



FACULTAD DE MATEMÁTICA FÍSICA Y COMPUTACIÓN

TRABAJO DE DIPLOMA

Quintaesencia con acoplamiento no mínimo a la materia oscura desde la perspectiva de los sistemas dinámicos

Autores:

Dania González Morales

Yunelsy Nápoles Alvarez

Tutores:

Lic. Genly León Torres

Dr. Tamé González Cruz

Santa Clara

Julio 2008

A Dios por ofrecernos el Universo y la posibilidad de conocerlo.
A mis padres y hermana por su apoyo.

Dania

A mi madre, que no pudo ver esta obra concluida.

Yunelsy

A Dios por hacerse presente en cada momento.
A mis padres y hermana por estar siempre a mi lado.
A mi compañera de tesis por animarme continuamente.
A todos los que de una u otra forma han contribuido a mi formación.

Dania

A Dios por existir.
A mis padres por enseñarme a ser como soy.
A jorgito: tú me diste las fuerzas para seguir adelante.
A mi familia y a mis segundos padres Jorge y Lisy por ayudarme en los momentos más difíciles de mi vida.
A todas las personas que me apoyaron cuando más lo necesitaba.

Yunelsy

A nuestros tutores.
Al grupo de Cosmología por su colaboración.
A nuestros compañeros de aula y demás amigos.
A nuestros profesores.

Dania y Yunelsy

El misterio es lo más hermoso que nos es dado sentir. Es la sensación fundamental, la cuna del arte y la ciencia verdaderos. Quien no la conoce, quien no puede asombrarse ni maravillarse, está muerto...

Albert Einstein

Resumen

En esta tesis se investiga un modelo cosmológico de quintaesencia con acoplamiento no mínimo a la materia oscura. Se caracteriza el comportamiento asintótico del modelo hacia el pasado y hacia el futuro utilizando variables adecuadas en cada caso.

Se demuestra que bajo determinadas condiciones sobre la función de acoplamiento y del potencial la densidad de energía del fluido de fondo y la energía cinética del campo escalar son despreciables en el futuro, dominando la energía potencial del campo escalar. De esta manera el universo evoluciona hacia una solución de vacío de tipo de de Sitter.

Se demuestra que el campo escalar es casi siempre no acotado hacia el pasado (aunque no se excluye la posibilidad de que el campo escalar también diverja hacia el futuro). Asumiendo entonces algunas hipótesis de regularidad sobre el potencial y la función de acoplamiento, se construye e investiga un sistema dinámico apropiado para estudiar el comportamiento del modelo cerca de la singularidad inicial.

Demostramos que para una clase muy general de modelos, la estructura asintótica de las soluciones en el pasado es simple y regular y que esta estructura es independiente de los detalles exactos del potencial, el acoplamiento y la materia de fondo presente. Adicionalmente se obtienen puntos críticos que corresponden a soluciones escalantes de gran importancia en cosmología.

Abstract

In this thesis we investigate a quintessential cosmological model with non minimal coupling to dark matter. By considering appropriate variables we analyze qualitatively and characterize both past and future attractors.

By considering well suited hypothesis on the potential and coupling functions we prove that the future attractor corresponds to the vacuum de Sitter's solution. Those solutions are characterized by negligible contributions of the kinetic and background energy densities to the total energy density. So, potential energy dominates.

By using Hubble-normalized variables we find that the scalar field diverges into the past. This fact does not preclude the divergence of the scalar field towards the future. It is well-known that in the initial singularity the scalar field diverges. So, in order to study the dynamics close to the initial singularity we must study that limit. With this purpose we assume some regularity conditions on the potential and coupling function.

We prove, for a general class of models, that the asymptotic structure of solutions towards the past is simple and regular. Also, it is independent on the features of the potential, the coupling function and the background matter. Additionally, we find the existence of scaling solutions in this limit. These solutions are of great importance in cosmology.

Índice general

Introducción	1
1. Los Modelos Cosmológicos desde la Perspectiva de los Sistemas Dinámicos	4
1.1. Los modelos cosmológicos	4
1.1.1. La estructura de las ecuaciones de campo	6
1.2. Fundamentos de la Cosmología Estándar	9
1.2.1. Homogeneidad e Isotropía: La métrica de Robertson-Walker	9
1.2.2. Dinámica: Las ecuaciones de Friedmann	10
1.2.3. Energía Oscura	13
1.2.4. Acoplamiento entre la Energía Oscura y la Materia Oscura	14
1.3. Sistemas dinámicos en cosmología	15
1.3.1. Linealización de una ED no lineal	15
1.3.2. Conjuntos α y ω límites	17
1.3.3. Caracterización de los subespacios y variedades invariantes	20
2. Quintaesencia con acoplamiento no mínimo a la materia oscura	24
2.1. Modelo	25
2.2. Análisis cualitativo	27
2.2.1. Comportamiento asintótico en el espacio de estados físico	27
2.2.2. Comportamiento asintótico en el espacio de estados Hubble-normalizado	32
2.3. Comportamiento Genérico	40
2.3.1. Condiciones sobre el potencial y la función de acoplamiento	41
2.4. El flujo en la vecindad de $\phi = +\infty$	42
2.4.1. Localización, existencia y condiciones de estabilidad de los puntos críticos. Parámetros cosmológicos	44
2.5. En flujo en la vecindad $\phi = -\infty$	48
2.6. Estructura global del espacio de fases	49

3. Análisis de los resultados	51
3.1. La singularidad inicial del espacio-tiempo	51
3.1.1. Análisis en la vecindad de p_1	51
3.2. Singularidad Global	60
3.3. Soluciones Escalantes	62
3.4. Ejemplos Ilustrativos	63
3.4.1. Acoplamiento con ley de potencia y potencial de Coleman-Weinberg . . .	63
3.4.2. Acoplamiento con ley de potencia y potencial de Albrecht-Skordis	66
Conclusiones	71
Recomendaciones	74
Referencias Bibliográficas	75

Introducción

La cosmología es la ciencia que estudia el origen, la evolución y el destino del Universo. Según los datos observacionales los astrofísicos de la actualidad han llegado a la conclusión de que este se encuentra en una fase de expansión acelerada. Para tratar de explicarlo algunos plantean que existe un tipo de energía con presión negativa que constituye alrededor del 70 por ciento del Universo, aunque no se ha podido detectar por mediciones dinámicas. Este tipo de materia es no luminosa por lo que se le llama Energía Oscura.

Se han propuestos varios modelos cosmológicos en donde está presente la energía oscura. Los más interesantes debido a su basamento firme en la física fundamental son los campos escalares de quintaesencia. Estos modelos son descritos mediante un campo escalar ordinario mínimamente acoplado a la gravedad.

Muchos modelos de quintaesencia asumen que el fluido de fondo y la energía oscura evolucionan independientemente, su generalización más natural son modelos que muestran acoplamiento no mínimo entre ambas componentes. Aunque las observaciones en el sistema solar imponen severas restricciones sobre la posibilidad de acoplamiento no mínimo entre la energía oscura y la materia ordinaria es posible suponer (al menos fenomenológicamente) que la materia oscura no tenga esta suerte y que pueda tener interacciones adicionales (no gravitacionales) entre la materia oscura y la energía oscura sin conflicto con las observaciones.

Para estudiar este tipo de modelos existen diferentes alternativas: Soluciones Exactas, Numéri-

cas, Topológicas, Perturbativas y Cualitativas. Dentro de las cualitativas está La Teoría de los Sistemas Dinámicos muy conveniente para la determinación del comportamiento asintótico en el pasado y en el futuro de modelos cosmológicos, particularmente cuando las ecuaciones que lo definen son un sistema finito y autónomo de ecuaciones diferenciales.

Por todo lo anterior la **hipótesis de investigación** de la cual se parte presupone que es posible realizar un análisis cualitativo del modelo si se tiene que la forma funcional del potencial y la función de acoplamiento son arbitrarias.

Entonces se toma como **objetivo principal** analizar y caracterizar el espacio de fase correspondiente a un modelo cosmológico inspirado en teorías escalares-tensoriales con acoplamiento no mínimo, donde no se especifica la forma funcional del potencial y de la función de acoplamiento.

Los siguientes **objetivos específicos** tributan al objetivo principal de la presente tesis:

- Investigar un modelo cosmológico que pueda tener soluciones escalantes (aquellas donde la densidad de energía oscura y la densidad de la materia de fondo son proporcionales).
- Analizar bajo qué condiciones generales puede escogerse arbitrariamente la forma funcional del potencial y de la función de acoplamiento para soluciones cosmológicas en una vecindad de la singularidad inicial.

La **novedad** de los resultados presentados en esta tesis radica en la posibilidad de extraer información útil sobre la dinámica de la expansión cósmica, de la vecindad de la singularidad inicial, y la existencia de soluciones escalantes en modelos escalar-tensoriales de quintaesencia con acoplamiento no-mínimo y potenciales de autointeracción arbitrarios, a través del estudio de las propiedades asintóticas de estos modelos.

La tesis está formada por tres capítulos, el primero de los cuales contiene una fundamentación

teórica de la Cosmología Estándar y de la Teoría de los Sistemas Dinámicos. En el segundo capítulo se hace un análisis completo del modelo que se propone, y en el tercero se exponen los resultados más importantes a partir del estudio realizado, así como su interpretación física.

Capítulo 1

Los Modelos Cosmológicos desde la Perspectiva de los Sistemas Dinámicos

En 1998 dos grupos de investigadores, uno dirigido por Saul Perlmutter (Supernova Cosmology Project Collaboration) y el otro por Brian Schmidt (Supernova Search Team Collaboration), de forma independiente descubrieron que nuestro Universo se encuentra en una fase de expansión acelerada. Estas y otras observaciones han permitido establecer un nuevo paradigma cosmológico. En este nuevo paradigma se ha establecido el contenido material del Universo que observamos hoy.

Existen muchos modelos los cuales permiten describir la fase actual de expansión acelerada del Universo. Algunos de estos modelos incluyen la energía oscura [1] como causante de la expansión acelerada, y otros modelos no incluyen a la energía oscura.

Para describir la energía oscura algunos autores proponen un campo de naturaleza escalar. A estos modelos con campos escalares, que representan una constante cosmológica dinámica, se les denomina Modelos de Quintaesencia.

1.1. Los modelos cosmológicos

Los modelos cosmológicos representan el universo en una escala particular [2].

Cada modelo cosmológico queda definido especificando ([3, 4, 5, 6, 7, 8]):

- (1) la *geometría del espacio-tiempo*¹, que se determina por la métrica $g_{\alpha\beta}(x^\gamma)$.
- (2) la *materia presente*, que se determina por el tensor de energía-momento $T_{\alpha\beta}$.
- (3) la *interacción entre la geometría y la materia* (ver [9]) que está representada por las *ecuaciones de Einstein del campo gravitatorio* (EEC) dadas por

$$G_{\alpha\beta} \equiv 8\pi G T_{\alpha\beta} \quad (1.1.1)$$

donde $G_{\alpha\beta}$ es el tensor de Einstein, G es la constante de gravitación y $T_{\alpha\beta}$ es el tensor de energía momento. A través de las *identidades de Bianchi (contraídas dos veces)*, se garantiza la conservación del tensor de energía-momento total

$$\nabla_\beta G^{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow \nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0, \quad (1.1.2)$$

Usualmente se toma como hipótesis una idealización de la materia. En esta tesis se tomarán fuentes materiales del tipo fluido perfecto no inclinado y campo escalar.

Las fuentes del tipo fluido perfecto y campo escalar se describen de la siguiente manera:

1. Un *fluido perfecto no inclinado* es descrito por su 4-velocidad $\vec{u}$ (la cual es la 4-velocidad fundamental), su densidad de energía ρ y su presión p , con ecuación de estado barotrópica $p = p(\rho)$. El tensor de energía-momento es

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta + p(g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta), \quad u_\alpha u^\alpha = -1, \quad (1.1.3)$$

Se trabajará con una ecuación de estado de la forma $p = (\gamma - 1)\rho$, donde γ es una constante que puede tener los valores: $\gamma = 1$ (polvo), y $\gamma = 4/3$ (radiación), especialmente

¹La geometría del espacio-tiempo generalmente está descrita por la Relatividad General (este tipo de descripción es el que será usado en la presente investigación) [10, 11, 12, 13]

²Se emplearán unidades geométricas donde $c = 1 = 8\pi G/c^2$ para un fácil manejo del modelo.

para etapas tempranas del Universo, $\gamma = 0$ que corresponde a la Constante Cosmológica (CC) y el valor $\gamma = 2$ es en ocasiones considerado, correspondiendo a un fluido “rígido”, y $\gamma > 2$ corresponde a fluidos con propagación supralumínica, estos últimos no tienen mucho sentido físico porque las velocidades en él son mayores a la velocidad de la luz. Se tomarán de acuerdo a los supuestos de la investigación que $0 \leq \gamma \leq 2$, y $\gamma \neq 4/3$.

2. Un *campo escalar* es descrito por un tensor de energía-momento de la forma

$$T_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi - \left[\frac{1}{2} \nabla_\gamma \phi \nabla^\gamma \phi + V(\phi) \right] g_{\alpha\beta}, \quad (1.1.4)$$

Si $\nabla_\alpha \phi$ es temporal, podemos definir un vector temporal $\vec{u}$ normal a las superficies $\phi = \text{const.}$:

$$u^\alpha = \frac{\nabla^\alpha \phi}{(-\nabla_\gamma \phi \nabla^\gamma \phi)^{\frac{1}{2}}}.$$

Entonces, $T_{\alpha\beta}$ tiene la forma algebraica de un fluido perfecto, con,

$$\rho = -\frac{1}{2} \nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi + V(\phi), \quad p = -\frac{1}{2} \nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi - V(\phi).$$

La ecuación del movimiento del campo escalar es descrita por la ecuación de Klein-Gordon

$$\nabla^\alpha \nabla_\alpha \phi - V'(\phi) = 0.$$

1.1.1. La estructura de las ecuaciones de campo

Antes de analizar las posibilidad de resolver las ecuaciones de campo (1.1.1) consideraremos algunas de las propiedades físicas y matemáticas mas importante.

La ecuaciones de campo (en unidades geometrizadas) se pueden escribir como

$$G_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}.$$

Ellas pueden ser interpretadas de tres formas diferentes [10]:

1. Las ecuaciones de campo son ecuaciones diferenciales para determinar el tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ para *un tensor de energía-momento dado*. O sea, primero se especifica la distribución de materia y luego se resuelven las ecuaciones para establecer la geometría resultante. El caso más importante es cuando $T_{\alpha\beta} = 0$, en este caso nos concentraríamos en las soluciones de vacío.
2. Las ecuaciones del campo son ecuaciones las cuales pueden resolverse para obtener el tensor de energía-momento *una vez dado el tensor métrico*. Se pensó originalmente que esta podría ser una forma productiva de determinar tensores de energía-momento. Simplemente se seleccionan diez funciones arbitrarias de las coordenadas, o sea, el tensor simétrico $g_{\alpha\beta}$, luego se calcula $G_{\alpha\beta}$ y se obtiene $T_{\alpha\beta}$ mediante las ecuaciones de campo. Rara vez esto funciona en la práctica por que el tensor $T_{\alpha\beta}$ resultante usualmente no tiene sentido físico y puede violar las condiciones de energía. En particular, frecuentemente la densidad de energía se hace negativa en alguna región, la cuál se rechaza como física debido a que el carácter positivo de la densidad de energía domina las teorías de la gravitación.
3. Las ecuaciones de campo consisten de diez ecuaciones conectando veinte cantidades, las diez componentes del tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ y las diez componentes de $T_{\alpha\beta}$. Luego, desde este punto de vista, las ecuaciones del campo pueden verse como ligaduras sobre la selección simultánea de $g_{\alpha\beta}$ y $T_{\alpha\beta}$. Este acercamiento se utiliza cuando especificamos parcialmente la geometría y la distribución de materia del universo a partir de consideraciones físicas. Así, las ecuaciones se utilizan para ensayar y completar ambas cantidades simultáneamente.

Determinación y no linealidad.

En el caso más simple en el que consideramos resolver $G_{\alpha\beta} = 0$ para $g_{\alpha\beta}$. A primera vista el problema parece bien planteado: existen diez ecuaciones y diez incógnitas $g_{\alpha\beta}$. Sin embargo, las ecuaciones no son todas independientes, sino que están conectadas por cuatro restricciones diferenciables, a saber, las identidades de Bianchi (1.1.2). De esta manera nos enfrentamos a un problema indeterminado, por que hay menos ecuaciones que incógnitas. No se puede, sin embargo, esperar que el sistema sea determinado para cualquier conjunto $g_{\alpha\beta}$, dado que ellas pueden transformarse de acuerdo a cuatro transformaciones coordenadas

$$x^\alpha \rightarrow x'^\alpha = x'^\alpha(x), \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3).$$

Podemos de hecho usar estos cuatro grados de libertad para imponer cuatro condiciones a $g_{\alpha\beta}$, llamadas condiciones coordenadas o de calibración. Por ejemplo podemos introducir coordenadas normales o Gaussianas en las cuales $g_{00} = -1$, $g_{0\alpha} = 0$. Las restantes seis incógnitas pueden ser determinadas por las seis ecuaciones independientes.

Las ecuaciones de campo son muy difíciles de tratar debido a que son no lineales. Por tanto, no existe un Principio de Superposición; o sea, que dadas dos soluciones, no podemos sumarlas para obtener una tercera solución. Visto de esta manera esto significa que no es posible analizar el complicado problema físico separándolo en partes más simples. La no linealidad se revela físicamente a sí misma: si bien las fuentes materiales crean un campo gravitatorio, que es una deformación de la geometría subyacente, la propia materia se tiene que mover según dicta esa geometría, y así sucesivamente. Visto de otra manera, el campo gravitatorio se acopla a si mismo. Esta no linealidad implica que las ecuaciones del campo, en general, son muy difíciles de resolver.

La mayoría de las soluciones exactas obtenidas hasta la fecha, se obtuvieron imponiendo condiciones de simetría, siendo la la simetría esférica la más simple de ellas.

Es conocido que las ecuaciones en derivadas parciales no lineales admiten una amplia clase de soluciones, muchas de las cuales son no físicas. Puede ser que un gran número de soluciones exactas sean no físicas también, dadas las hipótesis de simetría impuestas para obtenerlas.

Idealmente se quiere conocer que dice la teoría en situaciones físicas importantes. En los casos en que las simetrías están ausentes, o donde las hipótesis de simetría no son suficientemente fuertes para determinar una solución, entonces debemos recurrir a métodos aproximados. Estos métodos se basan en que la mayoría de los campos gravitacionales que se encuentran en la naturaleza son débiles. También podemos valernos de la debilidad de los campos gravitacionales lejos de las fuentes para aplicar los métodos aproximados. También podemos aplicar métodos asintóticos aplicados a fuentes aisladas. La debilidad significa, desde el punto de vista matemático, que unas ecuaciones son más importantes que otras.

1.2. Fundamentos de la Cosmología Estándar

1.2.1. Homogeneidad e Isotropía: La métrica de Robertson-Walker

El Principio Cosmológico describe al universo como homogéneo e isótropo (ver [14]) en la macro-escala. Esto significa que el universo es uniforme, el mismo en todas partes (homogeneidad), y en cualquier dirección (isotropía). A partir de las observaciones en galaxias y cúmulos de galaxias se evidencia que en la pequeña escala, el universo ni es homogéneo ni es isótropo, luego, para invocar el principio cosmológico, debemos presumir una escala suficientemente grande donde pueda afirmarse como válido.

