



Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas

Facultad de Matemática, Física y Computación

Departamento de Matemática

Licenciatura en Matemática

Trabajo de Diploma

Aplicación de la formulación lagrangiana al estudio de las estructuras civiles

Autor: Víctor Antonio Entenza Boggiano

Tutor: Dr. Carlos de la Caridad Rodríguez Fadrugas

Consultante: Dra. Lucía Francisca Argüelles Cortés

Santa Clara, Cuba  
2017

# **Dedicatoria**

A Dios. A mi familia. A mi abuelo José Ramón Boggiano Cantero (E. P. D.). A mis amigos.

## Agradecimientos

Agradezco a Dios su presencia y compañía.

Al tutor, el profesor Carlos Fadrugas, por proponerme el tema y siempre motivarme a investigar.

A la consultante, la profesora Lucía Argüelles, por sus valiosas revisiones y recomendaciones.

Al profesor Lorgio Batard, por sus señalamientos, que contribuyeron a la mejora del documento.

A todos los que colaboraron conmigo en esta investigación. Entre ellos los profesores de la facultad Lefrán y Alain, los profesores de Ingeniería Civil Ballate y Chagoyén, y los estudiantes de la facultad Lorenzo y Ailier.

A todos los profesores que he tenido en la carrera, por lo que me han enseñado. En especial a Tamara, José Enrique, Gerardo y Palencia, por sus consejos y ejemplo.

A mis compañeros de aula y beca, y a mis amigos de la universidad, incluyendo el CUFB, por todos los momentos vividos en estos cinco años.

A todos mis profesores de los niveles precedentes, por contribuir a mi formación integral.

A mi madre, por su amor y estar siempre a mi lado. A mi padre, por estar al tanto en todas las situaciones de mi vida. A mi abuela, por ser el pilar de mi hogar.

A Fidel Fernández, por su ayuda.

A mi tía Daylanis, por sus consejos y cercanía en todos los momentos de mi vida.

A mi padrino Jorge Abel, por ser un ejemplo para mí.

A todos los que se ocuparon de mí en los momentos más difíciles de mi vida. A la doctora Norma Pérez y el equipo de atención del Área 4 y la Clínica del Adolescente. A los sacerdotes de la Comunidad San Martín, de mi parroquia o de la diócesis que en aquellos momentos me brindaron dirección espiritual o ayuda. Al grupo de la Renovación en el Espíritu Santo de mi parroquia, por su intercesión.

Al grupo Santo Tomás, y a su predecesor, de la Juventud Católica Universitaria de Santa Clara, por su amistad y acompañamiento en estos años universitarios.

A todos los que rezaron y rezan por mí.

# Resumen

La formulación lagrangiana de la mecánica posee ventajas con respecto a la newtoniana. Sin embargo, en la bibliografía revisada, no es aplicada al estudio de las estructuras civiles.

En este trabajo se desea sistematizar la utilización de la formulación lagrangiana en los problemas de la dinámica de estructuras. Se procede a la solución, mediante formulación lagrangiana, de dos problemas semejantes a otros tratados con formulación newtoniana en la bibliografía consultada: el cálculo de los modos normales de oscilación del sistema mecánico simétrico de cinco partículas distribuidas a iguales distancias en un eje horizontal, y el cálculo de las ecuaciones del movimiento de las pequeñas oscilaciones ocurridas en un puente luego de un impacto en dirección diagonal. Para la resolución del primer problema se hace una implementación del método en el software Mathematica y se calibran los resultados relativos a las oscilaciones longitudinales mediante experimentación numérica. El segundo problema se resuelve analíticamente.

Así, para determinadas situaciones del análisis de estructuras, la formulación lagrangiana es preferible o alternativa a la formulación newtoniana.

Palabras claves: dinámica de estructuras, análisis dinámico, formulación lagrangiana, cálculo variacional, ecuaciones diferenciales, análisis sísmico, estructuras civiles.

# Abstract

The Lagrangian formulation of mechanics has advantages over Newtonian. However, it is not applied to the study of civil structures in the revised literature.

In this work it is desired to systematize the use of the Lagrangian formulation in the problems of the dynamics of structures. It is proceed to the solution, by Lagrangian formulation, of two similar problems to other treatises with Newtonian formulation in the bibliography consulted: the calculation of the normal modes of oscillation of the symmetrical mechanical system of five particles distributed at equal distances on a horizontal axis, and The calculation of the equations of motion of the small oscillations occurring in a bridge after an impact in a diagonal direction. For the resolution of the first problem an implementation of the method is made in the software Mathematica and the results relative to the longitudinal oscillations are calibrated through numerical experimentation. The second problem is solved analytically.

Thus, for certain situations of structure analysis, the lagrangian formulation is preferable or alternative to the Newtonian formulation.

Keywords: structural dynamics, dynamic analysis, Lagrangian formulation, variational calculus, differential equations, sismological analysis, civil structure.

# Índice

<b>Índice</b>	<b>I</b>
<b>Glosario</b>	<b>1</b>
<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>1 Fundamentos teóricos</b>	<b>7</b>
1.1 Resumen del análisis bibliográfico . . . . .	8
1.2 Modelo básico . . . . .	11
1.3 Movimiento oscilatorio . . . . .	13
1.4 Oscilaciones libres . . . . .	19
1.5 S1GL durante carga armónica . . . . .	21
1.6 Dominio de la frecuencia . . . . .	24
1.6.1 Estudio de las funciones periódicas . . . . .	26
1.7 Cálculo variacional . . . . .	28
1.8 Ecuaciones de Euler . . . . .	31
1.8.1 Ecuaciones de Euler - Lagrange . . . . .	31

1.8.2	Ecuación de Euler - Poisson . . . . .	33
1.9	De la formulación de Newton a la de Lagrange . . . . .	34
1.9.1	Conocimientos básicos sobre mecánica de las partículas . . . . .	34
1.9.2	Introducción de la formulación de Lagrange. Lagrangiana y ecuaciones de Lagrange. . . . .	40
1.9.3	Principio de Hamilton . . . . .	41
1.9.4	Ventajas de la formulación lagrangiana . . . . .	43
1.10	Conclusiones parciales . . . . .	45
<b>2</b>	<b>Formulación lagrangiana y su aplicación en la modelación de sistemas dinámicos</b>	<b>46</b>
2.1	Ejemplos de aplicaciones de la formulación lagrangiana . . . . .	47
2.2	Oscilaciones pequeñas . . . . .	50
2.3	Transición de sistemas discretos a sistemas continuos . . . . .	54
2.4	Ecuaciones del movimiento en tres dimensiones . . . . .	56
2.5	Problema de las pequeñas oscilaciones del sistema simétrico de las cinco partículas equidistantes en un eje horizontal . . . . .	58
2.5.1	Planteamiento del problema . . . . .	58
2.5.2	Ilustración del cálculo de frecuencias de resonancia y modos normales de vibración en el caso de la molécula triatómica lineal . . . . .	58
2.5.3	Cálculo de frecuencias de resonancia y de modos normales. Modelación del problema . . . . .	61
2.6	Problema de las oscilaciones ocasionadas en un puente por un pequeño impacto de dirección diagonal . . . . .	63

---

2.6.1	Planteamiento del problema . . . . .	63
2.6.2	Ilustración del procedimiento de solución al problema básico de las oscilaciones transversales . . . . .	64
2.6.3	Solución al problema planteado . . . . .	68
2.7	Conclusiones parciales . . . . .	72
<b>3</b>	<b>Cálculo de modos normales de oscilación y experimentación numérica</b>	<b>73</b>
3.1	Metodología . . . . .	73
3.1.1	Idoneidad del software Mathematica . . . . .	74
3.1.2	Resolución computacional e interpretación de resultados para las oscilaciones longitudinales . . . . .	74
3.1.3	Calibración y experimentación numérica . . . . .	85
3.1.4	Resolución computacional al problema de las oscilaciones transversales	91
3.2	Conclusiones parciales . . . . .	103
	<b>Conclusiones</b>	<b>105</b>
	<b>Recomendaciones</b>	<b>107</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>110</b>
<b>A</b>	<b>Problemas representativos del Cálculo de Variaciones</b>	<b>111</b>
A.1	Distancia mínima entre dos puntos del plano . . . . .	111
A.2	Mínima superficie de revolución . . . . .	113
A.3	La braquistócrona . . . . .	115

# Glosario de términos

Primeramente se ofrece este glosario de términos a conocer para una mejor lectura de lo que resta de documento.

**partícula:** cuerpo cuyas dimensiones se consideran despreciables al describir su movimiento. [LL94, I.1]

**número de grados de libertad de un sistema:** Número de magnitudes independientes que expresan de modo de modo unívoco la posición de un sistema. [LL94, I.1]

**coordenadas generalizadas de un sistema de  $s$  grados de libertad:** Son las magnitudes  $q_i$ ,  $i = \overline{1, s}$ , que definen de forma completa la posición de dicho sistema. [LL94, I.1]

**velocidades generalizadas:** Son las funciones  $\dot{q}_i$ , derivadas de las coordenadas generalizadas con respecto al parámetro (tiempo). [LL94, I.1]

**sistema conservativo:** Sistema mecánico en el cual la energía se conserva. [LL94, II.6]

**dominio del tiempo:** Método con el cual se evalúa una estructura desde el punto de vista dinámico, en el cual la respuesta de esta es obtenida y representada considerándola como variable dependiente del tiempo. [Tej11, 1.1]

**dominio de la frecuencia:** Método de evaluación de estructuras desde el punto de vista dinámico, en el cual la respuesta estructural es obtenida considerándola variable dependiente de las distintas frecuencias en que está descompuesta la acción temporal. [Tej11, 1.1]

**dinámica, acción:** una acción o carga se clasifica como dinámica cuando varía a lo largo del tiempo. Ejemplos: acción del viento sobre una estructura, acción de un tren de alta velocidad circulando sobre un puente, acción sísmica sobre una estructura, acción del oleaje sobre un dique. [Tej11, 2.1]

**lineal, sistema dinámico:** se clasifica así el sistema dinámico cuyas propiedades no varían durante la respuesta. [Tej11, 2.5.2]

**no lineal, sistema dinámico:** se clasifica así el sistema dinámico en el cual, durante la respuesta, se modifican su geometría o las propiedades del material en el orden de grandes deformaciones o grandes movimientos. [Tej11, 2.5.2]

**rigidez lateral ( $k$ ):** constante de proporcionalidad entre la fuerza de restitución elástica y el desplazamiento lateral. [TRLF03, 2.1]

**viscoso, amortiguamiento:** tipo de amortiguamiento caracterizado por fuerzas amortiguadoras proporcionales y de sentido opuesto a la velocidad del sistema.

# Introducción

La ocurrencia de sismos es un fenómeno natural que preocupa a gran parte de la población mundial. Muchas ciudades están asentadas en lugares muy propicios a eventos de esta índole.

Casi la totalidad de los desastres lamentables que traen consigo los sismos se debe al colapso de las estructuras construidas. Muchas personas han muerto a causa del derrumbe de los edificios. También dichos derrumbes han ocasionado la pérdida de recursos económicos y de medios materiales. De aquí la gran importancia que tiene el estudio de la peligrosidad sísmica de las estructuras.

El análisis dinámico es un método de análisis de estructuras que predice las fuerzas y deformaciones inducidas en una estructura por un movimiento exterior o acción externa, en especial una gran sacudida, de la cual el sismo es un ejemplo representativo[FEM10, pág. 98]. Este tipo de análisis cobra importancia en situaciones de la ingeniería civil como: la edificación de obras civiles en zonas sísmicas, las vibraciones de forjados y edificios, el tráfico pesado en puentes de ferrocarril, el choque de las olas con los diques, el choque sobre estructuras marítimas y fluviales, las vibraciones generadas por explosiones, la fatiga de elementos estructurales, y la aeroelasticidad en altos puentes y edificios.[Tej11, 1.1]

Varios autores, mencionados más adelante, califican la formulación lagrangiana como ventajosa ante los métodos tradicionales de la formulación newtoniana. Sin embargo, en la bibliografía revisada esta formulación no se aplica al estudio de las estructuras civiles. Por lo tanto, se

plantea el siguiente **problema de investigación**:

¿Cuándo puede aplicarse favorablemente la formulación lagrangiana al estudio de las estructuras civiles?

Así, el **objeto de estudio** de esta investigación es la formulación lagrangiana.

El **campo de acción** de la investigación abarca el estudio del movimiento oscilatorio, las funciones periódicas, las ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales y el cálculo variacional. El **campo de aplicación** consiste en los problemas de la ingeniería civil relativos a la modelación de los sistemas representativos de las estructuras civiles, el estudio de las respuestas de estas y sus deformaciones ante perturbaciones externas, como el movimiento sísmico.

Este trabajo se propone, como **objetivo general**, lo siguiente:

- Sistematizar la utilización de la formulación lagrangiana en el estudio de las estructuras civiles.

Para ello, servirán como pasos los siguientes **objetivos específicos**:

- Resumir las herramientas matemáticas básicas y necesarias para la determinación de las respuestas de las estructuras a fuerzas externas, en especial las ocasionadas durante los sismos.
- Presentar la formulación lagrangiana de la mecánica, mencionando sus ventajas con respecto a la formulación newtoniana.
- Modelar, mediante la formulación lagrangiana, las vibraciones de diferentes componentes (discretizados) de las estructuras civiles, para realizar el cálculo de sus modos normales de oscilación (mediante el uso del paquete Mathematica), y una calibración de los resultados mediante experimentación numérica.

- Modelar, mediante la formulación lagrangiana, las vibraciones de un puente luego de un impacto en dirección diagonal.

Después de realizar la revisión bibliográfica correspondiente, se formula la siguiente **hipótesis**: En sistemas correspondientes a estructuras civiles, para los cuales se conocen las expresiones de las energías cinética y potencial, la formulación lagrangiana es preferible o alternativa a la formulación de Newton.

Por tanto, las **tareas de investigación** a desarrollar son:

- La revisión bibliográfica de material relativo al análisis dinámico de estructuras para constatar de si se ha usado o no la formulación de Lagrange en estos estudios;
- El estudio de la teoría matemática asociada a la resolución de problemas de la dinámica de estructuras;
- El estudio de las teorías asociadas al cálculo variacional y a la formulación de Lagrange;
- La búsqueda de aplicaciones y ventajas de esta formulación;
- La modelación, mediante dicha formulación, de problemas no modelados así en la bibliografía revisada.

La **contribución teórica** del presente trabajo consiste en proporcionar a los ingenieros civiles una sistematización de la aplicación de la formulación lagrangiana al estudio de estructuras.

La **novedad científica** del trabajo consiste en que proporciona a los ingenieros civiles, específicamente a los del contexto de la Universidad Central “Marta Abreu ” de Las Villas la posibilidad de valorar el uso de la formulación lagrangiana en los problemas del análisis de estructuras, prioritariamente en aquellos casos sean conocidas las expresiones de las energías cinética y potencial.

La tesis se estructura en la siguiente forma:

**Capítulo 1:** Se resume el estudio bibliográfico hecho. Se presenta el modelo de las oscilaciones de un grado de libertad. Se abordan conceptos básicos relativos al movimiento oscilatorio. Se especifica el tratamiento matemático de las oscilaciones forzadas y las ocurridas durante una carga armónica. Se introduce el análisis en el dominio de la frecuencia, el cálculo variacional y temas específicos de este, como las Ecuaciones de Euler - Lagrange. Se hace un recorrido por los conceptos básicos de la mecánica de partículas, partiendo de la formulación de Newton hasta llegar a la de Lagrange. Se enuncia el principio de Hamilton y se mencionan las ventajas de la formulación lagrangiana.

**Capítulo 2:** Se ejemplifican algunas aplicaciones de la formulación lagrangiana. Se resume la teoría de las pequeñas oscilaciones mediante esta formulación. Se explica la deducción de la ecuación de Lagrange para el sistema continuo mediante una transición desde el sistema discreto. Se presentan las ecuaciones del movimiento en tres dimensiones, mediante formulación lagrangiana. Se modela matemáticamente el problema de las pequeñas oscilaciones del sistema simétrico de las cinco partículas equidistantes en un eje horizontal, considerando su analogía con el modelo de la molécula triatómica lineal. Se plantea y resuelve el problema de las oscilaciones ocasionadas en un puente por un pequeño impacto de dirección diagonal.

**Capítulo 3:** En este capítulo se resuelven computacionalmente los problemas de las oscilaciones longitudinales y transversales del sistema de cinco partículas presentado en el capítulo 2. Se justifica la idoneidad del software Mathematica (el utilizado) para la resolución de problemáticas. Se interpretan los resultados obtenidos y se calibran los resultados de las oscilaciones longitudinales mediante experimentación numérica.

Para cerrar el informe de la investigación, se dan las conclusiones de esta y las recomendaciones para una investigación posterior.

# Capítulo 1

## Fundamentos teóricos

En este capítulo se expone un resumen del estudio bibliográfico realizado. Se explican brevemente conocimientos básicos necesarios para abordar el problema de las respuestas de los sistemas de estructuras civiles a acciones externas, incluyendo los sismos.

Se expone la formulación clásica de modelos básicos sobre oscilaciones de sistemas de un grado de libertad, tratando los casos de movimiento armónico simple, oscilaciones libres y oscilaciones forzadas, e introduciendo consecuentemente conceptos como frecuencia, amplitud de onda, resonancia, etc. Se exponen brevemente los fundamentos del análisis en el dominio de la frecuencia y se presenta el estudio de funciones periódicas. Para sentar las bases del estudio de la formulación lagrangiana, se exponen definiciones y teoremas fundamentales del cálculo variacional. Se hace énfasis en las ecuaciones de Euler-Lagrange, las cuales serán de gran utilidad.

Se introduce la formulación lagrangiana y se hace mención de sus ventajas con respecto a la newtoniana.

## 1.1 Resumen del análisis bibliográfico

Se han consultado libros clásicos del campo de estudio del análisis de estructuras, como [Cho95] y [Paz92].

En [Cho95] se aborda el tema de los sistemas discretos de uno o varios grados de libertad, con sus ecuaciones del movimiento, especificaciones para los diferentes tipos de oscilaciones, respuestas dinámicas y evaluaciones numéricas, respuestas de sistemas lineales a terremotos, amortiguamiento en estructuras, reducción de grados de libertad, sistemas con masa distribuida y elasticidad, sistemas inelásticos, método de elementos finitos, etc. Es importante destacar que este libro está escrito por un profesional de la Universidad de California en Berkeley, territorio propenso a la ocurrencia de sismos. Es de esperar que gran parte de lo que muestra su contenido esté motivado y enriquecido por la experiencia local.

En [Paz92], además de tener temas comunes con [Cho95], se trata el principio de D'Álembert, el cual es de carácter diferencial, el método de Rayleigh, que tiene un enfoque energético, se dedica un capítulo al análisis de Fourier y respuesta en dominio de frecuencias, tema que cobra gran importancia en el análisis dinámico, debido, entre otras cosas, a las exigencias de la ingeniería civil moderna y al desarrollo de potentes ordenadores (ver [Tej11]). También trata la discretización de sistemas continuos. Cuenta con capítulos especialmente dedicados al estudio de tipos concretos de estructuras civiles: edificios, vigas, pórticos y enrejados.

En estos dos libros, no se trata la formulación lagrangiana. La utilizada es la de Newton.

A continuación se expone una revisión de informes de diversas investigaciones hechas sobre la modelación y solución de problemáticas de la ingeniería civil, en particular en el área de la dinámica de estructuras.

En [CG74] se presenta un método eficiente, al decir de los autores, para el análisis dinámico de las respuestas de edificios de muchos pisos a terremotos, teniendo en cuenta la interacción

en los cimientos de estas construcciones. En este artículo se considera el sistema consistente en un corte de edificio cimentado en un disco circular rígido adjunto a la superficie de un medio linealmente elástico. El método propuesto transforma la expresión de los desplazamientos del edificio en los modos normales de oscilación de dicha estructura sobre una base rígida. Se procede a la realización del análisis y se demuestra, mediante resultados numéricos, que se pueden obtener excelentes resultados considerando solamente los primeros modos. Se reduce la cantidad de incógnitas mediante una transformación de coordenadas generalizadas, lo cual justifica que el método expuesto supera en eficiencia a los métodos directos. [CG74, 1ra. pág.]

En [WWL01] se desarrolla una metodología para evaluar de modo sistemático la interacción suelo-estructura y los efectos de acoplamiento de torsión en edificios asimétricos, aplicando el análisis modal. El método se implementa en el dominio de la frecuencia, para añadir con precisión aquellas funciones de impedancia de los cimientos que dependen de la frecuencia. En el espacio modal se deriva una matriz diagonal de transferencia para una extracción extensiva de la interacción suelo - estructura. Una investigación abarcadora de interacción suelo-edificio asimétrico puede ser convenientemente llevada a cabo a través del examen de varios tipos de cantidades de respuesta. Los resultados del estudio paramétrico muestran que la razón de incremento de altura a base de una estructura generalmente amplifica sus respuestas de torsión y de transformación. Además, tanto las respuestas torsional como de transformación son reducidas para el caso donde las dos frecuencias resonantes están bien separadas, y su reducción es incrementada con los valores de decrecimiento de la rigidez de suelo relativo y la razón de la altura a la base. El fenómeno más notorio pudiera ser el hecho de que los efectos SSI puedan extender la respuesta de transformación si la estructura es leve y las dos frecuencias de resonancia están muy cercanas.

En [AGZ], los métodos de desigualdad de matriz lineal son propuestos para resolver problemas de detección de daños en estructuras. El problema de detección de daños es formulado como un problema de optimización convexo, incluyendo restricciones de desigualdad de matriz lineal.

Los problemas de optimización LMI tienen baja complejidad computacional, y ellos pueden ser solucionados muy eficientemente usando métodos de punto interior desarrollados recientemente. Ambos, la actualización de matriz y la formulación de actualización de parámetros del problema de detección de daños son proporcionados en términos de LMIs. Las técnicas propuestas son aplicadas para detectar daños en un modelo de barra vibrante de doce grados de libertad.

En [Tej11] se tiene como finalidad la evaluación de la respuesta de un sistema estructural ante una acción dinámica. Se lleva a cabo esta tarea en el dominio de la frecuencia y se coteja con los resultados obtenidos en el dominio del tiempo. Se abordan en forma de estudio herramientas matemáticas como los desarrollos en serie de Fourier para cargas periódicas, las transformadas continuas y discretas de Fourier, la función compleja de transferencia, aspectos relacionados con el muestreo de funciones continuas y métodos de corrección. Este informe cuenta a la vez con una parte experimental donde, mediante la transformada de Fourier, se obtienen las frecuencias propias de un perfil metálico sometido a un impacto. Este trabajo tiene la intención de hacer un programa de cálculo que, a partir de una entrada de datos, posibilite la obtención de la respuesta de un sistema de  $n$  grados de libertad, en el caso de ejemplos prácticos llevados a cabo o para el ejemplo experimental que se trata.

El estudio del daño estructural, tratado en [L13] y [AGZ], se aborda utilizando métodos inherentes a la formulación newtoniana, como el de la rigidez. También se trata, en la bibliografía revisada el estudio de edificios de tres niveles, se realizan análisis numéricos, análisis modales, se elaboran modelos experimentales, se validan dichos modelos (ver [LL15]), se modelan edificaciones de concreto reforzado mediante modelos dinámicos inelásticos (ver [HA14]).

En estos artículos, relacionados con temáticas como la dinámica de estructuras y la evaluación del daño estructural, así como en libros clásicos de la ingeniería civil como [Cho95] y [Paz92], se aborda el estudio de las estructuras civiles con un enfoque newtoniano (en relación a la

formulación de la mecánica utilizada).

De acuerdo a entrevistas a los profesores investigadores Dr. Ing. Ernesto Chagoyén e Ing. Dairo Ballate, del Departamento de Ingeniería Civil de la Facultad de Construcciones de la Universidad Central “Marta Abreu ”de Las Villas, así como a los trabajos consultados [GPDaL09], [RC14] y [HB16], no se aplica la formulación lagrangiana en las investigaciones de dinámica de estructuras en el contexto de esta institución.

En sistemas mecánicos complejos, donde haya que tener en cuenta muchas fuerzas y aceleraciones de distintos tipos, o en muchas direcciones, la utilización de este enfoque se complica en cuanto a las consideraciones y el trabajo a desempeñar. Por esta razón, en el presente trabajo se propone como alternativa la aplicación de la dinámica de Lagrange al estudio de las estructuras civiles.

## 1.2 Modelo básico

Según [Wel72, 1.2], las tres leyes de Newton son parte fundamentales sobre los cuales se basa toda la mecánica clásica. Las leyes básicas de la mecánica pueden expresarse matemáticamente en cuatro formas: el principio D’Alembert, las ecuaciones de Lagrange, las ecuaciones de Hamilton y el principio de Hamilton.

Para ganar claridad acerca de las leyes de Newton del movimiento, se exponen brevemente, en los siguientes tres párrafos, algunos conocimientos básicos de la mecánica.

