

Universidad Central "Marta Abreu" de las Villas
Facultad de Matemática Física y Computación



TESIS EN OPCIÓN AL TÍTULO DE MASTER EN MATEMÁTICA APLICADA

*Título: "Análisis de Probabilidades Borrosas y de Regresión
Borrosa. Aplicaciones"*

*Autor: Lic. Jorge Luis Morales Martínez
Tutor: Dra. Gladys Casas Cardoso*

*Santa Clara
2010*



Hago constar que el presente trabajo para optar por el Título de Master en Matemática Aplicada ha sido realizado en la Facultad de Matemática Física y Computación de la Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas como parte de la culminación de los estudios de la Maestría en Matemática Aplicada, autorizando a que el mismo sea utilizado por la institución, para los fines que estime conveniente, tanto de forma parcial como total y que además no podrá ser presentado en eventos ni publicado sin la autorización de la Universidad.

Firma del autor

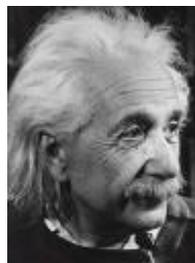
Los abajo firmantes, certificamos que el presente trabajo ha sido realizado según acuerdos de la dirección de nuestro centro y el mismo cumple con los requisitos que debe tener un trabajo de esta envergadura referido a la temática señalada.

Firma del tutor

Firma del jefe del Seminario

Dedicatoria

*A mi mamá que no dejó de existir,
sigue viviendo en mi corazón
guiando mis pasos.*



*...Hasta donde las leyes de la matemática se refieren a la realidad,
ellas no son ciertas. Y cuando son ciertas, no se refieren a la realidad...*

Albert Einstein

Agradecimientos

“Saber Agradecer es mirar positivamente los gestos, las actitudes, las manos de los que nos favorecen. No es simple cuestión de cortesía, de buena educación, sino de buen corazón”

Con este trabajo culmina una etapa importante de nuestra vida, y el momento insta a la reflexión y en nuestra memoria se dibujan las imágenes de todos aquellos que contribuyeron de una u otra forma a la culminación exitosa del mismo, a alcanzar una meta tan deseada como esta.

Debo Agradecer:

A mi papá y a mis hermanos por toda la confianza y todo el apoyo que me brindaron, ellos fueron y serán siendo siempre fuente de inspiración en mi trabajo.

A Laureano por sus valiosas ayudas con la programación y por sobre todo por ser un magnífico amigo.

A la doctora Lucía Arguelles por su valiosa ayuda

A Genly por estar siempre dispuesto a escucharme y ayudarme en todo momento.

A mis amigos del barrio por tenerme como ejemplo de tenacidad y de admiración, tengan la certeza que nunca les fallaré.

A Marcial por estar siempre dispuesto a brindarme su apoyo logístico.

A todos los profesores que a lo largo de estos años han influido en mi formación y madurez profesional, son verdaderamente una gran fuente de inspiración.

Así damos las gracias a esa inmensidad, a los que nos enseñaron poniendo en nosotros su esperanza, a aquel que un día nos dio una hoja o nos prestó un lápiz, a aquel que en un momento amargo nos hizo sonreír, al que nos escuchó, al que se mostró espontáneo, a todos aquellos que confiaron en nosotros.

En fin agradecer la dedicación y la paciencia, por darnos un espacio de su tiempo, un pedacito de sus vidas, porque cualquier atención, preocupación, desvelo, aunque pequeño siempre será recordado.

Especiales

Sin dudas hay alguien que no puedo dejar de mencionar, la Dra. Gladys Casas Cardoso. A ella mi más sincero agradecimiento por haber aceptado en primer lugar ser mi tutora, por tener ese gran corazón y saber perdonar. No hay palabras para agradecerle a usted profe, un millón de gracias por todo el tiempo que ha tenido que dedicarme teniendo numerosas cosas importantes por hacer, gracias por su paciencia, dedicación y por estar siempre disponible en los momentos en que la necesité.

Gracias a todos
Jorge Luis

En esta tesis se presenta, de manera resumida, los conceptos y definiciones fundamentales de la teoría de conjuntos borrosos, teoría de las probabilidades borrosas y regresión probabilística. Se abordan y describen matemáticamente las diferentes técnicas de regresión borrosa. Se hace una revisión de los índices más usados para este tipo de regresión. Se aplican estas técnicas a tres problemas de carácter práctico. La primera de ellas está relacionada con una de las afecciones que con mayor frecuencia aparecen en la población adulta, sin que se conozcan con certeza, las causas que la provocan, nos referimos a la hipertensión arterial. Se calcula la probabilidad borrosa de que una persona seleccionada al azar, entre un conjunto de personas supuestamente sanas del municipio de Santa Clara, sea hipertensa. Además se pone al descubierto que los hombres son más propensos a ser hipertensos que las mujeres. La segunda aplicación se basa en ejemplos simulados con el objetivo de determinar cuándo se puede o no utilizar las técnicas de regresión borrosa y cual índice es más efectivo para evaluar la calidad del ajuste entre los datos observados y los datos estimados por la regresión borrosa. Por último se estudia las fluctuaciones de las tasas de cambio del Euro frente al CUC de acuerdo a las variaciones de los precios de diferentes productos exportables e importables. Todos los cálculos se realizaron utilizando herramientas de Mathematica y Maple.

Abstract

In this thesis the main concepts and definitions from the fuzzy set theory and probabilistic regression are summarized. We present and describe from the mathematical viewpoint several fuzzy regression techniques. The most used indexes of fuzzy regression are reviewed. We apply fuzzy techniques to three practical problems. The first of them is related with one of the conditions that most frequently appears in the adult population, and usually its causes are unknown, we refer to hypertension. We calculate the fuzzy probability that a random selected person among a set of supposedly healthy people in the municipality of Santa Clara, is hypertensive. Our analysis reveals that men are more likely to be hypertensive than women. Secondly we examine the effectiveness of fuzzy regression of simulated data, by analyzing what are the better indexes for the evaluation of the good-fitness of fuzzy regression of simulated data. Finally, we study the fluctuations of Euro's tax of change against CUC in terms of the price fluctuations of several exportable and importable products. All the calculations were made using Mathematica and Maple tools.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	1
1. TEORÍA DE LOS CONJUNTOS BORROSOS	6
1.1. SUBCONJUNTO BORROSO	6
1.1.1. DEFINICIÓN Y CONCEPTO	6
1.1.2. DEFINICIONES BÁSICAS SOBRE CONJUNTOS BORROSOS	9
1.1.3. OPERACIONES CONJUNTIVAS BÁSICAS CON CONJUNTOS BORROSOS	12
1.1.4. PRINCIPIO DE EXTENSIÓN	18
1.1.4.1. PRINCIPIO DE EXTENSIÓN GENERALIZADO	19
1.1.4.2. APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE EXTENSIÓN DE ZADEH A TRAVÉS DE CONJUNTOS DE NIVEL	19
1.2. INTERVALOS DE CONFIANZA Y NÚMEROS BORROSOS	20
1.2.1. INTERVALOS DE CONFIANZA	20
1.2.2. NÚMEROS BORROSOS	20
1.2.3. OPERACIONES CON NÚMEROS BORROSOS	22
1.2.3.1. ARITMÉTICA DE INTERVALO	23
1.2.3.2. ARITMÉTICA BORROSA	24
1.2.4. ALGUNOS TIPOS ESPECIALES DE NÚMEROS BORROSOS	28
1.2.4.1. NÚMEROS BORROSOS L-R DE DUBOIS Y PRADÉ	28
1.2.4.2. NÚMEROS BORROSOS TRIANGULARES	29
1.2.4.3. NÚMEROS BORROSOS TRAPEZOIDALES	31
1.2.5. ORDENAMIENTO DE NÚMEROS BORROSOS	32
1.3. DISTRIBUCIÓN DE POSIBILIDAD Y TEORÍA DE POSIBILIDAD	33
1.4. CALCULANDO PROBABILIDADES BORROSAS	36
1.5. REGRESIÓN PROBABILÍSTICA	37
1.5.1. CONSIDERACIONES SOBRE LA INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE REGRESIÓN	44
CONSIDERACIONES FINALES DEL CAPÍTULO	45
2. REGRESIÓN BORROSA	46
2.1. JUSTIFICACIÓN DE LA REGRESIÓN BORROSA	46
2.2. REGRESIÓN BORROSA	49
2.3. REGRESIÓN BORROSA POSIBILÍSTICA	50
2.4. OTROS MODELOS BASADOS EN TEORÍA DE LA POSIBILIDAD	51
2.5. CRÍTICAS A LA REGRESIÓN POSIBILÍSTICA	53
2.6. ÍNDICES DE BONDAD Y AJUSTE	54
2.6.1. REVISIÓN DE LOS ÍNDICES MÁS USADOS	55
CONSIDERACIONES FINALES DEL CAPÍTULO	59
3. APLICACIONES	60
3.1. APLICACIÓN A LA HIPERTENSIÓN ARTERIAL (HTA)	60
3.1.1. CÁLCULO DE LA PROBABILIDAD BORROSA DE “HIPERTENSIÓN” EN SANTA CLARA	61
3.1.2. CÁLCULO DE LA PROBABILIDAD BORROSA DE HIPERTENSIÓN EN SANTA CLARA POR SEXO	63
3.2. ESTUDIOS DE SIMULACIÓN	67
3.3. APLICACIÓN A LA TASA DE CAMBIO DEL EURO	73
CONSIDERACIONES FINALES	77
CONCLUSIONES	78
RECOMENDACIONES	79
BIBLIOGRAFÍA	80
ANEXOS	84
ANEXO 1	84
ANEXO 2	87
ANEXO 3	89
ANEXO 4	90

Introducción

“El mundo es un lugar borroso” [1]. La mayoría de los fenómenos que ocurren a diario son imprecisos en la descripción de su naturaleza. Esta imprecisión puede estar asociada con su forma, posición, momento, color o textura entre otros elementos. En muchos casos el mismo concepto puede tener diferentes grados de imprecisión en diferentes contextos o en el tiempo. Un día cálido en invierno no es lo mismo que un día cálido en primavera. La definición exacta de cuando la temperatura pasa de fría a caliente es imprecisa, pues resulta imposible identificar un punto de corte tal que al realizar una variación de sólo un grado, la temperatura del ambiente pase de ser considerada fría a caliente. Este tipo de imprecisión o borrosidad asociado continuamente a los fenómenos, es común en casi todos los campos de estudio: sociología, física, biología, finanzas, ingeniería, y psicología entre muchos otros [1].

Por ejemplo, considérense las siguientes sentencias:

- La temperatura del ambiente está caliente
- La inflación actual aumenta rápidamente
- Los grandes proyectos generalmente tardan mucho
- Alejandro es alto pero Ana no es bajita

Todas estas proposiciones describen "la forma de las cosas en el mundo"[1] sin embargo, son incompatibles con el modelado tradicional de la lógica de Aristóteles, enunciada por primera vez 300 años A.C. La lógica aristotélica ha sido estudiada por miles de científicos y filósofos. Está basada en una idea sencilla comprendida por todos: una proposición es verdadera o falsa. No existen posiciones intermedias entre esos dos extremos.

La lógica borrosa estudia elementos de la lógica tradicional aplicados a valores borrosos. No hay nada impreciso o borroso en sus definiciones, es matemática natural y simple, que se funda en el concepto de "todo es cuestión de grado" [1]. Los elementos de un conjunto borroso son pares ordenados que indican el valor del elemento y su grado de pertenencia a dicho conjunto. Este grado de pertenencia no es sólo 0 o 1 como en la lógica aristotélica, sino que puede tomar también valores intermedios. En el capítulo 1 se mostrará una definición más precisa y rigurosa.

De esta manera, la lógica borrosa maneja la incertidumbre presente en la estructura de un conjunto de datos.

Los conjuntos borrosos fueron introducidos por primera vez en 1965, por Zadeh [2], pero sus orígenes se remontan hasta 2,500 años. Aún Aristóteles consideraba que existían ciertos grados de veracidad y falsedad. Platón había considerado ya grados de pertenencia.

De cierta forma, la lógica borrosa puede ser vista como un “lenguaje” que permite trasladar sentencias del lenguaje natural a un lenguaje matemático formal. Mientras la motivación original fue ayudar a manejar aspectos imprecisos del mundo real, la práctica temprana de la lógica borrosa permitió el desarrollo de aplicaciones prácticas. Aparecieron numerosas publicaciones que presentaban los fundamentos básicos con aplicaciones potenciales. Esta fase marcó la fuerte necesidad de distinguir la lógica borrosa de la poderosa teoría de las probabilidades. [1]

¿Son términos equivalentes borrosidad y probabilidad? La respuesta es “no” y su justificación puede comprenderse fácilmente mediante un ejemplo, tomado de [3]

Ejemplo: Líquido potable: borrosidad y probabilidad.

Considérese el universo formado por todos los líquidos y sobre él se define el subconjunto L

$$L = \{\text{Líquido potable (apto para beber)}\}$$

Suponga que usted ha estado en el desierto por una semana sin beber y en estos momentos tiene ante sí dos botellas: A y B con la siguiente información:

Botella A: la pertenencia del líquido de la botella A a L es de 0.9

Botella B: la probabilidad de que el líquido de la botella B pertenezca a L es de 0.9

Esto significa que A contiene un líquido que es potable con un grado de calidad de 0.9, mientras que B contiene un líquido que es potable con probabilidad 0.9. ¿De cuál de las dos botellas es conveniente beber?

La botella de la que se debe beber es A, porque una pertenencia de 0.9 indica que el líquido que ella contiene está bastante cerca de ser un líquido potable, luego es muy probable que no sea dañino. Por otra parte, la botella B contiene un líquido que muy probablemente es potable, pero podría no serlo (con probabilidad 0.1). Es decir, usted podría beber ácido sulfúrico con una probabilidad de 0.1.

Por otra parte, otra de las diferencias entre estos enfoques es que después de que se revele el contenido de ambas botellas, la calidad para la botella A sigue siendo la misma, mientras que la probabilidad para la botella B cambia, pues ya se conoce el resultado y ella pasa a ser 0 o 1 dependiendo de la potabilidad o no del líquido que ella contiene.

Como se ha visto, los términos de borrosidad y probabilidad no son equivalentes.

La “estadística borrosa” persigue aplicar métodos estadísticos a datos borrosos y de esta forma aumentar el dominio de aplicabilidad del campo de la estadística. [4]

Esta investigación constituye una primera incursión dentro del departamento de matemática de nuestra universidad en un tema actual y general: el análisis estadístico de datos borrosos (datos en donde su categorización no es de forma dura sino de manera borrosa más precisamente este tipo de datos se categoriza en posibles clases diferentes con cierto grado de pertenencia en cada una). Como ya se ha mencionado con anterioridad, por su naturaleza, estos números son más complejos y generales que las observaciones numéricas clásicas sobre las que se aplican los métodos del análisis multivariante estadístico, entre los que se encuentran los análisis clásicos de regresión. [4] Este constituye en esencia el problema científico que le da origen a la presente tesis.

Como objetivo general se propone entonces: “estudiar la teoría de las probabilidades borrosas y de la regresión borrosa y aplicarlas a la solución de diferentes problemas”

Para lograr dicho objetivo general, se proponen los objetivos específicos:

1. Familiarizarse con el cálculo de las probabilidades borrosas y sus aplicaciones.
2. Estudiar los diferentes métodos de regresión borrosa.
3. Estudiar la validez de algunos de los índices de bondad de ajuste reportados en la literatura, para los modelos anteriores.
4. Lograr aplicaciones en diferentes dominios.

Para dar cumplimiento a estos objetivos fue necesario plantearse y solucionar algunas tareas de investigación, entre las que se encuentran:

1. Estudiar elementos de lógica borrosa (para cumplimentar los objetivos específicos 1 y 2).

2. Implementar sobre paquetes de propósito general como el Mathematica y el Maple funciones que permitieran el cálculo y la graficación de números borrosos y de sus operaciones, así como de procedimientos mucho más complejos como los análisis de regresión lineal borrosa y los índices de bondad de ajuste (para cumplimentar los objetivos 3 y 4).
3. Diseñar un estudio de simulación para analizar la validez de los índices de bondad de ajuste que se seleccionen (para cumplimentar el objetivo 3).

El primer paso para la realización de este trabajo fue la confección del marco teórico. Para ello se realizó una amplia revisión de la literatura consultando libros, artículos y páginas de internet, entre otras fuentes. Sus elementos esenciales se encuentran expuestos de manera resumida en el primer capítulo de la presente tesis. Como conclusión de la elaboración del marco teórico se enuncia la siguiente hipótesis de investigación:

“La utilización de la teoría de las probabilidades borrosas y de la regresión borrosa solucionan problemas reales, entre los que se encuentran **los médicos y los de las finanzas**”

La tesis se estructura en tres capítulos. El primero de ellos contiene una presentación detallada de las formulaciones matemáticas más importantes relacionadas con la lógica borrosa. Se presentan también aspectos relacionados con las probabilidades particularmente probabilidades borrosas así como un método para calcularlas. Por último se presenta de manera resumida aspectos relacionados con la regresión probabilística así como algunas consideraciones sobre la interpretación de los resultados del análisis de regresión.

El segundo capítulo aborda y describe matemáticamente las diferentes técnicas de regresión borrosa que se estudian. Se hace una revisión de los índices de bondad y ajuste más usados. Además se muestran medidas de similitud así como una medida de ajuste de la tendencia central ($R^2_{borroso}$). El tercer capítulo se dedica a las aplicaciones. En la primera se calcula la probabilidad borrosa de que una persona seleccionada al azar, entre un conjunto de personas supuestamente sanas del municipio de Santa Clara, sea “hipertensa”. Se demuestra además que los hombres son más propensos a ser hipertensos que las mujeres. La segunda aplicación se realiza con datos simulados y la tercera es una aplicación real dentro del área de la Economía. Concretamente se plantea un modelo de regresión borrosa para el estudio de las tasas de cambio del Euro. Todos

los capítulos terminan con un epígrafe de consideraciones finales en el que se resumen los aspectos más importantes que se trataron. Se enuncian las conclusiones y se brindan recomendaciones que abren futuras líneas de investigación.

Finalmente, se presentan en los anexos A.1-A.2 operaciones con funciones de pertenencia no simétricas y los procedimientos elaborados en el paquete Mathematica, para realizar los cálculos necesarios en las aplicaciones. En el anexo A.3 se presentan parte de los resultados de un caso de estudio y en el anexo A.4 se presenta una planilla por la que se recogieron los datos.

1. TEORÍA DE LOS CONJUNTOS BORROSOS

Los dos antecedentes fundamentales de la regresión borrosa son la Teoría de Conjuntos Difusos y la Regresión Probabilística.

1.1. Subconjunto borroso

1.1.1. Definición y concepto

Dos de los aspectos que contaminan normalmente la información en cualquier área del saber, son la *imprecisión* que tiene en su expresión y la *incertidumbre* que puede provocar la fuente que nos la proporciona. Ciertas personas tienen suficiente habilidad para tomar decisiones correctas a partir de un conjunto de datos que vienen expresados de forma vaga o imprecisa (borrosos) casi siempre utilizando adjetivos o adverbios como mucho, poco, alto, bajo, normal, muy, entre otros. Tales personas pueden controlar eficientemente un proceso tecnológico (en un Central azucarero el tradicional puntista que controla el proceso de cristalización del azúcar), diagnosticar enfermedades o una enfermedad a partir de síndromes y síntomas (el médico clínico) o tomar una decisión acertada en una determinada empresa e institución. El ser humano se desenvuelve con extraordinaria facilidad a la hora de manejar este tipo de información, sin embargo, cuesta explicar que procedimientos sigue para ello [5].

Como ya se había enunciado, la Matemática de conjuntos borrosos que podría denominarse como clásica, se basa en la lógica aristotélica fundamentada en el principio que muestra que una proposición únicamente puede ser verdadera o falsa (1,0 respectivamente), pero no ambas cosas a la vez, es decir no existiendo ningún grado de verdad intermedio. Como consecuencia de dicho principio, en la teoría de conjuntos, para un subconjunto A definido sobre un conjunto universo o referencial X, un elemento del universo pertenece o no pertenece a dicho conjunto A, es decir, no existe ningún tipo de ambigüedad sobre su pertenencia.

Matemáticamente la pertenencia a un conjunto se expresa a través de una función característica $\mu_A(x)$ que asigna valores a todos los elementos de A en el conjunto discreto $\{0,1\}$. Dicho valor es 0 cuando el elemento no pertenece al conjunto y 1 cuando el elemento pertenece totalmente. Es decir, matemáticamente la función característica viene dada por:

$$\mu_A : X \rightarrow \{0,1\}$$

$$x \in X \rightarrow \mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases} \quad (1.1)$$

Del principio del tercero excluido se deriva el principio de exclusión. Este indica que si un elemento x del universo X pertenece a un conjunto A , no pertenece a su complemento, A^c y viceversa. Matemáticamente podemos expresar el principio de exclusión como:

$$\forall x \in X, \text{ si } \mu_A(x) = 1 \Leftrightarrow \mu_{A^c}(x) = 0 \quad (1.2)$$

En muchas situaciones los principios de la lógica matemática clásica pueden ser aplicados sin variación para reflejar el fenómeno estudiado. Por ejemplo el médico clínico puede definir sobre el conjunto universo “Pacientes enfermos” el conjunto de “individuos hipertensos”. Un individuo hipertenso es obviamente enfermo así la pertenencia a este conjunto no admite ningún tipo de matiz. Por otra parte en el mismo campo de la medicina clínica, la lógica clásica no es suficiente para reflejar o modelar fenómenos sobre los que las personas deben tomar decisiones, que frecuentemente son vagos. Por ejemplo, supongamos que sobre el conjunto universo “Pacientes enfermos” definimos el conjunto “individuos con baja estatura”. La pertenencia a este conjunto no es trivial salvo que arbitrariamente se fije una medida por debajo de la cual se determine que un individuo tiene baja estatura o no; pero aún así, en este supuesto siempre habrá personas con baja estatura cercano a la frontera a las que se habrá incluido sin ningún tipo de ambigüedad dentro de las que tienen baja estatura, o dentro de las que no la tienen, perdiéndose por tanto mucha información. Si queremos representar con veracidad este fenómeno deberemos admitir que entre el “sí” y el “no” existe una amplia gama de matices. Un determinado individuo podrá tener una estatura “baja”, “bastante baja”, “poco baja”, “alta”, “muy alta”, entre otras. Estos problemas no pueden ser analizados con los limitados principios del tercero excluido y el de exclusión, sino debe partirse de uno más flexible, el de simultaneidad gradual, enunciado en Gil Aluja(1996) [6] el cual refleja que un elemento puede pertenecer a un determinado conjunto y a la vez al conjunto complementario, siempre y cuando se asigne a ambas pertenencias un grado, o bien, una proposición puede ser verdadera y falsa a la vez siempre y cuando se le asigne un grado de verdad y de falsedad.

Para hacerle frente a la información imprecisa han surgido diferentes teorías matemáticas: teorías como la de la probabilidad [7], como la de la evidencia [8], o como la de los Factores de Certeza [9, 10]. Estas teorías han despertado un creciente interés en la investigación científica. La herramienta por excelencia para modelar fenómenos en los que rige el principio de simultaneidad gradual es la Teoría de los Subconjuntos Borrosos, cuya base son las lógicas multivalentes desarrolladas en las primeras tres décadas del siglo XX [11]. El concepto de conjunto borroso (que caracteriza de manera apropiada la imprecisión en la información) fue introducido en la década del 60 por Lofti A. Zadeh [12] quien se considera el padre de la lógica borrosa. Desde la aparición de esta teoría son incontables las aplicaciones que se han hecho de ella en el mundo de la investigación en general y en particular en la Ciencia Madre “Las Matemáticas”.

Un conjunto borroso es un conjunto para el cual la pertenencia de un elemento está definida de forma borrosa. Así, si se denomina X como al universo o conjunto referencial, un subconjunto borroso, que se denotará de la siguiente manera \bar{A} , es aquel en el que la pertenencia de un elemento $x \in X$ tiene asignado un nivel de verdad que puede tomar valores en el conjunto continuo $[0,1]$. El nivel de pertenencia de un elemento x vendrá dado por su función de pertenencia o función característica $\mu_{\bar{A}}(x)$. Así, se puede definir a un subconjunto borroso como $\bar{A} = \{(x, \mu_{\bar{A}}(x)) \mid x \in X\}$ siendo la función de pertenencia:

$$\begin{aligned} \mu_{\bar{A}} : X &\rightarrow [0,1] \\ x \in X &\rightarrow \mu_{\bar{A}}(x) \in [0,1] \end{aligned} \tag{1.3}$$

Donde 0 indica la no pertenencia al conjunto \bar{A} y 1 la pertenencia absoluta. Evidentemente, existe una degradación del nivel de pertenencia de forma que si $\mu_{\bar{A}}(x) = 0.9$, el nivel de pertenencia del elemento x es muy elevado, y si $\mu_{\bar{A}}(x) = 0.1$ el nivel de pertenencia de x es muy bajo. Así puede interpretarse como el grado en que un elemento particular que se considera cumple con las especificaciones que definen a los elementos del conjunto en cuestión y no debe interpretarse como la probabilidad de pertenencia. Si la probabilidad de que un elemento x pertenece al conjunto \bar{A} es de 0.9 y se afirma que x pertenece al conjunto \bar{A} , tenemos un 90 % de probabilidad de acertar, pero el elemento intrínsecamente pertenece o no pertenece a \bar{A} . Cuando se dice que la función de pertenencia de x es 0.9 se quiere decir que cumple en nuestro

criterio con el 90% de las características que definen los elementos del conjunto \bar{A} . En resumen, la probabilidad indica incertidumbre estadística mientras que la función de pertenencia indica vaguedad y subjetividad. Además, se puede observar que un conjunto ordinario o “crisp” es un caso particular de un conjunto borroso, para el cual únicamente se diferencian dos niveles de pertenencia: la pertenencia absoluta y la no pertenencia.

1.1.2. Definiciones básicas sobre conjuntos borrosos

En esta sección se presentan las definiciones y resultados básicos relacionados con los conjuntos borrosos. Para un estudio más profundo se pueden consultar [13, 14].

