

Universidad Central “Marta Abreu” de las Villas
Facultad Matemática Física y Computación
Licenciatura en Matemática



TRABAJO DE DIPLOMA

*Aplicación de la Modelación Matemática en el Funcionamiento
Hidrogeológico de las Aguas Subterráneas. Caso de Estudio “Región
Acuífera del Noreste de Villa Clara”*

Autor:

Hugo A. Martínez Noriegas

Tutores:

Msc. Fermín E. Sarduy Quintanilla

Lic. Yoan Hernández Rodríguez

Santa Clara
2007



Hago constar que el presente trabajo fue realizado en la Universidad Central Marta Abreu de Las Villas como parte de la culminación de los estudios de la especialidad de Licenciatura en Matemáticas, autorizando a que el mismo sea utilizado por la institución, para los fines que estime conveniente, tanto de forma parcial como total y que además no podrá ser presentado en eventos ni publicado sin la autorización de la Universidad.

Firma del autor

Los abajo firmantes, certificamos que el presente trabajo ha sido realizado según acuerdos de la dirección de nuestro centro y el mismo cumple con los requisitos que debe tener un trabajo de esta envergadura referido a la temática señalada.

Firma del tutor

Firma del jefe del Seminario

Los modelos matemáticos son ampliamente usados en las diferentes ramas del saber, como herramientas para las investigaciones, pronósticos o predicciones de las variables que lo componen. En la década del 60 se consolida el papel de la simulación del agua subterránea como vía para representar el flujo mediante un modelo y predecir las respuestas del sistema. La aplicación de la tecnología de la modelación matemática de acuíferos contribuye a mejorar el conocimiento de las disponibilidades de estos recursos y a desarrollar políticas racionales de administración que garanticen su desarrollo sustentable

Los modelos matemáticos, aplicados a la hidrogeología, comienzan a desarrollarse en Cuba a finales de la década del 80, pero en la actualidad no tienen una amplia aplicación en la exploración y manejo de los acuíferos, a pesar de ser una herramienta muy rigurosa para lograr establecer el pronóstico del comportamiento del sistema.

En el presente trabajo se hace un exhaustivo análisis del desarrollo matemático que soporta al flujo de las aguas subterráneas en acuíferos confinados y no confinados. Se aplica además, la tecnología de la modelación para simular el funcionamiento hidrogeológico de la región acuífera del Noreste de Villa Clara, utilizando el software “AQÜIMPE”, desarrollado por el Centro de Investigaciones Hidráulicas del ISPJAE, el cual emplea el MEF como técnica numérica y constituye un paquete modular integrado de programas, que permite la simulación matemática del flujo lineal libre o confinado en medio poroso, en dos dimensiones del espacio y con impermanencia gradual. La base de datos que se maneja en la aplicación del software, está soportada en tecnología “SIG” con el uso del ArcView como software de interfase.

Summary

Mathematical models are broadly used in the different branches of the knowledge, as tools for the investigations, presage or predictions of the variables that compose it. In the decade of the 60 it is consolidated the paper of the simulation of the underground water like a way to represent the flow by means of a model and to predict the answers of the system. The application of the technology of the mathematical modelation of aquifers contributes to improve the knowledge of the readiness of these resources and to develop rational politics of administration that guarantee its sustainable development.

Mathematical models, applied to the hydrology, begin to be developed in Cuba at the end of the decade of the 80, but at the present time they don't have a wide application in the exploration and handling of the aquifers, in spite of being a very rigorous tool to be able to establish the presage of the behavior of the system.

In the present work it is made an exhaustive analysis of the mathematical development that supports the flow of the underground waters in confined and not confined aquifers. It also applies, the technology of the modelation to simulate the operation hydrogeology of the aquifer region of the Northeast of Villa Clara, using the pattern "AQÜIMPE", developed by the Center of Hydraulic Investigations of the ISPJAE, which uses the MEF like numeric technique and it constitutes a package to modulate integrated of programs that it allows the mathematical simulation of the free lineal flow or confined between porous, in two dimensions of the space and with gradual impermanency. The database that is managed in the application of the pattern, is supported in technology "SIG" with the use of the ArcView like interface software.

Pensamientos

"La felicidad no está en hacer lo que se quiere, sino en amar lo que uno hace".

Ernesto Che Guevara

"El que posee las nociones más exactas sobre las causas de las cosas y es capaz de dar perfecta cuenta de ellas en su enseñanza, es más sabio que todos los demás en cualquier otra ciencia".

Aristóteles

"La inteligencia consiste no sólo en el conocimiento, sino también en la destreza de aplicar los conocimientos en la práctica".

Aristóteles

"Saber es acordarse."

Aristóteles

"La voz del intelecto es apagada, pero no descansa hasta haber logrado hacerse oír, y siempre termina por conseguirlo después de ser rechazada infinitas veces".

Sigmund Freud

"Si tu intención es describir la verdad, hazlo con sencillez y la elegancia déjasela al sastre".

Albert Einstein

"La imaginación es más importante que el conocimiento."

Albert Einstein

"Pienso, luego existo."

René Descartes

"Para investigar la verdad es preciso dudar, en cuanto sea posible, de todas las cosas."

René Descartes

"Divide las dificultades que examines en tantas partes como sea posible, para su mejor solución."

René Descartes

Dedicatoria

Quisiera Dedicar este trabajo en especial a:

“A mi abuela Clara, donde quiera que esté ahora y que no pudo verme graduado”...

“A mi madre, por brindarme tanto amor, apoyo y sacrificarse tanto por mí”...

“A mi abuelo Joaquín, por contribuir de manera significativa a que yo pudiera terminar mis estudios”...

“A mi novia Leidy, por estar a mi lado en los buenos y malos momentos alentándome, por su paciencia, comprensión y entrega”...

“A todo el que convive conmigo, por brindarme el amor de lo que llamamos familia”...

“A todos mis amigos y compañeros, por lo mucho que significan para mí”...

Agradecimientos

En mi opinión Agradecer no es difícil, lo difícil es saber cómo y a quien. Por lo tanto aspiro agradecer en este trabajo a:

“A mi madre, hermana y abuelo, porque sin ellos no hubiera podido terminar mis estudios”...

“A mi tutor Fermín Sarduy Quintanilla por el apoyo incondicional que me ofreció y por la sincera amistad que hemos entablado”...

“A mi tutor Yoan Hernández Rodríguez, por la generosa y cordial ayuda que me proporcionó”...

“A mi novia Leidy, por aconsejarme y guiarme en todo este proyecto”...

“A mi profesora Lucía Argüelles Cortés por proporcionarme tan buen ejemplo a seguir y apoyarme durante toda la carrera”...

“A todos mis compañeros de carrera por los buenos momentos que pasamos juntos en la Universidad”...

“A Monte, Miriam, abuela Carmen, Carmen Lidia, Rosalía y a todos los que de una forma u otra contribuyeron en la realización de este trabajo”...

CAPÍTULO I: ELEMENTOS DE HIDROGEOLOGÍA.....	1
1.1. Definición de conceptos fundamentales y uso frecuente en hidrogeología.....	1
1.2. Esquema General del Ciclo Hidrogeológico en la Naturaleza.....	10
1.3. Introducción de los Sistemas de Información Geográfica (SIG).....	12
 CAPÍTULO II: MODELACIÓN Y FUNDAMENTACIÓN MATEMÁTICA.....	16
2.1. Ecuación de Continuidad.....	16
2.2. Acercamiento o aproximación macroscópica.....	20
2.3. Ecuación de Movimiento.....	21
2.4. Extensiones de la Ley de Darcy.....	25
2.5. Ecuaciones de flujo del agua subterránea en general.....	27
2.6. Ecuación de flujo del agua subterránea.....	28
2.7. Condiciones de contorno.....	30
2.8. Formulación por elementos finitos para acuíferos.....	32
2.8.1 Formulación por elementos finitos para acuíferos confinados.....	33
2.8.1.1 Ecuaciones de flujo para acuíferos confinados.....	33
2.8.1.2 Ecuación de Transporte.....	35
2.8.1.3 Formulación numérica.....	37
2.8.1.4 Formulación numérica de la ecuación de flujo.....	37
2.8.1.5 Formulación numérica de la ecuación de transporte.....	39
2.8.1.6 Interpretación física de la ecuación de flujo.....	40
2.8.1.7 Interpretación física de la ecuación de transporte.....	42
2.8.2 Formulación por elementos finitos para acuíferos no confinados.....	45
2.8.2.1 Ecuaciones de flujo para acuíferos no confinados.....	45
2.8.2.2 Aproximaciones empleadas.....	46
2.8.2.3 Formulación numérica de la ecuación de flujo.....	49
2.8.2.4 Esquema iterativo de solución.....	51
2.8.2.5 Método de Newton-Raphson.....	51
2.8.2.6 Criterios de convergencia. Control del incremento de tiempo.	52
 CAPÍTULO III: APLICACIÓN DEL MODELO EN LA REGIÓN ACUÍFERA DEL NORESTE DE VILLA CLARA.	54
3.1. El acuífero como sistema.....	54
3.2. Aplicación de Aqüimpe en la Región Acuífera del Noreste de Villa Clara.....	59
3.3. Discretización de la región de estudio.....	60
3.4. Numeración de los elementos (triángulos) y nodos.....	64
3.5. Modelo conceptual del sistema acuífero.....	66
3.6. Resultados del modelo.....	68
 CONCLUSIONES.....	71
RECOMENDACIONES.....	72
BIBLIOGRAFÍA.....	73
ANEXOS.....	77

Introducción

El papel del recurso agua subterránea, hoy en día, es de gran interés en el planeamiento hidráulico y socioeconómico de cualquier país, pues es un elemento que se puede aprovechar, a veces imprescindible, para lograr un desarrollo sostenible y evitar o reducir las contradicciones entre este desarrollo y la conservación de estas importantes reservas naturales.

En Cuba, los recursos hídricos subterráneos tienen una amplia utilización, pues alrededor del 50% del recurso hídrico en explotación total, es de origen subterráneo; en abasto a población, más del 70 % del total explotado, es agua subterránea. Hay provincias con este abasto, sólo o mayoritariamente de aguas subterráneas.

Por todo lo anterior (al alto rendimiento que presentan las obras de captación, la poca profundidad a que se encuentran los niveles subterráneos y la buena calidad de esta agua, etc.), el agua subterránea es una fuente de abastecimiento de rápida utilización y bajo costo de inversión y explotación, en comparación con las obras hidráulicas superficiales.

La evolución de las reservas y el conocimiento de los recursos de aguas subterráneas constituyen una base fundamental en la puesta en marcha de una explotación racional. Pueden constituir aspectos muy importantes en el desarrollo agrícola e industrial de una región.

Un estudio hidrogeológico regional debe apoyarse en un inventario detallado de los acuíferos, complementado de una estimación de las reservas útiles y, a ser posible, de un balance. Estos aspectos permiten establecer un programa de explotación racional.

En el presente trabajo se hace un exhaustivo análisis del desarrollo matemático que soporta al flujo de las aguas subterráneas en acuíferos confinados y no confinados. Se aplica además, la tecnología de la modelación para simular el funcionamiento hidrogeológico de la región acuífera del Noreste de Villa Clara (Fig. 3.2), utilizando el software “AQÜIMPE”, desarrollado por el Centro de Investigaciones Hidráulicas del ISPJAE, el cual emplea el MEF como técnica numérica y constituye un paquete modular integrado de programas, que permite la simulación matemática del flujo lineal libre o confinado en medio poroso, en dos dimensiones del espacio y con impermanencia gradual. La base de datos que se maneja en la aplicación del modelo, está soportada en tecnología “SIG” con el uso del ArcView como software de interfase.

En la Región Acuífera del Noreste de Villa Clara, se han realizado más de 70 investigaciones aisladas y aunque algunas han abarcado áreas de gran extensión, en ninguna se ha estudiado la región como un “sistema integrado”. Con esto, el volumen de información que existe es elevado, aunque no es homogéneo para todos los tramos y bloques hidrogeológicos, lo que implica la necesidad de utilizar herramientas capaces de manejar gran cantidad de información e integrarlas para su análisis.

Tampoco se conoce el funcionamiento hidrogeológico integral de la región y por lo tanto el manejo de las aguas subterráneas se limita al análisis que se deriva del monitoreo independiente de los bloques fundamentales. Por consiguiente, no se cuenta con una herramienta capaz de establecer pronósticos del comportamiento del sistema y que permita explotar los recursos hídricos subterráneos con seguridad y garantía.

La literatura actual sobre el tema de la modelación matemática de acuíferos es ya numerosa y amplia y se ha avanzado hasta abarcar problemas tridimensionales, con fenómenos de difusión, anisotropía y otros (*Martínez J. B., 1989*). El uso de modelos con tales grados de refinamiento debe adaptarse solo cuando así lo justifique la naturaleza del problema a resolver y cuando se pueda disponer de una base informativa mínima que lo haga objetivamente factible.

La experiencia desarrollada en estos años en la contrastación del software “AQÜIMPE” con la práctica real, permite reacomodarlo para su empleo general en cualquier acuífero, como herramienta para el estudio regional del flujo, para valoraciones de reservas y para el pronóstico del comportamiento futuro ante posibles cambios o adiciones en el régimen de explotación (*Martínez J. B., 1989*).

Problema:

Insuficiente conocimiento sobre el desarrollo matemático del flujo subterráneo en diferentes tipos de acuíferos y ausencia de la aplicación de modelos matemáticos en la simulación del funcionamiento hidrogeológico de los acuíferos en Villa Clara.

¿Son suficientes las herramientas de uso actual para el manejo sostenible de los principales acuíferos de Villa Clara?

Hipótesis General:

Con un profundo conocimiento del tratamiento matemático del flujo de las aguas subterráneas en los distintos tipos de acuíferos, permite aplicar correctamente los diferentes modelos desarrollados en la

actualidad para la simulación de su funcionamiento. Estos modelos a la vez, constituyen eficientes herramientas para el manejo de dichos acuíferos.

Objetivo General:

Profundizar en el desarrollo matemático de las ecuaciones que gobiernan el flujo de las aguas subterráneas para la construcción de modelos matemáticos que simulen su funcionamiento.

Objetivos específicos:

1. Realizar un reordenamiento y actualización de las bases de datos que existen de la Región Acuífera del Noreste de Villa Clara, con el empleo de Sistemas de Información Geográfica (SIG).
2. Mostrar el campo de aplicación de la tecnología de la modelación en el caso de estudio de la Región Acuífera del Noreste de Villa Clara.

Estructura de la tesis

- Introducción.
- Capítulo I. Elementos de Hidrogeología.
- Capítulo II. Modelación y Fundamentación matemática.
- Capítulo III. Aplicación del modelo en la Región Acuífera del Noreste de Villa Clara.
- Conclusiones.
- Recomendaciones.
- Bibliografía.
- Anexos.

Capítulo I: Elementos de Hidrogeología

La hidrogeología está estrechamente vinculada a otras ramas de la ciencia, tales como la hidráulica, en el diseño de presas, canales de riego, acueductos, puentes, caminos y carreteras. Además, también es una valiosa herramienta para los diseñadores de obras protectoras de las ciudades y objetivos civiles de gran valor. Algunos incluyen también el término geohidrología (estudio de las aguas subterráneas).

La parte sólida del globo terráqueo o litosfera, es estudiada por la geología, la geofísica y otras ciencias y esta constituye el soporte estructural de los acuíferos; cuya interrelación con la dinámica y las leyes que rigen el régimen de las aguas subterráneas, constituye el campo de estudio de la Hidrogeología.

1.1. Definición de conceptos fundamentales y de uso frecuente en hidrogeología.

“La geología es la base fundamental en la que se apoya todo estudio hidrogeológico”.

“En hidrogeología lo importante es saber distinguir entre materiales permeables e impermeables y su grado de porosidad”.

Agua subterránea: en sentido general, es el agua subsuperficial, que incluye cursos de agua subterráneos y que es distinta del agua superficial.

Acuífero: un acuífero es una unidad geológica de estructura permeable que permite el almacenamiento y el movimiento del agua a través del material que lo constituye (Fig. 1.1).

Tipos de acuíferos:

1. **Acuífero no confinado:** es aquella formación geológica que permite que el agua subterránea esté sometida a la presión atmosférica, sin ningún tipo de confinamiento. Se conoce también como acuífero libre, freático o no artésiano.
2. **Acuífero confinado:** es aquella formación geológica que disponga de unos sedimentos impermeables que hagan separar el agua de la actuación directa de la presión atmosférica. Al hacer una perforación el agua ascendería por encima del techo de la formación. Se conoce también como acuífero a presión, artésiano o cautivo.
3. **Acuífero acuitardo:** es aquella formación geológica que transmite muy lentamente el agua.
4. **Acuífero acuicludo:** es aquella formación geológica que almacena agua, pero que prácticamente no la transmite.
5. **Acuífero acuífugo:** es aquella formación geológica que no transmite ni almacena agua.

6. **Acuífero colgado**: es el acuífero no saturado que se encuentra separado de un cuerpo importante de agua subterránea inferior por una zona no saturada (Fig. 1.4).

Nota: el movimiento del agua subterránea se desplaza de niveles de potencial altos a más bajos.

Curiosidad: la palabra acuífero se origina del latín “acuí”, es una forma derivada de “aqua”, que significa “agua” y “fer”, que se deriva de “ferre”, soportar. Por tanto, un acuífero, literalmente, es un soporte de agua. El sufijo “clude”, de acuicludo se deriva del latín “claudere”, cerrar. Análogamente, el sufijo “fugo”, de acuífugo, viene de “fugere”, que se fuga.

Gradiente hidráulico: es la pérdida de carga que experimenta el agua subterránea a través del acuífero.

- El gradiente hidráulico, es proporcional a la longitud recorrida y la carga existente entre los puntos considerables.

Notación del gradiente hidráulico (**I**):

$$I = \frac{h_1 - h_2}{L}$$

En general: $I = \frac{dh}{dL}$

Permeabilidad o conductibilidad hidráulica (K): se define como permeabilidad el caudal de agua que se filtra a través de una sección terreno, unidad, bajo la carga producida por un gradiente hidráulico unitario.

La permeabilidad del terreno es: $K = C \cdot d^2$

Unidades de medida: (m/día) o (cm./s)

Conductividad hidráulica (k): es un coeficiente de proporcionalidad que describe la velocidad a la que el agua se mueve a través del medio permeable. Depende de la densidad y la viscosidad del fluido. Posee dimensiones de velocidad. Con frecuencia se denomina *permeabilidad*.

La conductividad hidráulica es: $k = \frac{\rho}{\mu} C \cdot d^2$

C: es un factor de forma, para tener en cuenta la disposición de los granos, el tipo de estratificación, la compartación de los elementos del agua. (Todo lo anterior puede influir en la circulación del agua)

d: es el valor medio de los granos.

ρ : Densidad.

μ : Viscosidad.

Nota: la conductibilidad hidráulica es la permeabilidad afectado por la densidad y viscosidad.

Transmisividad (T): se define como el caudal que se filtra a través de una sección vertical de terreno de ancho unidad y altura igual a la del acuífero saturado, bajo gradiente y temperatura constante (Fig. 1.3). La transmisividad se expresa por:

$$T = K \cdot b$$

$$T = C \cdot d^2 \cdot b$$

b: espesor del acuífero saturado.

La ecuación dimensional de la transmisividad es: $(T) = L^2 \times T^{-1}$

Unidades de medida: (m^2 / dia) o $(m^2 / segundos)$

Nota: la diferencia entre transmisividad y permeabilidad es el espesor del acuífero saturado, por lo que la transmisividad relaciona a la permeabilidad con la verticalidad.

Porosidad: es el cociente del volumen de poros y fisuras respecto al volumen total de una porción de terreno.

Porosidad eficaz y coeficiente de almacenamiento:

Porosidad eficaz: la porosidad eficaz es el volumen de agua extraíble por bombeo de una muestra de material permeable inicialmente saturado, con respecto al volumen total de la muestra.

- En acuíferos libres la porosidad efectiva coincide con el coeficiente de almacenamiento y su valor suele oscilar entre 0,01 y 0,4.

Coeficiente de almacenamiento: es el volumen de agua que libera o toma un acuífero por unidad de superficie del acuífero y por unidad de variación del nivel piezométrico (Fig. 1.2).

Coeficiente de infiltración: es la fracción de la precipitación que penetra en el terreno.

Condiciones de contorno: es un conjunto de condiciones que debe satisfacer la solución de una ecuación diferencial en los límites o contornos (incluyendo el contorno del fluido) en la región de interés.

Contenido de agua: se expresa mediante el cociente de la masa de agua respecto de la masa total o de la masa del sólido, o como el cociente del volumen de agua respecto el volumen total de la muestra. También se llama *humedad del terreno*.

Descenso: es la disminución del nivel del agua que tiene lugar en un pozo debido a la extracción de agua subterránea.

Escorrentía: es el volumen o caudal total de agua que fluye a los ríos. Incluye los flujos o escorrentías superficial, de retorno, subsuperficial y de base.

Flujo: movimiento del agua. Con frecuencia es sinónimo de *caudal* y *de escorrentía*.

Manantial: descarga de agua subterránea al exterior, concentrada en un punto o a lo largo de una línea.

Recarga: es la entrada neta de agua en el terreno (infiltración menos evaporación menos escorrentía subsuperficial) que se transmite hasta los acuíferos. Se mide como una tasa (altura/tiempo o un caudal).

Surgencia: es un manantial alimentado por un acuífero confinado que descarga a través de una fisura u otra apertura.

Nivel del agua subterránea: es la altura, en un determinado punto y para un tiempo en concreto, del nivel freático o de la superficie piezométrica de un acuífero. Puede variar con la profundidad.

Nivel freático o libre: es el nivel de agua subterránea de un acuífero no confinado, dónde la presión es igual a la presión atmosférica.

Nivel piezométrico: (a) es el nivel al que asciende el agua de un determinado acuífero cuando se mide con un piezómetro. (b) Es la suma de los términos de energía potencial y de presión, expresados en unidades de longitud.

Superficie piezométrica: es el nivel que alcanza el agua en los piezómetros dentro del mismo acuífero. Generalmente esta superficie no es horizontal ni plana sino curva, y refleja la distribución del potencial hidráulico; es decir, de la energía mecánica del agua dentro del acuífero a la profundidad a la que llegan los piezómetros.

Capa confinante: es la formación menos permeable situada por encima o por debajo a un acuífero.

Área de captación: es el área que se encuentra entre la zona en que se produce la recarga y el lugar de descarga.

Capacidad de campo: es la cantidad de agua que queda retenida en el terreno después de que el agua gravitacional haya sido drenada.

Punto de agua: es todo pozo (excavado o perforado), sondeo, piezómetro, manantial, etc..., existente en un nuestra zona de estudio, que pueda ser medido su nivel isométrico o afocado.

Sondeo: toda perforación realizada por medio de una sonda que tenga como máximo un diámetro de 130 mm.

- Realmente los sondeos superiores a 100 mm deben entrar dentro de la denominación de pozo. Actualmente existen bombas capaces de extraer agua en este diámetro.

Pozo: toda perforación, ya sea excava a mano o maquina, que tenga un diámetro superior a 130 mm. En la practica los pozos realizados con maquinas presentan diámetros comprendidos entre 200 a 600 mm, que son los usuales de perforación.

Pozo de observación: es el pozo que se utiliza para medir el nivel estático del agua subterránea, y especialmente para observar la frecuencia y la magnitud de los cambios en los niveles o de otros parámetros físicos o químicos.

Pozo artesiano: es un pozo que intercepta un acuífero confinado en el que el nivel estático del agua se encuentra por encima de la superficie del terreno. Se prefiere la designación *pozo surgente*.

Piezómetro: teóricamente es todo punto que pueda servirnos para determinarnos el potencial del acuífero.

- Idealmente seria un taladro muy fino que alcanzase simplemente el nivel piezométrico del acuífero, este caso correspondería a un piezómetro perfecto.
- En la realidad, lo que utilizamos son piezómetros imperfectos, un sondeo de diámetro suficiente como para poder medir su altura piezométrica.

Caudal: es el volumen por unidad de tiempo.

Caudal seguro: es el caudal medio que se puede extraer a largo plazo de un acuífero o sistema acuífero, o de un sistema de agua superficial, sin causar resultados no deseables.

Caudal crítico: es el caudal óptimo de explotación. Para un ligero aumento de este caudal, los niveles de agua en el pozo descienden rápidamente.

Caudal específico de un pozo: es el cociente entre caudal bombeado y el descenso de nivel producido.

Eficiencia de un pozo: es el cociente entre el descenso que hemos previsto, descenso teórico, y el descenso real que hemos medido.

$$Ef. = \frac{\text{descenso}(\text{previsto})}{\text{descenso}(\text{real})}$$

Ensayo de bombeo: toda extracción de agua continuada durante un cierto tiempo t, que nos permita deducir con certeza la transmisividad o transmisividades de los acuíferos atravesados por un pozo, por cualquiera de los métodos convencionales.

Captación: el lugar donde se realiza la toma de una cantidad determinada de agua, puede ser un pozo, manantial, galería, etc.

Zona de saturación o saturada: es la zona del terreno en la que todos los intersticios están ocupados por agua a una presión igual o mayor que la atmosférica.

Zona intermedia: es la parte de la zona no saturada que se encuentra bajo la zona radicular y por encima de la zona capilar.

Zona no saturada: es la zona que se encuentra entre la superficie del terreno y el nivel freático. Incluye la zona radicular, la zona intermedia y la zona capilar. Los poros de esta zona contienen agua que se encuentra a una presión menor que la atmosférica y también contienen aire y otros gases. En esta zona pueden encontrarse niveles saturados, tales como los acuíferos colgados. También se la denomina *zona de aireación* o *zona vadosa*.

Zona radicular o radical: es la zona que se extiende desde la superficie del terreno hasta el nivel que alcanzan las raíces de las plantas. Puede contener parte o toda la zona no saturada, dependiendo de la profundidad de las raíces y del nivel freático.

Línea de corriente: una línea de corriente es una línea continua trazada en el fluido que es en cada punto tangente al vector velocidad. A través de una línea de corriente no puede pasar fluido.

Reservas y recursos de agua subterránea:

Reservas de aguas subterráneas:

Las reservas de aguas subterráneas representan el volumen de agua almacenada en el o los acuíferos, que viene a significar en un sentido mas amplio la totalidad de agua movilizable existente en un acuífero o sistema.

Su importancia esta en estrecha relación directa con:

- Las estructuras geológicas y condiciones hidrogeológicas, que determinan la forma y las dimensiones del volumen total y nos indican el tipo de acuífero confinado o libre. En los libres, la forma y especialmente las fluctuaciones del nivel piezométrico.
- Los parámetros hidrogeológicos de los acuíferos considerados: porosidad eficaz y coeficiente de almacenamiento útiles para acuíferos libres y confinados respectivamente.

Clasificación de las reservas:

En función de las condiciones hidrogeológicas y las precipitaciones, podemos distinguir:

1. Reservas reguladoras.
2. Reservas geológicas o seculares.
3. Reservas naturales.
4. Reservas explotables.

Reservas reguladoras:

Representan la cantidad de agua libre almacenada en el curso de una recarga importante por alimentación natural, evolucionan, por tanto, con la variación interanual de las precipitaciones. Su estimación esta ligada al año hidrogeológico.

Las reservas reguladoras están en relación estrecha con las variaciones de los niveles piezométricos, ya que estos varían en función de la precipitación y de la infiltración eficaz.

Es obvio pensar que, en los acuíferos conectados a una red fluvial, las reservas reguladoras están también relacionadas a la red, llegando al aumento de niveles y aumentando su capacidad, que podríamos denominar capacidad útil del embalse subterráneo; este hecho puede sobrevenir cuando el acuífero se somete a una intensa explotación.

Reservas geológicas o seculares:

Están en relación con un ciclo plurianual de las precipitaciones, permitiendo una explotación más importante regularizada a lo largo de ciclos de varios años. Estas reservas pueden constituir, en el caso limite, las aguas fósiles.

Reservas naturales:

Las reservas reguladoras, mas las reservas geológicas, constituyen las reservas naturales. Así, pues, la totalidad de agua libre que contiene un horizonte acuífero, desde el nivel impermeable hasta el nivel piezométrico, en el momento considerado, constituyen estas reservas, que equivaldría al volumen de agua subterráneamente embalsada en un momento dado.