Cada partícula en el espacio tiene una posición, la cual se puede expresar por un vector de posición  $\mathbf{r}$ . Su velocidad y su aceleración están dadas por  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$  y  $\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$  respectivamente. [LL94, I.1]

Según [Gol08, 1 - 1], para una sola partícula la Segunda Ley de Newton se expresa

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

donde  $\mathbf{p}$  se denomina *momento lineal* y está dado por  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ .

El teorema de conservación del momento lineal de una partícula dice que si la fuerza resultante  $\mathbf{F}$  es nula, entonces  $\mathbf{p}$  se conservará. [Gol08, 1-1]

Se entiende por movimiento periódico aquel movimiento que se repite sucesivamente en cada intervalo de una cantidad determinada de tiempo. Dicha cantidad se denomina período del movimiento.

Los sistemas oscilatorios se clasifican como lineales o no lineales. Las técnicas matemáticas disponibles para el estudio de los lineales están bien desarrolladas. En el caso de los no lineales, las técnicas para su análisis son conocidas con menor solidez y difíciles de aplicar.

Las vibraciones de un cuerpo pueden clasificarse como libres o forzadas. El primer tipo responde al caso en que el sistema oscila debido a fuerzas inherentes al propio sistema, sin la presencia de fuerzas externas. El segundo tipo está caracterizado porque el movimiento sucede bajo la acción de fuerzas externas.

Sintetizando lo expuesto en [TRLF03, secs. 2.1 y 2.2], se presenta a continuación la representación de un sistema estructural sencillo por el oscilador viscoelástico de un grado de libertad. El ejemplo utilizado en este caso es el de la estructura que consiste en dos columnas muy livianas, colocadas sobre una base, que sostienen una losa superior. Se quiere hallar la ecuación movimiento de la losa cuando la base está afectada por un movimiento sísmico.

Representando la estructura como un modelo ideal, se plantean las siguientes hipótesis que simplifican el problema: la base de la estructura es fija, la losa no se puede deformar y solamente puede desplazarse en dirección horizontal, toda la masa de la estructura se concentra en la losa.

De estos planteamientos se deduce que basta con hallar el movimiento de uno de sus puntos para determinar el movimiento de la estructura, por lo cual el sistema tendrá un solo grado de libertad.

Se supone que el movimiento de la losa es causado por una fuerza externa  $P(t)$  que varía a lo largo del tiempo, que la estructura tiene un comportamiento elástico, del cual su rigidez es proporcionada por las columnas. También se supone que el movimiento está amortiguado. Es decir, que si la acción externa que provoca el movimiento deja de actuar, el sistema continuará su movimiento durante un tiempo, en el cual la amplitud de las oscilaciones irá decreciendo hasta que se alcance el estado de reposo. Se considerará aquí el amortiguamiento viscoso.

Las fuerzas que actúan sobre la losa son: la fuerza externa  $P(t)$ , la fuerza de inercia  $F_I = -m\ddot{u}(t)$ , la fuerza de amortiguamiento viscoso  $F_A = -c\dot{u}(t)$  (donde  $c$  es el coeficiente de amortiguamiento) y la fuerza de restitución elástica  $F_E = -ku(t)$ . Entonces, según el principio de D'Álembert, la losa se encuentra en equilibrio dinámico bajo la acción de estas fuerzas, es decir:

$$P(t) + F_I + F_A + F_E = 0.$$

Luego, la ecuación del movimiento de la estructura será la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = P(t) \quad (1.1)$$

### 1.3 Movimiento oscilatorio

Se dice que un sistema está en movimiento armónico simple cuando, luego de estar el punto de masa fuera su posición de equilibrio, solo será atraído hacia esta por la fuerza elástica, la cual

es proporcional y de sentido contrario al desplazamiento de dicho punto de masa con respecto a la posición de equilibrio.

Denotando por  $k$  la constante de proporcionalidad correspondiente, siendo  $x$  el desplazamiento, tenemos que la fuerza elástica será  $F = -kx$ . Teniendo en cuenta la segunda ley de Newton esto es  $m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$ , lo cual, mediante la suma de  $kx$  a ambos miembros de la igualdad, y la división por  $m$  de ambos miembros, se transforma en

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (1.2)$$

Con la denotación  $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$ , la solución de esta ecuación será

$$x = A \text{ sen}(\omega_n t + \phi) \quad (1.3)$$

la cual es la ecuación que describe el movimiento armónico simple, donde  $A$  y  $\phi$  son constantes del movimiento, que solamente serán determinadas por los valores iniciales del desplazamiento y la velocidad de la partícula que describe el comportamiento del sistema.  $\omega_n$  es llamada frecuencia natural.

$A$  es conocida como amplitud del movimiento, y es el máximo valor del desplazamiento en cualquiera de sus dos direcciones respecto a la posición de equilibrio.  $\phi$  es conocida como ángulo de fase.

El tiempo que tarda la partícula en completar un ciclo de este tipo de movimiento es denominado período y denotado por  $T$ . Así se cumple que  $x(t) = x(t + T)$ . Luego, extendiendo esta expresión en términos de la ecuación del movimiento armónico simple, de la expresión resultante se llegará a

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (1.4)$$

El inverso del período se denomina frecuencia, denotada aquí por  $f$ , y es el número de oscila-

ciones por unidad de tiempo.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_n}{2\pi} \quad (1.5)$$

La unidad de medida utilizada para la frecuencia es ciclos por segundos o hertz (Hz).

De (1.4) se tiene que la  $\omega_n$  será también la frecuencia angular (medida en radianes por segundo).

$$\omega_n = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (1.6)$$

Las ecuaciones respectivas del desplazamiento, la velocidad y la aceleración para el movimiento armónico simple son las siguientes:

$$x = A \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi) \quad (1.7)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega_n \cos(\omega_n t + \phi) \quad (1.8)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_n^2 \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi) \quad (1.9)$$

Por lo tanto,  $A$ ,  $A\omega_n$  y  $A\omega_n^2$  serán los valores máximos respectivos del desplazamiento, la velocidad y la aceleración.

$A$  y  $\phi$  serán determinadas por las condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad  $x(0) = x_0$  y  $v(0) = v_0$ . Evaluando estas condiciones en las ecuaciones anteriores se obtiene

$$x_0 = A \operatorname{sen}\phi \quad (1.10)$$

$$v_0 = A\omega_n \cos\phi \quad (1.11)$$

$$a_0 = -\omega_n^2 x_0 \quad (1.12)$$

teniendo así  $\text{sen } \phi = \frac{x_0}{A}$  y  $\text{cos } \phi = \frac{v_0}{A\omega_n}$ , con lo cual se llega a  $\frac{x_0^2}{A^2} + \frac{v_0^2}{A^2\omega_n^2} = 1$ , y de aquí a

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2} \quad (1.13)$$

Luego, de la división miembro a miembro de las ecuaciones 1.10 y 1.11 se llega a

$$\tan \phi = \omega_n \left(\frac{x_0}{v_0}\right) \quad (1.14)$$

Un caso especial de movimiento es el de un cuerpo de masa  $m$  que cuelga de un resorte de constante elástica  $k$ , el cual se encuentra adjunto a un soporte fijo, tomando en consideración la fuerza de gravedad.

Cuando el cuerpo de masa  $m$  se adjunta al extremo inferior del resorte, el sistema se desplaza  $x_g$  unidades producto de la acción de la fuerza de gravedad, logrando así una posición de equilibrio. En dicha posición de equilibrio el sistema se encontrará en reposo, por lo cual

$$k x_g - mg = 0 \quad (1.15)$$

Si el cuerpo de masa  $m$  es desplazado  $x$  unidades respecto a la posición de equilibrio y luego soltado, al aplicar la segunda ley de Newton, la ecuación que describirá el movimiento del sistema es

$$ma = mg - k(x + x_g) \quad (1.16)$$

la cual, aplicando 1.15, teniendo en cuenta la aceleración en función de  $x$  y  $t$ , y ajustando

convenientemente la forma de la expresión obtenida, se puede expresar como sigue:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (1.17)$$

Esta expresión es idéntica a la ecuación del movimiento armónico simple, aunque aquí  $x$  representa el desplazamiento respecto a la nueva posición de equilibrio. Por lo tanto, las ecuaciones relativas al desplazamiento, la velocidad y la aceleración serán las mismas del movimiento armónico simple, pero con respecto a la nueva posición de equilibrio.

Si el cuerpo es halado  $x_0$  unidades y soltado sin inducirle velocidad, la ecuación del movimiento resultante será

$$x = x_0 \operatorname{sen}\left(\omega_n t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (1.18)$$

que también se expresa como

$$x = x_0 \cos(\omega_n t) \quad (1.19)$$

La velocidad será

$$v = \omega_n x_0 \cos\left(\omega_n t + \frac{\pi}{2}\right) = -\omega_n x_0 \operatorname{sen}(\omega_n t) \quad (1.20)$$

y la aceleración

$$a = \omega_n^2 x_0 \operatorname{sen}\left(\omega_n t + \frac{\pi}{2}\right) = -\omega_n^2 x_0 \cos(\omega_n t) \quad (1.21)$$

En otro caso, si al cuerpo de masa  $m$  se le induce una velocidad  $v_0$  hacia abajo de la posición de equilibrio, tal que  $v_0 = 0$  en el instante  $t = 0$ , y en ese mismo instante  $x_0 = 0$ , las ecuaciones correspondientes serán

$$x = \frac{v_0}{\omega_n} \operatorname{sen}(\omega_n t) \quad (1.22)$$

$$v = v_0 \cos(\omega_n t) \quad (1.23)$$

$$a = -\omega_n v_0 \operatorname{sen}(\omega_n t) \quad (1.24)$$

El péndulo simple es un sistema mecánico que consiste en un punto de masa suspendido de una cuerda ligera e inextensible que a la vez cuelga de un soporte fijo. El movimiento del sistema es ocasionado por la fuerza de gravedad. La componente tangencial de esta ( $F_t = -mg \operatorname{sen}\theta$ ) actúa en torno a la posición de equilibrio  $\theta = 0$ , y en sentido contrario al desplazamiento con respecto a dicha posición. [Raj09, sec. 2.5]

Teniendo en cuenta la segunda ley de Newton, que el desplazamiento a lo largo del arco descrito por el movimiento oscilatorio correspondiente es  $s = L\theta$ , y que para desplazamientos muy pequeños  $\operatorname{sen}\theta \simeq \theta$ , se formula la ecuación del movimiento del sistema para desplazamientos pequeños. Esta es

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_n^2 \theta = 0 \quad (1.25)$$

donde  $\omega_n = \sqrt{\frac{g}{L}}$ . [Raj09, sec. 2.5]

Entonces

$$\theta = A \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi) \quad (1.26)$$

Además, el período del movimiento será

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (1.27)$$

[Raj09, sec. 2.5]

De aquí que varios péndulos con iguales ubicación y longitud de cuerda oscilan con iguales períodos y frecuencias. [Raj09, sec. 2.5]

En [Raj09, epíg. 2.7.1], para analizar qué sucede respecto a la energía de un oscilador con

movimiento armónico simple, se considera el sistema masa - resorte y se asume que este es conservativo, por lo cual la energía total del sistema se mantiene constante. Utilizando 1.8 y 1.7 se calculan respectivamente la energía cinética y la energía potencial elástica:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega_n^2 A^2 \cos^2(\omega_n t + \phi) \quad (1.28)$$

$$V = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega_n t + \phi) \quad (1.29)$$

Luego, se calcula la energía total del sistema como

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\omega_n^2 A^2 \cos^2(\omega_n t + \phi) + \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega_n t + \phi) \quad (1.30)$$

## 1.4 Oscilaciones libres

Según [Ver08, 1.3], clasifican como libres aquellas vibraciones en las cuales  $P(t) = 0$ . Es el caso en que la fuerza externa no actúa sobre el sistema. Luego, la ecuación del movimiento se transforma en la homogénea

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0. \quad (1.31)$$

Para exponer la solución de este caso, a continuación se resume lo hallado en [Ver08, 1.3]. Utilizando la caracterización de la viscosidad  $t_r = \frac{c}{k}$  [Ver08, 1.2] y el concepto de frecuencia de resonancia, se plantea

$$2\zeta = \omega_n t_r = \frac{c}{m\omega_n} = \frac{c\omega_n}{k} = \frac{c}{\sqrt{km}},$$

donde  $\zeta$  será una medida del amortiguamiento del sistema.

Así, 1.31 queda

$$\ddot{u}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{u}(t) + \omega_n^2u(t) = 0 \quad (1.32)$$

La solución de esta ecuación tiene la forma  $u(t) = Ae^{\alpha t}$ , donde  $A$  y  $\alpha$  son constantes desconocidas. La ecuación característica en este caso es

$$\alpha^2 + 2\zeta\omega_n\alpha + \omega_n^2 = 0,$$

la cual tiene raíces  $\alpha_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$ .

En [Cho95, 2.2] se ilustra el procedimiento de solución de la ecuación 1.32 para el caso en que  $\zeta < 1$ , lo cual se muestra a continuación.

Volviendo a la expresión de las raíces de la ecuación característica, como  $\zeta < 1 \Rightarrow \zeta^2 - 1 < 0$ , esta se transforma convenientemente en

$$\alpha_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n i\sqrt{1 - \zeta^2}. \quad (1.33)$$

Basado en el principio de superposición, se afirma que la solución tendrá la forma

$$u(t) = A_1e^{\alpha_{1t}} + A_2e^{\alpha_{2t}}, \quad (1.34)$$

expresión que, sustituyendo en ella 1.33, toma el aspecto

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}(A_1e^{i\omega_D t} + A_2e^{-i\omega_D t}), \quad (1.35)$$

donde

$$\omega_D = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}.$$

De la expresión de  $e^{ix}$  en forma trigonométrica, se tiene

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t} (A \cos(\omega_D t) + B \operatorname{sen}(\omega_D t)). \quad (1.36)$$

Calculando  $u(0)$  y  $\dot{u}(0)$  y relacionando estos valores se llega a

$$A = u(0)$$

$$B = \frac{\dot{u}(0) + u(0)\zeta\omega_n}{\omega_D}.$$

Sustituyendo  $A$  y  $B$  en 1.36 se obtiene

$$u(t) = e^{\zeta\omega_n t} \left[ u(0) \cos(\omega_D t) + \left( \frac{\dot{u}(0) + \zeta\omega_n u(0)}{\omega_D} \right) \operatorname{sen}(\omega_D t) \right]. \quad (1.37)$$

## 1.5 Oscilaciones del sistema de un grado de libertad durante una carga armónica

En este epígrafe se resume lo expuesto sobre este tema en [Cho95, 3.1] y [Cho95, 3.2].

Se denomina carga armónica a una fuerza  $P(t)$  de tipo  $P(t) = P_0 \operatorname{sen}(\omega t)$  o  $P(t) = P_0 \cos(\omega t)$ , siendo  $P_0$  su valor máximo.  $\omega$  es conocida como *frecuencia de excitación*. Tomando como acción externa del sistema de un grado de libertad una carga armónica  $P(t) = P_0 \operatorname{sen}(\omega t)$ , la ecuación 1.1 toma la forma

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P_0 \operatorname{sen}(\omega t), \quad (1.38)$$

ecuación de condiciones iniciales  $u(0) = u_0$  y  $\dot{u}(0) = v_0$ .

Dividiendo ambos miembros de esta ecuación por  $m$  y utilizando los parámetros introducidos en la sección anterior se llega a la expresión

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2u = \frac{P_0}{m} \text{sen}(\omega t), \quad (1.39)$$

de la cual se deduce que su correspondiente ecuación homogénea será la de las vibraciones libres, cuya solución está dada por 1.37. La solución particular tendrá el formato

$$u_p(t) = C \text{sen}(\omega t) + D \cos(\omega t).$$

Sustituyendo esto en 1.39 se tiene

$$[(\omega_n^2 - \omega^2)C - 2\zeta\omega_n\omega D] \text{sen}(\omega t) + [2\zeta\omega_n\omega C + (\omega_n^2 - \omega^2)D] \cos(\omega t) = \frac{P_0}{m} \text{sen}(\omega t),$$

expresión de la cual, por su validez para todo  $t$  del dominio y usando la relación  $k = m\omega_n^2$ , se deduce el sistema

$$\begin{aligned} \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]C - \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)D &= \frac{P_0}{k} \\ \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)C + \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]D &= 0, \end{aligned}$$

cuya solución es

$$C = \frac{P_0}{k} \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}$$

$$D = \frac{P_0}{k} \frac{-2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}.$$

La solución de la ecuación homogénea es conocida como *respuesta transiente*, debido a que su amplitud se disipa en el tiempo. La solución particular se denomina *respuesta de régimen permanente*, que es el estado en que vibra la estructura luego de que la respuesta transiente se disipa, mientras dure la acción exterior armónica. [TRLF03, 3.1]

Haciendo  $\beta = \frac{\omega}{\omega_n}$ , la respuesta de régimen permanente es

$$u_p(t) = \frac{P_0}{k} [(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2]^{-1} [(1 - \beta^2) \sen(\omega t) - 2\zeta\beta \cos(\omega t)] \quad (1.40)$$

[TRLF03, 3.1]

Luego de operar algebraicamente en el miembro derecho de la igualdad anterior, se tiene

$$u_p(t) = u_{pmax} \sen(\omega t - \theta), \quad (1.41)$$

donde

$$u_{pmax} = \left(\frac{P_0}{k}\right) [(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2]^{-\frac{1}{2}}$$

y

$$\theta = \arctan\left(\frac{2\zeta\beta}{1 - \beta^2}\right).$$

Esto indica que el desplazamiento de régimen permanente está desfasado un ángulo  $\theta$  con respecto a la fuerza armónica externa  $P(t)$ . Además, será la misma respuesta de la estructura a

un movimiento armónico simple de frecuencia  $\omega$ .  $\frac{\theta}{\omega}$  es el tiempo de retraso de la respuesta con respecto a la excitación. [TRLF03, 3.1]

## 1.6 Análisis en el dominio de la frecuencia

Según [Tej11], el análisis dinámico desde el punto de vista del dominio de la frecuencia tiene una gran importancia en nuestros días. Entre los factores que menciona esta fuente para justificar esta afirmación, están el uso de las máquinas computadoras, las cuales son capaces de ejecutar análisis eficientemente en cuanto al tiempo, y la eficacia del método tratado cuando existen condiciones, como los amortiguamientos no proporcionales, que dificultan el tratamiento de la problemática desde otro punto de mira.

Una señal, desde el punto de vista físico, se define en el dominio del tiempo. Sin embargo, se puede representar dicho ente en el dominio de la frecuencia. Esto se logra al considerar la señal una composición de señales sinusoidales. La representación descriptiva de una señal en el dominio de la frecuencia se conoce como espectro. [CCR02, cap. 2]

Cualquier senoide real puede representarse en la forma  $v(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$ , donde  $\omega_0$  es la frecuencia angular,  $A$  la amplitud y  $\phi$  el ángulo de fase. Esta senoide será solo la parte real de una senoide más general, representada por un vector de rotación en el plano complejo (de ejes parte real y parte imaginaria) llamado fasor, el cual desempeña una función importantísima en el análisis espectral. [CCR02, sec. 2.1]

Utilizando la representación en forma exponencial de un número complejo, dada por el teorema de Euler, se obtiene la representación de la senoide real en términos del fasor  $A e^{i\omega_0 t + \phi}$  [CCR02, 2.1] :

$$A \cos(\omega_0 t + \phi) = A \operatorname{Re}\{e^{i(\omega_0 t + \phi)}\} = \operatorname{Re}\{A e^{i\omega_0 t} e^{i\phi}\} \quad (1.42)$$

Como la amplitud  $A$ , la frecuencia angular  $\omega_0$  y el ángulo de fase  $\phi$  determinan unívocamente

un fasor, se puede asociar al valor de la frecuencia  $f_0$  correspondiente al de  $\omega_0$  el de la amplitud, y luego, en representación aparte, el valor del ángulo de fase. Estas dos representaciones parecen algo muy simple, pero adquieren una gran importancia al considerar señales dadas por funciones que sean la suma de varias sinusoides, al ser posible entonces representar cada una de estas por dos funciones que compartan un mismo dominio, el de las frecuencias de las sinusoides componentes, pero que tienen distintos codominios, una el de las amplitudes, y la otra el de los ángulos de fase. Estas descripciones son conocidas como líneas espectrales. [CCR02, 2.1]

Se toma como convenio para este tipo de representaciones: utilizar como frecuencia  $f_0$  en vez de  $\omega_0$ , medir los ángulos de fase en relación a la función coseno y en grados, y colocar siempre en el lugar de la amplitud un número no negativo. [CCR02, 2.1]

La señal sinusoidal real puede ser descompuesta por suma de dos fasores de sentidos de rotación contrarios (llamados fasores conjugados):

$$A \cos(\omega_0 t + \phi) = \frac{A}{2} e^{i\phi} e^{i\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-i\phi} e^{-i\omega_0 t}. \quad (1.43)$$

Esto se ha deducido a partir 1.42, teniendo en cuenta que la parte real de un número complejo es igual a la mitad de la suma de este y su conjugado. [CCR02, 2.1]

Esto incide en el espectro por el hecho de que se consideran también las frecuencias negativas  $-f_0$ . Si por la forma espectral dada por 1.42, las líneas espectrales solo tenían valores a partir del origen (el cero), en la dada por 1.43 habrá representaciones de sinusoides a ambos lados de este. La línea espectral de las amplitudes poseerá simetría par, mientras la de los ángulos de fase presentará una simetría impar. [CCR02, 2.1]

Como dice una nota de [CCR02, 2.1], el espectro de amplitud ofrece la información de cuáles frecuencias están presentes en la señal y en qué proporción.

### 1.6.1 Estudio de las funciones periódicas

Las funciones periódicas son aquellas que cumplen que  $\exists T_0$  tal que

$$v(t) = v(t + mT_0) \quad -\infty < t < \infty$$

para cualquier entero  $m$ . [CCR02, 2.1]

Determinadas funciones periódicas pueden ser analizadas en el dominio de la frecuencia mediante sus respectivos desarrollos en series de Fourier. [CCR02, 2.1]

Se define como valor medio de una función  $v(t)$  la siguiente cantidad:

$$\langle v(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} v(t) dt \quad (1.44)$$

que en el caso en que  $v(t)$  es periódica es igual a

$$\langle v(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} v(t) dt \quad (1.45)$$

[CCR02, 2.1]

Cuando para la función periódica  $v(t)$  existe la integral  $\int_{T_0} |v(t)|^2 dt$ , se define la potencia media de  $v(t)$  como

$$P = \langle |v(t)|^2 \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |v(t)|^2 dt \quad (1.46)$$

Este valor será siempre real y no negativo. Mientras, el valor medio de una función periódica que cumpla la condición necesaria para esta definición puede tomar cualquier valor real. Este tipo de funciones pueden ser expresadas de la forma

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi n f_0 t} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.47)$$

donde

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt. \quad (1.48)$$

[CCR02, 2.1]

1.47 es conocido como desarrollo de la función  $v(t)$  en serie de Fourier.

Cada coeficiente  $c_n$  es expresado en forma polar como  $|c_n| e^{i \arg c_n}$ . Luego, el  $n$ -ésimo término de 1.47 será  $|c_n| e^{i \arg c_n} e^{i2\pi n f_0 t} = e^{i(2\pi n f_0 + \arg c_n)}$ . Así, 1.47 será la suma de fasores de frecuencias  $n(2\pi f_0)$  y respectivos ángulos de fase  $\arg c_n$  y amplitudes  $|c_n|$ . Para una representación espectral más cómoda de  $v(t)$ , se colocan como puntos del dominio los múltiplos enteros de  $f_0$ , ya que  $2\pi$  es un factor común de todas las frecuencias. De este modo, se puede expresar cada coeficiente  $c_n$  en función de la frecuencia  $n f_0$ , es decir,  $c_n = c(n f_0)$ . Los  $n f_0$  se conocen como **armónicos de la frecuencia fundamental**  $f_0$ . [CCR02, 2.1]

Cuando  $v(t)$  es una función real, se cumplen  $|c(n f_0)| = |c(-n f_0)|$  y  $\arg c(n f_0) = -\arg c(-n f_0)$ , lo cual justifica las simetrías par del diagrama espectral correspondiente a las amplitudes e impar del correspondiente a los ángulos de fase. Teniendo en cuenta estas propiedades la función  $v(t)$  puede expresarse de la forma

$$v(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|c_n| \cos(\arg c_n + 2\pi n f_0 t), \quad (1.49)$$

conocida como serie trigonométrica de Fourier. Esto permite expresar  $v(t)$  en el espectro considerando solo las frecuencias  $n f_0$  positivas y teniendo para cada una la amplitud  $2|c_n|$ . [CCR02, 2.1]

## 1.7 Cálculo variacional

El cálculo de variaciones es aplicado a varios problemas de la física matemática. A continuación se expone brevemente el resumen de una revisión bibliográfica de este tema, con el objetivo de aplicar estos conocimientos al estudio físico de las estructuras.

Para la elaboración de esta revisión han sido consultados varios libros de matemática y física, entre ellos Ecuaciones Diferenciales y cálculo variacional, de L. Elsgoltz, y Mecánica Clásica, de Helbert Goldstein. Aquí han sido expuestos los principales definiciones y teoremas, y algunos de los problemas matemáticos y físicos en los cuales se ha aplicado el cálculo de variaciones.

