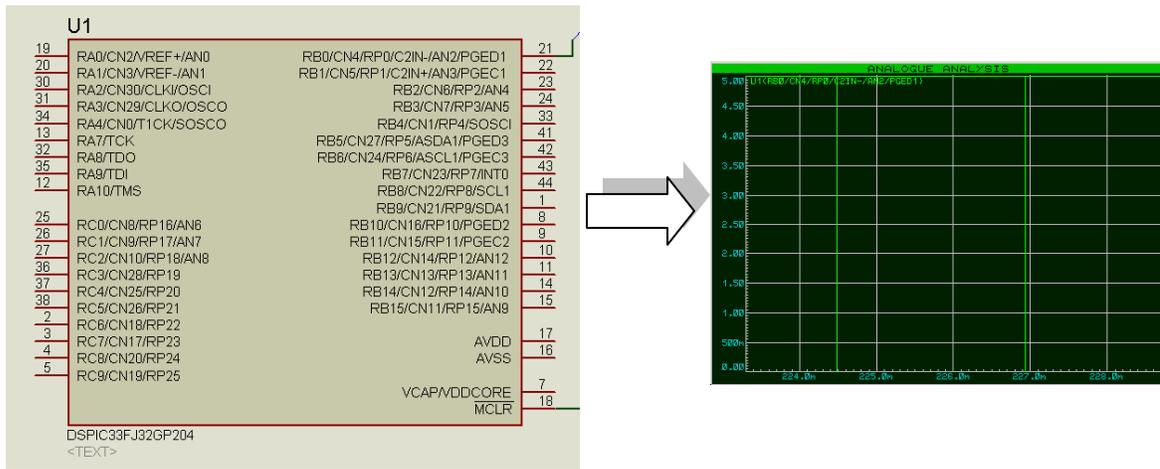
El DSPIC33FJ32GP204 posee varias características técnicas, las mismas pueden ser revisadas en su *Data Sheet*, ver Fig. A.6.

Pin Name	Pin Type	Buffer Type	Description
AN0-AN12	I	Analog	Analog input channels.
CLKI CLKO	I O	ST/CMOS —	External clock source input. Always associated with OSC1 pin function. Oscillator crystal output. Connects to crystal or resonator in Crystal Oscillator mode. Optionally functions as CLKO in RC and EC modes. Always associated with OSC2 pin function.
OSC1 OSC2	I I/O	ST/CMOS —	Oscillator crystal input. ST buffer when configured in RC mode; CMOS otherwise. Oscillator crystal output. Connects to crystal or resonator in Crystal Oscillator mode. Optionally functions as CLKO in RC and EC modes.
SOSCI SOSCO	I O	ST/CMOS —	32.768 kHz low-power oscillator crystal input; CMOS otherwise. 32.768 kHz low-power oscillator crystal output.
CND-CN30	I	ST	Change notification inputs. Can be software programmed for internal weak pull-ups on all inputs.
IC1-IC2 IC7-IC8	I	ST	Capture inputs 1/2 Capture inputs 7/8
OCFA OC1-OC2	I O	ST —	Compare Fault A input (for Compare Channels 1 and 2). Compare outputs 1 through 2.
INT0 INT1 INT2	I I I	ST ST ST	External interrupt 0. External interrupt 1. External interrupt 2.
RA0-RA4 RA7-RA15	I/O	ST	PORTA is a bidirectional I/O port.
RB0-RB15	I/O	ST	PORTB is a bidirectional I/O port.
RC0-RC9	I/O	ST	PORTC is a bidirectional I/O port.
T1CK T2CK T3CK	I I I	ST ST ST	Timer1 external clock input. Timer2 external clock input. Timer3 external clock input.
UTCTS U1RTS U1RX U1TX	I O I O	ST — ST —	UART1 clear to send. UART1 ready to send. UART1 receive. UART1 transmit.
SCK1 SDI1 SDO1 SS1	I/O I O I/O	ST ST — ST	Synchronous serial clock input/output for SPI1. SPI1 data in. SPI1 data out. SPI1 slave synchronization or frame pulse I/O.
SCL1 SDA1 ASCL1 ASDA1	I/O I/O I/O I/O	ST ST ST ST	Synchronous serial clock input/output for I2C1. Synchronous serial data input/output for I2C1. Alternate synchronous serial clock input/output for I2C1. Alternate synchronous serial data input/output for I2C1.
TMS TCK TDI TDO	I I I O	ST ST ST —	JTAG Test mode select pin. JTAG test clock input pin. JTAG test data input pin. JTAG test data output pin.
PGD1/EMUD1 PGC1/EMUC1 PGD2/EMUD2 PGC2/EMUC2 PGD3/EMUD3 PGC3/EMUC3	I/O I I/O I I/O I	ST ST ST ST ST ST	Data I/O pin for programming/debugging communication channel 1. Clock input pin for programming/debugging communication channel 1. Data I/O pin for programming/debugging communication channel 2. Clock input pin for programming/debugging communication channel 2. Data I/O pin for programming/debugging communication channel 3. Clock input pin for programming/debugging communication channel 3.
VDDCORE	P	—	CPU logic filter capacitor connection.
Vss	P	—	Ground reference for logic and I/O pins.
VREF+	I	Analog	Analog voltage reference (high) input.
VREF-	I	Analog	Analog voltage reference (low) input.

Fig. A.6. Pinout del *DSPIC33FJ32GP204*.

### Anexo V Simulación del *DSPIC33FJ32GP204* con *ISIS Professional*

Utilizando el software *ISIS Professional*, se pudo simular los tiempos de cálculo de los algoritmos implementados en el *DSPIC33FJ32GP204*, ver Fig. A.7.



**Fig. A.7. Utilización de *ISIS Professional* con el *DSPIC33FJ32GP204*.**