Reservas explotables:

No todas las reservas naturales pueden ser explotadas por razones técnicas. En este caso, se consideran como explotables las reservas reguladoras y parte de las geológicas. La parte que deberemos tomar de las reservas geológicas será función de: la precipitación, del flujo lateral de otras formaciones, de una posible intrusión marina, en general de las consideraciones técnicas del momento. La parte no explotable podría denominarse reservas subterráneas netas o brutas.

Recursos:

Los recursos de agua subterránea representan el volumen de agua explotable, desconectando las reservas. Dependen:

- De la precipitación media anual.
- De las reservas.
- De las posibilidades de explotación del acuífero, que a su vez dependan: de las características del acuífero, transmisividad, y de las técnicas, obras de captación.

- De la recarga y descarga.

Clasificación de los recursos:

1. Recursos potenciales teóricos, constituyen el volumen de agua que proviene de acuíferos colindantes y de la infiltración.
2. Recursos potenciales reales, son los anteriores descontando las pérdidas por conexión hidráulica a otros acuíferos laterales de menor potencial y la evapotranspiración.
3. Recursos explotables, representan parte de los recursos potenciales reales, cuya explotación está condicionada por:
 - a) Las reservas.
 - b) Las características técnicas de la explotación.

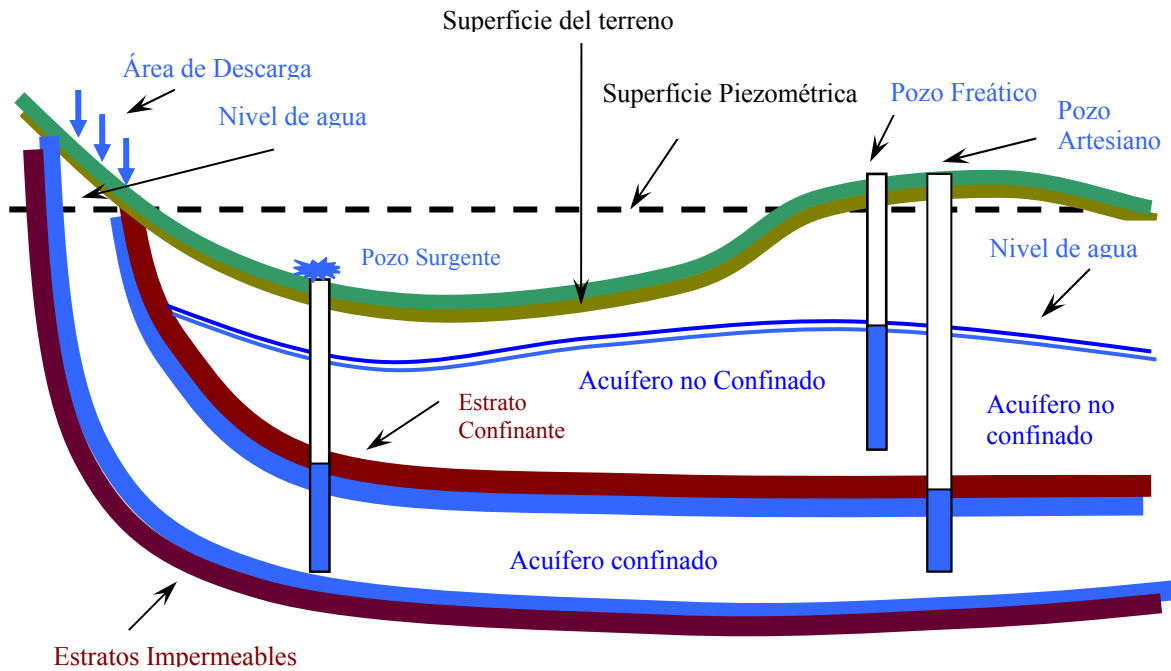


Fig. 1.1 Acuífero confinado y no confinado.

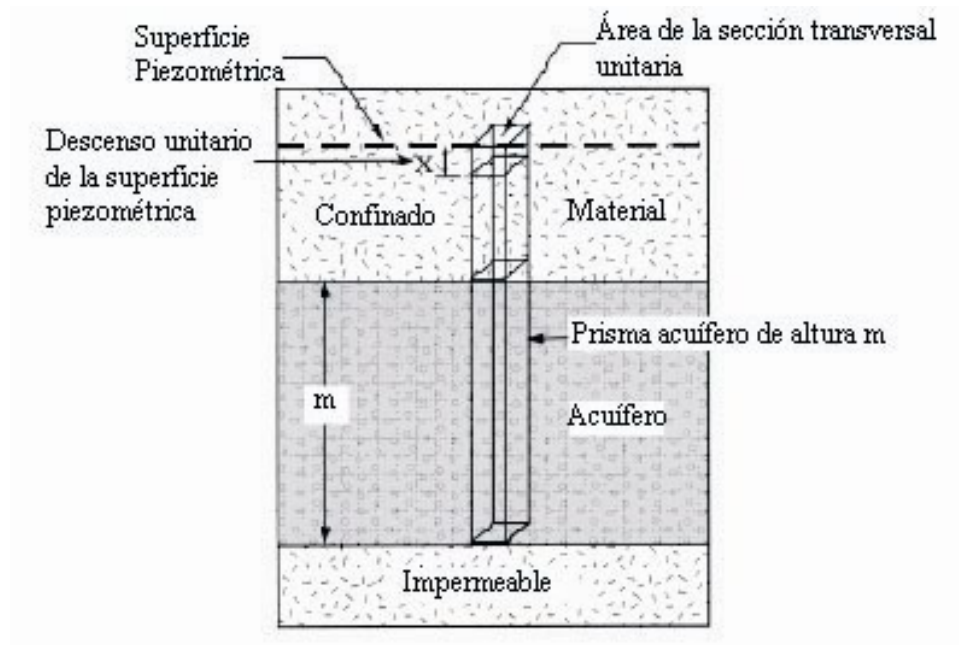


Fig. 1.2 Ilustración del coeficiente de almacenamiento en acuíferos confinados.

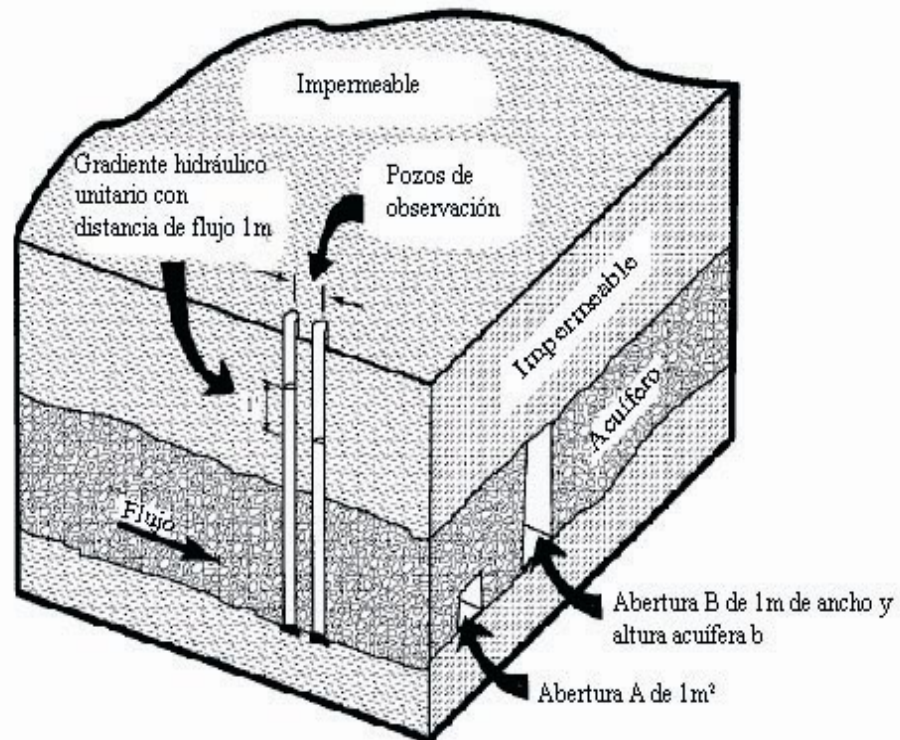


Figura 1.3 Ilustración de la transmisividad.

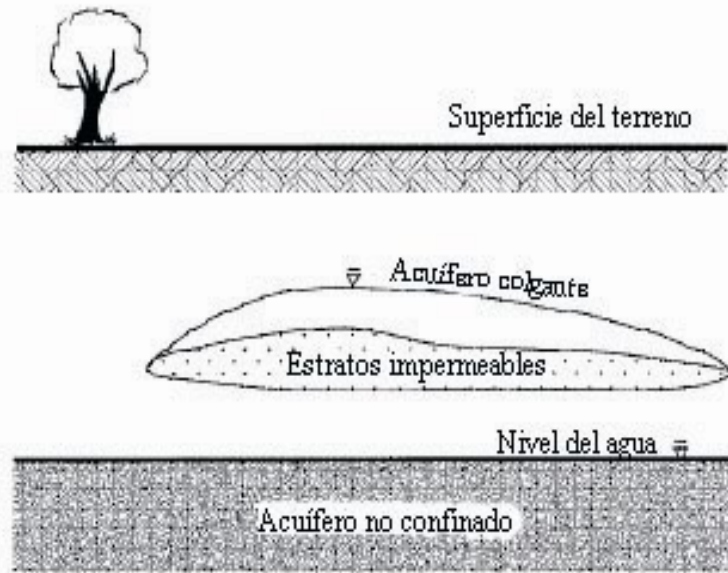


Fig. 1.4 Ilustración de un acuífero colgante.

1.2. Esquema General del Ciclo Hidrológico en la naturaleza.

Ciclo hidrológico: es una sucesión de pasos durante los cuales el agua pasa de la atmósfera al terreno y vuelve a la atmósfera. Incluye la evaporación desde el suelo o del mar o del agua continental, la condensación para formar las nubes, la precipitación, la acumulación en el terreno o en los embalses de agua, y la reevaporación.

Veamos el siguiente esquema del ciclo hidrológico que actúa una y otra vez en la naturaleza (Fig.1.5).

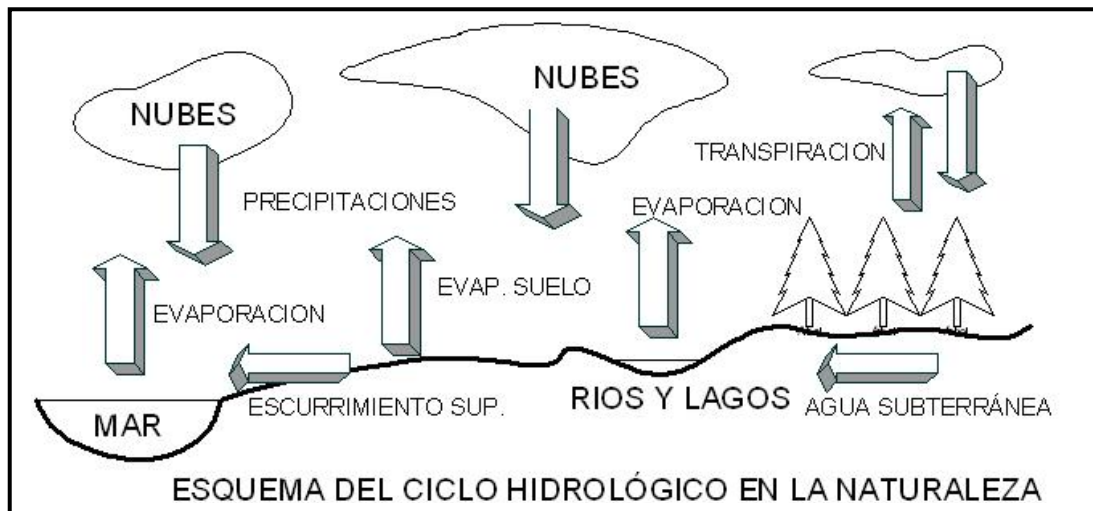


Fig. 1.5 Esquema del Ciclo Hidrológico en la Naturaleza

Si observamos detenidamente la figura anterior y hacemos un balance en la región del mar podemos concluir que:

$$E_m = P_m + h_s \quad (1)$$

Donde:

E_m : es la evaporación desde el mar.

P_m : es la lluvia que cae sobre el mar.

h_s : es el escurrimiento superficial de la cuenca.

Y en la zona del suelo será:

$$E_s = P_s - h_s \quad (2)$$

Donde:

E_s : es la evaporación desde la tierra.

P_s : es la lluvia que cae sobre la tierra.

h_s : es el escurrimiento superficial de la cuenca.

Luego si mezclamos la ecuación 1 con la 2 obtendremos la ecuación general del balance hídrico de todo el globo terráqueo, esto es:

$$E_m + E_s = P_m + P_s \quad (3)$$

Esto quiere decir que la suma de las evaporaciones desde el mar y la tierra son iguales a la suma de las precipitaciones sobre el mar y la tierra.

En la zona sin escurrimientos, es decir, $h_s = 0$ la ecuación se conforma:

$$E_s = P_s \quad (4)$$

Si aceptamos que la superficie del globo terráqueo tiene una superficie cercana a los 510 millones de Km² y de ellos los mares y los océanos ocupan un 71% (361 millones de km²) y la tierra un 21% (108 millones de km²). Un 8% es ocupado por lagos, lagunas y ríos (41 millones de km²)

Para cuencas específicas de ríos esta ecuación de balance se transforma en:

$$P_s + C_v + Q_{EAS} = h_s + E_v + Q_{ASS} \quad (5)$$

Donde:

P_s : es la lluvia que cae sobre la tierra.

C_v : es la condensación del vapor del agua en el aire.

Q_{EAS} : es el gasto del agua subterránea que entra al río.

h_s : es el escurrimiento superficial de la cuenca.

E_v : es la evaporación desde la tierra y el agua.

Q_{ASS} : es el gasto de salida del agua subterránea.

Para largos períodos de años esta anterior formula se convierte en:

$$h = P_s - E_v \quad (6)$$

Producto de que los gastos de las aguas subterráneas se igualan en el tiempo y la magnitud de C_v se desprecia.

1.3. Introducción de los Sistemas de Información Geografica (SIG).

¿Qué es un Sistema de Información Geográfica?

Un sistema de información geográfica (SIG) es un sistema de computación que utiliza información locacional, tal como domicilios números de lotes, números de lotes, distritos electorales, o coordenadas de longitud y latitud, para mapear información para mejor análisis. Con un SIG, uno puede mapear clientes para estudiar demografía, buscar patrones en la forma que se dispersa una enfermedad, modelar el paso de la información atmosférica, y muchos más.

Un SIG puede mapear cualquier información almacenada en plantillas o bases de datos, que tengan un componente geográfico que permita ver patrones, relaciones y tendencias que no pueden verse en un formato de tabla y lista. Da una perspectiva totalmente nueva y dinámica de la información, y ayuda a tomar mejores desiciones.

Un SIG puede ser un mayor soporte que la producción de mapas estáticos, aunque pueden producirse hermosos mapas con esta herramienta. El SIG es un sistema dinámico que permite seleccionar y eliminar cualquier criterio para mapear, para analizar rápidamente como diferentes factores afectan a un modelo o análisis.

El SIG funciona como una base de datos con información geográfica (datos alfanuméricos) que se encuentra asociada por un identificador común a los objetos gráficos de un mapa digital. De esta forma, señalando un objeto se conocen sus atributos e, inversamente, preguntando por un registro de la base de datos se puede saber su localización en la cartografía.

El Sistema de Información Geográfica separa la información en diferentes capas temáticas y las almacena independientemente, permitiendo trabajar con ellas de manera rápida y sencilla, y facilitando al profesional la posibilidad de relacionar la información existente a través de la topología de los objetos, con el fin de generar otra nueva que no podríamos obtener de otra forma.

¿Por qué un Sistema de Información Geográfica es importante?

Si se toma un momento para pensar sobre algunos de los temas mas importante que el mundo enfrenta actualmente como: contaminación, superpoblación, desastres naturales, y demás cada uno de ellos tiene una dimensión geográfica critica. Por ejemplo, mapear dónde la calidad del agua se deteriora puede dar nuevas aproximaciones sobre las fuentes de contaminantes, y formas de controlar su emisión. Temas locales, como porqué las primas de seguros son mas elevadas en algunas áreas que en otras, porqué las bananas crecen mejor en ciertos suelos que en otros, porque se producen embotellamientos de transito, también son afectados por geografía. Cuando se compra una casa nueva, probablemente se busquen propiedades cercanas a escuelas, dentro de un cierto tipo de barrio, debajo de un cierto precio, y con un determinado tamaño de lote. Cuando se considera el impacto de un desastre tal como un terremoto, necesita analizarse la información geológica y sísmica, y luego relacionarse con detalles sobre la población, propiedades e infraestructura que han sido o pueden ser afectadas. La solución a muchos problemas frecuentemente requiere acceso a varios tipos de información que sólo pueden ser relacionados por geografía. Sólo pueden ser relacionados por geografía. Sólo la tecnología de SIG permite almacenar y manipular información usando geografía y para analizar patrones, relaciones, y tendencias en la información, para ayudar a tomar mejores decisiones.

Tomar mejores decisiones con un SIG:

Existe un viejo refrán que dice “mejor información lleva a mejores decisiones” es verdad que para un SIG como es para otros sistemas de información. Un SIG, sin embargo no es un sistema automático de toma de decisiones, pero es una herramienta para consultar, analizar y mapear datos como soporte del proceso de toma de decisiones. La tecnología SIG ha sido usado para asistir en tareas tales como presentar información en encuestas de planeamiento, ayudar a resolver disputas territoriales y ubicar pilones de tal forma que minimicen la intrusión visual.

El SIG puede usarse para ayudar a tomar una decisión sobre la ubicación de una nueva adición de viviendas que tiene un impacto ambiental mínimo, se ubica en un área de bajo riesgo y esta cerca de un centro urbano. La información puede presentarse sucinta y claramente en la forma de un mapa e informe respectivo, permitiendo a los tomadores de decisiones enfocar en los temas reales más que en tratar de entender los datos. Dado que los productos de SIG pueden producirse rápidamente, cubren múltiples escenarios eficientemente y efectivamente.

Funciones de un SIG:

Las principales cuestiones que puede resolver un Sistema de Información Geográfica son:

1. **Localización:** preguntar por las características de un lugar concreto
2. **Condición:** el cumplimiento o no de unas condiciones impuestas al sistema.
3. **Tendencia:** comparación entre situaciones temporales o espaciales distintas de alguna característica.
4. **Rutas:** cálculo de rutas óptimas entre dos o más puntos.
5. **Pautas:** detección de pautas espaciales.
6. **Modelos:** generación de modelos a partir de fenómenos o actuaciones simuladas.

Definiciones de Sistema de Información Geográfica en la Web:

- Un Sistema de Información Geográfica (SIG o GIS en su acrónimo inglés) es un sistema de hardware, software, información espacial y procedimientos computarizados, que permite y facilita el análisis, gestión o representación del espacio.
- Sistemas informáticos para capturar, almacenar, comprobar, integrar, manejar, analizar y presentar datos espacialmente georeferenciados.
- En acepción puramente informática, conjunto de programas de ordenador que permiten la captura, gestión y modelización de información de tipo cartográfico, gráfico y alfanumérico, generando las denominadas relaciones topológicas entre variables espaciales. Desde un punto de vista temático, es un conjunto de ordenadores, programas, información georeferenciada, modelos de evaluación y técnicas de formación pluridisciplinar que desarrollan y explotan dicho sistema.
- Es el conjunto formado por Hardware, Software y procedimientos para capturar, manejar, manipular, analizar y representar datos georeferenciados, con el objetivo de resolver

problemas de gestión y planificación. Sistema Geodésico RE-50: Sistema sobre el cual se apoya la Red Geodésica Española.

- Conjunto de herramientas informáticas para reunir, almacenar, recuperar, transformar y cartografiar datos espaciales, que permiten múltiples aplicaciones para la investigación, planificación, presentación de resultados, etc.

Capítulo II: Modelación y Fundamentación Matemática.

El objetivo de este capítulo es mostrar el desarrollo lógico de ecuaciones que explican y predicen el movimiento del agua subterránea en dos y tres dimensiones como se observan en la naturaleza, así como la formulación utilizando el MEF de estas ecuaciones. El caso del flujo de agua subterránea es un caso especial de flujo de fluidos en medios de comunicación porosos y es gobernado por las leyes de la física, en particular las leyes de la Mecánica de Fluidos. La Mecánica de Fluidos trata el movimiento de fluidos y de las fuerzas que se ejercen en los cuerpos sólidos en contacto con fluidos. Los principios fundamentales, el de Conservación de masa y la Segunda Ley de Newton son suficientes para explicar el flujo del agua subterránea.

Por consiguiente, se expresan las ecuaciones del flujo del agua subterránea en la forma de ecuaciones diferenciales parciales, con las coordenadas espaciales y el tiempo como variable independiente.

Las variables que describen el estado del agua subterránea son funciones explícitas de posición y tiempo, en cuanto al caso del potencial, carga piezométrica o nivel.

$$h = h(x, y, z, t) \tag{1}$$

Donde h representa el potencial del agua subterránea, la posición del espacio es denotada por coordenadas cartesianas x, y, z , y el tiempo es representado por el símbolo t ; las variables x, y, z, t se consideran independientes, mientras que la variable h se considera dependiente.

[Cuando se introduzca una variable nueva, se indicarán las dimensiones entre corchetes].

Los símbolos utilizados se definen a continuación: por longitud [L], por tiempo [T], por masa [M], y por fuerza [F]. Para aplicaciones prácticas se pueden sustituir las dimensiones por cualquier conjunto consistente de unidades. Una opción lógica sería los Sistemas Internacionales de Unidades, respectivamente metros, segundos, kilogramos, y Newtons. Sin embargo, ya que el flujo del agua subterránea normalmente es sumamente lento, a menudo se usan en lugar de segundos días para la dimensión del tiempo.

2.1 Ecuación de Continuidad.

La primera ley fundamental que gobierna el flujo de agua subterránea es la ecuación de continuidad, que expresa el principio de conservación de la masa.

Consideremos un volumen de control elemental conformado por tierra y con un punto de entrada, el cual tiene coordenadas cartesianas (x, y, z) como se muestra en la Fig. 2.1. Está de costumbre y es conveniente escoger el eje- z vertical, el cual se orienta dirigido hacia arriba en la dirección positiva. El tamaño del volumen elemental está dado en las tres direcciones principales, en la dirección- x , en la dirección- y , y en la dirección- z . En cierto instante de tiempo t , la masa del agua subterránea, M , en el volumen de control elemental es:

$$M = \rho\theta\Delta x\Delta y\Delta z \quad (2)$$

Donde, θ es el volumen de la humedad del medio poroso (porosidad), con dimensiones $[L^3 / L^3]$, y ρ es la densidad del agua con dimensiones $[M / L^3]$. Los símbolos que se usaron son: $[L]$ por longitud, $[T]$ por tiempo, $[M]$ por masa. La cantidad de agua subterránea presente en el volumen de control puede cambiar cuando al mismo entra o sale agua por los lados. El principio de conservación de la masa implica que la diferencia entre entrada y salida, es balanceada por el cambio de almacenamiento con respecto al tiempo, o es necesario calcular los flujos del agua subterránea por los lados del volumen de control elemental para evaluar la diferencia entre entrada y salida dada por el principio de conservación de la masa. Se denota la cantidad de flujo del agua subterránea por medio del flujo, q , que es la descarga volumétrica o cadencia del flujo por área de la sección (Fig. 2.1).

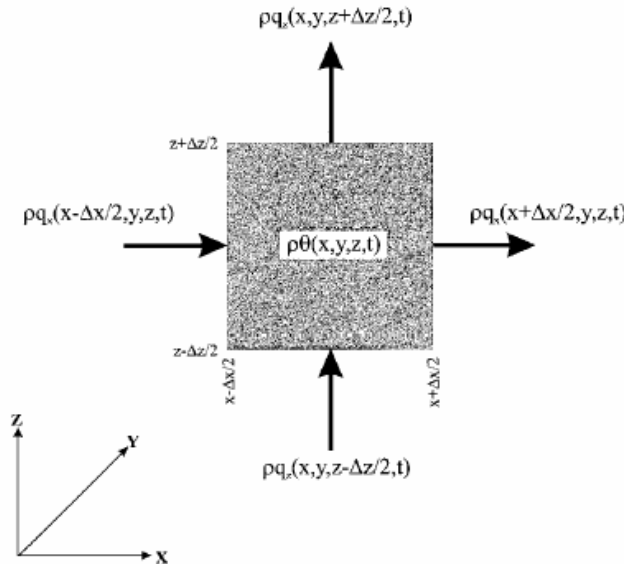


Figura 2.1 Representa la conservación de la masa, en una referencia de volumen elemental, el volumen real se encuentra en tres dimensiones, pero se pinta sólo en dos dimensiones x y z , para tener mayor claridad.

$$\frac{\partial M}{\partial t} = F_{\text{entrada}} - F_{\text{salida}} \quad (3)$$

Donde:

F_{entrada} : es la variable que me determina la entrada del flujo al volumen de control.

F_{salida} : es la variable que me determina la salida del flujo en el volumen de control.

La cantidad de flujo (q) es un vector cuyas componentes son x, y, z a lo largo de su dirección.

$q = (q_x, q_y, q_z)$; las dimensiones son $[L^3 / T / L^2 = L / T]$.

Por ejemplo, el flujo de la masa del agua subterránea situada a lo largo del lado izquierdo, del volumen de control, se da por:

$$\rho \cdot q_x (x - \Delta x / 2, y, z, t) \Delta y \Delta z \quad (4)$$

porque el Δx es pequeño, y la posición de q_x es $x - \Delta x / 2$, la cual se puede aproximar por una expansión de la serie de Taylor, donde sólo se mantienen los términos de primer-orden y los restantes son ceros, tal que se puede calcular la entrada como:

$$\left(\rho \cdot q_x - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial \rho q_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z \quad (5)$$

En esta expresión el término $\rho \cdot q_x$ y su derivada con respecto a x se evalúan en el centro del volumen del control. Se pueden establecer expresiones similares para los otros lados; por ejemplo el lado derecho tiene una posición del volumen del control $x + \frac{\Delta x}{2}$, se da la salida del agua subterránea por:

$$\rho \cdot q_x \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z, t \right) \Delta y \Delta z \approx \left(\rho \cdot q_x + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial \rho q_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z \quad (6)$$

Se puede calcular la diferencia entre entrada y salida total como:

$$\begin{aligned} & \left(\rho \cdot q_x - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial \rho q_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z + \left(\rho \cdot q_y - \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial \rho q_y}{\partial y} \right) \Delta x \Delta z + \left(\rho \cdot q_z - \frac{\Delta z}{2} \frac{\partial \rho q_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \\ & - \left(\rho \cdot q_x + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial \rho q_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z - \left(\rho \cdot q_y + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial \rho q_y}{\partial y} \right) \Delta x \Delta z - \left(\rho \cdot q_z + \frac{\Delta z}{2} \frac{\partial \rho q_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \dots (7) \end{aligned}$$

Trabajando término-a-término y agrupando convenientemente se obtiene la siguiente expresión:

$$-\left(\frac{\partial \rho q_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho q_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho q_z}{\partial z}\right) \Delta x \Delta y \Delta z \quad (8)$$

Utilizando el operador diferencial $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ se puede escribir éste como:

$$-\nabla \cdot (\rho q) \Delta x \Delta y \Delta z \quad (9)$$

donde el punto representa el funcionamiento del producto escalar del vector (ρq) .