El objetivo de esta importante herramienta es la búsqueda de extremos de funcionales. Por esto, comenzamos por definir qué es una **funcional**.

### Definición 1:

Sea  $\Upsilon$  un espacio vectorial de funciones. La función  $v$  definida en general del siguiente modo,

$$v : \Upsilon \rightarrow \mathbb{R}$$

donde  $\mathbb{R}$  es el conjunto de los números reales, se denomina funcional. [Art, sec. 2]

### Definición 2:

Sea  $y_1$  una función perteneciente al conjunto  $\Upsilon$ . La diferencia de dos funciones  $\delta y = y(x) - y_1(x)$  es denominada variación  $\delta y$  del argumento  $y(x)$  de la funcional  $v[y(x)]$ .

**Definición 3:** La funcional  $v[y(x)]$  se dice continua en  $y = y_0$  en sentido de proximidad de  $k$ -ésimo orden, si  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  tal que  $|v[y(x)] - v[y_0(x)]| < \epsilon$  cuando  $|y(x) - y_0(x)| < \delta$ ,  $|y'(x) - y_0'(x)| < \delta$ ,  $|y''(x) - y_0''(x)| < \delta$ , ...,  $|y^{(k)}(x) - y_0^{(k)}(x)| < \delta$ .

**Definición 4.** La funcional  $L[y(x)]$  que satisface las condiciones

$$L[cy(x)] = cL[y(x)],$$

donde  $c$  es una constante arbitraria, y

$$L[y_1(x) + y_2(x)] = L[y_1(x)] + L[y_2(x)]$$

es conocida como **funcional lineal**.

**Definición 5:** Si el incremento de la funcional en  $y(x)$ ,

$$\Delta v = v[y(x) + \delta y] - v[y(x)],$$

puede ser representado por la expresión

$$\Delta v = L[y(x), \delta y] + \beta(y(x), \delta y) \max|\delta y|,$$

donde  $L[y(x), \delta y]$  es una funcional lineal respecto a  $\delta y$ ,  $\max|\delta y|$  es el máximo valor absoluto de  $\delta y$  y  $\beta(y(x), \delta y) \rightarrow 0$  cuando  $\max|\delta y| \rightarrow 0$ , entonces  $L[y(x), \delta y]$  se denomina **variación de la funcional**  $v$ , y se denota por  $\delta v$ . [Els69]

La variación de la funcional  $v[y(x)]$  es igual a

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} v[y(x) + \alpha \delta y]_{\alpha=0}. \quad (1.50)$$

**Definición 6:**

La funcional  $v[y(x)]$  tiene un máximo (mínimo) en  $y = y_0(x)$ , si su valor en cualquier función de una vecindad aleatoria de  $y = y_0(x)$  no es mayor (menor) que  $v[y_0(x)]$ .

Si en dicha vecindad se cumple que  $\Delta v \leq 0$  ( $\Delta v \geq 0$ ) y  $\Delta v = 0$  solamente cuando  $y(x) = y_0(x)$ , entonces existe un máximo (mínimo) estricto en  $y = y_0(x)$ .

**Teorema 1:**

Si la funcional  $v[y(x)]$  posee variación y alcanza un extremo relativo para  $y = y_0(x)$ , donde  $y_0(x)$  es un punto interior de la región de definición de la funcional, entonces  $\delta v = 0$  para  $y = y_0(x)$ .

En relación al concepto de extremo, hemos considerado aquí el sentido de proximidad cero utilizado en la definición de funcional continua expuesta anteriormente. En este caso el máximo o mínimo es denominado **extremo fuerte** (máximo fuerte o mínimo fuerte).

En el caso de la proximidad de primer orden, el extremo alcanzado por la funcional en la curva  $y = y_0$  es conocido como **extremo débil**.

Si en la curva  $y = y_0$  existe un extremo fuerte, entonces existe también un extremo débil.

También se tiene que, si  $v[y(x)]$  alcanza un extremo en  $y_0(x)$ , entonces

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} v[y(x, \alpha)]|_{\alpha=0} = 0, \quad (1.51)$$

donde  $y(x, \alpha)$  es una familia de curvas admisibles. Aquí, para  $\alpha = 0$  y  $\alpha = 1$ , las funciones correspondientes de dicha familia serán  $y_0(x)$  y  $y_0(x) + \delta y$  respectivamente.

Las definiciones y los teoremas que hemos visto hasta ahora en esta sección, pueden ser generalizados, con los cambios correspondientes, a las funcionales que dependen de varias funciones desconocidas ( $v[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)]$ ) o de una o varias funciones de varias variables ( $v[z(x_1, x_2, \dots, x_n)]$  o  $v[z_1(x_1, \dots, x_n), \dots, z_n(x_1, \dots, x_n)]$ ).

#### **Lema fundamental del cálculo variacional:**

Si para toda función continua  $\eta(x)$  se tiene

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x)\eta(x)dx = 0,$$

donde  $\Phi(x)$  es una función continua en el intervalo  $[x_0, x_1]$ , entonces

$$\Phi(x) \equiv 0$$

en dicho intervalo.

## 1.8 Ecuaciones de Euler

### 1.8.1 Ecuaciones de Euler - Lagrange

Se tiene el objetivo de analizar los extremos de la funcional

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx \quad (1.52)$$

si para toda curva admisible  $y$  se cumplen  $y(x_0) = y_0$  y  $y(x_1) = y_1$ . Consideraremos la función  $F(x, y, y')$  derivable tres veces.

Las curvas  $y$  que satisfacen

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \quad (1.53)$$

son denominadas *extremales*. Solamente en las extremales que satisfacen las condiciones de puntos fronteras consideradas, pueden alcanzarse valores extremos de la funcional.

La ecuación 1.53 es denominada *ecuación de Euler - Lagrange*.

A continuación son presentadas, a través de su deducción, siguiendo lo expuesto en [Gol08, 2-3], las ecuaciones de Euler-Lagrange para el caso de una funcional

$$v[x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \dot{y}_1(x), \dot{y}_2(x), \dots, \dot{y}_n(x)] = \int_1^2 F[x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \dot{y}_1(x), \dot{y}_2(x), \dots, \dot{y}_n(x)] dx.$$

En este caso de búsqueda de extremales se supondrá que todas las  $y_i$  y  $\dot{y}_i$  tienen en común los puntos extremos.

La variación de  $v$  se plantea

$$\delta v = \delta \int_1^2 F[x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \dot{y}_1(x), \dot{y}_2(x), \dots, \dot{y}_n(x)] dx.$$

Esta variación se puede obtener al considerar  $v$  como función de un parámetro  $\alpha$ , que caracteriza cada posible curva  $y_i$ . Así se tiene

$$y_1(x, \alpha) = y_1(x, 0) + \alpha\eta_1(x)$$

$$y_2(x, \alpha) = y_2(x, 0) + \alpha\eta_2(x)$$

.....

$$y_n(x, \alpha) = y_n(x, 0) + \alpha\eta_n(x)$$

donde  $y_1(x, 0), y_2(x, 0), \dots, y_n(x, 0)$  son las curvas extremales a obtener y  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  son funciones arbitrarias de  $x$  excepto en que se anulan en los puntos extremos, al ser el problema de variación de extremos fijos.

Con esto, calculando la variación se tiene

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} d\alpha = \int_1^2 \sum_i \left( \frac{\partial F}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \alpha} d\alpha \right) dx.$$

Integrando por partes la segunda suma se tiene

$$\int_1^2 \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial^2 y_i}{\partial \alpha \partial x} dx = \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_i} \right) dx.$$

El primer término se anula a causa de que todas las curvas pasan por los mismos extremos.

Entonces,

$$\delta v = \int_1^2 \sum_i \left( \frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_i} \right) \delta y_i dx,$$

siendo  $\delta y_i = \left(\frac{\partial y_i}{\partial \alpha}\right)_0 d\alpha$ .

Las variaciones  $\delta y_i$  son independientes, al serlo también las variables  $y_i$ . Las funciones  $\eta_i$  serán independientes entre sí.

Por el teorema 1 enunciado anteriormente, las extremales se alcanzarán cuando  $\delta v = 0$ . Esto se cumple si y solo si los coeficientes de las  $\delta y_i$  se anulan por separado. Esta situación se expresa por

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.54)$$

que son las *ecuaciones de Euler-Lagrange* para varias variables.

### 1.8.2 Ecuación de Euler - Poisson

Se tiene la tarea de hallar los extremos de la funcional

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x), \dots, y^n(x)) dx, \quad (1.55)$$

en la cual la función  $F$  sea considerada  $n + 2$  veces derivable respecto a todos los argumentos, y suponiendo las siguientes condiciones fronteras:

$$\begin{aligned} y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \\ y(x_1) = y_1, \quad y'(x_1) = y'_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)}. \end{aligned}$$

La función que realice el extremo de la funcional considerada será solución de la ecuación

$$\sum_{i=0}^n \frac{d}{dx^i} F_{y^{(i)}} = 0 \quad (1.56)$$

Las curvas integrales de 1.56 que satisfacen las condiciones consideradas son denominadas *extremales* del problema variacional considerado. Solamente en dichas curvas pueden alcanzarse

extremos de  $F$ .

1.56 es conocida como *ecuación de Euler - Poisson*. [Els69, sec. 6.4]

En el Anexo A se presentan ejemplos de problemas representativos del cálculo variacional.

## 1.9 De la formulación de Newton a la de Lagrange

### 1.9.1 Conocimientos básicos sobre mecánica de las partículas

Cada partícula en el espacio tiene una posición, la cual se puede expresar por un vector de posición  $\mathbf{r}$ . Su velocidad y su aceleración están dadas por  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$  y  $\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$  respectivamente. [LL94, I.1]

La variable  $t$  designa cada instante de tiempo en los cuales se definen estas funciones.

Según [Gol08, 1 - 1], para una sola partícula la Segunda Ley de Newton se expresa

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

donde  $\mathbf{p}$  se denomina *momento lineal* y está dado por  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ , siendo  $m = m(t)$  la función escalar que representa la masa de la partícula en el instante de tiempo  $t$ .

El teorema de conservación del momento lineal de una partícula dice que si la fuerza resultante  $\mathbf{F}$  es nula, entonces  $\mathbf{p}$  se conservará. [Gol08, 1-1]

Se definen como momento angular de una partícula respecto al punto O la magnitud  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , y momento de una fuerza a  $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ . Entre estas dos magnitudes definidas se cumple la relación  $\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$ , ecuación que proporciona el teorema de conservación del momento angular de una partícula, que dice que si la resultante de los momentos,  $\mathbf{N}$ , es nula,  $\dot{\mathbf{L}} = 0$  y se conserva el momento angular  $\mathbf{L}$ . [Gol08, 1-1]

El trabajo realizado por  $\mathbf{F}$  sobre la partícula, al trasladarse esta del punto 1 al punto 2, es  $W_{1\ 2} = \int_1^2 \mathbf{F} ds$ , siendo  $s$  la curva que describe el movimiento de la partícula. Cuando la masa es constante (lo cual se supone a partir de ahora excepto cuando se especifique lo contrario), ocurrirá que  $W_{1\ 2} = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2)$ .  $mv^2$  se denomina energía cinética de la partícula y se representa por  $T$ . Luego, el trabajo realizado es  $W_{1\ 2} = T_2 - T_1$ . [Gol08, 1-1]

Si el campo de fuerzas es tal que el trabajo realizado en una trayectoria cerrada es nulo, la fuerza y el sistema se denominan *conservativos*. Se deduce la condición necesaria  $\mathbf{F} = -\nabla V$ , donde  $V$  se llama *energía potencial*. Físicamente, si en un sistema existen fuerzas disipativas, ese sistema no será conservativo. [Gol08, 1-1]

Se tiene que en sistemas conservativos  $W_{1\ 2} = V_1 - V_2$ , expresión que, combinada con la otra expresión del trabajo implica  $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$ . Es decir, si las fuerzas que actúan sobre una partícula son conservativas, la energía total  $T + V$  de la partícula se conserva, resultado conocido como *teorema de conservación de la energía para una partícula*. [Gol08, 1-1]

Generalizando lo anterior para un sistema de partículas, se comienza diciendo que la segunda ley de Newton para la partícula  $i$  es

$$\sum_j \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_i^{(E)} = \dot{\mathbf{p}}_i,$$

donde  $\mathbf{F}_i^{(E)}$  representa las fuerzas externas, y  $F_{ji}$  es la fuerza interna ejercida por la partícula  $j$  sobre la partícula  $i$ . Combinando las ecuaciones de este tipo de todas las partículas se tiene

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{(E)} + \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ji},$$

expresión que, considerando que se cumple la tercera ley de Newton (las fuerzas ejercidas entre dos partículas son iguales y opuestas, y están contenidas en la recta que los une), definiendo un vector  $\mathbf{R} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M}$  como media aritmética de los radiovectores de las partículas

promediados en relación a sus masas (y que define el punto conocido como *centro de gravedad* del sistema), y otro  $\mathbf{F}^{(E)}$  como la fuerza externa resultante, se reduce a

$$M \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = \sum_i \mathbf{F}_i^E \equiv \mathbf{F}^{(E)}.$$

[Gol08, 1-2]

Luego, el momento lineal total del sistema es

$$\mathbf{P} = \sum m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = M \frac{d\mathbf{R}}{dt},$$

entonces, se tiene que, si la resultante de las fuerzas externas es nula, el momento lineal total se conserva, resultado conocido como *teorema de conservación del momento lineal de un sistema de partículas*. [Gol08, 1-2]

El momento angular total del sistema está dado por la ecuación

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}^{(E)},$$

donde  $\mathbf{N}$  es el momento de la fuerza externa con relación al punto dado. Esta ecuación implica que  $\mathbf{L}$  no varía con el tiempo si el momento de la fuerza externa aplicado es nulo, resultado conocido como *teorema de conservación del momento angular total*. [Gol08, 1-2]

El trabajo realizado conjuntamente por todas las fuerzas, para llevar el sistema desde una configuración inicial 1 hasta una configuración final 2 es

$$W_{1\ 2} = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s}_i = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i^{(E)} \cdot d\mathbf{s}_i + \sum_{i \neq j} \int_1^2 \mathbf{F}_{j\ i} \cdot d\mathbf{s}_i.$$

Empleando las ecuaciones del movimiento, esta expresión se reduce a

$$W_{12} = T_2 - T_1,$$

donde  $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$  es la energía cinética total del sistema. [Gol08, 1-2]

Siguiendo razonamientos empleados en [Gol08], se llega a la siguiente expresión de la energía cinética del sistema

$$T = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2,$$

donde se ha tenido en cuenta la transformación de coordenadas con origen en el centro de gravedad del sistema

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{R}$$

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{v}.$$

En esta transformación  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$  es la velocidad del centro de gravedad respecto del origen de coordenadas, y  $\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt}$  es la velocidad de la partícula  $i$  con relación al centro de gravedad del sistema. [Gol08, 1-2]

También se tendrá, en analogía con el teorema de conservación de la energía para una partícula, que se podrá definir una energía potencial total  $V$  del sistema, la cual tiene la forma

$$V = \sum_i V_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij},$$

tal que la energía total  $T + V$  se conserve. Aquí las  $V_{ij}$  serán las potenciales de las cuales podrán obtenerse las  $F_{ij}$ . [Gol08, 1-2]

En muchos sistemas mecánicos se presentan fuerzas imposibles de determinar directamente, que solo son conocidas por sus efectos sobre el movimiento del sistema correspondiente. Como

ejemplo de esas fuerzas tenemos las que ejercen las paredes de un recipiente sobre las moléculas de un gas contenido en él, las que ejercen las varillas de un ábaco sobre las bolas a las cuales soportan, etc. Para expresar estos efectos se introducen en el modelo matemático relaciones de dependencia entre las coordenadas del sistema denominadas *ligaduras*. [Gol08, 1-3]

Estas *ligaduras* se clasifican en distintos tipos. Son conocidas como *ligaduras holónomas* aquellas que se expresan como ecuaciones que relacionan las coordenadas de las partículas y el tiempo, y que tienen la forma  $f(r_1, r_2, \dots, t) = 0$ . Las ligaduras que no pueden expresarse de esta forma clasifican como *no holónomas*. También se clasifican las ligaduras en cuanto a su dependencia del tiempo: si son independientes de este se llaman *esclerónomas*, si lo contienen explícitamente se conocen como *reónomas*. [Gol08, 1-3]

En la resolución de problemas de la mecánica, las ligaduras traen algunas complicaciones:

- Las coordenadas  $r_i$  dejan de ser todas independientes por la relación entre ellas dada por las ecuaciones de ligadura; esto implica que las ecuaciones del sistema que expresa la segunda ley de Newton para el sistema mecánico no son todas independientes.
- Las fuerzas de ligadura no son conocidas a priori, forman parte de las incógnitas del problema y se deben obtener a partir de la solución buscada. [Gol08, 1-3]

En el caso de las ligaduras holónomas, la dificultad relativa a la dependencia de las coordenadas se resuelve mediante la introducción de las *coordenadas generalizadas*. Siendo  $N$  el número de partículas, se utilizan las  $k$  ecuaciones de estas ligaduras para eliminar  $k$  de las  $3N$  coordenadas del sistema. Así quedarán  $3N - k$  coordenadas independientes, por lo cual se dirá que el sistema posee  $3N - k$  grados de libertad. Otra forma de expresar la eliminación de las coordenadas dependientes es introduciendo  $3N - k$  nuevas variables independientes  $q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}$ , en función

de las cuales las antiguas coordenadas se dan por las ecuaciones de transformación

$$r_1 = r_1(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t)$$

.

.

.

$$r_N = r_N(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t)$$

[Gol08, 1-3]

En los sistemas discretos, al plantear el equilibrio en cada instante, según los grados de libertad que hayan sido escogidos, se obtendrá un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Mientras, al plantear dicho equilibrio, pero para sistemas continuos, la respuesta será definida por ecuaciones en derivadas parciales; ya que las propiedades de las componentes este tipo de sistemas están en función de las coordenadas del punto y del tiempo. [Tej11, 5.2.1]

Volviendo a los sistemas discretos, en el caso de ligaduras no holónomas, es imposible que el uso de las ecuaciones de ligadura elimine las coordenadas dependientes. No existe método general para resolver problemas de sistemas no holónomos. En el caso de los holónomos siempre es posible dar una solución formal, debido al hecho de que es posible la eliminación de las coordenadas dependientes. [Gol08, 1-3]

Para barrer la dificultad del desconocimiento a priori de las fuerzas de ligadura, se formulará la mecánica de modo que no aparezcan, y así tratar solamente las fuerzas aplicadas que se conocen. Para esta formulación será importante el hecho de que, en un sistema particular con ligaduras el trabajo realizado por las fuerzas internas (en este caso las de ligadura), es nulo. [Gol08, 1-3]

## 1.9.2 Introducción de la formulación de Lagrange. Lagrangiana y ecuaciones de Lagrange.

En [Gol08, 1-4] se describe un procedimiento para llegar a la nueva formulación. Partiendo de la idea de desplazamiento virtual de un sistema y de que el sistema esté en equilibrio, se llega a que la suma de los productos de las fuerzas resultantes de cada partícula por sus respectivos desplazamientos virtuales es nula. Luego se desdobra la fuerza resultante en fuerza aplicada y fuerza de ligadura. Después, [Gol08, 1-4] se limita a aquellos sistemas en los cuales el trabajo virtual de las fuerzas de ligadura es cero. También se excluyen convenientemente aquellos sistemas en los cuales existen fuerzas de rozamiento. Así se obtiene como condición de equilibrio para un sistema que el trabajo virtual de las fuerzas aplicadas sea nulo, condición que se denomina *principio de los trabajos virtuales*. Para igualar a cero los coeficientes se requiere dar al principio una forma en la cual aparezcan los desplazamientos virtuales de las  $q_i$ , que son independientes. Se recurre para esto a un artificio ideado en un inicio por Bernoulli y perfeccionado después por D'Álembert. También considerando solamente los sistemas en los que el trabajo virtual de las fuerzas de ligadura es nulo, se obtiene el *principio de D'Álembert*, logrando el objetivo de que no aparezcan las fuerzas de ligadura. Se intenta transformar el principio obtenido en una expresión que contenga los desplazamientos virtuales de las coordenadas generalizadas, de modo que los coeficientes de estos puedan igualarse a cero por separado. Se efectúa el cambio de coordenadas de las  $r_i$  a las  $q_i$  mediante las ecuaciones de transformación dadas más arriba en este texto. Desde aquí, a través de una serie de pasos descritos en [Gol08, págs.22, 23 y 24], se llega a las  $n$  ecuaciones

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad (1.57)$$

siendo  $T$  la energía cinética del sistema y las  $Q_j = \sum_i F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j}$ , componentes denominadas *fuerzas generalizadas*.

Teniendo en cuenta el caso de los sistemas conservativos (se cumple  $F_i = -\nabla_i V$ ), estas ecuacio-

nes toman la forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial(T - V)}{\partial q_j} = 0.$$

Como  $V$  es función solo de la posición, es independiente de las velocidades generalizadas  $\dot{q}_j$ , por esto, las ecuaciones también pueden expresarse como

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial(T - V)}{\partial q_j} = 0.$$

Definiendo la nueva función  $L = T - V$ , denominada *lagrangiana*, se tienen

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0,$$

conocidas por el nombre de *ecuaciones de Lagrange*.

### 1.9.3 Principio de Hamilton

Según [Gol08, 2-1], la configuración instantánea de un sistema está determinada por los valores de las  $n$  coordenadas generalizadas y representa un punto de un hiperespacio cartesiano en el que las  $q$  forman los  $n$  ejes coordenados. Es común denominar este espacio como *espacio de configuración*. Al variar con el tiempo el estado del sistema, el punto representativo de este se moverá en el hiperespacio y describirá una curva denominada *trayectoria del movimiento del sistema*. El tiempo puede ser considerado como un parámetro de esta curva, que representa sus variaciones. [Gol08, 2-1]

Suele denominarse "principio integral" a un principio que considere el movimiento completo del sistema entre los tiempos  $t_1$  y  $t_2$ , y tenga en cuenta pequeñas variaciones virtuales del mismo

con relación al movimiento real. [Gol08, 2-1]

El principio integral de Hamilton para sistemas conservativos dice:

El movimiento del sistema entre los tiempos  $t_1$  y  $t_2$  es tal que la integral curvilínea

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt,$$

donde  $L = T - V$ , es una extremal respecto a la trayectoria del movimiento. [Gol08, 2-1]

Este principio también se resume diciendo que la variación de la integral  $I$  entre  $t_1$  y  $t_2$  fijos es cero, esto es

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt = 0.$$

[Gol08, 2-1]

El principio de Hamilton es condición necesaria y suficiente para que se verifiquen las ecuaciones de Lagrange. [Gol08, 2-1]

Para demostrar, la suficiencia del principio de Hamilton para que se cumplan las ecuaciones de Lagrange (en sistemas conservativos), basta sustituir en las ecuaciones de Euler-Lagrange los siguientes valores:  $x$  por  $t$ ,  $y_i$  por  $q_i$  y  $F$  por  $L$ . Así se obtienen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

que, como ya se ha visto, son las ecuaciones de Lagrange del movimiento. [Gol08, 2-3]

Este hecho, que las ecuaciones de Lagrange se deducen del principio de Hamilton, permite construir la mecánica de los sistemas conservativos a partir de dicho principio como postulado básico, en lugar de partir de las leyes del movimiento de Newton. Como ventajas de una formulación de este tipo están el ser invariante respecto al sistema de coordenadas utilizado para expresar la lagrangiana, y el ser el camino adecuado para intentar describir con la armadura

matemática de la mecánica clásica sistemas en apariencia no mecánicos, ejemplo de ello es la teoría de campos. [Gol08, 2-1]

Según [Gol08, 2-4], es posible generalizar el principio de Hamilton de modo que incluya fuerzas no conservativas, y también de modo que incluya ciertos tipos de sistemas no holónomos.

#### 1.9.4 Ventajas de la formulación lagrangiana

En el trabajo con las ecuaciones del movimiento en la convencional formulación newtoniana, se hace necesario tener en cuenta y manejar muchas aceleraciones y fuerzas vectoriales. Sin embargo, en la formulación lagrangiana, únicamente aparecen  $T$  y  $V$ , dos funciones escalares, por lo cual, con esta formulación, se hace mucho más simple el problema. Se establece así una rutina de solución para todos los problemas de la mecánica a los que sea aplicable esta formulación: expresar  $T$  y  $V$  en coordenadas generalizadas, construir  $L$  y sustituir estas magnitudes en las ecuaciones de Lagrange, para de este modo obtener las ecuaciones que describen el movimiento del sistema.  $T$  y  $V$  se obtienen a partir de las ecuaciones de transformación de las  $r_i$  a las  $q_i$  y también de

$$v_i = \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial r_i}{\partial t}.$$

Todo el campo de la dinámica de partículas y de cuerpos rígidos se reduce de esta forma a un solo procedimiento que, con independencia del número de masas consideradas, del tipo de coordenadas usadas, de la cantidad de restricciones sobre el sistema, y del estado de movimiento de estas y del marco de referencia, implica las mismas etapas básicas. Por lo tanto, una ventaja sobre otras formulaciones es que los métodos especiales son sustituidos por un método general. [Wel72, prólogo]

En [Gol08, 2-5] se dice que en el principio resumido de Hamilton está contenida toda la me-

cánica de los sistemas conservativos, por esto se califican como "elegantes" las formulaciones variacionales. Como ventaja del principio de Hamilton se tiene que todas las magnitudes físicas que contiene (energías cinética y potencial), se pueden definir sin referencia a un sistema de coordenadas generalizadas específico. Se recalca lo ya dicho, esta formulación es invariante respecto a la elección de coordenadas. [Gol08, 2-5]

Las ecuaciones de Lagrange serán válidas para cualquier sistema de coordenadas adecuadas para la representación de la configuración del sistema. Estas ecuaciones darán directamente las ecuaciones del movimiento. No es necesaria la introducción del método vectorial formal. Quedan eliminadas automáticamente las fuerzas de restricción para las situaciones de restricciones holónomas lisas. Para eliminar estas fuerzas mediante métodos convencionales se puede complicar demasiado el procedimiento correspondiente. [Wel72, prólogo]

Otra ventaja es que la formulación lagrangiana puede extenderse al campo elástico, al magnético, a los campos asociados a las partículas elementales, entre otros sistemas. [Gol08, 2-5].