Definición 1.1 (Conjunto Vacío)

El Subconjunto borroso \bar{A} es vacío si y solo si $\mu_{\bar{A}}(x) = 0 \quad \forall x \in X$ y se escribe $\bar{A} = \phi$.

Definición 1.2 (Igualdad)

Si \bar{A} y \bar{B} son dos subconjuntos borrosos de un conjunto X, se dice que $\bar{A} = \bar{B}$ si y solo si $\mu_{\bar{A}}(x) = \mu_{\bar{B}}(x) \quad \forall x \in X$.

Definición 1.3 (Cardinalidad escalar)

La cardinalidad escalar de un conjunto borroso \bar{A} en el conjunto finito X, se define como [15, 16]:

$$|\bar{A}| = \sum_{x \in X} \mu_{\bar{A}}(x) \quad (1.4)$$

Cuando X es finito, $(\{x_1, \dots, x_n\})$, el conjunto borroso \bar{A} se puede expresar como:

$$\bar{A} = \mu_{\bar{A}}(x_1)/x_1 + \dots + \mu_{\bar{A}}(x_n)/x_n = \sum_{i=1}^n \mu_{\bar{A}}(x_i)/x_i \quad (1.5)$$

donde el + y la \sum deben entenderse en el sentido de la teoría de conjuntos. Por convenio, los pares $\mu_{\bar{A}}(x)/x$ con $\mu_{\bar{A}}(x) = 0$ se omiten.

En el caso de que X no sea finito, la notación es

$$\bar{A} = \int_X \mu_{\bar{A}}(x)/x \quad (1.6)$$

Definición 1.4 (Inclusión)

Si \bar{A} y \bar{B} son dos subconjuntos borrosos de un conjunto X , se dice que \bar{A} es subconjunto de \bar{B} si y solo si $\mu_{\bar{A}}(x) \leq \mu_{\bar{B}}(x) \quad \forall x \in X$, esta relación se expresa como $\bar{A} \subseteq \bar{B}$.

Si el conjunto universo es finito, se pueden relajar la condición anterior para medir el grado en el que un conjunto borroso está incluido en otro [17]

$$S(\bar{A}, \bar{B}) = \frac{1}{|\bar{A}|} \{ |\bar{A}| - \sum_{x \in X} \max\{0, \mu_{\bar{A}}(x) - \mu_{\bar{B}}(x)\} \} \quad (1.7)$$

Definición 1.5 (Subconjunto propio)

Si \bar{A} y \bar{B} son dos subconjuntos borrosos de un conjunto X , se dice que \bar{A} es subconjunto propio de \bar{B} si y solo si $\mu_{\bar{A}}(x) < \mu_{\bar{B}}(x) \quad \forall x \in X$, y se escribe como $\bar{A} \subset \bar{B}$ si y solo si $\bar{A} \subseteq \bar{B}$ y $\bar{A} \neq \bar{B}$

El concepto de cardinalidad de un conjunto borroso no tiene nada que ver con el similar en el caso de conjuntos comunes (número de elementos), sino que se refiere más bien a su tamaño.

Definición 1.6 (Soporte)

El soporte de un subconjunto borroso \bar{A} , dentro de un conjunto universal X , es el conjunto convencional (crisp) que contiene todos los elementos de X que tienen un grado de pertenencia mayor que 0 en \bar{A} .

$$sop(\bar{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\bar{A}}(x) > 0\} \quad (1.8)$$

Un concepto muy útil es el conjunto de nivel (umbral) α , grado de presunción, o **α -corte**, como se conoce en la bibliografía sobre conjuntos borrosos. Este concepto permite un enfoque muy interesante de la teoría de conjuntos borrosos, ya que la familia formada por los α -cortes contiene toda la información sobre el conjunto borroso.

Definición 1.7 (Conjunto de nivel α o α -corte)

Dado un número $\alpha \in [0,1]$ y un conjunto borroso \bar{A} , se define el conjunto de nivel α o α -corte de \bar{A} como el conjunto \bar{A}_α cuya función característica se define:

$$\mu_{\bar{A}_\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu_{\bar{A}}(x) \geq \alpha \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad (1.9)$$

En conclusión, el α -corte se compone de aquellos elementos cuyo grado de pertenencia supera o iguala el umbral α .

Hablamos de α -cortes estrictos si:

$$\mu_{\bar{A}_\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu_{\bar{A}}(x) > \alpha \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad (1.10)$$

Cualquier conjunto borroso \bar{A} se puede representar mediante la unión de sus α -cortes de la siguiente manera:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \max_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \cdot \mu_{\bar{A}_\alpha}(x)] \quad (1.11)$$

Definición 1.8 (Altura)

La altura de un conjunto borroso \bar{A} es el supremo (o el máximo, cuando el conjunto universo X es finito) de la función de pertenencia $\mu_{\bar{A}}(x)$:

$$alt(\bar{A}) = \sup_{x \in X} \mu_{\bar{A}}(x) \quad (1.12)$$

Definición 1.9 (Núcleo)

Se define el núcleo de un subconjunto borroso como al α -corte que presenta un grado de verdad 1:

$$nucl(\bar{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\bar{A}}(x) = 1\}. \quad (1.13)$$

Las propiedades fundamentales de conjuntos borrosos y relaciones, tales como altura, núcleo, soporte y α -corte, se ilustran en la figura 1.1.

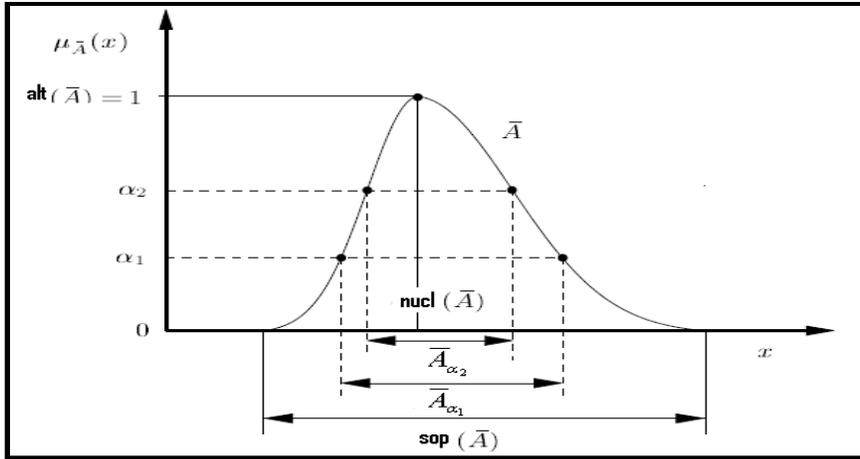


Figura 1.1. Altura, núcleo, conjunto soporte y α -corte de un Conjunto borroso \bar{A} .

Definición 1.10 (Normalidad)

El subconjunto borroso \bar{A} es normal si:

$$\sup_{\forall x \in X} \mu_{\bar{A}}(x) = 1 \text{ o sea si } alt(\bar{A}) = 1. \quad (1.14)$$

En este caso, muchos autores consideran que $\mu_{\bar{A}}(x)$ es una “medida” de posibilidad y \bar{A} es una distribución de posibilidad.

El concepto de convexidad también juega un papel importante en la teoría de conjuntos borrosos. Las condiciones de convexidad se definen en referencia a la función de pertenencia.

Definición 1.11 (Convexidad)

El subconjunto borroso \bar{A} es convexo si:

$$\forall x_1, x_2 \in X, \forall \lambda \in [0,1], \mu_{\bar{A}}[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geq \text{Min}(\mu_{\bar{A}}(x_1), \mu_{\bar{A}}(x_2)) \quad \forall x \in X \quad (1.15)$$

Alternativamente, también se puede decir que el subconjunto borroso \bar{A} es convexo si sus α -cortes, \bar{A}_α son conjuntos convexos: $\forall \alpha, \alpha' \in [0,1], \alpha \leq \alpha' \Leftrightarrow A_{\alpha'} \subseteq A_\alpha$

1.1.3. Operaciones conjuntistas básicas con conjuntos borrosos

A continuación se rememorarán algunas de las operaciones básicas entre conjuntos convencionales que pueden extenderse de manera natural a operaciones análogas entre conjuntos borrosos [18].

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera incluidos en X es posible definir un conjunto de operaciones básicas entre ellos [3].

Definición 1.12 (Complemento)

El complemento de A se denota por A^c y está formado por todos los elementos de X que no pertenecen a A. $x \in A^c$ si $x \notin A$ Su función característica será:

$$\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad (1.16)$$

Definición 1.13 (Intersección)

Se denota por $A \cap B$ y se define como el conjunto formado por aquellos elementos de X que pertenecen a A y a B simultáneamente:

$$x \in A \cap B \quad \text{si } x \in A \text{ y } x \in B$$

La función característica correspondiente es:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \text{Min}(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad (1.17)$$

Definición 1.14 (Unión)

Es el conjunto formado por aquellos elementos que pertenecen a A, o pertenecen a B, o pertenecen a ambos simultáneamente. Se denota por $A \cup B$ y su función característica es:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \text{Max}(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad (1.18)$$

Como se mencionó al inicio de la sección estas tres operaciones básicas (complemento, intersección, unión) se pueden generalizar a operaciones análogas entre conjuntos borrosos de varias formas (ver Figura 1.2).

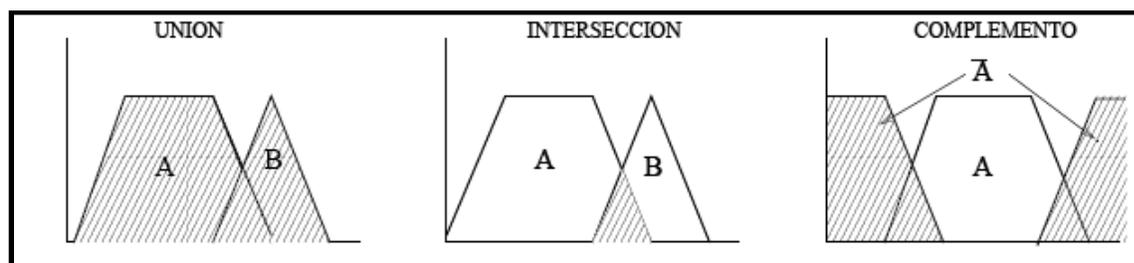


Figura 1.2 Operaciones básicas entre conjuntos borroso. Definición estándar.

Definición 1.15 (Complemento Borroso)

Dado un subconjunto borroso \bar{A} , cuya función de pertenencia es $\mu_{\bar{A}}(x)$, el subconjunto complementario \bar{A}^c tiene función de pertenencia:

$$\mu_{\bar{A}^c}(x) = C(\mu_{\bar{A}}(x)) \quad \forall x \in X \quad (1.19)$$

donde $C(x)$ se define en el intervalo $[0,1]$ y toma valores en el intervalo $[0,1]$, o sea, $C : [0,1] \rightarrow [0,1]$. Esta aplicación debe cumplir los siguientes axiomas:

(Axioma C1) $C(0)=1, C(1)=0$ (Frontera o condiciones de contorno)

(Axioma C2) $a \leq b \Rightarrow C(a) \geq C(b), \forall a, b \in [0,1]$ (Monotonía)

Todas las funciones C que satisfacen ambos axiomas forman la clase más general de complementos borrosos. Estos dos axiomas son llamados “axiomática skeleton” [14, 15].

Es una práctica usual considerar algunas exigencias adicionales para estas funciones:

(Axioma C3) $C(x)$ es una función continua.

(Axioma C4) $C(x)$ es una función involutiva, lo que significa que $C(C(a))=a, \forall a \in [0,1]$

Existen muchas funciones que cumplen estos cuatro axiomas, y que pueden ser usadas para representar el complemento borroso. En la tabla 1 mostramos algunas de ellas. Para un estudio más profundo se pueden consultar [19] [20]

Nombre	Definición
Estándar	$C(a)=1-a$
Sugeno	$C(a) = \frac{1-a}{1+\lambda a}, \lambda \in (-1, \infty)$
Yager	$C(a) = (1-a^w)^{\frac{1}{w}}, w \in (0, \infty)$
Umbral	$C(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a < \text{umbral} \\ 0 & \text{si } a \geq \text{umbral} \end{cases}$

Tabla 1.1: Complementos habituales.

En esta tesis se considera la forma estándar de calcular el complemento.

Definición 1.16 (intersección Borrosa)

Sea $\bar{C} = \bar{A} \cap \bar{B}$ es claro que $\mu_{\bar{C}}(x) = 1$ si $\mu_{\bar{A}}(x) = \mu_{\bar{B}}(x) = 1$ y $\mu_{\bar{C}}(x) = 0$ siempre y cuando $\mu_{\bar{A}}(x) = 0$ o $\mu_{\bar{B}}(x) = 0$. El valor de $\mu_{\bar{C}}(x)$ es una función de dos valores $\mu_{\bar{A}}(x)$ y $\mu_{\bar{B}}(x)$. A la función de pertenencia de la intersección de dos conjuntos borrosos \bar{A} y \bar{B} se escribe como:

$$\mu_{\bar{C}}(x) = i(\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x)), \forall x \in X \quad (1.20)$$

Las funciones $i(a, b)$ deben cumplir las siguientes propiedades:

1. $0 \leq a, b \leq 1$ y $i(a, b) \in [0, 1]$
2. $i(1, 1) = 1$
3. $i(0, 1) = i(1, 0) = i(0, 0) = 0$

Definición 1.17 (Unión Borrosa)

Sea $\bar{D} = \bar{A} \cup \bar{B}$ es claro que, $\mu_{\bar{D}}(x) = 1$ si $\mu_{\bar{A}}(x) = 1$ o $\mu_{\bar{B}}(x) = 1$ y $\mu_{\bar{D}}(x) = 0$ para $\mu_{\bar{A}}(x) = \mu_{\bar{B}}(x) = 0$. La función de pertenencia para la unión se define por:

$$\mu_{\bar{D}}(x) = u(\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x)), \forall x \in X. \quad (1.21)$$

La función de pertenencia $u(a, b)$ para $a, b \in [0, 1]$ debe cumplir las siguientes propiedades:

1. $0 \leq a, b \leq 1$ y $u(a, b) \in [0, 1]$
2. $u(0, 0) = 0$
3. $u(0, 1) = u(1, 0) = u(1, 1) = 1$

Una descripción de las propiedades básicas de estas operaciones puede encontrarse en [13].

Las funciones usadas para la intersección ($i(a, b)$) y la unión ($u(a, b)$) de conjuntos borrosos son llamadas normas triangulares o t-normas y t-conormas respectivamente. [13, 21].

El concepto de norma triangular se usa en estadística para datos que pertenecen al intervalo $[0, 1]$. Este es el motivo de que en el desarrollo de la matemática borrosa sea de interés, especialmente en el campo de la lógica borrosa y de los sistemas de expertos.

Definición 1.18 (t-norma)

Una t-norma T es una función $z = T(a, b)$, $0 \leq a, b, z \leq 1$, o sea, $z : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$

que verifique las cuatro siguientes propiedades:

1. $T(a,1) = a; \forall a \in [0,1]$ (*Frontera*)
2. *si $b_1 \leq b_2$, entonces $T(a, b_1) \leq T(a, b_2)$; $\forall a, b_1, b_2 \in [0,1]$* (*Monotonía*)
3. $T(a, b) = T(b, a); \forall a, b \in [0,1]$ (*Commutativa*)
4. $T(a, T(b, c)) = T(T(a, b), c); \forall a, b, c \in [0,1]$ (*Asociativa*)

Si \bar{A} y \bar{B} son dos subconjuntos borrosos de X entonces la intersección de dos conjuntos borrosos ($\bar{C} = \bar{A} \cap \bar{B}$), puede definirse de la siguiente manera:

$$\mu_{\bar{C}}(x) = \mu_{\bar{A} \cap \bar{B}}(x) = T(\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x)) \quad (1.22)$$

para alguna t-norma T .

La tabla 1.2 muestra algunas funciones que se ajustan a la anterior definición.

Nombre	Definición
Mínimo	$T_m(a, b) = \text{Min}(a, b)$
Producto	$T_p(a, b) = a \cdot b$
Lukasiewics	$T_b(a, b) = \text{Max}(0, a + b - 1)$
Intersección drástica	$T^*(a, b) = \begin{cases} a, & \text{si } b = 1 \\ b, & \text{si } a = 1 \\ 0, & \text{en otros casos} \end{cases}$

Tabla 1.2: Algunas t-normas habituales.

En ocasiones es necesario restringir la posible t-norma considerando tres requerimientos adicionales:

1. Continuidad: T es una función continua
2. Subidempotencia: $T(a, a) < a$
3. Monotonía estricta: $a_1 < a_2$ y $b_1 < b_2 \Rightarrow T(a_1, b_1) < T(a_2, b_2)$.

La propiedad de continuidad se introduce para evitar la situación en la que un pequeño cambio en el grado de pertenencia de los conjuntos \bar{A} o \bar{B} produzca un cambio grande (discontinuo) en el grado de pertenencia de $\bar{A} \cap \bar{B}$. La subidempotencia se tiene en cuenta cuando los grados de pertenencia de $\bar{A} \cap \bar{B}$ para alguna a tienen el mismo valor. Esta propiedad expresa el requerimiento de que el grado de pertenencia de $\bar{A} \cap \bar{B}$ en este caso no exceda este valor. El tercer requerimiento es una condición más fuerte de monotonía.

En la bibliografía es habitual encontrarse la intersección de dos conjuntos borrosos expresada como $\mu_{\bar{A} \cap \bar{B}}(x) = \mu_{\bar{A}}(x) \wedge \mu_{\bar{B}}(x)$ donde el operador \wedge representa al operador mínimo que como se ha visto es la intersección borrosa estándar.

Definición 1.19 (t-conorma)

Una t-Conorma U es una función $z = U(a, b), 0 \leq a, b, z \leq 1$, o sea, $z : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$

Que verifique las siguientes propiedades:

1. $U(a, 0) = a; \forall a \in [0,1]$ (Frontera)
2. si $b_1 \leq b_2$, entonces $U(a, b_1) \leq U(a, b_2); \forall a, b_1, b_2 \in [0,1]$ (Monotonía)
3. $U(a, b) = U(b, a); \forall a, b \in [0,1]$ (Commutativa)
4. $U(a, U(b, c)) = U(U(a, b), c); \forall a, b, c \in [0,1]$ (Asociativa)

Si \bar{A} y \bar{B} son dos subconjuntos borrosos de X , la unión de dos conjuntos borrosos $\bar{A} \cup \bar{B}$, puede definirse de manera análoga como: $\mu_{\bar{A} \cup \bar{B}}(x) = \mu_{\bar{A} \cup \bar{B}}(x) = U(\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x))$ (1.23)

para alguna t-conorma U .

Al igual que los casos anteriores, existe un sinnúmero de funciones que cumplen estas propiedades en la tabla 1.3 se muestran algunas funciones que se ajustan a la anterior definición.

Nombre	Definición
Máximo	$U_m(a, b) = \text{Max}(a, b)$
Lukasiewics	$U_b(a, b) = \text{Min}(1, a + b)$
Suma algebraica	$U_p(a, b) = a + b - ab$

Unión drástica	$U^*(a,b) = \begin{cases} a, & \text{si } b = 0 \\ b, & \text{si } a = 0 \\ 1, & \text{en otros casos} \end{cases}$
----------------	---

Tabla 1.3: Algunas t-Conormas habituales.

Una descripción más detallada de otras t-normas y t-conormas así como varios ejemplos se pueden ver en [15].

En nuestro trabajo, se considerará como t-norma estándar (intersección) al mínimo y como t-conorma estándar (unión) al máximo.

Definición 1.20 (Producto Cartesiano)

Sean los conjuntos borrosos $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$ contenidos respectivamente en los conjuntos universos X_1, X_2, \dots, X_n . Se define el producto cartesiano de n conjuntos borrosos $\bar{A}_1 \times \bar{A}_2 \times \dots \times \bar{A}_n \subset X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ como:

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1, X_2, \dots, X_n$$

$$\mu_{\bar{A}_1 \times \bar{A}_2 \times \dots \times \bar{A}_n}(x) = \text{Min}(\mu_{\bar{A}_1}(x_1), \mu_{\bar{A}_2}(x_2), \dots, \mu_{\bar{A}_n}(x_n)). \quad (1.24)$$

Definición 1.21 (Relaciones borrosas Binarias)

Sean X e Y dos conjuntos, una relación borrosa en $X \times Y$ es una relación entre elementos de dos conjuntos cuyo suceso lleva asociado un determinado nivel de verdad. Dicha relación viene dada de la siguiente manera:

$$\bar{R} = \{(x, y), \mu_{\bar{R}}(x, y) \mid (x, y) \in X \times Y\} \quad \text{donde} \quad \mu_{\bar{R}} : X \times Y \rightarrow [0,1] \quad \text{por lo tanto}$$

$$(x, y) \in X \times Y \rightarrow \mu_{\bar{R}}(x, y) \in [0,1].$$

1.1.4 Principio de extensión

Uno de los principios más esenciales de la teoría de conjuntos borrosos es el principio de extensión. Este principio básico fue propuesto por Zadeh [18] el cual proporciona un método general en el que se sustentan aquellas aplicaciones de los subconjuntos borrosos basadas en la extensión de conceptos matemáticos de conjuntos crisp (no borrosos) cuando los datos de partida son borrosos. Es especialmente útil para los propósitos del cálculo borroso, por cuanto en muchas ocasiones es oportuna su aplicación al algebra real con números borrosos.

1.1.4.1 Principio de extensión generalizado

Sea una aplicación $f : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$. Si se define sobre los conjuntos universos X_1, X_2, \dots, X_n los conjuntos borrosos $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$ respectivamente, caracterizados por las funciones de pertenencia $\mu_{\bar{A}_1}(x_1), \mu_{\bar{A}_2}(x_2), \dots, \mu_{\bar{A}_n}(x_n), x_i \in X_i, i = 1, 2, \dots, n$. La aplicación f permite definir un conjunto borroso $\bar{B} = f(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n) \subset Y$ para el cual su función de pertenencia $\mu_{\bar{B}}(y), y \in Y$ es:

$$\mu_{\bar{B}}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } f^{-1}(y) = \phi \\ \text{Sup}_{y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)} [\text{Min}(\mu_{\bar{A}_1}(x_1), \mu_{\bar{A}_2}(x_2), \dots, \mu_{\bar{A}_n}(x_n))] & \text{si } f^{-1}(y) \neq \phi \end{cases} \quad (1.25)$$

Aquí $f^{-1}(y)$ es la imagen inversa de y .

La función de pertenencia $\mu_{\bar{B}}(y)$ para el caso de un solo conjunto borroso es:

$$\mu_{\bar{B}}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } f^{-1}(y) = \phi \\ \text{Sup}_{y=f(x)} [\text{Min}(\mu_{\bar{A}}(x))] & \text{si } f^{-1}(y) \neq \phi \end{cases} \quad (1.26)$$

1.1.4.2 Aplicación del principio de extensión de Zadeh a través de conjuntos de nivel

Al evaluar una relación funcional entre conjuntos borrosos en muchas ocasiones no será posible operar con funciones de pertenencia, sin embargo, si es posible hacerlo con los α -cortes o conjuntos de nivel. Nguyen [22] demuestra que el principio de extensión puede ser aplicado usando los α -cortes de los subconjuntos borrosos que forman parte de la imagen inversa de y . Dicho autor demuestra que si se parte de la aplicación $f : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$, y si se define sobre el conjunto borroso la preimagen de los subconjuntos borrosos $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$ respectivamente, entonces la aplicación f induce un subconjunto borroso $\bar{B} = f(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n) \subset Y$, cuyos α -cortes, \bar{B}_α pueden ser hallados como:

$$\bar{B}_\alpha = f(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n)_\alpha = f(\bar{A}_{1\alpha}, \bar{A}_{2\alpha}, \dots, \bar{A}_{n\alpha}) \quad (1.27)$$

1.2 Intervalos de confianza y números borrosos

En esta sección se dará la definición de números borrosos los cuales son un caso particular y de gran interés de los subconjuntos borrosos. Para ello se muestra en primer lugar el concepto de intervalo, que es fundamental dentro de los números borrosos.

1.2.1 Intervalos de confianza

Un número ordinario $a \in \mathfrak{R}$, puede interpretarse utilizando el concepto de función de pertenencia como:

$$\mu_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a \\ 0 & \text{si } x \neq a \end{cases} \quad (1.28)$$

De manera similar podemos definir un intervalo de confianza \mathfrak{R} para un número ordinario. Tal intervalo será un conjunto binario clásico A , que representa cierto tipo de incertidumbre acerca del valor auténtico de dicho número. Por ejemplo, si el intervalo se denota por $A = [a_1, a_3]$, $a_1, a_3 \in \mathfrak{R}$, $a_1 < a_3$, este se puede considerar como una clase de conjuntos. En la figura 1.3 se expresa el intervalo como función de pertenencia:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a_1 \\ 1 & \text{si } a_1 \leq x \leq a_3 \\ 0 & \text{si } x > a_3 \end{cases} \quad (1.29)$$

Si $a_1 = a_3$ este intervalo indica un punto que es $[a_1, a_1] = a_1$

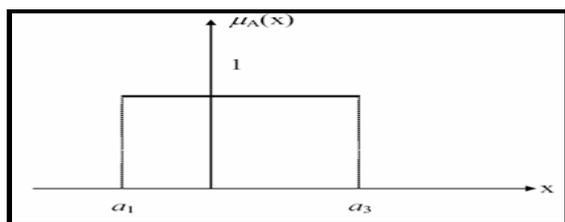


Figura 1.3 Número ordinario $A = [a_1, a_3]$ dado por un intervalo de confianza.