El espacio-tiempo más general consistente con la homogeneidad y la isotropía es:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)dx^2 + a^2(t)f^2(x)(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2), \quad (1.2.5)$$

donde $f(x)$ puede ser $f(x) = \sinh x$, $f(x) = x$ o $f(x) = \sin x$. Este es un hecho puramente geométrico, independiente de los detalles de la Teoría General de la Relatividad. Se utilizaron las coordenadas polares esféricas (x, ϑ, φ) dado que la isotropía espacial implica simetría esférica en cada punto. El tiempo t , es el tiempo comóvil³. El factor de escala del universo es $a(t)$ y representa la diferencia entre dos puntos del espacio en un tiempo determinado. A partir de este se mide el ritmo de expansión del universo dado por el parámetro de Hubble $H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$.

Haciendo un simple cambio a la coordenada radial se tiene un nuevo elemento de línea de la forma:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad d\Omega^2 = (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (1.2.6)$$

donde

1. $k = -1$ si $f(x) = \sinh x$
2. $k = 0$ si $f(x) = x$
3. $k = 1$ si $f(x) = \sin x$

Geométricamente k describe la curvatura de las secciones espaciales, describiendo al universo abierto si $k = -1$, plano si $k = 0$ y cerrado si $k = 1$.

1.2.2. Dinámica: Las ecuaciones de Friedmann

Como se mencionó la métrica Robertson Walker (RW) es consecuencia de la homogeneidad e isotropía de las secciones espaciales.

³el tiempo comóvil es el tiempo medido por un observador localizado en coordenadas espaciales constantes.

La dinámica del universo está descrita mediante ecuaciones diferenciales que gobiernan al factor de escala. Estas se obtienen al aplicarle las ecuaciones de Einstein a la métrica RW.

El tensor de energía momento con presión isotrópica es compatible con esta métrica. Este tensor toma la forma:

$$T_{uv} = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & pg_{ij} \end{pmatrix}$$

donde g_{ij} representa la métrica espacial.

A partir de aquí se obtienen dos ecuaciones independientes:

1. La primera es conocida como ecuación de Friedmann:

$$H^2 \equiv \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{1}{3} \sum_i \rho_i - \frac{k}{a^2} \quad (1.2.7)$$

donde el punto denota la derivada con respecto al tiempo cósmico y el índice i denota los posibles tipos de energía del universo. Esta ecuación es una restricción puesto que no podemos especificar libremente a $\dot{a}$, porque está determinada en términos de la densidad de energía y de la curvatura.

2. La segunda ecuación corresponde a una ecuación de evolución dada por:

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -\frac{1}{2} \sum_i \rho_i - \frac{k}{2a^2} \quad (1.2.8)$$

Combinando las ecuaciones 1.2.7 y 1.2.8 se obtiene la ecuación de aceleración

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6} \sum_i (\rho_i + 3p_i) \quad (1.2.9)$$

La ecuación de Friedmann relaciona el ritmo de crecimiento del factor de escala llamado parámetro de Hubble al contenido total de la densidad de materia del universo. Podemos usar esta ecuación para definir en un tiempo dado la densidad crítica $\rho_c = 3H^2$

Podemos entonces definir un parámetro de densidad $\Omega_{tot} \equiv \frac{\rho}{\rho_c}$ que relaciona la densidad de energía total del universo con su geometría local según:

$$\Omega_{tot} > 1 \Leftrightarrow k = +1$$

$$\Omega_{tot} = 1 \Leftrightarrow k = 0$$

$$\Omega_{tot} < 1 \Leftrightarrow k = -1$$

La conservación de la energía es expresada en TGR por la nulidad de la divergencia covariante del tensor de energía momento

$$\nabla_\mu T^{\mu\eta} = 0$$

Aplicando esto a la métrica de Robertson-Walker y el tensor de energía-momento de un fluido perfecto conduce a una sola ecuación de conservación:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0$$

Esta ecuación no es independiente de la ecuación de Friedmann y de la de aceleración, pero se necesita por consistencia. Ella implica que la expansión del universo puede conducir a cambios locales de la densidad de energía.

Resolviendo la ecuación de conservación obtenemos cómo evoluciona la densidad de energía en función del factor de escala:

$$\rho(a) \propto \frac{1}{a(t)^{3(1+\omega)}}$$

Polvo y radiación son los tipos de energía relevantes en los inicios de la evolución. En años recientes se ha hecho claro que la densidad de energía dominante en el universo actual, sino energía oscura. Esta componente se caracteriza por tener un parámetro de ecuación de estado

$$\omega < -\frac{1}{3}.$$

1.2.3. Energía Oscura

Si la Relatividad General es correcta, la aceleración cósmica implica que debe existir una densidad de energía oscura la cual disminuye lentamente con la expansión del universo. Esto puede verse directamente a partir de la ecuación 1.2.7, la que implica que:

$$\dot{a}^2 \propto a^2 \rho + cte$$

De esta relación se puede deducir que la única forma de que exista aceleración en un universo en expansión es si ρ decrece más lentamente que a^{-2} . Ni la materia ($\rho_m \propto a^{-3}$) ni la radiación ($\rho_r \propto a^{-4}$) satisfacen esta condición. La densidad de vacío es estrictamente constante, pero los datos son consistentes con fuentes de energía oscura distribuidos uniformemente y que varían lentamente con el tiempo. La posibilidad más simple en este sentido involucra el mismo tipo de fuente típicamente invocada en los modelos de inflación en el inicio del universo, un campo escalar ϕ con un rodamiento suave sobre su potencial, conocido como quintaesencia [15, 16].

La densidad de energía del campo escalar es la suma de las energías cinéticas, gradiente y potencial del mismo,

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi). \quad (1.2.10)$$

Para un campo homogéneo ($\nabla\phi \approx 0$), la ecuación del movimiento del universo en expansión es:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \quad (1.2.11)$$

Si la pendiente del potencial es bastante plana, tendríamos soluciones para las cuales es casi constante a lo largo del espacio y evolucionando gradualmente con el tiempo, la densidad de energía es:

$$\rho_\phi \approx cte. \quad (1.2.12)$$

Por tanto, un campo escalar con rodar lento es un candidato apropiado para la energía oscura. Hasta la fecha se han considerado campos escalares que tienden gradualmente a cero. Estos pueden tener propiedades cosmológicas interesantes, incluyendo comportamiento escalante que hacen que la densidad de energía actual sea independiente en gran medida de las condiciones iniciales.

Ellos no proveen, sin embargo, una solución al problema de la coincidencia porque la era en la cual el campo escalar comienza a dominar sigue estando determinada por parámetros ajustados finamente en la teoría.

1.2.4. Acoplamiento entre la Energía Oscura y la Materia Oscura

Muchos modelos de quintaesencia asumen que la materia de fondo y la energía oscura evolucionan independientemente, de modo que su generalización son modelos con acoplamiento no mínimo entre ambas componentes. Aunque los resultados experimentales del sistema solar imponen restricciones sobre la posibilidad entre la energía oscura y la materia ordinaria [17], dada la naturaleza desconocida de la materia oscura es posible tener interacciones no gravitacionales entre las componentes de energía oscura y materia oscura sin conflicto con las observaciones.

Como los modelos con acoplamiento no mínimo implican interacción (intercambio de energía) entre la materia oscura y la energía oscura estos modelos pueden aportar nuevos rasgos cualitativos al problema de la coincidencia [18, 19]. Se ha mostrado que, en particular, un acoplamiento adecuado puede generar soluciones escalantes que sean libres del problema de la coincidencia.

1.3. Sistemas dinámicos en cosmología

Un sistema dinámico es un sistema complejo que cambia o evoluciona en el tiempo. En cosmología muchos modelos, que describen al Universo en el pasado y el futuro, se expresan mediante sistemas dinámicos. Estos sistemas son casi siempre no lineales, por lo que es muy difícil obtener una solución exacta de ellos, es entonces cuando se emplean vías alternativas dentro de las cuales están los métodos cualitativos que posibilitan caracterizar el modelo sin tener que resolverlo explícitamente.

1.3.1. Linealización de una ED no lineal

Una ecuación diferencial que representa la evolución de un modelo del universo en un espacio de estados X se define por:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{f} : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1.3.13)$$

donde se asume que f es al menos de clase C^1 y generalmente es una función no lineal. Se dice que es una ecuación diferencial autónoma porque la función f no depende explícitamente de t . El vector $x \in R^n$ es llamado vector de estado del sistema y R^n es llamado espacio de estado o espacio de fase.

Una solución de la ecuación diferencial (1.3.13) es una función $\psi : R \rightarrow R^n$ la cual satisface que $\psi'(t) = f(\psi(t))$, para todo $t \in R$ en el dominio de ψ . La imagen de la curva solución ψ en R^n es llamada órbita de la ED. Esto implica que el campo vector f es tangente a la órbita que pasa por x . La evolución del sistema en el tiempo es descrito por el movimiento de un punto $x \in R^n$ representando el estado del sistema físico a través de una órbita de la ED en R^n .

Para obtener una información cualitativa sobre las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales no lineal como (1.3.13) hay que realizar su linealización en cada punto crítico a .

Esto nos permite, en caso que sea posible, caracterizar la estabilidad local del sistema en la vecindad del punto crítico mediante el análisis del flujo de su linealización [20, 21, 22, 23, 24, 25].

Definición 1.3.1 *Un punto $a \in \mathbb{R}^n$ se dice que es un punto crítico de la ED (1.3.13) si satisface que $f(a) = 0$.*

Para definir el flujo asociado a la ecuación diferencial (1.3.13) se debe hacer notar que siempre es posible modificar (1.3.13) con $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ de manera tal que las órbitas no se modifiquen, pero tal que todas las soluciones estén definidas para todo $t \in \mathbb{R}$ (ver la def 4.1, [25], pp 88).

Definición 1.3.2 *Dada la ED (1.3.13) donde $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase $C^1(\mathbb{R}^n)$, tal que sus órbitas están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$. Sea $\psi_a(t) : (c, d) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la única solución maximal que satisface $\psi_a(0) = a \in \mathbb{R}^n$, donde (c, d) denota el intervalo máximo de definición. El flujo de la ED se define como un grupo monoparamétrico de aplicaciones $\{\Phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ tales que $\Phi_t : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\Phi_t(a) = \psi_a(t)$ para todo $a \in X \subset \mathbb{R}^n$.*

La aproximación lineal de f se escribe a partir de la matriz de derivadas

$$\mathbf{A} = Df(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \Big|_{x=a}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (1.3.14)$$

(donde f_i son las funciones componentes de f) según:

$$f(x) = f(a) + \mathbf{A}(x - a) + R(x, a), \quad (1.3.15)$$

donde $\mathbf{A}(x - a)$ denota la matriz $n \times n$ de derivadas evaluada en a actuando sobre el vector $x - a$, y $R(x, a)$ es el término residual⁴.

⁴Del Análisis Matemático real en varias variables se tiene que si f es de clase $C^1(\mathbb{R}^n)$, entonces la magnitud del error $\|R(x, a)\|$ tiende a cero más rápido que la magnitud del desplazamiento $\|x - a\|$.

Si $a \in \mathbb{R}^n$ es un punto crítico de (1.3.13), podemos usar (1.3.15) suponiendo que f es de clase $C^1(\mathbb{R}^n)$ para escribir (1.3.13) en la forma

$$(NL) : \dot{x} = \mathbf{A}(x - a) + R(x, a) \quad (1.3.16)$$

Haciendo $u = x - a$ podemos asociar a la ED no lineal la ED lineal

$$(L) : \dot{u} = \mathbf{A}u \quad (1.3.17)$$

la cual es llamada *la linealización de (NL) en el punto crítico $a \in \mathbb{R}^n$* .

En general, para un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales (1.3.13), es sumamente difícil determinar explícitamente el flujo asociado dado que no existen métodos de solución generales. El propósito de aplicar técnicas de la teoría cualitativa de los sistemas dinámicos es precisamente describir propiedades del flujo no lineal sin conocerlo explícitamente.

1.3.2. Conjuntos α y ω límites

Sea la la ED $x' = f(x)$, con $x \in \mathbb{R}^n$, la evolución de un sistema físico cuyo flujo asociado es $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$. En este caso el comportamiento del sistema cuando $t \rightarrow \infty$, comenzando en un estado inicial a . Para analizar este tipo de comportamiento se introduce la siguiente definición:

Definición 1.3.3 (Conjunto ω -límite [21, 20]) *Consideremos la ED $x' = f(x)$ en $\mathbb{R}^n$, y el flujo asociado $\{\Phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$. Dado un punto inicial $a \in \mathbb{R}^n$, se dice que un punto $p \in \mathbb{R}^n$ es un punto ω -límite de a si existe una sucesión $\{t_n\}$, con $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{t_n}(a) = p$. El conjunto de todos los puntos ω -límites de a es llamado conjunto ω -límite de a , y se denota $\omega(a)$ ⁵.*

De forma análoga se define el conjunto α -límite tomando $t_n \rightarrow -\infty$

⁵Es importante notar que los conjuntos ω -límite son no vacíos [20, 21]

Proposición 1.3.1 ([21, 20]) *Un conjunto w -límite, $w(a)$, de un flujo $\{\Phi_t\}$ es una órbita completa del flujo, o es la unión de una o varias órbitas completas.*

El conjunto $\omega(a)$ describe el comportamiento asintótico del futuro del sistema físico cuando comienza en el estado inicial a y el conjunto $\alpha(a)$ describe el comportamiento asintótico del sistema físico hacia el estado inicial a . Esto motiva que se defina el concepto de atractor⁶.

Cuando el espacio de estados es compacto cada órbita tendrá asociado un conjunto α y ω límites no vacíos, así existirán atractores, tanto del pasado como del futuro.

Definición 1.3.4 (Atractor [26]) *Dado un flujo Φ_t en R^n el atractor del futuro (pasado) A^+ (A^-) es el conjunto invariante cerrado más pequeño tal que $\omega(a) \subset A^+$ ($\alpha(a) \subset A^-$) para todo $a \in R^n$ excepto por un conjunto de medida cero.*

Conjuntos invariantes

En la teoría de sistemas dinámicos un concepto de mucha importancia es el de conjunto invariante.

Definición 1.3.5 ([23]) *Un conjunto $\Lambda \subset M$ se dice que es invariante bajo el flujo Φ_t si $\Phi_t(x) \in \Lambda$ para todo $x \in \Lambda$ y para todo $t \in \mathbb{R}$. Los conjuntos invariantes se dicen que son positivamente (negativamente) invariantes si las órbitas de sus elementos permanecen dentro del conjunto invariante para $t \geq 0$ ($t \leq 0$).*

Existen distintos tipos de conjuntos invariantes entre ellos: los puntos críticos, ciclos, órbitas cerradas y órbitas correspondientes a cada punto regular. En particular los puntos críticos y las órbitas cerradas atraen o repelen órbitas del espacio de fase que no están contenidos en ellos. Se caracterizarán las órbitas más importantes.

⁶El atractor de un flujo es el conjunto invariante más pequeño que atrae a la mayoría de las órbitas

Definición 1.3.6 Sea x_0 un punto ordinario, la órbita $\gamma(x_0)$ se dice que es periódica si existe un $T > 0$ tal que $\Phi_T(x_0) = x_0$.

Definición 1.3.7 Sea x_0 un punto ordinario, tal que $\gamma(x_0)$ es no periódica, se dice que es recurrente si para toda vecindad $\vartheta(x_0)$ y para todo $T \in \mathbb{R}$ existe un $t > T$ tal que $\Phi_t(x_0) \in \vartheta(x_0)$.

Definición 1.3.8 Una órbita se llama órbita homoclínica si ella conecta a un punto crítico consigo mismo.

Proposición 1.3.2 (Proposición 4.1 de [25], pp 92) Consideremos la EDO $x' = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ con flujo Φ_t . Sea $Z : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C^1(\mathbb{R}^n)$ la cual satisface $Z' = \alpha Z$, donde $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua. Entonces los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ definidos por $Z > 0$, $Z = 0$, $Z < 0$ son conjuntos invariantes del flujo Φ_t .

Las funciones monótonas hacen posible la simplificación de la dinámica de un modelo y pueden utilizarse para determinar los atractores del pasado y del futuro. El concepto de monotonía se relaciona con el de conjunto invariante como sigue:

Definición 1.3.9 Dado el flujo Φ_t sobre $\mathbb{R}^n$, si S un conjunto invariante de Φ_t , y $Z : S \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua entonces Z es una función monótona decreciente (creciente) para el flujo sobre S (ver definición en la referencia [25], pp 93) si para todo $x \in S$, $Z(\Phi_t(x))$ es una función monótona decreciente (creciente) de t .

Se puede además formular la siguiente proposición:

Proposición 1.3.3 (Ref. [25], pp 93) Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto invariante del flujo Φ_t . Si existe una función monótona $Z : S \rightarrow \mathbb{R}$ sobre S , entonces S no contiene puntos críticos, órbitas periódicas, órbitas recurrentes u órbitas homoclínicas.

En particular, es posible obtener información acerca de los conjuntos α y ω -límite y los atractores del pasado y el futuro utilizando de manera combinada el Principio de Invariación de LaSalle (teorema (1.3.4)) y el Principio de Monotonía (teorema (1.3.5)).

Teorema 1.3.4 (Principio de Invariación de LaSalle [25], pp 103) *Consideremos la ED: $x' = f(x)$ definida sobre $\mathbb{R}^n$, con flujo Φ_t . Sea S un conjunto cerrado, acotado y positivamente invariante (conjunto atrapante) de Φ_t y sea Z una función monótona C^1 . Entonces, para todo $x_0 \in S$, se cumple que $\omega(x_0) \subset \{x \in S \mid Z' = 0\}$, donde $Z' = \nabla Z \cdot f$.*

El siguiente teorema puede ser considerado como una generalización del teorema (1.3.4).

Teorema 1.3.5 (Principio de Monotonía [25], pp 103) *Sea Φ_t un flujo sobre $\mathbb{R}^n$ y S un conjunto invariante. Sea $Z : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C^1(\mathbb{R}^n)$ cuyo rango es el intervalo (a, b) donde $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $a < b$. Si Z es decreciente sobre órbitas en S , entonces para todo $x \in S$, $\omega(x) \subset \{s \in \bar{S} - S \mid \lim_{y \rightarrow s} Z(y) \neq b\}$ y $\alpha(x) \subset \{s \in \bar{S} - S \mid \lim_{y \rightarrow s} Z(y) \neq a\}$, siendo $\omega(x)$ ($\alpha(x)$) el conjunto de los atractores del pasado (atractores del futuro) correspondientes al punto x .*

1.3.3. Caracterización de los subespacios y variedades invariantes

Sea la ecuación diferencial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ definida en $\mathbb{R}^n$ podemos determinar los valores propios de la matriz $\mathbf{A}$ y los vectores propios asociados los cuales generan tres subespacios de $\mathbb{R}^n$: E^s , E^u y E^c . De esta forma el espacio de estados es particionado como se muestra a continuación:

$$E^s \oplus E^u \oplus E^c = \mathbb{R}^n. \quad (1.3.18)$$

El subespacio E^s se denomina subespacio estable y contiene todos los vectores propios asociados a los valores propios que tienen parte real negativa, E^u se denomina subespacio inestable y

está formado por todos los vectores propios asociados a los valores propios con parte real positiva, E^c que es el subespacio centro generados por los vectores propios cuyos valores propios tienen parte real nula. Los subespacios estable e inestable se caracterizan por las propiedades siguientes:

$$\mathbf{x} \in E^s \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x} = 0 \quad (1.3.19)$$

$$\mathbf{x} \in E^u \Rightarrow \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x} = 0. \quad (1.3.20)$$

Esto describe el comportamiento asintótico: todos los estados iniciales en el subespacio estable son atraídos por el punto crítico $\mathbf{x} = 0$ y todos los estados iniciales en el subespacio inestable son repelidos por $\mathbf{x} = 0$.