La descripción de dos sistemas físicos diferentes mediante lagrangianas de la misma forma señala que las técnicas y resultados ideados para estudiar uno de ellos pueden aplicarse al otro de forma inmediata. También se afirma que los principios variacionales pueden ser aplicados en todos los campos de la física en la tarea de encontrar las ecuaciones análogas a las del movimiento.

Siempre que se emplea un principio variacional como pilar de una determinada formulación, los campos estudiados presentan analogía estructural, en cierto grado. [Gol08, 2-5]

Inicialmente los métodos cuánticos de la mecánica de partículas fueron desarrollados a partir, en esencia, de la formulación lagrangiana de la mecánica clásica. [Gol08, 2-5]

Según [Wel72], tanto en el área de las aplicaciones, como de las investigaciones y consideraciones teóricas, el método dinámico mediante formulación lagrangiana es aplicable a una amplia gama de problemas de partículas y de cuerpos rígidos.

En gran medida, este método de Lagrange se basa en magnitudes escalares como las energías cinética y potencial, el trabajo virtual y la función de potencia. En general, dentro de cualquier sistema adecuado de coordenadas, no hay dificultad en expresar estas magnitudes. Las ecuaciones de Lagrange implican la consideración adecuada de las magnitudes vectoriales, por lo que tampoco es necesario, para estas magnitudes, utilizar métodos vectoriales formales. [Wel72, prólogo]

Aún cuando se trate de sistemas complicados, la aplicación de las ecuaciones de Lagrange a los problemas prácticos será de gran facilidad. A excepción de problemas muy elementales, se ahorra tiempo con respecto a varios métodos especiales. Con esta formulación se muestran claramente los detalles físicos. [Wel72, prólogo]

## 1.10 Conclusiones parciales

En el estudio plasmado en este capítulo se abordaron herramientas matemáticas de importancia en el análisis de estructuras. Se evidenció que la formulación newtoniana ha sido tradicionalmente utilizada en el estudio de las estructuras civiles. No obstante, la formulación lagrangiana promete enormes ventajas en su aplicación al estudio de problemas complejos, donde se dificulta la consideración de fuerzas y aceleraciones por el método vectorial formal. Esta formulación está fundada matemáticamente en el cálculo de variaciones, y se sustenta en el principio variacional de Hamilton en el caso de sistemas conservativos.

## Capítulo 2

# Formulación lagrangiana y su aplicación en la modelación de sistemas dinámicos

En este capítulo se ejemplifican algunas aplicaciones de la formulación lagrangiana. Se expone brevemente, mediante esta formulación, la teoría de las oscilaciones pequeñas de un sistema discreto de  $n$  grados de libertad. Se describe la transición de la formulación de un sistema discreto a un sistema continuo, centrándose en el hallazgo de las ecuaciones del movimiento; aquí se pueden observar transformaciones interesantes de la formulación en el paso de un tipo de sistemas a otro. Además, se presenta la formulación del sistema continuo en tres dimensiones, tema en el cual se introduce el concepto de densidad lagrangiana.

Se plantean dos problemas del área de la ingeniería civil, y que no han sido tratados mediante la formulación lagrangiana en la bibliografía revisada. Estos problemas son: el cálculo de los modos normales de las pequeñas oscilaciones longitudinales y transversales de un sistema de partículas de cinco grados de libertad, y el hallazgo de las ecuaciones del movimiento de las oscilaciones en un puente ocasionadas por la caída de un objeto sobre este en dirección diagonal.

Se ilustra el procedimiento de solución del primer problema a través del ejemplo de la molécula

tratómica lineal, y se da solución al segundo problema.

## 2.1 Ejemplos de aplicaciones de la formulación lagrangiana

Se tiene que las ecuaciones de Lagrange son muy convenientes en el estudio de los sistemas electromecánicos. Además, se pueden aplicar directamente a una gran variedad de sistemas de este tipo y eléctricos, al contar las coordenadas generalizadas, las velocidades, la energía cinética, la energía potencial, la función de potencia, las ecuaciones de restricción, los grados de libertad y las fuerzas generalizadas con analogías en muchos tipos de sistemas eléctricos. Ejemplos de estos sistemas son circuitos eléctricos de dos grados de libertad, circuitos a los cuales se les aplica un voltaje externo, otros donde intervienen condensadores, resortes espirales, o bobinas, etc. [Wel72, cap. 15]

Respecto al procedimiento para la formulación lagrangiana, para llevar  $T$  de coordenadas cartesianas a generalizadas puede desarrollarse la expresión

$$T = a + \sum_i a_j \dot{q}_j + \sum_{j,k} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (2.1)$$

donde

$$a = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left( \frac{\partial r_i}{\partial t} \right)^2,$$

$$a_j = \sum_i m_i \frac{\partial r_i}{\partial t} \frac{\partial r_i}{\partial q_j},$$

y

$$a_{jk} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \frac{\partial r_i}{\partial q_k}.$$

[Gol08, 1-6]

Como sencillos ejemplos de la aplicación de la formulación lagrangiana, se presentan los siguientes, expuestos en [Gol08, 1-6].

Para encontrar las ecuaciones del movimiento desde 1.57 para el movimiento de una partícula, considerando coordenadas cartesianas, se requiere de las fuerzas generalizadas  $F_x$ ,  $F_y$  y  $F_z$ . La energía cinética será  $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ . Luego  $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$ ,  $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$  y  $\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$ , por lo cual las ecuaciones del movimiento serán

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(m\dot{x}) &= F_x \\ \frac{d}{dt}(m\dot{y}) &= F_y \\ \frac{d}{dt}(m\dot{z}) &= F_z,\end{aligned}\tag{2.2}$$

las mismas que se obtienen por la formulación newtoniana.

En el caso de coordenadas polares planas, para expresar  $T$  en función de  $r$  y  $\theta$ , se utilizan las ecuaciones de transformación

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta.$$

Entonces

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta,$$

y así

$$T = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2].\tag{2.3}$$

Las componentes de las fuerzas generalizadas serán

$$Q_r = \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \mathbf{F} \frac{\mathbf{r}}{r} = F_r$$

$$Q_\theta = \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \mathbf{F} \cdot r \mathbf{n} = r F_\theta$$

donde  $\mathbf{n}$  es un vector unitario perpendicular a  $r$ .

Se tendrá, por tanto,  $\frac{\partial T}{\partial r} = m\dot{\theta}^2$ ,  $\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$ ,  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) = m\ddot{r}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$ ,  $\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$  y  $\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta}$ ; las ecuaciones del movimiento serán

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F_r$$

$$mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = rF_\theta$$

Otro ejemplo de aplicación es la *máquina de Atwood*, sistema mecánico que consiste en una polea y una cuerda suspendida en esta con dos masas atadas a los extremos. Los dos tramos de cuerda que cuelgan de la polea suman  $l$  unidades de longitud. Este es un sistema conservativo con ligaduras esclerónomas. En el procedimiento a seguir se supone que la polea no tiene rozamiento. Aquí solo hay una coordenada independiente  $x$ . La posición de la otra masa está determinada por la condición de ligadura mencionada anteriormente.

La energía potencial es  $V = -M_1gx - M_2g(l - x)$ , y la cinética  $T = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\dot{x}^2$ , donde  $M_1$  y  $M_2$  son las masas atadas a los extremos. La lagrangiana será  $L = T - V = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\dot{x}^2 + M_1gx + M_2g(l - x)$ . Calculando las derivadas necesarias para las ecuaciones de Lagrange, sustituyendo en estas y procediendo, se obtendrá

$$\ddot{x} = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}g.$$

La tensión de la cuerda, que es la fuerza de ligadura, no aparece en la formulación lagrangiana, y no será posible hallarla de forma directa mediante el método de Lagrange. [Gol08, 1-6]

## 2.2 Oscilaciones pequeñas

Las pequeñas oscilaciones de los sistemas mecánicos alrededor de sus posiciones de equilibrio estable constituyen una forma común del movimiento de dichos sistemas. [LL94, epíg. 21]

Tomando como caso de estudio los sistemas conservativos donde de la energía potencial solo depende de la posición. Se supone que las transformaciones que dan las coordenadas generalizadas no depende del tiempo en forma explícita. [Gol08, 10-1] A continuación, se expone un resumen de los desarrollos expuestos en [Gol08, 10-1 a 10-3].

Se definen los desplazamientos  $\eta_i$  de las coordenadas generalizadas  $(q_1, \dots, q_n)$  respecto a la posición de equilibrio  $q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0n}$  como sigue:

$$\eta_i = q_i - q_{0i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Luego, utilizando desarrollos en series de Taylor, las energías potencial y cinética se aproximan mediante las expresiones

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij} \eta_i \eta_j$$

y

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j$$

respectivamente, donde  $V_{ij} = \left( \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0$  y  $T_{ij} = m_{ij}(q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0n})$ .

La lagrangiana se expresa entonces

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - V_{ij} \eta_i \eta_j),$$

por lo cual se tienen las  $n$  ecuaciones del movimiento

$$\sum_j T_{ij} \ddot{\eta}_j + \sum_j V_{ij} \eta_j = 0,$$

que tienen soluciones del tipo  $\eta_i = C a_i e^{-i\omega t}$ , siendo  $a_i$  los factores de amplitud.

Al sustituir estas en las ecuaciones del movimiento, se tienen las ecuaciones

$$\sum_j (V_{ij} a_j - \omega^2 T_{ij} a_j) = 0, \quad (2.4)$$

las cuales constituyen un sistema homogéneo, que solo tendrá soluciones no triviales si se anula el determinante de su matriz de coeficientes  $V_{ij} - \omega^2 T_{ij}$ , condición que dará la ecuación algebraica

$$|\bar{V} - \omega^2 \bar{T}| = 0, \quad (2.5)$$

de grado  $n$  respecto a  $\omega^2$ . Las raíces obtenidas proporcionarán las frecuencias para las cuales la solución es del tipo  $\eta_i = C a_i e^{-i\omega t}$ . Para cada una de ellas, se puede dar solución a 2.4 hallando los valores de las amplitudes  $a_i$ , en este caso, los valores hallados serán  $n - 1$  amplitudes en función de una de ellas.

Si se toman como coordenadas generalizadas las cartesianas del sistema de partículas, la energía cinética contendrá solamente los cuadrados de las componentes de la velocidad, por lo cual, utilizando los productos de las componentes cartesianas y las raíces cuadradas de las masas de

las respectivas partículas como coordenadas generalizadas, se expresará como

$$T = \frac{1}{2} \sum_i \dot{\eta}_i^2,$$

cumpléndose así  $T_{ij} = \delta_{ij}$ . Haciendo también  $\omega^2 = \lambda$ , 2.4 se escribirá

$$\sum_j V_{ij} a_j = \lambda a_i, \quad (2.6)$$

ecuación que representa el problema de valores propios para un espacio vectorial de  $n$  dimensiones, y que se puede expresar en la forma matricial

$$\bar{V}\bar{a} = \lambda\bar{a}.$$

Así, 2.5 se reducirá a la ecuación característica de los valores propios. Por esta razón, también utilizaremos el término *ecuación característica* para mencionar 2.5.

Las ecuaciones de 2.4 son del tipo de ecuación de valores propios  $\bar{V}\bar{a} = \bar{\lambda}\bar{T}\bar{a}$ .

En [Gol08, 10-2] se demuestra que los valores propios que satisfacen esta ecuación son reales y positivos, y que en el caso de no haber valores repetidos entre estos, la matriz  $A$  de los vectores propios cumple  $\bar{A}\bar{T}A = I$  y  $\bar{A}\bar{V}A = \bar{\lambda}$ . Entonces  $A$  representa la transformación lineal de la transición de ejes oblicuos a ejes ortogonales cartesianos. Los nuevos ejes se denominan *ejes principales* perpendiculares de  $V$ .

Como para todas las frecuencias  $\omega_k$  obtenidas existe una solución correcta de las ecuaciones del movimiento, por principio de superposición la solución general será:

$$\eta_i = \sum_k C_k a_{ik} e^{i\omega_k t}. \quad (2.7)$$

Existe un factor de escala  $C_k$  correspondiente a cada valor  $\omega_k$ . Estos valores se denominan

*frecuencias de resonancia o vibraciones libres.* Son las frecuencias con las cuales oscila el sistema luego de ser desplazado de manera ligera de su posición de equilibrio. Por esto el movimiento consiste en una superposición de todas las oscilaciones, cada una correspondiente a una determinada frecuencia. Los  $C_k$  son determinados mediante las condiciones iniciales, proceso facilitado por la ortogonalidad de  $A$ . Así,

$$Re C_l = \sum_{i,j} T_{ij} \eta_i(0) a_{jl} \quad (2.8)$$

$$Im C_l = -\frac{1}{\omega_l} \sum_{i,j} T_{ij} \dot{\eta}_i(0) a_{jl} \quad (2.9)$$

Buscando obtener variables separables, se realiza la transformación de coordenadas

$$\bar{\eta} = A\bar{\zeta}, \quad (2.10)$$

donde  $\bar{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$  y  $\bar{\zeta} = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)^T$  es la matriz columna de las nuevas coordenadas del sistema. De aquí,  $\bar{\eta}^T = A\bar{\zeta}^T = \bar{\zeta}^T \tilde{A}$ . Relacionando esta expresión con  $V = \frac{1}{2} \bar{\eta}^T \bar{V} \bar{\eta}$  y  $T = \frac{1}{2} \bar{\eta}^T \bar{T} \bar{\eta}$ , se obtienen

$$V = \frac{1}{2} \bar{\zeta}^T \bar{\lambda} \bar{\zeta} \quad (2.11)$$

y

$$T = \frac{1}{2} \bar{\zeta}^T \bar{\zeta}, \quad (2.12)$$

cuyas expresiones explícitas en función de las nuevas coordenadas y sus velocidades son

$$V = \frac{1}{2} \sum_k \omega_k^2 \zeta_k^2 \quad (2.13)$$

y

$$T = \frac{1}{2} \sum_k \dot{\zeta}_k^2 \quad (2.14)$$

respectivamente. La lagrangiana con estas coordenadas será

$$L = \frac{1}{2} \sum_k (\dot{\zeta}_k^2 - \omega_k^2 \zeta_k^2), \quad (2.15)$$

las ecuaciones de Lagrange

$$\ddot{\zeta}_k + \omega_k^2 \zeta_k = 0 \quad (2.16)$$

y sus soluciones

$$\zeta_k = C_k e^{-i\omega_k t}. \quad (2.17)$$

Estas  $\zeta_k$  se denominan coordenadas normales del sistema. Cada una de ellas es expresión de una oscilación del sistema con una única frecuencia de resonancia. Dichas vibraciones son llamadas *modos normales* de oscilación.

Cada elemento  $a_{ik}$  de  $A$  es la amplitud relativa con que oscila la partícula  $i$  en el modo normal  $k$ .

## 2.3 Transición de sistemas discretos a sistemas continuos

En este subepígrafe se presenta la modelación de sistemas continuos según lo expuesto en [Gol08, sec. 11-1], partiendo de las formulaciones de la mecánica que han sido ideadas para sistemas cuyo número de grados de libertad es finito o infinito numerable.

Para la descripción del movimiento oscilatorio de un cuerpo en el cual todos sus puntos de masa participen de dicho movimiento con diferentes valores de desplazamiento en cada instante de tiempo, será necesario especificar las coordenadas de posición de cada uno de los puntos del cuerpo.

La idea general del siguiente método es aproximar el sistema continuo por otro cuyo número de partículas es discreto, y transitar a las ecuaciones buscadas tendiendo al límite en las ecuaciones

del movimiento de este sistema aproximador.

Como ejemplo de este procedimiento se aborda a continuación el de una barra de longitud infinita que experimenta pequeñas vibraciones en la dirección de su eje. Para este caso el sistema discreto con el cual se aproxima es el de una cadena infinita de puntos de masa, los cuales se distancian consecutivamente  $d$  unidades, están conectados por muelles uniformes sin masa de constante recuperadora  $k$ , y solamente se mueven en dirección longitudinal.

Sea  $m$  la masa de cada partícula,  $\eta_i$  el desplazamiento de la posición de equilibrio de la partícula  $i$ , las energías cinética y potencial de este sistema serán respectivamente

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m \dot{\eta}_i^2 \quad (2.18)$$

y

$$V = \frac{1}{2} \sum_i k (\eta_{i+1} - \eta_i)^2 \quad (2.19)$$

Desarrollando la lagrangiana se obtiene

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_i (m \dot{\eta}_i^2 - k (\eta_{i+1} - \eta_i)^2) \quad (2.20)$$

expresión que, teniendo en cuenta la distancia  $d$  entre las partículas, puede expresarse como

$$L = \frac{1}{2} \sum_i a \left[ \frac{m}{a} \dot{\eta}_i^2 - ka \left( \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \right)^2 \right] = \sum_i a L_i, \quad (2.21)$$

y las ecuaciones de Lagrange para cada  $\eta_i$  serán

$$\frac{m}{a} \ddot{\eta}_i - ka \left( \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a^2} \right) + ka \left( \frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{a^2} \right) = 0 \quad (2.22)$$

Cuando  $a \rightarrow 0$ ,  $\frac{m}{a} \rightarrow \mu$ , donde  $\mu$  es la densidad de masa de la barra,  $ka \rightarrow Y$  (siendo  $Y$  el módulo de Young), lo cual se deduce de la ley de Hooke  $F = Y\xi$  (donde  $\xi$  es el alargamiento por unidad de longitud) aplicada a sistemas discretos y de su paso a sistema continuo. Para más detalles ver [Gol08, pág. 140]. El índice discreto  $i$  se convierte en la coordenada  $x$  y

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\eta(x+a) - \eta(x)}{a} = \frac{d\eta}{dx}.$$

La suma de un número discreto de desplazamientos pasa a ser una integral respecto a la variable  $x$ . Luego, 2.21 queda de la forma

$$L = \frac{1}{2} \int \left( \mu \dot{\eta}^2 - Y \left( \frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right) dx. \quad (2.23)$$

Volviendo a 2.22, al pasar al límite, sus dos últimos términos pasan a ser el límite de  $-\frac{Y}{a} \left\{ \left( \frac{d\eta}{dx} \right)_x - \left( \frac{d\eta}{dx} \right)_{x-a} \right\}$ , que es la segunda derivada de  $-Y\eta$ .

Por todo lo expuesto, las pequeñas oscilaciones de la barra elástica continua están dadas por la solución de

$$\mu \frac{d^2\eta}{dt^2} - Y \frac{d^2\eta}{dx^2} = 0. \quad (2.24)$$

## 2.4 Ecuaciones del movimiento en tres dimensiones

Primeramente se trata el caso en el cual cada punto del sistema continuo puede realizar solamente un tipo de desplazamiento (es decir, se mueve solo en la dirección de uno de los ejes coordenados). Este desplazamiento se denota por  $\eta$ . Según [Gol08, 11-1], en este caso la lagrangiana se expresa

$$L = \iiint \iota dx_1 dx_2 dx_3 \quad (2.25)$$

donde  $\iota$  es una magnitud denominada **densidad lagrangiana**, que se utilizará, en lugar de la lagrangiana, para describir el movimiento de los sistemas continuos [Gol08, 11-1]. También se ha de destacar que  $\iota$  es una función de la forma

$$\iota\left(\frac{\partial\eta}{\partial x_1}, \frac{\partial\eta}{\partial x_2}, \frac{\partial\eta}{\partial x_3}, \frac{\partial\eta}{\partial t}, x_1, x_2, x_3, t\right)$$

[Gol08, 11-2].

Para 2.25, el principio de Hamilton se expresa

$$\delta I = \delta \int_1^2 \iiint \iota dx_1 dx_2 dx_3 dt = 0 \quad (2.26)$$

Teniendo en cuenta las propiedades de la variación con respecto a los límites de integración, y también utilizando la caracterización de las trayectorias mediante un parámetro  $\alpha$  para tratar el principio variacional como un problema de extremos, se llega a

$$\int_1^2 \iiint \left[ \frac{\partial\iota}{\partial\eta} \delta\eta + \frac{\partial\iota}{\partial\dot{\eta}} \delta\dot{\eta} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial\iota}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial x_k}\right)} \delta\left(\frac{\partial\eta}{\partial x_k}\right) \right] dx_1 dx_2 dx_3 dt = 0. \quad (2.27)$$

Realizando integraciones por partes se tiene

$$\int_1^2 \iiint \delta\eta \left[ \frac{\partial\iota}{\partial\eta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial\iota}{\partial\dot{\eta}} - \sum_{k=1}^3 \frac{d}{dx_k} \left( \frac{\partial\iota}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial x_k}\right)} \right) \right] dx_1 dx_2 dx_3 dt = 0,$$

expresión que implica la ecuación de Lagrange del movimiento

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial\iota}{\partial\dot{\eta}} + \sum_{k=1}^3 \frac{d}{dx_k} \left( \frac{\partial\iota}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial x_k}\right)} \right) - \frac{\partial\iota}{\partial\eta} = 0 \quad (2.28)$$

Generalizando para el caso del movimiento según los tres ejes se consideran los desplazamientos  $\eta_j$ ,  $j = \overline{1,3}$ , que representan para cada punto los tres tipos de coordenadas generalizadas.

Como la densidad lagrangiana estará en función de las coordenadas generalizadas y sus derivadas, para cada tipo  $\eta_j$  de coordenada corresponde una ecuación del movimiento

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_j} + \sum_{k=1}^3 \frac{d}{dx_k} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_j}{\partial x_k} \right)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_j} = 0. \quad (2.29)$$

[Gol08, 11-2]

## 2.5 Problema de las pequeñas oscilaciones del sistema simétrico de las cinco partículas equidistantes en un eje horizontal

### 2.5.1 Planteamiento del problema

Se tiene una estructura civil (una viga o un puente), la cual se somete a un impacto longitudinal o transversal. Hallar los modos normales de las oscilaciones correspondientes al caso que se presente, modelando la estructura como un sistema discreto de cinco grados de libertad.

### 2.5.2 Ilustración del cálculo de frecuencias de resonancia y modos normales de vibración en el caso de la molécula triatómica lineal

En [Gol08, 10-4] se muestra el siguiente ejemplo del cálculo de las vibraciones libres y de sus modos normales correspondientes para el caso de una molécula simétrica de tres átomos colocados en línea recta. En la posición de equilibrio, los átomos extremos de masa  $m$  están colocados a igual distancia a los lados del tercer átomo, el cual tiene masa  $M$ . Simplificando el modelo, se tiene como restricción que solo ocurren oscilaciones en la dirección del eje molecular; además,

se sustituye el potencial interatómico por constantes recuperadoras de valor  $k$  al suponer que los tres átomos están unidos por dos muelles caracterizados por dichas constantes elásticas.

Se declaran  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  como las coordenadas de posición de los átomos. La coordenada  $x_2$  corresponde al átomo de masa  $M$ . Así, la energía potencial se expresa

$$V = \frac{k}{2}(x_2 - x_1 - b)^2 + \frac{k}{2}(x_3 - x_2 - b)^2.$$

Denotando el desplazamiento de la posición de equilibrio por  $\eta_i = x_i - x_{0i}$ , y teniendo en cuenta que  $x_{02} - x_{01} = b = x_{03} - x_{02}$  se llega a la expresión

$$V = \frac{k}{2}(\eta_2 - \eta_1)^2 + \frac{k}{2}(\eta_3 - \eta_2)^2.$$

Se forma la matriz

$$\bar{V} = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}.$$

De la energía cinética  $T = \frac{m}{2}(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2) + \frac{M}{2}\dot{\eta}_1^2$  se tiene

$$\bar{T} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}.$$

La ecuación característica queda

$$\text{Det} (\bar{V} - \lambda \bar{T}) = \begin{vmatrix} k - m\lambda & -k & 0 \\ -k & 2k - M\lambda & -k \\ 0 & -k & k - m\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

donde  $\lambda = \omega^2$ .