El principio del balance de masa que entra, menos la que sale es igual al cambio en almacenamiento; utilizando la ecuación (2) se da el cambio en almacenamiento por:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \theta \Delta x \Delta y \Delta z) \quad (10)$$

En esta expresión las variables que pueden cambiar verdaderamente con el tiempo son el volumen del agua, θ , porque los poros se puede vaciar o llenar de agua, la densidad del agua, ρ , porque el agua es compresible y el tamaño del volumen de control, $\Delta x \Delta y \Delta z$, porque el medio poroso puede ser compresible. Sin embargo, por el último se asume bajo condiciones naturales que la deformación vertical Δz necesita ser considerada de tal forma que sólo dependa del tiempo, mientras que $\Delta x \Delta y$ permanecen constantes. Se puede resolver el término de almacenamiento utilizando las reglas de diferenciación:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \theta \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z + \rho \frac{\partial \theta}{\partial t} \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z + \rho \cdot \theta \cdot \Delta x \cdot \Delta y \frac{\partial \Delta z}{\partial t} = \rho \left(\frac{\theta}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\theta}{\Delta z} \frac{\partial \Delta z}{\partial t} \right) \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \quad (\text{ec. 11})$$

La compresión de una formación porosa se puede expresar en función de la presión del agua (Oso, 1972) como:

$$\frac{1}{\Delta z} \frac{\partial \Delta z}{\partial t} = \alpha \frac{\partial p}{\partial t} \quad (12)$$

Donde α es el coeficiente de la compresibilidad elástico de la formación porosa, con dimensiones $[L^2 / F]$ y representa la presión del agua subterránea. La compresibilidad del agua puede ser expresada por una ley similar:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \beta \frac{\partial p}{\partial t} \quad (13)$$

Donde β es el coeficiente de la compresibilidad del agua $[L^2 / F]$.

En la densidad se asumen otros efectos, como solutos o temperatura, los cuales se pueden ignorar por ser de menor importancia. Substituyendo estas relaciones en el término del almacenamiento queda:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \rho \left[\theta(\alpha + \beta) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \quad (14)$$

La ecuación anterior (ec. 14), representa a la ecuación de continuidad para el cambio en almacenamiento. Para obtener el balance de masa por unidad de volumen del medio poroso, igualamos la ecuación de continuidad para el cambio de almacenamiento (ec. 14) a la ecuación de entrada del flujo (ec. 9), dividiendo ambos miembros por $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$, obtenemos el siguiente resultado:

$$\rho \left[\theta(\alpha + \beta) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] = -\nabla \cdot (\rho \cdot q) \quad (15)$$

Esta relación declara el principio de conservación de la masa de agua subterránea en su forma más general. Sin embargo, a menudo la densidad del agua cambia lo cual no es de gran importancia, y se puede obtener una simplificación de la ecuación de continuidad dividiendo la ecuación (15) por la densidad ρ y omitiendo la diferencia de densidad espacial.

$$\left[\theta(\alpha + \beta) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho \cdot q) \approx -\nabla \cdot q \quad (16)$$

En la simplificación de la ecuación de continuidad, se expresa el equilibrio del agua subterránea en una base de volumen. El lado izquierdo de la ecuación nos expresa el cambio en volumen del agua subterránea en el medio poroso; este cambio en almacenamiento puede ser debido a la compresión del medio y el agua, o debido a cambios en volumen del agua. El lado derecho de la ecuación da la convergencia o divergencia del flujo de agua subterránea en unidad de volumen. Cuando el flujo converge, el almacenamiento aumenta y, viceversa, cuando diverge el almacenamiento disminuye.

2.2 Acercamiento o aproximación macroscópica.

La obtención de ecuación de continuidad es fundamental, pero no presenta ambigüedades. El problema está dado cuando Δx , Δy y Δz se puedan hacer bastante pequeños y en la expansión de la

serie de Taylor todos los términos sean iguales a cero, incluyendo los términos de primer-orden en la derivación de las entradas y salidas de flujo, como en la ecuación (6). De hecho, cuando se toma el límite de Δx , Δy y Δz tendiendo a cero, el volumen de control elemental se reduce a un punto, tal que el concepto de medio poroso pierde sentido, porque el punto se situó en la fase sólida, la fase aérea, o la fase del agua, y las variables tales como volumen del agua y flujo del agua subterránea pierden su significado. Al parecer no se puede formular ese problema del flujo de agua subterránea y se resuelve correctamente al nivel microscópico. Por supuesto, el acercamiento microscópico no tiene interés en la práctica.

El nivel microscópico presenta rasgos tales como: granos del sólido y espacios entre poros los cuales se ignoran, y se concibe como un espacio continuo con propiedades del medio, tal que la porosidad existe en cualquier punto del medio, indiferente de si se sitúa este punto en la fase sólida o en el espacio entre poros. También las variables que describen el estado y el movimiento de agua por los elementos adquieren un sentido macroscópico, tal que se describe el comportamiento del medio, y no el destino de partículas individuales fluidas entre los poros del medio poroso. Se impone la siguiente pregunta. ¿Cuántas variables macroscópicas necesitan ser definidas e interpretadas? Todavía la técnica más popular es el Método de Representación del Volumen Elemental, (REV), desarrollado por *Bear (1972)*, donde las variables macroscópicas se definen como los valores malos cuando se encuentran por encima de un REV, y se atribuyen al centro del REV. No se determina el tamaño exacto del REV, pero se asume que el tamaño es mucho más grande que el de la escala predeterminada de los poros y mucho más pequeño que la del medio poroso. Los resultados obtenidos con este acercamiento dan valores macroscópicos del flujo de agua subterránea, representando el comportamiento medio del fluido por encima del REV. La principal ventaja del método es que las cantidades macroscópicas tienen un significado físico claro, cuando se encuentran distribuidas en el campo se toman y analizan muestras de la tierra de un tamaño adecuado. Las principales desventajas son la pérdida de información en el nivel microscópico, y la incertidumbre debido a las variables macroscópicas son independiente del tamaño del REV. Un detalle de esta discusión se puede encontrar en *Pinder (1983)*.

2.3 Ecuación de Movimiento.

La segunda ley fundamental es la ecuación de la velocidad, basada en la Segunda Ley de Newton. Un inventario de todas las fuerzas que actúan sobre el agua, tomando como referencia el volumen de control, se pueden ver en la (Figura 2.2).

Bajo condiciones naturales, las fuerzas a considerar son: las fuerzas de la presión, las fuerzas de la gravedad, y la fuerza de reacción de la matriz sólida ejercida sobre el fluido. Estas fuerzas se consideran como vectores, porque es necesario considerar diferentes componentes a lo largo de las diferentes direcciones. Por ejemplo, a lo largo del lado izquierdo del volumen de control, la presión que actúa en la fase del agua, provoca la siguiente contribución a la fuerza de balance en la dirección-x:

$$\theta \cdot p\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z, t\right) \Delta y \Delta z \quad (17)$$

Donde θ , aparece en la expresión porque el agua ocupa sólo un- fragmento del contorno. Una fuerza similar actúa en el lado del derecho, pero en la dirección opuesta.

$$-\theta \cdot p\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z, t\right) \Delta y \Delta z \quad (18)$$

Se utiliza una serie de Taylor a partir del centro del volumen de control, la cual se desarrolla hasta los p-terminos del mismo, la componente de la presión resultante en la dirección-x es:

$$\left[\left(\theta \cdot p - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial \theta p}{\partial x} \right) - \left(\theta \cdot p + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial \theta p}{\partial x} \right) \right] \Delta y \Delta z = -\frac{\partial \theta p}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (19)$$

Se pueden obtener expresiones similares para las componentes de la presión en la dirección-y, y la dirección-z.

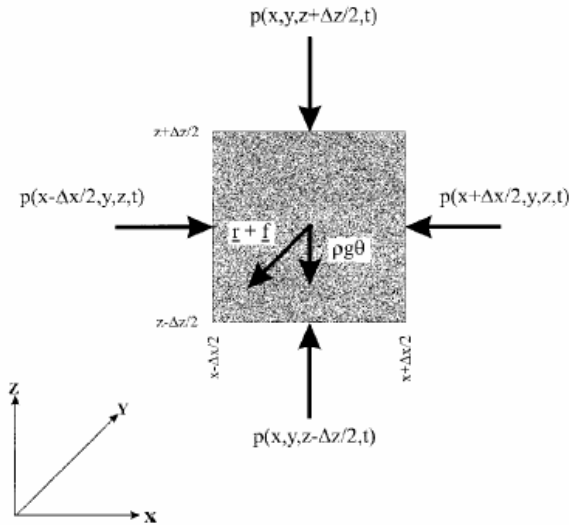


Figura 2.2 Fuerzas en una referencia volumen elemental; el volumen real se encuentra en tres dimensiones, pero se pinta sólo en dos dimensiones x y z, para tener mayor claridad.

La fuerza de gravedad en la dirección-z descendente es igual al peso total del agua en el volumen de control:

$$- \rho g \theta \Delta x \Delta y \Delta z \quad (20)$$

Donde g es la gravedad (constante), con dimensión $[L/T^2]$.

La evaluación de la fuerza de reacción del material sólido en el agua es más complicada; esta fuerza es sumamente difícil de evaluar por la aleatoriedad del tamaño de los poros. Además, porque la forma de contacto superficial entre la fase sólida y la fase del agua es muy compleja desde el punto de vista geométrico. De ningún modo, podemos obtener la superficie de contacto exacta general y sería muy difícil expresarla en términos matemáticos. Sin embargo, la imposibilidad de describir esta fuerza en una escala microscópica, nos fuerza a ajustar, un acercamiento más preciso a escala macroscópica. Por consiguiente, la fuerza de reacción se define como la fuerza media de un cuerpo por unidad de volumen del agua; la fuerza de reacción con respecto a la presión de agua se denota como:

$$r = (r_x, r_y, r_z), [F/L^3]$$

, y la fuerza de fricción con respecto al movimiento del agua se define como:

$$f = (f_x, f_y, f_z), [F/L^3].$$

Se puede escribir el efecto de estas fuerzas en la dirección-x como:

$$(r_x + f_x) \theta \Delta x \Delta y \Delta z \quad (21)$$

con expresiones similares en la dirección-y, y dirección-z.

Ahora, la fuerza balanceada en las tres direcciones se puede calcular respectivamente como:

$$\left[-\frac{\partial \theta p}{\partial x} + (r_x + f_x) \theta \right] \Delta x \Delta y \Delta z \quad (22)$$

$$\left[-\frac{\partial \theta p}{\partial y} + (r_y + f_y) \theta \right] \Delta x \Delta y \Delta z \quad (23)$$

$$\left[-\frac{\partial \theta p}{\partial z} - \rho g \theta \nabla z + (r_z + f_z) \theta \right] \Delta x \Delta y \Delta z \quad (24)$$

Utilizando al operador, ∇ , se pueden combinar éstas expresiones en una ecuación :

$$[-\nabla(\theta p) - \rho g \theta \nabla z + (r + f) \theta] \Delta x \Delta y \Delta z \quad (25)$$

Se puede resolver esta ecuación y simplificarla al dividir por el volumen total del agua en el volumen de control, $\theta \Delta x \Delta y \Delta z$

$$-\nabla p - \frac{\rho}{\theta} \nabla \theta - \rho g \nabla z + r + f \quad (26)$$

Cuando el fluido está en reposo, la suma de todas las fuerzas se hace cero. También, no habría ninguna fricción, $f = 0$, y la presión debe ser hidrostática. $\nabla p = -\rho g \nabla z$, la fuerza de reacción global, r , se puede evaluar por (*Dagan, 1989, Pág. 73*).

$$r = \frac{\rho}{\theta} \nabla \theta \quad (27)$$

Sustituyendo ésta da por resultado la fuerza de balance, y se simplifica la ecuación (26) a:

$$-\nabla p - \rho g \nabla z + f \quad (28)$$

En este caso del movimiento la suma de fuerzas no es cero, pero iguala el cambio en la velocidad adquirida del fluido. Además, la fricción a lo largo de la interfase del sólido-agua no es cero y se debe especificar en función del movimiento y propiedades de la fricción. Varias consideraciones son necesarias para llegar a un resultado útil. De observaciones del campo se conoce que el flujo de agua subterránea bajo condiciones naturales generalmente es muy lento, lo cual lleva a una serie de simplificaciones importantes. Primero, los cambios en velocidad adquirida son muy pequeños y se pueden eliminar en comparación con otras acciones de las fuerzas en el fluido. Aunque el fluido está en movimiento, la acción de las fuerzas en los fluidos está aproximadamente en equilibrio:

$$-\nabla p - \rho g \nabla z + f \approx 0 \quad (29)$$

Las fuerzas activas, tal como presión y gravedad, se balancean inmediatamente para resistir la fuerza de fricción de igual fuerza. Por supuesto, en medios porosos el área de contacto entre el fluido y el material del sólido están forzados a una fricción extensiva, tal que se ve el movimiento del fluido en forma significativa. Segundo, porque el agua es un fluido viscoso. En principio, la ecuación de Navier-Stokes debe permitirnos calcular la fuerza de resistencia global, pero debido a la geometría compleja de los poros y tamaños de los mismos, esto no es factible en la práctica. Sin embargo, en el caso del arrastre del flujo viscoso, se sabe que por un medio isotrópico la fuerza de resistencia global es opuesta en dirección al flujo del fluido, la cual es proporcional a la viscosidad del fluido, a la magnitud del flujo, y dependiente del tamaño de los obstáculos en el campo del flujo. La fuerza de fricción se expresa como:

$$f = -\frac{\mu}{k} q \quad (30)$$

Donde, μ , es la viscosidad dinámica del fluido, $[FT/L^2]$, q no es el flujo del agua subterránea como se había definido anteriormente, aquí representa la cantidad y dirección del movimiento del agua, y k es un factor de proporcionalidad que representa la geometría espacial del poro; este coeficiente tiene dimensiones $[L^2]$ y se denota como permeabilidad intrínseca o a veces permeabilidad para abreviar, por razones de convención esta definición se volverá evidente de ahora en adelante. Substituyendo la ecuación (30) en la fuerza de balance ecuación (29) y reestructurando, da por resultado la ecuación del movimiento siguiente:

$$q = -\frac{k}{\mu} (\nabla p + \rho g \nabla z) \quad (31)$$

Esta expresión claramente se parece a la ley de Darcy. De hecho, se obtuvo la expresión que es una generalización de la ley de Darcy, la cual describe el flujo de un fluido en un medio poroso. En caso de que el fluido tenga una densidad (y viscosidad) inconstante, tales condiciones se pueden apreciar, por ejemplo, en los acuíferos costeros donde el agua salada se mezcla con el agua dulce del acuífero, o en depósitos de aguas termales donde la densidad (y viscosidad) del fluido son inconstantes debido a los cambios de temperatura. Sin embargo, en caso de que los gradientes de la densidad no son significativos, o cuando la densidad sólo cambia debido a la compresibilidad del fluido, se puede simplificar la ecuación del movimiento como:

$$q = -\frac{k \rho g}{\mu} \nabla(\phi + z) = -K \nabla h \quad (32)$$

Donde $K = \frac{k \rho g}{\mu}$ está la conductibilidad hidráulica, $[L/T]$, $\phi = \int \frac{dp}{\rho g}$ es la presión potencial $[L]$, y

$h = \phi + z$ es el potencial del agua subterránea, $[L]$.

La Ley de Darcy, originalmente se basó en evidencia experimental, pero la Segunda Ley de Newton la redujo a una forma satisfactoria para describir el flujo de fluidos en medios de comunicación porosos.

2.4 Extensiones de la Ley de Darcy.

En el caso de tridimensional coordenadas cartesianas, hay tres ecuaciones de Darcy:

$$q_x = -K \frac{\partial h}{\partial x} \quad (33)$$

$$q_y = -K \frac{\partial h}{\partial y} \quad (34)$$

$$q_z = -K \frac{\partial h}{\partial z} \quad (35)$$

Por ejemplo, en un sistema de la coordenada cilíndrico (r, φ, z) , esto se vuelve:

$$q_r = -K \frac{\partial h}{\partial r} \quad (36)$$

$$q_\varphi = -\frac{K}{r} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \quad (37)$$

$$q_z = -K \frac{\partial h}{\partial z} \quad (38)$$

Además, la heterogeneidad de la porosidad y las variaciones de la conductibilidad de punto a punto, es posible en dependencia de la dirección. Éste es el llamado caso de anisotropía por medios de comunicación porosos, donde, debido a algunas propiedades relacionadas con la dirección, tal como el movimiento preferencial del flujo: en fracturas, estratificaciones o capas, la conductibilidad cambia en dependencia de la dirección. Tales situaciones pueden ser descritas por una extensión de la ley de Darcy, donde la conductibilidad se vuelve un tensor simétrico de segundo orden, K , con componentes:

$$K = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{xy} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{xz} & K_{yz} & K_{zz} \end{bmatrix} \quad (39)$$

En coordenadas cartesianas la ley de Darcy se toma como:

$$q_x = -K_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} - K_{xy} \frac{\partial h}{\partial y} - K_{xz} \frac{\partial h}{\partial z} \quad (40)$$

$$q_y = -K_{xy} \frac{\partial h}{\partial x} - K_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} - K_{yz} \frac{\partial h}{\partial z} \quad (41)$$

$$q_z = -K_{xz} \frac{\partial h}{\partial x} - K_{yz} \frac{\partial h}{\partial y} - K_{zz} \frac{\partial h}{\partial z} \quad (42)$$

Los gradientes potenciales en una dirección pueden provocar flujos en otras direcciones. Sin embargo, tales situaciones son más bien de interés académico, mientras que en la práctica no se usan estas ecuaciones, porque no es factible evaluar todas las componentes de la conductibilidad con precisión. Una excepción notable es el caso de las formaciones de capas, normalmente de origen sedimentario. Para este tipo de formaciones existen sólo dos componentes de la conductibilidad: una conductibilidad horizontal, K_h , y una conductibilidad vertical K_v . En tal caso la ley de Darcy se vuelve:

$$q_x = -K_h \frac{\partial h}{\partial x} \quad (43)$$

$$q_y = -K_h \frac{\partial h}{\partial y} \quad (44)$$

$$q_z = -K_v \frac{\partial h}{\partial z} \quad (45)$$

Estas ecuaciones son útiles en la práctica, porque se pueden calcular todas las componentes de la conductibilidad, ver las reglas de cálculo del tensor (*Oso, 1972*).

2.5 Ecuaciones de flujo del agua subterránea en general.

La ecuación del flujo de agua subterránea se obtiene combinando la ecuación de la continuidad con la ley de Darcy; la ecuación (ec.15), se combina con la ecuación general de Darcy (ec. 31):

$$\theta(\alpha + \beta) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot \left[\frac{k}{\mu} (\nabla p + \rho g \nabla z) \right] \quad (46)$$

Debemos aclarar que el volumen del agua, θ , está relacionado con la presión agua, Es suficiente ver que se puede expresar como:

$$S_p \frac{\partial p}{\partial t} = \nabla \cdot \left[\frac{k}{\mu} (\nabla p + \rho g \nabla z) \right] \quad (47)$$

Donde S_p es el coeficiente de almacenamiento del medio poroso producido por cambios de la presión del agua con dimensiones $[L^2 / F]$, y dado por:

$$S_p = \theta(\alpha + \beta) + \frac{d\theta}{dp} \quad (48)$$

Parece bastante complicado, pero afortunadamente tiene una interpretación física simple, el coeficiente de almacenamiento da el volumen de agua que salió del medio poroso. La ecuación de flujo del agua subterránea que se obtuvo en coordenadas cartesianas, considera la permeabilidad horizontal y vertical diferente:

$$S_p \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_h}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k_h}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{k_v}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \right) \right] \quad (49)$$

Esta ecuación describe movimiento tridimensional de agua subterránea en su forma más general. La cual se expresa en función de la presión del agua y no en función del potencial.

2.6 Ecuación de flujo del agua subterránea.

En la práctica, no se usa la ecuación general de flujo del agua subterránea, porque normalmente se introducen simplificaciones. Cuando la densidad se elimina, se puede obtener una ecuación de flujo del agua subterránea. Combinando la ecuación de la continuidad con la forma simple de la ley de Darcy dado por Ecuación (32), se obtiene:

$$\theta(\alpha + \beta) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot (K \nabla h) \quad (50)$$

Cuando la densidad fluida es constante, la presión del agua es diferente en el tiempo, y pueda ser relacionada con la variación temporal del potencial de agua subterránea:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \rho g \frac{\partial h}{\partial t} \quad (51)$$

Se puede escribir la ecuación del flujo resultante como:

$$\rho g \theta(\alpha + \beta) \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot (K \nabla h) \quad (52)$$

Considerando la ecuación anterior como la ecuación básica del flujo de agua subterránea, porque relaciona a la cantidad de agua subterránea, θ , y al potencial del agua subterránea, h , a las características del medio poroso, al fluido en el espacio y a la continuidad del tiempo. Sin embargo, generalmente ambos el volumen del agua, θ , y el potencial, h , son desconocidos y es necesario tener más información antes de resolver la ecuación.. Por ejemplo, se puede considerar el flujo del

agua subterránea bajo condiciones de saturación. En tal caso, el volumen del agua iguala a la porosidad, y teniendo en cuenta la incompresibilidad de los granos sólidos del agua subterránea, el cambio de la porosidad se pueda ver como la compresión del medio poroso, que depende de la presión del agua o del potencial de agua subterránea dado por la ecuación (12) como:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{(1-n)}{\Delta z} \frac{\partial \Delta z}{\partial t} = (1-n)\alpha \frac{\partial p}{\partial t} = (1-n)\alpha \rho g \frac{\partial h}{\partial t} \quad (53)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (52) queda:

$$S_0 \frac{\partial h}{\partial t} = \nabla \cdot (K \nabla h) \quad (54)$$

Donde, S_0 es el coeficiente del almacenamiento específico, que depende sólo de la compresibilidad del medio poroso y el fluido.

$$S_0 = \rho g (\alpha + n \beta) \quad (55)$$

Se puede interpretar físicamente el almacenamiento específico como el volumen de agua que salió del medio poroso, las unidades son $[L^{-1}]$. Estos valores son normalmente muy pequeños, debido a la deformación elástica de capas. Por supuesto, la deformación elástica de capas de la tierra, consta de materiales como la arcilla o turba, los cuales se excluyen. Tales deformaciones principalmente ocurren bajo la influencia de cargas externas o un extensivo bombeo de agua subterránea. Las deformaciones elásticas y almacenamiento en acuíferos son descritas por *Verruijt (1969)*, Teorías de la deformación de elementos porosos bajo varias condiciones de la tierra, con atención especial al asunto de apaciguamiento de la tierra, que se discute en la parte 2 de *Oso y Corapcioglu (1984)*. Escrito en coordenadas cartesianas con conductibilidades verticales y horizontales, la ecuación de flujo del agua subterránea queda como:

$$S_0 \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_h \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_v \frac{\partial h}{\partial z} \right) \quad (56)$$

Éste es la ecuación del flujo de agua subterránea más utilizada en la práctica. La ecuación es del tipo difusivo.

También se puede escribir la ecuación del flujo en coordenadas cilíndricas (r, φ, z):

$$S_0 \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r K_h \frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(K_h \frac{\partial h}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_v \frac{\partial h}{\partial z} \right) \quad (57)$$

La cual se usa para la predicción del flujo de agua subterránea hacia pozos, como describió por *Hantush (1964)*, *Walton (1970)*, *Huisman (1972)*, *Kruseman y Ridder (1991)*.

Cuando el flujo de agua subterránea es estacionario, las variables se vuelven independientes del tiempo, y se reduce la ecuación del flujo a:

$$\nabla \cdot (K \nabla h) = 0 \quad (58)$$

Escrito en coordenadas cartesianas, con conductibilidades verticales y horizontales, la ecuación de flujo del agua subterránea queda como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_h \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_v \frac{\partial h}{\partial z} \right) = 0 \quad (59)$$

Esta ecuación muestra claramente que el movimiento del agua subterránea es un problema del flujo potencial. Las fuerzas de impulso por el movimiento son diferencias en potencial del agua subterránea, y los flujos resultantes dependen en las propiedades y características específicas del medio. En este flujo del agua subterránea aparecen otros tipos de flujos potenciales como: el flujo de calor en medios de comunicación porosos bajo la influencia de gradientes de la temperatura, o flujo eléctrico en materiales de conductividad eléctrica bajo la influencia de diferencias de potenciales eléctricos. Se han obtenido muchas soluciones para problemas de flujo del agua subterránea ver en la teoría de funciones potenciales, sobre todo en dos dimensiones (*Polubarinova-Kochina, 1962*; *Harr, 1962*; *Verruijt, 1970*; *Halek y Svec, 1979*; *Strack, 1989*).

2.7 Condiciones de contorno.

Las ecuaciones del flujo de agua subterránea son ecuaciones diferenciales parciales las cuales describen la dependencia de las variables, como el potencial del agua subterránea, a las variables independientes, las coordenadas del dominio del flujo, y el tiempo. Sin embargo, las ecuaciones del flujo son sólo válidas dentro del dominio que comprende al flujo, y no en los contornos del mismo, porque allí terminan los extremos del medio poroso. Otros fenómenos ocurren, los cuales pueden influir en el flujo del agua subterránea dentro del dominio. Por ejemplo, cuando el potencial del agua subterránea es la variable dependiente, la condición llamada inicial es:

$$h(x, y, z, 0) = h_0(x, y, z) \quad (60)$$

Donde h_0 representa una función de x , y , y z , la cual en sentido general es arbitraria.

Las condiciones de contorno por el dominio físico es algo más complicado. Matemáticamente, se puede mostrar que las ecuaciones de flujo del agua subterránea contienen derivadas parciales de segundo-orden y que para cada punto del contorno se necesitan condiciones del dominio para definir el flujo a través del mismo. Porque la interacción entre el flujo del agua subterránea interior y el exterior al dominio puede ser complejo, y nuestra habilidad de concebir tales fenómenos con precisión se limita más bien, a describir condiciones que normalmente nos permitan hacer simplificaciones para hacer más eficiente nuestros modelos.

Generalmente, se consideran tres tipos de condiciones de contorno. Primera condición de contorno, se aplica cuando el valor de la variable dependiente se conoce en el contorno.

Por ejemplo, en el caso de los potenciales de agua subterránea, tal condición de contorno sería:

$$h(x_b, y_b, z_b, t) = h_b(t) \quad (61)$$

Donde (x_b, y_b, z_b) representa un punto en el contorno, y h_b se conoce en el tiempo y depende del mismo.

Ejemplos: caso de un río, lago, o depósito, [etc.]. Una aclaración importante es que el flujo del agua subterránea ocurre dentro del dominio que comprende al flujo y el contorno, fuera del cuerpo de agua no tiene sentido. Segundo-tipo de condición de contorno, es aquella donde se asume que se conoce la cantidad de intercambio del agua subterránea por el contorno. La cantidad de intercambio del agua, es dada por el componente del flujo de agua subterránea perpendicular al contorno, tal que se puede expresar como:

$$q_n(x_b, y_b, z_b, t) = q_b(t) \quad (62)$$

Donde q_n representa el componente del flujo normal al contorno, y q_b se conoce en el tiempo y depende del mismo.

El flujo se puede expresar en función de la variable dependiente, el potencial del agua subterránea para utilizar la ley de Darcy:

$$q_n = -K \frac{\partial h}{\partial n} = q_b(t) \quad (63)$$

Donde $\frac{\partial h}{\partial n}$ representa la derivada del potencial perpendicular al contorno.

Desde un punto de vista matemático, la selección de la dirección positiva en el contorno se determina por los valores positivos o negativos de q_n . Sin embargo, a menudo se usa una convención más

simple considerando los flujos que entran al dominio como positivo, y negativo al que sale, esta condición es indiferente del sentido de la normal que exista en el contorno.

Ejemplos típicos de este tipo de condiciones son: bombear pozos, recarga del agua subterránea, infiltración, etc., y en general cualquier situación donde supuestamente se conoce el flujo. Un ejemplo obvio es un contorno impermeable, porque la componente del flujo es perpendicular en el contorno, lo que anula automáticamente el flujo en el mismo. La condición de tercer-tipo, es una mezcla de los dos tipos previos a la cual se le conoce como mixta. Tal condición, se aplica en el caso de un dominio del flujo en contacto con un cuerpo de agua, con un potencial fijo, h_b , pero donde el intercambio entre el depósito de agua subterránea y el cuerpo de agua, esta forzado a la presencia de factores externos que corresponden específicamente al problema en cuestión.