Si el sistema no es lineal se pueden definir las variedades $\mathcal{E}^{(s,u,c)}$ (variedad estable, inestable y centro, respectivamente) en el punto crítico, estas variedades son tangentes a los correspondientes subespacios $E^{(s,u,c)}$ de la linealización en el punto crítico (subespacio estable, inestable y centro, respectivamente). Todos los puntos en $\mathcal{E}^s$ convergen asintóticamente al punto crítico cuando el tiempo transcurre ($t \rightarrow \infty$), mientras que todas las órbitas en $\mathcal{E}^u$ convergen asintóticamente al punto fijo cuando $t \rightarrow -\infty$. La variedad $\mathcal{E}^c$ contiene todas las órbitas cuyo comportamiento asintótico no puede deducirse mediante el análisis lineal.

Equivalencia Topológica

Definición 1.3.10 *Se dice que un punto crítico es hiperbólico si cada valor propio λ de la matriz A tiene parte real no nula.*

Un sistema de ecuaciones diferenciales lineal tiene asociado el flujo $\{\bar{\Phi}_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ definido por

$$\bar{\Phi}_t : \bar{a} \in \bar{U} = V(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n; \bar{a} \rightarrow \bar{a} e^{t\mathbf{A}} \quad (1.3.21)$$

el cual es (localmente) topológicamente equivalente al flujo del sistema no lineal si a es un punto crítico hiperbólico. Este resultado es conocido como teorema de Hartman-Grobman y se formula de la manera siguiente:

Teorema 1.3.6 (Hartman-Grobman [27]) *Sea a un punto crítico de la ED $x' = f(x)$ en $\mathbb{R}^n$, donde $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación de clase $C^1(\mathbb{R})$. Si todos los valores propios λ_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, de la matriz $\mathbf{A} = Df(a)$ satisfacen $\text{Re}(\lambda_i) \neq 0$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ entonces existe un homeomorfismo $h : \bar{U} \rightarrow U$ de una vecindad $\bar{U}$ de $\mathbf{0}$ sobre una vecindad U de a que mapea órbitas del flujo lineal $\{e^{t\mathbf{A}}\}_{t \in \mathbb{R}}$ sobre órbitas del flujo no lineal Φ_t de la ED (1.3.13), preservando la dirección del parámetro t .*

Cuando la matriz A tiene valores propios puramente imaginarios y, en particular, cuando tiene un valor propio cero el análisis es más complicado que en el caso de los puntos estacionarios hiperbólicos. En este caso no se puede aplicar el teorema de Hartman-Grobman. No obstante existe una generalización de este teorema a puntos estacionarios no hiperbólicos el cual reduce el estudio del comportamiento cualitativo de un sistema en las cercanías de un punto estacionario al estudio de las soluciones en la variedad central.

Teorema 1.3.7 (Variedad Central) *Sea Φ_t el flujo de la ED (1.3.13) entonces existe localmente una variedad centro, $\mathcal{E}^s$ conteniendo el origen y siendo invariante bajo Φ_t tal que $\mathcal{E}^c$ tiene un espacio tangente E^c en $x = 0$. Esta variedad puede ser cerrada y de clase C^k para $k \in \mathbb{N}$. Además existen dos variedades localmente suaves $\mathcal{E}^s$ y $\mathcal{E}^u$ estables e inestables respectivamente, las cuales contienen a $x = 0$, y son invariantes bajo Φ , tienen los espacios tangentes E^s y E^u respectivamente y son tales que $\Phi_t|_{\mathcal{E}^s}$ es una contracción y $\Phi_t|_{\mathcal{E}^u}$ es una expansión.*

Este teorema es usado para la realización de los cálculos que aportarán una información concreta

de la naturaleza de las soluciones.

Capítulo 2

Quintaesencia con acoplamiento no mínimo a la materia oscura

La TGR tiene muchas teorías alternativas. Una de estas es la Teoría Escalar-Tensorial (TET) [28, 29]. En esta teoría no solo se combinan dos tipos de campo, el campo escalar y el tensor métrico, sino que se construye a partir de fundamentos sólidos de la TGR en donde el campo escalar juega un papel importante, debido a que está acoplado de forma no mínima.

Los límites observacionales a las TETs incluyen pruebas en el sistema solar [30] y pruebas cosmológicas tales como las restricciones de la nucleosíntesis primordial [31]. La acción para una clase general de TETs, escrita en el llamado marco de Einstein (ME) está dada por [32]:

$$S_{ME} = \int_{M_4} d^4x \sqrt{|g|} \left\{ \frac{1}{2}R - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - V(\phi) + \chi(\phi)^{-2}\mathcal{L}_m \right\} \quad (2.0.1)$$

En esta ecuación R es el escalar de curvatura, ϕ es el campo escalar, relacionado mediante transformaciones conformes [33] con el campo de Brans-Dicke, χ . El potencial de autointeracción del campo escalar es $V(\phi)$, $\chi(\phi)^{-2}$ es el acoplamiento materia-energía oscura, $\mathcal{L}_m(\mu, \nabla\mu, \chi(\phi)^{-1}g_{\alpha\beta})$ es la densidad Lagrangiana de materia y μ denota los grados de libertad de la materia.

La más simple TET de la gravedad es la Teoría de Brans-Dicke (TBD) [28], en la cual el campo escalar (redefinido), χ , actúa como la fuente del acoplamiento gravitacional con 'constante'

de Newton $G \sim \chi^{-1}$ variable y fue esencialmente motivada por discrepancias aparentes entre las observaciones y las predicciones de campo débil de la Teoría de la Relatividad de Einstein (TGR) [34]. TETs más generales con parámetro de BD no constante, $\omega(\chi)$, y con potencial no nulo, $V(\chi)$, han sido formuladas, y las restricciones del Sistema Solar y las restricciones astrofísicas sobre estas teorías, y particularmente de la TBD, han sido ampliamente estudiadas [35]. Los límites observacionales sobre el valor actual de ω_0 no necesariamente restringe el valor de ω en TETs más generales (que TBD) [20].

En los últimos años se han utilizado las TETs de la gravedad para predecir el universo en el pasado, con énfasis en la existencia de modelos cosmológicos que tienen una singularidad inicial o en los que el campo escalar actúa como fuente para la inflación [36].

La dinámica del universo homogéneo e isótropo desde las TETs, expone que nuestro universo pudo comenzar a partir de un estado singular, con una densidad infinita y curvatura del espacio-tiempo también infinita si se toma el marco de Einstein.

2.1. Modelo

Se considera la acción 2.0.1, la cual está inspirada en una TET, donde la materia y el campo escalar de quintasencia están acopladas mediante la métrica escalar-tensorial $\chi(\phi)^{-1}g_{\alpha\beta}$ [32].

En el ME se tiene que

$$\nabla^\alpha T_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}T \frac{\chi'(\phi)}{\chi(\phi)} \nabla_\beta \phi, \quad T = T_\alpha^\alpha$$

donde

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta}{\delta g^{\alpha\beta}} \left\{ \sqrt{|g|} \chi^{-2} \mathcal{L}(\mu, \nabla\mu, \chi^{-1}g_{\alpha\beta}) \right\}.$$

La presente investigación concentra su estudio en universos FRW con elemento de línea:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right), d\Omega^2 = (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2.1.2)$$

donde r , θ y φ son las coordenadas angular, polar y azimutal respectivamente, t es el tiempo comóvil, $a(t)$ es el factor de escala del universo, k es la curvatura del espacio-tiempo (se considerarán secciones espaciales planas, o sea, $k = 0$).

Las ecuaciones cosmológicas derivadas de las ecuaciones de Einstein del campo son¹:

la ecuación de Friedmann

$$3H^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) + \rho \quad (2.1.3)$$

la ecuación de Raychaihury

$$\dot{H} = -\frac{1}{2}(\gamma\rho + \dot{\phi}^2) \quad (2.1.4)$$

la ecuación del movimiento del campo escalar

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = \frac{1}{2}(4 - 3\gamma)\rho \frac{\chi'(\phi)}{\chi(\phi)} \quad (2.1.5)$$

y la ecuación de conservación

$$\dot{\rho} + 3\gamma H\rho = -\frac{1}{2}(4 - 3\gamma)\rho\dot{\phi} \frac{\chi'(\phi)}{\chi(\phi)} \quad (2.1.6)$$

La densidad de energía de la materia oscura es ρ , H es el escalar de Hubble, $V(\phi)$ es el potencial de quintaesencia y $\chi(\phi)$ la función de acoplamiento.

Este es un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de orden dos acopladas en $a(t)$ y ϕ

Aunque se toman arbitrarios la forma funcional del potencial y de la función de acoplamiento, se utilizarán las siguientes hipótesis generales: $V(\phi) \in C^3$ y $V(\phi) \geq 0$, $\chi(\phi) \in C^3$ con $\chi(\phi) > 0$.

Además $\rho \geq 0$, $0 < \gamma < 2$, $\gamma \neq 4/3$.

¹En estas ecuaciones el punto denotará derivada con respecto a t y la coma la derivada con respecto al campo escalar ϕ .

De las ecuaciones (2.1.4-2.1.6) tenemos que $(H, \rho, \phi, \dot{\phi}) \in \mathbb{R}^4$ permanece en la hipersuperficie definida por la restricción (2.1.3) y las restantes ecuaciones de evolución pueden ser escritas como un sistema dinámico cuatro dimensional. Se ha considerado a $\dot{\phi}$ como una función independiente. Así la ecuación de evolución para $\dot{\phi}$ es obtenida de la ecuación (2.1.5) la cual puede ser escrita como:

$$\frac{d\dot{\phi}}{dt} = -3H\dot{\phi} - V'(\phi) + \frac{1}{2}(4 - 3\gamma)\rho \frac{\chi'(\phi)}{\chi(\phi)} \quad (2.1.7)$$

Luego, el sistema (2.1.4,2.1.6,2.1.7) se complementa por:

$$\frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi} \quad (2.1.8)$$

Las variables H , ρ , ϕ y $\dot{\phi}$ están sujetas a la restricción (2.1.3), definiendo un sistema dinámico en el espacio de fase

$$\Omega = \left\{ (H, \rho, \phi, \dot{\phi}) \in \mathbb{R}^4 : 3H^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) + \rho \right\} \quad (2.1.9)$$

2.2. Análisis cualitativo

2.2.1. Comportamiento asintótico en el espacio de estados físico

Primeramente se considera que la función potencial tiene un mínimo local $V(0) = 0$. Con esta hipótesis el punto $(0, 0, 0, 0)$ es un punto de equilibrio de (2.1.4, 2.1.6-2.1.8). Esto puede ser usado para mostrar que un universo que inicialmente se expande, continúa expandiéndose en el futuro. De hecho, el conjunto $\left\{ (H, \rho, \phi, \dot{\phi}) \in \mathbb{R}^4 \in \Omega : H = 0 \right\}$ es invariante bajo el flujo de (2.1.4, 2.1.6-2.1.8) con restricción(2.1.3). Además, el signo de H es invariante.²

Sin hipótesis restrictivas para $\chi(\phi)$ la Proposición 2 de [37] puede ser generalizada a este contexto:

²Si el signo de H cambia, una curva solución que comienza con H positivo, puede pasar a través del punto $(0, 0, 0, 0)$ violando así el teorema fundamental de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales

Proposición 2.2.1 *Supongamos que $V \geq 0$ y $V(\phi) = 0 \Leftrightarrow \phi = 0$. Sea A tal que V es acotado en A , entonces, $V'(\phi)$ es acotado en A . Si existe alguna constante K , $K \neq 0$ tal que*

$$\chi'(\phi)/\chi(\phi) \leq 2K/(2 - \gamma)(4 - 3\gamma).$$

Entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho = 0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\phi}.$$

Demostración. Considere la trayectoria que pasa a través de un punto arbitrario $(H, \rho, \phi, \dot{\phi}) \in \mathbb{R}^4 \in \Omega$ con $H > 0$ en $t = t_0$. Como H es decreciente y positiva se tiene que $\lim_{t \rightarrow \infty} H(t)$ existe y es un número no negativo η ; además, $H(t) \leq H(t_0)$ para todo $t \geq t_0$. Entonces se deduce de la ecuación (2.1.3) que cada término ρ , $1/2\dot{\phi}^2$, y $V(\phi)$ está acotado por $3H(t_0)^2$ para todo $t \geq t_0$.

Sea $A = \{\phi : V(\phi) \leq 3H(t_0)^2\}$. Entonces, la trayectoria es tal que ϕ permanece en el interior de A .

De la ecuación (2.1.4) se tiene que

$$- \int_{t_0}^t \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{\gamma}{2} \rho \right) dt = H(t) - H(t_0)$$

y tomando el límite cuando $t \rightarrow \infty$, se obtiene

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \left(\dot{\phi}^2 + \gamma \rho \right) dt = H(t_0) - \eta$$

además,

$$\int_{t_0}^{\infty} \left(\dot{\phi}^2 + \gamma \rho \right) dt < \infty. \quad (2.2.10)$$

Si se toma la derivada de $f(t) = \dot{\phi}^2 + \gamma \rho$ y haciendo uso de lo supuesto sobre $\chi(\phi)$ se tiene que

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{\phi}^2 + \gamma \rho \right) \leq \dot{\phi} (-2V'(\phi) + K\rho).$$

Como ya se ha visto, $\dot{\phi}$ y ρ son acotados, y por lo supuesto para $V(\phi)$, $V'(\phi)$ es acotada. De aquí resulta que la derivada de f es acotada. Como f es una función no negativa, la convergencia de $\int_{t_0}^{\infty} f(t)dt$ implica que $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$. Luego, se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho = 0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\phi}.$$

Las condiciones en la proposición 2.2.1 se satisfacen para una amplia clase de potenciales como se ve en [37] (este resultado es extendible al caso de acoplamiento no mínimo), y por una clase amplia de funciones de acoplamiento incluyendo aquellas dominadas por funciones exponenciales como las polinomiales.

Bajo los mismos supuestos que en la proposición 2.2.1, se puede realizar una generalización a la Proposición 3 de [37].

Proposición 2.2.2 *Supongamos que $V'(\phi) > 0$ para $\phi > 0$ y $V'(\phi) < 0$ para $\phi < 0$. Entonces, según las hipótesis de la proposición 2.2.1, $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi$ existe y es igual a $+\infty$, 0 o $-\infty$.*

Demostración. Por el mismo argumento que en la proposición 2.2.1, $\exists \lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = \eta$. Si $\eta = 0$, entonces por la ecuación (2.1.3) se obtiene $\lim_{t \rightarrow \infty} V(\phi(t)) = 0$. Como V es continua y $V(\phi) = 0 \Leftrightarrow \phi = 0$ esto implica que $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0$.

Supongamos que $\eta > 0$. De (2.1.3) se obtiene que $\lim_{t \rightarrow \infty} V(\phi(t)) = 3\eta^2$. Así, existe t' tal que $V(\phi) > 3\eta^2/2$ para todo $t > t'$. De aquí se tiene que ϕ no puede ser cero para algún $t > t'$ porque $\phi = 0 \Leftrightarrow V(\phi) = 0$. Entonces, ϕ tiene el mismo signo para todo $t > t'$.

Supongamos que ϕ es positivo para todo $t > t'$. Como V es creciente como función de ϕ en $(0, +\infty)$, se tiene que $\lim_{t \rightarrow \infty} V(\phi(t)) = 3\eta^2 \leq \lim_{\phi \rightarrow \infty} V(\phi)$. Por la continuidad y monotonía de V es obvio que la igualdad se cumple si y solo si $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = +\infty$.

Si $\lim_{t \rightarrow \infty} V(\phi(t)) < \lim_{\phi \rightarrow \infty} V(\phi)$, entonces existe $\bar{\phi} \geq 0$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(\phi(t)) = V(\bar{\phi}).$$

Como V es continua y estrictamente creciente se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi = \bar{\phi}.$$

Por la proposición 2.2.1, $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = 0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\phi}(t)$. Además, H y $\chi'(\phi)/\chi(\phi)$ son acotadas.

Así, tomando el límite cuando $t \rightarrow \infty$ en (2.1.7) encontramos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} \dot{\phi} = -V'(\bar{\phi}) < 0.$$

Luego, existe $t'' > t'$ tal que $\frac{d}{dt} \dot{\phi} < -V'(\bar{\phi})/2$ para todo $t \geq t''$. Esto implica que

$$\dot{\phi}(t) - \dot{\phi}(t'') = \int_{t''}^t \left(\frac{d}{dt} \dot{\phi} \right) dt < -\frac{V'(\bar{\phi})}{2}(t - t''),$$

es decir, $\dot{\phi}(t)$ toma valores negativos arbitrariamente grandes a medida que t crece, lo que no es posible porque $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\phi}(t) = 0$.

Entonces, si $\phi > 0$ para todo $t > t'$, se tiene que $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi = +\infty$. Similarmente, cuando $\phi < 0$ para todo $t > t'$, se tiene que $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi = -\infty$.

De aquí se concluye que, si inicialmente $3H(t_0)^2 < \min \{ \lim_{\phi \rightarrow \infty} V(\phi), \lim_{\phi \rightarrow -\infty} V(\phi) \}$, entonces, $\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = 0$. De hecho, es conocido que $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi$ es igual a $+\infty$, 0 o $-\infty$. Si $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi = +\infty$, entonces por la ecuación (2.1.3),

$$3\eta^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} V(\phi(t)) = \lim_{\phi \rightarrow \infty} V(\phi) > 3H(t_0)^2.$$

Esto es imposible puesto que $H(t)$ es una función decreciente y $H(t_0) \geq \eta$. Del mismo modo, $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi = -\infty$ conduce a una contradicción. Entonces, $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi = 0$ y esto implica que $\lim_{t \rightarrow \infty} V(\phi(t)) = 0$, y nuevamente por (2.1.3), $\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = 0$.

Proposición 2.2.3 *Supongamos que existe alguna constante K , (positiva o negativa) tal que $\chi'(\phi)/\chi(\phi) \leq 2K/(2-\gamma)(4-3\gamma)$. Sea V una función potencial con las siguientes propiedades:*

1. $V \geq 0$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} V(\phi) = +\infty$.
2. V' es continua y $V'(\phi) < 0$.
3. Si $A \subset \mathbb{R}$ es tal que V es acotado en A , entonces, $V'(\phi)$ es acotado en A .

Entonces, $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho = 0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\phi}$, y $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi = +\infty$.

Demostración. De la ecuación (2.1.6) se observa que el conjunto $\rho > 0$ es invariante bajo el flujo del sistema (2.1.4, 2.1.6-2.1.8) con restricción (2.1.3); además ρ es distinto de cero si inicialmente $\rho(t_0)$ era distinto de cero. De aquí se tiene que H nunca es cero (no cambia de signo) porque por (2.1.3), $3H(t)^2 \geq \rho(t) > 0$ para todo $t > t_0$, luego, H es siempre no negativo si inicialmente lo fue. Además, por la ecuación (2.1.4), se observa que H es decreciente, entonces $\exists \lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = \eta \geq 0$ y que

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (\dot{\phi}^2 + \gamma\rho) dt = H(t_0) - \eta < +\infty.$$

Como en la proposición 2.2.1, la derivada total con respecto a t de $\dot{\phi}^2 + \gamma\rho$ es acotada. De aquí se deduce que $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho = 0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\phi}$.

Se puede demostrar que $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi = +\infty$ análogamente a la proposición 2.2.2.