1.2.2 Números borrosos

Un número borroso es expresado como un conjunto borroso definiendo un intervalo borroso en los números reales \mathfrak{R} . Como la frontera de este intervalo es ambigua, el intervalo es además un conjunto borroso. Generalmente un intervalo borroso se representa por dos puntos extremos a_1 y

a_3 y un punto central a_2 que es el punto en donde se alcanza el valor máximo como $[a_1, a_2, a_3]$. (ver figura 1.4)

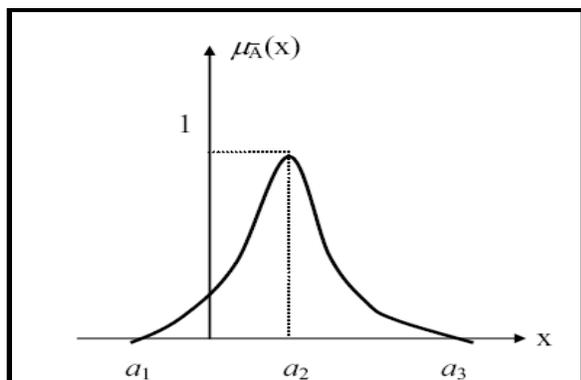


Figura 1.4. Número borroso $\bar{A} = [a_1, a_2, a_3]$

Un número borroso es un subconjunto borroso \bar{N} definido sobre la recta real \mathfrak{R} y que cumple además las siguientes propiedades.

1. Es normal, es decir, que el núcleo de \bar{N} es no vacío o lo que es lo mismo, existe al menos un elemento x de \mathfrak{R} tal que $\mu_{\bar{N}}(x) = 1$
2. Es convexo, geoméricamente quiere decir que los α -cortes de \bar{N} son intervalos cerrados y acotados.
3. El soporte de \bar{N} está acotado.
4. La función de pertenencia es seccionalmente continua.

Los números borrosos constituyen una herramienta valiosa para representar cantidades estimadas u observadas en el contexto de la lógica borrosa. Varios autores diferencian dentro del concepto de número borroso de acuerdo a si su núcleo es un valor real o si el núcleo es un intervalo de confianza. En nuestro caso no distinguimos a los números borrosos por la forma que se utilice para representar su núcleo.

Son muchos los ejemplos prácticos en los que el grado de pertenencia de un determinado elemento del universo $X \subset \mathfrak{R}$ se puede expresar como una función de una característica medible del mismo. El valor que toma un elemento $x \in \mathfrak{R}$ en la función de pertenencia de \bar{N} , $\mu_{\bar{N}}(x)$, es

interpretado por muchos autores como una “medida” de la posibilidad de ocurrencia de x , así el número borroso \bar{N} es interpretado como una distribución de posibilidad.

De forma general la función de pertenencia de un número borroso \bar{N} puede escribirse como:

$$\mu_{\bar{N}}(x) = \alpha = \begin{cases} f(x) & a_1 < x \leq a_2 \\ 1 & a_2 < x \leq a_3 \\ g(x) & a_3 < x \leq a_4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (1.30)$$

El intervalo de confianza $[a_1, a_4]$ es el soporte del número borroso y $[a_2, a_3]$ es el núcleo del número borroso. Asimismo $f(x)$ es creciente en el intervalo $[a_1, a_2]$ y $g(x)$ es decreciente en el intervalo $[a_3, a_4]$ (ver figura 1.5)

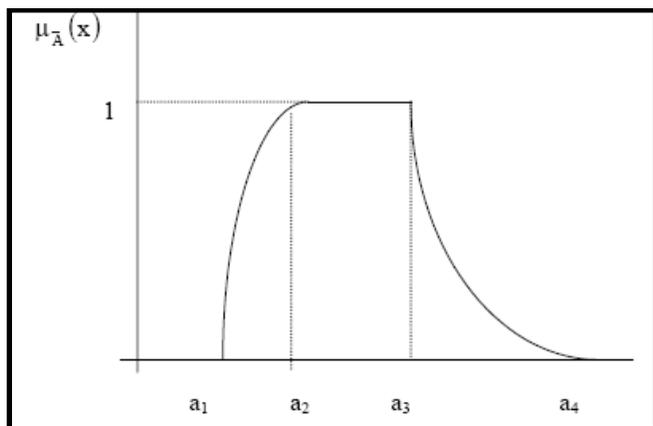


Figura 1.5 Forma general de un número borroso.

Sin embargo, en muchas ocasiones será más práctico operar con su representación a través de sus conjuntos de nivel o α -cortes. Estos son intervalos de confianza que se pueden representar como:

$$\bar{N}_\alpha = \{x \in \mathfrak{R} \mid \mu_{\bar{N}}(x) \geq \alpha\} = [f^{-1}(\alpha), g^{-1}(\alpha)] = [n_1(\alpha), n_2(\alpha)] \quad (1.31)$$

donde $n_1(\alpha)$ ($n_2(\alpha)$) serán funciones crecientes (decrecientes de α) con $n_1(\alpha) < n_2(\alpha)$

1.2.3 Operaciones con números borrosos

Las operaciones aritméticas entre números borrosos pueden establecerse a partir de la aritmética entre intervalos de confianza.

1.2.3.1 Aritmética de Intervalo

Supongamos que tenemos dos intervalos cerrados y acotados cualesquiera, tales como,

$$\bar{A} = [a_1, a_2] \text{ y } \bar{B} = [b_1, b_2], \text{ con } a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathfrak{R}.$$

En general cuando se aplica una función a un conjunto de intervalos, el límite inferior (superior) del intervalo resultante será el valor mínimo (máximo) calculado aplicando esa función a todas las posibles combinaciones de valores pertenecientes a los intervalos considerados.

Si $*$ denota suma, resta, multiplicación, o división, entonces $[a_1, a_2] * [b_1, b_2] = [c, d]$ donde:

$$[c, d] = \{a * b \mid a_1 \leq a \leq a_2, b_1 \leq b \leq b_2\} \quad (1.32)$$

Si $*$ es división se asumirá que el cero no pertenece al intervalo $[b_1, b_2]$. La ecuación anterior se puede especializar en cada caso de acuerdo a:

Suma:

$$[a_1, a_2] + [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2] \quad (1.33)$$

Resta:

$$[a_1, a_2] - [b_1, b_2] = [a_1 - b_2, a_2 - b_1] \quad (1.34)$$

Multiplicación:

$$[a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2] = [c, d] \quad (1.35)$$

donde:

$$c = \text{Min}\{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2\}$$

$$d = \text{Max}\{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2\}$$

Si el conjunto borroso está definido sobre \mathfrak{R}^+ , entonces $[a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2] = [a_1b_1, a_2b_2]$

Se define ahora la operación de inverso para una mejor comprensión de la operación de división.

Inverso:

$$[a_1, a_2]^{-1} = [c, d] \quad (1.36)$$

donde:

$$c = \text{Min} \left[\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2} \right]$$

$$d = \text{Max} \left[\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2} \right] \text{ excepto para } a_1 \leq 0 \leq a_2$$

Si el conjunto borroso está definido sobre \mathfrak{R}^+ , sería $[a_1, a_2]^{-1} = \left[\frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_1} \right]$

División:

$$\frac{[a_1, a_2]}{[b_1, b_2]} = [a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2]^{-1} = [a_1, a_2] \cdot \left[\frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_1} \right] \quad (1.37)$$

Multiplicación por un número real:

Un número real puede interpretarse como $a = [a, a]$, $a \in \mathfrak{R}$, por tanto:

$$a[b_1, b_2] = [c, d] \quad (1.38)$$

donde $c = \text{Min}[ab_1, ab_2]$ y $d = \text{Max}[ab_1, ab_2]$

1.2.3.2 Aritmética borrosa

A continuación se estudiarán las operaciones más usuales entre números borrosos.

Si los α -cortes y la función de pertenencia de los números borrosos sobre los que se realizan estas operaciones \bar{A} y \bar{B} vienen dados por:

$$\bar{A} = \{x \mid \mu_{\bar{A}}(x)\} = \{\bar{A}_\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)] \mid 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

$$\bar{B} = \{x \mid \mu_{\bar{B}}(x)\} = \{\bar{B}_\alpha = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)] \mid 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

Para hallar la función de pertenencia de $\bar{C} = \bar{A} * \bar{B}$ debemos utilizar el principio de extensión generalizado, enunciado en 1.1.4.1 y aplicarlo teniendo en cuenta que se está evaluando una aplicación $f : \mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$. De forma general, y si suponemos que: $0 \notin \text{Sop}(\bar{A})$ y $0 \notin \text{Sop}(\bar{B})$:

$$\mu_{\bar{C}}(x) = \text{Max}_{x=x_1 * x_2} [\text{Min}(\mu_{\bar{A}}(x_1), \mu_{\bar{B}}(x_2))] \quad (1.39)$$

siendo los α -cortes de \bar{C} , \bar{C}_α :

$$\bar{C}_\alpha = [c_1(\alpha), c_2(\alpha)] = \begin{bmatrix} \text{Min}\{a_1(\alpha) * b_1(\alpha), a_1(\alpha) * b_2(\alpha), a_2(\alpha) * b_1(\alpha), a_2(\alpha) * b_2(\alpha)\}, \\ \text{Max}\{a_1(\alpha) * b_1(\alpha), a_1(\alpha) * b_2(\alpha), a_2(\alpha) * b_1(\alpha), a_2(\alpha) * b_2(\alpha)\} \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

Suma de números borrosos:

Sea $\bar{C} = \bar{A} + \bar{B}$, la función de pertenencia de \bar{C} se halla como:

$$\mu_{\bar{C}}(x) = \text{Max}_{x=x_1+x_2} [\text{Min}(\mu_{\bar{A}}(x_1), \mu_{\bar{B}}(x_2))] \quad (1.41)$$

y sus α -cortes:

$$\bar{C}_\alpha = [c_1(\alpha), c_2(\alpha)] = [a_1(\alpha) + b_1(\alpha), a_2(\alpha) + b_2(\alpha)] \quad (1.42)$$

Propiedades:

1. $-(\bar{A} + \bar{B}) = (-\bar{A}) + (-\bar{B})$
2. $\bar{A} + \bar{B} = \bar{B} + \bar{A}$ (Conmutativa)
3. $(\bar{A} + \bar{B}) + \bar{C} = \bar{A} + (\bar{B} + \bar{C})$ (Asociativa)
4. Existe el elemento neutro, $\bar{0}$, cuya función de pertenencia es $\mu_{\bar{0}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$ tal que: $\bar{A} + \bar{0} = \bar{A}$
5. No existe el elemento opuesto ya que $\bar{A} + (-\bar{A}) \neq \bar{0}$, por esta razón a $-\bar{A}$ se le denomina pseudo-opuesto.

Resta de números borrosos:

Sea $\bar{C} = \bar{A} - \bar{B}$, la función de pertenencia de \bar{C} se halla como:

$$\mu_{\bar{C}}(x) = \text{Max}_{x=x_1-x_2} [\text{Min}(\mu_{\bar{A}}(x_1), \mu_{\bar{B}}(x_2))] \quad (1.43)$$

y sus α -cortes:

$$\bar{C}_\alpha = [c_1(\alpha), c_2(\alpha)] = [a_1(\alpha) - b_2(\alpha), a_2(\alpha) + b_1(\alpha)] \text{ ya que } \bar{C} = \bar{A} + (-\bar{B}) \quad (1.44)$$

Multiplicación de números borrosos:

Sea $\bar{C} = \bar{A} \bullet \bar{B}$, la función de pertenencia de \bar{C} se halla como:

$$\mu_{\bar{C}}(x) = \underset{x=x_1 \cdot x_2}{\text{Max}}[\text{Min}(\mu_{\bar{A}}(x_1), \mu_{\bar{B}}(x_2))] \quad (1.45)$$

siendo sus α -cortes

$$\bar{C}_\alpha = [c_1(\alpha), c_2(\alpha)] = \left[\begin{array}{l} \text{Min}\{a_1(\alpha) \cdot b_1(\alpha), a_1(\alpha) \cdot b_2(\alpha), a_2(\alpha) \cdot b_1(\alpha), a_2(\alpha) \cdot b_2(\alpha)\}, \\ \text{Max}\{a_1(\alpha) \cdot b_1(\alpha), a_1(\alpha) \cdot b_2(\alpha), a_2(\alpha) \cdot b_1(\alpha), a_2(\alpha) \cdot b_2(\alpha)\} \end{array} \right] \quad (1.46)$$

Si el $\text{Sop}(\bar{A})$ y el $\text{Sop}(\bar{B}) \in \mathfrak{R}^+$ respectivamente se obtiene entonces que:

$$\bar{C}_\alpha = [c_1(\alpha), c_2(\alpha)] = [a_1(\alpha) \cdot b_1(\alpha), a_2(\alpha) \cdot b_2(\alpha)]$$

Propiedades:

1. $(-\bar{A}) \bullet \bar{B} = -(\bar{A} \bullet \bar{B})$
2. $\bar{A} \bullet \bar{B} = \bar{B} \bullet \bar{A}$ (Conmutativa)
3. $(\bar{A} \bullet \bar{B}) \bullet \bar{C} = \bar{A} \bullet (\bar{B} \bullet \bar{C})$ (Asociativa)
4. No existe elemento neutro $\bar{1}$: $\bar{A} \bullet \bar{1} = \bar{A}$ cuya función de pertenencia es $\mu_{\bar{1}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x=1 \\ 0 & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$
5. No existe elemento inverso: $\bar{A} \bullet \bar{A}^{-1} = \bar{1}$. Por esa razón a \bar{A}^{-1} muchos autores le denominan pseudo-inverso.
6. $\bar{C} \bullet (\bar{A} + \bar{B}) = (\bar{A} \bullet \bar{C}) + (\bar{B} \bullet \bar{C})$ únicamente se cumple si $\text{Sop}(\bar{A})$ y el $\text{Sop}(\bar{B})$ son positivos o negativos simultáneamente. (Distributiva del producto respecto a la suma).

Inverso:

Sea \bar{A} un número borroso tal que $\text{Sop}(\bar{A}) \in \mathfrak{R}^+$. Su inverso $\bar{C} = \bar{A}^{-1}$ tiene como función de pertenencia:

$$\mu_{\bar{C}}(x) = \mu_{\bar{A}}\left(\frac{1}{x}\right) \quad (1.47)$$

$$\text{con } \alpha \text{-cortes } \bar{C}_\alpha = [c_1(\alpha), c_2(\alpha)] = \left[\frac{1}{a_2(\alpha)}, \frac{1}{a_1(\alpha)} \right] \quad (1.48)$$

División de números borrosos:

Sea $\bar{C} = \bar{A} \div \bar{B}$, en los cuales $0 \notin \text{Sop}(\bar{A})$ y $0 \notin \text{Sop}(\bar{B})$: La función de pertenencia de \bar{C} se halla como:

$$\mu_{\bar{C}}(x) = \underset{\substack{x=\frac{x_1}{x_2}}}{\text{Max}} [\text{Min}(\mu_{\bar{A}}(x_1), \mu_{\bar{B}}(x_2))] \quad (1.49)$$

siendo sus α -cortes

$$\bar{C}_\alpha = [c_1(\alpha), c_2(\alpha)] = \left[\begin{array}{l} \text{Min}\left\{\frac{a_1(\alpha)}{b_1(\alpha)}, \frac{a_1(\alpha)}{b_2(\alpha)}, \frac{a_2(\alpha)}{b_1(\alpha)}, \frac{a_2(\alpha)}{b_2(\alpha)}\right\}, \\ \text{Max}\left\{\frac{a_1(\alpha)}{b_1(\alpha)}, \frac{a_1(\alpha)}{b_2(\alpha)}, \frac{a_2(\alpha)}{b_1(\alpha)}, \frac{a_2(\alpha)}{b_2(\alpha)}\right\} \end{array} \right] \quad (1.50)$$

Si el $\text{Sop}(\bar{A})$ y el $\text{Sop}(\bar{B}) \in \mathfrak{R}^+$ respectivamente se obtiene entonces que:

$$\bar{C}_\alpha = [c_1(\alpha), c_2(\alpha)] = \left[\frac{a_1(\alpha)}{b_2(\alpha)}, \frac{a_2(\alpha)}{b_1(\alpha)} \right]$$

Multiplicación por un escalar:

Sea \bar{A} un número borroso y $k \in \mathfrak{R}$ un escalar. El producto $\bar{C} = k\bar{A}$ tiene función de pertenencia:

$$\mu_{\bar{C}}(x) = \begin{cases} \mu_{\bar{A}}\left(\frac{x}{k}\right) & \text{si } k \neq 0 \\ \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases} & \text{si } k = 0 \end{cases} \quad (1.51)$$

Siendo los α -cortes

$$\bar{C}_\alpha = [c_1(\alpha), c_2(\alpha)] = \begin{cases} [ka_1(\alpha), ka_2(\alpha)] & \text{si } k > 0 \\ [ka_2(\alpha), ka_1(\alpha)] & \text{si } k < 0 \\ [0, 0] & \text{si } k = 0 \end{cases} \quad (1.52)$$

Para más información sobre las operaciones de números borrosos aplicando tanto aritmética de intervalo como aritmética borrosa podemos consultar [23].

1.2.4 Algunos tipos especiales de números borrosos

A continuación introduciremos los números borrosos: L-R de Dubois y Prade, los trapezoidales y los triangulares.

1.2.4.1 Números borrosos L-R de Dubois y Prade

Para la construcción de un número borroso L-R de Dubois y Prade [24] se parte en primer lugar de dos funciones $L(x)$ y $R(x)$, las cuales se denominan funciones de forma a la izquierda y a la derecha respectivamente. Estas se asumen, generalmente, como dos funciones lineales. Por ejemplo, la función de forma a la izquierda puede definirse como la función (no necesariamente lineal) $L \rightarrow [0,1]$ que cumple las siguientes propiedades:

1. $L(x)=L(-x) \quad \forall x \in \mathfrak{R}$ (Simétrica)
2. $L(0)=1$ y $L(1)=0$
3. $L(x)$ es monótona creciente en el intervalo $(-\infty,0]$ y monótona decreciente en $[0,+\infty)$

La función de forma a la derecha, denotada por $R(x)$ debe satisfacer también las propiedades antes enumeradas [14, 21]. En segundo lugar para construir un número borroso \bar{A} debemos establecer su núcleo $[a_{1n}, a_{2n}]$, que también llamaremos centro y a las desviaciones que estimamos razonables sobre dicho núcleo a la izquierda (l_a) y a la derecha (r_a) le llamaremos radio izquierdo y radio derecho respectivamente, de forma que:

$$\text{sop}(\bar{A}) = [a_{1n} - l_a, a_{2n} + r_a] \quad (1.53)$$

De esta forma si \bar{A} es un número borroso de Dubois y Prade su función de pertenencia viene dada por:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{a_{1n} - x}{l_a}\right) & \text{si } a_{1n} - l_a < x \leq a_{1n} \\ 1 & \text{si } a_{1n} < x \leq a_{2n} \\ R\left(\frac{x - a_{2n}}{r_a}\right) & \text{si } a_{2n} < x \leq a_{2n} + r_a \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (1.54)$$

y sus α -cortes:

$$\bar{A}_\alpha = [a_{1n} - l_a L^{-1}(\alpha), a_{2n} + r_a R^{-1}(\alpha)] \quad (1.55)$$

Este número borroso se denota como $\bar{A} = (a_{1n}, a_{2n}, l_a, r_a)_{LR}$. Ahora bien si $l_a = r_a$, \bar{A} es el intervalo crisp $[a_{1n}, a_{2n}]$ y además si $a_{1n} = a_{2n} = a_n$ \bar{A} es el número cierto a_n

De la misma manera si $L(X)=R(x)$ se dice que \bar{A} es un número borroso L-L de Dubois y Prade y se denotará como $\bar{A} = (a_{1n}, a_{2n}, l_a, r_a)_{LL}$. Por otra parte si $L(x)=R(x)$, $l_a = r_a = a_R$ y además su núcleo es un único valor a_n se dice que \bar{A} es un número borroso simétrico L-L de Dubois y Prade y se denotará como $\bar{A} = (a_n, a_R)_{LL}$ donde su función de pertenencia viene dada por:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{|a_n - x|}{a_R}\right) & \text{si } a_n - a_R \leq x \leq a_n + a_R \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (1.56)$$

y sus α -cortes:

$$\bar{A}_\alpha = [a_n - a_R L^{-1}(\alpha), a_n + a_R R^{-1}(\alpha)] \quad (1.57)$$

1.2.4.2 Números borrosos triangulares

Los números borrosos triangulares son los más usados en la práctica por su relativa comodidad de manipulación. Sin embargo muchos autores han cuestionado su utilización indiscriminada. Como es evidente estos son la versión más sencilla del concepto general de número borroso L-R expuesto anteriormente. Un número borroso triangular (NBT) tiene, como su nombre lo indica, la forma triangular mostrada en la figura 1.6.

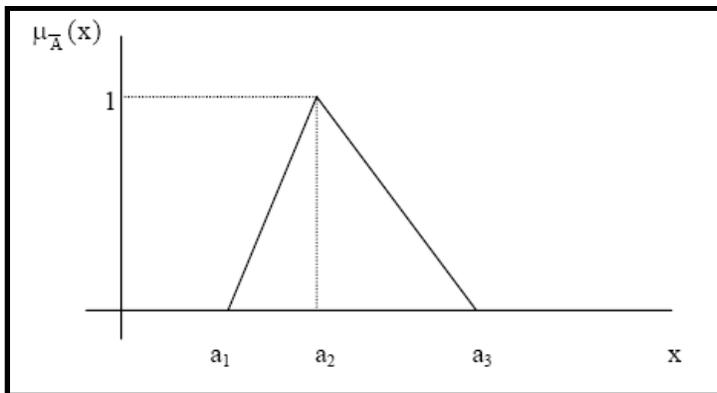


Figura 1.6 Número borroso triangular $\bar{A} = [a_1, a_2, a_3]$.

La función de pertenencia para este número borroso triangular viene dada por:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} & \text{si } a_1 < x \leq a_2 \\ \frac{a_3 - x}{a_3 - a_2} & \text{si } a_2 < x \leq a_3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (1.58)$$

donde el soporte viene dado por $[a_1, a_3]$, su radio izquierdo es $l_a = a_2 - a_1$ y su radio derecho es $r_a = a_3 - a_2$. Por tanto sus α -cortes vienen dados por:

$$\bar{A}_\alpha = [a_1 + (a_2 - a_1)\alpha, a_3 + (a_3 - a_2)\alpha] = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)] \quad (1.59)$$

donde en este caso se sabe que \bar{A}_α es un intervalo cerrado y acotado para $0 \leq \alpha \leq 1$ donde:

1. $a_1(\alpha)$ será una función monótona creciente de α en el intervalo $[0, 1]$
2. $a_2(\alpha)$ será una función monótona decreciente de α para $0 \leq \alpha \leq 1$
3. $a_1(1) = a_2(1)$

La monotonía creciente (decreciente) se demuestra, como es usual, probando que se cumple

$$\text{la relación } \frac{da_1(\alpha)}{d\alpha} > 0 \left(\frac{da_2(\alpha)}{d\alpha} < 0 \right) [25]$$

Un número borroso triangular se denota mediante su centro y sus radios en la forma $\bar{A} = [a_n, l_a, r_a]$, o alternativamente mediante una terna de confianza donde los valores que la componen son el valor más pequeño posible, el valor de mayor pertenencia o el valor central y el valor más elevado posible, es decir $\bar{A} = [a_1, a_2, a_3]$.

Como se puede observar la función de pertenencia de un número borroso triangular es lineal. La extensión izquierda es la recta que pasa por $(a_1, 0)$ y $(a_2, 1)$ y la extensión derecha es la recta que toma valores en $(a_2, 1)$ y $(a_3, 0)$.

En el anexo 1 se presentan algunas operaciones con números borrosos LR.

1.2.4.3 Números borrosos trapezoidales

Otra de las formas de números borrosos son los números borrosos trapezoidales. Estas formas trapezoidales surgen como consecuencia de que ellas tienen varios puntos con máximo grado de pertenencia el valor 1. Para un número borroso trapezoidal no se obtiene un solo punto cuando $\alpha = 1$, sino una línea horizontal sobre un intervalo $[a_2, a_3]$ tal como muestra la figura 1.7

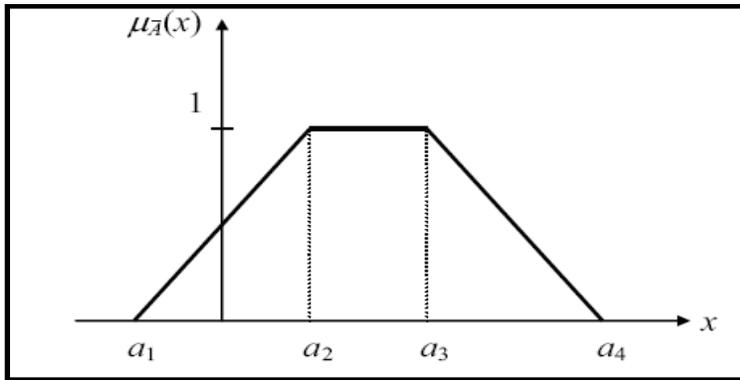


Figura 1.7. Número borroso trapezoidal $\bar{A} = [a_1, a_2, a_3, a_4]$.

La función de pertenencia para este número borroso trapezoidal viene dada por:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} & \text{si } a_1 < x \leq a_2 \\ 1 & \text{si } a_2 < x \leq a_3 \\ \frac{a_4 - x}{a_4 - a_3} & \text{si } a_3 < x \leq a_4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (1.60)$$

donde el soporte viene dado por $[a_1, a_4]$, el núcleo viene dado por el intervalo $[a_2, a_3]$ como ya se vió anteriormente, su radio izquierdo es $l_a = a_2 - a_1$ y su radio derecho es $r_a = a_4 - a_3$. Por tanto sus α -cortes vienen dados por:

$$\bar{A}_\alpha = [a_1 + (a_2 - a_1)\alpha, a_4 + (a_4 - a_3)\alpha] \quad (1.61)$$

Un número borroso trapezoidal \bar{A} se denota mediante su núcleo y sus radios en la forma $\bar{A} = [a_{1n}, a_{2n}, l_a, r_a]$, o alternativamente a mediante una cuarteta de confianza donde los valores

que la componen son el valor más pequeño posible, el valor inferior y el valor superior que conforman el núcleo y el valor más elevado posible, es decir $\bar{A} = [a_1, a_2, a_3, a_4]$.