Matemáticamente, se expresa esta condición como:

$$q_n(x_b, y_b, z_b, t) = C_b [h_b(t) - h(x_b, y_b, z_b, t)] \quad (64)$$

Donde hemos usado la convención de flujo en el contorno y C_b representa el conductibilidad del contorno, con dimensiones $[T^{-1}]$, entre el depósito de agua subterránea y el cuerpo de agua.

Se puede explicar físicamente este parámetro como la capacidad de la conductibilidad de una capa del contorno permeable presente, entre el dominio del flujo de agua subterránea y el cuerpo de agua, tal que:

$$C_b = \frac{K_b}{D_b} \quad (65)$$

Donde K_b es la conductibilidad hidráulica de la capa del contorno y D_b es su espesor.

Por ejemplo, esta situación se aplicaría cuando un río está en contacto con el acuífero, pero se restringe la interacción debido a la presencia de una capa del barro en la cama del río. Otro ejemplo es con un estorbó filtro.

2.8 Formulación por elementos finitos para acuíferos.

El continuo desarrollo de la electrónica, de los hardwares y de los softwares asociados a las microcomputadoras, han reducido las diferencias entre los diferentes métodos numéricos utilizados para dar respuestas a las complejidades de los sistemas acuíferos.

El análisis realizado por (Hernández A.O., 1991; 1993) sobre la comparación entre El Método de las Diferencias Finitas (MDF) y el Método de los Elementos Finitos (MEF) con triángulo lineal o cuadrático (Candorcía y Castellanos, 1978; Martínez J.B. 1989) concluyó, que este último parece

tener mejores posibilidades para la simulación del flujo del agua subterránea. Entre las ventajas que ofrece el MEF, se pueden citar las siguientes:

- Tiene gran flexibilidad para representar las fronteras, siendo especialmente útil en el caso de la simulación de fronteras móviles, Ej. drenaje de minas, modelos de perfil de acuíferos libres o de descarga al mar, modelación de asentamientos, etc.
- Da la posibilidad de utilizar elementos de tamaño y forma variable, lo que permite representar zonas de mayor interés o de características distintivas. Esta posibilidad es de gran utilidad en la modelación de acuíferos cársicos.
- Cuando se emplea el triángulo lineal o cuadrático se destaca la ventaja de poder situar la posición de la superficie piezométrica en cualquier punto del plano con gran precisión mediante la utilización de funciones lineales o cuadráticas de interpolación. Esta posibilidad permite reducir el número de incógnitas en los sistemas de ecuaciones algebraicas en comparación con el MDF, lo que reduce considerablemente los requerimientos de memoria en las computadoras, el volumen de información a manipular y los tiempos de máquina para obtener la misma precisión.

A pesar de las ventajas antes señaladas del MEF, siguen siendo en la actualidad los programas más divulgados internacionalmente aquellos que se basan en el MDF. Las razones que justifican lo anterior radican en el hecho de que la utilización de dichos programas no requiere conocimiento alguno de programación y con los paquetes gráficos asociados lo más importante es el conocimiento de las complejidades del sistema y de la manipulación de las bases de datos correspondientes. Por otro lado ha sido relativamente fácil adicionarle a los softwares desarrollados sobre el sistema operativo DOS, interfases que permiten utilizar las ventajas del Windows como sistema interactivo.

2.8.1 Formulación por elementos finitos para acuíferos confinados.

En esta sección se refieren brevemente a la formulación numérica de la solución por elementos finitos del flujo de agua en acuíferos confinados en régimen estacionario o transitorio. Además, se explica el significado físico de las ecuaciones numéricas. Estas son aplicables a medios heterogéneos y anisótropos con direcciones de anisotropía variables. La base del acuífero puede tener una topografía arbitraria. Como condiciones de contorno se pueden imponer de caudal fijo, de nivel fijo, caudal proporcional a la diferencia de nivel entre el acuífero y un nivel externo conocido (condición mixta). También, admite que algunos sectores del acuífero lleguen a secarse.

2.8.1.1 Ecuaciones de flujo para acuíferos confinados.

El flujo en los acuíferos confinados está gobernado por la siguiente ecuación, la cual es un caso particular de la (ec. 56) deducida anteriormente:

$$\nabla \cdot (K b \nabla h) + q_r = S_s b \frac{\partial h}{\partial t} \quad \text{en } \Omega \quad (66)$$

Donde h es el nivel, \mathbf{K} es el tensor de conductividades hidráulicas, S_s es el coeficiente de almacenamiento específico, Ω es el dominio del problema, q_r es el término fuente/sumidero distribuido superficialmente (recarga/extracción). El significado de la variable b depende del tipo medio al que se aplique esta ecuación. Así, si se trata de un medio horizontal, b representa la potencia del acuífero, si se trata de una sección vertical b es igual a la unidad y si se trata de un problema tridimensional con simetría radial, b es igual a $2\pi r$, siendo r la distancia del punto al eje de simetría. La ecuación (66) se resuelve con las siguientes condiciones iniciales, las cuales son un caso particular de las que se expusieron en la (ec. 60):

$$h(x, y, 0) = h_0(x, y) \quad (67)$$

h_0 puede ser cualquier función arbitraria, o la solución de la ecuación (66) para una simulación anterior, frecuentemente el régimen estacionario. También es común, sobre todo al analizar ensayos de bombeo, que h_0 se tome igual a cero en todo el acuífero, en cuyo caso h representa las variaciones de nivel o descensos.

Las condiciones de contorno son de la forma:

$$(K \cdot b \cdot \nabla h) \cdot \mathbf{n} = \alpha(h - H) + Q \quad \text{en } \Gamma \quad (68)$$

Donde Γ es el contorno de Ω ; \mathbf{n} es el vector unitario normal a Γ y dirigido hacia el exterior; H es un nivel externo; Q es un caudal prefijado; y α es un coeficiente que controla el tipo de condición de contorno ($\alpha = 0$ para caudal fijo, $\alpha = \infty$ para nivel fijo, y $\alpha \neq 0$, para condición mixta, en cuyo caso α es un coeficiente de goteo).

El tensor de conductividades hidráulicas queda definido por sus valores principales, K_1 y K_2 , y por el ángulo formado por el eje x y la dirección principal asociada a K_1 . Las componentes del tensor en coordenadas cartesianas son:

$$\begin{aligned} K_{xx} &= K_1 \cdot \cos^2 \alpha + K_2 \cdot \sin^2 \alpha \\ K_{xy} &= (K_1 - K_2) \sin \alpha \cos \alpha \\ K_{yy} &= K_1 \cdot \sin^2 \alpha + K_2 \cdot \cos^2 \alpha \end{aligned} \quad (69)$$

La ecuación de flujo puede formularse en régimen estacionario o transitorio. La ecuación (66) es la correspondiente al transitorio. La forma en régimen estacionario se obtiene anulando la derivada con respecto al tiempo en (66).

Una vez obtenidos los niveles, la ecuación de transporte, que se presenta en la próxima sección, requiere que se haya calculado el flujo unitario (velocidad de Darcy), que viene dado por la ley de Darcy:

$$q_D = -K \cdot \nabla h \quad (70)$$

Donde q_D es el flujo unitario, caudal por unidad de superficie de medio poroso. Para la formulación de transporte que se va a emplear, es conveniente definir el caudal por unidad de ancho, definido como:

$$q = q_D \cdot b \quad (71)$$

2.8.1.2 Ecuación de Transporte.

El transporte de solutos en el acuífero viene dado por:

$$b(R + \phi) \frac{\partial c}{\partial t} = \nabla(D \nabla c) - q \nabla c + q_r(c' - c) - \lambda(\phi + R) b c + m \quad (72)$$

En la cual:

ϕ = Porosidad del acuífero.

b = Potencia del acuífero (véanse las matizaciones hechas bajo 2.8.1).

c = Concentración de soluto.

c' = Concentración de soluto del agua que entra al acuífero.

t = Tiempo.

R = Coeficiente de retardo (A veces este nombre designa a $((R+\phi)/\phi)$).

\mathbf{D} = Tensor de dispersión.

q_r = Fuente/sumidero de agua.

λ = Coeficiente de desintegración.

m = Fuente/sumidero de masa.

La ecuación (72) se ha planteado, por simplicidad, únicamente para el medio acuífero.

De acuerdo a ello, los términos que intervienen son:

-Término dispersivo-difusivo: tiene en cuenta los flujos de dispersión mecánica y difusión molecular. Está dado por $\nabla(D\nabla c)$, en el cual \mathbf{D} representa el tensor de dispersividades definido en coordenadas cartesianas como:

$$\begin{aligned} D_{xx} &= D_m \cdot \phi \cdot b + \frac{\alpha_L q_x^2 + \alpha_T q_y^2}{|q|} \\ D_{yy} &= D_m \cdot \phi \cdot b + \frac{\alpha_T q_x^2 + \alpha_L q_y^2}{|q|} \\ D_{xy} &= (\alpha_L - \alpha_T) q_{xy} \end{aligned} \quad (73)$$

donde:

D_m = Difusividad molecular

α_L = Dispersividad longitudinal

α_T = Dispersividad transversal

q_x = Componente x de q

q_y = Componente y de q

$|q|$ = Norma de q

- Término convectivo: Tiene en cuenta el transporte del soluto por movimiento del fluido.

Corresponde a $q\nabla c$ siendo \mathbf{q} el vector de flujo por unidad de ancho (ec. 71).

- Término fuente: Evalúa la entrada de masa en el acuífero debido a la recarga $q_r(c' - c)$. Siendo q_r la recarga en el acuífero y c la concentración de la recarga. Si q_r es negativo, entonces este término desaparece de la ecuación, ya que $c' = c$.

- Desintegración/producción de primer orden: Tiene en cuenta la variación por desintegración para solutos no estables. Es $(\phi + R)b \cdot \lambda \cdot c$ en el que λ es el coeficiente de desintegración. Este término representa desintegración si λ es positivo y producción si λ es negativo.

- Término de producción de orden 0: Viene dado por m , que es la masa de soluto generada por unidad de superficie de acuífero y por unidad de tiempo. En la práctica suele representar fuentes y sumideros en los que la masa de soluto aportado al (o extraída del) acuífero es independiente del caudal de agua.

- Término de almacenamiento: Es el producto $\phi \frac{\partial c}{\partial t}$. Representa la variación de masa de solutos en el agua por unidad de volumen de acuífero. Este término solo considera las variaciones debidas a cambios de concentración y va ligado al de adsorción.

- Término de retardo por adsorción: Es el producto $R \frac{\partial c}{\partial t}$ donde R viene dado por:

$$R = \rho_s K_d \quad (74)$$

siendo ρ_s la densidad seca del medio acuífero y K_d el coeficiente de distribución. Representa la variación de masa de soluto adsorbida a la superficie de la matriz sólida del medio poroso y expresada por unidad de volumen de acuífero.

Al igual que en flujo, las condiciones iniciales para transporte pueden ser tanto una función cualquiera del espacio, como una solución previa del sistema en estacionario. En general:

$$c(x, y, 0) = c_0(x, y) \quad (75)$$

Las condiciones de contorno para el caso de transporte son:

$$D \nabla c \cdot \mathbf{n} = \beta(c' - c) + M \quad (76)$$

En la cual, si $\beta = \infty$ se da la condición de concentración fija $c' = c$, $\beta = 0$ y $M = 0$ condición de contorno de salida $\beta = q \cdot n$ condición de entrada con concentración c' . En (76) M es la masa prescrita en el contorno y \mathbf{n} un vector unitario normal al mismo.

2.8.1.3 Formulación Numérica.

Se emplea el método de los elementos finitos para la solución numérica de las ecuaciones de flujo y transporte. En lo que sigue, se describen brevemente las particularidades de esta aplicación para las dos ecuaciones.

2.8.1.4 Formulación numérica de la ecuación de flujo.

Las ecuaciones numéricas básicas se obtienen aplicando el método de Galerkin a la ecuación (66) tras haber discretizado el medio con elementos triangulares lineales. Ello conduce a:

$$\left(A + \frac{D}{\Delta t^k} \right) h^k = b^k + \frac{D}{\Delta t^k} h^{k-1} \quad (77)$$

Donde h^k es el vector de niveles en los nodos en el tiempo k , A , D y b son, respectivamente, las matrices de "conductancias" y "capacidades" y el vector de fuentes y sumideros, que están definidos como:

$$A_{mn} = \sum_e A_{mn}^e \quad (78)$$

$$D_{mn} = \sum_e D_{mn}^e \quad (79)$$

$$b_m = \sum_{\Gamma_m} Q_m^\Gamma + \sum_e \frac{q_r^e A^e}{3} \quad (80)$$

Donde e indica número de elemento, Γ_m representa el segmento de contorno adyacente al nodo m , Q_m^Γ es la entrada en dicho segmento que corresponde al nodo m , A^e es el área del elemento y q^e representa la recarga superficial.

Las matrices A_{mn}^e y D_{mn}^e vienen dadas por:

$$A_{mn}^e = \frac{1}{4A_e} \left[K_{xx}^e b_n b_m + K_{xy}^e (b_n c_m + b_m c_n) + K_{yy}^e c_n c_m \right] \quad (81)$$

$$D_{mn}^e = \frac{\delta_{mn} b^e S^e A_e}{3} \quad (82)$$

Donde:

$$b_m = y_n - y_p$$

$$c_m = x_p - x_n$$

$$A_e = \frac{1}{2} (b_m c_n - b_n c_m) \quad (83)$$

y m , n y p son permutaciones antihorarias de los nodos del elemento e . Las variables K^e y S_s^e representan la conductividad hidráulica y almacenamiento específico del elemento e y b^e su espesor medio. Por último, δ_{nm} es la delta de Kronecker (igual a 1 si m es igual a n y cero en caso contrario).

La ecuación (77) se resuelve secuencialmente en el tiempo. Empezando con k igual a 1, h^o se

obtiene a partir de las condiciones iniciales (ec. 67), lo que permite calcular h^1 . A partir de éste, la solución de (77) da lugar a h^2 y así sucesivamente. Para la solución de la ecuación de transporte será necesario calcular las velocidades de Darcy en todos los elementos. Estas se deducen directamente de la definición y para su cálculo basta tener presente que el gradiente viene dado por:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{2A_e} \sum_{i=1}^3 h_i b_i \quad (84)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{1}{2A_e} \sum_{i=1}^3 h_i c_i \quad (85)$$

Aplicando directamente la ley de Darcy, las componentes de los flujos unitarios son:

$$q_{D_x}^e = -\frac{1}{2A_e} (K_{xx} \sum_{i=1}^3 h_i b_i + K_{xy} \sum_{i=1}^3 h_i c_i) \quad (86)$$

$$q_{D_y}^e = -\frac{1}{2A_e} (K_{yy} \sum_{i=1}^3 h_i c_i + K_{xy} \sum_{i=1}^3 h_i b_i) \quad (87)$$

Dado que en la ecuación de transporte el balance lo expresaremos como integrado a lo largo de la vertical, estas componentes han de multiplicarse por el espesor medio del acuífero de cara a obtener el flujo por unidad de ancho q^e (ec. 71).

2.8.1.5 Formulación numérica de la ecuación de transporte.

La aplicación del método de Galerkin a la ecuación de transporte (72) conduce a un sistema de la forma:

$$\left(E + \frac{F}{\Delta t} \right) C^{k+1} = g^{k+1} + \frac{F}{\Delta t} C^k \quad (88)$$

Donde C^k es el vector de concentraciones nodales; \mathbf{E} es una matriz simétrica de dimensiones $n \times n$ que incluye los términos dispersivos, advectivos y de reacciones de primer orden; \mathbf{F} es una matriz del mismo tipo que \mathbf{E} la cual incluye los términos de almacenamiento y adsorción, y g^{k+1} es un vector de dimensión n que incluye los términos de producción de orden cero y las acciones externas. Para la evaluación de estas matrices se ha empleado la variante del método de Galerkin consistente en aplicar la identidad de Green sólo al término dispersivo. Si bien este método conduce a ecuaciones de

interpretación física más difícil que la alternativa de aplicar la identidad de Green, también al término convectivo, los resultados numéricos son mucho más precisos y estables (*Galeati y Gambolati, 1987*).

Con este enfoque las matrices **E** y **F** y el vector **g** tienen las siguientes componentes:

$$E_{mn} = \sum_e E_{D_{mn}}^e + \sum_e E_{A_{mn}}^e + \sum_e \left| q_r^e - b^e \lambda (\phi^e + R^e) \right| F_{mn}^e + \sum_{\Gamma_m} Q_m^\Gamma \quad (89)$$

$$F_{mn} = \sum_e b^e (\phi^e + R^e) F_{mn}^e \quad (90)$$

$$g_m = \sum_{\Gamma_m} Q_m^\Gamma c'_m + \sum_e \frac{q_r^e c'_m A_e}{3} + \sum_e \frac{m^e A_e}{3} + \sum_{\Gamma_m} M_m^\Gamma \quad (91)$$

donde e representa número de elemento, q_r^e es la recarga superficial en dicho elemento, etc. Los dos últimos sumandos de (89) y los dos primeros de (91) sólo se incluyen en las ecuaciones si los respectivos términos de caudal de agua (q_r^e y Q_m^Γ) son positivos. Las matrices $E_{D_{mn}}^e$, $E_{A_{mn}}^e$ y F_{mn}^e tienen las siguientes expresiones:

$$E_{D_{mn}}^e = \frac{b^e}{4A_e} \left[D_{xx}^e b_n b_m + D_{xy}^e (b_n c_m + b_m c_n) + D_{yy}^e c_n c_m \right] \quad (92)$$

$$E_{A_{mn}}^e = \frac{q_x^e b_m + q_y^e c_m}{6} \quad (93)$$

$$F_{mn}^e = \frac{\delta_{mn} A_e}{3} \quad (94)$$

Donde D_{xx}^e , D_{xy}^e y D_{yy}^e son las componentes del tensor de dispersión del elemento e (73); q_x^e y q_y^e son las componentes del flujo por unidad de ancho (Ec.s 71, 86 y 87); y los demás términos son idénticos a los de la ecuación de flujo (ver sección 2.8.1.4).

Una vez construidas las matrices **E**, **F** y el vector **g**, el sistema (88) se resuelve secuencialmente en el tiempo. Así se empieza con $k=0$, lo que permite obtener C^1 conocido C^0 (condiciones iniciales) y las componentes de los flujos (tras resolver la ecuación de flujo). Volviendo a resolver la ecuación de flujo y calcular las correspondientes velocidades de Darcy, C^2 se obtiene de (88) haciendo $k=1$, etc.

2.8.1.6 Interpretación física de la ecuación de flujo.

Primero se construyen las matrices **A** y **D** y el vector **b** y, segundo, se procede a resolver la ecuación (77). Esta ecuación puede interpretarse como un balance de masas.

Para ello, conviene escribirla de la forma:

$$D \left(\frac{h^{k+1} - h^k}{\Delta t} \right) = b - Ah^{k+1} \quad (95)$$

Cada fila representa un balance de masas sobre el dominio R (ver Fig. 2.3) asociado a cada nodo. Así, el primer miembro representa la variación del volumen de agua almacenado en R y el segundo representa la diferencia entre entradas y salidas. A este respecto cabe recordar que la matriz **D** es diagonal y sus componentes son la suma de un tercio de las áreas de los elementos adyacentes multiplicadas por el coeficiente de almacenamiento correspondiente. Al multiplicar cada componente por la variación del nivel durante el incremento de tiempo, resulta la variación de agua almacenada. Respecto al segundo miembro, el último sumando representa las entradas y salidas en el dominio R_m (Fig. 2.3) procedentes de los nodos que están conectados al m , mientras que las componentes de **b** representan las entradas y salidas externas (bombeos, recarga, etc.).

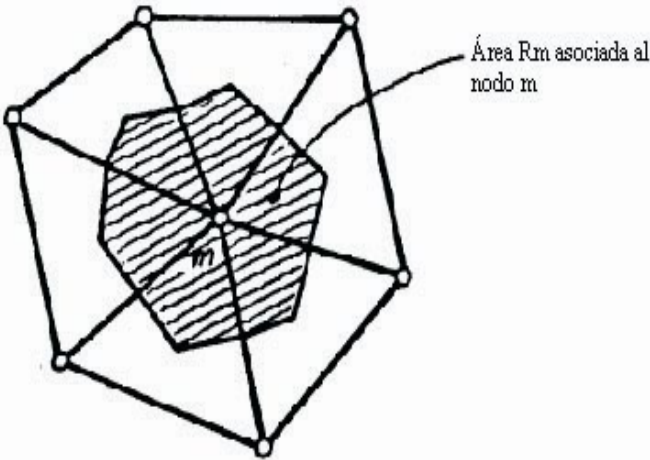


Figura 2.3: Representación esquemática del dominio R_m asociado al nodo m .

Esta interpretación de las ecuaciones numéricas permite visualizar la implementación de las condiciones de contorno y acciones externas. El primer caso es el de los **nodos de caudal fijo**. En estos nodos se especifica el caudal total que entra ($Q(N) > 0$) o sale del acuífero ($Q(N) < 0$) a través de ellos (ver ec.80). Si la entrada de agua procede de recarga superficial, se debe multiplicar el valor de esta recarga (caudal por unidad de superficie) por el área asociada al nodo, que como se deduce de (ec.80) es un tercio del área de cada elemento. Análogamente, si la entrada/salida

representa un flujo de contorno, el valor a especificar es el producto del caudal por unidad de longitud por la longitud de contorno asociada al nodo. En el caso de que existan varios términos (bombeo, recarga, etc.), el valor a especificar en $Q(N)$ es la suma de todos ellos.

Las **condiciones de contorno de tipo mixto** permiten modelar la interacción entre el acuífero y un cuerpo de agua externo de nivel conocido y conectado hidráulicamente con el acuífero. Así, el caudal de entrada (salida) es proporcional a la diferencia de nivel entre dicho cuerpo de agua y el acuífero. Es decir:

$$Caudal = AL(N) \cdot (H_1(N) - H(CN)) \quad (96)$$

donde $AL(N)$ es la constante de proporcionalidad, coeficiente de goteo; $H_1(N)$ es el nivel externo; y $H(N)$ es el nivel en el acuífero. Obviamente el caudal será positivo, lo cual implica entrada de agua al acuífero, siempre que $H_1(N)$ sea mayor que $H(N)$, y viceversa.

Para introducir la condición de contorno de tipo mixto, debe sumarse la ecuación (96) al segundo miembro de (77), de acuerdo con la interpretación de ésta como expresión del balance de masas en el nodo. Para hacer esta suma es necesario tener presente que $H(N)$ es incógnita y por ello su coeficiente debe añadirse a la matriz **A**. Por último, **los nodos de nivel fijo** son aquellos en los que se conoce el nivel. El hecho de que se conozca el nivel resta sentido a la ecuación del nodo.

Por ello, se hace la siguiente sustitución:

$$H(N) = H_1(N) \quad (97)$$

Para ello, basta hacer el término independiente igual a $H_1(N)$ y sustituir la fila N -ésima de la matriz de coeficientes por una fila de ceros salvo un 1 en la diagonal principal. Dado que esta operación haría perder la simetría de la matriz de coeficientes, también se anula la columna N -ésima, pasando sus términos, multiplicados por el nivel $H_1(N)$, al término independiente.

2.8.1.7 Interpretación física de la ecuación de transporte.

La ecuación (88), cuya solución proporciona las concentraciones, también admite una interpretación como balance de masas sobre un dominio R asociado a cada nodo (ver Fig. 2.3), similar a la de la ecuación de flujo, aunque no tan directa. Así, la variación de la masa almacenada debida a variaciones de la concentración en el agua y de la masa adsorbida está dada por el término

$$\frac{F(C^{k+1} - C^k)}{\Delta t} . \text{ Debe notarse que este término no tiene en cuenta las variaciones de masa de soluto}$$

causadas por cambios en la masa de agua almacenada en R , que se consideran de forma implícita en los demás términos.

La variación de masa en R es igual al balance entre entradas y salidas y términos de producción. En estos conviene distinguir entre sus distintas componentes. El término $E_D C^{k+1}$ representa los flujos dispersivos hacia el nodo m procedentes de los nodos adyacentes (la matriz E_D queda definida implícitamente por (89) y (92)). Análogamente, los términos advectivos están representados por $E_A C^{k+1}$, donde E_A está definida de forma implícita en (89) y (93). Conviene tener presente que estos términos no representan las entradas y salidas convectivas en R , sino las variaciones con respecto a las mismas inducidas por el hecho de que las concentraciones en los nodos adyacentes a m (Figura 2.3) no son idénticas a C_m . Si dichas concentraciones fuesen iguales a C_m , este término valdría cero. Es por este motivo que las variaciones de masa de soluto inducidas por las de la masa de agua almacenada en R quedan implícitamente recogidas en el término EC^{k+1} . Las variaciones de

masa de soluto asociadas a producción de orden 0 y 1 quedan recogidas por los términos: $\sum \frac{m^e A_e}{3}$

y $\sum \frac{b^e \lambda (\phi^e + R^e) C_m^{k+1} A_e}{3}$, de g y E , respectivamente (ver ec.s 89 y 91). Los restantes

términos representan las acciones externas y condiciones de contorno, esto es, las entradas y salidas de masa procedentes del exterior del acuífero. Respecto a estas cabe destacar que, nuevamente, los términos que se incluyen en la ecuación (88) no son directamente la entrada o salida de masa de soluto sino las variaciones que con respecto a esta induce el hecho de que las entradas de agua tengan una concentración distinta de C_m . En este sentido cabe decir que a cada término de la forma Qc' en g (ec.91) corresponde uno de la forma Qc en el primer miembro de (88) (ver ecuación 89), donde c es la concentración del acuífero y c' la del agua que entra en el acuífero. Además, como también se indicó en la sección 2.8.1.5, si en el nodo m se produce una salida hacia el exterior, entonces $c' = c$ y estos dos términos se simplifican (eliminan) en los dos miembros de (89). En resumen, todas las aportaciones de masa se suman al término independiente de (88). En el caso de que estas aportaciones vayan asociadas a un caudal de agua Q , es necesario restarles Qc , siendo c la concentración en el acuífero. Con esto queda definido todo lo necesario para el tratamiento de las condiciones de contorno, que se explica a continuación. En lo sucesivo, al hablar de caudal se entiende que se

incluyen tanto los de tipo concentrado como distribuido superficialmente o en el contorno ($q_r^e A_e$ o Q^Γ en 89) y, por el mismo motivo, al hablar de entrada/salida de masa, se entiende que estamos concentrando los términos correspondientes a m , M , Qc' y $q_r c'$. La condición de contorno de **entrada de masa nula** es la más sencilla tanto conceptual como numéricamente. Como su nombre indica, implica que no hay aportaciones de masa y, se supone que m , M , Q y q_r son nulos. Conviene tener presente, sin embargo, que si esta condición se emplea conjuntamente con otra de flujo no nulo y el caudal correspondiente es negativo, entonces se interpreta como si en el nodo hubiese una salida de masa igual a dicho flujo multiplicado por la concentración en el acuífero. Los **odos de concentración fija** son un caso especial. En estos se impone que la concentración c en el acuífero sea idéntica a un valor externo prefijado c . Desde el punto de vista del balance de masas, esto implica una entrada (o salida) tanto de tipo convectivo (Qc) como dispersivo ($D \cdot \nabla c$). Es decir, la entrada de masa al acuífero es superior al producto del caudal por la concentración exterior. Si bien ello puede estar justificado, esta condición debe emplearse con precaución. Desde el punto de vista numérico, si en el nodo N se impone este tipo de condición, lo que se hace es igualar a cero toda la fila N de la matriz, salvo el término de la diagonal, que se iguala a 1, y hacer la componente correspondiente del término independiente igual al valor de la concentración.

En los **odos de entrada o salida de masa asociada a un caudal** (donde exista una entrada de masa igual al caudal de entrada en el nodo multiplicado por la concentración del agua que entra por el nodo o si existe una salida de masa igual al producto del caudal de agua por la concentración en el acuífero, respectivamente), el valor de dicha entrada o salida es igual al producto del caudal Q por la concentración que vale c' si es entrada $Q > 0$ o c (concentración en el acuífero) si es salida $Q < 0$. El caudal Q es el procedente del exterior que, como se vio en la sección anterior, puede ser igual a: $Q(N)$ (si el caudal es fijo o nulo); $AL(N) \cdot [H_1(N) - H(N)]$ (si la condición de contorno es mixta); o el caudal de entrada/salida en los nodos de nivel fijo (nivel fijo).