Se tiene de la ecuación (2.1.3) que $\lim_{t \rightarrow \infty} V(\phi) = 3\eta^2$. Como V es estrictamente decreciente como función de ϕ ; entonces $V(\phi) > \lim_{\phi \rightarrow \infty} V(\phi)$ para todo ϕ , así $\lim_{t \rightarrow \infty} V(\phi(t)) \geq \lim_{\phi \rightarrow \infty} V(\phi)$. Se considerarán dos casos:

1. si $\lim_{t \rightarrow \infty} V(\phi(t)) = \lim_{\phi \rightarrow \infty} V(\phi)$, por la continuidad de V es obvio que $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi = +\infty$;

2. si $\lim_{t \rightarrow \infty} V(\phi(t)) > \lim_{\phi \rightarrow \infty} V(\phi)$, entonces, existe un único $\bar{\phi}$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(\phi(t)) = V(\bar{\phi}).$$

Como V es continua y estrictamente decreciente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi = \bar{\phi}.$$

De la ecuación (2.1.7) se deduce que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} \dot{\phi} = -V'(\bar{\phi}) > 0,$$

así, existe un t' tal que $\frac{d}{dt} \dot{\phi} > -V'(\bar{\phi})/2$ para todo $t \geq t'$. De aquí que

$$\dot{\phi}(t) - \dot{\phi}(t') > -\frac{V'(\bar{\phi})}{2}(t - t'),$$

que no es posible porque $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\phi}(t) = 0$. Finalmente $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi = +\infty$.

Si adicionalmente, el potencial es tal que $\lim_{\phi \rightarrow \infty} V(\phi) = 0$, entonces se concluye que $H \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

En esta sección se demuestra que si en el futuro son despreciable la densidad de energía del fluido de fondo y la energía cinética del campo escalar, entonces no hay materia oscura, por lo que domina la energía potencial del campo escalar. Esto significa que el campo escalar no evoluciona en el tiempo por lo que micmetiza la constante cosmológica, es decir, el universo evoluciona hacia una solución de tipo de de Sitter.

2.2.2. Comportamiento asintótico en el espacio de estados Hubble-normalizado

Con el objetivo de analizar la singularidad inicial y el comportamiento de tiempo reciente de un modelo cosmológico es conveniente normalizar las variables físicas, porque en la vecindad

de una singularidad inicial hipotética las variables físicas pueden diverger mientras que en tiempos recientes ellas típicamente convergen a cero [38]. Por motivo de consideraciones físicas la normalización con el factor de Hubble es una selección apropiada en cosmología, las variables Hubble-normalizadas son acotadas hacia el pasado (próximos a la singularidad inicial). Los datos numéricos muestran que, aún en el caso en que el espacio de estado Hubble-normalizado no sea acotado, las ecuaciones de evolución pueden admitir atractores tanto del pasado como del futuro.

Según lo anterior se definen las variables de la siguiente forma:

$$x = \frac{1}{H}, y = \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{6}H}, z = \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{3}H} \quad (2.2.11)$$

y la coordenada temporal

$$d\tau = 3Hdt. \quad (2.2.12)$$

Usando las ecuaciones (2.1.4, 2.1.5, 2.1.6) obtenemos (2.2.11) y el campo escalar ϕ evoluciona con respecto a τ como sigue³:

$$x' = \frac{1}{2}x(2y^2 + z^2\gamma), \quad (2.2.13)$$

$$y' = y^3 + \frac{1}{2}(z^2\gamma - 2)y - \frac{x^2V'(\phi)}{3\sqrt{6}} + \frac{(4-3\gamma)}{2\sqrt{6}} \frac{z^2\chi'(\phi)}{\chi(\phi)}, \quad (2.2.14)$$

$$z' = \frac{1}{2}z(2y^2 + (z^2 - 1)\gamma) - \frac{(4-3\gamma)}{2\sqrt{6}} \frac{yz\chi'(\phi)}{\chi(\phi)}, \quad (2.2.15)$$

$$\phi' = \sqrt{\frac{2}{3}}y \quad (2.2.16)$$

Este es un sistema autónomo donde las variables están sujetas a la restricción

$$y^2 + z^2 + 1/3x^2V(\phi) = 1. \quad (2.2.17)$$

De aquí se tiene que $y^2 + z^2 \leq 1$, porque $V(\phi)$ es no negativo.

³La prima denotará derivada con respecto a τ (con la excepción de las expresiones $V'(\phi)$ y $\chi'(\phi)$ que denota derivada con respecto a ϕ).

Por la Proposición (1.3.2) se puede probar que cualquier combinación de los conjuntos

$$x < 0, x = 0, x > 0, z < 0, z = 0, z > 0$$

es un conjunto invariante del flujo del sistema dinámico que se estudia si χ es al menos de clase C^2 . Al hacerse uso de este resultado se puede limitar la atención al flujo restringido al espacio de fase:

$$\Sigma = \{(\phi, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 : x \geq 0, z \geq 0, y^2 + z^2 + 1/3x^2V(\phi) = 1\}. \quad (2.2.18)$$

Observar que si $x \neq 0$ y $V(\phi) > 0$ se puede usar la restricción (2.2.17) como definición de x . De esta forma las ecuaciones de evolución para el resto de las variables no dependen explícitamente de la variable x . Por ejemplo, la ecuación (2.2.14) quedaría como

$$y' = -\frac{(1 - y^2 - z^2)V'(\phi)}{\sqrt{6}V(\phi)} + \frac{(4 - 3\gamma)}{2\sqrt{6}} \frac{z^2\chi'(\phi)}{\chi(\phi)} + y^3 + \frac{1}{2}(z^2\gamma - 2)y. \quad (2.2.19)$$

Luego, se puede estudiar el sistema reducido a $\mathbb{R}^3$ dado por las ecuaciones (2.2.13), (2.2.19) y (2.2.15) con restricción $y^2 + z^2 < 1$.

Lema 2.2.4 Sea $Z^+ = \{(x, y, z, \phi) \in \Sigma : z > 0\}$ y sea $X^0 = \{(x, y, z, \phi) \in \Sigma : x = 0\}$.

Entonces para todo $p \in Z^+ - X^0$ los conjuntos α - ω -límites de p son tales que $\alpha(p) \subset X^0$ y $\omega(p) \subset \partial Z^+$, donde ∂Z^+ denota la frontera de Z^+ .

Es decir, el atractor del pasado es un punto que pertenece al espacio de fases tal que $x = 0$, o sea, modelos que tienen en el pasado una singularidad inicial ($H \rightarrow \infty$), y el atractor del futuro es un punto que pertenece al espacio de fases tal que $z = 0$ lo que implica que no hay materia, por tanto domina la energía oscura.

Demostración. Se tiene que $S = Z^+ - X^0 = \{(x, y, z, \phi) \in \Sigma : z > 0, x > 0\}$ (por la Proposición 1.3.2) es un conjunto invariante del flujo asociado a (2.2.13-2.2.16). Definamos

sobre S la función

$$Z(x, y, z, \phi) = \left(\frac{z}{x}\right)^2 \chi(\phi)^{-2+3/2\gamma}$$

con $\chi(\phi) > 0$. Esta es monótona decreciente a lo largo de las órbitas del flujo en S , dado que su derivada direccional en la dirección del flujo es $Z' = -\gamma Z$ que es negativa. El rango de valores de Z es $(0, \infty)$. Sea $s \in \bar{S} - S = \partial Z^+ \cup X^0$. Se verifica que $Z(s) \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow \partial Z^+$ y $Z(s) \rightarrow \infty$ cuando $s \rightarrow X^0$. Luego, aplicando Principio de Monotonía (teorema (1.3.5)), tenemos para todo $p \in Z^+ - X^0$, que $\alpha(p) \subset X^0$ y $\omega(p) \subset \partial Z^+$ como se requería.

El flujo en el conjunto X^0

Si $p \in X^0$ y ϕ son tales que $V(\phi) < \infty$ entonces $y^2 + z^2 = 1$, que implica que $|y| \leq 1$. La igualdad se cumple si y solo si $z = 0$. Es sencillo probar que el conjunto

$$X^0 \cap Z^0 := \{p = (\phi, x, y, z) \in \Sigma : x = 0, z = 0\}$$

es un conjunto invariante del flujo asociado a (2.2.13-2.2.16) con restricción (2.2.17). Observar que ϕ es no acotado en $X^0 \cap Z^0$ por que si $p \in X^0 \cap Z^0$ entonces $|y| = 1$ y por (2.2.16)

$$\phi' = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \implies \phi = \phi_0 \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \tau$$

la cual es una función no acotada de τ .

En el conjunto X^0 existe el punto crítico Q (el cual es un subconjunto invariante aislado) con coordenadas $(y, \phi) = (0, \phi_1)$ con $\chi'(\phi_1) = 0$ y $\chi(\phi_1) \neq 0$.

Supongamos que $|y| < 1$, es decir, $z > 0$. Se puede probar que el conjunto

$$X^0 \cap Z^+ := \{p = (\phi, x, y, z) \in \Sigma, p \neq Q : x = 0, z > 0\}$$

es un conjunto invariante del flujo asociado a (2.2.13-2.2.16) con restricción (2.2.17). El flujo

en $X^0 \cap Z^+$ se genera por las ecuaciones diferenciales:

$$y' = \frac{1}{2} (1 - y^2) \left(y(\gamma - 2) + \frac{(4 - 3\gamma)}{\sqrt{6}} \frac{\chi'(\phi)}{\chi(\phi)} \right), \quad (2.2.20)$$

$$\phi' = \sqrt{\frac{2}{3}} y, \quad (2.2.21)$$

más la ecuación algebraica:

$$y^2 + z^2 = 1. \quad (2.2.22)$$

Lema 2.2.5 *Asumamos que $\chi(\phi)$ es positiva y de clase C^3 . Sea p un punto de $X^0 \cap Z^+$, y sea $O^-(p)$ el pasado de la órbita de p bajo el flujo de (2.2.20-2.2.22). Entonces, ϕ es casi siempre no acotada en $O^-(p)$.*

Demostración. Sea $p \in X^0 \cap Z^+$ tal que ϕ es acotada en $O^-(p)$. Como ϕ es acotada en $O^-(p)$, entonces $O^-(p)$ está contenido en un subconjunto compacto de la clausura de $X^0 \cap Z^+$. En este caso el conjunto $\alpha(p)$ es no vacío. Sea la función definida por

$$Z(y, z, \phi) = (1 - y^2) \chi(\phi)^{2-3\gamma/2}$$

sobre $X^0 \cap Z^+$. La función Z es monótona dado que su derivada a lo largo del flujo es

$$Z' = (2 - \gamma) y^2 Z = (2 - \gamma) y^2 (1 - y^2) \chi(\phi)^{2-3\gamma/2}$$

la cuál es negativa en $X^0 \cap Z^+$. Luego Z debe ser constante en $\alpha(p)$; o sea, $Z' = 0$ sobre $\alpha(p)$.

Por tanto, el conjunto α -límite de p está sobre la hipersuperficie $y = 0$ o en las hipersuperficie $|y| = 1$ (dado que $0 < \gamma < 2$ y $\chi(\phi) > 0$). En el último caso, de la ecuación (2.2.21) tenemos que ϕ es no acotada en $\alpha(p)$, en contradicción con lo supuesto. De esta manera se demuestra que $\alpha(p)$ (si existe) está en $y = 0$. Del sistema (2.2.20-2.2.22) se puede decir que el único conjunto invariante con $y = 0$ es el punto crítico Q .

Para completar la demostración queda probar que Q no puede ser el pasado asintótico de un conjunto abierto de trayectorias en $X^0 \cap Z^+$.

Para reducir la dimensionalidad del sistema podemos restringir nuestro análisis a la proyección del espacio de fase en el plano (y, ϕ) con $|y| \leq 1$ y ϕ tal que $\chi(\phi) > 0$. La variedad estable de Q es a lo sumo 2-dimensional (si se analiza el carácter dinámico de Q en el espacio de fases 4-dimensional veríamos que la variedad inestable de Q es al menos 2-dimensional y está generado por $\mathbf{e}_x$ y $\mathbf{e}_z$ subconjunto de E^u). A partir del Teorema de la Variedad Central, se puede concluir que existe una variedad local estable, E^s , localizada en el plano (y, ϕ) la cual intersecta a Q . Esta variedad invariante es 1 o 2-dimensional y en ella todas las órbitas cercanas a Q se acercan exponencialmente a este cuando $\tau \rightarrow +\infty$. La existencia de una variedad local estable de dimensión $s > 0$ (igual a 1 o 2) implica que todas las soluciones asintóticas en el pasado a Q deben estar en una variedad inestable o central de dimensión $2 - s < 2$, (o sea, 1 o 0-dimensional).

El flujo en el conjunto Z^0

En el conjunto Z^0 existen dos subconjuntos invariantes: el punto crítico P con coordenadas $x = \sqrt{\frac{3}{V(\phi_2)}}$, $y = 0$ y $\phi = \phi_2$ con $\chi(\phi_2) \neq 0$, $V'(\phi_2) = 0$ ⁴ y el conjunto

$$Z^0 \cap X^+ := \{p = (\phi, x, y, z) \in \Sigma, p \neq P : z = 0, x > 0\}.$$

Si $p \in Z^0 \cap X^+$ entonces se cumple la igualdad $y^2 + 1/3x^2V(\phi) = 1$, por lo que $|y| < 1$ dado que $V(\phi)$ es positivo. De modo que, $x = \sqrt{3(1 - y^2)/V(\phi)} \neq 0$. La evolución en $Z^0 \cap X^+$ está gobernada por las ecuaciones diferenciales:

$$y' = (y^2 - 1) \left(y + \frac{\sqrt{6}}{6} \frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right), \quad (2.2.23)$$

⁴Este punto crítico es una silla si $V''(\phi_2) < 0$, un nodo estable si $0 < V''(\phi_2) \leq \frac{3}{4}V(\phi_2)$, y un foco estable si $V''(\phi_2) > \frac{3}{4}V(\phi_2)$.

y (2.2.21), además de la restricción

$$y^2 + 1/3x^2V(\phi) = 1, \quad (2.2.24)$$

donde $V(\phi)$ se da como entrada.

Lema 2.2.6 *Asumamos que $V(\phi)$ es un potencial positivo de clase C^3 . Sea p un punto en $Z^0 \cap X^+$, y sea $O^-(p)$ el pasado de la órbita pasando por p bajo la acción del flujo de (2.2.21, 2.2.23, 2.2.24). Entonces ϕ es casi siempre no acotado en $O^-(p)$.*

Demostración. Sea $p \in Z^0 \cap X^+$ tal que ϕ es acotada en $O^-(p)$. A esto sigue que $O^-(p)$ está contenida en un subconjunto compacto de (la frontera de) $Z^0 \cap X^+$. Como antes la trayectoria debe tender asintóticamente en el pasado a un α -límite $\alpha(p)$. Sea $Z(y, z, \phi) = (1 - y^2)V(\phi)^{-1}$ definida en $Z^0 \cap X^+$, con $V(\phi) > 0$ (y por tanto $|y| < 1$). Z tiene derivada direccional a lo largo del flujo dada por $Z' = 2y^2Z = 2y^2(1 - y^2)V(\phi)^{-1}$ la cuál es positiva. Por tanto Z es monótona creciente a lo largo del flujo, luego, debe ser constante en $\alpha(p)$. Observar que bajo nuestras hipótesis $Z' = 0$ en $\alpha(p)$ solo si el α -límite de p está contenido en el plano $y = 0$ o en los planos $|y| = 1$. Como en el teorema (2.2.5), de (2.2.21), vemos que si $y = \pm 1$, entonces ϕ es no acotada. Una contradicción con lo supuesto. Luego, tenemos que $\alpha(p)$, está contenido en el plano $y = 0$.

El único conjunto invariante con $y = 0$ es el punto crítico P . Para probar que tal punto de equilibrio no es el pasado asintótico de un conjunto abierto de órbitas en $Z^0 \cap X^+$ es suficiente analizar el flujo en la proyección del espacio de estados en (y, ϕ) con $|y| \leq 1$ y ϕ tal que $V(\phi) > 0$. En otras palabra, es suficiente analizar el sistema sin restricciones usando la condición (2.2.24) como la definición de x sobre $Z^0 \cap X^+$. Luego, se debe probar que la variedad inestable de P no puede ser 2-dimensional. A partir de lo anterior, se encuentra que al menos uno de los valores

propios de la linealización en la cercanía de P (proyectado en (y, ϕ)) tiene parte real siempre negativa. Luego, por el Teorema de la Variedad Central, podemos concluir que existe una variedad estable de P : E^s , la cuál está contenida en el plano (y, ϕ) tangente a P . Esta variedad invariante tiene dimensión 1 o 2 y es tal que todas las órbitas cercanas a P contenidas en ella convergen exponencialmente a P cuando $\tau \rightarrow +\infty$. De manera análoga a como se procedió en la demostración del teorema 2.2.5 tenemos que todas las órbitas tiendiendo asintóticamente a P en el pasado (i.e., aquellas que tienden a P cuando $\tau \rightarrow -\infty$) están en una variedad invariante inestable o central a lo sumo 1-dimensional.

Finalmente, queremos presentar un teorema que establece que ϕ es casi siempre no acotado hacia el pasado para el flujo asociado a (2.2.13-2.2.16) con restricción (2.2.17).

Teorema 2.2.7 *Asumamos que $\chi(\phi)$ y $V(\phi)$ son funciones positivas de clase C^3 . Sea p un punto en Σ , y sea $O^-(p)$ el pasado de la órbita de p bajo el flujo de (2.2.13-2.2.16) con restricción (2.2.17). Entonces, ϕ es casi siempre no acotado en $O^-(p)$ para casi todo p .*

Demostración. Sea $p \in \Sigma$ tal que ϕ es acotado en $O^-(p)$. A esto sigue que $O^-(p)$ está contenida en un subconjunto compacto de la clausura de Σ . Luego, esta trayectoria debe tender asintóticamente a un conjunto límite $\alpha(p)$.

Observar que si $p \in \Sigma$, entonces uno y solo uno de los siguientes casos se verifica:

1. $p \in Z^0 \cap X^0 := \{q \in \Sigma : z = 0, x = 0\}$;
2. $p \in X^0 \cap Z^+ := \{q \in \Sigma, q \neq Q : x = 0, z > 0\}$;
3. $p \in Z^0 \cap X^+ := \{q \in \Sigma, q \neq P : z = 0, x > 0\}$
4. $p \in Z^+ - X^0 := \{q \in \Sigma : z > 0, x > 0\}$,

5. $p = Q$ o $p = P$.

Los conjuntos anteriores son invariantes del flujo asociado a (2.2.13-2.2.16) con restricción (2.2.17).

Como antes, ϕ es no acotada en $X^0 \cap Z^0$ por que si $p \in X^0 \cap Z^0$ entonces $|y| = 1$ y por la ecuación (2.2.16)

$$\phi' = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \implies \phi = \phi_0 \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \tau$$

contrario a lo supuesto. Si se realiza un análisis similar al del caso 1 se encuentra también una contradicción en 2 y 3. En efecto, si $p \in X^0 \cap Z^+$ o $p \in Z^0 \cap X^+$, entonces, aplicando los lemas 2.2.5 y 2.2.6, respectivamente, obtenemos que ϕ es casi siempre no acotado en $O^-(p)$ como se requiere.

Ahora, si $p \in Z^+ - X^0$, entonces, por el lema 2.2.4 se tiene que $\alpha(p) \subset X^0$, o sea, $x = 0$ en $\alpha(p)$. Por el análisis previo del flujo en X^0 encontramos que ϕ es casi siempre no acotado en el pasado, contrario a lo supuesto.

Finalmente, los puntos críticos Q y P considerados como órbitas aisladas constituyen un conjunto de medida cero en Σ . De este modo el comportamiento dinámico en las cercanías de estos puntos críticos no afecta la tesis del teorema.

2.3. Comportamiento Genérico

Por lo visto en las dos últimas secciones para investigar el comportamiento asintótico genérico del sistema (2.2.13-2.2.16) con restricción (2.2.17) es necesario investigar la región donde $\phi = \pm\infty$.