Como se puede observar la función de pertenencia de un número borroso trapezoidal también es lineal. La función que delimita el nivel de pertenencia de los valores inferiores $f(x)$, es la recta que pasa por los puntos $(a_1, 0)$ y $(a_2, 1)$ y la que delimita el grado de pertenencia de valores superiores al núcleo, $g(x)$ es la recta que pasa por los puntos $(a_3, 1)$ y $(a_4, 0)$.

1.2.5 Ordenamiento de números borrosos

Dado un conjunto finito de números borrosos $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$ se quiere ordenar estos de menor a mayor. Para un conjunto de números reales no es un problema el ordenamiento. Sin embargo, en el caso borroso no existe una manera universalmente aceptada para hacer esto. Probablemente existen más de 40 métodos propuestos en la literatura donde definen $\bar{M} \leq \bar{N}$, para dos números borrosos \bar{M} y \bar{N} . En nuestro trabajo el símbolo \leq significa “menor e igual que” y no “un subconjunto borroso de”.

Aquí solo se presentara un procedimiento para ordenar números borrosos, tenga en cuenta que diferentes definiciones de \leq entre números borrosos puede dar diferentes ordenamientos.

Primero se definirá $<$ entre dos números borrosos \bar{M} y \bar{N} .

Una medida de cuanto \bar{M} es menor e igual que \bar{N} , puede ser definida como

$$\nu(\bar{M} \leq \bar{N}) = \max\{\min(\mu_{\bar{M}}(x), \mu_{\bar{N}}(x)) \mid x \leq y\} \quad (1.62)$$

Se escribirá $\bar{N} < \bar{M}$ si $\nu(\bar{N} < \bar{M}) = 1$ pero $\nu(\bar{M} \leq \bar{N}) < \eta$, donde η es una fracción prefijada en $(0, 1]$. Se utilizara usualmente $\eta = 0.8$. Entonces $\bar{N} < \bar{M}$ si $\nu(\bar{N} \leq \bar{M}) = 1$ y $\nu(\bar{M} \leq \bar{N}) < 0.8$. Se definirá $\bar{M} \approx \bar{N}$ cuando ambos $\bar{N} < \bar{M}$ y $\bar{M} < \bar{N}$ son falsos. $\bar{M} \leq \bar{N}$ significa que $\bar{M} < \bar{N}$ o $\bar{M} \approx \bar{N}$.

El problema de determinar $\nu(\bar{N} \leq \bar{M})$ puede ilustrarse de manera mucho más simple desde el punto de vista geométrico (ver la figura 1.8).

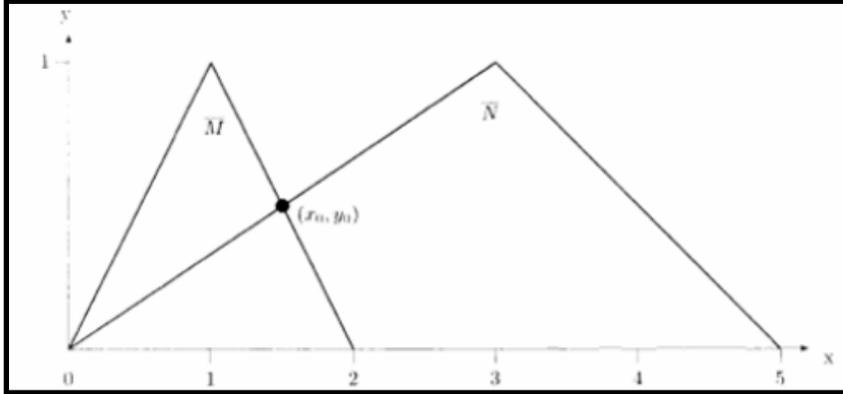


Figura 1.8. Determinando $\nu(\bar{N} \leq \bar{M})$.

Para calcular $\nu(\bar{N} \leq \bar{M})$ observemos primero que:

$$\nu(\bar{M} \leq \bar{N}) = \max\{\min(\mu_{\bar{M}}(x), \mu_{\bar{N}}(x)) \mid x \leq y\} = \bar{M}(1) = \bar{N}(3) = 1$$

Esto implica que: $\nu(\bar{M} \leq \bar{N}) = 1$.

Solo faltaría demostrar que $\nu(\bar{M} \leq \bar{N}) < \eta$ para una fracción fija, η , en $(0,1]$.

Para comprobar que $\bar{M} < \bar{N}$ basta probar que $\exists \eta \in (0,1] : \nu(\bar{N} \leq \bar{M}) < \eta$

Obsérvese que
$$\begin{cases} \bar{N}(x) \leq \bar{M}(y) & \forall x \leq y \leq x_0 \\ \bar{N}(x) > \bar{M}(y) & \forall x_0 \leq x \leq y \end{cases}$$

Por lo que $\min(\mu_{\bar{N}}(x), \mu_{\bar{M}}(y)) = \begin{cases} \bar{N}(x) \leq \bar{M}(y) & \forall x \leq y \leq x_0 \\ \bar{N}(x) > \bar{M}(y) & \forall x_0 \leq x \leq y \end{cases}$ entonces

$$\nu(\bar{N} \leq \bar{M}) = \max\{\min(\mu_{\bar{N}}(x), \mu_{\bar{M}}(y)) \mid x \leq y\} = y_0 = \bar{M}(x_0) = \bar{N}(x_0), \text{ luego, si } y_0 \text{ es}$$

menor que el η prefijado se cumple que $\bar{M} < \bar{N}$ como se puede concluir de la figura 1.8.

1.3 Distribución de Posibilidad y Teoría de posibilidad

Una distribución de posibilidad Π es una función que aplica el universo X en el intervalo real $[0,1]$, como ocurre, por ejemplo, con la función de pertenencia de los conjuntos borrosos. Una distribución de posibilidad indica, para un elemento en el universo X , los posibles valores que le corresponden en el intervalo $[0,1]$. Estos posibles valores forman un conjunto borroso $\bar{A} : \Pi(x = a) = \mu_{\bar{A}}(a)$. En relación con las distribuciones de posibilidad, se definen dos medidas

llamadas Posibilidad (Pos) y Necesidad [26], las cuales juntas permiten definir el grado de certeza o confianza de una afirmación[27]. Esto es una manera más flexible de representar la incertidumbre que la que ofrece el cálculo de probabilidades.

Estas medidas se definen axiomáticamente a partir del concepto de medida borrosa [28].

Definición 1.21 (Medida borrosa)

Dado un conjunto Universal X y una familia no vacía de subconjuntos de X , que denotaremos \bar{C} , se define en $\{X, \bar{C}\}$ una medida borrosa g , a una aplicación que satisface las siguientes condiciones:

$$1. g(\emptyset)=0 \text{ y } g(X) = 1 \quad (1.63)$$

$$2. \text{ si } \bar{A} \subseteq \bar{B}, \text{ entonces } g(\bar{A}) \leq g(\bar{B}) \quad (1.64)$$

3. para una sucesión creciente $\bar{A}_1 \subseteq \bar{A}_2 \subseteq \dots \text{ en } \bar{C}$, si $\bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i \in \bar{C}$, entonces

$$\lim_{i \rightarrow \infty} g(\bar{A}_i) = g\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i\right) \quad (1.65)$$

4. para una sucesión decreciente $\bar{A}_1 \supseteq \bar{A}_2 \supseteq \dots \text{ en } \bar{C}$, si $\bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i \in \bar{C}$, entonces

$$\lim_{i \rightarrow \infty} g(\bar{A}_i) = g\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i\right) \quad (1.66)$$

Definición 1.22. (Medida de Posibilidad)

Sea Pos una medida borrosa, ella es una medida de posibilidad si cumple:

$$Pos\left(\bigcup_{k \in K} \bar{A}_k\right) = \sup_{k \in K} Pos(\bar{A}_k) \quad (1.67)$$

Para toda familia de conjuntos $\{\bar{A}_k \mid k \in K\}$ en X , donde K es una colección de índices arbitrario y si además,

$$\forall A \in P(X) \max(Pos(\bar{A}), Pos(\bar{A}^c)) = 1 \quad (1.68)$$

La teoría de la posibilidad ofrece ventajas sobre el pensamiento probabilístico clásico. Observemos que en la fórmula 1.68 que para dos conjuntos complementarios (el conjunto \bar{A} y

su complemento), uno de los dos es completamente posible, y este hecho no prohíbe que el otro también sea completamente posible. En la situación en que dos conjuntos complementarios sean completamente posibles, es posible hablar de una medida de la *ignorancia sobre el grado de incertidumbre*. Este último concepto no aparece en la teoría probabilística clásica.

La definición de medida de posibilidad da origen al nombre de *Regresión posibilística* en la mayoría de los modelos de *Regresión Borrosa*.

Definición 1.23. (Medida de Necesidad)

Sea Nec una medida borrosa, ella es una medida de necesidad si cumple:

$$Nec\left(\bigcap_{k \in K} \bar{A}_k\right) = \inf_{k \in K} Nec(\bar{A}_k) \quad (1.69)$$

$$\forall A \in P(X) \quad (\min(Nec(\bar{A}), Nec(\bar{A}^c)) = 0) \quad (1.70)$$

También se puede representar ignorancia cuando la medida de necesidad es 0. Observe que en cálculo de probabilidades si un evento tiene una probabilidad 0 implica que el contrario tendrá una probabilidad 1, o sea, el complemento ocurre sin ninguna duda (en cálculo de probabilidades el grado de confianza del evento y de su complemento deben sumar 1).

Las medidas de necesidad y posibilidad son más débiles porque no condicionan la probabilidad del evento complementario además de que la suma de las medidas de posibilidad o necesidad no tienen que sumar 1. Es por ello que se adecuan mejor a la modelación de incertidumbre subjetiva según las apreciaciones de un diseñador o usuario.

Definición 1.24. (Probabilidad Borrosa)

Sea A y B subconjuntos (crisp) de $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Tenemos una distribución de probabilidad borrosa discreta (finita) $\bar{P}(\{x_i\}) = \bar{a}_i, 0 < \bar{a}_i < 1, 1 \leq i \leq n$. Supóngase que

$$A = \{x_1, \dots, x_k\}, 1 \leq k \leq n \text{ entonces se define } \bar{P}(A)[\alpha] = \left\{ \sum_{i=1}^k a_i \mid S \right\} \quad (1.71)$$

para $0 \leq \alpha \leq 1$ donde S esta dado por el planteamiento “ $a_i \in \bar{a}_i[\alpha], 1 \leq i \leq n, \sum_{i=1}^n a_i = 1$ ” que no

es más que los α -cortes del número borroso $\bar{P}(A)$.

Propiedades:

1. Si $A \cap B = \phi$, entonces $\bar{P}(A) + \bar{P}(B) \geq \bar{P}(A \cup B)$
2. Si $A \subseteq B$ y $\bar{P}(A)[\alpha] = [pa_1(\alpha), pa_2(\alpha)]$ y $\bar{P}(B)[\alpha] = [pb_1(\alpha), pb_2(\alpha)]$,
entonces $pa_i(\alpha) \leq pb_i(\alpha)$ para $i = 1, 2$ $0 \leq \alpha \leq 1$
3. $0 \leq \bar{P}(A) \leq 1$ todo A con $\bar{P}(\phi) = 0, \bar{P}(X) = 1$
4. $\bar{P}(A) + \bar{P}(A') \geq 1$, donde A' es el complemento de A .
5. Cuando $A \cap B \neq \phi$, $\bar{P}(A \cup B) \leq \bar{P}(A) + \bar{P}(B) - \bar{P}(A \cap B)$

Las demostraciones se pueden ver en [25]

1.4 Calculando probabilidades borrosas

Cada vez que se quieran buscar los α -cortes de una probabilidad borrosa, se tiene que resolver un problema de optimización en el que se busca el máximo y el mínimo de una función $f(p_1, \dots, p_n)$ sujeto a restricciones lineales. La estructura de este problema es la siguiente.

$$\max / \min f(p_1, \dots, p_{i_k}) \quad (1.72)$$

Sujeto a:

$$a_i \leq p_i \leq b_i, 1 \leq i \leq n \quad (1.73)$$

$$Y \quad p_1 + \dots + p_n = 1 \quad (1.74)$$

El conjunto $\{p_{i_1}, \dots, p_{i_k}\}$ es un subconjunto de p_1, \dots, p_n . Los p_i pueden ser un intervalo $[a_i, b_i]$, $1 \leq i \leq n$ y su suma debe ser 1.

Definición 1.25. (Probabilidad condicional borrosa)

Sea $A = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, $B = \{x_l, \dots, x_m\}$ para $1 \leq l \leq k \leq m \leq n$ tal que A y B no son disjuntos. Se definirá ahora la probabilidad condicional borrosa de A dado B . Se denotará esta Probabilidad

Condicional como $\bar{P}(A | B)$. Ahora se presentara dos definiciones para la probabilidad condicional borrosa.

$$\text{Nuestra primera definici3n es: } \bar{P}(A | B)(\alpha) = \left\{ \frac{\sum_{i=l}^k a_i}{\sum_{i=l}^m a_i} \mid S \right\} \quad (1.75)$$

En esta definici3n el numerador del cociente es la suma de los a_i en la intersecci3n de A y B, mientras el denominador es la suma de los a_i en B.

$$\text{Nuestra segunda definici3n es } \bar{P}(A | B) = \left\{ \frac{\bar{P}(A \cap B)}{\bar{P}(B)} \right\} \quad (1.76)$$

Esta segunda definici3n parece muy natural, pero esta probabilidad condicional puede salirse del intervalo $[0,1]$ mientras que la primera definici3n siempre produce una probabilidad borrosa en $[0,1]$, es por eso que nos quedaremos con ella para el desarrollo de nuestro prop3sito.

Propiedades b3sicas

$$1- 0 \leq \bar{P}(A | B) \leq 1.$$

$$2- \bar{P}(B | B) = 1.$$

$$3- \bar{P}(A_1 \cup A_2 | B) \leq \bar{P}(A_1 | B) + \bar{P}(A_2 | B), \text{ si } A_1 \cap A_2 = \phi.$$

$$4- \bar{P}(A | B) = 1, \text{ si } B \subseteq A;$$

$$5- \bar{P}(A | B) = 0, \text{ si } B \cap A = \phi;$$

Las demostraciones se pueden ver en [25]

1.5. Regresi3n Probabilística

El cambiante mundo moderno est3 sustentado por un conjunto de ciencias empleadas por el hombre que le ha permitido entre otras cosas, controlar y perfeccionar los procesos de producci3n; la estadística es un ejemplo de ello. En los últimos años se han desarrollado diferentes herramientas que se ocupan de los modelos matemáticos en general. Las mismas han

sido automatizadas gracias al desarrollo de la informática, por lo que resultan de gran utilidad práctica para solucionar problemas presentes en la sociedad, pues se encargan de encontrar las relaciones subyacentes que hay entre los datos. Entre las principales herramientas estadísticas que persiguen este objetivo se encuentran la regresión, el agrupamiento de objetos y la clasificación.

La tecnología informática disponible hoy en día, casi inimaginable hace solo dos décadas, ha hecho posibles avances extraordinarios en el análisis de datos en el área de la medicina, la bioinformática y la producción entre otras áreas. Este impacto es más evidente en la relativa facilidad con la que los ordenadores pueden analizar enormes cantidades de datos complejos. Casi cualquier problema se puede analizar fácilmente hoy en día por un número ilimitado de programas estadísticos, incluso en ordenadores personales. Además, los efectos del progreso tecnológico han extendido aun más la capacidad de manipular datos, liberando a los investigadores de las restricciones del pasado y permitiéndoles así abordar investigaciones más sustantivas y ensayar sus modelos teóricos. Gran parte de esta creciente comprensión y pericia en el análisis de datos ha venido a través del estudio y desarrollo de la estadística y de la inferencia estadística.

Desde el punto de vista más general, el análisis de un proceso conduce en muchos casos a la concepción del mismo bajo el principio de la *caja negra*. Esto significa que dicho proceso se representa en forma de esquema como:



donde:

\vec{X} es el vector de variables de entrada (que incluye las variables controlables)

\vec{Y} es el vector de variables de salida.

Y el rectángulo o *caja negra* es el proceso cuya esencia interna se desconoce exactamente y se desea investigar. En estos casos la investigación se formula como el problema de encontrar la función que relaciona las variables de entrada y salida a partir de conjuntos de valores experimentales de esas variables.

El objetivo del análisis de regresión y de los paquetes de programas que la realizan, con mayor o menor grado de generalidad, es precisamente determinar la relación de una variable dependiente (respuesta, predicha o endógena) con un conjunto de variables independientes (predictoras, explicativas exógenas). Formalmente dado un conjunto de datos (x_i, y_i) , para $i = 1, \dots, n$, donde $x_i \in \mathfrak{R}^m$ e y_i es el valor correspondiente al vector x_i , y dada una función $f(x, A)$, se quiere encontrar el vector de parámetros A , tal que:

$$y_i = f(x_i, A) \text{ para } i = 1, \dots, n \quad (1.77)$$

En general no suele haber una solución exacta para la ecuación anterior debido a la variabilidad de los datos en el mundo real, a la infinidad de factores que se reflejan de cada dato y a la incertidumbre de muchas mediciones. Por este motivo debe buscarse una manera de relajar el cumplimiento estricto de la igualdad.

La regresión probabilística, la más conocida y utilizada de entre las técnicas de regresión, flexibiliza la relación (1.77) definiendo una función de pérdida, L , que mide como los errores de predicción entre y_i y $f(x_i, A)$ debieran penalizarse, con la idea de encontrar una solución lo más aproximada posible al cumplimiento de la igualdad.

Una elección habitual de función de pérdida es la norma L_p :

$$L_p(y - f(x, A), x) = |y - f(x, A)|^p \quad (1.78)$$

Para algún número positivo p . La función de pérdida más utilizada es el ajuste de los mínimos cuadrados donde $p=2$, que presenta ventajas analíticas, ya que L_1 tiene el inconveniente de presentar discontinuidades en sus derivadas.

Lo más frecuente es que f sea una función lineal pero no siempre esta función es la más adecuada y por ello son importantes también los casos en que, por ejemplo, las funciones f son cuadráticas, más generalmente polinomios, o incluso, expresiones más complejas en que aparezcan funciones trascendentes. Sin embargo por lo general los modelos no lineales se pueden linealizar mediante transformaciones de las variables. Cuando es posible dicha linealización, se dice que se trata de un modelo intrínsecamente lineal.

El modelo clásico de regresión lineal basado en la teoría de las probabilidades, asume que se dispone de n observaciones independientes para las variables y, x_1, x_2, \dots, x_m . Para cada observación se asume el modelo lineal siguiente:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \dots + \beta_m x_{im} + \varepsilon_i \quad (1.79)$$

Donde los valores $\beta_i, i = \overline{1, m}$ son parámetros desconocidos, ε_i es el término de perturbación estocástica de la i -ésima observación.

El modelo de regresión, conocido también como Modelo de Gauss, o modelo clásico, estándar o lineal general, basado en el Método de Mínimos Cuadrados Ordinarios, se desarrolla bajo determinados supuestos que deben ser probados [29].

En el caso que m sea 1, hablamos de regresión lineal simple, y si m es mayor que 1, hablamos de regresión lineal múltiple.

El modelo (1.79) generalmente se expresa en forma matricial como:

$$\vec{y} = \vec{X}\vec{\beta} + \vec{\varepsilon} \quad (1.80)$$

Donde \vec{y} es el vector de dimensión $(n \cdot 1)$ con las observaciones de la variable dependiente, \vec{X} es la matriz $n \cdot (m+1)$ con las observaciones de las m variables independientes más una variable de unos, y $\vec{\beta}$ es un vector $(m+1)$ con los parámetros desconocidos que hay que estimar (ver figura 1.9), $\vec{\varepsilon}$ es el vector de errores aleatorios independientes de dimensión $(n \cdot 1)$ con valor esperado nulo ($E(\vec{\varepsilon}) = \vec{0}$) y varianza constante ($V(\vec{\varepsilon}) = I\sigma^2$).

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & x_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{1m} \\ \mathbf{1} & x_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{1} & x_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$

Figura 1.9 Forma matricial de la Regresión Probabilística Lineal.

Es importante destacar que el análisis de regresión lineal múltiple parte de las hipótesis de independencia de las observaciones y_i , normalidad de los residuos o errores y homogeneidad de sus varianzas.

El criterio de optimalidad para encontrar una solución a este sistema descrito anteriormente es minimizar la suma de los cuadrados de los errores $((\bar{y} - \bar{x}\bar{\beta})'(\bar{y} - \bar{x}\bar{\beta}))$ aplicando el método de estimación de mínimos cuadrados (p=2) que es el más utilizado. Esto conduce a las ecuaciones normales $(\bar{x}'\bar{x})\beta = \bar{x}'\bar{y}$ cuya solución \bar{b} que estima a $\bar{\beta}$ esta dada por $\bar{b} = (\bar{x}'\bar{x})^{-1}\bar{x}'\bar{y}$ en el caso de que $(\bar{x}'\bar{x})$ sea inversible.

Este vector solución tiene varias propiedades las cuales se pueden ver en [30].

Para efectos de estimación, se puede utilizar el método de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) como ya se ha mencionado anteriormente o el método de máxima verosimilitud, que según Gujarati, [31], estos dos métodos arrojan idénticos estimadores de los coeficientes de regresión. Los estimadores de MCO son los mejores estimadores lineales insesgados, propiedad que es extensiva a todo el vector \bar{b} estimado; es decir cada uno de sus elementos es una función lineal de y . $E(\bar{b}) = \beta$ lo cual implica que el valor esperado de cada elemento de \bar{b} es igual al correspondiente elemento del β verdadero, y en la clase de todos los estimadores lineales insesgados de β , el estimador \bar{b} de mínimos cuadrados ordinarios es el de mínima varianza. Este último resultado se conoce como Teorema de Gauss-Markov [32]. Esta es una de las propiedades teóricas que ha hecho que el método de los mínimos cuadrados sea tan utilizado. Sin embargo este resultado no garantiza que la varianza de los estimadores sea necesariamente pequeña, y se podría dar el caso de estimadores sesgados que tuvieran menor varianza que los calculados por mínimos cuadrados.

Además de acompañar la función con su fórmula, podría resultar útil disponer de alguna indicación precisa del grado en el que la función se ajusta a la nube de puntos. De hecho la mejor función posible no tiene por qué ser buena. ¿Cómo podemos cuantificar ese mejor o peor ajuste de la función? Hay muchas formas de resumir el grado en el que una función se ajusta a una nube de puntos. Se podría utilizar la media de los residuos, o la media de los residuos en valor absoluto, o las medianas de alguna de esas medidas, o alguna función ponderada de esas medidas, entre muchas otras. Sin embargo la regresión probabilística tiene su principal medida

de bondad de ajuste en el *Coefficiente de Determinación* R^2 : el cuadrado del coeficiente de correlación múltiple. Se trata de una medida estandarizada que toma valores entre 0 y 1 (0 cuando las variables son independientes y 1 cuando entre ellas existe relación perfecta). Este coeficiente posee una interpretación muy intuitiva: representa el grado de ganancia que podemos obtener al predecir una variable basándonos en el conocimiento que tenemos de otra u otras variables, en otras palabras se interpreta como la relación de la varianza explicada por la regresión en relación a la varianza total de la variable de salida. Por ejemplo, si $R^2 = 0.90$ puede afirmarse que el 90% de la varianza total es explicada por la suma de cuadrados de la regresión, por lo tanto existe una fuerte relación entre X e Y.

El valor del R^2 aumenta en la medida en que se incrementan las variables en el modelo. Por tanto, no es correcto comparar el valor del R^2 de dos regresiones con un número de variables explicativas diferentes. Para resolver este problema se formuló un R^2_p ajustado donde p representa la cantidad de variable independientes presentes en el modelo. En este caso es válido comparar los valores de los R^2_p cuando la cantidad de variables p es diferente en cada modelo. Puede ocurrir que el valor del R^2_p disminuya si p es demasiado grande.

La regresión probabilística requiere un número mínimo de observaciones y a medida que aumentan los grados de libertad, también se hace más preciso el intervalo de confianza.

Un tipo de variable instrumental que ha sido muy útil dentro de los modelos probabilísticos lo constituyen las llamadas variables independientes binarias. Estas sólo pueden tomar dos valores y pueden representar la presencia o la ausencia de una cualidad.

Generalmente se desean obtener modelos que se ajuste a los datos experimentales con un número mínimo de variables por lo cual se han desarrollado diversos métodos que tienden a lograr este objetivo.

Método de los mejores subconjuntos

Algoritmos que buscan el mejor subconjunto de variables para formar parte de la ecuación, de acuerdo con un determinado criterio. Este criterio pudiera ser el del R^2 o mejor aún el del o mejor aún el del R^2_p ajustado.

Calculan una pequeña fracción de todas las posibles regresiones. Es un método de cálculo intensivo que ha demostrado arrojar muy buenos resultados. Selección hacia delante (FORWARD STEPWISE)

- Parte de una ecuación sin ninguna variable
- Mientras existan variables significativas:
 1. Calcular el estadígrafo t-student para todas las variables candidatas.
 2. Se selecciona el más significativo.
 3. Si su significación es menor que α , entonces entra a formar parte de la ecuación.
 4. Se calcula el estadígrafo t para las variables que ya están en el modelo.
 5. Si alguna de deja de ser significativa, se elimina.

El algoritmo termina cuando no se pueden añadir más variables.

Eliminación hacia atrás (BACKWARD STEPWISE)

- Parte de una ecuación con todas las variables
- Mientras existan variables no significativas:
 1. Calcular el estadígrafo t-student para todas las variables candidatas.
 2. Se selecciona el menos significativo.
 3. Si su significación es mayor que un cierto valor prefijado, entonces la variable se elimina de la ecuación.
 4. Se calcula el estadígrafo t para las variables que no están en el modelo
 5. Si alguna es significativa, se introduce.
- El algoritmo termina cuando no pueden ser eliminadas más variables.

1.5.1. Consideraciones sobre la Interpretación de los Resultados del Análisis de Regresión

Después de realizados los cálculos de las estimaciones y dójimas sobre los parámetros del modelo de regresión, estos deben interpretarse. Son muchos los aspectos a tener en cuenta para que estas interpretaciones no se alejen de la realidad estudiada.