Desde el punto de vista numérico, en estos nodos se suma Q a la diagonal de \mathbf{E} y Qc' al espesor saturado del acuífero si $Q > 0$. Si $Q < 0$, no se hace nada ya que, según se ha visto, la salida de masa es Qc . Por último, en los **odos de entrada o salida de masa prefijada** el valor de dicha entrada (o salida) por unidad de tiempo es M , que se especifica también mediante la masa por unidad de tiempo que se inyecta por el nodo.

2.8.2 Formulación por elementos finitos para acuíferos no confinados.

En esta sección se refieren a la formulación numérica de la solución por elementos finitos del flujo de agua en acuíferos no confinados en régimen estacionario o transitorio. Se emplea el método de los elementos finitos acoplado a un esquema en diferencias finitas hacia atrás para la integración temporal. Dada la naturaleza no lineal de la ecuación, el esquema de solución es iterativo, empleándose el método de Newton-Raphson, lo que conduce a una convergencia muy rápida. También, es aplicable a medios heterogéneos y anisótropos con direcciones de anisotropía variables. La base del acuífero puede tener una topografía arbitraria. Como condiciones de contorno se pueden imponer de caudal fijo, de nivel fijo, o mixtas con limitación al caudal de infiltración (nodos de río y manantial). Además, admite que algunos sectores del acuífero lleguen a secarse.

2.8.2.1 Ecuaciones de flujo para acuíferos no confinados.

El flujo de agua en un acuífero libre o no confinado está gobernado por la siguiente ecuación, la cual es un caso particular de la (ec. 56) deducida anteriormente:

$$\nabla \cdot (K(h - h_b) \nabla h) + q = S \frac{\partial h}{\partial t} \quad \text{en } \Omega \quad (98)$$

Donde h es el nivel del agua, h_b es la elevación de la base del acuífero, K es el tensor de permeabilidad, S es el coeficiente de almacenamiento, Ω es el dominio del problema y q es el término fuente/sumidero distribuido superficialmente (recarga/extracción).

La ecuación (98) se resuelve con las siguientes condiciones iniciales, las cuales son un caso particular de las que se expusieron en la (ec. 60):

$$h(x, y, 0) = h_0(x, y) \quad (99)$$

Donde h_0 puede ser cualquier función arbitraria, o la solución de la ecuación (98) para una simulación anterior, frecuentemente el régimen estacionario. También es común, sobre todo al analizar ensayos de bombeo, que h_0 sea igual a cero en todo el acuífero, en cuyo caso h representa las variaciones de nivel o descensos. En principio, se requiere que se especifique h_0 en todos los nodos del acuífero, pero también admite que corresponda al régimen estacionario o la solución de una simulación anterior.

Las condiciones de contorno son de la forma:

$$(K \cdot \nabla h) \cdot n = f(h, H) + Q \quad \text{en } \Gamma \quad (100)$$

Donde Γ es el contorno de Ω ; n es el vector unitario normal a Γ y dirigido hacia el exterior; H es un nivel externo; Q es un caudal prefijado. La función f representa el caudal infiltrado desde (descargado hacia) un elemento exterior al acuífero en el que existe un nivel de agua H . Un caso extremo es el de nodos de nivel fijo en el que el nivel en el acuífero se fuerza a ser idéntico al del exterior, para lo cual f se haría infinito si h no fuese igual a H . Un caso frecuente de condición de contorno que se puede representar con esta expresión es el de los nodos de ríos y manantiales.

En cualquier caso, la ecuación (100) debe interpretarse como la expresión del caudal que fluye a través del contorno del modelo. El primer término representa el caudal infiltrado (o aportado) por el acuífero, que naturalmente debe ser igual al proporcionado por (o descargado hacia) el exterior cuya expresión viene dada por el segundo miembro.

2.8.2.2 Aproximaciones empleadas.

En general las ecuaciones (98), (99) y (100) no se resuelven de forma analítica, sino que se tienen que realizar algunas aproximaciones. En primer lugar, la expresión de la transmisividad como producto del espesor saturado por la conductividad hidráulica tiene un sentido hidrológico bien definido y matemáticamente conduce a soluciones correctas pero, al no estar definida cuando el nivel del agua es menor o igual que la base del acuífero, puede producir dificultades numéricas. En esta sección se describen brevemente la forma de superar estas dificultades; la aproximación empleada para el coeficiente de almacenamiento cuando el nivel del agua es próximo a la base del acuífero; y el tratamiento de la condición de contorno de tipo mixto (función $f(h, H)$ de la ecuación 100)

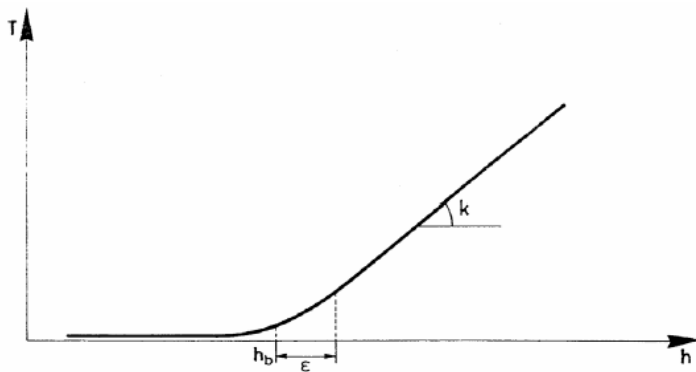


Figura 2.4: Aproximación de la transmisividad cerca de la base del acuífero.

La transmisividad se trata tal como se muestra en la Figura 2.4. La motivación de este tratamiento es la indicada en el párrafo anterior. Básicamente, se trata de evitar que la transmisividad se haga nula o negativa cuando el nivel piezométrico es igual o menor que la elevación de la base del acuífero. Esto puede suceder cuando se seca alguna parte del acuífero o, simplemente, porque durante el proceso

iterativo de solución puede darse esta condición en algún nodo. Si no se toma alguna precaución especial, las transmisividades nulas o negativas dan lugar a matrices singulares. Por tanto, es necesario evitar esta posibilidad.

Para ello, la transmisividad se define tal como se muestra en la Figura 2.4 mediante la siguiente expresión:

$$T(h) = \begin{cases} K(h - h_b) & \text{si } h \geq h_b + \varepsilon \\ K \cdot \varepsilon \cdot e^{(h - h_b - \varepsilon)/\varepsilon} & \text{si } h < h_b + \varepsilon \end{cases} \quad (101)$$

Donde T es transmisividad, K es conductividad hidráulica, h es nivel del agua, h_b es la elevación de la base del acuífero y ε es un espesor umbral tal que la transmisividad es linealmente proporcional al espesor saturado si éste es mayor que ε y decrece exponencialmente, pero siendo siempre positiva, si el espesor saturado es menor que ε .

De esta forma se consigue asegurar el funcionamiento estable del procedimiento iterativo, pero se perturba ligeramente la ecuación de flujo dando lugar a dos efectos que conviene tener presentes al interpretar los resultados del procedimiento. En primer lugar, cuando el nivel está muy próximo a la base del acuífero, la transmisividad empleada por el procedimiento es superior a la real. Para limitar este efecto conviene dar valores de ε que sean muy pequeños. Se ha empleado sin ninguna dificultad numérica, $\varepsilon = 10^{-6}$. A pesar de ello, en algunos problemas (los típicamente asociados a “inundación de acuífero”) pueden aparecer pequeños errores locales. Por otro lado, es evidente que si el espesor saturado es siempre superior al valor umbral, ε , los resultados no se ven afectados por esta aproximación. El segundo efecto aludido anteriormente es que el procedimiento continuará funcionando aún cuando el nivel del agua esté por debajo de la base del acuífero. En principio, ello no tiene mayor importancia ya que si ε se ha elegido suficientemente pequeño, el flujo de agua a través de las zonas que queden por debajo de la base del acuífero será despreciable. Sin embargo, desde el punto de vista del balance de masas podrían aparecer otras dificultades conceptuales. Para evitarlas, el procedimiento trata el coeficiente de almacenamiento como se indica a continuación. El principal problema, desde el punto de vista del balance de masas, de permitir que el nivel piezométrico quede por debajo de la base del acuífero es que se libere un volumen de agua que es proporcional al descenso por debajo de la base del acuífero y al coeficiente de almacenamiento. Dependiendo del tipo de materiales que constituyen la base del acuífero, esto puede no tener sentido físico. Por ello, el coeficiente de almacenamiento se reduce cuando el nivel está próximo a la base del acuífero, tal como se muestra en la Fig. 2.5. La expresión del coeficiente de almacenamiento en función del nivel es:

$$S = \begin{cases} S_y & \text{si } h \geq h_b + \delta \\ \left[\frac{(1 - S_m)(3x - x^3)}{4} + \frac{1 + S_m}{2} \right] \cdot S_y & \text{si } h_b - \delta \leq h \leq h_b + \delta \\ S_m \cdot S_y & \text{si } h \leq h_b - \delta \end{cases} \quad (102)$$

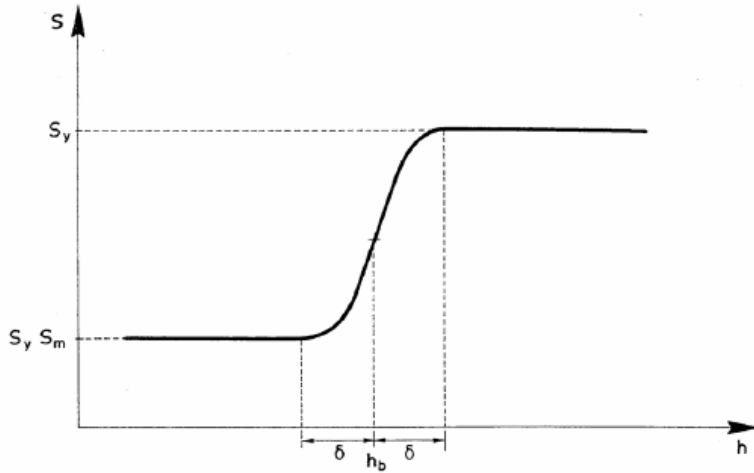


Figura 2.5: Aproximación del coeficiente de almacenamiento de la base del acuífero.

Donde S es el coeficiente de almacenamiento, S_y es el coeficiente de almacenamiento máximo, S_m es un factor que afecta al mínimo coeficiente de almacenamiento, δ es un espesor umbral y x está dado por la expresión:

$$x = \frac{h - h_b}{\delta}$$

El único parámetro que requiere un poco de cuidado es S_m . Por un lado, si S_m es igual a 1, el coeficiente de almacenamiento es constante e igual a S_y , lo que puede originar los problemas de índole conceptual discutidos anteriormente. Si, por el contrario, S_m es muy pequeño la convergencia puede ser algo más lenta. Estimamos que lo más apropiado es hacer S_m muy pequeño cuando no tenga sentido físico que el nivel quede por debajo de la base del acuífero o cuando, de tenerlo, no parezca apropiado que ésta libere agua. De lo contrario, S_m puede ser del orden de 1.

Respecto a las condiciones de contorno de tipo mixto, la formulación del programa es la convencional tal como se muestra en la Fig. 2.6. Si el nivel en el contorno es superior a un nivel de referencia externa, el acuífero descarga agua, mientras que si es inferior, la recarga. El caudal es proporcional hasta un caudal máximo. La expresión del caudal en función del nivel es:

$$Q(h) = \begin{cases} \alpha(h_1 - h) & \text{si } h \geq h_2 + \gamma \\ Q_{mx} - \alpha(h - h_2 + \gamma)^2 / 4\gamma & \text{si } h_2 - \gamma < h < h_2 + \gamma \\ Q_{mx} & \text{si } h \leq h_2 - \gamma \end{cases} \quad (103)$$

Donde α es el coeficiente de goteo, h es el nivel en el acuífero, h_1 es el nivel de referencia externa, γ es un espesor umbral, Q_{mx} es el caudal máximo infiltrado y h_2 es el nivel correspondiente a Q_{mx} en la fase lineal.

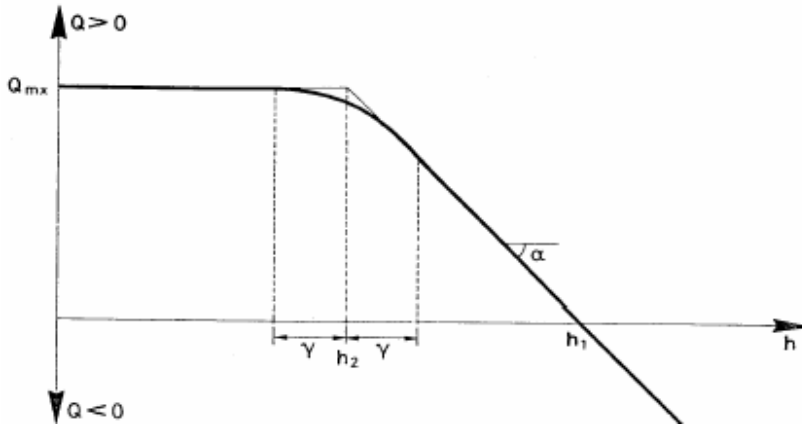


Figura 2.6: Ley de variación del caudal de entrada al acuífero en función del nivel utilizado para la condición de contorno de tipo mixto.

Con esta condición se puede representar la interacción con un río haciendo h_1 igual al nivel del río, α igual al coeficiente de goteo (en la entrada de datos va multiplicado por la superficie afectada) y Q_{mx} igual al caudal máximo que se produce al descolgarse el acuífero. También se puede representar la condición de manantial, en cuyo caso Q_{mx} es nulo y h_1 coincide con h_2 y es igual a la profundidad media de las raíces en el entorno del manantial.

2.8.2.3 Formulación numérica de la ecuación de flujo.

El procedimiento iterativo que emplea el método de los elementos finitos para la solución de las ecuaciones del flujo no confinado (sección 2.8.2.1) con las particularidades discutidas en la sección 2.8.2.2. En esta sección se presenta la formulación numérica empleada para aproximar estas ecuaciones y en la siguiente se describe el algoritmo iterativo de solución.

Las ecuaciones numéricas básicas se obtienen aplicando el método de Galerkin a la ecuación (98) tras haber discretizado el medio con elementos triangulares lineales. Ello conduce a:

$$(A + \frac{D}{\Delta t^k})h^k = b^k + \frac{D}{\Delta t^k}h^{k-1} \quad (104)$$

Donde h^k es el vector de niveles en los nodos en el tiempo k , Δt^k es el incremento de tiempo entre los tiempos t^k y t^{k-1} , A , D y b son, respectivamente, las matrices de "conductancias" y "capacidades" y el vector de fuentes y sumideros, que están definidos como:

$$A_{mn} = \sum_e A_{mn}^e \quad (105)$$

$$D_{mn} = \sum_e D_{mn}^e \quad (106)$$

$$b_m = \sum_{\Gamma_m} Q_m^\Gamma + \sum_e \frac{q^e \cdot A^e}{3} \quad (107)$$

Donde e indica número de elemento, Γ_m representa el segmento de contorno adyacente al nodo m , Q_m^Γ es la entrada en dicho segmento que corresponde al nodo m , A^e es el área del elemento y q^e representa la recarga superficial. Las matrices A_{mn}^e y D_{mn}^e vienen dadas por:

$$A_{mn}^e = \frac{1}{4A_e} [T_{xx}^e b_n b_m + T_{xy}^e (b_n c_m + b_m c_n) + T_{yy}^e c_n c_m] \quad (108)$$

$$D_{mn}^e = \frac{\delta_{mn} S^e A_e}{3} \quad (109)$$

Donde

$$b_m = y_n \cdot y_p$$

$$c_m = x_p \cdot x_n$$

$$A_e = \frac{1}{2}(b_m c_n - b_n c_m)$$

Y m , n y p son permutaciones antihorarias de los nodos del elemento e . Las variables T^e y S^e representan la transmisividad y el almacenamiento del e -simo elemento. Por último, δ_{nm} es la delta de Kronecker (igual a 1 si m es igual a n y cero en caso contrario).

La ecuación (104) se resuelve secuencialmente en el tiempo. Empezando con k igual a 1, h^0 se obtiene a partir de las condiciones iniciales (ec. 99), lo que permite calcular h^1 . A partir de éste, la solución (104) da lugar a h^2 y así sucesivamente. Debe notarse, sin embargo que A , D y b dependen de h^k ya que A es función de T (ec.108), que a su vez es función de h (ec.101), D es función de S (ec.109), que a su vez depende de h (ec.102) y, en los nodos de condición mixta, Q es también función de h (ec.103). Todo esto hace que la ecuación (104) no se pueda resolver directamente, sino que sea necesario adoptar un esquema iterativo, que se explica en la próxima sección.

2.8.2.4 Esquema iterativo de solución.

Como ya se ha dicho, la ecuación (104) se resuelve iterativamente. Los aspectos más importantes del método son el esquema cíclico de solución para lo que se emplea el método de Newton-Raphson y los criterios de convergencia.

2.8.2.5 Método de Newton-Raphson.

La dificultad de resolver sistemas no lineales como el de la ecuación (104) es que la matriz del sistema depende de la solución. Para resolverlos, el método de Newton-Raphson aproxima linealmente la variación de la ecuación al variar la solución. Esto conduce a:

$$\left(A_i + \frac{D_i}{\Delta t^k} + \frac{\partial A_i}{\partial h} h_i^k + \frac{\partial D_i}{\partial h} \frac{(h_i^k - h_i^{k-1})}{\Delta t^k} + \frac{\partial b}{\partial h} \right) (h_{i+1}^k - h_i^k) = b_i - A_i h_i^k - \frac{D_i}{\Delta t^k} (h_i^k - h^{k-1})$$

(ec. 110)

En esta ecuación, el subíndice i se refiere al número de iteración. Así, A es la matriz de conductancias calculada con las transmisividades obtenidas empleando la ecuación (101). El cálculo de las derivadas de las matrices se hace siguiendo un esquema análogo al de la construcción de éstas. Por ejemplo, la derivada con respecto a los niveles se calcula como (ver ecuación 105):

$$\frac{\partial A_i}{\partial h} = \sum_e \frac{\partial A_e}{\partial h} \quad (111)$$

Donde la derivada de A_{mn}^e se obtiene directamente de la ecuación (108) multiplicando por la derivada de la transmisividad con respecto al nivel, cuya expresión se puede deducir fácilmente a partir de la ecuación (101).

Un aspecto de esta ecuación que conviene resaltar es que el término independiente representa el error del balance de masas que se obtendría si se tomaran como niveles los correspondientes a la iteración i .

$$h_i^k = \begin{cases} h^0 & \text{si } k = 1 \\ \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} (h^1 - h^0) & \text{si } k = 2 \\ h_Q^k & \text{si } k > 2 \end{cases} \quad (112)$$

Por lo demás, el esquema iterativo sigue pasos similares a los de la integración temporal. Así, en primer lugar se hace una estimación inicial de los niveles.

Donde h_Q^k representa el valor para el tiempo k obtenido a partir de una aproximación cuadrática que pasa por los niveles obtenidos en los tres últimos tiempos. Con estos niveles se calcula el término independiente y la matriz del sistema (ec.110).

La solución de este sistema proporciona:

$$\Delta h = h_{i+1}^k - h_i^k \quad (113)$$

De donde se deduce h_{i+1}^k . Este proceso se repite hasta alcanzar alguno de los criterios de convergencia que se describen a continuación.

2.8.2.6 Criterios de convergencia. Control del incremento de tiempo.

El procedimiento establece la convergencia en base a niveles y en base a caudales. La convergencia en términos de niveles se supone asegurada cuando se cumplen las dos condiciones siguientes:

1. Convergencia en términos absolutos:

$$\max_n |h_{ni}^k - h_{ni-1}^k| < \delta_{amx} \quad (114)$$

Convergencia en términos relativos:

$$\max_n \left| \frac{h_{ni}^k - h_{ni-1}^k}{h_{ni}^k - h_n^{k-1}} \right| < \delta_{rmx} \quad (115)$$

Donde n es número del nodo, i es número de iteración y k es número de intervalo de tiempo. De esta forma, h_{ni}^k es el nivel del nodo n en la iteración i al final de k -ésimo intervalo de tiempo, δ_{amx} y δ_{rmx} son variables definidas por el especialista para controlar el proceso iterativo. En la ecuación (115), el

primer miembro no está definido cuando se anula el denominador, en cuyo caso tampoco tiene sentido este criterio de convergencia.

Por ello, el máximo de la ecuación (115) sólo se calcula sobre aquellos nodos en los $|h_{ni}^k - h_{ni-1}^k|$ es superior a un valor umbral (es recomendable tomar 10^{-10}).

Análogamente, se supone que se ha alcanzado la convergencia en términos de caudales cuando se verifica la siguiente condición:

$$\max_n (\Delta Q_{ni}) < \gamma_{mx} \quad (116)$$

Donde ΔQ_{ni} es el error de balance de masas del nodo en la iteración i que, como se comentó antes, constituye el término independiente de la ecuación (110). El parámetro γ_{mx} también es definido por el especialista.

Podemos decir que se ha alcanzado la convergencia cuando esta se ha podido establecer o bien en términos de niveles o bien en términos de caudales. Es decir, el proceso iterativo o bien se detiene cuando se verifican (114) y (115) simultáneamente o bien cuando se cumple (116). En condiciones normales el proceso finaliza con un número de iteraciones relativamente bajo. Ahora bien, el proceso puede alargarse cuando existen problemas de convergencia. En estos casos, la longitud del incremento de tiempo se reduce automáticamente a la mitad. El procedimiento entiende que existen problemas de convergencia cuando se verifica una de las dos condiciones siguientes: máximo número de iteraciones ó aumento en el cambio de niveles. En el primer caso, se reduce el paso de tiempo a la mitad cuando se ha realizado un número de iteraciones. Respecto al segundo caso, se entiende que existen problemas de convergencia y por tanto es necesario reducir el incremento de tiempo. Esto sucede cuando:

$$\max_n \Delta h_{ni} > \max_n \Delta h_{ni-1} \quad (117)$$

El procedimiento considera que no puede converger cuando, en un mismo intervalo de tiempo, se reduce tres veces la longitud del incremento por alguno de los dos motivos expuestos. Debe notarse que el procedimiento también reduce el incremento de tiempo cuando el máximo cambio de niveles en un incremento de tiempo es superior a un valor prefijado por el especialista, pero estas reducciones no se contabilizan a los efectos de convergencia.

Capítulo III: Aplicación del Modelo en la Región Acuífera del Noreste de Villa Clara

Los acuíferos subterráneos en Cuba se encuentran generalmente en grandes macizos calizos con un alto grado de carsificación. Pueden abarcar centenares de kilómetros cuadrados de extensión y frecuentemente son muy productivos por su abundancia de agua de buena calidad y a poca profundidad desde la superficie. Dada la complejidad del medio cársico, hasta ahora no ha sido posible una formulación matemática satisfactoria que permita describirlo de forma explícita para su empleo en un modelo a escala regional. Y cuando esto sea posible faltará todavía la inversión de recursos importantes para obtener la información necesaria. En estas condiciones, los refinamientos de tridimensionalidad y anisotropía no parecen ser necesarios de inmediato. Por otra parte, dados el enfoque del flujo, la lentitud general del movimiento a esta escala y los grandes espesores de las formaciones acuíferas, también parecen prescindibles los criterios del flujo no lineal y las variaciones de la transmisividad con el espesor saturado. Como resultado, la factibilidad de la modelación se basa en la hipótesis de sustitución del medio cársico real por un medio poroso equivalente cuyas propiedades de comportamiento se determinan definitivamente durante la calibración del modelo. Adicionalmente, este medio equivalente puede ser heterogéneo, pero es isotrópico y a través de él ocurre un flujo impermanente, lineal y bidimensional. El carácter bidimensional no impide que se puedan variar espacialmente los espesores acuíferos, pero también esto puede obviarse si se trabaja con la transmisividad en lugar de permeabilidad para caracterizar el medio. La experiencia ha demostrado la validez de estas hipótesis en las condiciones señaladas, a partir de la práctica real de los resultados. Además, si el modelo se construye con suficiente flexibilidad, no es difícil añadirle el carácter freático, la interacción con cuerpos de agua superficiales u otros aspectos que fueran imprescindibles.

3.1 El acuífero como sistema.

Si se analizan las características que definen al acuífero como el ente físico que es objeto de estudio y el cual se quiere representar mediante un modelo, se le pueden señalar las siguientes particularidades:

- Es una formación geológica con una geometría bien definida pero en su mayor parte desconocida.
- En esta formación se almacena y circula el agua, por lo que en ella se desarrolla parte del ciclo hidrológico de la región a la que pertenece.
- Las propiedades hidráulicas de este medio lo caracterizan como no homogéneo y por lo general anisótropo.
- El agua se mueve en el acuífero siguiendo leyes físicas bien conocidas, las cuales definen su comportamiento hidrodinámico.
- Las entradas y salidas de agua del acuífero van a depender de las características de sus fronteras, del estado del acuífero, de factores climáticos, de sus propiedades hidrogeológicas y de las acciones que el hombre realiza sobre él.
- Las condiciones de estado que definen en un momento dado la calidad del agua subterránea y sus niveles, van a depender de los factores anteriores.

Si las características antes señaladas se definen mediante bloques y se utilizan líneas para mostrar sus interrelaciones, el acuífero se pudiera representar esquemáticamente, tal y como se muestra en la Figura 3.1.

Las variables de entrada o salida del acuífero clasificadas como controlables se refieren a aquellas que dependen de la acción del hombre, como pudieran ser: el bombeo, el drenaje y la recarga artificial, en sus diversas formas de captación o inducción.

Las variables no controladas están relacionadas con las entradas o salidas hacia otros acuíferos en comunicación con el aislado para su estudio y que dependen de las condiciones hidrodinámicas que se establecen entre ellos. También se incluyen entre estas las referidas a la alimentación producto de la lluvia y del contacto con embalses o con corrientes superficiales. En la definición del tipo de variable de entrada o salida no solo se incluye el aspecto cuantitativo sino también su carácter cualitativo.

Según puede apreciarse, el acuífero puede ser analizado como un sistema de grandes complejidades pero que con ciertas hipótesis simplificadoras puede ser representado mediante un modelo. Este modelo está caracterizado por tener una gran distribución de parámetros, con condiciones de frontera y ecuaciones diferenciales demasiado complejas que no permiten su integración por métodos analíticos, por lo que el tratamiento por métodos numéricos constituye en la actualidad la única solución viable de este problema.

El modelo numérico del sistema acuífero constituye una herramienta de gran utilidad práctica ya que permite caracterizar su comportamiento hidrológico y ayuda a la toma de decisiones en la operación del mismo sobre una base científica.