Si embargo, como ha sido investigado como ha sido mostrado la región $\phi = \pm\infty$ no está exclu-

sivamente asociada al comportamiento asintótico del modelo hacia el pasado.

En vistas de lo discutido anteriormente para investigar el límite $|\phi| \rightarrow +\infty$, para esto es necesario imponer a V y a χ algunas condiciones de regularidad cuando ϕ diverge.

2.3.1. Condiciones sobre el potencial y la función de acoplamiento

Definición 2.3.1 (Ver la referencia [39]) *Sea $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función no negativa C^2 .*

Supongamos que existen un número $\phi_0 > 0$ para el cual $V(\phi) > 0$ para todo $\phi > \phi_0$ y algún número N tal que la función $W_V : [\phi_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$W_V(\phi) = \frac{V'(\phi)}{V(\phi)} - N$$

satisface

$$\lim_{\phi \rightarrow \infty} W_V(\phi) = 0. \quad (2.3.25)$$

Entonces decimos que V es bien comportada en el infinito (BCI) de orden exponencial N .

Es importante señalar que N puede ser 0, o incluso negativa. Como ha sido señalado en [39] la clase de funciones BCI de orden exponencial tales como las funciones polinomiales son de gran interés.

Definición 2.3.2 *Se dice que una función BCI es de clase k si existe una transformación de coordenadas suficientemente diferenciable $\varphi = f(\phi)$, la cual lleve el infinito al origen de forma que W_V sea mapeada a una función C^k en una vecindad del origen.*

Las transformaciones de coordenadas admisibles son aquellas tales que f induzca una aplicación suficientemente diferenciable sobre el espacio tangente (o sea, que campos vectoriales diferenciables sean mapeados en campos escalares diferenciables). De esta forma, por ejemplo, la

primera derivada de f con respecto a ϕ , o sea f' , pueda ser expresable como una función C^k de φ .

Como en [39] si tenemos una transformación de coordenadas $\varphi = f(\phi)$ la cual mapea una vecindad del infinito en una vecindad del origen, entonces si g es una función de ϕ , $\bar{g}$ es una función de φ cuyo dominio es el rango de f más el origen, la cual toma los valores;

$$\bar{g}(\varphi) = \begin{cases} g(f^{-1}(\varphi)) & , \quad \varphi > 0 \\ \lim_{\phi \rightarrow \infty} g(\phi) & , \quad \varphi = 0 \end{cases}$$

Definición 2.3.3 (Ver referencia [39]) *Un función C^k , V es BCI de clase k si es BCI y si existe $\phi_0 > 0$ y una transformación de coordenadas $\varphi = f(\phi)$ la cual mapea el intervalo $[\phi_0, \infty)$ en $(0, \epsilon]$, donde $\epsilon = f(\phi_0)$ y $\lim_{\phi \rightarrow \infty} f = 0$, con las propiedades adicionales siguientes:*

1. f es C^{k+1} y estrictamente decreciente.
2. las funciones $\bar{W}_V(\varphi)$ y $\bar{f}'(\varphi)$ son C^k sobre el intervalo cerrado $[0, \epsilon]$.
3. $\frac{d\bar{W}_V}{d\varphi}(0) = \frac{d\bar{f}'}{d\varphi}(0) = 0$.

Denotamos al conjunto de todas las funciones BCI de clase k por $\mathcal{E}_+^k$. La condición $\frac{d\bar{f}'}{d\varphi}(0) = 0$ en la definición 2.3.3 puede expresarse equivalentemente como

$$\lim_{\phi \rightarrow \infty} \frac{f''}{f'} = 0.$$

2.4. El flujo en la vecindad de $\phi = +\infty$

En esta sección se estudia el comportamiento cualitativo del flujo cerca de $\phi = +\infty$. Resultados similares se tienen cerca de $\phi = -\infty$. Se asume que $V, \chi \in \mathcal{E}_+^2$, con órdenes exponenciales N y M respectivamente. Sea $\Sigma_\epsilon \subset \Sigma$ el conjunto de puntos en Σ para los cuales $\phi > \epsilon^{-1}$, donde ϵ es

cualquier constante positiva la cual se elige suficientemente pequeña para evitar puntos donde V o $\chi = 0$, de esta manera asegurando que $\overline{W}_V(\varphi)$ y $\overline{W}_\chi(\varphi)$ están bien definidas.

Realizando la transformación de coordenadas

$$(x, y, z, \phi) \xrightarrow{\varphi=f(\phi)} (x, y, z, \varphi) \quad (2.4.26)$$

sobre Σ_ϵ , donde $f(\phi) \rightarrow 0$ cuando $\phi \rightarrow +\infty$ y se satisfagan las condiciones 1,2 y 3 de la definición 2.3.3 con $k = 2$ las ecuaciones (2.2.13), (2.2.19) y (2.2.15) se transforman en el sistema dinámico 3-dimensional:

$$y' = y^3 + \frac{1}{2} (z^2 \gamma - 2) y - \frac{(1 - y^2 - z^2)}{\sqrt{6}} (\overline{W}_V + N) + \frac{z^2(4 - 3\gamma)}{2\sqrt{6}} (\overline{W}_\chi + M), \quad (2.4.27)$$

$$z' = \frac{1}{2} z (2y^2 + (z^2 - 1) \gamma) + \frac{yz(-4 + 3\gamma)}{2\sqrt{6}} (\overline{W}_\chi + M), \quad (2.4.28)$$

$$\varphi' = \sqrt{\frac{2}{3}} \overline{f}' y. \quad (2.4.29)$$

Donde $\Sigma_\epsilon = \{0 < \varphi < f(\epsilon^{-1}), 0 \leq y^2 + z^2 < 1\}$. La variable x puede tratarse como una función en Σ_ϵ definida por la restricción

$$y^2 + z^2 + 1/3x^2\overline{V}(\varphi) = 1 \quad (2.4.30)$$

y cuya derivada direccional a lo largo del flujo generado por (2.4.27-2.4.29) puede obtenerse directamente de la ecuación (2.2.13).

Como $\overline{f}'$, $\overline{W}_V$ y $\overline{W}_\chi$ son C^2 en $\varphi = 0$ podemos extender (2.4.27-2.4.29) a la frontera de Σ_ϵ para obtener un sistema C^2 en la clausura de Σ_ϵ , $\overline{\Sigma}_\epsilon$. De la definición 2.3.3 sigue que $\overline{f}'$, $\overline{W}_V$ y $\overline{W}_\chi$ se anulan en el origen y son de orden 2 o superior en φ y $\overline{f}'$ es negativa en Σ_ϵ .

2.4.1. Localización, existencia y condiciones de estabilidad de los puntos críticos. Parámetros cosmológicos

El sistema (2.4.27-2.4.29) admite un conjunto de seis puntos críticos los cuáles hemos denotado por p_i , $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. En lo que resta discutiremos las condiciones de existencia y de estabilidad de los puntos críticos, es decir, para cada caso se describirán las variedades estable, inestable y centro que tengan más sentido físico.

1. El punto crítico p_1 con coordenadas $y = -1$, $z = 0$ y $\varphi = 0$ existe para todos los valores de los parámetros libres del modelo. Los valores propios del sistema linealizado alrededor de p_1 son $\lambda_{1,1} = 2 - \sqrt{2/3}N$, $\lambda_{1,2} = \frac{2-\gamma}{2} - \frac{M(-4+3\gamma)}{2\sqrt{6}}$ y $\lambda_{1,3} = 0^5$. Utilizando el Teorema de la Variedad Central garantizamos que existe:

a) un subespacio invariante estable 2-dimensional tangente al plano y-z si:

- 1) si se verifica que el índice barotrópico es tal que $0 < \gamma < \frac{4}{3}$, el potencial es una función BCI de orden exponencial $N > \sqrt{6}$ y la función de acoplamiento es una función BCI de orden exponencial $M < -\frac{\sqrt{6}(\gamma-2)}{3\gamma-4}$.
- 2) $\frac{4}{3} < \gamma < 2$, $N > \sqrt{6}$ y $M > -\frac{\sqrt{6}(\gamma-2)}{3\gamma-4}$;

b) un subespacio invariante inestable 2-dimensional tangente al plano y-z, si:

- 1) $0 < \gamma < \frac{4}{3}$, $N < \sqrt{6}$ y $M > -\frac{\sqrt{6}(\gamma-2)}{3\gamma-4}$
- 2) $\frac{4}{3} < \gamma < 2$, $N < \sqrt{6}$ y $M < -\frac{\sqrt{6}(\gamma-2)}{3\gamma-4}$

c) una variedad central 1-dimensional tangente a p_1 en la dirección de φ .

2. El punto p_2 con coordenadas $y = 1$, $z = 0$ y $\varphi = 0$ existe para todos los valores de los

⁵Cuando un punto crítico tiene un valor propio cero, como este y los restantes, se dice que es no hiperbólico, y por tanto el teorema de Hartman-Grobman no se puede aplicar, sin embargo se puede utilizar el Teorema de la Variedad Central para caracterizarlo.

parámetros libres del modelo. Los valores propios son $\lambda_{2,1} = 2 + \sqrt{2/3}N$, y $\lambda_{2,2} = \lambda_{1,2}$ y $\lambda_{2,3} = 0$ (ver punto 1). Para este punto existe:

a) un subespacio estable 2-dimensional tangente al plano y-z si

$$1) \ 0 < \gamma < \frac{4}{3}, \ N < -\sqrt{6}, \ y \ M > \frac{\sqrt{6}(\gamma-2)}{3\gamma-4}, \ 0 < \gamma < \frac{4}{3}$$

$$2) \ \frac{4}{3} < \gamma < 2, \ N < -\sqrt{6} \ y \ M < \frac{\sqrt{6}(\gamma-2)}{3\gamma-4}$$

b) un subespacio inestable 2-dimensional tangente al plano y-z si:

$$1) \ 0 < \gamma < \frac{4}{3}, \ N > -\sqrt{6} \ y \ M < \frac{\sqrt{6}(\gamma-2)}{3\gamma-4}$$

$$2) \ \frac{4}{3} < \gamma < 2, \ N > -\sqrt{6} \ y \ M > \frac{\sqrt{6}(\gamma-2)}{3\gamma-4}$$

c) una variedad central 1-dimensional tangente a p_2 en la dirección de φ .

3. El punto p_3 con coordenadas $y = \frac{M(-4+3\gamma)}{\sqrt{6}(-2+\gamma)}$, $z = \sqrt{1 - \frac{M^2(4-3\gamma)^2}{6(-2+\gamma)^2}}$ y $\varphi = 0$ existe si $0 < \gamma < \frac{4}{3}$ y $-\frac{\sqrt{6}(-2+\gamma)}{-4+3\gamma} \leq M \leq \frac{\sqrt{6}(-2+\gamma)}{-4+3\gamma}$. Los valores propios son $\lambda_{3,1} = \frac{6(\gamma-2)^2 - M^2(4-3\gamma)^2}{12(\gamma-2)}$, $\lambda_{3,2} = -\frac{3\gamma M^2}{2} + (M+N)M + \frac{2(N-M)M}{3(\gamma-2)} + \gamma$, y $\lambda_{3,3} = 0$. Bajo las anteriores condiciones de existencia encontramos que existe:

a) una variedad estable de dimensión dos para los valores de los parámetros:

$$1) \ N > \frac{M^2(4-3\gamma)^2 - 6(\gamma-2)\gamma}{2M(3\gamma-4)} \ y \ M < 0.$$

$$2) \ N < \frac{M^2(4-3\gamma)^2 - 6(\gamma-2)\gamma}{2M(3\gamma-4)} \ y \ M > 0.$$

b) Una variedad inestable de dimensión 1 en cuyo caso la variedad estable es 1-dimensional.

c) Una variedad central que es 1-dimensional⁶.

⁶Si $M = \mp \frac{\sqrt{6}(-2+\gamma)}{-4+3\gamma}$ este punto crítico se reduce a $p_{1,2}$. En este caso el subespacio centro no es ya 1-dimensional sino que es 2-dimensional y queda generado por los vectores propios $\mathbf{e}_z$ y $\mathbf{e}_\varphi$. Dicha variedad central es tangente al subespacio centro en el punto crítico. Si adicionalmente $|N| = \sqrt{6}$, la variedad central es 3-dimensional.

4. El punto crítico p_4 con coordenadas $y = -\frac{N}{\sqrt{6}}$, $z = 0$ y $\varphi = 0$ existe si $|N| \leq \sqrt{6}$ ⁷. Los valores propios son $\lambda_{4,1} = \frac{1}{6}(N^2 - 6) \leq 0$, $\lambda_{4,2} = \frac{1}{6}N(2M + N) - \frac{1}{4}(MN + 2)\gamma$ y $\lambda_{4,3} = 0$.

Para este punto se tiene que:

a) el comportamiento típico es la existencia de una variedad central 1-dimensional C_N tocando p_4 , la cuál es tangente al eje z si $\lambda_{4,1} < 0$ y $\lambda_{4,2} \neq 0$ (o sea, si $N^2 < 6$) y está generado por $\mathbf{e}_\varphi$. De acuerdo con las propiedades de las variedades centrales es claro que C_N es un atractor exponencial en una vecindad suficientemente pequeña de p_4 y es intuitivamente obvio por la geometría que cada solución asintótica en el pasado a p_4 debe estar en la variedad central.

b) el subespacio estable es 2-dimensional en los siguientes casos:

- 1) si $N = 0$, entonces, el punto crítico tiene coordenadas $(0, 0, 0)$. Los valores propios de la linealización son entonces $(-1, 0, -\frac{\gamma}{2})$ y en este caso, el subespacio estable queda generado por los vectores propios $\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$;
- 2) si $0 < \gamma < \frac{4}{3}$, $-\sqrt{6} < N < 0$, y $M > \frac{2(N^2 - 3\gamma)}{N(3\gamma - 4)}$;
- 3) si $\frac{4}{3} < \gamma < 2$, $-\sqrt{6} < N < 0$, y $M < \frac{2(N^2 - 3\gamma)}{N(3\gamma - 4)}$;
- 4) si $0 < \gamma < \frac{4}{3}$, $0 < N < \frac{4}{3}$, and $M < \frac{2(N^2 - 3\gamma)}{N(3\gamma - 4)}$;
- 5) si $\frac{4}{3} < \gamma < 2$, $0 < N < \sqrt{6}$, y $M > \frac{2(N^2 - 3\gamma)}{N(3\gamma - 4)}$ el subespacio estable es generado por los vectores propios $\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$.

c) intercambiando $>$ y $<$ en las desigualdades para M en los últimos cuatro casos hallamos que el subespacio inestable está generado por $\mathbf{e}_z$ y, consecuentemente la variedad estable es 1-dimensional y es tangente al punto en la dirección de $\mathbf{e}_y$.

5. Los puntos críticos $p_{5,6}$ con coordenadas $y = \frac{\sqrt{6}\gamma}{M(3\gamma - 4) - 2N}$ y $z = \mp \frac{\sqrt{4N(2M + N) - 6(MN + 2)\gamma}}{2N + M(4 - 3\gamma)}$

⁷Observar que este punto se reduce a $p_{1,2}$ si $N^2 = 6$.

(respectivamente) existen si las siguientes condiciones se verifican simultáneamente:

$$4N(2M + N) - 6(MN + 2)\gamma \geq 0$$

$$\mp (2N + M(4 - 3\gamma)) > 0$$

$$\frac{4N^2 + M(8 - 6\gamma)N + 6(\gamma - 2)\gamma}{(2N + M(4 - 3\gamma))^2} \leq 1$$

(o sea, si son reales, y están dentro del cilindro $\overline{\Sigma_\epsilon}$). Los valores propios asociados son

$$\lambda_{5,6}^\pm = \frac{\alpha}{\beta} \pm \frac{\sqrt{8(\beta^2 + 27\gamma^2)\alpha^2 - 2\beta(\gamma - 4)(\beta^2 - 216\gamma^2)\alpha - (\gamma - 2)(\beta^2 - 216\gamma^2)^2}}{6\sqrt{6}\beta\gamma}$$

y $\lambda_{5,6} = 0$, donde $\alpha = 3(N(\gamma - 2) + M(3\gamma - 4))$ y $\beta = 2(2N - M(3\gamma - 4))$. Determinamos que los valores propios no nulos pueden ser complejos conjugados con parte real negativa o reales de diferente signo, luego:

- a) la variedad inestable de $p_{5,6}$ es el conjunto vacío.
- b) el subespacio estable es 2-dimensional si existe un único valor propio nulo. Cuando las órbitas se restringen a estos conjuntos invariantes, $p_{5,6}$ actúan como focos estables (en el caso complejo conjugado) o como nodos (en el caso real). Las condiciones sobre los parámetros en cada caso son muy complicadas para presentarlas aquí.
- c) la variedad central es 1-dimensional⁸.

En la siguiente tabla se presentan los valores de algunas magnitudes cosmológicas de interés de cada punto crítico como son:

1. q_0 parámetro de desaceleración que cuantifica la expansión del universo y el ritmo al que se está expandiendo.

⁸si $M = \frac{2(N^2 - 3\gamma)}{N(3\gamma - 4)}$, este punto se reduce a p_4 y por tanto la variedad central es 2-dimensional y está generada por los vectores propios $\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_\varphi$.

2. ω_{tot} parámetro de ecuación de estado (PEE) efectivo para la materia total.
3. Ω_{de} parámetro adimensional de densidad de energía de la energía oscura que es la razón entre la densidad de energía oscura y la densidad crítica del universo.

Punto	y	z	Ω_{de}	w_{tot}	Aceleración
p_1	-1	0	1	1	no
p_2	1	0	1	1	no
p_3	δ	$\sqrt{1 - \delta^2}$	δ^2	$\gamma + (\gamma - 1)\delta$	$0 < \gamma < \frac{2}{3}$ and $ M < \Gamma$
p_4	$-\frac{N}{\sqrt{6}}$	0	1	$-1 + \frac{N^2}{3}$	$N^2 < 2$
$p_{5,6}$	$-\frac{6\sqrt{6}\gamma}{\beta}$	$\mp \frac{\sqrt{\frac{2\beta(2\alpha+\beta)}{\gamma} - 432\gamma}}{\beta}$	$-\frac{2(2\alpha+\beta)}{\beta\gamma} + \frac{432\gamma}{\beta^2} + 1$	$\frac{(\gamma+2)\beta^2+4\alpha(\gamma+1)\beta-432\gamma^2}{\beta^2\gamma}$	$\frac{\alpha}{\beta} < -\frac{1}{3}$

Cuadro 2.1: Propiedades de los puntos críticos del sistema (2.4.27-2.4.29). Usamos la notación $\alpha = 3(N(\gamma - 2) + M(3\gamma - 4))$, $\beta = 2(2N - M(3\gamma - 4))$, $\delta = \frac{M(3\gamma - 4)}{\sqrt{6}(\gamma - 2)}$, y $\Gamma = \frac{\sqrt{2(\gamma-2)(3\gamma-2)}}{4-3\gamma}$.

2.5. En flujo en la vecindad $\phi = -\infty$

Con el objetivo de complementar el análisis global del sistema es necesario investigar el comportamiento cerca de $\phi = -\infty$. Esto se puede hacer fácilmente observando que el sistema de ecuaciones (2.1.4, 2.1.6-2.1.8) es invariante bajo la transformación de coordenadas

$$(\phi, \dot{\phi}) \rightarrow -(\phi, \dot{\phi}), \quad V \rightarrow U, \quad \chi \rightarrow \Xi,$$

donde $U(\phi) = V(-\phi)$ y $\Xi(\phi) = \chi(-\phi)$. Luego, para un potencial V y una función de acoplamiento χ particular, el comportamiento de las soluciones de las ecuaciones (2.1.4, 2.1.6-2.1.8) cerca

de $\phi = -\infty$ es equivalente (excepto por el signo de ϕ) al comportamiento del sistema cerca de $\phi = \infty$ con el potencial y la función de acoplamiento dados respectivamente por U y Ξ .