En el caso de los valores de las estimaciones de los coeficientes de regresión del modelo, debe tenerse en cuenta el hecho de que el estimador β_j puede descomponerse en dos partes, una en función de la covarianza de la variable x_j con la variable respuesta y y la otra en función de la suma de las covarianzas de las variables explicativas.

Si todas las variables explicativas no están correlacionadas, la segunda parte del estimador se anula y queda sólo en función de la covarianza de la variable explicativa x_i con la variable respuesta. En estos casos se pueden hacer interpretaciones basadas en la conexión entre el valor del coeficiente estimado y la importancia de la variable considerada, siempre y cuando el modelo sea adecuado para explicar el comportamiento de la variable respuesta.

Para una mejor comprensión es recomendable hacer la estandarización de las variables que intervienen en la regresión, esto permite eliminar la influencia de los sistemas de medidas utilizados en las variables explicativas a la hora de interpretar los coeficientes de regresión.

En cuanto a la dójima sobre los coeficientes β_i , hasta en el caso de que el modelo cumpla todos los supuestos, sus resultados son de difícil interpretación.

Es además muy importante, una vez obtenido el modelo, hacer el análisis de los residuos $\left(E_i = Y_i - \hat{Y}_i \right)$, no solo porque permite comprobar la validez de los supuestos hechos en el análisis de regresión, sino porque en caso de fallar alguna de ellas da indicaciones para lograr su cumplimiento, ya sea combinando la forma del modelo, transformando variables o rechazando observaciones.

El análisis de los residuos presenta varias alternativas, examinar su relación con las variables, la relación de los residuos en conjunto para rechazar observaciones o probar si su distribución es normal, además graficar los residuos contra los valores estimados para verificar la homogeneidad de la varianza experimental y la adecuación del modelo y también graficar los residuos según el

orden de ejecución de los experimentos para detectar si es necesario incluir el tiempo como variable independiente [29]

El objetivo principal del análisis residual es detectar observaciones extremas (outliers) que tienen residuos muy grandes en comparación con otras y deben ser tratadas especialmente ya que las pruebas numéricas para detectar la no-adequación del modelo y la varianza no constante a veces reaccionan ante dichas observaciones, por lo que las mismas deben ser eliminadas. En la figura 1.10 Se puede apreciar el efecto de un punto extremo sobre la estimación del modelo de regresión. En (a) no existen puntos extremos y la estimación se ajusta bien a los datos. Sin embargo en (b) la curva de ajuste se distancia de la tendencia de la mayoría de los datos por la existencia de un punto extremo.

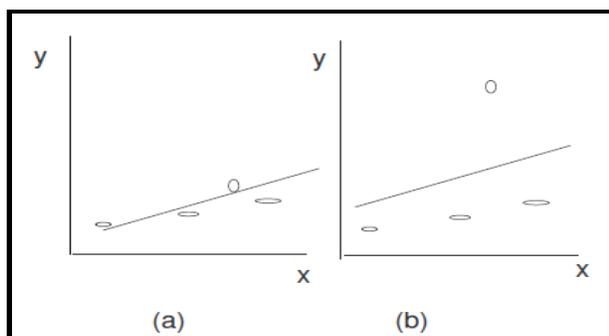


Figura 1.10 Ejemplo de Regresión no robusta.

Sin lugar a dudas la regresión probabilística ha tenido un éxito notable en múltiples aplicaciones dentro de sistemas acotados y con estricto cumplimiento de sus supuestos. No ocurre lo mismo cuando los sistemas son más complejos. Al referirnos a sistemas más complejos nos estamos refiriendo a sistemas que presentan diversos tipos de incertidumbre y no se consideran los supuestos básicos.

Consideraciones finales del Capítulo

En este capítulo se han presentado, de manera resumida, los conceptos y definiciones fundamentales de la teoría de conjuntos borrosos y regresión probabilística. En cualquier caso no se ha pretendido ser exhaustivos ya que nuestro interés se centra únicamente en exponer las herramientas matemáticas para llevar a cabo el desarrollo de los próximos capítulos. Estas fundamentaciones teóricas y recomendaciones prácticas, pueden tener aplicaciones en muchos otros campos, y por tanto, un alcance mucho más allá del presente trabajo.

2. REGRESIÓN BORROSA

El uso de las técnicas de regresión sobre las observaciones experimentales ha permitido el estudio de numerosos fenómenos en diversos campos de la ciencia como la Agricultura, Química, Medicina, Medio Ambiente, Psicología, Biología, Economía lo que ha supuesto un gran avance, no solo por los desarrollos matemáticos alcanzados sino también por su aplicación en situaciones reales. Dichas técnicas requieren de un número suficiente de observaciones “precisas” y “fiabes”. Sin embargo no siempre es posible obtener el conjunto de observaciones requerido, o éstas contienen algún tipo de imperfección a consecuencia de la imprecisión o vaguedad de los datos. En cualquier caso, los modelos obtenidos a partir de datos reales (suficientes o no, con imperfecciones o no) deberían proveer de capacidades predictivas y descriptivas [33]. En los modelos en donde los datos sean insuficientes o imperfectos, originados por la imprecisión o vaguedad, se ha demostrado que es útil el uso de un tratamiento difuso o borroso [26, 34-39].

El análisis de regresión borrosa ha sido estudiado y aplicado en diferentes áreas tal como la modelación de datos económicos o financieros [40], la ingeniería de software [41], el reconocimiento de un patrón de estimación humana [42].

2.1. Justificación de la Regresión Borrosa

En este epígrafe se justifica la necesidad de disponer de la técnica de regresión borrosa.

La regresión borrosa permite el manejo de cantidades afectadas por imprecisión e incertidumbre que no son manejables usando la regresión probabilística. Existen muchas magnitudes cuantitativas que pueden representarse adecuadamente mediante números borrosos: mediciones con márgenes de error, valor de las monedas frente a otras monedas referenciales en los mercados financieros, precio de las materias primas (oro, plata, cobre, etc.) y de los combustibles fósiles (petróleo, gas, carbón, etc.).

Este tipo de datos fundamentalmente cuantificables, pero con una imprecisión e incertidumbres provenientes de diversos orígenes, justifica la creación de un campo analítico propio para la regresión borrosa.

Los “números intervalares”, como se ha visto son una versión simplificada de los números borrosos, también han sido considerados como números de interés para poder explicar su

comportamiento [43, 44]. Los números intervalares se manejan como un caso particular de la regresión borrosa.

La presencia de la incertidumbre en la regresión probabilística queda plasmada en los intervalos de confianza, generalmente con un nivel del 95%, lo que es atribuido a factores aleatorios. Esta es la única forma de incertidumbre que maneja la teoría de probabilidades.

La aleatoriedad y la imprecisión se consideran componentes de la vaguedad. Todas estas son formas de incertidumbre. Otras formas de incertidumbre son la ambigüedad y la incongruencia. Todas las formas de incertidumbre se pueden incorporar dentro de los modelos de regresión borrosa de manera natural.

La información que se dispone a priori de los problemas, generalmente se traduce en restricciones a los modelos, éstas ayudan a obtener estimaciones más ajustadas a la realidad. Estas restricciones también se pueden incorporar en algunos modelos de regresión probabilística, pero con consecuencias para los supuestos de la fundamentación teórica de tales modelos. Esto no ocurre en la regresión borrosa, donde la presencia de restricciones es consustancial a su formulación por no estar limitada su formulación a tantos supuestos como los de la regresión probabilística.

En el análisis de regresión borrosa, las desviaciones entre los valores de pertenencia observados y los valores de pertenencia estimados se asume que dependen de la incertidumbre de la estructura del modelo. En cambio en el análisis de regresión lineal clásica, las desviaciones se suponen causadas por errores, de origen aleatorio, en las observaciones.

Como ha sido indicado en el capítulo anterior, la relación (1.77) no se cumple, por lo general, para los números reales. Sin embargo considerando números borrosos, siempre es posible encontrar coeficientes, que con un cierto nivel de pertenencia, cumplan la relación (ver figura 2.1).

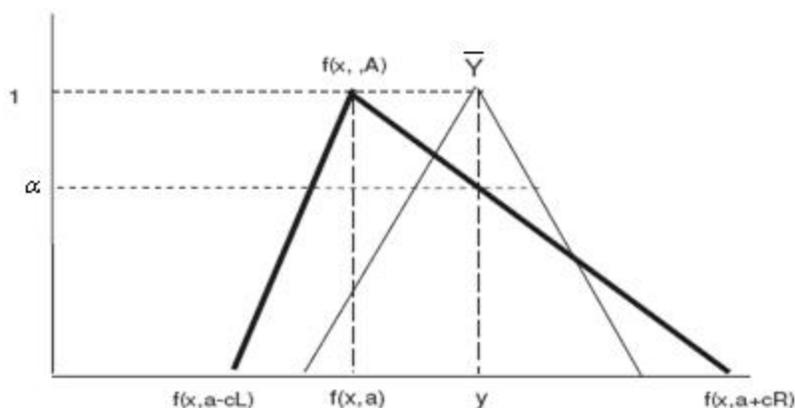


Figura 2.1: Estimación posibilística de Regresión Borrosa.

En la figura 2.1 se aprecia que, en un sentido más tradicional, la igualdad entre el dato original y el valor estimado, se cumple para su valor central, con un nivel de pertenencia α . Por otra parte, $Y^0 \subseteq f(x, A)^0$, con lo que cualquier valor que está incluido en el número borroso \bar{Y} , también está incluido en el número borroso estimado. Esta situación se denominará estimación posibilística, habida cuenta de la medida de posibilidad que se ha presentado dentro de la teoría de conjuntos borrosos.

La medida de posibilidad representa un sentido amplio de todas las alternativas posibles, como medida antagónica a la medida de necesidad que representa lo común a todas las alternativas posibles. Para datos dados por intervalos, diversos autores han desarrollado también un enfoque de regresión basado en la medida de necesidad [45].

Cuando se dispone de pocas observaciones para hacer una regresión probabilística se añade a este problema la dificultad de poder comprobar la normalidad de los errores. En esta situación una alternativa de modelación ventajosa es un modelo borroso que pueda incorporar un nivel de confianza posibilístico [46].

Los datos precisos (que son un caso particular de dato borroso) pueden ser modelados mediante la regresión borrosa. En estos casos puede considerarse las extensiones de los datos estimados como la alternativa a los intervalos de confianza de la regresión probabilística.

2.2. Regresión Borrosa

En la regresión borrosa se asume que la relación entre la variable explicada y las explicativas es lineal, pero en este caso si se dispone de una muestra $\{(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_j, Y_j), \dots, (X_n, Y_n)\}$, las posibles divergencias que pudieran surgir entre la j -ésima observación de la variable dependiente Y_j y su estimación \hat{Y}_j , se expresa mediante una relación borrosa del tipo:

$$\bar{Y} = \bar{A}_0 + \bar{A}_1 x_1 + \bar{A}_2 x_2 + \dots + \bar{A}_m x_m \quad (2.1)$$

En (2.1), los coeficientes $\bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_m$, son números borrosos, por lo que el i -ésimo queda caracterizado por

$$\bar{A}_i = \{x, \mu_{\bar{A}_i}(x)\} = \{\bar{A}_{i\alpha} = [A_{1i}(\alpha), A_{2i}(\alpha)] \mid 0 \leq \alpha \leq 1\} \quad (2.2)$$

Es decir, las divergencias que se producen respecto a la teórica relación lineal no tiene naturaleza aleatoria, sino borrosa. Así mismo se puede comprobar que el término de error no queda introducido como sumando en el hiperplano, sino que es incorporado en los coeficientes $\bar{A}_i, i = 0, 1, 2, \dots, m$, al asumirse que son números borrosos.

De forma análoga a la técnica de mínimos cuadrados, una vez que se disponga de la muestra, nuestro objetivo debe ser ajustar los coeficientes \bar{A}_i .

Esta forma de modelación ofrece ciertas ventajas sobre la tradicional técnica de regresión:

- Las estimaciones que se obtienen después de ajustar los coeficientes borrosos, no serán variables aleatorias de difícil tratamiento numérico, sino que son números borrosos cuyo tratamiento es más sencillo.
- Si el fenómeno de estudio es de carácter económico o social, las observaciones que del mismo se obtienen son consecuencia de la interacción entre las creencias, expectativas, etc., entre los agentes que participan en dicho fenómeno y por tanto no es del todo adecuado modelar dicho fenómeno utilizando la teoría probabilística.

En muchas circunstancias las observaciones de la variable dependiente, de la variable independiente o de ambas no vienen dadas por un número cierto, sino por un intervalo. Por ejemplo, el precio que se negocia en los mercados financieros durante una sesión para la venta de barriles de petróleo o de un determinado activo difícilmente es único, sino que este suele

negociarse dentro de una banda delimitada por un precio máximo y por un precio mínimo. Para utilizar las técnicas de mínimos cuadrados o la más sofisticada de máximo verosimilitud deben cuantificarse las observaciones de la variable explicada (y explicativa) a través de un único número, utilizándose por ejemplo el precio medio negociado, el más asequible o el último precio en el modelo que se vaya a implementar. Es evidente que este proceder implica una importante pérdida de información. Para efectuar los métodos de regresión borrosa no hace falta reducir el valor de las variables observadas a un número real, cuando son observados como intervalos, así podremos ajustar la relación funcional que busquemos trabajando con todos los valores observados siendo posible entonces utilizar toda la información disponible.

2.3. Regresión borrosa posibilística

En este epígrafe se presentara la regresión borrosa posibilística que dio origen de la regresión borrosa. Nos ajustaremos a la formulación de Hideo Tanaka [47, 48].

En la relación (1.77) define el problema de regresión general. A partir de dicha formulación se puede introducir un modelo de regresión borrosa sustituyendo el número y_i por el número borroso:

$$\bar{Y}_i = f(x_i, \bar{A}) \text{ para } i = 1, \dots, n \quad (2.3)$$

Se supone que se tiene un conjunto inicial de n observaciones, donde los valores de entrada son precisos y están representados en la matriz de valores reales X_{ij} (con $i=1..n$ y $j=1..m$) y la variable de salida \bar{Y}_i es imprecisa siendo sus valores sujetos a funciones de pertenencia triangulares con parámetros (y_i, l_i, r_i) .

El objetivo principal de la regresión borrosa es encontrar el o los coeficientes representados por \bar{A} que tengan la menor incertidumbre posible.

Para obtener una solución, se considera que \bar{Y}_i tiene una función de pertenencia de tipo LR, y que los coeficientes $\bar{A}_j = (a_j, cl_j, cr_j)$ también tienen una función de pertenencia $L_j R_j$.

En términos más generales, la relación general de regresión (1.77) debe cumplirse en términos borrosos, no sólo para el número borroso \bar{Y}_i sino para sus α -cortes $\bar{Y}_{i\alpha}$.

En este estudio la función objetivo f será una función lineal definida por:

$$f(x, \bar{A}) = \bar{A}_0 + \sum_{j=1}^m \bar{A}_j x_j. \quad (2.4)$$

\bar{Y}_i tendrá una función de pertenencia no simétrica $(y_i, l_i, r_i)_{LR}$. Las restricciones posibilísticas [Bar90] en el caso general son:

$$\sum_{j=0}^m a_j X_{ij} - L^{-1}(\alpha) \sum_{j=0}^m cl_j X_{ij} \leq y_i - L^{-1}(\alpha) l_i \quad \text{para } i = 1, \dots, n \quad (2.5)$$

$$\sum_{j=0}^m a_j X_{ij} + R^{-1}(\alpha) \sum_{j=0}^m cr_j X_{ij} \leq y_i + R^{-1}(\alpha) r_i \quad \text{para } i = 1, \dots, n \quad (2.6)$$

$$cl_j \geq 0; cr_j \geq 0 \quad \text{para } j = 0, \dots, m \quad (2.7)$$

Si se consideran funciones de pertenencia triangulares (no necesariamente simétricas), por ejemplo, funciones LR, las restricciones posibilísticas (2.5)-(2.7) se reducen a:

$$\sum_{j=0}^m a_j X_{ij} - (1-\alpha) \sum_{j=0}^m cl_j X_{ij} \leq y_i - (1-\alpha) l_i \quad \text{para } i = 1, \dots, n \quad (2.8)$$

$$\sum_{j=0}^m a_j X_{ij} + (1-\alpha) \sum_{j=0}^m cr_j X_{ij} \leq y_i + (1-\alpha) r_i \quad \text{para } i = 1, \dots, n \quad (2.9)$$

Esta última forma es la más habitual de plantear las restricciones posibilísticas de la regresión borrosa.

2.4. Otros modelos basados en teoría de la posibilidad

El planteamiento de la regresión borrosa de Tanaka está orientado a minimizar la incertidumbre, no se preocupa por el comportamiento de la estimación de los valores centrales. Sin embargo en la literatura se puede encontrar un modelo que incorpora una estimación específica de la tendencia central desarrollado por Savic y Pedrycs [49, 50]. Este modelo consta de dos fases:

- En la primera fase se realiza un ajuste de mínimos cuadrados entre los valores x_i y los valores y_i los cuales son los valores centrales de Y_i con los que se logran los valores modales a_i^* que son utilizados en la segunda fase.
- En la segunda fase se utiliza el mismo criterio de vaguedad de la regresión borrosa

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^m (cl_j + cr_j) \quad (2.10)$$

Sujeto a las condiciones posibilísticas:

$$\sum_{j=0}^m a_j^* X_{ij} - (1-h) \sum_{j=0}^m cl_j X_{ij} \leq y_i - (1-h)l_i \quad \text{para } i = 1, \dots, n \quad (2.11)$$

$$\sum_{j=0}^m a_j^* X_{ij} + (1-h) \sum_{j=0}^m cr_j X_{ij} \leq y_i + (1-h)r_i \quad \text{para } i = 1, \dots, n \quad (2.12)$$

El modelo anterior tiene la virtud de disponer de una estimación que tiene una solución estándar para la tendencia central, pero conceptualmente no tiene la simplicidad de la solución de Tanaka.

Por otra parte en diversos trabajos se han tomado en consideración los índices de posibilidad y necesidad de Dubois y Prade al comparar dos números borrosos [51].

Sakawa y Yano [52] propusieron cuatro modelos de regresión posibilística

1. Considerando la minimización de la siguiente función objetivo $\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^m (cl_j + cr_j) |x_{ij}|$, se definen las siguientes restricciones con el índice de posibilidad

$$Pos(y_i = ax_i) \geq h \quad \text{para } i = 1, \dots, n \quad (2.13)$$

2. Considerando la minimización de la misma función objetivo se definen las restricciones con el índice de necesidad

$$Nec(y_i \subset ax_i) \geq h \quad \text{para } i = 1, \dots, n \quad (2.14)$$

3. Considerando la maximización de la función objetivo $\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^m (cl_j + cr_j) |x_{ij}|$ se definen las restricciones:

$$Nec(y_i \supset ax_i) \geq h \quad \text{para } i = 1, \dots, n \quad (2.15)$$

4. Considerando la minimización de la misma función objetivo bajo los conjuntos de restricciones:

$$-y_i + \sum_{j=0}^m a_j X_{ij} \leq L^{-1}(h) \sum_{j=0}^m cl_j |x_{ij}| \text{ para } i = 1, \dots, n \quad (2.16)$$

$$y_i - \sum_{j=0}^m a_j X_{ij} \leq L^{-1}(h) \sum_{j=0}^m cl_j |x_{ij}| \text{ para } i = 1, \dots, n \quad (2.17)$$

Los autores plantean un modelo multi-objetivo para abordar estos cuatro problemas, puesto que junto a la función objetivo indicada, plantean maximizar el valor de h . Sin embargo este modelo ha sido muy criticado [53] por ser muy sensible a los puntos extremos y por producir en ciertas condiciones todos los estimadores como números precisos [54].

2.5. Críticas a la regresión Posibilística

Hemos visto los distintos modelos de regresión posibilística que se pueden encontrar en la literatura. Aunque se trata de trabajos muy significativos y de gran valor en el mundo de la regresión borrosa, la regresión posibilística no está exenta de críticas, algunas de las principales son las siguientes:

- El efecto de los puntos extremos (outliers) [55].
- Muchos de los coeficientes estimados \bar{A}_j resultan ser números precisos [57].
- La regresión Borrosa Posibilística no tiene una propuesta para interpretar el intervalo estimado por la regresión [58].
- Cuantos más datos se disponen sobre las variables, mayor será la extensión de los coeficientes estimados, es decir, mayor será la incertidumbre de la estimación.
- Varios autores han señalado que la regresión lineal borrosa tiende a ser multicolineal cuando la cantidad de variables independientes aumenta [46].

Es por ello que se recomienda lo siguiente:

Referente a la primera crítica se recomienda hacer un análisis de los puntos extremos al momento de hacer la estimación para tener un diagnóstico adecuado. En el grafico (a) de la figura 2.2 se puede observar una estimación sin puntos extremos; en cambio en el grafico (b) se aprecia el efecto considerable que tiene en la ampliación del intervalo de estimación la aparición de un punto extremo.

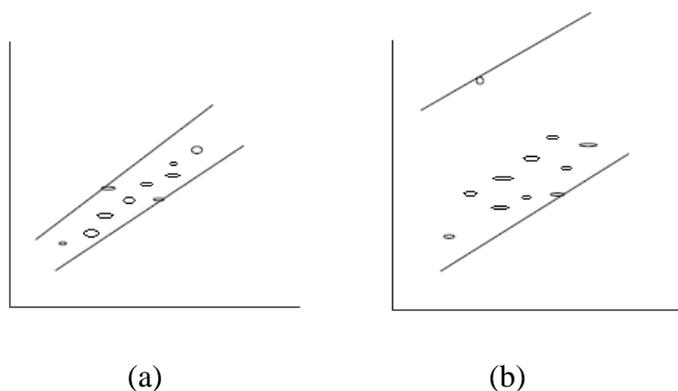


Figura 2.2 Efecto de un punto extremo en una estimación posibilística

En [55] se propone un método basado en intervalos para afrontar el problema causado por los puntos extremos, en el caso de que la variable y_i sea precisa. Sin embargo, esta propuesta no ha tenido mayor impacto en el desarrollo de alternativas de estimación.

Otro enfoque para afrontar el problema de los puntos extremos fue desarrollado por Ozelkan y Duckstein [56]. Este nuevo modelo incorpora una flexibilidad en los criterios posibilístico de tal manera que la diferencia entre los extremos (estimados y observados) debe ser menor que cierta cantidad, denominada variable de relajación.

En cuanto a la tercera crítica para ayudar a la interpretación del intervalo estimado de la regresión borrosa Wang y Tsaur [58] construyen un índice de confianza de la estimación, en un sentido análogo al del coeficiente de determinación R^2 en la estadística probabilística, concluyendo que en la medida que este índice es más alto, mejor es la representación de \hat{y}_i para dar forma a y_i . En este caso el valor central de la estimación tiene más peso para representar el valor central de los datos de entrada, pero el problema de interpretación de la función de pertenencia estimada para cada observación queda pendiente.

2.6. Índices de Bondad y Ajuste

En este epígrafe nos centraremos en otro aspecto fundamental dentro del campo de la regresión borrosa: el estudio de la bondad del ajuste obtenido. Para ello, vamos analizar diferentes índices de bondad que se pueden utilizar para determinar la calidad de la estimación obtenida a través del proceso de regresión.

2.6.1 Revisión de los índices más usados

No son muchos los estudios de regresión borrosa que incorporan un estudio de bondad y ajuste de los métodos propuestos. Incluso un extenso estudio comparativo [35], no utiliza ningún índice de evaluación.

Probablemente, la aportación más relevante es la medida de Kim y Bishu [59], empleada también por Kao y Chyu [60] y Kao y Lin [61]. Esta medida tiene en cuenta la divergencia entre el valor observado y el valor estimado:

$$D_i = \int_{\text{Sop } \bar{Y}_i \cup \text{Sop } \hat{Y}_i} |\mu_{\bar{Y}_i}(x) - \mu_{\hat{Y}_i}(x)| dx \quad (2.18)$$

También se considera una medida de divergencia relativa para cada una de las observaciones estimadas:

$$E_i = \frac{D_i}{\int_{\text{Sop } \bar{Y}} \mu_{\bar{Y}_i}(x) dx} \quad (2.19)$$

En [62] se tiene como objetivo de la investigación construir índices de bondad y ajuste. Estos índices son aplicados en [63]. En esta propuesta se define un coeficiente de correlación híbrido como¹:

$$(HR)^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (2.20)$$

Este indicador es idéntico al coeficiente de determinación de la regresión probabilística (R^2), con la diferencia que aquí se construye con la aritmética borrosa ponderada. Sin embargo el índice puede tomar valores mayores que 1 [63, 64] lo que lo hace menos atractivo que otros índices que fluctúan entre 0 y 1.

También Chang define las siguientes medidas usando aritmética borrosa ponderada

¹ A partir de ahora se consideraran \hat{y} los datos estimados y \bar{y} los datos medios de todos los parámetros considerados.

Definición 2.1 (Media híbrida).

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} \quad (2.21)$$

Definición 2.2 (Desviación estándar híbrida).

$$S_Y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} \quad (2.22)$$

Definición 2.3 (Error estándar de la estimación híbrido).

$$HS_e = \sqrt{\frac{1}{n-m-1} \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - Y_i)^2} \quad (2.23)$$

Definición 2.4 (coeficiente de Determinación triangular).

$$R^2 = \frac{(\hat{y} - \bar{y})'(\hat{y} - \bar{y}) + (\hat{cl} - \bar{cl})'(\hat{cl} - \bar{cl}) + (\hat{cr} - \bar{cr})'(\hat{cr} - \bar{cr})}{(y - \bar{y})'(y - \bar{y}) + (cl - \bar{cl})'(cl - \bar{cl}) + (cr - \bar{cr})'(cr - \bar{cr})} \quad (2.24)$$

donde \bar{y} , \bar{cl} , \bar{cr} son los promedios de y , cl y cr respectivamente.

El autor utiliza esta definición de R^2 para un proceso iterativo de ajuste polinomial, de manera que cuando R^2 no aumenta significativamente, se termina el proceso de incorporar términos polinomiales.