Las raíces son  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = \frac{k}{m}$  y  $\lambda_3 = \frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M}\right)$ . Sustituyendo estas en los respectivos sistemas del tipo

$$(k - m\lambda_j)a_{1j} - ka_{2j} = 0 \quad (2.30)$$

$$-ka_{1j} + (2k - M\lambda_j)a_{2j} - ka_{3j} = 0 \quad (2.31)$$

$$-ka_{2j} + (k - m\lambda_j)a_{3j} = 0 \quad (2.32)$$

$$m(a_{1j}^2 + a_{3j}^2) + Ma_{2j}^2 = 1 \quad (2.33)$$

donde 2.33 es la condición de normalización, se obtienen las amplitudes relativas de las oscilaciones de cada partícula en el modo normal correspondiente a la vibración libre dada por  $\lambda$ .

Para  $\lambda_1 = 0$  las amplitudes relativas obtenidas son  $a_{11} = a_{21} = a_{31} = \frac{1}{\sqrt{2m+M}}$ , lo cual indica que el movimiento que ocurre es una traslación sobre el eje molecular. Para  $\lambda_2 = \frac{k}{m}$ ,  $a_{12} = \frac{1}{\sqrt{2m}} = -a_{32}$  y  $a_{22} = 0$ , por lo cual podemos decir que en este modo el átomo del centro está en reposo, mientras que los demás se mueven en sentidos opuestos (en oposición de fase) con oscilaciones de igual amplitud. Para  $\lambda_3 = \frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M}\right)$ ,  $a_{13} = \frac{1}{\sqrt{2m\left(1 + \frac{2m}{M}\right)}} = a_{33}$  y  $a_{23} = \frac{-2}{\sqrt{2M\left(1 + \frac{2m}{M}\right)}}$ ; aquí los átomos de los extremos oscilan con igual amplitud y en el mismo sentido, mientras que el del centro lo hace con diferente amplitud y en oposición de fase con los demás. Cada vibración a lo largo de la molécula que no entrañe una traslación rígida es una combinación lineal de los modos correspondientes a  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$ . Las amplitudes de los modos normales se determinan por las condiciones iniciales. [Gol08, pág. 397]

### 2.5.3 Cálculo de frecuencias de resonancia y de modos normales. Modelación del problema

En este trabajo se analizan las variantes de este problema para las cuales la viga es simétrica en relación a las masas de las partículas. El primer caso se caracteriza por la igualdad de masa de todas las partículas (en este trabajo se denomina caso m-m-m-m-m); el segundo, por la diferencia de la partícula central, en cuanto a masa, de las demás, teniendo estas igual masa  $m$  (caso m-m-M-m-m); el tercero, por la alternancia de las masas  $M$  y  $m$  de las partículas según su orden de posición a lo largo de la viga (caso M-m-M-m-M); el cuarto, por la masa  $M$  de las partículas extremas y la masa  $m$  de las restantes.

Se sigue aquí el mismo procedimiento utilizado en la sección anterior para la solución del problema de la molécula lineal de tres átomos.

Como la energía potencial no depende de las masas de las partículas, y la diferenciación de casos que se está considerando consiste precisamente en la diferencia de las masas, la matriz  $\bar{V}$  será la misma en todos los casos. En cuanto a la matriz  $\bar{T}$ , como la energía cinética depende de las masas y las velocidades, y en todos estos casos existe la restricción de que el movimiento es unidireccional, dicha matriz será escalar ocupando cada elemento  $T_{ii}$  la masa de la partícula  $i$ , siendo  $i$  el orden de colocación de la partícula. Por tanto, la matriz de la ecuación característica diferirá en cada caso en relación a las masas en la diagonal principal.

#### **Caso m-m-m-m-m**

Primeramente, se trata el caso en que todos los elementos tengan igual masa  $m$ . La matriz de

ecuación característica es

$$\begin{pmatrix} k - m\lambda & -k & 0 & 0 & 0 \\ -k & 2k - m\lambda & -k & 0 & 0 \\ 0 & -k & 2k - m\lambda & -k & 0 \\ 0 & 0 & -k & 2k - m\lambda & -k \\ 0 & 0 & 0 & -k & k - m\lambda \end{pmatrix}$$

### **Caso m-m-M-m-m**

Al tener una partícula de masa  $M$  en el centro, este caso difiere del anterior en la matriz del sistema, siendo esta

$$\begin{pmatrix} k - m\lambda & -k & 0 & 0 & 0 \\ -k & 2k - m\lambda & -k & 0 & 0 \\ 0 & -k & 2k - M\lambda & -k & 0 \\ 0 & 0 & -k & 2k - m\lambda & -k \\ 0 & 0 & 0 & -k & k - m\lambda \end{pmatrix},$$

### **Caso M-m-M-m-M**

Aquí, la matriz del sistema es

$$\begin{pmatrix} k - M\lambda & -k & 0 & 0 & 0 \\ -k & 2k - m\lambda & -k & 0 & 0 \\ 0 & -k & 2k - M\lambda & -k & 0 \\ 0 & 0 & -k & 2k - m\lambda & -k \\ 0 & 0 & 0 & -k & k - M\lambda \end{pmatrix}$$

**Caso M-m-m-m-M**

La matriz correspondiente es

$$\begin{pmatrix} k - M\lambda & -k & 0 & 0 & 0 \\ -k & 2k - m\lambda & -k & 0 & 0 \\ 0 & -k & 2k - m\lambda & -k & 0 \\ 0 & 0 & -k & 2k - m\lambda & -k \\ 0 & 0 & 0 & -k & k - M\lambda \end{pmatrix}.$$

Los casos correspondientes a las oscilaciones transversales se tratan completamente en el capítulo siguiente, incluida su formulación, debido a que, para esta, se calcula la matriz del sistema haciendo uso del programa matemática, por lo cual se ha colocado la formulación dentro de la resolución computacional.

**2.6 Problema de las oscilaciones ocasionadas en un puente por un pequeño impacto de dirección diagonal**

**2.6.1 Planteamiento del problema**

Se considera un puente soportado por dos columnas que fijan sus extremos, el cual se encuentra en reposo. Se considera también la caída, en dirección diagonal, de un objeto rígido plano, que impacta sobre el puente la superficie de una de sus caras planas, formando un ángulo  $\varphi$  en

sentido positivo con el eje horizontal de este, proporcionando las velocidades iniciales:

$$u_t(x, 0) = - \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned} 0, & \quad 0 \leq x \leq x_0 - \delta \\ v_0, & \quad x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta \\ 0, & \quad x_0 + \delta \leq x \leq l \end{aligned}$$

Se trata de encontrar la ecuación que describe las pequeñas oscilaciones del puente en el caso en que la estructura no se desplaza en el primer instante.

### 2.6.2 Ilustración del procedimiento de solución al problema básico de las oscilaciones transversales

A continuación se muestra un ejemplo del método de separación de variables de Fourier aplicado a una ecuación en derivadas parciales de tipo hiperbólico.

En [BST64, cap. II, epíg. 3.1] se plantea un problema similar a:

Un cuerpo rígido plano, al caer verticalmente sobre un puente, lo hace contactando totalmente una de sus caras planas al piso del puente, el cual tiene sus extremos soportados fijamente por dos columnas. De esta forma, le da al movimiento de la estructura la siguiente distribución inicial de velocidades:

$$\begin{aligned} u_t(x, 0) = \varphi(x) = \{ & \quad 0, \quad 0 \leq x < x_0 - \delta, \\ & \quad v_0, \quad x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta, \\ & \quad 0, \quad x_0 < x \leq l. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Hallar las vibraciones del puente si la desviación inicial es cero.

Como se puede observar, es un problema casi idéntico al que nos ocupa. Solo difiere de aquel en el hecho de que, en este caso, el impacto es totalmente transversal. Es un problema análogo al de las pequeñas vibraciones transversales de una cuerda.

Según [TS80, cap. II, epíg. 3], la energía cinética de las oscilaciones transversales en un caso análogo será

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \mu(x) [u_t(x, t)]^2 dx. \quad (2.36)$$

En ese mismo epígrafe, se presenta la energía total como

$$E = \frac{1}{2} \int_0^l [D_0(u_x)^2 + \mu(x) (u_t)^2] dx,$$

de lo cual se deduce que la energía potencial es

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l D_0 (u_x)^2 dx. \quad (2.37)$$

Luego, la lagrangiana será

$$L = T - V = \frac{1}{2} \int_0^l (\mu(x) u_t^2 - D_0 u_x^2) dx. \quad (2.38)$$

La densidad lagrangiana en este caso es

$$\iota = \frac{1}{2}(\mu(x) u_t^2 - D_0 u_x^2). \quad (2.39)$$

Entonces, sustituyendo en la ecuación análoga a 2.29 para una sola dimensión de posición, considerando  $\mu$  constante y operando algebraicamente se tiene

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad (2.40)$$

que es la ecuación del movimiento de las oscilaciones transversales, en la cual  $a = \sqrt{\frac{D_0}{\mu}}$ , donde  $D_0$  es la tensión ocasionada por la elasticidad en la cuerda,  $\mu$  es la densidad lineal de la cuerda.

Cuando se tienen las expresiones de la energía cinética y potencial, es preferible a la formulación de Newton la utilización de la formulación lagrangiana para la determinación de esta ecuación. Esto se concluye tras observar en [TS80, II.1] que por formulación newtoniana se dan los siguientes pasos: se utiliza la expresión integral de la cantidad de movimiento de un segmento de la cuerda sobre el eje horizontal, se iguala la variación de la cantidad de movimiento en un intervalo de tiempo, dada por otra expresión integral, al impulso de las fuerzas que actúan formadas por la tensión en determinados puntos, obteniendo como resultado la ecuación de las oscilaciones transversales de un elemento de la cuerda en forma integral. Se hace una suposición y se aplica dos veces el teorema del valor medio. Luego se hace un paso al límite, obteniendo así la ecuación diferencial buscada. Mientras, por formulación lagrangiana, se plantea la lagrangiana, de esta se extrae la densidad lagrangiana, la cual se sustituye en una ecuación de la formulación de medios continuos, y operando algebraicamente se obtienen las ecuaciones diferenciales. Por tanto, en este caso la formulación lagrangiana requiere menos pasos lógicos que la de Newton.

Luego, volviendo al presente problema del puente, en el cual las oscilaciones son libres (no está presente ninguna fuerza externa), la ecuación a resolver será

$$u_{tt}(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < l \tag{2.41}$$

Los extremos fijos han sido tomados como 0 y  $l$ .

Se dice que la desviación inicial del puente es cero, esto es

$$u(x, 0) = 0 \tag{2.42}$$

Las ecuaciones 2.42 y 2.35 constituyen las condiciones iniciales del problema.

El hecho de que los extremos sean fijos da las condiciones de frontera

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (2.43)$$

Aplicando el Método de Separación de Variables se supone  $u(x, t) = X(x)T(t)$ . Sustituyendo en 2.41 se obtiene  $X \frac{d^2 T}{dt^2} = a^2 T \frac{d^2 X}{dx^2}$ . Suponiendo  $X$  y  $T$  distintas de cero, tenemos la expresión anterior en dos formas:  $\frac{d^2 X}{dx^2} - \left(\frac{1}{a^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2}\right) X = 0$  y  $\frac{d^2 T}{dt^2} - \left(\frac{a^2}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}\right) T = 0$ . Haciendo  $\lambda = -\left(\frac{1}{a^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2}\right)$  y sustituyendo aquí 2.41 se tiene  $\lambda = -\frac{1}{a^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -\frac{1}{a^2 T} a^2 \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}$ , ya que  $\frac{1}{T} = \frac{a^2 \frac{d^2 X}{dx^2}}{X a^2 \frac{d^2 X}{dx^2}} = \frac{1}{X}$ . Por lo tanto,  $a^2 \lambda = -\frac{d^2 X}{dx^2}$ . Luego,  $\lambda$  relaciona  $X$  y  $T$ , por lo cual podemos hallar estas funciones por separado mediante las ecuaciones

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda X = 0 \quad (2.44)$$

y

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + a^2 \lambda T = 0 \quad (2.45)$$

La solución de 2.44, tendrá la forma

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x) \quad (2.46)$$

Utilizando las condiciones de frontera se llega a  $\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0$ , lo cual da  $\sqrt{\lambda}l = n\pi$  y luego  $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ , donde  $n \in Z$ . Tomando  $C_2 = 1$ ,  $X(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$ . Para los valores propios tratados, 2.45 tiene solución

$$T(t) = A_n \cos\left(\frac{n\pi a}{l}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi a}{l}t\right).$$

Por lo tanto,

$$u_n(x, t) = \left[ A_n \cos\left(\frac{n\pi a}{l}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi a}{l}t\right) \right] \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right). \quad (2.47)$$

Estas soluciones particulares cumplen las condiciones de frontera del problema tratado. Se plantea la solución general aplicando el principio de superposición.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \cos\left(\frac{n\pi a}{l}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi a}{l}t\right) \right] \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) \quad (2.48)$$

Partiendo de las condiciones iniciales son calculadas  $A_n$  y  $B_n$  por coeficientes de Fourier, obteniendo como solución final del problema

$$u(x, t) = \frac{4v_0 l}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi x_0}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi \delta}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi a}{l}t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right). \quad (2.49)$$

[BST64, pág. 249]

Como consecuencia lo observado en la obtención de la ecuación hiperbólica para las oscilaciones transversales, se puede concluir que la formulación lagrangiana es preferible a la de Newton para este tipo de caso.

### 2.6.3 Solución al problema planteado

Como el impacto tiene dirección diagonal, tendrá una componente vertical y otra horizontal. Luego, se procederá a buscar por separado las vibraciones transversales y las longitudinales. En este caso, el problema de las oscilaciones transversales es idéntico al resuelto en el acápite anterior, pero para que esté bien planteado es necesario determinar el valor de la velocidad inicial en la región de impacto en relación al presente problema.

En el caso de las oscilaciones longitudinales, el problema será análogo al de las vibraciones de

la barra elástica continua, cuya solución, como se vio en 2.3, está determinada por

$$\mu u_{tt} - Y u_{xx} = 0,$$

expresión que toma la forma

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

para  $a^2 = \frac{Y}{\mu}$ . Esta ecuación es de tipo hiperbólico al igual que la de las vibraciones transversales, por lo cual su solución para el caso de extremos fijos y condiciones iniciales similares a las del epígrafe anterior, tendrá la misma forma.

Lo único que difiere en las condiciones de ambos subproblemas, serán los valores de las velocidades iniciales de los puntos de la región de impacto, suceso debido a la naturaleza diagonal de este.

Para la determinación de estos valores, se supone un punto arbitrario de dicha región, y se toma como origen de un sistema de coordenadas cartesianas cuyos ejes son el horizontal del puente y el perpendicular a este. Se define como primer cuadrante el que contiene a  $v_0$ . Luego, el ángulo  $\varphi$  formado por el eje horizontal del puente y la trayectoria del objeto rígido plano estará siempre en el cuadrante opuesto (tercero). Consecuentemente, el formado por el eje transversal y esta trayectoria será  $\varphi - \frac{\pi}{2}$ . Por oposición por el vértice a este, esta misma amplitud tiene el ángulo entre el eje transversal y el vector velocidad  $v_0$ . Entonces, la componente del vector velocidad en el eje transversal es  $v \cos(\varphi - \frac{\pi}{2})$ , y el componente en el horizontal  $v_0 \sin(\varphi - \frac{\pi}{2})$ .

Denotando  $u_1$  el desplazamiento correspondiente al movimiento longitudinal, y  $u_2$  el correspondiente al transversal, los planteamientos de ambos subproblemas son:

#### Vibraciones longitudinales

$$u_{1tt} = \frac{Y}{\mu} u_{1xx}$$

con condiciones iniciales

$$u_1(x, 0) = 0$$

$$u_{1t}(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < x_0 - \delta, \\ v_0, & x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta, \\ 0, & x_0 < x \leq l. \end{cases} \quad (2.50)$$

y condiciones fronteras

$$u_1(0, t) = u_1(l, t) = 0.$$

### Vibraciones transversales

$$u_{2tt}(x, t) = \frac{T_0}{\mu} u_{2xx}(x, t)$$

con condiciones iniciales

$$u_2(x, 0) = 0$$

$$u_{2t}(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < x_0 - \delta, \\ v_0, & x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta, \\ 0, & x_0 < x \leq l. \end{cases} \quad (2.51)$$

y condiciones fronteras

$$u_2(0, t) = u_2(l, t) = 0.$$

Colocando los valores correspondientes a  $a^2$  y  $v_0$  en 2.49, se obtienen las ecuaciones de los movimientos:

$$u_1(x, t) = \frac{4v_0 l \operatorname{sen}(\varphi - \frac{\pi}{2})}{\pi^2 \sqrt{\frac{Y}{\mu}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x_0}{l}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi \delta}{l}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi \sqrt{\frac{Y}{\mu}} t}{l}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \quad (2.52)$$

$$u_2(x, t) = \frac{4v_0 l \cos(\varphi - \frac{\pi}{2})}{\pi^2 \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x_0}{l}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi \delta}{l}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} t}{l}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \quad (2.53)$$

Con esto, el movimiento oscilatorio será una función  $M : [0, l] \times [0, \infty] \rightarrow \mathfrak{R}^2$  definida así:

$$M(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t)) \quad (2.54)$$

En el caso de la deducción implícita de la ecuación hiperbólica del movimiento longitudinal, mediante formulación lagrangiana, vista en la sección relativa a la transición de sistemas discretos a continuos, este procedimiento se reduce a obtener la lagrangiana a partir de  $T$  y  $V$  para el caso discreto, y pasar al límite para el caso continuo. Mientras, por la formulación empleada en [TS80, II.2], se calcula alargamiento relativo, se pasa al límite en dos ocasiones del procedimiento, se aplica el teorema de variación de la cantidad de movimiento, se supone la existencia de derivadas segundas continuas de la función desplazamiento y se aplica el teorema del valor medio, por lo cual se considera que el procedimiento lagrangiano es más directo, y, por esto, preferible al utilizado en [?, II.2]

Por esto, y por lo dicho anteriormente en relación a la ecuación de las oscilaciones transversales, se afirma que, en este problema, la formulación lagrangiana es preferible a la de Newton.

## **2.7 Conclusiones parciales**

Como resultado de este trabajo se solucionó, mediante formulación lagrangiana, el problema de las pequeñas oscilaciones en un puente, inmediatas al impacto diagonal por parte de un objeto plano rígido. Se observa que, para este problema, la utilización de la formulación lagrangiana es preferible a la de Newton, a causa de una menor cantidad de pasos en la deducción de las ecuaciones del movimiento.

## Capítulo 3

# Cálculo de modos normales de oscilación y experimentación numérica

En este capítulo se soluciona el problema del cálculo de frecuencias de resonancia y modos normales para el problema del sistema discreto de cinco grados de libertad planteado en el capítulo 2. Para los casos correspondientes a las oscilaciones longitudinales se sigue la siguiente metodología: resolución computacional, interpretación de los resultados, calibración con experimentación numérica.

### 3.1 Metodología para abordar el cálculo de frecuencias de las resonancia y de los modos normales de oscilación

En este epígrafe se da solución a los casos de la estructura de 5 grados de libertad planteados en 2.5.3. Se parte de sus formulaciones matemáticas, las cuales son escritas y resueltas en el software Mathematica. Se interpretan los resultados obtenidos y se calibran a través de experimentaciones numéricas.

### 3.1.1 Idoneidad del software Mathematica

Para la solución de este problema se ha escogido el programa Wolfram Mathematica, en particular su versión 11.0.1.0. Este programa brinda muchas facilidades para la resolución de problemas que requieran una gran cantidad de cálculos. El tiempo de ejecución es ultrarápido. Ofrece una excelente interfaz gráfica con paletas para la escritura de distintos tipos de expresiones matemática. Además, traduce a código LaTeX las entradas y salidas. Cuenta con una amplia documentación sobre cómo usar el programa para una gran variedad de contenidos matemáticos, con ejemplos ilustrativos diversos en cada caso. Según lo apreciado, el código del programa es de fácil aprehensión cuando se estudia concentradamente. Posee tres kernels para la ejecución de las entradas, y brinda la opción de estado de kernels paralelos.

A continuación se resuelve el problema de cálculo de vibraciones libres y sus correspondientes modos normales para los casos mencionados y se interpretan los resultados obtenidos.

### 3.1.2 Resolución computacional e interpretación de resultados para las oscilaciones longitudinales

#### Caso m-m-m-m-m

La matriz de la ecuación característica de este problema se representa en código matemática por las líneas de código

$$m5 = k - (\lambda) * m, -k, 0, 0, 0, -k, 2k - \lambda * m, -k, 0, 0, 0, -k, 2 * k - \lambda * m, -k, 0, 0, 0, -k, 2 * k - \lambda * m, -k, 0, 0, 0$$

En código Mathematica, el comando de solución de la ecuación característica se escribe

```
Solve[Det[m5] == 0, λ]
```

lo cual da como salida

$$\left\{ \left\{ \lambda \rightarrow 0 \right\}, \left\{ \lambda \rightarrow \frac{3k - \sqrt{5}k}{2m} \right\}, \left\{ \lambda \rightarrow \frac{5k - \sqrt{5}k}{2m} \right\}, \left\{ \lambda \rightarrow \frac{\sqrt{5}k + 3k}{2m} \right\}, \left\{ \lambda \rightarrow \frac{\sqrt{5}k + 5k}{2m} \right\} \right\}$$

que es el conjunto de raíces correspondientes a las vibraciones libres. Para calcular los modos normales correspondientes a cada frecuencia dada por  $\lambda_j$ , se crea una nueva función que resuelve cada sistema de variables  $a_{ij}$  correspondientes. Esta es

$$\text{ModoNormal}[\lambda\_ ] := \text{Solve}[(k - \lambda * m) * a1 - k * a2 == 0 \wedge -k * a1 + (2k - \lambda * m)a2 - k * a3 == 0 \wedge -k * a2 + (2k - \lambda * m)a3 - k * a4 == 0 \wedge -k * a3 + (2k - \lambda * m)a4 - k * a5 == 0 \wedge -k * a4 + (k - \lambda * m)a5 == 0 \wedge m * (a1^2 + a2^2 + a3^2 + a4^2 + a5^2) == 1, a1, a2, a3, a4, a5]$$

Con el fin de evaluar cada frecuencia en la función `ModoNormal`, se declaran los siguientes valores  $\lambda 1 := 0$

$$\lambda 2 := \frac{3k - \sqrt{5}k}{2m}$$

$$\lambda 3 := \frac{5k - \sqrt{5}k}{2m}$$

$$\lambda 4 := \frac{\sqrt{5}k + 3k}{2m}$$

$$\lambda 5 := \frac{\sqrt{5}k + 5k}{2m}$$

Calculando el modo normal correspondiente a  $\lambda_1$  tenemos

$$\text{ModoNormal}[\lambda 1]$$

$$\left\{ \left\{ a1 \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{m}}, a2 \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{m}}, a3 \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{m}}, a4 \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{m}}, a5 \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{m}} \right\}, \left\{ a1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{m}}, a2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{m}}, a3 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{m}}, a4 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{m}}, a5 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{m}} \right\} \right\}.$$

Este modo normal, a semejanza del primero hallado en el caso de la molécula triatómica lineal, corresponde a la traslación de toda la molécula sobre su eje.

A partir de este modo, se puede observar que todas las salidas ofrecen dos conjuntos solución. Se puede comprobar, en todos estos casos que se presentan, que cada conjunto solución está

formado por los opuestos de los elementos que tienen su misma posición en el otro conjunto. Como el movimiento es oscilatorio, el desplazamiento cambia periódicamente de sentido respecto a la posición de equilibrio, por lo cual los dos conjuntos describen la misma vibración componente. Luego, se puede elegir uno de los dos conjuntos como representante del modo.

Para  $\lambda_2 = \frac{3k - \sqrt{5}k}{2m} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \left(\frac{k}{m}\right)$ , se tiene

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 \rightarrow -\frac{1}{4}i \left( \frac{\sqrt{10(3-\sqrt{5})}}{\sqrt{(\sqrt{5}-5)m}} + \frac{\sqrt{2(3-\sqrt{5})}}{\sqrt{(\sqrt{5}-5)m}} \right), a_2 \rightarrow -\frac{i\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2\sqrt{5}m-10m}}, a_3 \rightarrow 0, a_4 \rightarrow \frac{i\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2\sqrt{5}m-10m}}, a_5 \rightarrow \frac{i\sqrt{2(3-\sqrt{5})}}{(\sqrt{5}-1)\sqrt{(\sqrt{5}-5)m}} \end{array} \right\},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 \rightarrow \frac{1}{4}i \left( \frac{\sqrt{10(3-\sqrt{5})}}{\sqrt{(\sqrt{5}-5)m}} + \frac{\sqrt{2(3-\sqrt{5})}}{\sqrt{(\sqrt{5}-5)m}} \right), a_2 \rightarrow \frac{i\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2\sqrt{5}m-10m}}, a_3 \rightarrow 0, a_4 \rightarrow -\frac{i\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2\sqrt{5}m-10m}}, a_5 \rightarrow -\frac{i\sqrt{2(3-\sqrt{5})}}{(\sqrt{5}-1)\sqrt{(\sqrt{5}-5)m}} \end{array} \right\}$$

Salta a la vista de forma especial ver el término  $i$  como factor de cada amplitud relativa. Por esto se procede a simplificar la expresión de cada amplitud mediante el comando N (hecho con el fin de obtener el valor numérico del argumento).

$$a_{12} = N \left[ -\frac{1}{4}i \left( \frac{\sqrt{2(3-\sqrt{5})}}{\sqrt{(\sqrt{5}-5)m}} + \frac{\sqrt{10(3-\sqrt{5})}}{\sqrt{(\sqrt{5}-5)m}} \right) \right]$$

$$= \frac{0. + 0,601501i}{\sqrt{-m}}$$

Luego  $a_{12} = -\frac{0. + 0,601501i}{\sqrt{-m}} = -\frac{0,601501}{\sqrt{m}}$ . Análogamente, procediendo de igual forma para las demás amplitudes relativas,  $a_{22} = -\frac{0,371748}{\sqrt{m}}$ ,  $a_{32} = 0$ ,  $a_{42} = \frac{0,371748}{\sqrt{m}}$  y  $a_{52} = \frac{0,601501}{\sqrt{m}}$ . Sacando factor común  $\frac{1}{\sqrt{m}}$  y anexándolo al valor  $C_2$ , se pueden dar las amplitudes relativas mediante los números  $-0,601501, -0,371748, 0, 0, 371748$  y  $0,601501$  respectivamente.