Si U y Ξ son de $\mathcal{E}_+^2$, el análisis precedente en $\bar{\Sigma}_\epsilon$ puede ser aplicado (para una selección apropiada de ϵ).

En lo siguiente denotaremos por $\mathcal{E}^k$ al conjunto de funciones de clase C^k bien comportadas tanto en $+\infty$ como en $-\infty$. Usaremos letras latinas mayúsculas con subíndices $+\infty$ y $-\infty$, respectivamente para denotar el orden exponencial de funciones de $\mathcal{E}^k$ en $+\infty$ y en $-\infty$.

2.6. Estructura global del espacio de fases

Notemos que si definimos el conjunto $\Omega(x_0)$ como la región del espacio de fases dado por (2.2.18) para la cual $x < x_0$, entonces, dado el hecho de que x es monótona decreciente, este conjunto es igual a la unión de sus órbitas del pasado.

El procedimiento antes esbozado para definir un sistema de coordenadas en $-\infty$ nos permite empotrar $\Omega(x_0)$ en una variedad diferenciable compacta 4-dimensional $\Sigma(x_0)$ tal que el campo vectorial definido por (2.2.13-2.2.16) pueda ser extendido suavemente sobre $\Sigma(x_0)$. Con este objetivo simplemente definimos un atlas como sigue.

Primero, se define el interior de $\Sigma(x_0)$ como el conjunto

$$\{(\phi, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 : 0 < x < x_0, y^2 + z^2 < 1\}$$

donde se usa la carta (sistema de coordenadas) local definida según (2.2.11). Es obvio que este conjunto es acotado en las variables x, y, z . En el subconjunto abierto de este conjunto para el cual $x > \epsilon^{-1}$ para un valor de ϵ suficientemente pequeño se define una segunda carta local (φ, x, y, z) de acuerdo a (2.4.26). Una carta local (φ, x, y, z) análoga puede ser definida cerca de

$\phi = -\infty$ de acuerdo al procedimiento esbozado en la sección anterior.

La construcción se completa adjuntando una frontera la cual es definida tomando la unión de los planos $x = 0$, $x = x_0$, $\varphi = 0$ y la circunferencia $y^2 + z^2 = 1$ a las respectivas cartas locales.

Por construcción, $\Sigma(x_0)$ es compacto y está empotrado en $\mathbb{R}^4$.

El campo vectorial definido por (2.2.13-2.2.16) puede ser suavemente extendido sobre la frontera de $\Sigma(x_0)$ tal que $\Sigma(x_0)$ es la unión de sus órbitas del pasado. $\Omega(x_0)$ es una hipersuperficie 3-dimensional empotrada en $\Sigma(x_0)$. Es importante notar que $\Omega(x_0)$ se acerca a la frontera no física a lo largo de la intersección del plano $x = 0$ con el plano $\varphi = 0$ y la circunferencia $y^2 + z^2 = 1$. Este conjunto se llama frontera no física de Ω o $\partial\Omega$.

Capítulo 3

Análisis de los resultados

3.1. La singularidad inicial del espacio-tiempo

En la presente sección estudiaremos la singularidad inicial (Big-Bang) del espacio-tiempo. Los puntos críticos $p_{1,2}$ pueden representar dicha singularidad. Ellos pueden convivir en el mismo espacio de fases para valores de M y N y γ en los respectivos intervalos $-\sqrt{6} < N < \sqrt{6}$, $-\frac{\sqrt{6}(\gamma-2)}{3\gamma-4} < M < \frac{\sqrt{6}(\gamma-2)}{3\gamma-4}$ y $0 < \gamma < \frac{4}{3}$ (en cuyo caso ambos tienen una variedad inestable 2-dimensional y una variedad centro 1-dimensional). Es fácil mostrar que el parámetro de Hubble y la densidad de materia de las soluciones cosmológicas asociadas a ellos divergen en el pasado. El campo escalar también diverge, es igual a $+\infty$ y a $-\infty$ para p_1 y p_2 respectivamente. No obstante, aún en este caso, el posible atractor del pasado corresponde a p_1 porque $\overline{f'} < 0$ mientras que para $y > 0$ las órbitas entran en el espacio de fase y p_2 actúa como una silla. El punto p_2 puede actuar como atractor del pasado solo en un conjunto de medida cero (cuando $\varphi = 0$).

3.1.1. Análisis en la vecindad de p_1

A consecuencia del análisis de la sección anterior parece razonable pensar que la singularidad inicial podría estar asociada al punto crítico p_1 el cual puede ser la fuente local en la región

donde el campo escalar diverge. La variedad inestable de p_1 es 2-dimensional si $N < \sqrt{6}$ de modo que el comportamiento asintótico de las soluciones cercanas a p_1 podría tomarse, en una primera aproximación (aún cuando el teorema de Hartman-Grobman no sea aplicable), como la solución exacta correspondiente a la variedad central del punto crítico salvo un término exponencial de error.

Para τ suficientemente grande y negativo podemos escribir:

$$y(\tau) = -1 + O(e^{\lambda_{1,1}\tau}), \quad z(\tau) = O(e^{\lambda_{1,2}\tau}) \quad (3.1.1)$$

la cual se obtiene de aproximar la solución general de (2.4.27,2.4.28) por el flujo linealizado.

Sustituyendo (3.1.1) en (2.2.16), e integrando la ecuación resultante obtenemos

$$\phi(\tau) = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(-\tau + \tilde{\phi} \right) + O(e^{\lambda_{1,1}\tau}) \quad (3.1.2)$$

y, usando el mismo argumento que en [39] obtenemos $\varphi = f \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \left(-\tau + \tilde{\phi} \right) \right) + O(e^{\beta\tau})$ para algún $\beta > 0$. De esta forma disponemos de soluciones a primer orden de (2.4.27-2.4.29). Sustituyendo (3.1.1) en (2.2.13) encontramos la ecuación diferencial:

$$x' = \left(x + O \left(e^{2\lambda_{1,2}\tau} \right) \right) + O \left(e^{\lambda_{1,1}\tau} \right)$$

la cual admite la solución general (válida a primer orden):

$$x = x_0 e^\tau. \quad (3.1.3)$$

Para deducir una expresión para t dado x podemos usar la identidad $\Delta t \equiv t - t_i = \frac{1}{3} \int x(\tau) d\tau$ la cual se deduce de las definiciones de x y t . Integrando (3.1.3) y dividiendo por 3 obtenemos la expansión deseada para Δt dada por $\Delta t = x_0 e^\tau$.

Escribiendo las variables de campo originales en términos de las variables Hubble-normalizadas y usando las aproximaciones a primer orden deducidas anteriormente obtenemos las ecuaciones

(válidas a primer orden):

$$3H = (\Delta t)^{-1}, \quad \phi = -\sqrt{\frac{2}{3}} \ln \frac{\Delta t}{c}, \quad \dot{\phi} = -\sqrt{\frac{2}{3}} \Delta t^{-1}, \quad \rho = 0. \quad (3.1.4)$$

Esta solución asintótica corresponde a la solución exacta de (2.1.4, 2.1.6-2.1.8) cuando V es idénticamente cero y χ constante. Luego, existe una clase genérica de cosmologías las cuáles, en una vecindad suficientemente pequeña de la singularidad, se comportan, aproximadamente, como si el contenido materia fuera solamente un campo escalar sin masa mínimamente acoplado a la gravedad.

Con el propósito de precisar esta última idea es necesario ofrecer un estimado del error de (3.1.4) en una vecindad suficientemente pequeña de $t = t_i$. Asumiremos sin perder generalidad que $t_i = 0$. Con este objetivo es suficiente determinar términos de segundo orden para x, y, z, ϕ , en una vecindad de $\tau - \infty$ y luego usar estos estimados para obtener términos de segundo orden para $(H, \phi, \dot{\phi}, \rho)$ en una vecindad de $t_i = 0$.

La idea anterior se puede formular en términos precisos como un teorema:

Teorema 3.1.1 *Sea $V \in \mathcal{E}_+^2$ tal que $N < \sqrt{6}$ y $\chi \in \mathcal{E}_+^2$ tal que*

$$i) \quad 0 < \gamma < \frac{4}{3} \text{ y } M > -\frac{\sqrt{6}(\gamma-2)}{3\gamma-4} \text{ o}$$

$$ii) \quad \frac{4}{3} < \gamma < 2 \text{ y } M < -\frac{\sqrt{6}(\gamma-2)}{3\gamma-4}$$

Entonces, existe una vecindad $\mathcal{N}(p_1)$ de p_1 tal que para todo $p \in \mathcal{N}(p_1)$ la trayectoria ψ_p tiende

a p_1 en el pasado y la solución puede escribirse como:

$$H = \frac{1}{3t} + O(\epsilon_V(t)), \quad (3.1.5)$$

$$\phi = -\sqrt{\frac{2}{3}} \ln \frac{t}{\tilde{c}} + O(t\epsilon_V(t)), \quad (3.1.6)$$

$$\dot{\phi} = -\sqrt{\frac{2}{3}} t^{-1} + O(\epsilon_V(t)), \quad (3.1.7)$$

$$\rho \propto t^{-\gamma} \chi \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \ln \frac{t}{\tilde{c}} \right)^{\frac{3\gamma}{2}-2} (1 + O(t\epsilon_V(t))) \quad (3.1.8)$$

donde $\epsilon_V(t) = tV \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \ln \frac{t}{\tilde{c}} \right)$ Observemos que como $V \in \mathcal{E}_+^2$ con orden exponencial N entonces, aplicando el Teorema 2 de [39] tenemos

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha V \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \ln \frac{t}{\tilde{c}} \right) = \lim_{\phi \rightarrow \infty} e^{-\sqrt{\frac{3}{2}} \alpha \phi} V(\phi) = 0, \quad \forall \alpha > \sqrt{\frac{2}{3}} N.$$

Luego, para $N < \sqrt{6}$ los términos de error $O(\epsilon_V(t))$ y $O(t\epsilon_V(t))$ son dominados por los términos de orden lineal. Si $N < \sqrt{\frac{3}{2}}$ ambos términos de error tienden uniformemente a cero.

Por otra parte, si $\chi \in \mathcal{E}_+^2$ es de orden exponencial M entonces, la función definida por

$$Z(\phi) = \chi(\phi)^{\frac{3\gamma}{2}-2}$$

es de orden exponencial $\tilde{M} = \left(\frac{3\gamma}{2} - 2 \right) M$. Luego,

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^\beta Z \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \ln \frac{t}{\tilde{c}} \right) = 0, \quad \forall \beta > \sqrt{\frac{2}{3}} \tilde{M}$$

Haciendo $\beta = -\gamma$ entonces resulta que

$$t^{-\gamma} \chi \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \ln \frac{t}{\tilde{c}} \right)^{\frac{3\gamma}{2}-2}$$

tiende uniformemente a cero cuando $t \rightarrow 0$ en el caso que $0 < \gamma < \frac{4}{3}$ y $M > -\frac{\sqrt{6}\gamma}{3\gamma-4}$ o en el caso que $\frac{4}{3} < \gamma < 2$ y $M < -\frac{\sqrt{6}\gamma}{3\gamma-4}$.

Con el objetivo de ganar en claridad en esta demostración (la cual es extensa) haremos primero algunas estimaciones las cuales emplearemos posteriormente en la demostración.

1. Estimación de $\int \bar{V}(\varphi)e^{3\tau}d\tau$

Consideremos la integral indefinida:

$$I(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} \bar{V}(\varphi)e^{3\tau}d\tau.$$

Usando integración por partes deducimos la ecuación siguiente:

$$I(\tau) = \frac{1}{3} \left(\bar{V}(\varphi)e^{3\tau} \Big|_{\tau_0}^{\tau} - \int_{\tau_0}^{\tau} e^{3\tau} d\bar{V}(\varphi) \right).$$

Usando la definición de $\bar{V}(\varphi)$, el teorema de la derivada de la función inversa y la ecuación diferencial $d\varphi = \bar{f}'(\varphi)y(\tau)d\tau$ obtenemos (al menos simbólicamente) $d\bar{V}(\varphi) = \sqrt{\frac{2}{3}}\bar{V}'(\varphi)y d\tau$. Por la definición de $\bar{W}_V$ y por la hipótesis $V \in \mathcal{E}_+^2$ con orden exponencial $N^2 < 6$, expresamos $d\bar{V}(\varphi)$ como

$$d\bar{V}(\varphi) = \sqrt{\frac{2}{3}}\bar{V}(\varphi) (\bar{W}_V(\varphi) + N) y d\tau.$$

Por tanto,

$$I(\tau) = I_1(\tau) + I_2(\tau) + I_3(\tau)$$

donde

$$I_1(\tau) = \frac{1}{3} \bar{V}(\varphi)e^{3\tau} \Big|_{\tau_0}^{\tau}$$

es tal que $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} I(t) = \bar{V}(\varphi)e^{3\tau}$ porque V es BCI de orden exponencial $|N| < \sqrt{6} < 3$

y entonces $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \bar{V}(\varphi)e^{3\tau} = 0$. Las integrales I_2 y I_3 se definen por:

$$I_2(\tau) = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \int_{\tau_0}^{\tau} \bar{V}(\varphi) \bar{W}_V(\varphi) e^{3\tau} y d\tau$$

y

$$I_3(\tau) = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} N \int_{\tau_0}^{\tau} \bar{V}(\varphi) e^{3\tau} y d\tau.$$

Con el objetivo de disponer de un estimado de I_2 y I_3 procederemos como sigue. Sea definida la función $\delta(\tau) = \sup_{\tau' < \tau} \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} |\overline{W}_V(\varphi(\tau'))|$. Como $y^2 < 1$ es esto sigue que

$$\begin{aligned} |I_2(\tau)| &< \delta(\tau) |I_1(\tau)| \\ &\leq \delta(\tau) (|I_1(\tau)| + |I_2(\tau)| + |I_3(\tau)|) \\ &\leq \frac{\delta(\tau)}{1 - \delta(\tau)} (|I_1(\tau)| + |I_3(\tau)|). \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Esta última desigualdad sera usada en la obtención de un estimado para I_3 .

$$\begin{aligned} |I_3(\tau)| &< \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} |N| |I(\tau)| \\ &\leq \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} |N| (|I_1(\tau)| + |I_2(\tau)| + |I_3(\tau)|) \\ &< \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} |N| \left(\frac{1}{1 - \delta(\tau)} (|I_1(\tau)| + |I_3(\tau)|) \right) \\ &< \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} |N| \left(\frac{1}{1 - \delta(\tau) - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} |N|} \right) |I_1(\tau)|. \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Sustituyendo la estimación de I_3 dada por la última desigualdad de (3.1.10), en la última desigualdad en (3.1.9) obtenemos

$$|I_2(\tau)| < \frac{\delta(\tau)}{1 - \delta(\tau) - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} |N|} |I_1(\tau)|. \quad (3.1.11)$$

Notemos que las deducciones anteriores son posibles si y solo si $\delta(\tau) < 1$ y $|N| < 3\sqrt{\frac{3}{2}}(1 - \delta(\tau))$ para un valor fijo de τ . Por tanto, para τ suficientemente grande, las anteriores expresiones pueden hacerse suficientemente pequeñas. Haciendo tender τ_0 a $-\infty$ se demuestra que

$$\int \overline{V}(\varphi) e^{3\tau} d\tau = \frac{1}{3} \overline{V}(\varphi) e^{3\tau} + h \quad (3.1.12)$$

donde h denota términos de orden superior (los cuales serán descartados).

2. Estimación de $\int \bar{W}_\chi(\varphi) d\tau$ Con el objetivo de estimar $\int \bar{W}_\chi(\varphi) d\tau$ nos valdremos de la aproximación de primer orden

$$\varphi = f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}(-\tau + \phi_0)\right) + O(e^{\beta\tau})$$

para algún $\beta > 0$.

Por definición

$$\bar{W}_\chi(\varphi) = \frac{\chi'(f^{-1}(\varphi))}{\chi(f^{-1}(\varphi))} - M$$

Usando la expresión a primer orden

$$\phi = f^{-1}(\varphi) = \sqrt{\frac{2}{3}}(-\tau + \phi_0) + O(e^{\lambda_{1,1}\tau})$$

(como ha sido obtenido con anterioridad) e integrando la expresión resultante con respecto a τ obtenemos el estimado

$$\int \bar{W}_\chi(\varphi) d\tau = -\sqrt{\frac{3}{2}} \ln \bar{\chi}(\varphi) d\tau - M\tau + h. \quad (3.1.13)$$

Demostración. Resolviendo la ecuación (2.4.30) para y y sustituyendo en (2.2.13) obtenemos

$$\frac{d \ln x}{d\tau} = \left(\frac{\gamma}{2} - 1\right) z^2 + 1 - \frac{1}{3} x^2 \bar{V}(\varphi).$$

Sustituyendo en el miembro derecho de esta ecuación las expansiones a primer orden $z = O(e^{\lambda_{1,2}\tau})$ y $x = x_0 e^\tau$ (las cuales son válidas cuando τ tiende a $-\infty$) se obtiene la ecuación diferencial:

$$\frac{d \ln x}{d\tau} = 1 - \frac{1}{3} x_0^2 \bar{V}(\varphi) e^{2\tau} + O(e^{2\lambda_{1,2}\tau}) + h. \quad (3.1.14)$$

Donde h denota cualquier colección de términos de orden superior a ser descartados.

Como $V \in \mathcal{E}_+^2$ con orden exponencial $N < \sqrt{6}$ podemos usar el resultado auxiliar probado en [39]:

$$\int \bar{V}(\varphi) e^{2\tau} d\tau = \frac{\bar{V}(\varphi) e^{2\tau}}{\lambda_{1,1}} + h, \quad (3.1.15)$$

con el objetivo de resolver la ecuación (3.1.14) en cuadraturas. Integrando las correspondientes cuadraturas obtenemos la solución (válida a segundo orden):

$$x = x_0 e^\tau \exp \left(-\frac{x_0^2}{3\lambda_{1,1}} \bar{V}(\varphi) e^{2\tau} \right) + h.$$

Como la expresión entre paréntesis tiende rápidamente a cero cuando τ tiende a $-\infty$, podemos usar la aproximación $e^u \approx 1 + u$, para deducir la expresión:

$$x = x_0 e^\tau \left(1 - \frac{x_0^2}{3\lambda_{1,1}} \bar{V}(\varphi) e^{2\tau} \right) + h. \quad (3.1.16)$$

Para deducir una expresión válida a segundo orden para t integramos (3.1.16) y dividimos 3, así se deduce la expresión deseada t .