En [65] se pueden encontrar tres medidas de bondad y ajuste:

1. El porcentaje promedio de intervalos contenidos en los intervalos estimados
2. El porcentaje promedio de los intervalos estimados contenidos en los intervalos observados.
3. Una medida de similitud definida gráficamente como la proporción entre la intersección de la función de pertenencia del dato estimado y del dato observado y la unión de dichos números.

En [28] se pueden encontrar seis medidas de bondad y ajuste normalizadas (varían entre 0 y 1) que controlan diversos aspectos de la similitud entre dos números borrosos y que evalúan la calidad de una estimación de regresión borrosa. Además se realiza una calificación para saber hasta qué punto cumplen con su objetivo:

- SIM_1 pondera las diferencias entre las distribuciones de posibilidad de Y_i e \hat{Y}_i incluyendo la totalidad de las funciones de pertenencia.

- SIM_2 mide las diferencias en el soporte, tanto del punto central como sus dos extensiones, entre los valores de salida y sus respectivas estimaciones.
- SIM_3 mide las diferencias tanto de las extensiones como de la tendencia central.
- SIM_4 mide la diferencia máxima de las extensiones de los datos de entrada con sus respectivas estimaciones.
- SIM_5 mide la proximidad de las funciones de pertenencia con un solo punto, el supremo de la intersección.
- $R^2_{borroso}$ mide las diferencias cuadráticas del valor central observado con el valor central estimado.

A continuación se explicarán sólo tres de estos índices: el SIM_1 , SIM_3 y el $R^2_{borroso}$.

Medida de ajuste de la tendencia central

Para medir la calidad del ajuste de la tendencia central, se conoce de la regresión probabilística el coeficiente de determinación, llamado también R-cuadrado, que varía entre 0 y 1.

Esta medida parte del concepto de que la varianza total de las observaciones de la variable dependiente se puede descomponer en la suma de la varianza explicada más la no explicada, interpretándose el coeficiente de determinación como la proporción de la varianza total que es explicada por la regresión. Formalmente se tiene que:

$$R^2 = \frac{\text{Varianza explicada}}{\text{Varianza total}} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (2.25)$$

En el caso borroso se propone un indicador R^2 de tendencia central, cuya principal característica es que, a medida que las diferencias cuadráticas entre el valor observado y el valor central estimado tiende a cero, el indicador tenderá a uno:

$$R^2_{borroso} = \max\left(0, 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}\right) \quad (2.26)$$

donde \bar{y} es el promedio de las observaciones y_i .

Este indicador toma valores entre 0 y 1. Como el denominador que aparece en la expresión es el mismo que el denominador del coeficiente de determinación probabilístico, se puede mantener la

interpretación de éste, en el sentido de que $R^2_{borroso}$ es una medida de proporción de la parte de la variación cuadrática de los y_i que es explicada por la regresión. Por ejemplo, si $R^2_{borroso}$ resulta 0.8, lo interpretamos como que la regresión explica el 80% de la variación de los datos centrales y_i .

Índice de Bondad del ajuste SIM_1

Si se considera el cardinal escalar de un conjunto borroso \bar{A} al igual que en el capítulo anterior como:

$$|\bar{A}| = \int \mu_{\bar{A}}(x) dx \quad (2.27)$$

Se puede definir el indicador de similitud S_i entre \bar{Y}_i e \hat{Y}_i de la siguiente forma:

$$S_i = \begin{cases} \frac{|\bar{Y}_i \cap \hat{Y}_i|}{|\bar{Y}_i \cup \hat{Y}_i|} & \text{si } |\bar{Y}_i \cup \hat{Y}_i| > 0 \\ 0 & \text{si } |\bar{Y}_i \cup \hat{Y}_i| = 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

Este indicador varía entre 0 (cuando las funciones de pertenencia son disjuntas) y 1 (cuando las funciones de pertenencia son idénticas) y se denomina de manera general $S(\bar{A}, \bar{B})$ para dos números borrosos \bar{A} y \bar{B} .

Para el conjunto de los n datos de la regresión, se calcula la medida de similitud SIM_1 con el siguiente promedio:

$$SIM_1 = \frac{\sum_{i=1}^n S_i}{n} \quad (2.29)$$

que también varía entre 0 y 1.

Índice de Bondad del ajuste SIM_3

Este índice mide las diferencias tanto de las extensiones como de la tendencia central. Por lo tanto de esta manera se define:

$$R_i = R(Y_i, \hat{Y}_i) = \frac{|\hat{y}_i - \hat{p}_i - (y_i - p_i)| + |\hat{y}_i + \hat{q}_i - (y_i + q_i)| + |\hat{y}_i - y_i|}{3(B_2 - B_1)} \quad (2.30)$$

$$\text{donde } B_1 = \text{Min}(\hat{y}_i - \hat{p}_i, y_i - p_i) \quad (2.31)$$

$$B_2 = \text{Max}(\hat{y}_i + \hat{q}_i, y_i + q_i) \quad (2.32)$$

Con esta definición de R_i , se construye el índice de bondad y ajuste SIM_3 que varía entre 0 y 1:

$$SIM_3 = \frac{\sum_{i=1}^n (1 - R_i)}{n} \quad (2.33)$$

Consideraciones finales del Capítulo

En este capítulo se ha abordado y descrito matemáticamente las diferentes técnicas de regresión borrosa. Se dedica un epígrafe a comentar sus principales críticas. Se hace una revisión de los índices de bondad y ajuste más usados, se muestran medidas de similitud así como una medida de ajuste de la tendencia central ($R^2_{borroso}$).

3. APLICACIONES

En este capítulo se muestran aplicaciones de la teoría anteriormente explicada. Se comienza mostrando una aplicación en la que se calcula la probabilidad borrosa de que una persona seleccionada al azar sea hipertensa o no. Los datos que se utilizan son reales del municipio de Santa Clara, Villa Clara, Cuba. Posteriormente se muestra un estudio amplio con datos simulados en los que se calculan ecuaciones de regresión borrosa, así como las medidas de bondad de ajuste explicadas en el capítulo anterior. Este apartado termina con la presentación y cálculo de un modelo de regresión borrosa a un problema de finanzas.

3.1. Aplicación a la Hipertensión Arterial (HTA)

La Hipertensión arterial (HTA) es una de las enfermedades más comunes que afectan la salud de los individuos adultos en las poblaciones de todas las partes del mundo. Incluso desde hace unos años también se está presentando en la población infantil causando no menos daños que en la adulta.

Debido a su carácter asintomático se le ha denominado la “epidemia silenciosa” pues por lo regular no presenta claras manifestaciones que evidencien su presencia, sin embargo no deja de provocar afectaciones al organismo humano [66]

Al mismo tiempo de representar por sí misma una enfermedad, la hipertensión arterial como ya se ha dicho, constituye un factor de riesgo muy importante para otras enfermedades, fundamentalmente cerebrales, cardíacas y renales, las cuales en caso de que no conlleven al paciente a la muerte, provocan daños irreversibles en órganos tan importantes como los involucrados en las enfermedades señaladas, ocasionando entonces incapacidad física e intelectual.

Resulta necesario entonces dedicar personal y recursos en investigaciones sobre esta patología para indagar en sus factores predisponentes, descubrir personas que estén en riesgo de padecerla, alertar a los que la padezcan, en fin, llevar a cabo todas las acciones que contribuyan a reducir la prevalencia de esta enfermedad y las graves consecuencias que ella provoca.

3.1.1 Cálculo de la probabilidad borrosa de “hipertensión” en Santa Clara

Por la importancia que esto reviste a todos los niveles principalmente en la salud de nuestra población, se calculará la probabilidad borrosa de que una persona seleccionada al azar, entre un conjunto de personas supuestamente sanas del municipio de Santa clara, sea hipertensa en el momento actual o desarrolle esta afección en un futuro cercano. Los datos que se utilizan fueron suministrados por el proyecto PROCDEC [67]. A continuación se presentan los resultados obtenidos al aplicar dichas técnicas a la muestra utilizada en el estudio.

En nuestra aplicación se tiene que:

- (1) los p_i se refieren a probabilidades;
- (2) los intervalos $[a_i, b_i]$ son α -cortes de números borrosos usados para probabilidades borrosas;
- (3) la suma de los p_i iguales a 1 significa que la suma de las probabilidades es 1.

Este problema lo resolveremos por los α -cortes de una probabilidad borrosa. [25]

A partir de una muestra aleatoria de 849 pacientes (supuestamente sanos del municipio de Santa Clara), clasificados en hipertensos (pacientes con cifras de tensión arterial por encima de 140 mm Hg (Sistólica) y de 90 mm Hg (Diastólica)), hiperreactivos también llamados pre-hipertensos (pacientes que en período corto de tiempo puede desarrollar la hipertensión) y normotensos (pacientes que mantienen las cifras de tensión arterial alrededor de 120 mm Hg (Sistólica) y 80 mm Hg (Diastólica)) por un comité de médicos expertos de reconocido prestigio, se pueden determinar las siguientes estimaciones puntuales:

- (1) el 26.1% son pacientes hipertensos (PH), luego $PH=0.261$;
- (2) el 22.7% son pacientes hiperreactivos (PHIP), luego $PHIP= 0.227$;
- (3) el 51.1% son pacientes normotensos (PN), luego $PN= 0.511$.

Teniendo en cuenta que se trata de estimaciones puntuales sobre la base de una muestra aleatoria simple, vamos a sustituir números difusos para estas probabilidades.

Sean $\overline{PH} = (0.258 / 0.261 / 0.264)$, $\overline{PHIP} = (0.224 / 0.227 / 0.230)$ y

$\overline{PN} = (0.508 / 0.511 / 0.514)$.

Sea $\bar{P}(N')$ la probabilidad borrosa de que un paciente no sea normotenso, que es equivalente a la probabilidad de que sea hiperreactivo (pacientes que tienden a ser hipertensos en un tiempo muy corto) o hipertenso. Los α -cortes de esta probabilidad borrosa se calculan como:

$$\bar{P}(N') = \{\overline{PH} + \overline{PHIP} \mid S\} \quad (3.1)$$

para todo α donde S denota el planteamiento.

$$PH \in \overline{PH}[\alpha], \quad PHIP \in \overline{PHIP}[\alpha], \quad PN \in \overline{PN}[\alpha], \quad PH + PHIP + PN = 1$$

Definamos de manera general $\overline{P}_w[\alpha] = [pw_1(\alpha), pw_2(\alpha)]$ para $w = \overline{PH}, \overline{PHIP}, \overline{PN}$.

Sea $\bar{P}(N')[\alpha] = [n_1(\alpha), n_2(\alpha)]$ se quiere sustituir $pH_1(\alpha) + pHIP_1(\alpha)$ por $pH + PHIP$ en la ecuación (3.1) para obtener $n_1(\alpha)$. De la misma forma se quiere sustituir $pH_2(\alpha) + pHIP_2(\alpha)$ por $pH + PHIP$ en la ecuación (3.1) para obtener $n_2(\alpha)$. Por lo tanto, es necesario utilizar algún método numérico para calcular estos α -cortes. Para ello se usará Maple [68].

El comando Maple usado para resolver este problema se muestra a continuación.

```
with(Optimization);
obj:=PHIP+PH;
cnsts:=[PH<=0.264-0.003*alpha, PH>=0.258+0.003*alpha, PHIP<=0.230-
0.003*alpha, PHIP>=0.224+0.003*alpha, PN<=0.514-
0.003*alpha, PN>=0.508+0.003*alpha, PH+PHIP+PN=1];
LPSolve(obj, cnsts, maximize); (busca el valor máximo del intervalo).
LPSolve(obj, cnsts); (busca el valor mínimo del intervalo).
```

Los resultados obtenidos para algunos valores de α se muestran en la tabla 3.1.

α	$\bar{P}(N')[\alpha]$
0	[0.486, 0.492]
0.2	[0.4866, 0.4914]
0.4	[0.4872, 0.4908]
0.6	[0.4878, 0.4902]
0.8	[0.4884, 0.4896]
1.0	0.489

Tabla 3.1: α -cortes de $\bar{P}(N')$

Para los datos de esta tabla se calcula $\bar{P}(N')[\alpha] = [0.486 + 0.003\alpha, 0.492 - 0.003\alpha]$ o se trata de un número borroso triangular $\bar{P}(N')[\alpha] = [0.486/0.489/0.492]$ el cual se muestra gráficamente en la figura 3.1.

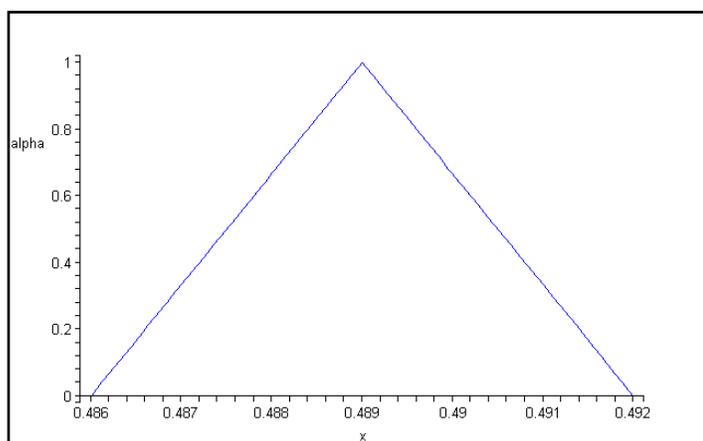


Figura 3.1 Probabilidad borrosa para pacientes “hipertensos”.

Como comentario final, desde el punto de vista estadístico vale la pena recalcar el hecho de que la probabilidad borrosa hallada $\bar{P}(N')[\alpha] = [0.486/0.489/0.492]$ “contiene” al valor de la probabilidad clásica ($PH+PHIP=0.261+0.227=0.488$) calculada para el mismo problema.

Desde el punto de vista de la aplicación, puede concluirse que una persona adulta de Santa Clara, supuestamente sana, tendrá una probabilidad borrosa elevada (0.486 / 0.489 / 0.492) de padecer de hipertensión en el momento actual o en un futuro cercano.

3.1.2 Cálculo de la probabilidad borrosa de hipertensión en Santa Clara por sexo

Inminentes personalidades dentro de la comunidad médica creen que el hombre tiene más probabilidades de desarrollar hipertensión arterial que las mujeres. Esto es debido entre otros factores a que hasta que éstas llegan a la edad de la menopausia la naturaleza las ha dotado con unas hormonas protectoras mientras se encuentra en edad fértil, los estrógenos, y por ello tienen menos riesgo de padecer enfermedades cardiovasculares. Para probar esta hipótesis se seguirá trabajando con la misma muestra aleatoria de 849 pacientes clasificados en hipertensos, hiperreactivos o pre-hipertensos y normotensos dentro del conjunto de personas del municipio de Santa Clara.

Sea M el evento de que una persona sea masculino, F es el evento de que una persona sea femenino, H es el evento de que una persona sea hipertensa y H' es el evento de que una persona no sea hipertensa.

Para estos datos se obtienen estimaciones puntuales de las siguientes probabilidades:

$$(1) p_{11} = P(M \cap H) = 0.153; \quad (2) p_{12} = P(M \cap H') = 0.311;$$

$$(3) p_{21} = P(F \cap H) = 0.108; \quad (4) p_{22} = P(F \cap H') = 0.428.$$

La incertidumbre en estas estimaciones puntuales se mostrará en sus valores difusos:

$$(1) \bar{p}_{11} = (0.150 / 0.153 / 0.156); \quad (2) \bar{p}_{12} = (0.308 / 0.311 / 0.314);$$

$$(3) \bar{p}_{21} = (0.105 / 0.108 / 0.111); \quad (4) \bar{p}_{22} = (0.425 / 0.428 / 0.431).$$

Ahora se calcularán las probabilidades condicionales borrosas: $\bar{P}(M | H)$ y $\bar{P}(F | H)$. Los α -cortes de la primera probabilidad borrosa son:

$$\bar{P}(M | H)(\alpha) = \left\{ \frac{p_{11}}{p_{11} + p_{21}} \mid S \right\} \quad (3.2)$$

Para $\alpha \in [0,1]$ y S denota " $p_{ij} \in p_{ij}(\alpha), 1 \leq i, j \leq 2$ y $p_{11} + \dots + p_{22} = 1$ ".

Sea $C(p_{11}, p_{21}) = \frac{p_{11}}{p_{11} + p_{21}}$. Al calcular $\frac{dC}{dp_{11}}$ veremos que ésta es positiva por lo tanto C es una

función creciente de p_{11} , de la misma manera si se calcula $\frac{dC}{dp_{21}}$ veremos que ésta es negativa

por lo que podrá afirmar que C es una función decreciente de p_{21} . Se obtiene entonces:

$$\bar{P}(M | H)(\alpha) = [C(p_{111}(\alpha), p_{212}(\alpha)), C(p_{112}(\alpha), p_{211}(\alpha))] \quad (3.3)$$

para todo α .

Para calcular esta probabilidad se usará nuevamente el Maple [68]. El comando Maple usado para resolver este problema se muestra a continuación:

```
> with(plots):
> N11:=y->0.150+0.003*y:
> N12:=y->0.111-0.003*y:
> D12:=y->0.156-0.003*y:
> D11:=y->0.105+0.003*y:
> eq1:=x=(N11(y)/(N11(y)+N12(y))):
> eq2:=x=(D12(y)/(D12(y)+D11(y))):
> implicitplot({eq1,eq2},x=0..1,y=0..1,color=blue,
thickness=1,labels=[x,alpha]);
```

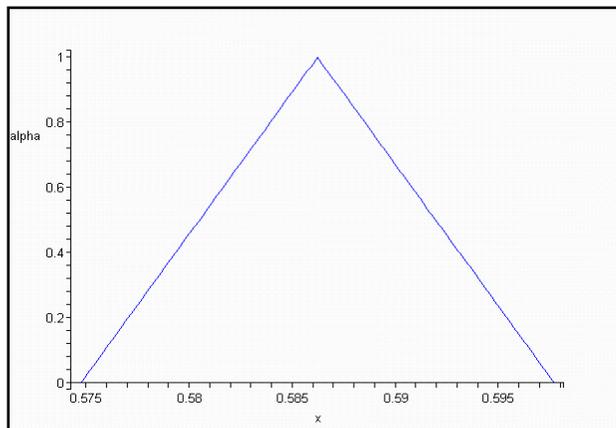


Figura 3.2 Probabilidad borrosa de que un hombre sea hipertenso.

Haciendo el mismo razonamiento ahora se calcularán los α -cortes de la segunda probabilidad borrosa los cuales son:

$$\bar{P}(F | H)(\alpha) = \left\{ \frac{p_{21}}{p_{11} + p_{21}} \mid S \right\} \quad (3.4)$$

Para $\alpha \in [0,1]$ y S denota " $p_{ij} \in p_{ij}(\alpha), 1 \leq i, j \leq 2$ y $p_{11} + \dots + p_{22} = 1$ ".

Sea $C(p_{11}, p_{21}) = \frac{p_{21}}{p_{11} + p_{21}}$. Calculando $\frac{dC}{dp_{21}}$ veremos que esta es positiva por lo tanto C es una

función creciente de p_{21} , de la misma manera si se calcula $\frac{dC}{dp_{11}}$ veremos que esta es negativa

por lo que se puede decir que C es una función decreciente de p_{11} , Se obtiene entonces:

$$\bar{P}(F | H)(\alpha) = [C(p_{211}(\alpha), p_{112}(\alpha)), C(p_{212}(\alpha), p_{111}(\alpha))] \quad (3.5)$$

Para todo α .

Para calcular esta probabilidad se usará el Maple[68]. El comando Maple usado para resolver este problema se muestra a continuación:

```
> with(plots) :
> N21:=y->0.105+0.003*y:
> N12:=y->0.111-0.003*y:
> D11:=y->0.156-0.003*y:
> D12:=y->0.150+0.003*y:
> eq3:=x=(N21(y)/(N21(y)+D11(y))) :
> eq4:=x=(N12(y)/(N12(y)+D12(y))) :
> implicitplot({eq3,eq4},x=0..1,y=0..1,color=blue,
thickness=1,labels=[x,alpha]);
```

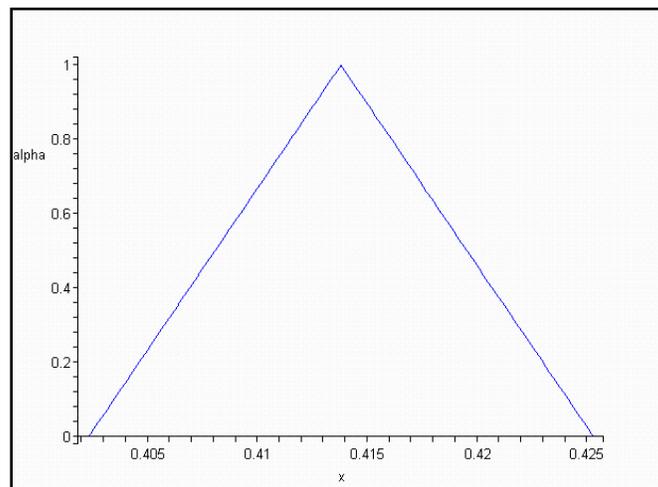


Figura 3.3 Probabilidad borrosa de que una mujer sea hipertensa.

Como que el objetivo fundamental de este epígrafe es visualizar que $\bar{P}(F | H) \leq \bar{P}(M | H)$ se ilustrarán en la figura 3.4 los valores $\bar{P}(F | H)$ y de $\bar{P}(M | H)$ respectivamente.

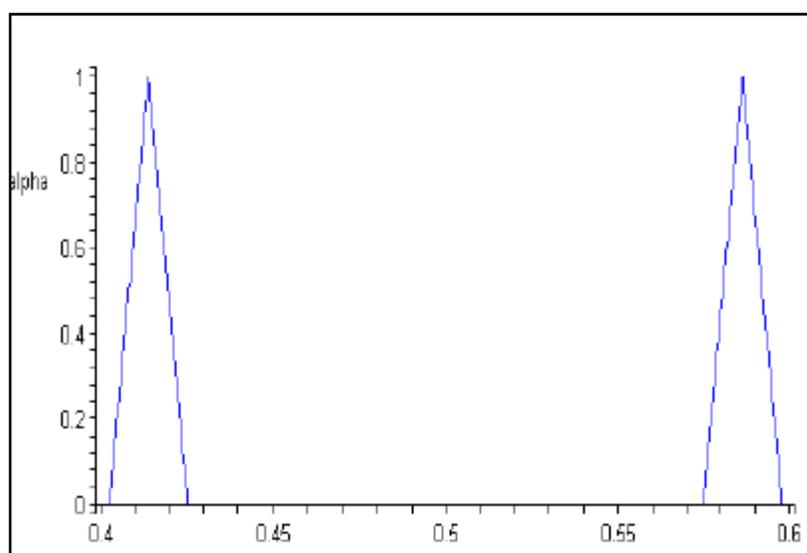


Figura 3.4: Probabilidad borrosa de que una mujer y un hombre sea hipertensos

Demostremos ahora desde el punto de vista matemático que efectivamente:

$$\bar{P}(F | H) \leq \bar{P}(M | H)$$

Para ello se necesita calcular $v(\bar{P}(F | H) \leq \bar{P}(M | H)) = 1$ y $v(\bar{P}(M | H) \leq \bar{P}(F | H)) < \eta$, donde η es alguna fracción fija en $(0,1]$.

Como se puede observar, el núcleo de $\bar{P}(M | H)$ está hacia la derecha del núcleo de $\bar{P}(F | H)$ como muestra la figura 3.4. Además se cumple que la intersección es nula, por lo que

$v(\bar{P}(M|H) \leq \bar{P}(F|H)) = 0 < 0.8$ De aquí se deduce que $\bar{P}(F|H) < \bar{P}(M|H)$. Luego puede concluirse matemáticamente que la probabilidad borrosa de que una mujer sea hipertensa es menor que la probabilidad borrosa de que un hombre desarrolle hipertensión.

3.2. Estudios de simulación

Con la llegada de las computadoras, la simulación se convirtió en una de las herramientas más importantes para realizar el diseño y operación de sistemas o procesos complejos.

Si bien la construcción de modelos aparece desde el Renacimiento, el uso moderno de la palabra simulación data de 1940, cuando los científicos Von Neuman Y Ulam que trabajaban en el proyecto Monte Carlo, durante la segunda Guerra Mundial, resolvieron problemas de reacciones nucleares cuya solución experimental sería muy cara y el análisis matemático demasiado complicado.[69]

Con la utilización de la computadora en los experimentos de simulación, surgieron incontables aplicaciones y con ello, una cantidad mayor de problemas teóricos y prácticos. Las aplicaciones de la simulación parecen no tener límites. Actualmente se simulan los comportamientos hasta las partes más pequeñas de un mecanismo, el desarrollo de las epidemias, el sistema inmunológico humano, las plantas productivas, sucursales bancarias, crecimiento de poblaciones de especies de animales, movimiento de los planetas y la evolución del universo, para mencionar unos pocos ejemplos de las aplicaciones de esta herramienta.

Hasta aquí se ha utilizado la palabra simulación sin haber dado una definición de ella. Por consiguiente, antes de proseguir con este tema, sería conveniente describir algunas de las definiciones más aceptadas y difundidas de la palabra simulación. Tomas H. Naylor [70], la define así:

Simulación es una técnica numérica para conducir experimentos en una computadora digital, los cuales requieren ciertos tipos de modelos lógicos y matemáticos que describen el comportamiento de un negocio o un sistema económico (o algún componente de ellos) en períodos extensos de tiempo real.

Otros estudiosos del tema como Robert E. Shannon [71], definen simulación como:

Simulación es el proceso de diseñar y desarrollar un modelo computarizado de un sistema o proceso y conducir experimentos con este modelo con el propósito de entender el comportamiento del sistema

El concepto de simulación tiene varias acepciones. Su concepto más práctico es dado por Moreno C.R [72] en donde define simulación como:

“Modelación y simulación es el conjunto de actividades asociado a la construcción de modelos del mundo real y su simulación mediante computadoras con el objetivo de dar solución a determinados procesos”

En otras palabras, dado un proceso en un sistema real, el conjunto de actividades para convertirlo en un modelo es conocido como modelación, mientras que su representación en un sistema digital es conocida como simulación.