Interpretando estos resultados, se dice que, en este modo, las partículas 1 y 2 oscilan en un mismo sentido con amplitudes relativas  $0,601501$  y  $0,371748$  respectivamente, en oposición de fase con la 5 y la 4, las cuales oscilan con las amplitudes de 1 y 2 respectivamente; mientras, la partícula central se mantiene en reposo.

Para hallar los restantes modos normales se procede de forma semejante. Esto da los siguientes resultados.

Para  $\lambda_3 = \frac{5k - \sqrt{5}k}{2m} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \left(\frac{k}{m}\right)$ , las partículas 1 y 5 oscilan en un sentido con amplitud relativa  $0,511667$ , mientras que las restantes lo hacen en oposición de fase a estas con amplitudes

0,19544, en el caso de 2 y 4, y 0,632456, en el caso de la central.

Para  $\lambda_4 = \frac{3k+\sqrt{5}k}{2m} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \left(\frac{k}{m}\right)$ , la partícula central se mantiene en reposo, las partículas 1 y 4 oscilan en una misma fase con respectivas amplitudes 0,371748 y 0,601501, mientras que en fase contraria lo hacen la 5, con la amplitud de la primera, y la cuarta, con la amplitud de la segunda.

Para  $\lambda_5 = \frac{5k+\sqrt{5}k}{2m} = \frac{5+\sqrt{5}}{2} \left(\frac{k}{m}\right)$ , las partículas 1, 3 y 5 oscilan en una misma fase, las extremas con amplitud 0,19544 y la tercera con 0,632456; las restantes lo hacen en oposición de fase a las anteriores con amplitud 0,511667.

### Caso m-m-M-m-m

En este caso, la matriz de la ecuación característica se declara en Mathematica como

$$m5 = \{ \{k - (\lambda)*m, -k, 0, 0, 0\}, \{-k, 2k - \lambda*m, -k, 0, 0\}, \{0, -k, 2*k - \lambda*m, -k, 0\}, \{0, 0, -k, 2*k - \lambda*m, -k\}, \{0, 0, 0, -k, k - \lambda*m\} \}$$

Así, el conjunto de raíces de la ecuación característica será

$$\left\{ \left\{ \lambda \rightarrow 0 \right\}, \left\{ \lambda \rightarrow \frac{3k-\sqrt{5}k}{2m} \right\}, \left\{ \lambda \rightarrow \frac{\sqrt{5}k+3k}{2m} \right\}, \left\{ \lambda \rightarrow \frac{-km\sqrt{4m^2-4mM+5M^2+2km^2+3kmM}}{2m^2M} \right\}, \left\{ \lambda \rightarrow \frac{km\sqrt{4m^2-4mM+5M^2+2km^2+3kmM}}{2m^2M} \right\} \right\}$$

Ahora, el sistema a resolver para cada frecuencia se expresa mediante la función

$$\begin{aligned} \text{ModoNormal}(\lambda\_):=& \text{Solvea1}(k - \lambda m) - a2k = 0 \ \&\& \ a1(-k) + a2(2k - \lambda m) - a3k = 0 \wedge a2(-k) + \\ & a3(2k - \lambda M) \\ & -a4k = 0 \ \&\& \ a3(-k)+a4(2k-\lambda m)-a5k = 0 \ \&\& \ a5(k-\lambda m)-a4k = 0 \ \&\& \ m(a1^2 + a2^2 + a4^2 + a5^2)+ \\ & a3^2M = 1, \{a1, a2, a3, a4, a5\} \end{aligned}$$

Para los primeros tres modos se procede de forma semejante que en el caso anterior.

Para  $\lambda_1 = 0$  se obtiene una traslación uniforme.

Para  $\lambda_2 = \frac{3k-\sqrt{5}k}{2m} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \left(\frac{k}{m}\right)$ , la partícula de masa  $M$  se mantiene en reposo, 1 y 2 oscilan en una misma fase con amplitudes 0,601501 y 0,371478; mientras que 5 y 4 oscilan con iguales

amplitudes (igualdad en este orden) a las anteriores, pero en fase contraria.

Para  $\lambda_3 = \frac{3k+\sqrt{5}k}{2m} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \left(\frac{k}{m}\right)$ , la partícula de masa  $M$  se mantiene en reposo, 1 y 5 oscilan en oposición de fase entre ellas con amplitud 0,371748; mientras, con amplitud 0,601501 y en oposición de fase entre ellas, lo hacen 2 y 4 en sentidos contrarios a 1 y 5 respectivamente.

Hasta aquí, en este caso, todo ha transcurrido sin grandes dificultades, ya que, como se puede observar en las siguientes líneas, el primer modo normal tiene iguales amplitudes para todas las partículas, y en los otros dos, las amplitudes están solamente en función de  $m$ .

ModoNormal( $\lambda_1$ )

$$\left\{ \left\{ a_1 \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{4m+M}}, a_2 \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{4m+M}}, a_3 \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{4m+M}}, a_4 \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{4m+M}}, a_5 \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{4m+M}} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ a_1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{4m+M}}, a_2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{4m+M}}, a_3 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{4m+M}}, a_4 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{4m+M}}, a_5 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{4m+M}} \right\} \right\}$$

ModoNormal( $\lambda_2$ )

$$\left\{ \left\{ a_1 \rightarrow -\frac{1}{4}i \left( \frac{\sqrt{2(3-\sqrt{5})}}{\sqrt{(\sqrt{5}-5)m}} + \frac{\sqrt{10(3-\sqrt{5})}}{\sqrt{(\sqrt{5}-5)m}} \right), a_2 \rightarrow -\frac{i\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2\sqrt{5}m-10m}}, a_3 \rightarrow 0, a_4 \rightarrow \frac{i\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2\sqrt{5}m-10m}}, a_5 \rightarrow \frac{i\sqrt{2(3-\sqrt{5})}}{(\sqrt{5}-1)\sqrt{(\sqrt{5}-5)m}} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ a_1 \rightarrow \frac{1}{4}i \left( \frac{\sqrt{2(3-\sqrt{5})}}{\sqrt{(\sqrt{5}-5)m}} + \frac{\sqrt{10(3-\sqrt{5})}}{\sqrt{(\sqrt{5}-5)m}} \right), a_2 \rightarrow \frac{i\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2\sqrt{5}m-10m}}, a_3 \rightarrow 0, a_4 \rightarrow -\frac{i\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2\sqrt{5}m-10m}}, a_5 \rightarrow -\frac{i\sqrt{2(3-\sqrt{5})}}{(\sqrt{5}-1)\sqrt{(\sqrt{5}-5)m}} \right\} \right\}$$

ModoNormal( $\lambda_3$ )

$$\left\{ \left\{ a_1 \rightarrow \frac{1}{4} \left( \frac{\sqrt{\frac{10(\sqrt{5}+3)}{\sqrt{5}+5}}}{\sqrt{m}} - \frac{\sqrt{\frac{2(\sqrt{5}+3)}{\sqrt{5}+5}}}{\sqrt{m}} \right), a_2 \rightarrow -\frac{\sqrt{\sqrt{5}+3}}{\sqrt{2\sqrt{5}m+10m}}, a_3 \rightarrow 0, a_4 \rightarrow \frac{\sqrt{\sqrt{5}+3}}{\sqrt{2\sqrt{5}m+10m}}, a_5 \rightarrow \frac{\sqrt{\frac{2(\sqrt{5}+3)}{\sqrt{5}+5}}}{(-\sqrt{5}-1)\sqrt{m}} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ a_1 \rightarrow \frac{1}{4} \left( \frac{\sqrt{\frac{2(\sqrt{5}+3)}{\sqrt{5}+5}}}{\sqrt{m}} - \frac{\sqrt{\frac{10(\sqrt{5}+3)}{\sqrt{5}+5}}}{\sqrt{m}} \right), a_2 \rightarrow \frac{\sqrt{\sqrt{5}+3}}{\sqrt{2\sqrt{5}m+10m}}, a_3 \rightarrow 0, a_4 \rightarrow -\frac{\sqrt{\frac{2(\sqrt{5}+3)}{\sqrt{5}+5}}}{\sqrt{m}}, a_5 \rightarrow \frac{\sqrt{\frac{2(\sqrt{5}+3)}{\sqrt{5}+5}}}{(\sqrt{5}+1)\sqrt{m}} \right\} \right\}$$

A partir del cuarto modo normal, las salidas del programa contienen expresiones de las amplitudes relativas muy engorrosas, por lo cual se hace complicado determinar el sentido de las oscilaciones. Por esto, se evalúan las salidas de las amplitudes para los valores  $M = 5$  y  $m = 1$ , y se interpretan los resultados para estos casos particulares.

Haciendo esto para  $\lambda_4 = \frac{-km\sqrt{4m^2-4mM+5M^2+2km^2+3kmM}}{2m^2M}$ , se tiene que el valor numérico de la frecuencia es 0,655969k, y las amplitudes relativas son

$\{a_1 \rightarrow -0,521155, a_2 \rightarrow -0,179293, a_3 \rightarrow 0,280179, a_4 \rightarrow -0,179293, a_5 \rightarrow -0,521155\}$ .

Interpretando estos resultados, se observa que, para una vibración libre  $0,655969 k$ , las partículas de masa  $m = 1$  oscilan en un mismo sentido, las del extremos con amplitud relativa  $0,521155$ , y las próximas a la partícula del centro con amplitud relativa  $0,179293$ . Mientras, en sentido contrario oscila la partícula de masa  $M = 5$ , con amplitud relativa  $0,280179$ .

Para  $\lambda_5 = \frac{km\sqrt{4m^2-4mM+5M^2+2km^2+3kmM}}{2m^2M}$ , el valor numérico de esta frecuencia de resonancia es  $2,74403 k$ . Los valores de las amplitudes relativas están dados en

$\{a_1 \rightarrow -0,342471, a_2 \rightarrow 0,597279, a_3 \rightarrow -0,101923, a_4 \rightarrow 0,597279, a_5 \rightarrow -0,342471\}$ .

Esto significa que las partículas 1, 3 y 5 oscilan en oposición de fase a las restantes, estas últimas lo hacen con igual amplitud  $0,597279$ , mientras la amplitud correspondiente a las partículas de los extremos es  $0,342471$ , y la de partícula de masa  $M = 5$  será  $0,101923$ .

### Caso M-m-M-m-M

La matriz del sistema entra al software con el código

$m5 = \{\{k - (\lambda) * M, -k, 0, 0, 0\}, \{-k, 2k - \lambda * m, -k, 0, 0\}, \{0, -k, 2 * k - \lambda * M, -k, 0\}, \{0, 0, -k, 2 * k - \lambda * m, -k\}, \{0, 0, 0, -k, k - \lambda * M\}\}$ .

Luego, el conjunto solución de la ecuación característica será

$\{\{\lambda \rightarrow 0\}, \left\{\lambda \rightarrow \frac{-k\sqrt{m^2+4M^2+km+2kM}}{2mM}\right\}, \left\{\lambda \rightarrow \frac{k\sqrt{m^2+4M^2+km+2kM}}{2mM}\right\}, \left\{\lambda \rightarrow \frac{-kM\sqrt{m^2+4M^2+3kmM+2kM^2}}{2mM^2}\right\}, \left\{\lambda \rightarrow \frac{kM\sqrt{m^2+4M^2+3kmM+2kM^2}}{2mM^2}\right\}\}$ .

Valores que se declaran en la forma

$\lambda_1:=0$

$$\lambda_2 := \frac{-k\sqrt{m^2+4M^2}+km+2kM}{2mM}$$

$$\lambda_3 := \frac{k\sqrt{m^2+4M^2}+km+2kM}{2mM}$$

$$\lambda_4 := \frac{-kM\sqrt{m^2+4M^2}+3kmM+2kM^2}{2mM^2}$$

$$\lambda_5 := \frac{kM\sqrt{m^2+4M^2}+3kmM+2kM^2}{2mM^2}$$

Para dar solución al problema de los modos normales, la función ModoNormal será en este caso

$$\begin{aligned} \text{ModoNormal}(\lambda_2) := & \text{Solve}[a_1(k - \lambda_2 M) - a_2 k = 0 \ \&\& \ a_1(-k) + a_2(2k - \lambda_2 m) - a_3 k = 0 \ \&\& \\ & a_2(-k) + a_3(2k - \lambda_2 M) - a_4 k = 0 \ \&\& \ a_3(-k) + a_4(2k - \lambda_2 m) - a_5 k = 0 \ \&\& \ a_5(k - \lambda_2 M) - a_4 k = \\ & 0 \ \&\& \ M(a_1^2 + a_3^2 + a_5^2) + m(a_2^2 + a_4^2) = 1, \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}] \end{aligned}$$

Evaluando para la primera frecuencia ( $\lambda_1 = 0$ ), se tiene

$$\left\{ \left\{ a_1 \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2m+3M}}, a_2 \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2m+3M}}, a_3 \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2m+3M}}, a_4 \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2m+3M}}, a_5 \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2m+3M}} \right\}, \left\{ a_1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2m+3M}}, a_2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2m+3M}}, a_3 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2m+3M}}, a_4 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2m+3M}}, a_5 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2m+3M}} \right\} \right\},$$

lo cual corresponde, como en los demás casos, al movimiento de traslación uniforme sobre el eje horizontal.

A partir del segundo modo normal, las expresiones que arroja la función ModoNormal son complicadas para hallar los sentidos relativos con que oscilan las partículas, por lo cual se da al problema el mismo tratamiento que se dio en el caso anterior. También  $m$  y  $M$  toman en este caso los valores 1 y 5 respectivamente.

$\lambda_2 = \frac{-k\sqrt{m^2+4M^2}+km+2kM}{2mM}$  toma así el valor  $0,0950124k$ . Las amplitudes relativas del segundo modo normal son así

$$\{a_1 \rightarrow -0,307858, a_2 \rightarrow -0,161606, a_3 \rightarrow 0., a_4 \rightarrow 0,161606, a_5 \rightarrow 0,307858\},$$

de lo cual se observa que las partículas 1 y 2 oscilan con las mismas amplitudes que, y en oposición de fase a las partículas 5 y 1 respectivamente. 1 y 5 con amplitud relativa 0,307858, 2 y 4 con amplitud relativa 0,161606. Mientras tanto, la partícula de mayor masa se mantiene

en reposo.

$\lambda_3 = \frac{k\sqrt{m^2+4M^2+km+2kM}}{2mM}$  toma valor  $2,10499k$ . Para esta vibración libre, el tercer modo normal tendrá las amplitudes relativas

$$\{a_1 \rightarrow 0,0722726, a_2 \rightarrow -0,688392, a_3 \rightarrow 0., a_4 \rightarrow 0,688392, a_5 \rightarrow -0,0722726\}.$$

Entonces se dice que las partículas 1 y 4 oscilan con las mismas amplitudes que, y en oposición de fase a 5 y 2 respectivamente. 1 y 5 lo hacen con amplitud relativa 0,0722726, 2 y 4 con 0,688392. La partícula central se mantiene en reposo.

La frecuencia de resonancia  $\lambda_4 = \frac{-kM\sqrt{m^2+4M^2+3kmM+2kM^2}}{2mM^2}$  será en específico  $0,295012k$ . El cuarto modo normal tendrá amplitudes relativas

$$\{a_1 \rightarrow -0,193054, a_2 \rightarrow 0,0917125, a_3 \rightarrow 0,349422, a_4 \rightarrow 0,0917125, a_5 \rightarrow -0,193054\}.$$

Así, en este modo las partículas extremas oscilan con igual amplitud relativa 0,193054 y en la misma fase; mientras que en fase contraria lo hacen las restantes: 2 y 4 con amplitud relativa 0,0917125, y la partícula de mayor masa con 0,349422.

$\lambda_5 = \frac{kM\sqrt{m^2+4M^2+3kmM+2kM^2}}{2mM^2}$  toma valor  $2,30499k$ . El modo normal correspondiente tendrá amplitudes relativas

$$\{a_1 \rightarrow 0,0625038, a_2 \rightarrow -0,657849, a_3 \rightarrow 0,138132, a_4 \rightarrow -0,657849, a_5 \rightarrow 0,0625038\}$$

Las partículas 2 y 4 oscilan aquí en una misma fase y con 0,657849 unidades de amplitud relativa. Mientras, en fase contraria lo hacen las extremas, con 0,0625038, y la central, con 0,138132.

### **Caso M-m-m-m-M**

En el software Mathematica, la correspondiente matriz será escrita de la forma

$$m5 = \{\{k - (\lambda) * M, -k, 0, 0, 0\}, \{-k, 2k - \lambda * m, -k, 0, 0\}, \{0, -k, 2 * k - \lambda * m, -k, 0\}, \{0, 0, -k, 2 * k - \lambda * m, -k\}, \{0, 0, 0, -k, k - \lambda * M\}\}.$$

El conjunto solución de la ecuación característica es, en este caso,

$$\{\{\lambda \rightarrow 0\}, \{\lambda \rightarrow \frac{-k\sqrt{m^2+4M^2}+km+2kM}{2mM}\}, \{\lambda \rightarrow \frac{k\sqrt{m^2+4M^2}+km+2kM}{2mM}\}, \{\lambda \rightarrow \frac{-km\sqrt{m^2-4mM+8M^2}+km^2+4kmM}{2m^2M}\}, \{\lambda \rightarrow \frac{km\sqrt{m^2-4mM+8M^2}+km^2+4kmM}{2m^2M}\}\}.$$

Se declaran entonces los valores

$$\lambda_1:=0$$

$$\lambda_2:=\frac{-k\sqrt{m^2+4M^2}+km+2kM}{2mM}$$

$$\lambda_3:=\frac{k\sqrt{m^2+4M^2}+km+2kM}{2mM}$$

$$\lambda_4:=\frac{-km\sqrt{m^2-4mM+8M^2}+km^2+4kmM}{2m^2M}$$

$$\lambda_5:=\frac{km\sqrt{m^2-4mM+8M^2}+km^2+4kmM}{2m^2M},$$

para ser evaluados en la función siguiente:

$$\text{ModoNormal}(\lambda_1):=\text{Solve}[a_1(k - \lambda M) - a_2k = 0 \&\& a_1(-k) + a_2(2k - \lambda m) - a_3k = 0 \&\& a_2(-k) + a_3(2k - \lambda m) - a_4k = 0 \&\& a_3(-k) + a_4(2k - \lambda m) - a_5k = 0 \&\& a_5(k - \lambda M) - a_4k = 0 \&\& M(a_1^2 + a_5^2) + m(a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) = 1, \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}].$$

Evaluando para el primer valor, se tiene

$$\text{ModoNormal}(\lambda_1)$$

$$\{\{a_1 \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3m+2M}}, a_2 \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3m+2M}}, a_3 \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3m+2M}}, a_4 \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3m+2M}}, a_5 \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3m+2M}}\}, \{a_1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3m+2M}}, a_2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3m+2M}}, a_3 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3m+2M}}, a_4 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3m+2M}}, a_5 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3m+2M}}\}\}$$

Así, también aquí el primer modo normal consistirá en la traslación uniforme sobre el eje de los desplazamientos horizontales.

En este caso, también se complican las expresiones de las amplitudes relativas a partir del

segundo modo normal. Realizando el mismo procedimiento que anteriormente, con los mismos valores para  $M$  y  $m$ , se obtienen los siguientes resultados.

$\lambda_2 = \frac{-k\sqrt{m^2+4M^2}+km+2kM}{2mM}$  toma el valor  $0,0950124k$ . Para esta frecuencia de resonancia, el modo normal correspondiente tiene amplitudes relativas

$$\{a_1 \rightarrow -0,307858, a_2 \rightarrow -0,161606, a_3 \rightarrow 0., a_4 \rightarrow 0,161606, a_5 \rightarrow 0,307858\}.$$

Se observa aquí que las partículas 1 y 2 se mueven en la misma fase, con  $0,307858$  y  $0,161606$  unidades de amplitud relativa respectivamente. En fase lo hacen 5 y 4, con iguales amplitudes a 1 y 2 respectivamente. La partícula del centro se mantiene en reposo.

$\lambda_3 = \frac{k\sqrt{m^2+4M^2}+km+2kM}{2mM}$  se transforma en  $2,10499k$ . Para este valor, las amplitudes relativas serán

$$\{a_1 \rightarrow 0,0722726, a_2 \rightarrow -0,688392, a_3 \rightarrow 0., a_4 \rightarrow 0,688392, a_5 \rightarrow -0,0722726\}$$

Se observa que, en este modo normal, las partículas 1 y 4 oscilan en una misma fase, con  $0,0722726$  y  $0,688392$  unidades de amplitud relativa respectivamente. En fase contraria lo hacen 5 y 2. En estas cuatro partículas se cumple que, a iguales masas corresponden iguales amplitudes de oscilación, propiedad que también se cumple en el modo anterior. La partícula 3 se mantiene en reposo.

La vibración libre  $\lambda_4 = \frac{-km\sqrt{m^2-4mM+8M^2}+km^2+4kmM}{2m^2M}$  toma el valor  $0,754638k$ . Para ella se obtienen las amplitudes relativas

$$\{a_1 \rightarrow -0,148715, a_2 \rightarrow 0,412414, a_3 \rightarrow 0,66232, a_4 \rightarrow 0,412414, a_5 \rightarrow -0,148715\}.$$

En este modo, las partículas de masa  $M = 5$  se mueven en la misma fase con  $0,148715$  unidades de amplitud relativa. Las restantes se mueven en fase contraria a las de masa  $M = 5$ . La del

centro lo hace con 0,66232, y las adyacentes a esta, con 0,412414.

$\lambda_5 = \frac{km\sqrt{m^2-4mM+8M^2+km^2+4kmM}}{2m^2M}$  se transforma en 3,44536k. Entonces las amplitudes relativas de este modo serán

$$\{a_1 \rightarrow -0,030997, a_2 \rightarrow 0,502983, a_3 \rightarrow -0,695995, a_4 \rightarrow 0,502983, a_5 \rightarrow -0,030997\}.$$

Aquí las partículas de orden impar oscilan en una misma fase. Las del extremo, que tienen masa  $M = 5$ , con 0,030997 unidad de amplitud relativa, y la del centro, de masa  $m = 1$ , con 0,695995. En fase contraria lo hacen las restantes, que tienen igual masa que la del centro, con amplitud relativa de 0,502983.

### **Observaciones**

En cada caso se observan cinco tipos de modos, diferentes en cuanto a la distribución de las partículas relativa al sentido de la fase de sus oscilaciones.

La traslación uniforme se tiene en todos los casos. Se observa que los casos m-m-m-m-m y m-m-M-m-m tienen en común los dos modos normales en los cuales la partícula central permanece en reposo. Esto mismo sucede con los casos M-m-M-m-M y M-m-m-m-M. Excepto en el caso m-m-m-m-m, los modos normales en los cuales la partícula central está en movimiento, sin contar las traslaciones uniformes, cumplen a la vez que no se repiten y que presentan valores diferentes de amplitudes y frecuencia con respecto a los demás modos.

En relación a los modos segundo y cuarto (por orden de exposición) del caso m-m-m-m-m (equivalentes a los segundo y tercero del caso m-m-M-m-m respectivamente), las partículas 1 y 2 intercambian las amplitudes de sus oscilaciones, como también lo hacen 4 y 5. Análogamente sucede esto en los modos tercero y quinto del primer caso. En estos últimos, la partícula central oscila con la misma amplitud.