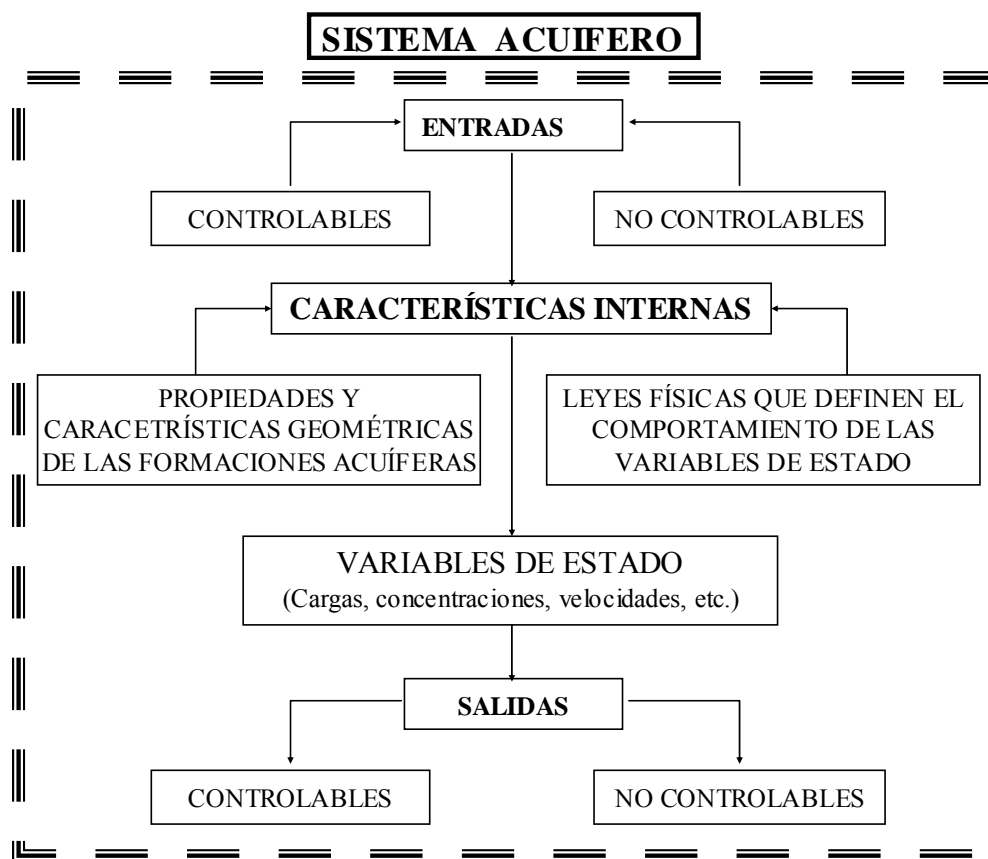


Fig. 3.1 Esquema representando al acuífero como sistema

Sobre las características del paquete de programas que se ha utilizado en la modelación de acuíferos en Cuba (AQÜIMPE), se puede ampliar en (Martínez J. B. 1990), donde se agrupan los principales documentos elaborados asociados al mismo y que sirven de fundamento teórico e implementación práctica.

Es necesario resumir de "AQÜIMPE" las siguientes características:

- Es un sistema muy interactivo que recoge las experiencias de su aplicación por el Grupo de Modelación del CIH en los principales acuíferos cubanos por más de una década (González Y., 1990; Martínez J.B., 1988).

- Utiliza el MEF como técnica numérica, empleando el triángulo cuadrático como elemento de discretización, aspecto que lo hace muy eficiente y de fácil adaptación en zonas singulares o de mayor interés.
- Las salidas gráficas que ofrece son de gran utilidad para el modelador en cualquier etapa de utilización del modelo.
- Emplea un eficiente método de solución de los sistemas de ecuaciones algebraicas y con un algoritmo que optimiza los requerimientos de memoria, por lo que es posible la simulación de grandes sistemas acuíferos utilizando microcomputadoras pequeñas, lo que lo hace ideal para la operación de estos sistemas en las empresas de la producción.

Hipótesis de Cálculo.

Desde el punto de vista matemático, se pudiera realizar el modelo teniendo en consideración todas las complejidades del sistema acuífero, pero en realidad, esto no es posible por las limitaciones que imponen las bases de datos, por lo que es necesario realizar algunas hipótesis simplificadoras que no son válidas para todo el sistema pero si para los subdominios en que este puede dividirse.

Las hipótesis simplificadoras que se le realizan al sistema real para poder aplicar las ecuaciones diferenciales correspondientes mostradas con anterioridad, representan una decisión trascendental en la concepción del modelo de un acuífero, ya que de ella van a depender las posibilidades de poder representar al sistema real.

La utilización de las técnicas de la modelación numérica para la solución de la ecuación de flujo del agua subterránea, obligan a subdividir la región de flujo en áreas elementales. A este proceso se le denomina discretización y cada una de las subdivisiones recibe el nombre de elemento. En el caso de las aplicaciones de la modelación matemática de acuíferos realizadas en Cuba, se han hecho algunas consideraciones que se analizan a continuación:

- a) El medio fisurado y cársico puede ser considerado como equivalente a un medio poroso homogéneo en cada uno de los elementos en que se discretiza el área.

Esta hipótesis es posiblemente una de las más cuestionadas por algunos hidrogeólogos. Nuestra experiencia confirma la aceptabilidad de la misma cuando se realiza una adecuada

discretización para que cada elemento se corresponda con una zona que se comporte como hidrogeológicamente homogénea.

b) El medio puede ser considerado isótropo.

En el caso de formaciones cársicas, esta hipótesis es discutible, atendiendo a la circulación preferencial que tiene el agua subterránea en función del desarrollo del carso. No obstante lo anterior, es necesario considerar que para este tipo de acuífero en la realidad no existe una u otra dirección preferencial ya que las oquedades, fisuras y cavernas varían de forma aleatoria por lo que el modelo anisótropo no se adapta a este tipo de formación y no tiene sentido utilizarse en las formaciones cársicas el concepto de anisotropía tal y como se concibe para las formaciones no consolidadas.

Es necesario aclarar que la no utilización del modelo anisótropo no se debe solo a su complejidad matemática y a la carente base informativa de campo que impide su calibración, sino también a que este modelo no puede representar adecuadamente a los acuíferos cársicos. La circulación preferencial que se presenta en las formaciones cársicas, se puede simular en el flujo plano horizontal a escala macroscópica con los cambios de las propiedades de un elemento a otro (heterogeneidad del medio), la anterior afirmación se obtuvo de la experiencia de la calibración con modelos de medios de estas características, lo cual fue posteriormente verificado con otros métodos de investigación de campo.

c) La transmisividad es constante por elemento.

Si el acuífero que se modela funciona como libre, la transmisividad varía con el espesor saturado. No obstante, en determinados casos y fundamentalmente por la falta de información sobre la posición del lecho impermeable, se pudiera modelar el acuífero como confinado sin introducir grandes errores en los resultados. Esta consideración implica suponer que la transmisividad es constante para cada elemento en todos los pasos de tiempo, lo cual es admisible cuando el acuífero es de gran espesor y las oscilaciones de los niveles son pequeñas en relación con dicho espesor. En nuestro caso esta hipótesis resultó confirmada y evitó introducir otra variable de incertidumbre en el modelo. Solo en el caso de los acuíferos costeros donde la interfaz tiene una influencia significativa en los caudales de descarga hacia el mar, ha sido necesario considerar la variabilidad temporal de este parámetro.

- d) La porosidad efectiva equivale al coeficiente de almacenamiento y se considera constante en cada elemento.

Por lo general esta consideración es adecuada, aunque es posible que en períodos de intensas lluvias el acuífero en determinadas zonas trabaje a presión, lo que implicaría una disminución del coeficiente de almacenamiento y por tanto una reducción del poder de asimilación del acuífero de los excedentes de la lluvia, lo que puede incluso producir la surgencia por pozos y la aparición de manantiales. Esta situación se puede presentar y es de interés en las investigaciones dirigidas al control de inundaciones. Desde el punto de vista de la utilización del modelo para la explotación del recurso hídrico subterráneo, la hipótesis analizada no ocasiona grandes errores ya que las principales afectaciones se producen en periodos secos prolongados.

3.2 Aplicación de AQUIMPE en la Región Acuífera del Noreste de Villa Clara.

La región acuífera del Noreste de Villa Clara abarca un área de 1087 km² y se desarrolla en forma de franja con dirección Noroeste paralela a la bahía de San Juan de los Remedios desde el río Sagua la Chica por el Oeste hasta el límite con la provincia de Sancti Spíritus por el Este. Por el Sur se extiende hasta el límite de la región cársica que coincide con el parteagua subterráneo regional (Fig. 3.2).

Las formaciones acuíferas de esta región, están constituidas por rocas carbonatadas del Paleógeno y el Cretácico con distinto grado de carsificación. La cobertura y afloramientos de rocas carnificadas, también es irregular. El acuífero tiene descarga libre y "semiconfinada" al mar que pudiera representar un peligro de intrusión salina.

La zona de estudio se corresponde con la cuenca hidrogeológica VC-I. El agua subterránea constituye la única fuente de abasto a la población, donde se destacan los abastos a ciudades importantes de la Provincia, como Camajuaní, Remedio y Caibarién, así como el abasto al polo turístico de la cayería Norte de Villa Clara. También son la fuente de riego para el 95% de las áreas agrícolas de la región.

El caso en estudio tiene como objetivos principales, evaluar las condiciones iniciales del funcionamiento hidrodinámico del sistema y la actualización de las bases de datos del mismo. Para la confección del modelo se delimitó la región, por su límite Oeste siguiendo una línea de

flujo contigua al poblado de Vueltas, dejando fuera al área comprendida entre este poblado y el río Sagua la Chica. La exclusión se debe a la limitada importancia de este sector del acuífero, su escaso uso y ausencia de información. Por el límite Este, se extendió la cuenca hacia parte de la provincia de Sancti Spíritus hasta coincidir con una línea de flujo.

Por la extensión del área de estudio y el nivel de información que se tiene de la misma, se decidió trabajar a la escala 1:50 000.

Como se observa en la Figura 3.2, la región del Noreste de Villa Clara, constituye un acuífero de carácter regional, que puede considerarse como no confinado. Según el grado de estudio que sobre él se tiene, se han identificado 18 zonas o unidades hidrogeológicas; algunos de ellos, a su vez se dividen en bloques hidrogeológicos (Fig. 3.3). Para estas delimitaciones se tuvo en cuenta las propiedades hidrogeológicas, nivel de explotación y grado de estudio.

Las condiciones de contorno se definieron de la siguiente forma:

<u>Contorno:</u>	<u>Asociado a:</u>	<u>Condición de contorno</u>
• Contorno Sur	Parteagua hidrogeológico regional	Impermeable
• Contorno Oeste	Línea de flujo	Impermeable
• Contorno Este	Línea de flujo	Impermeable
• Contorno Norte	Límite con el mar	Permeable (descarga libre al mar)

Se quieren modelar 15 intervalos de tiempo de 6 meses cada uno y se tiene un mapa de hidroisohipsas del estado inicial ($t = 0$).

3.3 Discretización de la región de estudio.

Este es uno de los pasos más importantes en todo el trabajo de modelación por su influencia decisiva en el funcionamiento del modelo y cómo este resulta un reflejo confiable de la realidad.

Discretizar la zona de estudio consiste en subdividir el área de la región a estudiar en una serie de elementos (triángulos) en los cuales se destacan sus tres nodos vértices y los tres nodos secundarios (en el punto medio de cada lado) de modo que cada triángulo posee seis nodos. Esta triangulación del área debe realizarse buscando lograr que los triángulos adyacentes tengan lados enteros comunes y vértices comunes, es decir, que no se permitan vértices de un triángulo situados en un punto intermedio de un lado de otro triángulo adyacente.

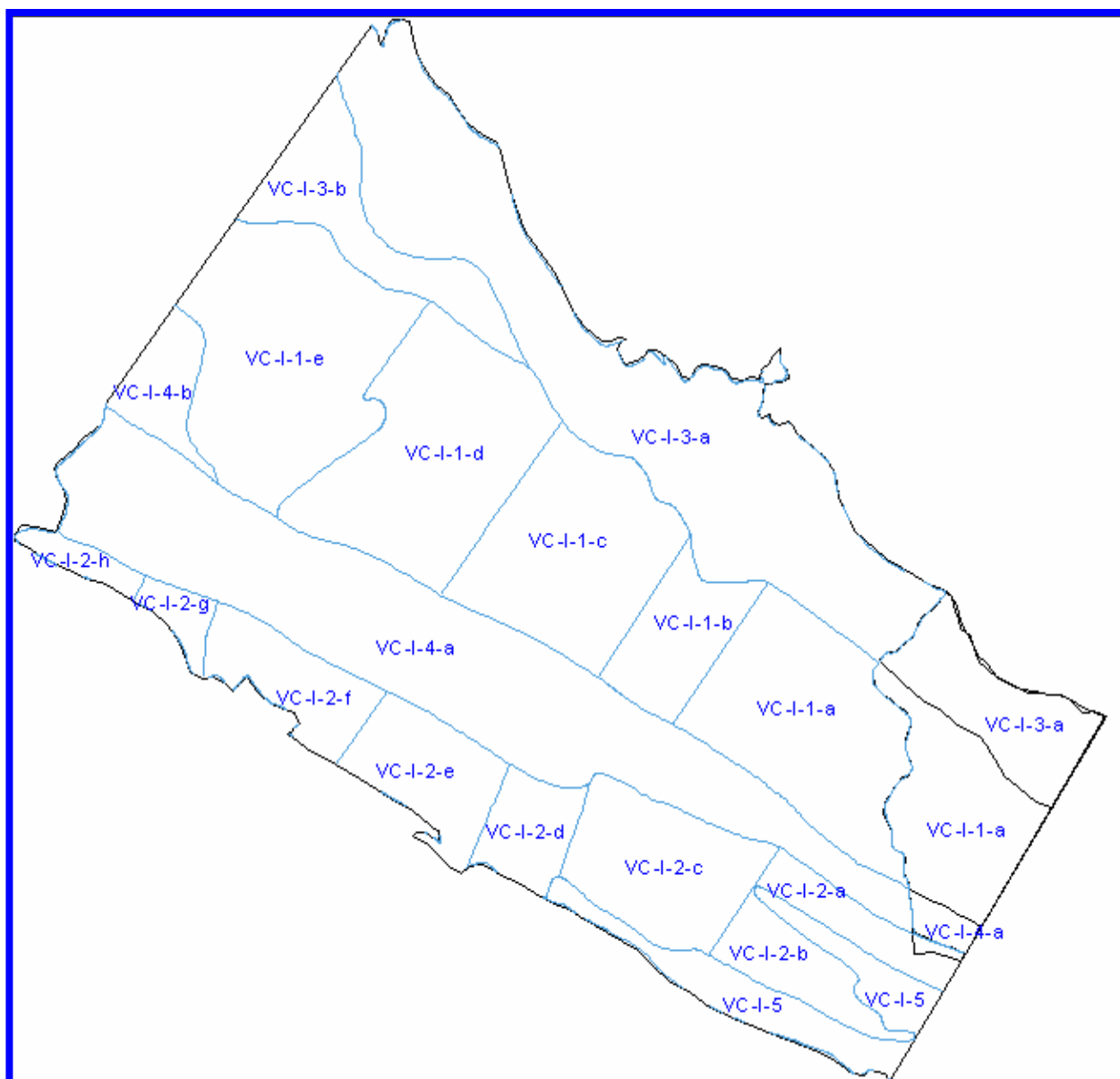


Fig. 3.3 Tramos y bloques hidrogeológicos de la región acuífera (cuenca VC-I)

La sinuosidad de los contornos exteriores se sustituye por una línea quebrada conformada por los lados exteriores de los triángulos que allí se han trazado. La triangulación sólo necesita representar correctamente a la superficie solución y esto se logra haciendo triángulos mayores en las zonas de poca variación de H (nivel piezométrico) y menores en los de mayor variación. Por supuesto, las propiedades hidrogeológicas son constantes dentro de cada triángulo, por tanto, un

triángulo no puede abarcar áreas de zonas distintas, ver (Llanusa R. H., Dilla F., y Hernández A. O. y Martínez J. B., 1990).

En la tabla siguiente se describen las propiedades de cada una de las unidades hidrogeológicas definidas en la Región:

Unidad Hidrogeológica		Espesor E (m)	Transmisividad T (m ² /d)	Conductibilidad K (m/d)	Coef. Almacenamiento μ
Tramo	Bloque				
VC-I-1	VC-I-1-a	14	2500	167	0.060
	VC-I-1-b	14	1000	67	0.032
	VC-I-1-c	14	2200	147	0.046
	VC-I-1-d	14	2800	187	0.035
	VC-I-1-e	14	983	66	0.031
	VC-I-1-f	14	1400	93	0.056
VC-I-2	VC-I-2-a	10	2236	149	$\leq 0.05-0.07$
	VC-I-2-b	10	2236	149	$\leq 0.05-0.07$
	VC-I-2-c	10	707	47	0.026
	VC-I-2-d	10	280	19	0.043
	VC-I-2-e	10	355	24	0.056
	VC-I-2-f	10	316	21	$\leq 0.05-0.07$
	VC-I-2-g	10	840	56	0.062
	VC-I-2-h	10	316	21	0.020
VC-I-3	VC-I-3-a	6	100 a 1000	10 a 50	-
	VC-I-3-b	8	1000 a 5000	100 a 250	-
VC-I-4		10	260	52	0.025
VC-I-5		8	100 a 1000	10 a 50	-

Leyenda

VC-I-1-a “Dolores”	VC-I-2-a	VC-I-2-d “Zulueta”
VC-I-1-d “Remedios”	VC-I-2-e “Buena Ventura”	VC-I-2-h “Piscina”
VC-I-1-b “Guajabana”		VC-I-3 “Costero”
VC-I-1-e “Refugio”	VC-I-2-b	VC-I-4 “Vueltas-Viñas”
VC-I-1-c “Rojas”	VC-I-2-f	
VC-I-1-f “Chiqui G.”	VC-I-2-c “Buena Vista”	VC-I-5
	VC-I-2-g “Camajuaní”	

En la conformación de los triángulos se conciliaron diversos aspectos para hacer más confiable la discretización, por ejemplo: los triángulos que se construyeron son bastantes homogéneos en

cuanto a la geología, propiedades hidrogeológicas y tipo de suelo. En el caso que nos ocupa el acuífero fue subdividido en 60 triángulos, los cuales abarcan toda la superficie de solución, es decir, el dominio del acuífero y sus contornos.

También se han destacado zonas mediante conjuntos de triángulos las cuales reflejan el comportamiento hidrodinámico del acuífero, es decir, dirección y sentido del flujo; el acuífero fue subdividido en 18 zonas. Además, se han hecho coincidir nodos de los triángulos con puntos de explotación (o recarga) importantes.

Por último, se destacan zonas de interés económico como poblaciones (Camajuaní, Remedios y Caibarién), empresas agrícolas (Empresa Cultivos Varios Remedios), industriales (abasto al polo turístico de la cayería Norte), etcétera.

Como se observa (Fig. 3.4), la tarea de la discretización es realmente compleja, por lo cual es necesario proceder con la debida atención, sopesando todos los aspectos señalados y repitiendo el trabajo varias veces si fuera necesario. Para la triangulación (discretización) de la región se usó el soporte SIG, con la base de datos existente y para la interfase se utilizó el software ArcView, cuyas bondades permitió el manejo de toda la información, desde la geología hasta los datos de manejo y explotación de acuífero.

La trascendencia de las decisiones que se toman en la triangulación bien vale el tiempo que se dedica a hacerla bien. Las experiencias acumuladas en la calibración enseñan el inestimable valor de una buena triangulación.

3.4 Numeración de los elementos (triángulos) y nodos.

Una vez discretizada la zona de estudio en elementos triangulares hay que pasar a darle número a cada uno de los triángulos en forma estrictamente consecutiva, empezando por el número uno. Los nodos vértices y secundarios también se numeran (Fig. 3.4), de la misma forma consecutiva y empezando con el uno, es decir, las numeraciones de triángulos y nodos son independientes.

El orden en el que se numeran los triángulos es arbitrario, pero es recomendable seguir un orden semejante al que utiliza para los nodos. La numeración de los nodos debe seguir un cierto orden para reducir los requerimientos de memoria interna de la máquina así como los tiempos de ejecución.

Con referencia a la Figura 3.4, la numeración de los nodos se hizo definiendo dos direcciones que coinciden más o menos con las de los ejes coordenados de las líneas de flujo. En una de estas dos direcciones el acuífero es más corto y esta es la dirección en que se avanza primero con la numeración. La numeración avanza de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba, pero en esta última el acuífero es más corto y por ende en ese sentido se avanzará primero. La numeración de los elementos (triángulos) se llevó a cabo, en el mismo orden que la de los nodos. Se utilizaron 145 nodos para la numeración del acuífero en estudio.

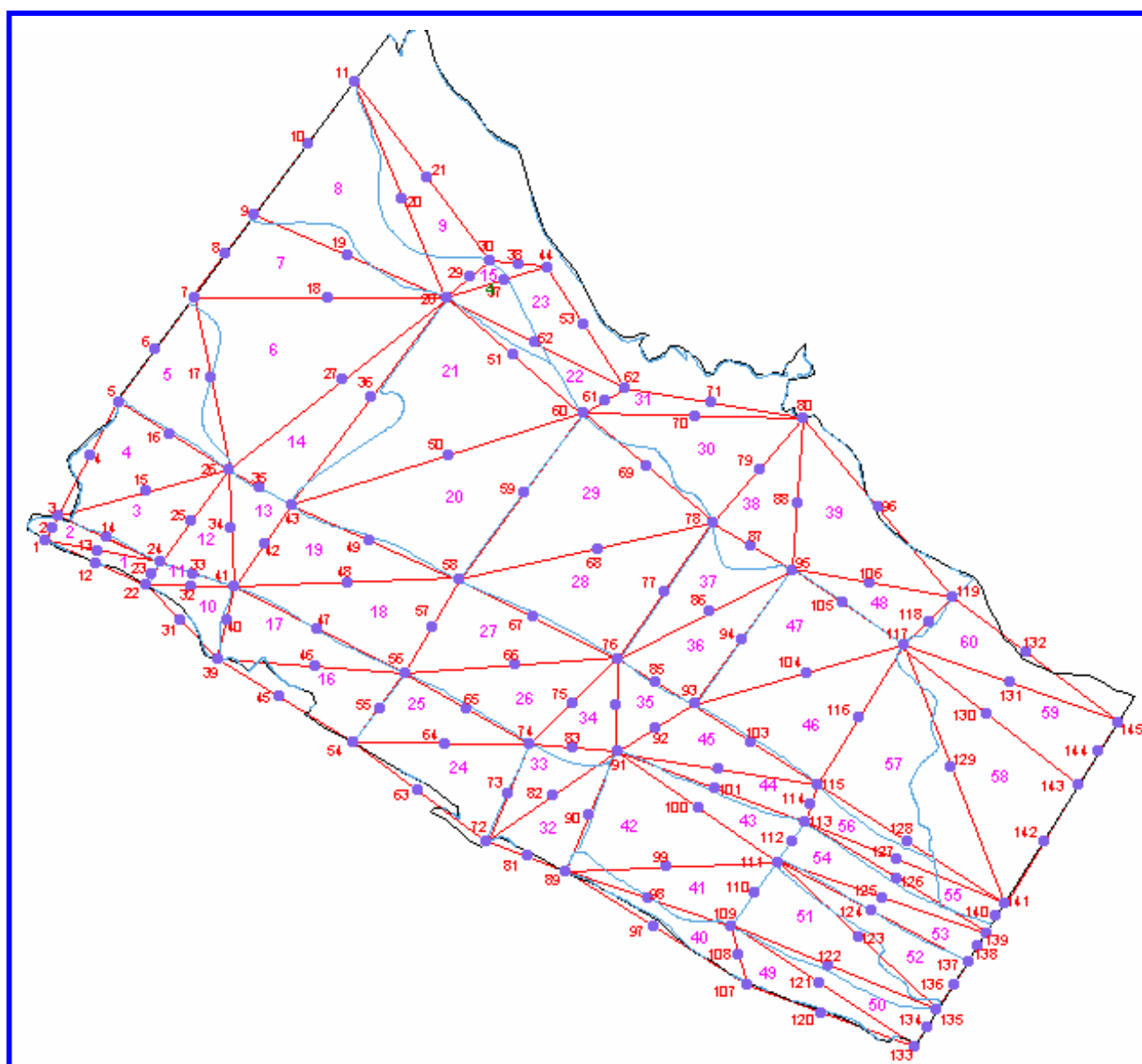


Fig. 3.4 Discretización de la región acuífera.

3.5 Modelo Conceptual del sistema acuífero.

La primera etapa por la que pasa el modelo de un acuífero se le denomina Caracterización y tiene como objetivo fundamental definir el Modelo Conceptual o representación simplificada del sistema real que se pretende estudiar. Es esta etapa una de las más importantes en la construcción del modelo de un acuífero y en ella se deben tener en cuenta los siguientes aspectos:

- Objetivos de la tarea técnica que se pretende resolver con el modelo y precisión de los resultados.
- Base de datos disponible del área que se modelará.
- Conocimiento preliminar del funcionamiento hidrodinámico del sistema acuífero.
- Correspondencia entre las hipótesis de cálculo contenidas en el programa de simulación y las del modelo conceptual
- Tiempo y recursos disponibles para lograr los objetivos propuestos.

De acuerdo a los aspectos antes enunciados se obtendrá un modelo conceptual del sistema acuífero y las características que lo definen (contorno del área a modelar o sea la extensión del modelo, las fronteras, escala de trabajo y la base de datos disponibles), aspectos que se tuvieron en consideración para la selección del software, en nuestro caso AQÜIMPE, aunque en cierta medida este ha sido considerado a la hora de definir el modelo conceptual.

Etapas de calibración

En lo que sigue, el presente trabajo se dedica al describir los pasos que es necesario ejecutar en la etapa de calibración. Estos pasos son los siguientes:

1. Búsqueda preliminar de información.
2. Límites del área de modelar.
3. Selección del período de calibración. Escala de trabajo.
4. Discretización de la zona de estudio.
5. Numeración de los elementos y nodos.
6. Lista de triángulos y coordenadas de los vértices. Propiedades hidrogeológicas.

7. Estado inicial.

8. Condiciones de contorno.

Ampliando lo dicho anteriormente, en el período de calibración se busca reproducir lo más fielmente posible uno o más mapas de hidroisohipsas registrados considerándolos como estados finales del acuífero.

Por lo general, el trabajo consiste en determinar las propiedades hidrogeológicas de las distintas zonas del acuífero que mejor reproducen dichos estados finales. Además, en la práctica, otra de las incógnitas fundamentales es la determinación de la recarga por infiltración a partir de la lluvia.

El método que se ha empleado para efectuar la calibración, fue el método indirecto o por tanteos, en el cual se van repitiendo las corridas del modelo y mediante variaciones de las propiedades se logra el resultado deseado.

Manejo de la información y empleo del Sistema de Información Geográfica.

Todo trabajo de modelación matemática, para iniciarse correctamente, debe recurrir a una cuidadosa búsqueda y análisis de la información existente sobre la zona de interés. Este estudio no solo ahorra trabajo y tiempo, sino que es la única forma de conseguir que los datos históricos ayuden a comprender el funcionamiento del sistema que se va a modelar. En nuestro caso se hizo necesario revisar:

- Mapas cartográficos.
- Informes geológicos y geomorfológicos.
- Informes hidrogeológicos.
- Informes de suelos y de uso del terreno.
- Mapas con la ubicación de pozos de extracción.
- Mapas con la ubicación de pluviómetros, pluviógrafos y estaciones hidrometeorológicas.
- Aforos existentes y confiabilidad de los mismos.
- Trabajos de estimación de recursos de aguas subterráneas.
- Planes de utilización de las aguas y registros de control de explotación real..
- Hidrografía y relación entre aguas superficiales y subterráneas.
- Niveles de la red básica de pozos de observación.

- Mapas de hidroisohipsas.

La revisión de toda esta información nos permitió adquirir conocimientos generales sobre:

- Geomorfología y relieve.
- Geología.
- Hidrogeología.
- Suelos.
- Vegetación.
- Clima.
- Hidrografía.
- Economía de la zona (agricultura, ganadería, acueductos, etc.).

3.6 Resultados del modelo.

Es conveniente elegir un período histórico suficientemente largo y que presente estados extremos del acuífero (períodos de intensas lluvias y sequía). Este período no debe coincidir con el período elegido para realizar la fase del ajuste (calibración). En general, los primeros intervalos no serán muy precisos y convendrá tener siempre un *período de calentamiento* del modelo, lo que dificultará el usar períodos menores de un año. Lo anterior se debe a la necesidad de compensar los errores por falta de equilibrio en el estado inicial de los niveles del agua subterránea. No habría razón para la existencia de tal período de calentamiento si el estado inicial fuese congruente con los datos geométricos e hidrogeológicos obtenidos en la etapa de ajuste.

En la Figura 3.5 se presenta la ventana inicial de AQUIMPE con el menú principal. Desde este menú se introducen todos los datos al modelo, comenzando por las unidades de tiempo hasta la opción de impresión.

Para los 15 intervalos de tiempo de 6 meses que se modelaron (desde Abril del año 1998 hasta Octubre del 2005), se pudieron obtener todas las cargas piezométricas o niveles del acuífero, en cada uno de los nodos (145) definidos en la discretización del modelo.