A continuación se describen cuatro situaciones particulares que se evalúan con datos simulados. Los datos para las tres primeras se generaron utilizando el Microsoft Excel de la manera siguiente:

Variables	Nombres	Forma de cálculo
X ₁	Variable independiente 1	Un número aleatorio entre 10 y 14 respectivamente.
X ₂	Variable independiente 2	Numero aleatorio entre 3 y 10 respectivamente.
Y	Valores centrales del número borroso observado	$(1+ALEATORIO())*X_2+(2+ALEATORIO())*X_1+(3+ALEATORIO())$

Como puede apreciarse, por la forma de generación se tiene que entre las variables predictoras X₁ y X₂ y la variable dependiente Y existe una relación lineal. Se generaron 150 observaciones.

La resolución de un problema arbitrario de regresión borrosa posibilística requiere resolver un problema de optimización con $2(n+m+1)$ restricciones lineales, donde n es la cantidad de datos (150), m cantidad de variables independientes o explicativas, (2). Como la complejidad del problema de optimización se incrementa con el número de datos, se emplearán herramientas computacionales. Para ello se usó el paquete profesional de cálculo Mathematica, ver anexo 2.

Para simplificar los cálculos, sólo se estudiará el comportamiento de los índices Sim₁, Sim₃ y del

$R^2_{borroso}$.

Situación 1

Las extensiones p y q de la variable dependiente Y se generaron de la siguiente forma:

Variables	Nombres	Forma de cálculo
P	Extensiones izquierdas del número borroso observado.	Números aleatorios entre 2 y 3 respectivamente
q	Extensiones derechas del número borroso observado.	Números aleatorios entre 5 y 6 respectivamente

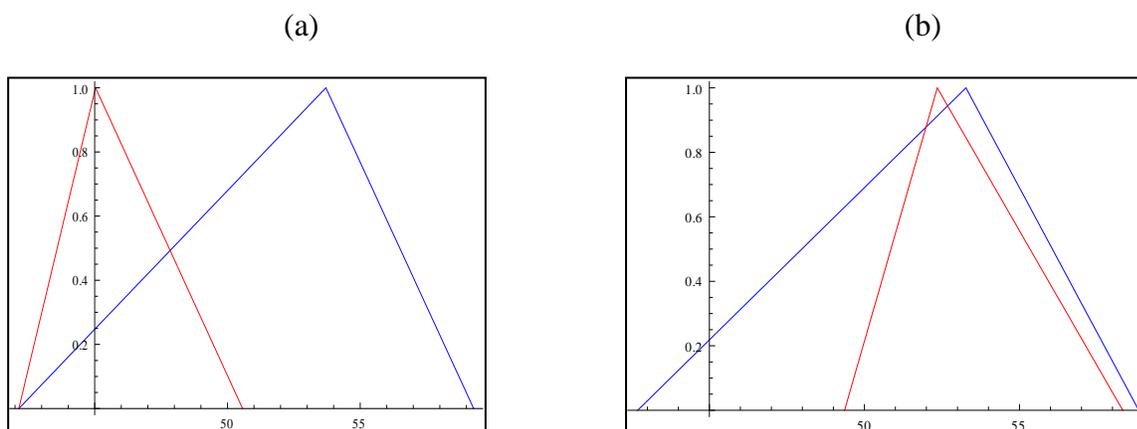
El Modelo de regresión Borrosa obtenido es:

$$\bar{Y} = (1.9865, 8.5545, 8.5545) + (-0.1867, 0.1823, 0.1823)X_1 + (5.1488, 5.1488, 5.8201)X_2$$

El índice de similitud Sim_1 fue relativamente bajo $Sim_1 = 0.38414$.

En los gráficos de la figura 3.1 se muestran las observaciones y las estimaciones que resultaron tener el índice de similitud menor (a) y mayor (b) respectivamente. El índice de similitud global fue de 0.38414, como ya se había mencionado anteriormente.

En el índice menor se puede observar gráficamente una diferencia notable entre el valor borroso observado (rojo) y el estimado (azul). En la observación que reportó una mayor coincidencia en Sim_1 ocurre todo lo contrario. El número borroso estimado (azul) prácticamente contiene al observado (rojo).



Índice menor hallado (0.194018)

Índice mayor hallado (0.549294)

Figura 3.1 Índices de similitud (Sim_1) menor (a) y mayor (b) entre los valores observados (rojos) y estimados (azules).

Además se calcularon $Sim_3=0.679891$ y el $R^2_{borroso}$ que resultó tener un valor elevado: 0.791023 , por lo que se puede interpretar como que la regresión explica casi el 80 % de la variación presente en los datos centrales y_i . Este valor puede ser considerado como muy bueno.

Situación 2

Los 150 valores utilizados en esta situación fueron exactamente los mismos que en la anterior, sólo se modificó un poco la forma de generar las extensiones p y q de la variable dependiente Y:

Variabes	Nombres	Forma de cálculo
P	Extensiones izquierdas del número borroso observado.	$4 + ALEATORIO()$
q	Extensiones derechas del número borroso observado.	$3 + ALEATORIO()$

Como puede apreciarse, la modificación realizada no fue muy diferente de la anterior, pero los resultados obtenidos sí lo fueron.

El Modelo de regresión Borrosa obtenido es:

$$\bar{Y} = (-5.8592, 0.7.0010) + (1.9488, 2.2969, 2.2969)X_1 + (0.8325, 0.8325, 1.9335)X_2$$

El índice de similitud Sim_1 fue inferior al encontrado en la situación anterior: $Sim_1=0.273061$, mientras que $Sim_3=0.684933$ se mantuvo aproximadamente igual. El $R^2_{borroso}$ por su parte varió drásticamente. Ahora resultó ser 0.165453 . Debe recordarse que los datos se generaron de manera que sí existiera una relación lineal entre las variables independientes X_1 y X_2 con respecto a Y, por lo que el $R^2_{borroso}$ resulta ser un índice “cuestionable” para la bondad de ajuste de los modelos borrosos.

En este caso se observa que la medida de similitud Sim_3 resultó ser la más adecuada para poder evaluar la bondad del ajuste entre los números borrosos observados y los números borrosos estimados por la regresión borrosa, mientras que el $R^2_{borroso}$ resultó ser el indicador más pobre.

Situación 3

Los 150 valores utilizados en esta situación fueron exactamente los mismos que en la anterior, sólo se modificó un poco la forma de generar las extensiones p y q de la variable dependiente Y:

Variables	Nombres	Forma de cálculo
P	Extensiones izquierdas del número borroso observado.	40 + ALEATORIO()
q	Extensiones derechas del número borroso observado.	50 + ALEATORIO()

Como puede apreciarse, la modificación realizada en este caso fue muy diferente de la anterior, pues la variabilidad de las extensiones es mucho mayor. Ambas extensiones se incrementaron notablemente para constatar su posible influencia en los índices de bondad de ajuste que se estudian.

El Modelo de regresión Borrosa obtenido es:

$$\bar{Y} = (-46.2345, 0.56.3316) + (2.1004, 2.1004, 2.1886)X_1 + (1.2714, 1.2714, 1.8028)X_2$$

En este caso se tiene que $Sim_1=0.807073$, $Sim_3=0.757856$ y el $R^2_{borroso}$ resultó ser 0.078173. La medida de similitud Sim_1 que pondera las diferencias entre las distribuciones de posibilidad de Y_i e \hat{Y}_i incluyendo la totalidad de las funciones de pertenencia, resultó ser la más adecuada para poder representar estos datos. Le siguió el indicador Sim_3 que mide las diferencias tanto de las extensiones como de la tendencia central, mientras que, al igual que en la situación 2, el $R^2_{borroso}$ es un indicador que no ofreció buenos resultados. Se reitera que el $R^2_{borroso}$ no es siempre una “buena medida” de la calidad del ajuste del modelo borroso hallado.

En el anexo 3 se muestran solamente parte de los resultados obtenidos. Se puede observar que la medida de similitud Sim_1 es la más adecuada para este caso.

Situación 4

En este cuarto caso se considerara el siguiente juego de datos consultado en [73] el cual se presenta en la siguiente tabla:

Y	X ₁	X ₂
3.54	0.84	0.46
4.05	0.65	0.52
4.51	0.76	0.57
2.63	0.7	0.3
1.9	0.73	0.2

Tabla 3.2 Observaciones consultadas en [73]

Como se puede observar, es un problema que presenta una variable dependiente (Y) y dos variables independientes (X_1 y X_2) respectivamente. A diferencia de los demás casos presentados anteriormente en donde se contaba con 150 observaciones aquí solo se cuenta con 5 observaciones, o sea es un número muy pequeño en el cuál no es recomendable aplicar la teoría clásica de la regresión lineal múltiple. Por otro lado las extensiones izquierdas (p_i) un número aleatorio entre 0 y 1 mientras que las extensiones derechas (q_i) un número aleatorio entre 0 y 1. A continuación se presentan gráficamente los resultados de las estimaciones realizadas:

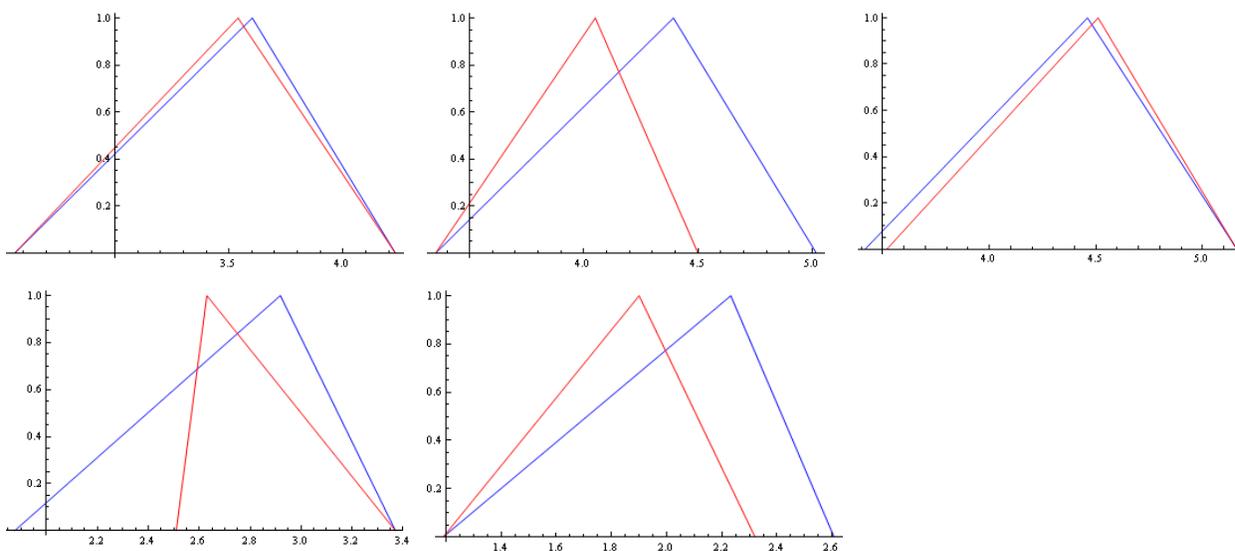


Figura 3.2. Resultados de la estimación borrosa (Valores observados (rojos) y estimados (azules)).

En este caso se tiene que $Sim_1=0.666222$, $Sim_3=0.722515$ mientras que el $R^2_{borroso}$ resultó ser 0.929351, por lo que resulta acertado inferir que la regresión explica casi el 93 % de la variación presente en los datos centrales y_i . En este caso se puede observar que las medidas de similitud están más controladas y siguen un comportamiento muy similar aunque el indicador $R^2_{borroso}$ presenta mejores resultados que los indicadores Sim_1 y Sim_3 respectivamente.

Estos ejemplos aquí presentados con datos simulados persiguen el propósito de mostrar algunos modelos de regresión borrosos y la diferencia entre los valores de algunos de los índices de bondad de ajuste hallados. En el caso de las dos primeras situaciones no hay muchas diferencias (las dos simulaciones cuentan con 150 datos y las extensiones son muy similares, sin embargo para la primera situación el mejor indicador resultó ser el $R^2_{borroso}$ mientras que en la segunda

situación la medida de similitud Sim_3 resultó ser la más apropiada para evaluar la calidad del ajuste entre los datos observados y los datos estimados por la regresión borrosa.

Cuando los valores de las extensiones son demasiado grandes (situación 3), el $R^2_{borroso}$ tampoco resultó ser una buena medida.

La última situación es atípica y un poco diferente, pues tiene sólo cinco observaciones. En ella, los tres índices de bondad de ajuste estudiados arrojaron valores elevados.

3.3. Aplicación a la tasa de cambio del Euro

La tasa o tipo de cambio, relaciona a dos monedas y expresa la magnitud en que se intercambian entre sí. Pero de las dos monedas que se relacionan, una es la moneda “base” y la otra es la moneda “cotizada”. La cantidad de la moneda base siempre se mantiene inalterable, mientras que la cantidad de la moneda cotizada cambia constantemente. La moneda base es la valorada en términos de la otra; la cotizada expresa cuántas unidades de ella son equivalentes a la moneda base.

Así, diremos

1, 2945 EUR/USD = 1,2945 USD por un EUR

1, 2002 USD/CAD = 1,2002 CAD por un USD

1.11341 CUC/USD = 1.1134 USD por un CUC

En este tipo de notación, la moneda base es la primera, y la segunda es la cotizada, esto es, la que aparece después del “slach”. Luego debe escribirse, e interpretarse:

EUR/USD significa USD por EUR

CUC/USD significa USD por CUC

USD/CAD significa CAD por USD

En nuestro caso, la moneda base es el CUC, y la cotizada el USD, es decir, el USD cotiza contra el CUC.

Así, CUC/USD significa USD por CUC

FACTORES DETERMINANTES DE LA TASA DE CAMBIO

Una gran variedad de factores determina el nivel de la tasa de cambio: el gobierno, fuerzas de oferta y demanda por la moneda de un país en particular, tasas de interés, inflación, la balanza de

comercio internacional del país y las expectativas de los consumidores sobre lo que pasará en el futuro.

Aunque una discusión sobre la relación entre los factores mencionados está más allá del alcance de este trabajo, (de hecho, de acuerdo a algunos economistas, algunas de estas relaciones todavía no son conocidas), la discusión se puede simplificar si esta se enfoca en los dos factores principales que afectan la tasa de cambio: el gobierno y las fuerzas de oferta y demanda del mercado

Los gobiernos pueden influenciar la tasa de cambio directamente o indirectamente.

- Directamente lo hacen fijando la tasa de cambio. Esto quiere decir que la tasa se mantiene al mismo nivel hasta que el gobierno la cambie.
- Indirectamente a través de las tasas de interés (la cantidad de dinero en circulación) o comprando moneda en la bolsa de divisas. Además, muchos países, incluyendo los Estados Unidos, Japón y Canadá, fijan tasas de cambio "flexibles" o "flotantes" que cambian cada día e inclusive muchas veces al día, dependiendo de la oferta y demanda

Un incremento en la demanda por la moneda de un país en la bolsa de divisas generalmente incrementa el valor de su moneda. Por ejemplo, un incremento en la demanda por las exportaciones americanas se traduciría en un dólar más fuerte porque otros países demandarían más dólares americanos para poder pagar por este incremento en bienes y servicios.

Al igual que con el precio de cualquier producto, la tasa de cambio sube o baja dependiendo de la oferta y la demanda, pues cuando la oferta es mayor que la demanda (hay abundancia de dólares en el mercado y pocos compradores) la tasa de cambio baja; mientras que, por el contrario, cuando hay menos oferta que demanda (hay escasez de dólares y muchos compradores), la tasa de cambio sube.

La cotización o tipo de cambio se determina por la relación entre la oferta y la demanda de divisas; alternativamente, puede decirse que el tipo de cambio se determina por la relación entre oferta y demanda de moneda nacional para transacciones internacionales del país: efectivamente, la oferta de divisas tiene como contrapartida la demanda de moneda nacional y la demanda de divisas tiene como contrapartida la oferta de moneda nacional

A continuación estudiaremos las fluctuaciones de la tasa de cambio del euro de acuerdo a las variaciones de los precios de diferentes productos exportables e importables como metales básicos, metales preciosos, alimentos, azúcar, energía y las tasas de interés de euro en el primer mes. Para ello los datos que se utilizan fueron adquiridos del Banco Central de Cuba a través del sitio Web www.interbancario.co.cu durante el período mayo – junio del 2009. La información recogida presenta como variable dependiente la tasa de cambio del Euro frente al CUC y como variables independientes los diferentes productos exportables e importables mencionados (ver anexo 4). Para poder obtener las variaciones en la variable dependiente se mide las observaciones cada cinco días y en cuanto a las variables independientes se calcula la media de los valores en esos 5 días. Debido a que el número de variables a analizar es grande (39) se decide utilizar, como criterio de selección de variables, una regresión tradicional utilizando el método paso a paso. Las variables más importante fueron: (precio del estaño (metal básico) precio del oro y del paladio (metales preciosos), harina de trigo y leche en polvo entera (Alimentos), jet-fuel del mediterraneo (energía), precio del petróleo crudo ligero en la bolsa de Nueva York).

Posteriormente se realiza la regresión borrosa para cada mes, así como para el bimestre correspondiente, obteniéndose para cada uno de ellos resultados satisfactorios que se muestran a continuación:

Solo se cuenta con 5 observaciones, por cada mes

- Mayo

El Modelo de regresión Borrosa obtenido es:

$$\begin{aligned}
 Y = & (2.26259, 2.26259, 2.26259) \text{Estaño} + (-15.5069, -15.5069, -15.5069) \text{Oro} \\
 & + (0, 0, 0.363628) \text{Paladio} \\
 & + (12.1043, 12.1043, 12.1043) \text{Harina de Trigo} \\
 & + (-3.99448, -3.99448, -3.99448) \text{LPolvo} \\
 & + (6.37164, 6.37164, 6.37164) \text{Jet - Fuel} + (0, 0, 0) \text{petróleo}
 \end{aligned}$$

Para este mes tenemos que $\text{Sim}_1=0.501925$, $\text{Sim}_3=0.336002$ mientras que $e1 R^2_{borroso}$ resultó ser 0.963375 , por lo que lo se puede interpretar como que el

modelo de la regresión borrosa explica el 96 % de la variación presente en los datos centrales y_i .

- Junio

El Modelo de regresión Borrosa obtenido es:

$$\bar{Y} =$$

$$(3.378, 3.378, 3.378) \text{Estaño} + (-25.0648, -25.0648, -25.0648) \text{Oro} +$$

$$(-0.396305, 0, 0) \text{Paladio} + (15.1725, 15.1725, 15.3656) \text{Harina de Trigo} +$$

$$(-5.19682, -5.19682, -5.19682) \text{LPolvo} + (0, 0, 0) \text{Jet-Fuel} + (0, 0, 0) \text{petróleo}$$

Para este mes se obtuvo que $\text{Sim}_1=0.383534$, $\text{Sim}_3=0.335122$ mientras que el R^2_{borroso} resultó ser también muy alto: 0.999128. De la misma manera se puede hacer la interpretación de que el modelo hallado es capaz de explicar el 99 % de la variación presente en los datos centrales y_i .

- Bimestre (mayo-junio)

El Modelo de regresión Borrosa obtenido es:

$$\bar{Y} = (1891.68, 1891.68, 1981.68) + (1.024, 1.024, 1.024) \text{Estaño}$$

$$+ (-5.4362, -5.0726, -5.0726) \text{Oro} + (11.531, 11.531, 11.531) \text{Paladio}$$

$$+ (2.824, 2.824, 2.824) \text{Harina de Trigo}$$

$$+ (-0.9983, -0.9983, -0.9983) \text{LPolvo} + (7.2285, 7.2285, 7.2285) \text{Jet-Fuel}$$

$$+ (-31.99, -31.99, -31.99) \text{petróleo}$$

Para el bimestre tenemos que $\text{Sim}_1=0.433836$, $\text{Sim}_3=0.335256$ mientras que el R^2_{borroso} resultó ser de 0.999654, por lo que lo interpretamos como que la regresión explica el 99 % de la variación presente en los datos centrales y_i .

En estos tres modelos, el valor del R^2_{borroso} fue alto (superior en todos los casos al 95%). El índice de similitud Sim_1 por su parte osciló entre 0.38 y 0.5 mientras que Sim_3 que mide las diferencias tanto de las extensiones como de la tendencia central, se mantuvo prácticamente constante en 0.33.

Consideraciones finales

En este capítulo se muestran algunas aplicaciones de la teoría de las probabilidades borrosas y de la regresión borrosa anteriormente explicadas.

Se ilustra primeramente con detalles matemáticos, el cálculo de la probabilidad borrosa de que una persona del municipio de Santa Clara sea “hipertensa”, mientras que más adelante se demuestra gráfica y matemáticamente que los hombres tienen una probabilidad borrosa superior de padecer hipertensión que las mujeres.

El estudio de simulación presentado no pretende ser abarcador. Se realizó para ilustrar diferentes situaciones y comentar los resultados enfatizando en los valores algunos de los índices de bondad de ajuste explicados en el capítulo 2. El resultado más interesante a nuestro juicio, es que contrario a lo esperado, el $R^2_{borroso}$ no es siempre una medida adecuada de la bondad del ajuste del modelo.

Finalmente se culmina con la obtención de tres modelos de regresión borrosa que pronostican la tasa de cambio del euro.

CONCLUSIONES

El presente trabajo aborda un campo novedoso en nuestros días: las probabilidades y la estadística borrosas. Particularmente ha quedado demostrada la utilidad de la teoría de las probabilidades borrosas y de los métodos de regresión borrosa en la solución de problemas médicos y de finanzas. Como conclusiones se enuncia que:

1. Se estudió la teoría de las probabilidades borrosas. Se implementaron procedimientos sobre Maple para obtener los cálculos y gráficos correspondientes.
2. Se estudiaron y presentaron de manera organizada los diferentes métodos de regresión borrosa. Se implementaron procedimientos complejos sobre el paquete Mathematica para obtener los cálculos correspondientes.
3. Se explicaron los diferentes índices de bondad de ajuste de los modelos reportados en la literatura. Se realizó un estudio de simulación para mostrar su validez, de donde se deduce que el $R^2_{borroso}$ no es siempre una medida adecuada de la bondad del ajuste de los modelos borrosos.
4. Se determina matemática y gráficamente, la probabilidad borrosa de que una persona del municipio de Santa Clara sea “hipertensa”.
5. Con ayuda de las probabilidades borrosas, se demuestra que las mujeres son menos propensas a padecer de hipertensión que los hombres.
6. Se obtuvieron modelos de regresión borrosa mensuales (mayo y junio) y otro bimensual para pronosticar la tasa de cambio del euro.

RECOMENDACIONES

El presente trabajo abre una línea de investigación dentro del Departamento de Matemática de la Facultad de Matemática Física y Computación de la Universidad Marta Abreu de Las Villas específicamente dentro del seminario de estadística por lo que se recomienda que:

1. Ampliar este estudio a otros métodos multivariantes, como análisis discriminante, árboles de clasificación, entre mucho otros.
2. Ampliar el estudio de simulación realizado para determinar la validez de aplicación de los índices de bondad de ajuste.
3. Implementar sobre el Mathematica métodos paso a paso de selección de variables asociados a las técnicas de regresión borrosa.
4. Diseñar e implementar un paquete de *software* propio con estas opciones.

BIBLIOGRAFÍA

1. Silvia, M.A., *Logica Difusa o matemática Borrosa*, in *Implicaciones del Data Mining*.
2. Zadeh, L.A., *Fuzzy Sets*. Information and Control, 1965. **8**: p. 15.
3. Dadone, P., *Design Optimization of Fuzzy Logic Systems*, in *Facultad de Virginia Instituto politecnico*. 2001: Blacksburg, Virginia, Estados Unidos. p. 183.
4. Hung T. Nguyen and, B.W., *Fundamentals of Statistics with Fuzzy Data*, ed. S.B.h.N. York. 2006, Netherlands. 191.
5. Calviño, M.h., *Aclarando la Lógica borrosa(Fuzzy Logic)*. revista cubana de Física, 2003. **20**: p. 5.
6. Aluja, J.G., *Lances y desventuras del nuevo paradigma de la teoría de la decisión*, in *Actas del III Congreso Internacional SIGEF*. 1996. p. 10-13.
7. Feller, W., ed. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications.*, ed. J.W.a. Sons. 1971.
8. Schafer, G., ed. *A Mathematical Theory of Evidence*. ed. P. University. 1976: Estados Unidos.
9. Shortliffe, E.y.B., *A model of inexact reasoning in medicine*, in *Mathematical Biosciences*. 1975. p. 28.
10. Shortliffe y B, B., *A model of inexact reasoning in medicine*, in *Mathematical Biosciences*. 1975. p. 28.
11. Lukasiewics, L., *O zasadzie wylaczonego srodka*, p. filozficzny, Editor. 1910. p. 2.
12. Zadech, L.A., *Fuzzy algorithms*. Information and Control, 1968. **12**: p. 8.
13. James J.Buckley , E.E., *Introduction to Fuzzy Logic and Fuzzy Sets*. Springer-Verlag company, ed. Physic-Verlag. 2002, New York.
14. Hanss, M. 2005, Netherlands.
15. Lee, K.H., *First Course on Fuzzy Theory and Applications*, ed. S.b. heidelberg. 2005, Germany.
16. Luca A. D , a.T.S., *A definition of a noprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory*. Information and Control, 1972. **20**: p. 12.
17. Jose Galindo, G., *Curso introductorio de Conjuntos y sistemas difusos(Lógica Difusa y Aplicaciones)* 2008: Universidad de Malaga, España.
18. Zadech, L.A., *Fuzzy Sets*. Information and Control, 1965. **8**: p. 15.
19. R.R.Yager, *On a general class of fuzzy connctives*. Fuzzy Sets and Systems, 1980. **4(3)**: p. 235-242.
20. Sugeno., M., *Fuzzy measures and fuzzy integrals-a survey*, in *Fuzzy Automata and Decision processes*. 1977, M.M.Gupta, G.N. Saridis and B.R. Gaines: North-Holland. p. 89-102.
21. Klir G. J, a.Y.B., *Fuzzy sets and fuzzy logic: theory and aplications*. prentice Hall., Upper Saddle River, Nj, USA, 1995.
22. Nguyen, H., T. , *A note on the extension principle for fuzzy sets*. journal of tathematical Analysis and Aplications, 1978. **64**: p. 369-380.
23. Moore, R.E., *Methods and Applications of Interval Analysis*, in *SIAM studies in Applied Mathematics*. 1979: Philadelphia.
24. Dubois, D.P., H., *The mean value of a fuzzy number*. fussy Sets and System, 1987. **24**: p. 279-300.
25. Buckley, J.J., *Fuzzy Probability and Statistics*, ed. S.-v. Heiderberg. 2006.