### 3.1.3 Calibración y experimentación numérica

En este acápite se observa cómo varían las frecuencias de resonancia y los modos normales, al ser alterados los valores de la rigidez y de las masas. Primeramente se considera el caso m-m-m-m-m. Se evalúan sus modos normales para  $m = 1$  y  $k = 5$ . Concretamente, la matriz  $m_5$  será entonces,

$$\begin{pmatrix} 5 - \lambda & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 10 - \lambda & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 10 - \lambda & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 10 - \lambda & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 - \lambda \end{pmatrix}$$

Como resultado del procesamiento en el software Mathematica, las frecuencias de resonancias obtenidas son

$$\left\{ \left\{ \lambda \rightarrow 0 \right\}, \left\{ \lambda \rightarrow \frac{5}{2} (3 - \sqrt{5}) \right\}, \left\{ \lambda \rightarrow \frac{5}{2} (5 - \sqrt{5}) \right\}, \left\{ \lambda \rightarrow \frac{5}{2} (\sqrt{5} + 3) \right\}, \left\{ \lambda \rightarrow \frac{5}{2} (\sqrt{5} + 5) \right\} \right\}.$$

Asignando sucesivamente estos valores a  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  y  $\lambda_5$  y evaluando cada asignación en el comando N (valor numérico, se obtienen sucesivamente los valores aproximados 0, 1.90983, 6.90983, 13.0902 y 18.0902.

Calculando las expresiones numéricas decimales de las amplitudes relativas se tiene

$N[\text{ModoNormal}(\lambda_1)]$

$\{\{a_1 \rightarrow -0,447214, a_2 \rightarrow -0,447214, a_3 \rightarrow -0,447214, a_4 \rightarrow -0,447214, a_5 \rightarrow -0,447214\}, \{a_1 \rightarrow 0,447214, a_2 \rightarrow 0,447214, a_3 \rightarrow 0,447214, a_4 \rightarrow 0,447214, a_5 \rightarrow 0,447214\}\}$

$N[\text{ModoNormal}(\lambda_2)]$

$\{\{a_1 \rightarrow -0,601501, a_2 \rightarrow -0,371748, a_3 \rightarrow 0., a_4 \rightarrow 0,371748, a_5 \rightarrow 0,601501\}, \{a_1 \rightarrow 0,601501, a_2 \rightarrow 0,371748, a_3 \rightarrow 0., a_4 \rightarrow -0,371748, a_5 \rightarrow -0,601501\}\}$

$N[\text{ModoNormal}(\lambda 3)]$

$\{\{a1 \rightarrow 0,511667, a2 \rightarrow -0,19544, a3 \rightarrow -0,632456, a4 \rightarrow -0,19544, a5 \rightarrow 0,511667\}, \{a1 \rightarrow -0,511667, a2 \rightarrow 0,19544, a3 \rightarrow 0,632456, a4 \rightarrow 0,19544, a5 \rightarrow -0,511667\}\}$

$N[\text{ModoNormal}(\lambda 4)]$

$\{\{a1 \rightarrow 0,371748, a2 \rightarrow -0,601501, a3 \rightarrow 0., a4 \rightarrow 0,601501, a5 \rightarrow -0,371748\}, \{a1 \rightarrow -0,371748, a2 \rightarrow 0,601501, a3 \rightarrow 0., a4 \rightarrow -0,601501, a5 \rightarrow 0,371748\}\}$

$N[\text{ModoNormal}(\lambda 5)]$

$\{\{a1 \rightarrow 0,19544, a2 \rightarrow -0,511667, a3 \rightarrow 0,632456, a4 \rightarrow -0,511667, a5 \rightarrow 0,19544\}, \{a1 \rightarrow -0,19544, a2 \rightarrow 0,511667, a3 \rightarrow -0,632456, a4 \rightarrow 0,511667, a5 \rightarrow -0,19544\}\}$

Ahora, se intentará averiguar cómo se transforman los modos normales cuando la masa de la partícula central aumenta en 0.05. Para ello, primeramente se hace la asignación

$\epsilon:=0,05$

y se declara la matriz  $m5$  como

$m5 = \{\{k - (\lambda) * m, -k, 0, 0, 0\}, \{-k, 2k - \lambda * m, -k, 0, 0\}, \{0, -k, 2 * k - \lambda * (m + \epsilon), -k, 0\}, \{0, 0, -k, 2 * k - \lambda * m, -k\}, \{0, 0, 0, -k, k - \lambda * m\}\}$

Esta se representa así:

$$m5 = \begin{pmatrix} k - \lambda m & -k & 0 & 0 & 0 \\ -k & 2k - \lambda m & -k & 0 & 0 \\ 0 & -k & 2k - \lambda(m + \epsilon) & -k & 0 \\ 0 & 0 & -k & 2k - \lambda m & -k \\ 0 & 0 & 0 & -k & k - \lambda m \end{pmatrix}.$$

Como raíces de la ecuación característica se obtienen los valores propios

$$\{\{\lambda \rightarrow 0. + 0.i\}, \{\lambda \rightarrow 1,90983\}, \{\lambda \rightarrow 6,77408\}, \{\lambda \rightarrow 13,0902\}, \{\lambda \rightarrow 17,7497\}\}.$$

Al copiar y pegar cada uno para la asignación, esta quedará como sigue.

$$\lambda_1:=0. + 0.i'$$

$$\lambda_2:=1,90983'$$

$$\lambda_3:=6,77408'$$

$$\lambda_4:=13,0902'$$

$$\lambda_5:=17,7497'$$

Aquí el software expresa la inexactitud de estas expresiones. Los valores dados como raíces de la ecuación características son solo aproximaciones.

La función ModoNormal se transforma en relación a la nueva matriz m5, tomando el formato

$$\text{ModoNormal}(\lambda\_):=\text{Solve}[a_1(k - \lambda m) - a_2k = 0 \& \& a_1(-k) + a_2(2k - \lambda m) - a_3k = 0 \& \& a_2(-k) + a_3(2k - \lambda(m + \epsilon)) - a_4k = 0 \& \& a_3(-k) + a_4(2k - \lambda m) - a_5k = 0 \& \& a_5(k - \lambda m) - a_4k = 0 \& \& m(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2) = 1, \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}].$$

Al intentar hallar el valor numérico de la respuesta de esta función para  $\lambda_1$ , el software notifica que el comando Solve fue incapaz de resolver el sistema utilizando coeficientes inexactos, que por esto resolvió un sistema exacto correspondiente. Así arrojó la respuesta

$$\{\{a_1 \rightarrow -0,447214, a_2 \rightarrow -0,447214, a_3 \rightarrow -0,447214, a_4 \rightarrow -0,447214, a_5 \rightarrow -0,447214\}, \{a_1 \rightarrow 0,447214,$$

Para los restantes modos, N arroja como respuesta un conjunto vacío, lo cual da lugar a pensar

que el sistema exacto al cual aproximó el sistema entrante es no soluble. Por esto, se busca otra vía para hacer el cálculo de las amplitudes relativas.

Favorablemente, se observa que, al aumentar en 0.5 la masa de la partícula central, el caso m-m-m-m se transforma en el m-m-M-m-m, donde  $M = m + \epsilon$ . Luego,  $M = 1,5$ . Entonces bastará evaluar los resultados obtenidos en el caso m-m-M-m-m para los parámetros  $k:=5$

$$m:=1$$

$$\epsilon:=0,05$$

$$M:=m + \epsilon$$

Así se obtienen los siguientes modos normales:

La frecuencia de resonancia  $\lambda_1 = 0$  con amplitudes relativas  $\{a_1 \rightarrow 0,444994, a_2 \rightarrow 0,444994, a_3 \rightarrow 0,444994, a_4 \rightarrow 0,444994, a_5 \rightarrow 0,444994\}$ .

$\lambda_2 = 1,90983$  con  $\{a_1 \rightarrow 0,601501 + 0.i, a_2 \rightarrow 0,371748, a_3 \rightarrow 0., a_4 \rightarrow -0,371748, a_5 \rightarrow -0,601501\}$ .

$\lambda_3 = 13,0902$  con  $\{a_1 \rightarrow -0,371748, a_2 \rightarrow 0,601501, a_3 \rightarrow 0., a_4 \rightarrow -0,601501, a_5 \rightarrow 0,371748\}$ .

$\lambda_4 = 6,77408$  con  $\{a_1 \rightarrow -0,510473, a_2 \rightarrow 0,181124, a_3 \rightarrow 0,627332, a_4 \rightarrow 0,181124, a_5 \rightarrow -0,510473\}$ .

$\lambda_5 = 17,7497$  con  $\{a_1 \rightarrow 0,203463, a_2 \rightarrow -0,51882, a_3 \rightarrow 0,60068, a_4 \rightarrow -0,51882, a_5 \rightarrow 0,203463\}$ .

Aquí se observa que, al igual que se había concluido anteriormente, estos dos casos evaluados comparten dos modos normales, los cuales mantienen la partícula de masa 1.05 en reposo.

En el caso m-m-M-m-m, el modo que tiene el mismo tipo que el tercer modo de m-m-m-m-m, disminuye ligeramente los valores de la frecuencia y de las amplitudes respecto al otro caso.

El quinto modo (en ambos casos corresponde al mismo tipo de vibración) varía disminuyendo ligeramente los valores de la frecuencia y la amplitud de la partícula central, mientras aumenta, también ligeramente, los de las demás amplitudes.

Se analiza ahora qué sucederá si, en el caso m-m-m-m-m (con  $m = 1$  y  $k = 5$ ), aumentan en una unidad la rigidez entre las partículas 2 y 3, y la rigidez entre las partículas 3 y 4. Por tanto, se hace la asignación

$$\delta:=1,$$

y se declara

$$m5 = \{ \{k - (\lambda)*m, -k, 0, 0, 0\}, \{-k, 2k + \delta - \lambda*m, -k - \delta, 0, 0\}, \{0, -k - \delta, 2*(k + \delta) - \lambda*m, -(k + \delta), 0\}, \{0, 0, -(k + \delta), 2*k + \delta - \lambda*m, -k\}, \{0, 0, 0, -k, k - \lambda*m\} \}$$

El software evalúa esta expresión en los valores declarados, dando como respuesta

$$\{ \{5 - \lambda, -5, 0, 0, 0\}, \{-5, 11 - \lambda, -6, 0, 0\}, \{0, -6, 12 - \lambda, -6, 0\}, \{0, 0, -6, 11 - \lambda, -5\}, \{0, 0, 0, -5, 5 - \lambda\} \}$$

y luego, al pedirla en forma de matriz,

$$\begin{pmatrix} 5 - \lambda & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 11 - \lambda & -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 12 - \lambda & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 11 - \lambda & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Como solución a la ecuación característica se tiene

$$\{ \{\lambda \rightarrow 0\}, \{\lambda \rightarrow 8 - \sqrt{34}\}, \{\lambda \rightarrow \sqrt{34} + 8\}, \{\lambda \rightarrow 14 - \sqrt{46}\}, \{\lambda \rightarrow \sqrt{46} + 14\} \}$$

Estos valores propios se asignan respectivamente a las variables  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  y  $\lambda_5$ , y se

calculan los valores numéricos para los parámetros declarados.

La función ModoNormal se escribe

$$\text{ModoNormal}(\lambda_?) := \text{Solve}[a_1(k - \lambda m) - a_2k = 0 \& \& a_1(-k) + a_2(\delta + 2k - \lambda m) + a_3(-(\delta + k)) = 0 \& \& a_2(-(\delta + k)) + a_3(2(\delta + k) - \lambda m) - a_4(\delta + k) = 0 \& \& a_3(-(\delta + k)) + a_4(\delta + 2k - \lambda m) - a_5k = 0 \& \& a_5(k - \lambda m) - a_4k = 0 \& \& m(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2) = 1, \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}]$$

Luego, se evalúa cada  $\lambda_i$  en esta función, y se calculan los valores numéricos de los conjuntos salientes. Después de esto, se tienen los siguientes resultados.

Para la frecuencia de resonancia  $\lambda_1 = 0$ , las amplitudes relativas son  $\{a_1 \rightarrow 0,447214, a_2 \rightarrow 0,447214, a_3 \rightarrow 0,447214, a_4 \rightarrow 0,447214, a_5 \rightarrow 0,447214\}$ .

Para  $\lambda_2 = 2,16905$ , son  $\{a_1 \rightarrow 0,615324, a_2 \rightarrow 0,348391, a_3 \rightarrow 0., a_4 \rightarrow -0,348391, a_5 \rightarrow -0,615324\}$ .

Para  $\lambda_3 = 13,831$ ,  $\{a_1 \rightarrow 0,348391, a_2 \rightarrow -0,615324, a_3 \rightarrow 0., a_4 \rightarrow 0,615324, a_5 \rightarrow -0,348391\}$ .

Para  $\lambda_4 = 7,21767$ ,  $\{a_1 \rightarrow 0,524715, a_2 \rightarrow -0,232729, a_3 \rightarrow -0,583972, a_4 \rightarrow -0,232729, a_5 \rightarrow 0,524715\}$ .

Para  $\lambda_5 = 20,7823$ ,  $\{a_1 \rightarrow 0,157081, a_2 \rightarrow -0,49582, a_3 \rightarrow 0,677478, a_4 \rightarrow -0,49582, a_5 \rightarrow 0,157081\}$ .

A continuación se hace la comparación por pares de oscilaciones componentes del mismo tipo.

El segundo modo varía con respecto al segundo del caso m-m-m-m-m original en que la frecuencia de resonancia y la amplitud de las oscilaciones de las partículas 1 y 5 aumentan ligeramente, mientras que la amplitud de la segunda y la cuarta disminuyen ligeramente.

El tercer modo varía con respecto al cuarto del caso original de forma parecida a la anteriormente descrita, ya que este tercer modo intercambia amplitudes con el segundo del presente

caso, de igual forma que lo hacen el cuarto y el segundo del caso original.

Con el cuarto y con el quinto modo del caso presente no sucede lo mismo. He aquí una diferencia notable respecto a lo que sucede en el caso original (intercambio de amplitudes relativo a los modos tercero y quinto), introducida por la variación simétrica de la rigidez.

En el cuarto modo del caso presente, con respecto al caso original, disminuye solamente la amplitud de las vibraciones de la partícula central. Los demás valores (frecuencia y amplitudes) aumentan.

En el quinto modo, con respecto al quinto modo original, aumentan la frecuencia y la amplitud correspondiente a la partícula central. Los restantes valores disminuyen.

### 3.1.4 Resolución computacional al problema de las oscilaciones transversales

#### Caso m-m-m-m-m (oscilaciones transversales)

Según el problema 5.12 de [Wel72], la energía potencial (despreciando la gravedad) del sistema que consiste en un hilo tensionado con cinco cuentas colocadas a espacios regulares, al suponer que los desplazamientos (se trata de los transversales) son tan pequeños que la tensión  $\tau$  permanece constante, está dada por la expresión

$$V = \frac{\tau}{a} [y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 - y_1 y_2 - y_2 y_3 - y_3 y_4 - y_4 y_5],$$

la cual se entra al Mathematica como

$$V = \frac{k}{b} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 - y_1 * y_2 - y_2 * y_3 - y_3 * y_4 - y_4 * y_5).$$

Para obtener la matriz hessiana se escribe

$$D[V, \{\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}, 2\}],$$

y da como respuesta

$$\left\{ \left\{ \frac{2k}{b}, -\frac{k}{b}, 0, 0, 0 \right\}, \left\{ -\frac{k}{b}, \frac{2k}{b}, -\frac{k}{b}, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, -\frac{k}{b}, \frac{2k}{b}, -\frac{k}{b}, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, -\frac{k}{b}, \frac{2k}{b}, -\frac{k}{b} \right\}, \left\{ 0, 0, 0, -\frac{k}{b}, \frac{2k}{b} \right\} \right\},$$

que es la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{2k}{b} & -\frac{k}{b} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{b} & \frac{2k}{b} & -\frac{k}{b} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k}{b} & \frac{2k}{b} & -\frac{k}{b} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k}{b} & \frac{2k}{b} & -\frac{k}{b} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{k}{b} & \frac{2k}{b} \end{pmatrix}.$$

Entonces, la matriz del sistema de los modos normales será

$$\begin{pmatrix} \frac{2k}{b} - m\lambda & -\frac{k}{b} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{b} & \frac{2k}{b} - m\lambda & -\frac{k}{b} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k}{b} & \frac{2k}{b} - m\lambda & -\frac{k}{b} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k}{b} & \frac{2k}{b} - m\lambda & -\frac{k}{b} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{k}{b} & \frac{2k}{b} - m\lambda \end{pmatrix},$$

la cual se declara en el software así:

$$m5t = \{ \{ (2k/b) - \lambda*m, -(k/b), 0, 0, 0 \}, \{ -(k/b), (2k/b) - \lambda*m, -(k/b), 0, 0 \}, \{ 0, -(k/b), (2k/b) - \lambda*m, -(k/b), 0 \}, \{ 0, 0, -(k/b), (2k/b) - \lambda*m, -(k/b) \}, \{ 0, 0, 0, -(k/b), (2k/b) - \lambda*m \} \}.$$

Para hallar los valores propios (frecuencias de resonancia) se entra

$$\text{Solve}[\text{Det}[m5t] == 0, \lambda]$$

Esto da

$$\left\{ \left\{ \lambda \rightarrow \frac{k}{bm} \right\}, \left\{ \lambda \rightarrow \frac{2k}{bm} \right\}, \left\{ \lambda \rightarrow \frac{3k}{bm} \right\}, \left\{ \lambda \rightarrow \frac{2k - \sqrt{3}k}{bm} \right\}, \left\{ \lambda \rightarrow \frac{\sqrt{3}k + 2k}{bm} \right\} \right\}$$

Como se observa, estas frecuencias no solo dependerán de la masa  $m$  y del parámetro  $k$ , como era el caso de las oscilaciones longitudinales. Aquí, en las transversales, también dependerán de la componente horizontal de la distancia entre cada par de partículas.

El sistema para hallar los vectores propios (amplitudes relativas de los modos normales) correspondientes a los valores propios hallados está representado en la función `ModoNormal` siguiente:

$$\text{ModoNormal}(\lambda\_):=\text{Solve}\left[\begin{aligned} &a1\left(\frac{2k}{b}-\lambda m\right)-\frac{a2k}{b}=0 \& \& \frac{a1(-k)}{b}+a2\left(\frac{2k}{b}-\lambda m\right)-\frac{a3k}{b}=0 \& \& \frac{a2(-k)}{b}+ \\ &a3\left(\frac{2k}{b}-\lambda m\right)-\frac{a4k}{b}=0 \& \& \frac{a3(-k)}{b}+a4\left(\frac{2k}{b}-\lambda m\right)-\frac{a5k}{b}=0 \& \& a5\left(\frac{2k}{b}-\lambda m\right)-\frac{a4k}{b}=0 \& \& m(a1^2+ \\ &a2^2+a3^2+a4^2+a5^2)=1, \{a1, a2, a3, a4, a5\} \end{aligned}\right]$$

Se realizan las asignaciones de valores propios:

$$\lambda_1:=\frac{k}{bm}$$

$$\lambda_2:=\frac{2k}{bm}$$

$$\lambda_3:=\frac{3k}{bm}$$

$$\lambda_4:=\frac{2k-\sqrt{3}k}{bm}$$

$$\lambda_5:=\frac{\sqrt{3}k+2k}{bm}$$

Y así se comienza a ejecutar `ModoNormal` para cada uno mediante las líneas

`ModoNormal[λ1]`

y las análogas correspondientes a las restantes  $\lambda_i$ .

Haciendo esto, se logran los siguientes resultados, en los cuales hemos abreviado poniendo como representante una de las dos soluciones del sistema para el valor propio correspondiente; ya que, como se vio en los casos anteriores, en un mismo conjunto solución los dos vectores son opuestos.

Para  $\lambda_1 = \frac{k}{km}$ , el vector de las amplitudes relativas es

$$\left\{ a_1 \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{m}}, a_2 \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{m}}, a_3 \rightarrow 0, a_4 \rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{m}}, a_5 \rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{m}} \right\}.$$

En este modo, excepto la partícula central, que se mantiene en reposo, todas oscilan con la misma amplitud, haciéndolo las dos primeras en una fase y las dos últimas en la contraria.

Para  $\lambda_2 = \frac{2k}{bm}$ , las amplitudes relativas correspondientes serán

$$\left\{ a_1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{m}}, a_2 \rightarrow 0, a_3 \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{m}}, a_4 \rightarrow 0, a_5 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{m}} \right\}.$$

Aquí las partículas 2 y 4 se mantienen en reposo. Las demás partículas oscilan con una amplitud mayor que la del anterior modo. La partícula central lo hace en fase opuesta a las dos de los extremos.

Para  $\lambda = \frac{3k}{bm}$ , se tiene

$$\left\{ a_1 \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{m}}, a_2 \rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{m}}, a_3 \rightarrow 0, a_4 \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{m}}, a_5 \rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{m}} \right\}.$$

En este modo, al igual que en el primero, la partícula central se mantiene en reposo y las demás oscilan con igual amplitud, que será la misma que en el primer modo. Lo distintivo del modo

presente es que las partículas 1 y 4 lo hacen en una fase, y la 2 y la 5 en la contraria.

Para  $\lambda_4 = (2 - \sqrt{3})\frac{k}{bm}$ , la respuesta es

$$\left\{ a_1 \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{3}\sqrt{m}}, a_2 \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{m}}, a_3 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{m}}, a_4 \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{m}}, a_5 \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{3}\sqrt{m}} \right\}$$

Esta oscilación componente tiene la peculiaridad de que todas las partículas se mueven en la misma fase. La amplitud relativa de la central es la del segundo modo, la de las de orden par la de los modos primero y tercero, y la de las extremas, con una amplitud menor que las anteriores.

Para  $\lambda_5 = (2 + \sqrt{3})\frac{k}{bm}$ ,

$$\left\{ a_1 \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{3}\sqrt{m}}, a_2 \rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{m}}, a_3 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{m}}, a_4 \rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{m}}, a_5 \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{3}\sqrt{m}} \right\}.$$

Se observa aquí que el vector propio es casi idéntico al anterior. La excepción consiste en que los elementos 2 y 4 son los opuestos de los de esa misma ubicación en el vector anterior. De ahí que el movimiento sea idéntico al anterior para las partículas impares, y opuesto al anterior para las pares.

Si en las oscilaciones longitudinales las vibraciones libres eran múltiplos de  $\frac{k}{m}$ , en las transversales lo serán de  $\frac{k}{bm}$ . El modo del caso de las transversales en el cual todos los elementos del vector de las amplitudes relativas tienen el mismo signo, difiere del modo de las longitudinales donde esto sucede en que hay amplitudes diferentes.

### Caso M-m-m-m-M (oscilaciones transversales)

Este puede ser un caso de estudio importante, ya que podemos aproximar mediante este modelo el hecho de las vibraciones transversales de un tramo de puente (de pilar a pilar), representadas

las masa de los pilares por las partículas extremas, en este caso de mayor masa que las demás.

El cambio que se produce en el problema con respecto al caso anterior es que las masas de los extremos cambian. Luego, la matriz del sistema del problema de valores propios será

$$\begin{pmatrix} \frac{2k}{b} - M\lambda & -\frac{k}{b} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{b} & \frac{2k}{b} - m\lambda & -\frac{k}{b} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k}{b} & \frac{2k}{b} - m\lambda & -\frac{k}{b} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k}{b} & \frac{2k}{b} - m\lambda & -\frac{k}{b} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{k}{b} & \frac{2k}{b} - M\lambda \end{pmatrix},$$

y se entrará en el software como

$$m5t = \{ \{(2k/b - \lambda^*M, -(k/b), 0, 0, 0), \{-(k/b), (2k/b - \lambda^*m, -(k/b), 0, 0), \{0, -(k/b), (2k/b - \lambda^*m, -(k/b), 0), \{0, 0, -(k/b), (2k/b - \lambda^*m, -(k/b))\}, \{0, 0, 0, -(k/b), (2k/b - \lambda^*M)\} \}$$

Básicamente, para el resto del problema, se sigue el mismo procedimiento que en el problema anterior, con las necesarias excepciones que se introducen para hacer más viable una interpretación del fenómeno físico.

Al ejecutar el comando que resuelve la ecuación característica, las raíces halladas son expresiones largas. Al ejecutar con la primera la correspondiente función implementada

$$\text{ModoNormal}(\lambda\_):=\text{Solve}[a1\left(\frac{2k}{b} - \lambda M\right) - \frac{a2k}{b} = 0 \& \& \frac{a1(-k)}{b} + a2\left(\frac{2k}{b} - \lambda m\right) - \frac{a3k}{b} = 0 \& \& \frac{a2(-k)}{b} + a3\left(\frac{2k}{b} - \lambda m\right) - \frac{a4k}{b} = 0 \& \& \frac{a3(-k)}{b} + a4\left(\frac{2k}{b} - \lambda m\right) - \frac{a5k}{b} = 0 \& \& a5\left(\frac{2k}{b} - \lambda M\right) - \frac{a4k}{b} = 0 \& \& m\left(a2^2 + a3^2 + a4^2\right) + M\left(a1^2 + a5^2\right) = 1, \{a1, a2, a3, a4, a5\}]$$

el costo computacional es elevado en cuanto a tiempo. Por lo cual, para obtener una respuesta rápida y de fácil interpretación para un problema concreto, se hacen  $m = 1$ ,  $M = 5$ ,  $k = 5$ , al igual que en el caso de las oscilaciones longitudinales, y, como aquí es determinante la distancia entre las partículas se hará  $b = 10$ .