Siguiendo los anteriores pasos y usando la estimación 1 deducida para $\int \bar{V}(\varphi) e^{3\tau} d\tau$ tenemos:

$$t = \frac{1}{3} x_0 e^\tau \left(1 - \frac{x_0^2}{9\lambda_{1,1}} \bar{V}(\varphi) e^{2\tau} \right) + h. \quad (3.1.17)$$

La ecuación (3.1.17) se invierte, a segundo orden, resultando

$$x_0 e^\tau = 3 \left(t + \frac{\bar{V}(\varphi)}{\lambda_{1,1}} t^3 \right) + h.$$

Sustituyendo este resultado en (3.1.16) tenemos:

$$x(t) = 3t - \frac{6V(\phi)t^3}{\lambda_{1,1}} + h. \quad (3.1.18)$$

Dado x podemos obtener la expresión válida a segundo orden para el escalar de Hubble:

$$H(t) = \frac{1}{x(t)} = \frac{1}{3t} + \frac{2V(\phi)t}{3\lambda_{1,1}} + h. \quad (3.1.19)$$

Para obtener un desarrollo analogo para y procedemos como sigue. Primero, reescribimos (2.4.27) como

$$\frac{d \ln y}{d\tau} = \left(-1 + \frac{\gamma}{2} \right) z^2 - \frac{1}{3} x^2 \bar{V}(\varphi) - \frac{(1 - y^2 - z^2)}{\sqrt{6}y} (\bar{W}_V + N) + \frac{z^2(4 - 3\gamma)}{2\sqrt{6}y} (\bar{W}_X + M).$$

Segundo, sustituimos en esta ecuación las expresiones a primer orden $x = x_0 e^\tau$, $y = -1 + O(e^{\lambda_{1,1}\tau})$, y $z = O(e^{\lambda_{1,2}\tau})$ integrando la resultante ecuación, teniendo en cuenta que y es negativa cerca de la singularidad inicial deducimos:

$$y = -1 + \frac{x_0^2}{3\lambda_{1,1}} e^{2\tau} \overline{V}(\varphi) + h. \quad (3.1.20)$$

O en términos de t ,

$$y = -1 + \frac{3V(\phi)t^2}{\lambda_{1,1}} + h. \quad (3.1.21)$$

Combinando las expansiones (3.1.21) y (3.1.18) en $\dot{\phi}(t) = \frac{\sqrt{6}y}{x}$, obtenemos

$$\dot{\phi}(t) = -\sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{t} - \frac{tV(\phi)}{\lambda_{1,1}} \right) + h. \quad (3.1.22)$$

Esta ecuación puede integrarse a segundo orden y se deduce que

$$\phi(t) = -\sqrt{\frac{2}{3}} \left(\ln \frac{t}{\tilde{c}} - \frac{V(\phi)t^2}{2\lambda_{1,1}} \right) + h. \quad (3.1.23)$$

Con el objetivo de obtener una expresión para z válida a segundo orden procedemos como antes: primero, reescribimos la ecuación (2.4.28) como

$$\frac{d \ln z}{d\tau} = -\frac{1}{3} x^2 \overline{V}(\varphi) + (1 - \frac{\gamma}{2})(1 - z^2) + \frac{y(-4 + 3\gamma)}{2\sqrt{6}} \overline{W}_V(\varphi),$$

donde hemos usado la restricción (2.4.30) como definición de y^2 . Segundo, sustituimos las soluciones a primer orden $x = x_0 e^\tau$, $y = -1 + O(e^{\lambda_{1,1}\tau})$, y $z = O(e^{\lambda_{1,2}\tau})$ e integrando la ecuación resultante deducimos que

$$z = z_0 \exp \left(\lambda_{1,2}\tau + \frac{4 - 3\gamma}{2\sqrt{6}} \int \overline{W}_\chi(\varphi) d\tau \right) \left(1 - \frac{x_0^2}{3\lambda_{1,1}} \overline{V}(\varphi) e^{2\tau} \right) + h. \quad (3.1.24)$$

Usando la estimación 2 puede obtenerse:

$$z = z_0 e^{(1 - \frac{\gamma}{2})\tau} \overline{\chi}(\varphi)^{-1 + \frac{3\gamma}{4}} \left(1 - \frac{x_0^2}{3\lambda_{1,1}} \overline{V}(\varphi) e^{2\tau} \right) + h, \quad (3.1.25)$$

o, en términos de t ,

$$z = \chi_0 t^{1-\frac{\gamma}{2}} \chi(\phi)^{\frac{3\gamma}{4}-1} + h \quad (3.1.26)$$

donde $\chi_0 = z_0 \left(\frac{x_0}{3}\right)^{-1+\frac{\gamma}{2}}$.

Combinando los desarrollos de z y x en $\rho = \frac{3z^2}{x}$ deducimos

$$\rho = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{4}{\lambda_{1,1}} V(\phi) t^2 \right) \chi(\phi)^{\frac{3\gamma}{2}-2} \chi_0^2 t^{-\gamma} + h. \quad (3.1.27)$$

Observar que el segundo término, h , en el miembro derecho de (3.1.23) tiende a cero cuando $t \rightarrow 0$. Esto permite expandir V y χ en series de Taylor en una vecindad de $\phi^* = -\sqrt{\frac{2}{3}} \ln \frac{t}{\epsilon}$ obteniéndose

$$V(\phi(t)) = V(\phi^*)(1 + \alpha W_V(\phi^*) V(\phi) t^2) + h \quad (3.1.28)$$

y

$$\chi(\phi(t)) = \chi(\phi^*)(1 + \alpha W_\chi(\phi^*) V(\phi) t^2) + h \quad (3.1.29)$$

donde α es una constante. Sustituyendo las ecuaciones (3.1.28) y (3.1.29) en las ecuaciones (3.1.19, 3.1.22, 3.1.23, 3.1.27) se obtiene el resultado deseado. Esto prueba el teorema.

3.2. Singularidad Global

De acuerdo a lo discutido en la sección 2.6 es posible obtener información global sobre las soluciones del sistema (2.1.4, 2.1.6-2.1.8). Para finalizar, enunciaremos un teorema global de singularidad, el cual se puede ver como una extensión del Teorema 6 en [39] (página 25) aunque no totalmente, dado que en nuestro escenario es difícil probar nuestra conjetura de que la correspondencia con las cosmologías con campos escalares si masa sea inyectiva.

El teorema establece lo siguiente:

Teorema 3.2.1 *Sea $V \in \mathcal{E}^2$ tal que $N_{\pm\infty}^2 < 6$ y $\chi \in \mathcal{E}^2$ tal que*

$$i) \ 0 < \gamma < \frac{4}{3} \text{ y } M_{\pm\infty} > -\frac{\sqrt{6}(\gamma-2)}{3\gamma-4} \text{ o}$$

$$ii) \ \frac{4}{3} < \gamma < 2 \text{ y } M_{\pm\infty} < -\frac{\sqrt{6}(\gamma-2)}{3\gamma-4}$$

Entonces, existe una clase de cosmologías FRW, conteniendo casi todas las soluciones de (3.1.19, 3.1.22, 3.1.23, 3.1.27) las cuales poseen una singularidad inicial del espacio-tiempo.

Esto se verifica asintóticamente mediante la aproximación

$$H = \frac{1}{3t} + O(\epsilon_V^\pm(t)), \quad (3.2.30)$$

$$\phi = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \ln \frac{t}{\tilde{c}} + O(t\epsilon_V^\pm(t)), \quad (3.2.31)$$

$$\dot{\phi} = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} t^{-1} + O(\epsilon_V^\pm(t)), \quad (3.2.32)$$

$$\rho \propto t^{-\gamma} \chi \left(\pm \sqrt{\frac{2}{3}} \ln \frac{t}{\tilde{c}} \right)^{\frac{3\gamma}{2}-2} (1 + O(t\epsilon_V^\pm(t))) \quad (3.2.33)$$

, donde $\epsilon_V^\pm(t) = tV \left(\pm \sqrt{\frac{2}{3}} \ln \frac{t}{\tilde{c}} \right)$.

Esquema de la demostración

Siguiendo el mismo esquema de razonamiento que en [39], es suficiente demostrar que casi todas las soluciones son asintóticas en el pasado al punto crítico p_1 (en ∞ o $-\infty$). También, como x es monótona, es suficiente considerar soluciones en $\Omega(x_0) \subset \Sigma(x_0)$ donde x_0 es arbitrario. Como $\Sigma(x_0)$ es compacto y contiene las órbitas del pasado, cada uno de sus puntos p debe contener un conjunto α -límite, $\alpha(p)$. En particular, para puntos en el espacio físico $\Omega(x_0)$, el teorema 2.2.7 implica que $\alpha(p)$ debe contener casi siempre al menos un punto en el conjunto $\varphi = 0$ ($\phi = \pm\infty$). Por la discusión en la sección 2.6, cada punto con $\varphi = 0$ que es un punto límite de la trayectoria física debe ser parte de la frontera no física $\partial\Omega(x_0)$ y debe por tanto tener $x = 0$. Como x es monótona creciente, el conjunto $\alpha(p)$ debe estar contenido completamente en el plano $x = 0$, o precisamente en $\partial\Omega(x_0)$. Se puede probar que el único conjunto genérico

concebible son los puntos críticos correspondientes a p_1 en $\pm\infty$. Este teorema muestra que las cosmologías con campo escalar no mínimamente acoplado a la materia oscura pueden poseer una estructura simple y regular la cuál es independiente de los detalles exactos del potencial y de la función de acoplamiento así como de la densidad de materia. Esta sin embargo no deja de ser una conjetura bien fundada tanto teórica como numéricamente (ver proxima sección). De ser verificada nos permitiría (al menos en este escenario) determinar condiciones iniciales y de contorno físicamente motivadas de una manera inambigua sin necesidad de hacer una selección arbitraria de la hipersuperficie espacial inicial. En su lugar podría tomarse la frontera como si fuera la singularidad inicial en sí misma y asignar condiciones de frontera de acuerdo al estado asintótico único de la solución. Esto correspondería a seleccionar una solución de campo escalar sin masa la cuál en el caso de los modelos simples FRW es equivalente a seleccionar un valor $\tilde{c}$ (junto con una selección de signo). Para probar la conjetura sería suficiente probar que bajo los supuestos del teorema 3.1.1 y para las vecindades $\mathcal{N}(p_1)$ suficientemente pequeñas de p_1 , el conjunto de órbitas intersectando a $\mathcal{N}(p_1)$ es homeomorfa al conjunto de cosmologías con campo escalar sin masa, o sea, que para todo $\tilde{c} > 0$ existe una única cosmología que satisface (2.1.4, 2.1.6-2.1.8) y que esta correspondencia es continua. De esta manera se extenderían los resultados del Teorema 5 en [39] (página 22).

3.3. Soluciones Escalantes

Algunos modelos de energía oscura tienen comportamiento escalante. La conveniencia de las soluciones escalantes reside en que ellas determinan un límite entre aceleración y desaceleración, en el sentido de que estas soluciones pueden garantizar que en algún momento de la evolución la energía oscura domine sobre la materia oscura, explicando así la expansión acelerada del

universo. En particular, si el campo escalar ϕ (energía oscura) está acoplado al fluido de fondo (materia oscura), estas soluciones pueden suavizar el problema de la coincidencia.

Los puntos críticos p_3 y $p_{5,6}$ pueden representar soluciones escalantes, puesto que la razón entre la densidad de energía de la energía oscura y la densidad de energía de la materia oscura es constante en cada caso. Estos tipos de soluciones son de gran importancia en cosmología.

A modo de ilustración, si consideramos un potencial de Albrech-Schordis (vea el segundo ejemplo numérico de esta tesis) con un acoplamiento con ley de potencias, entonces, bajo determinadas hipótesis sobre los parámetros libres se garantiza la existencia de los puntos críticos $p_{5,6}$.

3.4. Ejemplos Ilustrativos

3.4.1. Acoplamiento con ley de potencia y potencial de Coleman-Weinberg

Consideremos el potencial de autointeracción de Coleman-Weinberg dado por la ecuación

$$V(\phi) = \frac{B\sigma^4}{2} + B\phi^4 \left(\ln \left(\frac{\phi^2}{v^2} \right) - \frac{1}{2} \right) \quad (3.4.34)$$

donde B y σ son constantes positivas.

Esta forma para el potencial está relacionada cercanamente a los también llamados modelos de Shafi-Vilenkin (ver [40] y las referencias allí citadas). Estos modelos aparecieron en la década de 1980 en el marco de las Teorías de Gran Unificación (TGU) no Supersimétrica la cual emplea singletas de campos escalares ϕ [41]. Los modelos Shafi-Vilenkin se basan en el potencial original de Coleman-Weinberg el cual es equivalente a la parametrización $V(\phi)$ con ley (3.4.34) con la selección especial de parámetros $v = M$, $B = A/2$, donde M denota el valor esperado de vacío (VEV) mínimo de ϕ , $B \approx 10^{-3}$ y $\sigma = v \approx 2 \times 10^{15} GeV$. Este potencial es típico del escenario de la nueva cosmología inflacionaria [42, 43], donde la inflación tiene lugar cerca del máximo

del potencial. No obstante, si el inflatón tiene masa más grande en comparación con la escala de Planck durante la inflación observable, la inflación tiene lugar cerca del mínimo y el modelo mimetiza la inflación caótica [44]. A altas temperaturas, el punto de mínima energía ocurre en $\phi = 0$. Cuando la temperatura decrece, ϕ entra en un estado metaestable de falso vacío y alcanza el verdadero vacío mediante un proceso de tunelaje. En el vacío verdadero el inflatón sufre oscilaciones amortiguadas debido a la creación de partículas y se recalienta.

A pesar de su habilidad para reproducir la inflación, utilizaremos este potencial con el solo propósito de ilustrar los resultados analíticos obtenidos.

Observar que el potencial (3.4.34) tiene un mínimo $V(\pm v) = \frac{1}{2}B(\sigma^4 - v^4)$ porque

$$V'(\pm v) = 0, V''(\pm v) = 8B|v|^2 > 0.$$

Observar también que $V(\pm v) > 0$ si $v^2 \neq \sigma^2$. Luego, en el conjunto invariante $Z^0 \cap X^+$ existe el punto crítico P con coordenadas

$$(x, y, z, \phi) = \left(\sqrt{\frac{6}{B(\sigma^4 - v^4)}}, 0, 0, \pm v \right)$$

el cual puede ser un foco estable o un nodo estable si se cumplen respectivamente las condiciones

$$\sqrt{-\frac{32}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{1024 + 9\sigma^4}} < |v| < \sigma$$

o

$$|v| \leq \sqrt{-\frac{32}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{1024 + 9\sigma^4}}.$$

Consideremos además la función de acoplamiento dada por la expresión

$$\chi(\phi) = \frac{\lambda}{n} (\phi^n + \chi_0), \quad \chi_0 > 0, \lambda > 0, n > 1 \quad (3.4.35)$$

donde n es un número entero.

Para este potencial encontramos que

$$W_V(\phi) = \partial_\phi V(\phi)/V(\phi) = \frac{8\phi^3 \ln\left(\frac{\phi^2}{v^2}\right)}{\sigma^4 + \phi^4 \left(2 \ln\left(\frac{\phi^2}{v^2}\right) - 1\right)}. \quad (3.4.36)$$

Es fácil probar que la transformación de coordenadas

$$\varphi = \left[\ln\left(\frac{\phi^2}{v^2}\right) \right]^{-1} = f(\phi) \quad (3.4.37)$$

es una transformación de coordenadas admisibles en el sentido de esta sección. Bajo la mencionada transformación, es fácil probar que el potencial de Coleman-Weinberg es al menos $\mathcal{E}_+^2$.

Usando esta transformación de coordenadas tenemos que

$$\overline{W}_V(\varphi) = \begin{cases} \frac{8|v|^3 e^{\frac{3}{2\varphi}}}{\sigma^2 \varphi + v^2(2-\varphi)e^{\frac{2}{\varphi}}} & , \quad \varphi > 0 \\ 0 & , \quad \varphi = 0 \end{cases} \quad (3.4.38)$$

$$\overline{f}'(\varphi) = \begin{cases} -\frac{2\varphi^2}{|v|e^{\frac{1}{2\varphi}}} & , \quad \varphi > 0 \\ 0 & , \quad \varphi = 0 \end{cases} \quad (3.4.39)$$

$$\overline{W}_\chi(\varphi) = \begin{cases} \frac{n|v|^{n-1}e^{-\frac{1}{2\varphi}}}{|v|^{n+\chi_0}e^{-\frac{n}{2\varphi}}} & , \quad \varphi > 0 \\ 0 & , \quad \varphi = 0 \end{cases} \quad (3.4.40)$$

En este ejemplo, las ecuaciones de evolución para y , z , y φ están dadas por la ecuación (2.4.27-2.4.29) con $M = N = 0$ y $\overline{W}_V$, $\overline{f}'$, $\overline{W}_\chi$ dadas respectivamente por (3.4.38), (3.4.39) y (3.4.40).

El espacio de estado está definido por

$$\overline{\Sigma}_\epsilon = \left\{ (y, z, \varphi) : 0 \leq y^2 + z^2 \leq 1, 0 \leq \varphi \leq -\frac{1}{2 \ln(v\epsilon)} \right\}.$$

Los puntos críticos del sistema (2.4.27-2.4.29) en este ejemplo son $p_{1,2} = (\mp 1, 0, 0)$, $p_3 = (0, 1, 0)$ y $p_4 = (0, 0, 0)$. El comportamiento dinámico es como sigue (ver figura 3.4.1): la variedad central de $p_{1,2}$ es tangente al eje φ en el punto crítico. La variedad inestable es 2-dimensional y es tangente al plano $y - z$ en el punto crítico. La variedad central de p_3 es tangente al eje φ en

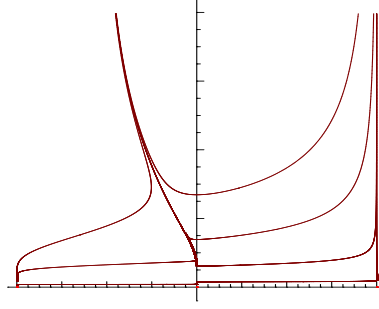


Figura 3.1: Órbitas en el subespacio (y, φ) del espacio de fase 3-dimensional $\bar{\Sigma}_\epsilon$ con $\epsilon = 1,21$. para un modelo con el potencial (3.4.34) y función de acoplamiento (3.4.35). Asumimos que para las constantes libres los valores $\gamma = 1,35$, $n = 2$, $v = 0,5$, $\sigma = 1$, $\chi_0 = 0,3$. B y λ son arbitrarios.

el punto crítico. La variedad inestable es 1-dimensional y es tangente al plano z en el punto crítico, mientras que la variedad estable es tangente al eje y en el punto crítico. La variedad central de p_4 es tangente al eje φ en el punto crítico. La variedad estable es tangente al plano $y - z$ en el punto crítico. Observe que las órbitas en una frontera no física $\varphi = -1/(2 \ln v\epsilon)$ para $y > 0$ puesto que $\bar{f}' \leq 0$ y abandona la región física para $y < 0$.

3.4.2. Acoplamiento con ley de potencia y potencial de Albrecht-Skordis

Albrecht and Skordis [45] propusieron un modelo de quintaesencia muy atractivo. Este modelo se caracteriza por que en el potencial exponencial se introduce un mínimo pequeño:

$$V(\phi) = e^{-\mu\phi} (A + (\phi - B)^2). \quad (3.4.41)$$

A diferencia de otros modelos de quintaesencia previos, en este caso (al igual que en el caso exponencial) la aceleración se logra sin ajuste fino en las condiciones iniciales. Los creadores plantean que tales potenciales surgen naturalmente en el límite de bajas energías de la teoría M ; los parametros constantes, A y B , en el potencial toman valores de orden 1 en unidades de Planck, así no hay ajuste fino en el potencial (suponemos también que $\mu \neq 0$). Ellos mostraron

que, independientemente de las condiciones iniciales, ρ_ϕ escala como $\rho \propto \rho_\phi \propto t^{-2}$ durante las eras de radiación y materia, pero conduce a un dominio permanente por el vacío (universo de Sitter). La expansión acelerada comienza una vez que el campo escalar queda atrapado en el mínimo local del potencial el cual es creado por el factor cuadrático en la ecuación (3.4.41) cuando $1 \geq \mu^2 A$. Una vez que el campo escalar queda atrapado en el falso vacío su término cinético desaparece ($\phi \approx \text{constant}$), y al estar $\rho + \rho_\phi$ dominado por el valor casi constante del potencial en el mínimo local conduce a un período de expansión acelerada que nunca termina. La probabilidad de tunelaje cuántico a través de la barrera del potencial es despreciable [?].