26. B.Izyumov, E.K., and M. Wagenknecht (2001) *Software tool for regression analysis of fuzzy data*. In 9th Zittau Fuzzy Colloquium.
27. D. Dubois & H. Prade, *Théorie des Possibilités: Applications a la Représentation des Connaissances en Informatique*. 1988.
28. Sergio Donoso, S., *Análisis de Regresión Difusa: Nuevos Enfoques y Aplicaciones*. 2006, Universidad de Granada. p. 200.
29. Juan Manuel , N.C., *Modelación estadística del proceso de producción de papel para corrugar en la papelera "Sergio González."*, in *Departamento de Matematica*. 2005, Universidad Central de Las Villas.: Santa Clara. p. 93.
30. Grau Abalo, R., in *Análisis de regresión lineal múltiple*. 1995. 25 h.
31. Gujarati, D.N., *Econometría*. 2da edición ed. 1990. 587.
32. Hastie T., T.R.a.F., J, *The Elements of Statistical Learning: data mining inference and prediction*. 2001, Springer.
33. Crespo, J., *Modelo Paramétrico Matemático Difuso para la estimación de Esfuerzo de Desarrollo del Software*. 2002.
34. Sugeno, M., *Industrial Applications of Fuzzy Control*. 1985: North Holland.
35. B.M.Ayyub, Y.O.C.a., *Fuzzy regression methods- a comparative assessment*, in *Fuzzy Sets and Systems*. 2001.
36. Folger, G.K.a.T.A., *Fuzzy Sets, Uncertainly, and Information*, ed. P. Hall. 1988.
37. Nadipuram R, P., ed. *Fuzzy Modeling and Control: Selected Works of Sugeno*. ed. C. Press. 1999.
38. Boris, i., *Aplicación of f-regression method to fuzzy classification problem*.
39. R.C. Tsaur, H.F.W., *Outliers in Fuzzy Regression Analysis*. In *International Journal of Fuzzy Sistems*, 1999. **1. No.2**: p. 113-119.
40. Aguilera Cuevas, S.R.B., Ramón, *Aplicación de la regresión lineal borrosa para la planificación presupuestaria en el Hotel Meliá Santiago de Cuba*. 1999.
41. S. Conte, H.D., and V. Shen., *Software Engineering Metrics and Models*, B.C.P. company, Editor. 1986.
42. José C , R.C.A.A.V., *Reconocimiento de un Patrón de Estimación Humana Aplicando el Modelo de Regresión Lineal Borrosa*. *Computación y Sitemas*, 1999. **3 No. 2**: p. 105-114.
43. Sugihara K., I.H.y.T.H., *Interval priorities in ahp by interval regression analysis*. *European Journal of Operational research*, 2004. **158**: p. 745-754.
44. Sánchez, J.d.A., *Estimación de la estructura temporal de los tipos de interés mediante números borrosos. Aplicación a la valoración financiero-actuarial y al análisis de la solvencia del asegurador de vida*, in *Departamento de Empresa Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales*. 2003, ROVIRA I VIRGILI.
45. Tanaka Hideo, L.H., *Interval regression analysis by quadratic programing approach*. *IEEE trans. on Fuzzy Sistems*, 1998. **6 No.4**.
46. kim K. J., M.H.y.K., *Fuzzy versus statistical lineal regressio*. *European Journal of Operational research*, 1996. **92**: p. 417-434.
47. Hideo, T., *Possibilistic regression analysis based on linear programin*24. 1987.
48. Tanaka Hideo, I.H., *Posibilistic regression analysis based on linear programing*, in *En Kacprzyk J. y Fedrizzi M*. 1992. p. 47-60.
49. Savic D. A, y.P.W., *Evaluation of fuzzy lineal regression models*. *Fuzzy And Systems* 1991. **23**: p. 51-63.

50. Savic D. A, y.P.W., *Fuzzy lineal regression models: construccion and evaluation.*, in *Fuzzy regression Analysis* 1992. p. 91-100.
51. Dubois D, y.P.h., *Ranking fuzzy numbers in setting of possibility theroy.* Information Science, 1983. **30**: p. 183-224.
52. Sakawa M. Yano, H., *Fuzzy linear regression and its applications.*, in *Fuzzy regression Analysis.* 1992. p. 61-80.
53. Redden D, T.y.W.W.H., *Further examination of fuzzy linear regression.* Fuzzy Sets And Systems, 1996. **79**: p. 203-211.
54. Modarres M., N.E.y.N.M.M., *Fuzzy linear regression analysis from the point of view risk.* International journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems, 2004. **12 No. 5**: p. 635-649.
55. Peters , G., *Fuzzy linear regression with fuzzy intervals.* Fuzzy Sets And Systems, 1994. **63**: p. 45-55.
56. Ozelkan E. C, D.L., *Multi-objotive fuzzy regression: a general framework.* Computers and Operations Research, 2000. **27**: p. 635-652.
57. Celmins A, *Least squares model fitting to vector data.* Fuzzy Sets And Systems, 1987. **22**: p. 245-269.
58. Wang, H.F.a.R.-C.T., *Insight of a fuzzy regression model.* Fuzzy Sets and Systems, 2000. **112 No.3**: p. 355-369.
59. Kim B, y.B.R.R., *Evaluation of fuzzy linear regressin models by comparison membership function.* Fuzzy Sets And Systems, 1998. **100**: p. 343-352.
60. Kao C, y.C.C.-L., *A fuzzy linear regression model with better explanatory power.* Fuzzy Sets And Systems, 2002 **126**: p. 401-409.
61. Kao C, y.L.P.-H., *Entropy for fuzzy regression analysis.* International journal of Systems Science, 2005. **36 No 14**: p. 869-876.
62. Chang Y, -.H.O., *Hybrid regression anaysis with reliability and uncertainty measures.* 2001: Ph.D. Disertation, University of Maryland.
63. Mogilenko A, y.p.D., *Development of fuzzy regression model using genetic algorithms.* International journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems, 2003. **11 No. 4**: p. 429-444.
64. Chang Y, -.H.O., *Hybrid fuzzy least- squares regression anaysis and its reliability measures.* Fuzzy Sets and Systems, 2001. **119**: p. 225-246.
65. Hojati M., B.C.y.S.K., *A simple method for computation of fuzzy linear regression.* European Journal of Operational research, 2005. **166**: p. 172-184.
66. Rodriguez, S.E., *Sistema informativo para el diagnostico de la hipertension arterial sobre bases estadísticas.* . 2006, UCLV: Santa Clara.
67. UCLV, U.d.O.y., *“Proyección del Centro de Desarrollo Electrónico hacia la Comunidad” (PROCDEC)*
68. Maple, *Maple 9.5*, W.M. INC, Editor: Waterloo, Canada.
69. Raúl , C.B., *Simulación. Un enfoque práctico.* 2 ed, ed. N. Limusa. Vol. 2. 2003, Monterrey,Mexico. 158.
70. Naylor, T.H., *Experimentos de simulación en computadores con modelos de sistemas económicos*, ed. E. Limusa. 1977, Mexico.
71. Shannon, R.E., *Simulación de Sistemas*, ed. E. Trillas. 1988.
72. Moreno, C.R., *Modelación y Simulación* 1972.

73. Ross, T.J., *Fuzzy Logic with Engineering Applications*. Second edition ed, ed. L. John Wiley & Sons. 2004, New mexico.USA.

ANEXOS

Anexo 1

Operaciones con funciones de pertenencia no simétricas

Estas funciones de pertenencia se utilizarán fundamentalmente en el análisis de Regresión Borrosa.

Ahora bien para sumar dos números borrosos $\bar{A} = (a_n, l_a, r_a)_{LR}$ y $B = (b_n, l_b, r_b)_{LR}$, si se considera primero su extensión izquierda para un cierto nivel de pertenencia w , se tiene la relación genérica (D. Dubois 1980)

$$L\left(\frac{(a-x)}{l_a}\right) = w = L\left(\frac{(b-y)}{l_b}\right) \quad (1)$$

De donde se puede deducir una relación para la operación suma, en que aparece la función L:

$$x + y = a + b - (l_a + l_b)L^{-1}(w) \quad (2)$$

Y resultara un número z que define la función de pertenencia tal que:

$$L\left(\frac{(a+b-z)}{l_a + l_b}\right) = w \quad (3)$$

De la misma forma se puede proceder con la extensión derecha y la función R.

Por lo tanto la suma de estos números esta dada por la expresión:

$$\bar{A} + \bar{B} = (a, l_a, r_a)_{LR} + (b, l_b, r_b)_{LR} = (a + b, l_a + l_b, r_a + r_b)_{LR} \quad (4)$$

Esta relación se puede generalizar para n números borrosos LR, mediante

$$\sum_{i=1}^n \bar{A}_i = \left(\sum_{i=1}^n a_i, \sum_{i=1}^n l_i, \sum_{i=1}^n r_i \right)_{LR} \quad (5)$$

Donde se supone que los n números borrosos tienen la misma función de pertenencia LR.

Para el producto de un escalar por un número borroso siguiendo la misma idea, se obtienen valores dependiendo del signo del escalar:

Para el caso de que el escalar sea positivo:

$$\lambda \cdot \bar{A} = \lambda(a, l_a, r_a)_{LR} = (\lambda a, \lambda l_a, \lambda r_a)_{LR} \quad (6)$$

Para el caso de que el escalar sea negativo:

$$\lambda \cdot \bar{A} = \lambda(a, l_a, r_a)_{LR} = (\lambda a, -\lambda r_a, -\lambda l_a)_{RL} \quad (7)$$

De las operaciones (4) y (7) queda definida la resta de dos números borrosos.

$$\bar{A} - \bar{B} = (a, l_a, r_a)_{LR} - (b, l_b, r_b)_{LR} = (a - b, l_a + r_b, r_a + l_b)_{LR} \quad (8)$$

En conclusión de la suma y la resta de números borrosos con función de pertenencia LR, resultan números borrosos también con función de pertenencia LR.

No ocurre lo mismo con la multiplicación. Para números borrosos positivos, la expresión (2) que se construyó para calcular la suma borrosa, para la multiplicación borrosa es:

$$x \cdot y = a \cdot b - (al_b + bl_a)L^{-1}(w) + l_a l_b (L^{-1}(w))^2 \quad (9)$$

Esta expresión por lo general no produce como resultado un número borroso de tipo LR. Sin embargo si se descarta el término $l_a l_b (L^{-1}(w))^2$, considerando que l_a y l_b son pequeños en comparación con a y b , la solución de la multiplicación borrosa es:

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = (a, l_a, r_a)_{LR} \cdot (b, l_b, r_b)_{LR} \approx (a \cdot b, al_b + bl_a, ar_b + br_a)_{LR} \quad (10)$$

Si \bar{A} es negativo y \bar{B} es positivo, la aproximación para la multiplicación borrosa es:

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = (a, l_a, r_a)_{LR} \cdot (b, l_b, r_b)_{LR} \approx (a \cdot b, -ar_b + bl_a, -al_b + br_a)_{RL} \quad (11)$$

Si \bar{A} o \bar{B} son negativos, la aproximación para el cálculo del producto es:

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = (a, l_a, r_a)_{LR} \cdot (b, l_b, r_b)_{LR} \approx (a \cdot b, -ar_b - br_a, -al_b - bl_a)_{RL} \quad (12)$$

Para calcular el inverso de \bar{A} un número borroso LR, se tiene que $\mu_{\bar{A}^{-1}}(x) = \mu_{\bar{A}}(\frac{1}{x})$, para $\forall x \neq 0$ y en general la función de pertenencia \bar{A}^{-1} no es ni LR ni RL. Si se considera una vecindad de $\frac{1}{a}$ se tiene que:

$$\frac{1 - ax}{l_a x} \approx \frac{\frac{1}{a} - x}{\frac{l_a}{a^2}} \quad (13)$$

Que sigue siendo una función de pertenencia RL por lo que se tiene la aproximación

$$(a, l_a, r_a)^{-1}_{LR} \approx (a^{-1}, r_a a^{-2}, l_a a^{-2})_{RL} \quad (14)$$

Si el número borroso \bar{A} es negativo, se puede aplicar la relación $-(\bar{A}^{-1}) = (-\bar{A})^{-1}$

Considerando la *división* de dos números borrosos como la multiplicación del primero por el inverso del segundo, se tiene la aproximación:

$$\bar{A} : \bar{B} = (a, l_a, r_a)_{LR} : (b, l_b, r_b)_{LR} \approx \left(\frac{a}{b}, ar_b + bl_a, al_b + br_a \right)_{LR}$$

Todo este desarrollo esta basado en el Principio de extensión que utiliza la t-norma triangular estándar en que la intersección entre \bar{A} y \bar{B} es el mínimo.

Anexo 2

El comando usado para resolver este problema se muestra a continuación.

```
 $\mu_{A\_}[x\_]:=\backslash[\text{Piecewise}]\{\{(x-A[[1]])/(A[[2]]-A[[1]]), A[[1]]\leq x\leq A[[2]]\},$ 
 $\{(A[[3]]-x)/(A[[3]]-A[[2]]), A[[2]]\leq x\leq A[[3]]\}\}$  ( Cálculo de la función de pertenencia de un número difuso triangular:)
```

Formando los números borrosos triangulares observados

```
SetDirectory[NotebookDirectory[]];
data=Import["SIMULACION.txt","Table"];
(*TableForm[data,TableHeadings->{None,{"x1","x2","yi","pi","qi","cte"}}]*)
newdata=data^T;
n=Length[data];
yi=newdata[[3]];
pi=newdata[[4]];
qi=newdata[[5]];
yobs=Table[{yi[[i]]-pi[[i]],yi[[i]],yi[[i]]+qi[[i]]},{i,n}];
```

Formando los números borrosos triangulares estimados

```
FuncionObj[var_,nvar_]:=
CompoundExpression[
SetDirectory[NotebookDirectory[]];
data=Import["SIMULACION.txt","Table"];
newdata=data^T;
n=Length[data];
h=0;
x1=newdata[[1]];
x2=newdata[[2]];
cte=newdata[[7]];
M={cte,x1,x2};
Clear[AuxM,Auxclj,Auxcrj,Auxaj,cmr,rest];
Auxclj=Map[Function[i,clj[[i]],Range[nvar+1]];
Auxcrj=Map[Function[i,crj[[i]],Range[nvar+1]];
Auxaj=Map[Function[i,aj[[i]],Range[nvar+1]];
AuxM=Map[Function[i,M[[i+1]],var];
coef= $\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{nvar+1} (Auxclj[[k]] + Auxcrj[[k]]) AuxM[[k,i]];$ 
Listcoef=Join[Map[Function[i,0],Range[nvar+1]],Coefficient[coef,Auxclj],Coefficient[coef,Auxcrj]];
Da=Dot[Transpose[AuxM],Auxaj]-(1-h) Dot[Transpose[AuxM],Auxclj]; (*miembro izquierdo de las desigualdades  $\square$ *)
Das=Dot[Transpose[AuxM],Auxaj]+(1-h) Dot[Transpose[AuxM],Auxcrj]; (*miembro izquierdo de las desigualdades  $\square$ *)
a=Map[Function[j,Flatten[{Coefficient[Da[[j]],Auxaj,1],Coefficient[Da[[j]],Auxclj,1],Coefficient[Da[[j]],Auxcrj,1}]],Range[n]];(*coeficientes de las variables en las desigualdades menores e iguales*)
b=Map[Function[j,Flatten[{Coefficient[Das[[j]],Auxaj,1],Coefficient[Das[[j]],
```

```

Auxclj,1],Coefficient[Das[[j]],Auxcrj,1]]],Range[n]];(*coeficientes de las
variables en las desigualdades ≥ *)
cmr=Join[a,b];(*Matriz de los coeficientes de las desigualdades ≤ y ≥ [A]
*)
Obi=Transpose[{yi}-(1-h) Transpose[{pi}];(*miembro derecho de las
desigualdades ≤ *)
Obs=Transpose[{yi}]+(1-h) Transpose[{qi}];(*miembro derecho de las
desigualdades ≥ *)
Obil=Map[Function[j,Flatten[{Obi[[j]],-
1}],Range[n]];Obs1=Map[Function[j,Flatten[{Obs[[j]],1}],Range[n]];
rest=Join[Obil,Obs1];(*Matriz de las variables independientes [b] *)
Restrin=Join[Map[Function[i,{-
Infinity,+Infinity}],Range[nvar+1]],Map[Function[i,{0,+Infinity}],Range[2*nva
r+2]]];Soluc=LinearProgramming[Listcoef,cmr,rest,Restrin];
Return[Soluc]
]
clj={cl1,cl2,cl3,cl4};(*Extensiones izquierdas estimadas*)
crj={cr1,cr2,cr3,cr4};(*Extensiones derechas estimadas*)
aj={a1,a2,a3,a4};(*Valores centrales estimados*)
NVar=2;
Soluc=FuncionObj[{0,1,2},NVar]
aj=Map[Function[i,Soluc[[i]],Range[NVar+1]];
clj=Map[Function[i,Soluc[[NVar+1+i]],Range[NVar+1]];
crj=Map[Function[i,Soluc[[2*(NVar+1)+i]],Range[NVar+1]];
y1[x1_,x2_]:= (aj[[1]]-clj[[1]])+(aj[[2]]-clj[[2]]) x1+(aj[[3]]-clj[[3]]) x2;
y2[x1_,x2_]:= aj[[1]]+aj[[2]] x1+aj[[3]] x2
y3[x1_,x2_]:= (aj[[1]]+crj[[1]])+(aj[[2]]+crj[[2]]) x1+(aj[[3]]+crj[[3]]) x2;
yest=Table[{y1[x1[[i]],x2[[i]]},y2[x1[[i]],x2[[i]]},y3[x1[[i]],x2[[i]]}],{i,n
}];

```

Cálculo del R^2 borroso

$$R_{\text{cuadrado difuso}} = \text{Max}[0, 1 - \frac{\sum_{k=1}^n (Y_i[[k]] - Y_2[x_1[[k]], x_2[[k]])^2}{\sum_{k=1}^n ((Y_i[[k]] - \text{Mean}[Y_i])^2)}]$$

Cálculo del índice de similitud Sim_1

```

lmin=Table[Min[μyobs[[i]][x],μyest[[i]][x]],{i,n}];
lmax=Table[Max[μyobs[[i]][x],μyest[[i]][x]],{i,n}];
Sim=Mean[Integrate[lmin,{x,-Infinity,Infinity}]/Integrate[lmax,{x,-
Infinity,Infinity}]];

```

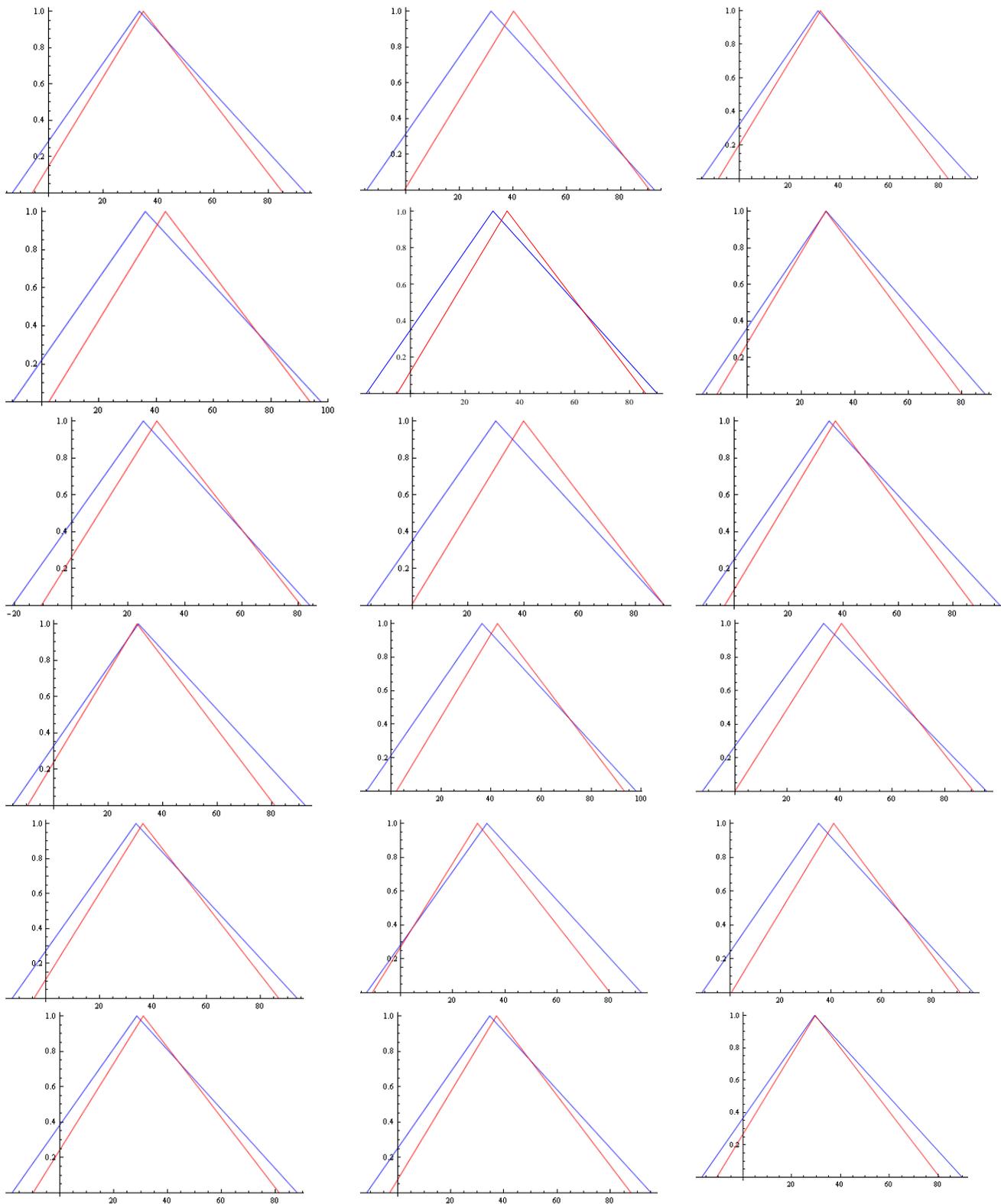
Cálculo del índice de similitud Sim_3

```

B1=Table[Min[{yi[[i]]-pi[[i]],y2[x1[[i]],x2[[i]]]-
y1[x1[[i]],x2[[i]]}],{i,n}];
B2=Table[Max[{yi[[i]]+qi[[i]],y2[x1[[i]],x2[[i]]]+y3[x1[[i]],x2[[i]]}],{i,n
}];
Ri=Table[1/(3 (B2[[i]]-B1[[i]])) * (Abs[y2[x1[[i]],x2[[i]]]-
y1[x1[[i]],x2[[i]]]-(yi[[i]]-
pi[[i]]))+Abs[(y2[x1[[i]],x2[[i]]]+y3[x1[[i]],x2[[i]]]-
(yi[[i]]+qi[[i]))+(Abs[y2[x1[[i]],x2[[i]]]-yi[[i]])],{i,n}];
Sim3=∑i=1n | 1 · Ri | i / n

```

Anexo 3



Anexo 4

Banco Central de Cuba. INFORMACIÓN ECONÓMICA

Año 3

No. 143

Monedas

Moneda	Hoy
Euro*	1.3595
Libra esterlina*	1.4490
Dólar canadiense	1.2159
Yen japonés	93.3500
Franco suizo	1.1073
Peso mexicano	13.6800
Dólar australiano*	0.7078
Peso argentino	3.4618
Corona sueca	7.8746
Yuan	6.8387
Dólar de Hong Kong	7.7539
Real brasileño	2.2910
Rand sudafricano	9.4703
Rublo ruso	24.6490

Las cotizaciones expresan unidades monetarias por un dólar. Los casos señalados con asteriscos (*) indican dólares por unidad monetaria.

Metales Básicos

	Dólar/TM
Níquel	12,405.00
Cobre	3,101.50
Estaño	11,400.00
Plomo	1,079.50
Zinc	1,236.00
Aluminio	1,515.50

Metales Preciosos

	Dólar/onza troy
Oro	860.00
Plata	11.07
Platino	935.00
Paladio	186.00

Azúcar

Alcohol	0.43 Dls/lit
Crudo	11.82 Cts/lb
Refino	327.80 Dls/TM

Energía

Incluye costo, seguro y flete hasta Cuba

Fuel	Dólar/TM
Diesel	214.08
Jet fuel/Costa Golfo U.S.A.	472.66
Jet fuel/Mediterráneo	533.59
Gasolina	571.16
Gas licuado (GLP)	440.38
	498.87

Alimentos

Incluye costo, seguro y flete hasta Cuba

	Dólar/TM
Maíz amarillo	225.00
Trigo panificable	306.00
Frijol de soya	455.00
Harina de soya	389.00
Aceite de soya (USA)	790.50
Harina de trigo (Fra., Méx. y Arg.)	493.33
Leche en polvo entera	2,427.00
Leche en polvo descremada	2,075.00
Paleta de cerdo (con hueso)	2,402.00
Pierna de cerdo con hueso	1,659.00
Pierna de cerdo sin hueso	2,971.00
Pollo entero	2,007.00
Pollo en cuartos (USA)	839.00
Arroz molinado (Vietnam)	430.00
Frijoles (negros/colorados) (China)	928.50
Chícharos (Canadá)	399.00
Café robusta	2,210.00
Café arábica	2,337.00
Cacao	2,638.00

Precio del petróleo crudo ligero (WTI) en la Bolsa de Nueva York:

47.39 dólar/barril