También se obtuvo el total de todos los gastos exteriores del acuífero, la suma de todos los gastos reales en los nodos de carga conocida (h), la suma de todos los gastos exteriores en los nodos de carga conocida (h) y las trasmisividades por triángulos para todo el acuífero (Anexo Textual 1).



Figura 3.5 Ventana inicial de AQÜIMPE con el menú principal.

Además, se obtuvieron los valores del volumen almacenado en el acuífero para cada intervalo de tiempo o período. Es decir, el volumen inicial y final de cada período, lo cual nos permitió conocer los recursos hídricos potenciales con que cuenta el acuífero.

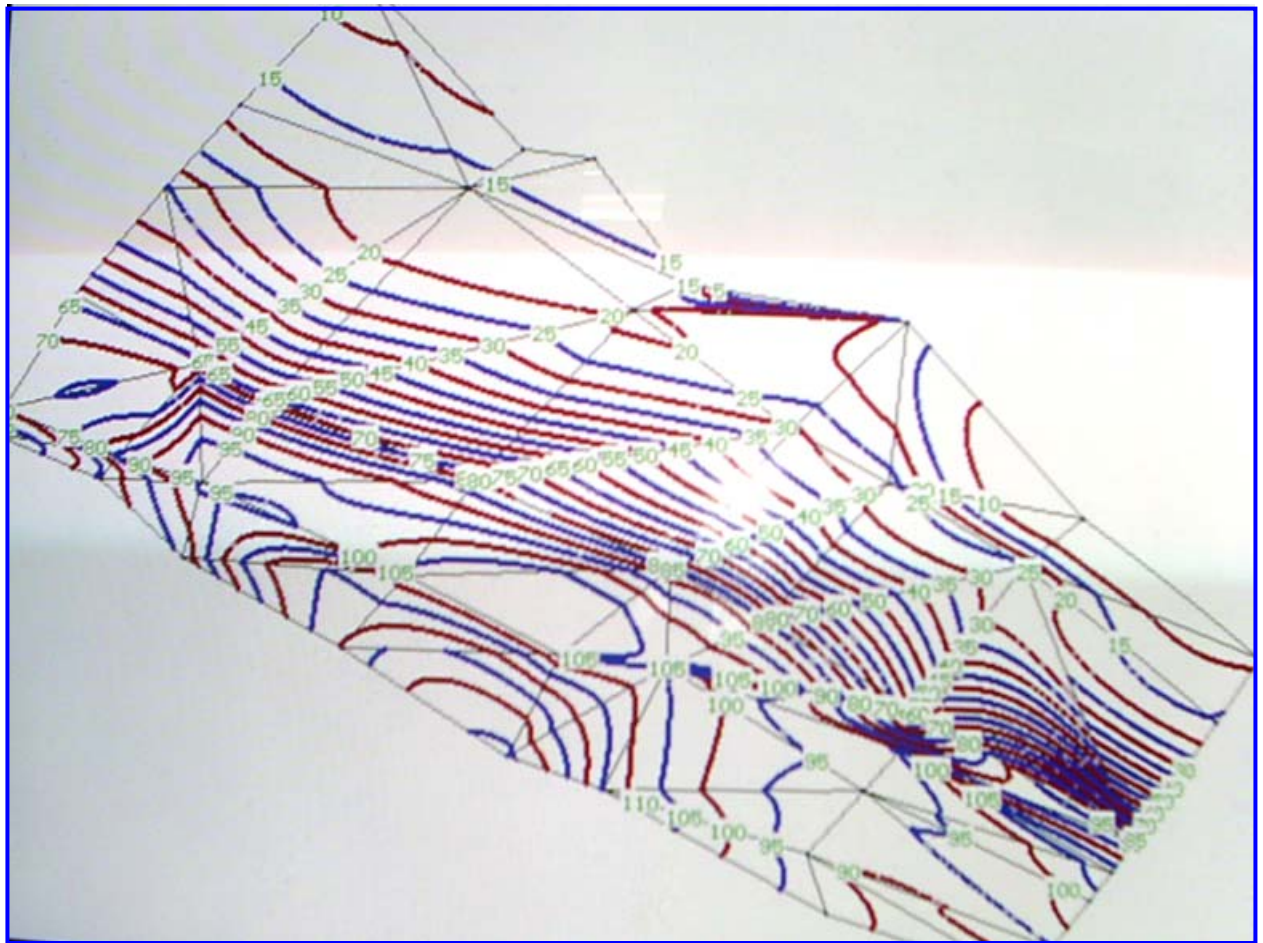


Fig. 3.6 Salida del Modelo con las Isolíneas de las condiciones iniciales para t_1 .

Todo lo anterior constituye una información muy valiosa para el manejo del acuífero, que unido al Mapa de Hidroisohipsas (Fig.3.6) como resultado de la salida del Modelo con las isolíneas de las condiciones iniciales, representa un nivel de conocimiento básico del funcionamiento hidrogeológico del acuífero a escala regional.

Conclusiones

1. Se logró profundizar en el desarrollo matemático de las ecuaciones que gobiernan el flujo de las aguas subterráneas para la construcción de modelos matemáticos que simulen su funcionamiento.
2. Se realizó un reordenamiento y actualización de las bases de datos relacionada con las investigaciones, manejo y monitoreo de la Región Acuífera del Noreste de Villa Clara, sobre tecnología de SIG.
3. Con la aplicación del Modelo AQUIMPE en el caso de estudio de la Región Acuífera Noreste de Villa Clara, se alcanzó un nivel de conocimiento básico de su funcionamiento hidrogeológico.
4. Quedó demostrada la factibilidad de la modelación matemática como herramienta para el estudio y manejo de los acuíferos.

Recomendaciones

Con el propósito de darle continuidad a la temática abordada en el presente trabajo recomendamos:

1. Continuar con el desarrollo del Modelo aplicado en la Región Acuífera del Noreste de Villa Clara, hasta simular condiciones futuras del funcionamiento que permita la predicción de nuevas circunstancias o respuestas del acuífero ante situaciones extremas.
2. Ampliar la aplicación de estos Modelos en el resto de los acuíferos de Villa Clara, de manera que estos constituyan la herramienta fundamental para el manejo de los mismos.
3. Capacitar al personal técnico y especialistas de las empresas del INRH que usarán los modelos como herramientas de trabajo.
4. Utilizar otro software para las futuras calibraciones del modelo.

Bibliografía

- Aparicio, Javier. (1999) Educación en Ideología y Recursos Hídricos, VI Jornadas del CONAPHI-CHILE del 25 al 28 de Mayo, Santiago-Chile. Disponible en: www.unesco.org.uy/phi/libros/VIJornadas/D44.pdf
- Argüelles Cortés, Lucia (2006) *Método de Elementos Finitos*, Santa Clara Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas. No publicado.
- Bear, J. (1972) *Dynamics of Fluids in Porous Media*, New York, American Elsevier.
- Bear, J. (1979) *Hydraulics of Groundwater.* , New York, McGraw-Hill Inc.
- Bear, J. (1988) *Dynamics of Fluids in Porous Media*, New York, Dover Publ., Inc.
- Bear, J. And Corapcioglu, M. Y. (Ed.) (1984) *Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media*, Dordrecht, the Netherlands, Martinus Nijhoff Publishers.
- Bear, J. And Verruijt, A. (1987) *Modeling Groundwater Flow and Pollution.* , Dordrecht, the Netherlands, D. Reidel Publ. Co.
- Carvalho, C. Y Holanda Castro, M. A. (2004) Modelado del Flujo de Agua Subterránea en la Región Nordeste de Brasil, Mediante Modelos de Simulación. *Información Tecnológica*, 15, 6, pp. 35-41.
- Dagan, G. (1989) *Flow and Transport in Porous Formations.* , Berlin., Springer-Verlag.
- De Marsily, G. (1986) *Quantitative Hydrogeology*, New York, Academic Press.
- Delleur, Jacques (Ed.) (1999) *The HandBook of Groundwater Engineering* West Lafayette, Indiana. , School of Civil Engineering Purdue University.
- Dilla, F. (1993) *La modelación matemática del flujo subterráneo y las Técnicas de optimización aplicadas en la investigación y explotación de acuíferos a escala regional*. Tesis de Doctorado.

-
- Dilla, F., Valdés, L. Y Batista J. C. (1988) Modelación matemática del acuífero Ariguanabo, Memorias del XIII Congreso Latinoamericano de Hidráulica, C. de La Habana. pp. 272-283.
 - Esteban Moratilla, F. (2001a.) Las políticas de ordenación del territorio y la gestión del agua, III Congreso Internacional de Ordenación del Territorio Gijón, del 3 al 6 de julio, España.
 - Esteban Moratilla, Fernando (2001) Las políticas de ordenación del territorio y la gestión del agua, III Congreso Internacional de Ordenación del Territorio Gijón, del 3 al 6 de Julio, España. disponible en:
<http://www.fundicot.org/ciot%203/grupo%201/P1gprin01.pdf>
 - Frind, E. O. (1983) Exact aquitard response functions for multiple aquifer mechanics. in PINDER, G. F. (Ed.) *Flow through Porous Media*, Southampton, CML U.K. Publications. pp. 86-92.
 - González-Abreu Fernández, R. (2006) Las curvas de agotamiento como herramienta para el pronóstico de los niveles en un acuífero cársico, Taller Nacional de Servicios Hidrológicos Camaguey, Camaguey.
 - Halek, V. And Svec, J. (1979) *Groundwater Hydraulics*. , Amsterdam., Elsevier Scientific Publ. Co.
 - Hantush, M. S. (1964) Hydraulics of wells. in CHOW, V. T. (Ed.) *Advances in Hydrosiences*. New York Advances in Hydrosiences. pp. 281-432.
 - Harr, M. E. (1969) *Groundwater and Seepage*. , New York. , McGraw-Hill Inc. reprinted in 1990 by Dover Publ. Inc., New York.
 - Hernández A. O., Martínez J. B., Llanusa H., Dilla, F. Y Rivero O. (1988) Modelo matemático del acuífero Ciego-Morón, Memorias del XIII Congreso Latinoamericano de Hidráulica, La Habana. pp. 317-328.
 - Hernández, A. O. Y Moreno, J. (1992) Modelo matemático de la cuenca M1-Matanzas. Ciudad de La Habana. , CIH: ISPJAE. Informe técnico.
 - Huisman, L. (1972) *Groundwater Recovery*, London, U.K., Macmillan Press Ltd.

-
- IDR, Programa Ecoatlas Fundación Curso “Introducción a Arc View 3.2”. Disponible en: http://www.gabrielortiz.com/descargas/manual_av.pdf.
 - Igle, C. Y Nuñez, Umbria (2003) Estrategia de enseñanza-aprendizaje en la simulación del comportamiento de un acuífero: una propuesta metodológica. *Geoenseñanza*, 8, 001, pp. 101-103. disponible en: <http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/360/36080109.pdf>.
 - Keith Tood, D. (1959) *Hidrología del Agua Subterránea*, Berkeley, Universidad de California.
 - Kruseman, G. P. And De Ridder, N. A. (1991) *Analysis and Evaluation of Pumping Test Data*, Wageningen, and the Netherlands, International Institute for Land Reclamation and Improvement/ILRI.
 - Llanusa R. H., Dilla F., Hernández A. O., Y Martínez J. B. (1990) *Metodología para la calibración de modelos matemáticos de acuíferos subterráneos*. Monografía.
 - Llanusa, R. H., Dilla, F., Hernández, A. O., Y Martínez, J. B. (2001) *Modelación de Acuíferos*, Ciudad de La Habana, Facultad de Ingeniería Civil, Centro de Investigaciones Hidráulicas: I.S.P.J.A.E.
 - López Machado, Roberto. (1998) *Manual Práctico de Hidrología clásica*, INRH.
 - Martínez, J. B. (1989) *Simulación matemática de cuencas subterráneas: Flujo impermanente bidimensional*, La Habana, ISPJAE. Monografía.
 - Martínez, J. B. (1990) *Manual de usuario del sistema Aquimpe*, Ciudad de La Habana, CIH: ISPJAE. (Monografía).
 - Molerio León, L. F., Maloszewski, P., Guerra Oliva, M. G., Arellano Acosta, D. M. Y Rosario Rodríguez, K. Del (2002) Hidrodinámica isotópica de los sistemas acuíferos Jaruco y Aguacate, Cuba *Ingeniería Hidráulica y Ambiental*, XXIII, 2, p. 7, disponible en: <http://www.bvsde.paho.org/bvsacd/cd19/collazo/hidroiso.pdf>.
 - Pinder, G. P. (1983) *Flow through Porous Media.*, CML Publications, Southampton, U. K.

- Polubarinova-Kochina, P. Ya. (1962.) *Theory of Ground Water Movement* , Princeton, New Jersey, Princeton University Press.
- Pulido Carrillo, J. L. *Hidrología Práctica*, Bilbao, Urmo, S. A.
- Strack, O. D. L. (1989) *Groundwater Mechanics* , Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall, Inc.
- Todd, D. K. (1980) *Groundwater Hydrology*, 2nd ed. New York, Wiley.
- Verruijt, A. (1969) Elastic storage of aquifers. in DE WIEST, J. M. (Ed.) *in Flow through Porous Media*. New York, Academic Press. pp. 331-376.
- Verruijt, A. (1970) *Theory of Groundwater Flow*, London, Macmillian.
- Walton, W. A. (1970) *Groundwater Resource Evaluation* , New York, McGraw-Hill, Inc.
- Zijl, W. And Nawalany, M. (1993) *Natural Groundwater Flow* , Boca Raton, Florida, Lewis Publishers.

ANEXO TEXTUAL 1 Salida tabulada de los resultados del Modelo.

Mar- 5-Jun-2007

ACUIFERO LAMINAR NO CONFINADO IMPERMANENTE

Directorio: C:\DOCUME~1\HMN\ESCRIT~1\NUEVO3.0\

Tiempo: 1 (_t=1 sem)

Nodos y cargas h(m)

1	62.46	2	66.73	3	70.93	4	71.02	5	63.11
6	44.51	7	35.65	8	24.15	9	18.70	10	11.68
11	9.06	12	65.50	13	67.78	14	73.63	15	75.54
16	64.41	17	45.07	18	20.69	19	16.28	20	11.20
21	8.12	22	76.60	23	77.42	24	86.05	25	73.62
26	66.77	27	25.61	28	17.62	29	14.66	30	12.44
31	81.38	32	85.49	33	92.85	34	91.89	35	64.35
36	25.56	37	12.87	38	12.25	39	85.96	40	91.45
41	96.12	42	92.94	43	65.65	44	12.39	45	105.02
46	113.40	47	95.28	48	94.26	49	70.57	50	35.10
51	15.19	52	16.04	53	14.16	54	120.40	55	116.96
56	106.74	57	96.90	58	80.88	59	34.88	60	18.82
61	18.22	62	15.36	63	131.73	64	124.70	65	107.12
66	107.12	67	80.45	68	51.90	69	21.62	70	23.60
71	-4.81	72	135.98	73	126.44	74	105.61	75	106.72
76	85.93	77	47.60	78	31.08	79	20.00	80	18.00
81	128.27	82	117.74	83	104.42	84	99.90	85	88.14
86	46.91	87	28.63	88	18.00	89	114.29	90	109.50
91	105.03	92	98.60	93	84.80	94	42.60	95	27.13
96	9.00	97	100.60	98	102.58	99	96.99	100	97.24
101	93.76	102	97.47	103	77.17	104	44.88	105	23.76
106	10.00	107	92.09	108	92.47	109	91.21	110	92.13
111	93.96	112	90.30	113	95.72	114	70.00	115	58.41
116	33.41	117	25.94	118	10.00	119	8.00	120	87.60
121	87.49	122	89.75	123	95.52	124	95.61	125	97.35
126	106.76	127	92.79	128	93.75	129	30.69	130	14.76
131	10.00	132	8.00	133	83.77	134	92.55	135	94.80
136	100.70	137	102.05	138	106.34	139	108.07	140	99.36
141	89.76	142	37.70	143	15.41	144	13.13	145	8.00

Anexos Textuales

Tiempo: 1 (_t=1 sem) Gastos reales en nodos conocidos (hm3/sem)

79	-2.876	80	-0.122	88	-2.167	96	2.050
106	0.619	114	42.968	118	-2.071	119	-1.088
131	-0.834	132	0.420	145	-1.437		

Balance Hídrico del Acuífero (hm3):

VINICI=	1354.357
SUMGAS=	26.500
SUMGCR=	35.461
SUMCON=	26.500
VFINAL=	1292.395

Tiempo: 1 (_t=1 sem) Trasmisividades por triángulos (m2/día)

1	2247	2	2046	3	3586	4	2513	5	1447
6	704	7	528	8	733	9	133	10	408
11	6627	12	5488	13	2957	14	1387	15	814
16	935	17	992	18	525	19	3094	20	2485
21	4160	22	1993	23	1932	24	1225	25	1575
26	0	27	4002	28	3656	29	4905	30	3120
31	3479	32	1117	33	467	34	758	35	3154
36	2951	37	4697	38	3085	39	1720	40	2004
41	817	42	8951	43	7757	44	7207	45	5483
46	4247	47	3207	48	3618	49	8946	50	8424
51	22598	52	6344	53	13807	54	13658	55	3033
56	2219	57	1670	58	891	59	817	60	233

Tiempo: 2 (_t=1 sem)

Nodos y cargas h(m)

1	74.29	2	72.36	3	70.34	4	67.15	5	61.64
6	53.64	7	43.12	8	28.13	9	17.49	10	13.47
11	11.40	12	75.54	13	74.49	14	71.46	15	67.63
16	62.99	17	53.30	18	26.29	19	16.81	20	12.93
21	13.17	22	78.52	23	77.59	24	72.19	25	73.15
26	67.80	27	39.66	28	21.54	29	18.92	30	18.23
31	82.64	32	77.52	33	72.77	34	66.32	35	69.83
36	41.42	37	19.32	38	18.69	39	86.82	40	81.47
41	74.32	42	68.42	43	70.23	44	19.17	45	95.65
46	88.12	47	83.14	48	71.58	49	65.94	50	54.59
51	26.89	52	23.72	53	22.52	54	102.02	55	98.30
56	87.55	57	76.46	58	64.60	59	52.80	60	35.96
61	30.86	62	29.71	63	105.70	64	100.82	65	91.53
66	75.30	67	67.60	68	58.10	69	38.59	70	24.96
71	35.98	72	104.82	73	102.29	74	92.47	75	75.75
76	66.68	77	56.84	78	39.96	79	20.00	80	18.00
81	99.73	82	96.91	83	86.26	84	73.05	85	66.52
86	55.77	87	38.42	88	18.00	89	92.55	90	90.36
91	79.52	92	71.70	93	64.89	94	54.11	95	35.85
96	9.00	97	84.75	98	85.91	99	85.95	100	77.54
101	73.42	102	66.43	103	61.04	104	51.76	105	34.36
106	10.00	107	82.22	108	82.36	109	82.81	110	79.94
111	74.96	112	73.35	113	66.22	114	70.00	115	66.68
116	54.00	117	35.12	118	10.00	119	8.00	120	82.62
121	82.72	122	81.03	123	77.06	124	73.13	125	71.13

Anexos Textuales

126	64.07	127	64.92	128	55.16	129	57.80	130	32.33
131	10.00	132	8.00	133	84.24	134	79.89	135	78.47
136	74.29	137	71.10	138	68.24	139	66.32	140	66.53
141	66.69	142	48.92	143	33.75	144	17.46	145	8.00

Tiempo: 2 (_t=1 sem) Gastos reales en nodos conocidos (hm3/sem)

79	4.033	80	-0.857	88	-0.007	96	2.043
106	8.647	114	-2.901	118	1.586	119	-2.226
131	4.708	132	0.432	145	-0.853		

Balance Hídrico del Acuífero (hm3):

VINICI=	1292.395
SUMGAS=	26.500
SUMGCR=	14.604
SUMCON=	26.500
VFINAL=	1251.291

Tiempo: 2 (_t=1 sem) Trasmisividades por triángulos (m2/día)

1	1265	2	1247	3	3342	4	3137	5	2149
6	1086	7	420	8	1010	9	665	10	920
11	4262	12	4214	13	3958	14	3799	15	1617
16	2110	17	1485	18	1112	19	2138	20	1891
21	4445	22	3948	23	6143	24	3254	25	2405
26	759	27	2823	28	2550	29	5043	30	4411
31	6759	32	1812	33	737	34	758	35	2062
36	2018	37	4872	38	4449	39	3030	40	3854
41	1152	42	4709	43	4100	44	4288	45	3937
46	4008	47	4216	48	6316	49	4222	50	4260
51	12287	52	4642	53	13375	54	13132	55	4661
56	3927	57	6449	58	2291	59	810	60	233

Tiempo: 3 (_t=1 sem) Nodos y cargas h(m)

1	65.12	2	65.87	3	66.25	4	64.24	5	60.13
6	53.50	7	46.86	8	33.23	9	22.30	10	16.10
11	15.65	12	65.79	13	66.11	14	66.92	15	65.55
16	60.51	17	53.59	18	36.60	19	23.34	20	17.53
21	16.72	22	68.51	23	68.32	24	69.83	25	64.55
26	61.06	27	48.03	28	35.78	29	32.64	30	31.21
31	70.83	32	70.40	33	71.38	34	68.09	35	59.53
36	49.43	37	33.38	38	33.05	39	73.83	40	73.27
41	71.35	42	67.88	43	58.86	44	34.37	45	80.74
46	80.54	47	72.07	48	68.15	49	58.92	50	50.59
51	41.21	52	40.03	53	38.52	54	87.03	55	84.22
56	76.58	57	69.06	58	60.26	59	51.38	60	44.02
61	43.23	62	41.64	63	90.47	64	86.83	65	77.55
66	71.68	67	60.81	68	53.23	69	43.12	70	35.31
71	26.74	72	90.72	73	87.29	74	77.03	75	71.18
76	61.47	77	51.18	78	40.31	79	20.00	80	18.00
81	87.05	82	82.62	83	74.08	84	67.58	85	61.34
86	50.54	87	39.24	88	18.00	89	80.90	90	78.02
91	72.00	92	66.49	93	59.30	94	49.22	95	38.23
96	9.00	97	75.22	98	76.03	99	73.89	100	70.94
101	68.28	102	67.62	103	59.76	104	49.37	105	34.55

Anexos Textuales

106	10.00	107	71.75	108	72.08	109	71.83	110	71.69
111	71.85	112	71.53	113	74.45	114	70.00	115	61.37
116	47.98	117	35.42	118	10.00	119	8.00	120	69.09
121	69.14	122	69.03	123	69.43	124	66.40	125	66.08
126	67.28	127	61.33	128	59.82	129	43.55	130	33.82
131	10.00	132	8.00	133	66.67	134	68.33	135	67.94
136	66.90	137	64.38	138	64.65	139	64.24	140	59.42
141	54.39	142	49.09	143	37.78	144	23.58	145	8.00

Tiempo: 3 (_t=1 sem) Gastos reales en nodos conocidos (hm3/sem)

79	15.412	80	-1.708	88	3.178	96	1.939
106	19.065	114	-26.244	118	5.959	119	-3.472
131	31.606	132	0.349	145	2.628		

Balance Hídrico del Acuífero (hm3):

VINICI=	1251.291
SUMGAS=	26.500
SUMGCR=	48.711
SUMCON=	26.500
VFINAL=	1176.080

Tiempo: 3 (_t=1 sem) Trasmisividades por triángulos (m2/día)

1	1383	2	1318	3	3159	4	2908	5	2425
6	1700	7	643	8	1280	9	1401	10	1921
11	3950	12	3694	13	3159	14	3026	15	2396
16	5042	17	3352	18	2425	19	1764	20	1559
21	3487	22	3050	23	8186	24	5267	25	3474
26	3955	27	2231	28	2085	29	3685	30	3282
31	6887	32	2435	33	1308	34	758	35	1628
36	1618	37	3554	38	3142	39	3001	40	5468
41	1771	42	3970	43	3475	44	3507	45	3044
46	3118	47	2932	48	6947	49	3878	50	3807
51	10332	52	3475	53	9064	54	8868	55	2869
56	2775	57	6956	58	5403	59	2088	60	233

Tiempo: 4 (_t=1 sem)

Nodos y cargas h(m)

1	63.13	2	62.70	3	62.23	4	60.87	5	57.87
6	53.10	7	46.70	8	38.42	9	29.18	10	23.27
11	20.92	12	63.63	13	63.39	14	62.65	15	61.05
16	58.04	17	53.15	18	40.09	19	31.48	20	26.87
21	26.69	22	65.23	23	64.97	24	63.49	25	62.47
26	58.76	27	48.35	28	41.11	29	40.56	30	40.56
31	67.16	32	65.48	33	64.13	34	60.81	35	58.96
36	49.02	37	41.85	38	42.02	39	69.11	40	67.47
41	64.84	42	61.32	43	58.38	44	42.71	45	74.14
46	71.54	47	67.32	48	61.87	49	57.03	50	51.41
51	43.74	52	43.26	53	43.21	54	77.83	55	75.62
56	69.37	57	63.44	58	56.49	59	50.47	60	44.16
61	42.33	62	41.30	63	80.28	64	77.14	65	70.78
66	63.48	67	57.21	68	50.86	69	40.72	70	32.97
71	33.78	72	80.14	73	77.74	74	70.69	75	63.40
76	56.84	77	48.48	78	36.23	79	20.00	80	18.00
81	77.04	82	74.35	83	67.86	84	61.44	85	56.85

Anexos Textuales

86	47.80	87	35.45	88	18.00	89	72.60	90	70.89
91	65.22	92	61.04	93	55.87	94	46.90	95	34.18
96	9.00	97	68.74	98	69.30	99	68.88	100	65.36
101	63.48	102	60.65	103	56.29	104	46.39	105	31.11
106	10.00	107	66.81	108	67.16	109	67.61	110	67.33
111	66.97	112	67.99	113	68.04	114	70.00	115	63.01
116	46.70	117	30.57	118	10.00	119	8.00	120	65.37
121	65.70	122	65.28	123	64.16	124	62.42	125	61.68
126	59.30	127	57.29	128	52.53	129	44.08	130	26.51
131	10.00	132	8.00	133	64.61	134	63.49	135	63.04
136	61.39	137	59.55	138	58.43	139	57.36	140	55.25
141	52.89	142	43.01	143	30.50	144	18.95	145	8.00

Tiempo: 4 (_t=1 sem) Gastos reales en nodos conocidos (hm3/sem)

79	20.700	80	-1.976	88	2.839	96	1.833
106	17.045	114	-34.946	118	4.494	119	-3.094
131	32.006	132	0.301	145	3.327		

Balance Hídrico del Acuífero (hm3):

VINICI=	1176.080
SUMGAS=	26.500
SUMGCR=	42.528
SUMCON=	26.500
VFINAL=	1107.052

Tiempo: 4 (_t=1 sem) Trasmisividades por triángulos (m2/día)

1	1192	2	1182	3	2895	4	2779	5	2385
6	2117	7	1126	8	2198	9	2859	10	4379
11	3444	12	3362	13	3016	14	2869	15	2530
16	6185	17	5861	18	5129	19	1508	20	1371
21	3108	22	2859	23	7410	24	5180	25	4342
26	4742	27	1877	28	1749	29	3300	30	2973
31	6037	32	2210	33	1355	34	758	35	1379
36	1355	37	3169	38	2867	39	2660	40	5073
41	1782	42	3455	43	3002	44	3021	45	2832
46	3049	47	2840	48	6408	49	3229	50	3163
51	8948	52	3098	53	8301	54	8686	55	2739
56	2793	57	6087	58	4701	59	2531	60	233