Los extremos del potencial (3.4.41) están localizados en $\phi^\pm = \frac{1+B\mu\sqrt{1-A\mu^2}}{\mu}$. Ellos son reales si $1 \geq \mu^2 A$. El mínimo local (respectivamente, el máximo local) está localizado en ϕ^- (respectively ϕ^+) porque

$$\pm V''(\phi^\pm) = -2V_0\sqrt{1-A\mu^2}e^{-(1+B\mu\sqrt{1-A\mu^2})} < 0.$$

Usando el formalismo desarrollado aquí encontramos que el punto crítico asociado a ϕ^+ es siempre una silla en el espacio de fase correspondiente. El punto crítico asociado a ϕ^- puede ser o un nodo estable o un foco estable si

$$\frac{8(3+2\mu^2)}{(3+4\mu^2)^2} < A \leq \frac{1}{\mu^2}$$

o

$$A < \frac{8(3+2\mu^2)}{(3+4\mu^2)^2}.$$

Observe que, para casi todos los puntos iniciales en el espacio de fase, las órbitas pasando por ellos son asintóticas en el pasado a los puntos $p_{1,2}$ con coordenadas $(y, \varphi) = (\mp 1, \pm 1)$ (ellos están asociados al límite donde $\phi = \pm\infty$). En el caso (a) existen algunas órbitas que son asintóticas en el pasado a $p_{1,2}$ tienden en el futuro al punto p_4 con coordenadas $(y, \varphi) =$

$(\mu/\sqrt{6}, +1)$ el cual es un punto crítico localizado en la región $\phi = \infty$ el cual será investigado en más detalle en próximas secciones. En este ejemplo, la variedad central de p_4 actúa como un atractor exponencial (para más detalles vea la próxima sección) mientras que el punto crítico con coordenadas $(y, \varphi) = (\mu/\sqrt{6}, -1)$ actúa como una silla. En el caso (b) tenemos una situación similar. Con más exactitud, existen dos puntos críticos con ordenada $y = \mu/\sqrt{6}$ cada uno de ellos contenido en los conjuntos invariantes $\varphi = \pm 1$ (o sea, $\phi = \pm\infty$) respectivamente. Cada uno de ellos tiene una variedad central que actúa como atractor para órbitas cercanas.

Se considera la función de acoplamiento dada por la expresión (3.4.35).

Para este potencial encontramos que

$$W_V(\phi) = \partial_\phi V(\phi)/V(\phi) + \mu = \frac{2(\phi - B)}{A + (B - \phi)^2}. \quad (3.4.42)$$

Este potencial es una función BCI de orden exponencial $N = -\mu$. De esta forma es una generalización del tipo exponencial.

Con la transformación de coordenadas

$$\varphi = \phi^{-1} = f(\phi) \quad (3.4.43)$$

es una transformación admisible de coordenadas. A partir de esta transformación se puede probar que el potencial de Albrecht-Skordis es al menos $\mathcal{E}_+^2$. y se tiene que

$$\overline{W}_V(\varphi) = \begin{cases} -\frac{2\varphi(B\varphi-1)}{A\varphi^2+(B\varphi-1)^2} & , \quad \varphi > 0 \\ 0 & , \quad \varphi = 0 \end{cases} \quad (3.4.44)$$

$$\overline{f}'(\varphi) = \begin{cases} -\varphi^2 & , \quad \varphi > 0 \\ 0 & , \quad \varphi = 0 \end{cases} \quad (3.4.45)$$

$$\overline{W}_\chi(\varphi) = \begin{cases} n\varphi \left(1 - \frac{\chi_0\varphi^n}{1+\chi_0\varphi^n}\right) & , \quad \varphi > 0 \\ 0 & , \quad \varphi = 0 \end{cases} \quad (3.4.46)$$

En este ejemplo, las ecuaciones de evolución para y , z , y φ están dadas por las ecuaciones (2.4.27-2.4.29) con $M = 0$, $N = -\mu$ y $\overline{W}_V$, $\overline{f}'$, $\overline{W}_\chi$ originadas respectivamente por (3.4.44),

(3.4.45) y (3.4.46). El espacio de fase está definido por

$$\bar{\Sigma}_\epsilon = \{(y, z, \varphi) : 0 \leq y^2 + z^2 \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \epsilon^{-1}\}.$$

Los puntos críticos del sistema son $p_{1,2} = (\mp 1, 0, 0)$, $p_3 = (0, 1, 0)$, $p_4 = \left(\frac{\mu}{\sqrt{6}}, 0, 0\right)$, y $p_{5,6} = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\gamma}{\mu}, \mp \frac{\sqrt{-12\gamma+4\mu^2}}{2\mu}, 0\right)$. Los puntos $p_{1,2,3}$ existen para todos los valores de los parámetros libres. El punto crítico p_4 existe para $\mu^2 \leq 6$. El punto p_5 existe si $\mu \leq -\sqrt{3\gamma}$ mientras que p_6 existe si $\mu \geq \sqrt{3\gamma}$. Estos dos últimos puntos pueden caracterizarse en más detalles (para el análisis de los otros puntos críticos ver tabla 2.1). Los puntos críticos $p_{5,6}$ corresponden a los estudiados en el libro [20] (ver ecuaciones 4.23 p 49) con $\Psi = y$ y $\Phi^2 = \frac{V(\phi)}{3H^2} = \frac{3\gamma(2-\gamma)}{2\mu^2}$ y $k = -\mu$. Como queda establecido en esa referencia el campo escalar adquiere la ecuación del fluido, es decir, $\gamma_\phi = \gamma$. Entonces estas soluciones representan kinetic-matter scaling solutions. Debido a que el campo escalar micmetiza al fluido perfecto con la misma ecuación de estado, en estos puntos es razonable pensar que si se combinan los fluidos $p_{\text{tot}} = p_\phi + \rho$ y ρ_{tot} por lo que corresponden a modelos exactos de fluido perfecto con parámetro de ecuación de estado total $\gamma - 1$ (ver [20] p 54). Este es el caso pero parámetro de ecuación de estado efectivo de la materia total será $\omega_{\text{tot}} = \gamma \left(1 - \frac{3}{\mu^2}\right)$ así $\gamma - 1$. Lo anterior se debe a la existencia del acoplamiento. Los puntos críticos representan cosmologías aceleradas para $0 < \gamma < \frac{2}{3}$. Los valores propios de la matriz de las derivadas evaluadas en $p_{5,6}$ son $\left(0, -\frac{2-\gamma}{4\mu} \pm \frac{1}{4\mu} \sqrt{(2-\gamma)(24\gamma^2 + \mu^2(2-9\gamma))}\right)$. Las órbitas están inicialmente en el subespacio estable del punto si $\mu^2 > 24\gamma^2/(-2+9\gamma)$ implica que $\frac{2}{9} < \gamma < 2, \gamma \neq \frac{4}{3}$. En otro caso $p_{5,6}$, parece ser un nodo estable para las órbitas que permanecen en el subespacio estable. El subespacio centro es tangente a los puntos críticos en la dirección del eje φ .

Los puntos $p_{5,6}$ corresponden a los estudiados en el libro [20] (ver ecuaciones 4.23 página 49) con $\Psi = y$ y $\Phi^2 = \frac{V(\phi)}{3H^2} = \frac{3\gamma(2-\gamma)}{2\mu^2}$ y $k = -\mu$. Como queda establecido en esa referencia el campo

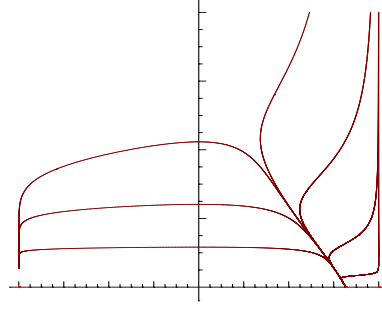


Figura 3.2: Órbitas en el subespacio (y, φ) del espacio de fase 3-dimensional $\bar{\Sigma}_\epsilon$ con $\epsilon = 1,00$. para un modelo con el potencial (3.4.41) y función de acoplamiento (3.4.35). Asumimos que para las constantes libres los valores $\gamma = 1,00$, $n = 2$, $\mu = 2$, $A = 0,5$, $\chi_0 = 0,3$, $B = 0,5$ y λ arbitrario.

escalar adquiere la ecuación del fluido, es decir, $\gamma_\phi = \gamma$. Entonces estas soluciones representan soluciones escalantes materia-energía cinética. Debido a que el campo escalar mimetiza al fluido perfecto con la misma ecuación de estado, es razonable pensar que si se combinan los dos fluidos en $p_{\text{tot}} = p_\phi + (\gamma - 1)\rho$ y $\rho_{\text{tot}} = \rho_\phi + \rho$ el fluido resultante corresponde a un modelo exacto de fluido perfecto con parámetro de ecuación de estado total $\gamma - 1$ (ver [20] página 54). Sin embargo, en este caso, el parámetro de ecuación de estado efectivo de la materia total será $\omega_{\text{tot}} = \gamma \left(1 - \frac{3}{\mu^2}\right)$ en lugar de $\gamma - 1$. Lo anterior se debe a la existencia del acoplamiento.

Conclusiones

En esta tesis hemos investigado un modelo con interacción adicional (no gravitacional) entre la MO y la EO. Este tipo de interacción está justificada porque las componentes interactuantes son de naturaleza desconocida. Hemos investigado estos modelos desde el punto de vista dinámico tomando la ley del potencial de autointeracción y del acoplamiento generales obteniéndose los resultados que se presentan a continuación. Particularmente, se han generalizado algunos resultados conocidos (demostrados en las referencias [37, 39]) a nuestro contexto que son válidos también en el contexto de las teorías escalares-tensoriales con acoplamiento no mínimo.

Se demostró que para determinadas condiciones sobre el potencial y la función de acoplamiento, la densidad de energía de la materia oscura y la energía cinética del campo escalar tienden a cero en el futuro, dominando así la energía potencial de la energía oscura, por lo que el Universo se expandirá por siempre en una fase de de Sitter.

Tomando potencial y función de acoplamiento arbitrarios se obtuvo que el campo escalar puede ser cero o diverger en el futuro. Este resultado nos indica que si el campo escalar diverge, entonces el modelo cosmológico entra en una fase de expansión tipo de de Sitter hacia el futuro. Si adicionalmente el potencial, como función de ϕ , se anula asintóticamente, el escalar de Hubble se anula también. De esta forma se generaliza un resultado de [37](ver Proposición 3).

Se dedujo que el campo escalar diverge en el pasado si se añade este como una variable dinámica

al conjunto de variables Hubble-normalizadas. Este hecho ha sido probado en [39] solo para potenciales arbitrarios. Se generalizó el teorema 1 en [39] estableciendo que para casi todos los puntos en un espacio de estados 4-dimensional, Σ , el campo escalar diverge si seguimos la órbita pasando por p hacia el pasado. La demostración de este teorema descansa en tres resultados (lemas) con interés independiente.

En el lema 2.2.4 se probó que la órbita pasando por un punto arbitrario $p \in \Sigma$ que representa una solución cosmológica con densidad adimensional de MO no despreciable y parámetro de Hubble finito positivo, es asintótica en el pasado a un régimen donde el parámetro de Hubble diverge, conteniendo en el pasado la singularidad inicial y es asintótica en el futuro a un régimen donde la densidad de energía de la EO domina.

Se confirmó la existencia de tres puntos críticos p_3 , p_5 y p_6 los cuales pueden representar soluciones escalantes. Ajustando los parámetros libres estas pueden ser aceleradas en contraste con los resultados en [39] donde existe solo un punto crítico (en nuestra notación, p_4) que puede representar soluciones cosmológicas aceleradas. Las soluciones asociadas a $p_{1,2}$ ($p_{\mp}$ en la notación de [39]) representan soluciones de fluido rígido y son desaceleradas (exactamente, soluciones asociadas a campos esclares sin masa).

Probamos dos teoremas (ver Teoremas 3.1.1 y 3.2.1) que entienden parcialmente los resultados en [39]. Deducimos una expresión válida a segundo orden:

$$\rho \propto t^{-\gamma} \chi \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \ln \frac{t}{\tilde{c}} \right)^{\frac{3\gamma}{2}-2} (1 + O(t\epsilon_V(t)))$$

la cual aparece en nuestro contexto dado a que introducimos materia de fondo y a la existencia del acoplamiento. Si seleccionamos adecuadamente los parámetros libres del modelo el primer término en la expansión para ρ tiende uniformemente a cero. El segundo término es dominado por el segundo siempre que $N < \sqrt{6}$. Para potenciales BCI con orden exponencial menor

que $\sqrt{6}$ el término del error en las expansiones para H , ϕ y $\dot{\phi}$ en el Teorema 3.1.1 (tambien en el Teorema 3.2.1) son dominados por los términos lineales si $N = \sqrt{3/2}$. El error tiende uniformemente a cero cuando t tiende a cero (o sea, cuando nos acercamos a la singularidad inicial). Esto nos permite conjeturar que es posible imponer condiciones iniciales y condiciones de contorno físicamente bien motivadas de manera precisa sin tener que hacer una selecciones arbitraria de la hipersuperficie espacial inicial, bastaría tomar la frontera como la singularidad en si misma y asignar condiciones de frontera de acuerdo a la única expansión asintótica de la solución. Esto corresponde a seleccionar un campo escalar sin masa particular seleccionando el valor del parámetro $\tilde{c}$.

Recomendaciones

Elaborar la demostración rigurosa del teorema 3.2.1 para verificar que existe una clase de cosmologías FRW, conteniendo casi todas las soluciones de (3.1.19, 3.1.22, 3.1.23, 3.1.27) las cuales poseen una singularidad inicial del espacio-tiempo.

Bibliografía

Referencias Bibliográficas

- [1] P.J.E. Peebles and B. Ratra, Rev. Mod. Phys. 75559 (2003).
- [2] G. F. R. Ellis, H. van Elst, Cosmological models (Cargèse lectures 1998), gr-qc/9812046.
- [3] J. Ehlers, Akad. Wiss. Lit. Mainz, Abhandl. Math.-Nat. Kl. **11**, 793, 1961.
- [4] Traducción: J. Ehlers, Gen. Rel. Grav. **25**, 1225,1993.
- [5] G. F. R. Ellis, General Relativity and Cosmology, Proceedings of the XLVII Enrico Fermi Summer School.
- [6] G. F. R. Ellis, Cargèse Lectures in Physics, Vol. 6.
- [7] R. K. Sachs (editor), Academic Press, New York, 1971.
- [8] E. Schatzman (editor), Gordon and Breach, New York, 1973.
- [9] J. A. Wheeler, “ Einsteins Vision ”, Springer, Berlin, 1968.
- [10] R. d’Inverno, “ Introducing Einstein’s Relativity ”, Oxford University Press, Oxford, 1992.
- [11] R. M. Wald, “ General Relativity ”, University of Chicago Press, Chicago, 1984.
- [12] S. W. Hawking y G. F. R. Ellis, “ The Large Scale Structure of Space-Time ”, Cambridge University Press, Cambridge, 1973.

- [13] H. Stephani, “ General Relativity ”, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [14] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, “ Gravitation ”, Freeman, 1999 .
- [15] Kolda, Sahni, Padmanabhan, C.Wetterich, Nucl. Phys. B 302, 668, 1988.
- [16] G. Huey, L. M. Wong, R. Dave, R. R. Caldwell y P. J. Steinhardt, Phys. Rev. D59, 063005, 1999.
- [17] Will. C. M. “Theory and experiment in gravitational physics”, Cambridge: Cambridge University Press, 1993. gr-qc/0103036.
- [18] Amendola L., Tochini D., Phys. Rev. D 66, 2002
- [19] A. S. y Pavon D., Phys. Rev. 67 087302, 2003. astro-ph/0303160
- [20] Coley A. A. , “Dynamical systems and cosmology”, 2003.
- [21] A. A. Coley, “Introduction to Dynamical Systems”. Lecture Notes for Math 4190/5190, 1994).
- [22] M.W. Hirsch y S. Smale, “Differential Equations, Dynamical Systems y Linear Algebra”, New York, Academic, 1974.
- [23] D. K. Arrowsmith y C. M. Place, “An introduction to dynamical systems”, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1990.
- [24] S. Smale, M.W. Hirsch y R.L. Devaney, “Differential equations, dynamical systems and an introduction to chaos”, Elsevier Academic Press, San Diego, USA, 2004.
- [25] Tavakol R., 1997, “Dynamical Systems in Cosmology”, edited by Wainwright J. and Ellis G.F.R. (Cambridge University Press, Cambridge).

- [26] J. Wainwright y W. C. Lim, J. Hyperbol. Diff. Equat. **2**, 437, (2005).
- [27] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, New York, Wiley 1989.
- [28] Brans C. and Dicke R. H., “Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation,” Phys. Rev. **124**, 925, 1961.
- [29] Bekeinstein J. D., Phys. Rev. D **15**, 1458, 1977; Bergman P. G., Int. J. Theor. Phys. **1**, 25, 1968; Nordtvedt K., Astrophys. J. **161**, 1059, 1970; Wanoger R. V., Phys. Rev. D **1** 3209, 1970.
- [30] Abramovici A. et al, Science **256**, 325, 1992; Bradaschia C. et al., Nucl. Instrum. and Methods A **289**, 518, 1990; S. Buchmann et al., in Proceedings of the Seventh Marcel Grossman Meeting on General Relativity, ed. Jantzen R. T. and Keiser G. M., World Scientific, Singapore, 1996; Hough J. et al, Proceedings of the Sixth Marcel Grossman Meeting on General Relativity, Singapore, 1993.
- [31] Barrow J. D., Phys. Rev. D **35**, 1805; Serna A. and Alimi J. M., 1996, Phys. Rev. D **53**, 3087, 1997.
- [32] Kaloper N. and Olive K. A., “Singularities in scalar-tensor cosmologies,” Phys. Rev. D **57**, 811, 1998.
- [33] Tamé González Cruz, “Modelos del Universo con inclusión de campos escalares e interacción no gravitatoria entre la materia oscura y la energía oscura,” 2006, Tesis en opción al grado científico de Doctor, **2.1** páginas **22-23**.
- [34] Barrow J. D., MNRAS **282**, 1387, 1996.

- [35] Barrow J. D. and Parsons P., Phys. Rev. D **55**, 1906, 1997; Will C. M., Theory and Experiment in Gravitational Physics, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [36] La D. and Steinhardt P. J., Phys. Rev. Letts. **62**, 376, 1989.
- [37] Miritzis J. , 2003, “Scalar-field cosmologies with an arbitrary potential,” Class. Quant. Grav. **20**, 2981, arXiv:gr-qc/0303014.
- [38] Wainwright J. and Lim W. C. , 2005, “Cosmological models from a dynamical systems perspective,” J. Hyperbol. Diff. Equat. **2**, 437, arXiv:gr-qc/0409082.
- [39] Foster S. , 1998, “Scalar field cosmologies and the initial space-time singularity,” Class. Quant. Grav. **15**, 3485, arXiv:gr-qc/9806098].
- [40] Shafi Q. and Senoguz V.Ñ. , 2006, AIP Conf. Proc. **878**, 263.
- [41] Shafi Q. and Vilenkin A. , 1984, Phys. Rev. D **29**, 1870;
- [42] Linde A. D. , 1982, Phys. Lett. B **108**, 389.
- [43] Albrecht A. and Steinhardt P. J. , 1982, Phys. Rev. Lett. **48**, 1220.
- [44] Linde A. D. , 1983, Phys. Lett. B **129**, 177.
- [45] Albrecht A. and Skordis C. , 2000, Phys. Rev. Lett. **84**, 2076.