Asignando a  $\lambda_1$  la primera frecuencia obtenida, y ejecutando sobre este valor el comando N se obtiene que  $\lambda_1 = 0,141742$ . Luego, ejecutando ModoNormal sobre  $\lambda_1$ , y luego N sobre la respuesta, se obtienen las amplitudes relativas

$$\{a_1 \rightarrow 0,306012, a_2 \rightarrow 0,178275, a_3 \rightarrow 0., a_4 \rightarrow -0,178275, a_5 \rightarrow -0,306012\}.$$

Para la obtención de los demás modos normales se procede en el software de igual forma. A continuación se exponen los resultados.

En el segundo modo normal, la frecuencia de resonancia es  $\lambda_2 = 1,05826$ , y las amplitudes relativas son

$$\{a_1 \rightarrow 0,0797272, a_2 \rightarrow -0,684264, a_3 \rightarrow 0., a_4 \rightarrow 0,684264, a_5 \rightarrow -0,0797272\}.$$

En el cálculo de los restantes modos normales aparecerán, tanto en los valores de las frecuencias como en los de las amplitudes, números imaginarios no nulos, cuyas expresiones contienen alternativamente los factores  $10^{-7}i$ ,  $10^{-13}i$ ,  $10^{-14}i$ ,  $10^{-16}i$  y  $10^{-17}i$ . Entonces, las partes imaginarias de estos números serán aproximadamente iguales a 0. Como se sabe de antemano que los valores y vectores propios son en estos casos reales, por ser las matrices de los sistemas simétricas y de coeficientes reales, se tomarán como cero estas partes imaginarias, ya que estas aparecen como resultado de las aproximaciones que realiza el matemática para la resolución de los correspondientes sistemas y ecuaciones. Llevando a cabo estas consideraciones se tienen los siguientes resultados.

Para el tercer modo normal, la frecuencia de resonancia es  $\lambda_3 = 0,0716934$ , y las amplitudes relativas son

$$\{a_1 \rightarrow 0,25647, a_2 \rightarrow 0,329069, a_3 \rightarrow 0,354483, a_4 \rightarrow 0,329069, a_5 \rightarrow 0,25647\}.$$

Para el cuarto modo normal, la vibración libre correspondiente es  $\lambda_4 = 1,7237$ , y las amplitudes relativas son

$$\{a_1 \rightarrow 0,0330118, a_2 \rightarrow -0,503003, a_3 \rightarrow 0,695039, a_4 \rightarrow -0,503003, a_5 \rightarrow 0,0330118\}.$$

Para el quinto modo normal, se tiene  $\lambda_5 = 0,404602$  y

$$\{a_1 \rightarrow 0,182025, a_2 \rightarrow -0,372428, a_3 \rightarrow -0,62551, a_4 \rightarrow -0,372428, a_5 \rightarrow 0,182025\}.$$

### Caso m-m-M-m-m (oscilaciones transversales)

En este caso, lo que aría con respecto al caso m-m-m-m-m es la masa de la partícula central. La matriz del sistema será

$$\begin{pmatrix} \frac{2k}{b} - m\lambda & -\frac{k}{b} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{b} & \frac{2k}{b} - m\lambda & -\frac{k}{b} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k}{b} & \frac{2k}{b} - M\lambda & -\frac{k}{b} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k}{b} & \frac{2k}{b} - m\lambda & -\frac{k}{b} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{k}{b} & \frac{2k}{b} - m\lambda \end{pmatrix},$$

la cual se entra en el software como

$$m5t = \{ \{(2k/b) - \lambda^*m, -(k/b), 0, 0, 0\}, \{-(k/b), (2k/b) - \lambda^*m, -(k/b), 0, 0\}, \{0, -(k/b), (2k/b) - \lambda^*M, -(k/b), 0\}, \{0, 0, -(k/b), (2k/b) - \lambda^*m, -(k/b)\}, \{0, 0, 0, -(k/b), (2k/b) - \lambda^*m\} \}.$$

Las dos primeras raíces de la ecuación característica son

$$\left\{ \lambda \rightarrow \frac{k}{bm} \right\}, \left\{ \lambda \rightarrow \frac{3k}{bm} \right\},$$

para las cuales se obtienen respectivamente, al ejecutar con ellas la correspondiente función

ModoNormal

$$\begin{aligned} \text{ModoNormal}(\lambda) := & \text{Solve}\left[ a1 \left( \frac{2k}{b} - \lambda m \right) - \frac{a2k}{b} = 0 \&\& \frac{a1(-k)}{b} + a2 \left( \frac{2k}{b} - \lambda m \right) - \frac{a3k}{b} = 0 \&\& \frac{a2(-k)}{b} + \right. \\ & a3 \left( \frac{2k}{b} - \lambda m \right) - \frac{a4k}{b} = 0 \&\& \frac{a3(-k)}{b} + a4 \left( \frac{2k}{b} - \lambda m \right) - \frac{a5k}{b} = 0 \&\& a5 \left( \frac{2k}{b} - \lambda m \right) - \frac{a4k}{b} = 0 \&\& m \left( a1^2 + a2^2 + a4^2 + a5^2 \right) + \\ & \left. a3^2 M = 1, \{a1, a2, a3, a4, a5\} \right], \end{aligned}$$

los conjuntos de amplitudes relativas

$$\left\{ a1 \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{m}}, a2 \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{m}}, a3 \rightarrow 0, a4 \rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{m}}, a5 \rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{m}} \right\}$$

$$\left\{ a1 \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{m}}, a2 \rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{m}}, a3 \rightarrow 0, a4 \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{m}}, a5 \rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{m}} \right\}$$

El tiempo que demora en ejecutarse ModoNormal para la tercera frecuencia es muy grande, por lo cual se procederá con este caso al igual que con el anterior (con los mismos valores de los parámetros), incluyendo los dos primeros modos (para obtenerlos expresados esta vez por valores numéricos para situaciones concretas y compararlos con los demás modos).

El primer modo normal tiene frecuencia de  $\lambda_1 = 0,5$ , y amplitudes relativas

$$\{a1 \rightarrow 0,5, a2 \rightarrow 0,5, a3 \rightarrow 0., a4 \rightarrow -0,5, a5 \rightarrow -0,5\}.$$

El segundo modo frecuencia  $\lambda_2 = 1,5$  y amplitudes relativas

$$\{a_1 \rightarrow 0,5, a_2 \rightarrow -0,5, a_3 \rightarrow 0., a_4 \rightarrow 0,5, a_5 \rightarrow -0,5\}.$$

También aquí, a partir del tercer modo ocurre el mismo problema que en el caso anterior, para lo cual se trabaja con las mismas consideraciones. Se obtienen así los siguientes modos.

El tercer modo tiene frecuencia  $\lambda_3 = 0,0534621$  y amplitudes relativas

$$\{a_1 \rightarrow 0,15331, a_2 \rightarrow 0,290228, a_3 \rightarrow 0,396113, a_4 \rightarrow 0,290228, a_5 \rightarrow 0,15331\}.$$

El cuarto modo tiene vibración libre  $\lambda_4 = 1,53874$  y amplitudes relativas

$$\{a_1 \rightarrow 0,473966, a_2 \rightarrow -0,51069, a_3 \rightarrow 0,0762941, a_4 \rightarrow -0,51069, a_5 \rightarrow 0,473966\}.$$

El quinto modo normal tiene frecuencia de resonancia  $\lambda_5 = 0,607796$  y amplitudes relativas

$$\{a_1 \rightarrow 0,501849, a_2 \rightarrow 0,393654, a_3 \rightarrow -0,193064, a_4 \rightarrow 0,393654, a_5 \rightarrow 0,501849\}.$$

### Caso M-m-M-m-M (oscilaciones transversales)

Este caso varía con respecto al m-m-m-m-m solo en las masas de las partículas primera, tercera

y quinta. Así, la matriz correspondiente es

$$\begin{pmatrix} \frac{2k}{b} - \lambda M & -\frac{k}{b} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{b} & \frac{2k}{b} - \lambda m & -\frac{k}{b} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k}{b} & \frac{2k}{b} - \lambda M & -\frac{k}{b} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k}{b} & \frac{2k}{b} - \lambda m & -\frac{k}{b} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{k}{b} & \frac{2k}{b} - \lambda M \end{pmatrix},$$

que se entra al software como

$$m5t = \{ \{ (2k/b - \lambda M), -(k/b), 0, 0, 0 \}, \{ -(k/b), (2k/b - \lambda m), -(k/b), 0, 0 \}, \{ 0, -(k/b), (2k/b - \lambda M), -(k/b), 0 \}, \{ 0, 0, -(k/b), (2k/b - \lambda m), -(k/b) \}, \{ 0, 0, 0, -(k/b), (2k/b - \lambda M) \} \}$$

La primera raíz de la ecuación característica correspondiente es

$$\lambda \rightarrow \frac{2k}{bM}.$$

Para el caso presente ModoNormal se transforma en

$$\text{ModoNormal}(\lambda) := \text{Solve}[a1 \left( \frac{2k}{b} - \lambda M \right) - \frac{a2k}{b} = 0 \&\& \frac{a1(-k)}{b} + a2 \left( \frac{2k}{b} - \lambda m \right) - \frac{a3k}{b} = 0 \&\& \frac{a2(-k)}{b} + a3 \left( \frac{2k}{b} - \lambda M \right) - \frac{a4k}{b} = 0 \&\& \frac{a3(-k)}{b} + a4 \left( \frac{2k}{b} - \lambda m \right) - \frac{a5k}{b} = 0 \&\& a5 \left( \frac{2k}{b} - \lambda M \right) - \frac{a4k}{b} = 0 \&\& M(a1^2 + a3^2 + a5^2) + m(a2^2 + a4^2) = 1, \{a1, a2, a3, a4, a5\}]$$

Al ejecutar esta función en la raíz anteriormente dada se obtienen las amplitudes relativas

$$\left\{ a1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3} \sqrt{M}}, a2 \rightarrow 0, a3 \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3} \sqrt{M}}, a4 \rightarrow 0, a5 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3} \sqrt{M}} \right\}.$$

Las demás raíces son expresiones relativamente largas, y al ejecutar ModoNormal para la se-

gunda raíz, el software demora mucho en operar. Por esto se procede a asignar a los parámetros los mismos valores que en los dos casos anteriores y a dar el mismo tratamiento de estos casos a partir del primer modo del presente caso.

Evaluando de esta forma el primer modo normal, se tiene que su vibración libre será, para estos valores,  $\lambda_1 = 0,2$ , y las amplitudes relativas serán

$$\{a_1 \rightarrow 0,258199, a_2 \rightarrow 0., a_3 \rightarrow -0,258199, a_4 \rightarrow 0., a_5 \rightarrow 0,258199\}.$$

El segundo modo normal tendrá frecuencia  $\lambda_2 = 0,141742$  y amplitudes relativas

$$\{a_1 \rightarrow 0,306012, a_2 \rightarrow 0,178275, a_3 \rightarrow 0., a_4 \rightarrow -0,178275, a_5 \rightarrow -0,306012\}.$$

El tercer modo normal tiene vibración libre  $\lambda_3 = 1,05826$  y amplitudes relativas

$$\{a_1 \rightarrow 0,0797272, a_2 \rightarrow -0,684264, a_3 \rightarrow 0., a_4 \rightarrow 0,684264, a_5 \rightarrow -0,0797272\}.$$

La frecuencia del cuarto modo será  $\lambda_4 = 0,0432236$ , y las amplitudes de este serán

$$\{a_1 \rightarrow 0,169235, a_2 \rightarrow 0,26532, a_3 \rightarrow 0,338469, a_4 \rightarrow 0,26532, a_5 \rightarrow 0,169235\}.$$

El quinto modo tendrá vibración libre  $\lambda_5 = 1,15678$  y amplitudes relativas

$$\{a_1 \rightarrow 0,0685053, a_2 \rightarrow -0,655443, a_3 \rightarrow 0,137011, a_4 \rightarrow -0,655443, a_5 \rightarrow 0,0685053\}.$$

Vale destacar que este caso no presentó en el software el mismo problema que los anteriores en lo que respecta a la aparición de números imaginarios en las expresiones de los valores y vectores propios.

Para el cálculo de modos normales longitudinales y transversales se hace la siguiente valoración:

Comparando con el método newtoniano descrito en [Paz92, cap. 10], se llega a la conclusión de que, para pequeñas oscilaciones, cuando se tienen las expresiones de energías cinética y potencial, ambas formulaciones (newtoniana y lagrangiana) son aproximadamente iguales en cuanto a ventajas. La de Newton debe hacer una consideración previa en cuanto fuerzas vectoriales, pero luego obtiene la ecuación característica de forma casi directa. La de Lagrange aprovecha directamente las expresiones energéticas, pero luego debe derivar para hallar la matriz de la ecuación característica, lo cual se torna fácil cuando se cuenta con programas de cómputo como el Mathematica. Entonces, se concluye que la formulación de Lagrange es alternativa, en estos casos, a la de Newton.

## 3.2 Conclusiones parciales

Se dio solución al problema del modelo de 5 grados de libertad planteado en el capítulo anterior. Se justifica que, para este problema, la utilización de la formulación de Lagrange es alternativa a la de Newton.

Como resultado de la calibración de las soluciones obtenidas para las oscilaciones longitudinales tenemos que: a pequeños cambios en los parámetros ocurren pequeños cambios relativos en los modos normales.

Los modos normales longitudinales no dependen explícitamente de la distancia entre las partículas, mientras los de las transversales sí.

Además, se justifica y evidencia la idoneidad del software Mathematica en la ejecución de los modelos y en la obtención de los resultados.

# Conclusiones

1. Las herramientas básicas necesarias para la determinación de las repuestas de las estructuras a acciones externas son: la segunda ley de Newton, las ecuaciones del movimiento oscilatorio, las funciones periódicas, el análisis espectral, la teoría de los sistemas discretos de uno o más grados de libertad, las ecuaciones diferenciales, las ecuaciones de Lagrange y el principio de Hamilton.
2. La formulación lagrangiana de la mecánica se introduce y se presentan sus ventajas, en base al estudio realizado, para su utilización en problemas donde sea aplicable, en los cuales se deba tener en cuenta muchas fuerzas y aceleraciones vectoriales según formulaciones convencionales, puede eliminar esta dificultad, al trabajar solamente con dos magnitudes escalares.
3. Se obtuvieron, mediante formulación lagrangiana, los siguientes resultados:
  - Las ecuaciones del movimiento de las oscilaciones ocasionadas en un puente por un pequeño impacto de dirección diagonal, considerando que sus extremos se mantienen fijos.
  - Los modos normales de vibración de las oscilaciones del modelo de cinco partículas distribuidas a iguales distancias en un eje horizontal.
  - La calibración de los modos normales para el caso de las oscilaciones longitudinales.

4. De estos resultados se concluye que:

- La formulación lagrangiana es preferible a la Newton para el problema resuelto de las oscilaciones del puente luego del impacto.
- La formulación lagrangiana es alternativa a la newtoniana para el problema resuelto de cálculo de modos normales de oscilación.

# Recomendaciones

1. Hacer una calibración mediante experimentación numérica de los modos normales obtenidos para las oscilaciones transversales.
2. Modelar y solucionar, utilizando formulación lagrangiana, sistemas de mayor complejidad que los tratados en este trabajo, que sean muy trabajosos de tratar métodos convencionales.
3. Llevar a cabo la propuesta de la utilización lagrangiana en un proyecto investigativo de análisis de estructuras.

# Bibliografía

- [AGZ] M. Abdalla, K. M. Grigoriadis, and D. C. Zimmerman. Enhanced damage detection using linear matrix inequalities.
- [Art] Arnold Arthurs. *Calculus of Variations*.
- [BST64] B. M. Budak, A. A. Samarskii, and A. N. Tikhonov. *A Collection of Problems on Mathematical Physics*. International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, 1964.
- [CCR02] A. Bruce Carlson, Paul B. Crilly, and Janet C. Rutledge. *Communication Systems: An Introduction to Signals and Noise in Electrical Communication*. McGraw-Hill, 2002.
- [CG74] Anil K. Chopra and Jorge A. Gutierrez. Earthquake response analysis of multistorey buildings including foundation interaction. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 3:65–77, 1974.
- [Cho95] Anil K. Chopra. *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*. Prentice-Hall, 1995.
- [Els69] L. Elsgoltz. *Ecuaciones Diferenciales y cálculo variacional*. Editorial Mir, 1969.
- [FEM10] FEMA1. *Earthquake - Resistant Design Concepts*. FEMA, 2010.

- [Gol08] Herbert Goldstein. *Mecánica Clásica*. Editorial Félix Varela, 2008.
- [GPDaL09] Joceliny Gomes Paquete D' alva Lima. *Modelación y análisis estructural de un puente metálico ferroviario*. Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas, 2009.
- [HA14] J. R. Hernández Ávila. Modelación inelástica dinámica simplificada de edificaciones de concreto reforzado. *Puente Revista Científica*, pages 51–60, 2014.
- [HB16] Yudit Hernández Blanco. *Modelación y Análisis de Edificios con Típanos de Hormigón Armado*. Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas, 2016.
- [L13] Jairo Andrés Paredes López. *Modelización numérica del comportamiento constitutivo del daño local y global y su correlación con la evolución de las frecuencias naturales en estructuras de hormigón armado*. Universidad Politécnica de Cataluña Barcelona Tech, 2013.
- [LL94] L. D Landau and E. M. Lifshitz. *Mecánica. Volumen 1 del Curso de Física Teórica*. Editorial Reverté, S. A., 1994.
- [LL15] Lucy Laura Lázaro Luna. *Ensayo a escala de edificio de dos alturas sometido a desplazamientos horizontales*. Escola Tecnica Superior d'Enginyeria de Camins, Canals i Ports and UCP Barcelona Tech, 2015.
- [Paz92] Mario Paz. *Dinámica estructural. Teoría y cálculo*. Editorial Reverté, S. A., 1992.
- [Raj09] S. Rajasekaran. *Structural dynamics of earthquake engineering*. Woodhead Publishing Limited and CRC Press LLC, 2009.
- [RC14] Jesús Alberto Ramírez Caraballo. *Modelación de patologías provocadas por la retracción en estructuras de hormigón armado*. Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas, 2014.

- 
- [Tej11] Alejandro de Miguel Tejada. *Análisis dinámico de estructuras en el dominio de la frecuencia*. Universidad Politécnica de Madrid, 2011.
- [TRLF03] Nicola Tarque Ruíz and Cesar Loaiza Fuentes. *Análisis sísmico de edificios*. Pontificia Universidad Católica del Perú, 2003.
- [TS80] A. N. Tjonov and A. A. Samarsky. *Ecuaciones de la Física Matemática*. Editorial Mir, 1980.
- [vB04] Bruce van Brunt. *The Calculus of Variations*. Springer, 2004.
- [Ver08] Arnold Verruijt. *Soil Dynamics*. Delft University of Technology, 2008.
- [Wel72] Dare A. Wells. *Teoría y problemas de Dinámica de Lagrange*. Libros McGraw-Hill, 1972.
- [WWL01] Wen-Hwa Wu, Jer-Fu Wang, and Chi-Chang Lin. Systematic assessment of irregular building-soil interaction using efficient modal analysis. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 30:573–594, 2001.

# Anexo A

## Problemas representativos del Cálculo de Variaciones

Los ejemplos siguientes muestran aplicaciones del cálculo variacional en diversas situaciones de la geometría y la mecánica. En estos casos las ecuaciones de Euler - Lagrange cobran gran importancia.

### A.1 Distancia mínima entre dos puntos del plano

En un plano, el elemento diferencial de un arco es

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

[Gol08, pag. 42]

Los puntos 1 y 2 están determinados por las condiciones  $y(x_1) = y_1$  y  $y(x_2) = y_2$  respectivamente.

La longitud total de cualquier curva que una 1 y 2 será igual a

$$\int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

La condición para que  $y$  corresponda a la mínima distancia es que la expresión anterior sea mínima.

Aplicando la ecuación de Euler - Lagrange con  $F = \sqrt{1 + y'^2}$ , se tienen las derivadas parciales  $F_y = 0$  y  $F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$ . Luego,

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0 \quad (\text{A.1})$$

[Gol08, pag. 43]

Al integrar esta ecuación diferencial se tiene

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c \quad (\text{A.2})$$

donde  $c$  es una constante.

Este resultado será cierto solo si

$$y' = a, \quad (\text{A.3})$$

donde  $a$  también es una constante, que guarda cierta relación con  $c$  de la siguiente forma

$$a = \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}}$$

[Gol08, pág. 43]

A continuación, en el actual trabajo, deduzco esta relación:

Para lograr la expresión de  $a$  en función de  $c$ , se aplica A.3 a A.2 de la forma

$$\frac{a}{\sqrt{1+y'^2}} = c.$$

Multiplicando ambos miembros por  $\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$ , se tiene

$$\frac{a}{\sqrt{1+y'^2} \sqrt{1+y'^2}} = \frac{c}{\sqrt{1+y'^2}}$$

Aquí, adicionando y restando  $\frac{y'^2}{1+y'^2}$  en la raíz que se encuentra en el denominador

$$a = \frac{c}{\sqrt{\frac{1}{1+y'^2} + \frac{y'^2}{1+y'^2} - \frac{y'^2}{1+y'^2}}}$$

que en términos de  $c$  se escribe

$$a = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}$$

Finalmente, según [Gol08, pág. 43], la ecuación obtenida al integrar A.3 se escribe como:

$$y = ax + b, \tag{A.4}$$

donde  $b$  es otra constante de integración.

Luego, esta recta es una trayectoria extremal. [Gol08, pág. 43]

## A.2 Mínima superficie de revolución

Sea una superficie generada rotando una curva de extremos fijos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  alrededor del eje  $y$ . El problema que se plantea consiste en determinar la curva para la cual el área de la

superficie generada mediante la forma descrita es mínima. [Gol08, pág. 44]

El elemento diferencial de área es  $2\pi x ds = 2\pi x \sqrt{1 + y'^2} dx$ , y el área total,

$$2\pi \int_{x_1}^{x_2} x \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (\text{A.5})$$

[Gol08, pág. 44]

Buscando la extremal, se aplica la ecuación de Euler - Lagrange, con  $F = x \sqrt{1 + y'^2}$ , obteniendo las expresiones  $F_y = 0$ ,  $F_{y'} = \frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}}$  y finalmente

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{xy'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0. \quad (\text{A.6})$$

Al integrar, se obtiene

$$\frac{xy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = a, \quad (\text{A.7})$$

donde  $a$  es una constante de integración, menor que el mínimo valor de  $x$ . [Gol08, pág. 44]

Según las orientaciones de [Gol08, pág. 44], se eleva al cuadrado ambos miembros, obteniendo

$$\frac{x^2 y'^2}{1 + y'^2} = a^2.$$

Equivalentemente a la transformación sugerida por la orientación de [Gol08, pág. 44] de agrupar términos, se opera en este trabajo de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{1+y'^2} &= x^2 \left( \frac{1}{1+y'^2} \right) = x^2 \left( \frac{1}{1+y'^2} + \frac{y'^2}{1+y'^2} - \frac{y'^2}{1+y'^2} \right) \\ &= x^2 \left( 1 - \frac{y'^2}{1+y'^2} \right) = x^2 - \frac{x^2 y'^2}{1+y'^2} = x^2 - a^2. \end{aligned}$$

Así se obtiene la ecuación de la última línea de [Gol08, pág. 44]:

$$y'^2(x^2 - a^2) = a^2. \quad (\text{A.8})$$

Dividiendo ambos miembros por  $(x^2 - a^2)$ , y luego aplicando a ambos raíz cuadrada, dicha

expresión se transforma en

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad (\text{A.9})$$

cuya solución general es

$$y = a \cosh^{-1} \frac{x}{a} + b$$

o

$$x = a \cosh \frac{y - b}{a}, \quad (\text{A.10})$$

que es la ecuación de una catenaria. Las constantes  $a$  y  $b$  se determinarán mediante las condiciones de puntos fijos correspondientes. [Gol08, pág. 45]

### A.3 La braquistócrona

Este problema es famoso. Planteado por Johann Bernoulli en 1696, dio inicio a la historia del cálculo de variaciones [vB04, epíg. 1.2.2], y condujo a dicho matemático a la fundación formal de esta útil rama de la ciencia matemática. [Gol08, pág. 46]

En este caso, el objetivo consiste en encontrar, de las curvas que unen dos puntos, la que provee la trayectoria más rápida de una partícula bajo la acción de la gravedad. [Gol08, pág. 45]

Sea  $v$  la velocidad a lo largo de la curva. Entonces, el tiempo requerido para recorrer un arco de longitud  $ds$  será  $\frac{ds}{v}$ . [Gol08, pág. 45]

El planteamiento del problema equivale a minimizar

$$T_{12} = \int_1^2 \frac{ds}{v}. \quad (\text{A.11})$$

[Gol08, pág. 45]

Sea  $y$  medida a partir del punto inicial. Aplicando el teorema de conservación de la energía de

la partícula,

$$v = \sqrt{2gy}.$$

[Gol08, pág. 45]

Así, A.11 se transforma en

$$T_{12} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx. \quad (\text{A.12})$$

[Gol08, pág. 46]

Aplicando la ecuación de Euler - Lagrange con  $\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}$ , se encontrará una curva extremal.

[Gol08, pág. 46]