Anexos Textuales

Tiempo: 5 (_t=1 sem)					Nodos y cargas h(m)				
1	59.35	2	59.47	3	59.38	4	58.12	5	55.72
6	51.88	7	47.15	8	41.36	9	35.78	10	33.34
11	31.96	12	59.72	13	59.73	14	59.74	15	58.63
16	55.85	17	51.91	18	42.17	19	36.91	20	35.25
21	35.03	22	61.01	23	60.81	24	60.90	25	58.47
26	56.11	27	48.57	28	42.45	29	41.74	30	41.45
31	62.40	32	61.61	33	61.50	34	59.11	35	55.51
36	49.20	37	42.31	38	42.39	39	64.12	40	63.26
41	61.43	42	59.02	43	54.97	44	42.95	45	67.87
46	66.76	47	62.27	48	59.08	49	54.32	50	49.84
51	44.58	52	44.06	53	43.32	54	71.10	55	69.27
56	64.20	57	59.46	58	54.04	59	49.03	60	44.08
61	42.87	62	41.53	63	72.98	64	70.57	65	64.85
66	59.96	67	53.79	68	48.59	69	40.24	70	33.55
71	29.74	72	73.02	73	71.02	74	64.67	75	59.70
76	53.55	77	46.12	78	36.01	79	20.00	80	18.00
81	70.85	82	68.30	83	62.60	84	57.69	85	53.60
86	45.39	87	34.79	88	18.00	89	67.53	90	65.75
91	61.10	92	57.45	93	52.73	94	44.48	95	33.35
96	9.00	97	65.07	98	65.39	99	64.52	100	62.09
101	60.43	102	59.06	103	54.47	104	44.87	105	30.68
106	10.00	107	63.64	108	63.93	109	64.10	110	64.43
111	65.20	112	66.59	113	69.46	114	70.00	115	61.36
116	45.19	117	31.20	118	10.00	119	8.00	120	61.83
121	62.01	122	61.79	123	61.50	124	59.43	125	58.98
126	58.51	127	54.88	128	52.43	129	41.53	130	29.03
131	10.00	132	8.00	133	60.22	134	60.42	135	59.95
136	58.62	137	56.58	138	56.20	139	55.52	140	52.54
141	49.39	142	41.73	143	31.31	144	19.30	145	8.00

Tiempo: 5 (_t=1 sem) Gastos reales en nodos conocidos (hm3/sem)							
79	17.275	80	-1.409	88	1.554	96	1.886
106	13.425	114	-39.846	118	3.087	119	-2.664
131	20.407	132	0.352	145	1.455		

Balance Hídrico del Acuífero (hm3):

```

VINICI=    1107.052
SUMGAS=     26.500
SUMGCR=     15.523
SUMCON=     26.500
VFINAL=   1065.029

```

Tiempo: 5 (_t=1 sem) Trasmisividades por triángulos (m2/día)									
1	1134	2	1111	3	2707	4	2599	5	2328
6	2191	7	1496	8	3841	9	4674	10	5858
11	3175	12	3072	13	2728	14	2619	15	2515
16	6369	17	6144	18	6085	19	1339	20	1234
21	2819	22	2604	23	7287	24	4903	25	4065
26	4963	27	1641	28	1548	29	2906	30	2672

Anexos Textuales

31	5613	32	2004	33	1135	34	758	35	1218
36	1203	37	2820	38	2588	39	2447	40	4587
41	1581	42	3141	43	2750	44	2744	45	2614
46	2845	47	2565	48	5978	49	3020	50	2955
51	8283	52	2842	53	7576	54	7896	55	2459
56	2597	57	5640	58	3986	59	1835	60	233

Tiempo: 6 (_t=1 sem)

Nodos y cargas h(m)

1	57.16	2	57.05	3	56.87	4	55.95	5	54.02
6	51.08	7	47.43	8	43.92	9	40.63	10	39.49
11	39.05	12	57.43	13	57.35	14	57.09	15	56.12
16	54.06	17	51.05	18	44.13	19	41.17	20	40.20
21	40.16	22	58.39	23	58.25	24	57.72	25	56.54
26	54.23	27	48.15	28	43.57	29	43.29	30	43.22
31	59.53	32	58.68	33	58.14	34	56.05	35	54.01
36	48.31	37	43.64	38	43.66	39	60.78	40	59.92
41	58.37	42	56.13	43	53.42	44	43.88	45	63.79
46	62.41	47	59.22	48	56.00	49	52.48	50	48.85
51	44.45	52	44.02	53	43.44	54	66.11	55	64.58
56	60.29	57	56.39	58	51.75	59	47.63	60	43.35
61	41.98	62	40.86	63	67.66	64	65.52	65	60.91
66	56.31	67	51.47	68	46.78	69	39.01	70	32.56
71	31.12	72	67.77	73	66.02	74	60.81	75	56.19
76	51.07	77	44.34	78	34.39	79	20.00	80	18.00
81	66.06	82	63.94	83	59.14	84	54.78	85	51.25
86	43.72	87	33.39	88	18.00	89	63.62	90	62.13
91	57.91	92	54.93	93	50.84	94	43.13	95	32.02
96	9.00	97	62.21	98	62.36	99	61.95	100	59.66
101	58.40	102	56.60	103	53.08	104	43.63	105	29.40
106	10.00	107	61.44	108	61.74	109	62.09	110	62.59
111	63.57	112	65.50	113	67.84	114	70.00	115	61.67
116	44.47	117	29.62	118	10.00	119	8.00	120	59.87
121	60.17	122	59.97	123	59.44	124	57.99	125	57.52
126	56.26	127	53.67	128	50.48	129	40.90	130	26.35
131	10.00	132	8.00	133	58.62	134	58.21	135	57.84
136	56.50	137	54.77	138	54.04	139	53.19	140	50.73
141	48.04	142	40.43	143	29.51	144	18.73	145	8.00

Tiempo: 6 (_t=1 sem) Gastos reales en nodos conocidos (hm3/sem)

79	16.219	80	-1.316	88	1.144	96	1.878
106	12.275	114	-42.670	118	2.654	119	-2.535
131	21.536	132	0.331	145	1.672		

Balance Hídrico del Acuífero (hm3):

VINICI=	1065.029
SUMGAS=	26.500
SUMGCR=	11.189
SUMCON=	26.500
VFINAL=	1027.340

Anexos Textuales

Tiempo: 6 (_t=1 sem) Trasmisividades por triángulos (m2/día)

1	1052	2	1043	3	2545	4	2472	5	2247
6	2214	7	1726	8	5433	9	5868	10	5976
11	2936	12	2873	13	2584	14	2490	15	2448
16	6334	17	6271	18	6165	19	1217	20	1136
21	2614	22	2469	23	6931	24	4697	25	4071
26	4792	27	1477	28	1398	29	2678	30	2482
31	5218	32	1883	33	1096	34	758	35	1108
36	1089	37	2600	38	2405	39	2266	40	4344
41	1556	42	2953	43	2575	44	2544	45	2493
46	2764	47	2444	48	5707	49	2839	50	2777
51	7834	52	2696	53	7182	54	7653	55	2356
56	2553	57	5408	58	3912	59	2002	60	233

Tiempo: 7 (_t=1 sem) Nodos y cargas h(m)

1	55.05	2	55.05	3	54.94	4	54.16	5	52.66
6	50.45	7	47.87	8	45.60	9	43.55	10	42.83
11	42.51	12	55.27	13	55.24	14	55.15	15	54.38
16	52.67	17	50.37	18	45.43	19	43.59	20	43.10
21	43.04	22	56.02	23	55.88	24	55.73	25	54.35
26	52.67	27	47.93	28	44.40	29	44.16	30	44.04
31	56.90	32	56.28	33	56.04	34	54.34	35	52.25
36	47.88	37	44.15	38	44.12	39	57.96	40	57.33
41	56.00	42	54.22	43	51.68	44	44.16	45	60.30
46	59.31	47	56.40	48	53.95	49	50.83	50	47.81
51	44.44	52	44.04	53	43.25	54	62.23	55	60.92
56	57.25	57	53.93	58	50.06	59	46.48	60	42.74
61	41.54	62	40.37	63	63.49	64	61.70	65	57.63
66	53.87	67	49.47	68	45.30	69	38.18	70	32.30
71	29.78	72	63.74	73	62.24	74	57.63	75	53.82
76	49.14	77	42.91	78	33.74	79	20.00	80	18.00
81	62.54	82	60.65	83	56.33	84	52.61	85	49.48
86	42.41	87	32.66	88	18.00	89	60.86	90	59.44
91	55.62	92	52.98	93	49.32	94	41.95	95	31.29
96	9.00	97	60.34	98	60.33	99	59.90	100	57.98
101	56.84	102	55.43	103	52.12	104	42.81	105	28.95
106	10.00	107	60.00	108	60.26	109	60.55	110	61.27
111	62.62	112	64.76	113	67.95	114	70.00	115	61.19
116	43.80	117	29.44	118	10.00	119	8.00	120	58.44
121	58.69	122	58.54	123	58.20	124	56.70	125	56.30
126	55.51	127	52.55	128	49.98	129	40.07	130	26.86
131	10.00	132	8.00	133	57.00	134	56.89	135	56.49
136	55.24	137	53.48	138	52.95	139	52.21	140	49.66
141	46.93	142	39.41	143	29.25	144	18.33	145	8.00

Tiempo: 7 (_t=1 sem) Gastos reales en nodos conocidos (hm3/sem)

79	14.428	80	-1.091	88	0.658	96	1.888
106	10.889	114	-44.321	118	2.094	119	-2.366
131	18.194	132	0.345	145	1.204		

Anexos Textuales

Balance Hídrico del Acuífero (hm3):

VINICI= 1027.340
 SUMGAS= 26.500
 SUMGCR= 1.921
 SUMCON= 26.500
 VFINAL= 998.918

Tiempo: 7 (_t=1 sem) Trasmisividades por triángulos (m2/día)

1	1001	2	990	3	2422	4	2360	5	2187
6	2229	7	1919	8	6457	9	6643	10	6218
11	2765	12	2708	13	2439	14	2361	15	2386
16	6209	17	6209	18	6248	19	1125	20	1061
21	2455	22	2333	23	6667	24	4480	25	3942
26	4763	27	1354	28	1288	29	2486	30	2326
31	4929	32	1774	33	1014	34	758	35	1027
36	1008	37	2429	38	2270	39	2146	40	4129
41	1482	42	2813	43	2458	44	2409	45	2406
46	2687	47	2333	48	5521	49	2735	50	2675
51	7549	52	2599	53	6931	54	7415	55	2265
56	2499	57	5224	58	3656	59	1813	60	233

Tiempo: 8 (_t=1 sem) Nodos y cargas h(m)

1	53.49	2	53.45	3	53.35	4	52.75	5	51.57
6	49.91	7	48.00	8	46.45	9	45.02	10	44.53
11	44.39	12	53.65	13	53.61	14	53.48	15	52.85
16	51.54	17	49.79	18	46.13	19	44.89	20	44.53
21	44.51	22	54.20	23	54.11	24	53.85	25	52.91
26	51.41	27	47.61	28	44.83	29	44.67	30	44.59
31	54.91	32	54.38	33	54.08	34	52.63	35	51.06
36	47.32	37	44.52	38	44.44	39	55.74	40	55.19
41	54.10	42	52.53	43	50.47	44	44.34	45	57.63
46	56.68	47	54.32	48	52.12	49	49.56	50	47.03
51	44.27	52	43.89	53	43.11	54	59.14	55	58.00
56	54.82	57	52.00	58	48.63	59	45.53	60	42.23
61	41.02	62	39.93	63	60.24	64	58.64	65	55.15
66	51.78	67	47.95	68	44.12	69	37.45	70	31.78
71	29.87	72	60.61	73	59.26	74	55.22	75	51.84
76	47.63	77	41.79	78	32.94	79	20.00	80	18.00
81	59.80	82	58.10	83	54.23	84	50.93	85	48.10
86	41.41	87	31.96	88	18.00	89	58.73	90	57.40
91	53.84	92	51.55	93	48.21	94	41.14	95	30.65
96	9.00	97	58.88	98	58.77	99	58.48	100	56.69
101	55.74	102	54.28	103	51.38	104	42.17	105	28.39
106	10.00	107	58.93	108	59.18	109	59.51	110	60.35
111	61.89	112	64.26	113	67.45	114	70.00	115	61.18
116	43.40	117	28.91	118	10.00	119	8.00	120	57.46
121	57.74	122	57.61	123	57.25	124	55.98	125	55.59
126	54.63	127	51.97	128	49.28	129	39.66	130	26.06
131	10.00	132	8.00	133	56.11	134	55.86	135	55.50
136	54.27	137	52.62	138	52.00	139	51.22	140	48.79
141	46.14	142	38.92	143	28.68	144	18.22	145	8.00

Anexos Textuales

Tiempo: 8 (_t=1 sem) Gastos reales en nodos conocidos (hm3/sem)

79	13.305	80	-0.983	88	0.369	96	1.889
106	10.188	114	-45.476	118	1.842	119	-2.287
131	17.814	132	0.341	145	1.144		

Balance Hídrico del Acuífero (hm3):

VINICI=	998.918
SUMGAS=	26.500
SUMGCR=	-1.854
SUMCON=	26.500
VFINAL=	974.273

Tiempo: 8 (_t=1 sem) Trasmisividades por triángulos (m2/día)

1	955	2	948	3	2321	4	2274	5	2141
6	2238	7	2038	8	7035	9	7086	10	6325
11	2623	12	2580	13	2335	14	2267	15	2333
16	6117	17	6185	18	6267	19	1054	20	1001
21	2327	22	2236	23	6428	24	4310	25	3878
26	4645	27	1259	28	1202	29	2346	30	2206
31	4688	32	1697	33	972	34	758	35	967
36	945	37	2301	38	2168	39	2051	40	3992
41	1456	42	2720	43	2374	44	2308	45	2343
46	2639	47	2263	48	5384	49	2659	50	2602
51	7351	52	2533	53	6752	54	7280	55	2214
56	2471	57	5113	58	3582	59	1819	60	233

Tiempo: 9 (_t=1 sem)

Nodos y cargas h(m)

1	52.14	2	52.13	3	52.04	4	51.56	5	50.63
6	49.34	7	47.90	8	46.76	9	45.69	10	45.31
11	45.20	12	52.26	13	52.24	14	52.15	15	51.63
16	50.57	17	49.21	18	46.35	19	45.43	20	45.19
21	45.16	22	52.67	23	52.59	24	52.44	25	51.56
26	50.37	27	47.21	28	44.90	29	44.77	30	44.68
31	53.23	32	52.80	33	52.59	34	51.37	35	49.96
36	46.81	37	44.51	38	44.41	39	53.91	40	53.46
41	52.51	42	51.19	43	49.37	44	44.24	45	55.40
46	54.61	47	52.54	48	50.70	49	48.46	50	46.29
51	44.00	52	43.64	53	42.81	54	56.63	55	55.64
56	52.86	57	50.41	58	47.49	59	44.72	60	41.73
61	40.59	62	39.49	63	57.59	64	56.19	65	53.10
66	50.17	67	46.70	68	43.16	69	36.85	70	31.50
71	29.36	72	58.11	73	56.91	74	53.28	75	50.32
76	46.44	77	40.89	78	32.42	79	20.00	80	18.00
81	57.65	82	56.09	83	52.55	84	49.61	85	47.03
86	40.62	87	31.46	88	18.00	89	57.11	90	55.83
91	52.47	92	50.42	93	47.34	94	40.48	95	30.19
96	9.00	97	57.83	98	57.62	99	57.37	100	55.74
101	54.87	102	53.53	103	50.83	104	41.71	105	28.07
106	10.00	107	58.18	108	58.41	109	58.73	110	59.67
111	61.38	112	63.88	113	67.37	114	70.00	115	61.02
116	43.07	117	28.69	118	10.00	119	8.00	120	56.75
121	57.01	122	56.91	123	56.61	124	55.36	125	55.01

Anexos Textuales

126	54.17	127	51.44	128	48.94	129	39.29	130	26.03
131	10.00	132	8.00	133	55.36	134	55.18	135	54.82
136	53.62	137	51.98	138	51.42	139	50.67	140	48.25
141	45.64	142	38.42	143	28.45	144	18.00	145	8.00

Tiempo: 9 (_t=1 sem) Gastos reales en nodos conocidos (hm3/sem)

79	12.283	80	-0.873	88	0.128	96	1.892
106	9.542	114	-46.232	118	1.595	119	-2.212
131	16.765	132	0.344	145	1.006		

Balance Hídrico del Acuífero (hm3):

VINICI=	974.273
SUMGAS=	26.500
SUMGCR=	-5.762
SUMCON=	26.500
VFINAL=	953.535

Tiempo: 9 (_t=1 sem) Trasmisividades por triángulos (m2/día)

1	920	2	914	3	2240	4	2204	5	2102
6	2234	7	2101	8	7331	9	7314	10	6395
11	2510	12	2475	13	2247	14	2188	15	2288
16	6023	17	6135	18	6272	19	996	20	953
21	2226	22	2153	23	6240	24	4169	25	3805
26	4590	27	1185	28	1134	29	2232	30	2110
31	4501	32	1634	33	931	34	758	35	920
36	897	37	2201	38	2090	39	1980	40	3880
41	1423	42	2649	43	2312	44	2234	45	2298
46	2600	47	2205	48	5286	49	2607	50	2552
51	7212	52	2487	53	6634	54	7176	55	2174
56	2448	57	5029	58	3487	59	1766	60	233

Tiempo: 10 (_t=1 sem) Nodos y cargas h(m)

1	51.02	2	51.00	3	50.93	4	50.53	5	49.78
6	48.75	7	47.60	8	46.71	9	45.85	10	45.54
11	45.47	12	51.11	13	51.08	14	51.00	15	50.56
16	49.70	17	48.60	18	46.26	19	45.54	20	45.34
21	45.33	22	51.40	23	51.34	24	51.19	25	50.48
26	49.44	27	46.72	28	44.74	29	44.63	30	44.55
31	51.84	32	51.48	33	51.28	34	50.22	35	49.04
36	46.24	37	44.31	38	44.20	39	52.39	40	52.01
41	51.20	42	50.03	43	48.44	44	43.98	45	53.57
46	52.86	47	51.09	48	49.46	49	47.52	50	45.61
51	43.62	52	43.28	53	42.45	54	54.57	55	53.69
56	51.24	57	49.09	58	46.50	59	43.99	60	41.24
61	40.12	62	39.06	63	55.45	64	54.18	65	51.45
66	48.83	67	45.67	68	42.35	69	36.32	70	31.14
71	29.19	72	56.10	73	55.00	74	51.72	75	49.07
76	45.47	77	40.15	78	31.94	79	20.00	80	18.00
81	55.94	82	54.49	83	51.21	84	48.55	85	46.17
86	39.99	87	31.05	88	18.00	89	55.84	90	54.60
91	51.38	92	49.54	93	46.67	94	39.98	95	29.82
96	9.00	97	57.01	98	56.72	99	56.53	100	55.00
101	54.22	102	52.90	103	50.40	104	41.34	105	27.78

Anexos Textuales

106	10.00	107	57.61	108	57.83	109	58.15	110	59.17
111	60.99	112	63.61	113	67.18	114	70.00	115	60.97
116	42.83	117	28.46	118	10.00	119	8.00	120	56.23
121	56.50	122	56.41	123	56.12	124	54.96	125	54.62
126	53.76	127	51.12	128	48.62	129	39.06	130	25.76
131	10.00	132	8.00	133	54.87	134	54.66	135	54.31
136	53.13	137	51.53	138	50.95	139	50.20	140	47.82
141	45.22	142	38.14	143	28.20	144	17.93	145	8.00

Tiempo: 10 (_t=1 sem) Gastos reales en nodos conocidos (hm3/sem)

79	11.500	80	-0.797	88	-0.049	96	1.894
106	9.121	114	-46.788	118	1.444	119	-2.164
131	16.347	132	0.344	145	0.945		

Balance Hídrico del Acuífero (hm3):

VINICI=	953.535
SUMGAS=	26.500
SUMGCR=	-8.205
SUMCON=	26.500
VFINAL=	935.240

Tiempo: 10 (_t=1 sem) Trasmisividades por triángulos (m2/día)

1	890	2	886	3	2173	4	2145	5	2065
6	2217	7	2124	8	7462	9	7408	10	6398
11	2417	12	2389	13	2176	14	2124	15	2244
16	5928	17	6080	18	6239	19	949	20	914
21	2143	22	2086	23	6076	24	4053	25	3753
26	4517	27	1126	28	1079	29	2142	30	2033
31	4348	32	1585	33	902	34	758	35	884
36	858	37	2123	38	2029	39	1924	40	3800
41	1404	42	2597	43	2266	44	2177	45	2264
46	2572	47	2163	48	5211	49	2568	50	2515
51	7112	52	2454	53	6546	54	7105	55	2147
56	2433	57	4971	58	3437	59	1752	60	233

Tiempo: 11 (_t=1 sem) Nodos y cargas h(m)

1	50.03	2	50.01	3	49.95	4	49.61	5	48.98
6	48.13	7	47.18	8	46.45	9	45.72	10	45.45
11	45.39	12	50.09	13	50.06	14	50.00	15	49.62
16	48.89	17	47.97	18	45.98	19	45.37	20	45.21
21	45.20	22	50.30	23	50.24	24	50.13	25	49.48
26	48.59	27	46.19	28	44.42	29	44.32	30	44.24
31	50.65	32	50.34	33	50.18	34	49.24	35	48.18
36	45.66	37	43.97	38	43.86	39	51.09	40	50.77
41	50.06	42	49.01	43	47.58	44	43.60	45	52.03
46	51.40	47	49.84	48	48.41	49	46.67	50	44.95
51	43.18	52	42.85	53	42.02	54	52.85	55	52.07
56	49.88	57	47.97	58	45.63	59	43.32	60	40.74
61	39.66	62	38.62	63	53.67	64	52.52	65	50.07
66	47.72	67	44.79	68	41.64	69	35.84	70	30.86

Anexos Textuales

71	28.88	72	54.45	73	53.44	74	50.44	75	48.05
76	44.66	77	39.53	78	31.56	79	20.00	80	18.00
81	54.55	82	53.20	83	50.12	84	47.70	85	45.48
86	39.48	87	30.71	88	18.00	89	54.83	90	53.62
91	50.52	92	48.83	93	46.13	94	39.58	95	29.53
96	9.00	97	56.38	98	56.03	99	55.87	100	54.42
101	53.71	102	52.42	103	50.07	104	41.06	105	27.58
106	10.00	107	57.18	108	57.39	109	57.71	110	58.79
111	60.71	112	63.40	113	67.09	114	70.00	115	60.90
116	42.65	117	28.30	118	10.00	119	8.00	120	55.85
121	56.11	122	56.03	123	55.77	124	54.64	125	54.31
126	53.49	127	50.85	128	48.41	129	38.87	130	25.67
131	10.00	132	8.00	133	54.48	134	54.29	135	53.94
136	52.78	137	51.19	138	50.63	139	49.89	140	47.52
141	44.95	142	37.89	143	28.05	144	17.83	145	8.00

Tiempo: 11 (_t=1 sem) Gastos reales en nodos conocidos (hm3/sem)

79	10.794	80	-0.729	88	-0.191	96	1.895
106	8.770	114	-47.188	118	1.315	119	-2.125
131	15.913	132	0.345	145	0.888		

Balance Hídrico del Acuífero (hm3):

VINICI=	935.240
SUMGAS=	26.500
SUMGCR=	-10.312
SUMCON=	26.500
VFINAL=	919.052

Tiempo: 11 (_t=1 sem) Trasmisividades por triángulos (m2/día)

1	865	2	862	3	2115	4	2094	5	2029
6	2191	7	2123	8	7494	9	7420	10	6367
11	2340	12	2317	13	2114	14	2068	15	2200
16	5826	17	6009	18	6186	19	911	20	882
21	2074	22	2028	23	5929	24	3952	25	3702
26	4460	27	1077	28	1035	29	2069	30	1969
31	4222	32	1545	33	878	34	758	35	855
36	828	37	2060	38	1981	39	1879	40	3736
41	1387	42	2558	43	2231	44	2133	45	2238
46	2550	47	2129	48	5153	49	2540	50	2489
51	7038	52	2430	53	6483	54	7052	55	2127
56	2422	57	4927	58	3393	59	1732	60	233

Tiempo: 12 (_t=1 sem)

Nodos y cargas h(m)

1	49.13	2	49.11	3	49.06	4	48.77	5	48.22
6	47.49	7	46.68	8	46.05	9	45.41	10	45.16
11	45.12	12	49.17	13	49.15	14	49.09	15	48.76
16	48.12	17	47.33	18	45.57	19	45.04	20	44.90
21	44.89	22	49.32	23	49.27	24	49.17	25	48.60
26	47.80	27	45.62	28	44.00	29	43.91	30	43.84
31	49.60	32	49.34	33	49.19	34	48.34	35	47.39

Anexos Textuales

36	45.06	37	43.55	38	43.43	39	49.96	40	49.69
41	49.06	42	48.10	43	46.79	44	43.16	45	50.71
46	50.14	47	48.76	48	47.46	49	45.89	50	44.32
51	42.70	52	42.38	53	41.56	54	51.40	55	50.69
56	48.72	57	46.99	58	44.85	59	42.69	60	40.24
61	39.19	62	38.18	63	52.18	64	51.13	65	48.91
66	46.77	67	44.03	68	41.02	69	35.39	70	30.56
71	28.66	72	53.10	73	52.15	74	49.38	75	47.20
76	43.98	77	38.99	78	31.21	79	20.00	80	18.00
81	53.42	82	52.14	83	49.22	84	46.99	85	44.90
86	39.05	87	30.42	88	18.00	89	54.02	90	52.83
91	49.81	92	48.26	93	45.70	94	39.25	95	29.29
96	9.00	97	55.88	98	55.48	99	55.36	100	53.96
101	53.30	102	52.03	103	49.80	104	40.84	105	27.40
106	10.00	107	56.86	108	57.05	109	57.37	110	58.50
111	60.49	112	63.24	113	67.00	114	70.00	115	60.86
116	42.51	117	28.17	118	10.00	119	8.00	120	55.56
121	55.82	122	55.75	123	55.49	124	54.41	125	54.09
126	53.27	127	50.66	128	48.24	129	38.73	130	25.55
131	10.00	132	8.00	133	54.20	134	54.00	135	53.66
136	52.51	137	50.94	138	50.37	139	49.63	140	47.28
141	44.73	142	37.72	143	27.93	144	17.78	145	8.00

Tiempo: 12 (_t=1 sem) Gastos reales en nodos conocidos (hm3/sem)

79	10.182	80	-0.673	88	-0.304	96	1.896
106	8.510	114	-47.492	118	1.224	119	-2.095
131	15.643	132	0.345	145	0.850		

Balance Hídrico del Acuífero (hm3):

VINICI=	919.052
SUMGAS=	26.500
SUMGCR=	-11.915
SUMCON=	26.500
VFINAL=	904.467

Tiempo: 12 (_t=1 sem) Trasmisividades por triángulos (m2/día)

1	843	2	841	3	2065	4	2047	5	1993
6	2159	7	2107	8	7468	9	7382	10	6308
11	2273	12	2254	13	2061	14	2018	15	2157
16	5721	17	5932	18	6116	19	878	20	854
21	2014	22	1978	23	5793	24	3861	25	3657
26	4398	27	1037	28	997	29	2008	30	1915
31	4114	32	1512	33	858	34	758	35	832
36	803	37	2008	38	1941	39	1843	40	3686
41	1375	42	2527	43	2204	44	2098	45	2217
46	2533	47	2103	48	5109	49	2519	50	2469
51	6983	52	2413	53	6436	54	7013	55	2112
56	2414	57	4895	58	3364	59	1721	60	233

Anexos Textuales

Tiempo: 13 (_t=1 sem)										Nodos y cargas h(m)									
1	48.30	2	48.29	3	48.24	4	47.98	5	47.50										
6	46.85	7	46.13	8	45.57	9	45.00	10	44.77										
11	44.74	12	48.33	13	48.31	14	48.26	15	47.96										
16	47.39	17	46.69	18	45.09	19	44.62	20	44.49										
21	44.49	22	48.43	23	48.39	24	48.30	25	47.78										
26	47.06	27	45.04	28	43.54	29	43.45	30	43.37										
31	48.66	32	48.43	33	48.30	34	47.52	35	46.64										
36	44.47	37	43.08	38	42.96	39	48.97	40	48.73										
41	48.15	42	47.27	43	46.06	44	42.68	45	49.57										
46	49.05	47	47.80	48	46.62	49	45.17	50	43.70										
51	42.20	52	41.89	53	41.08	54	50.15	55	49.51										
56	47.71	57	46.13	58	44.15	59	42.10	60	39.75										
61	38.72	62	37.73	63	50.92	64	49.95	65	47.92										
66	45.95	67	43.35	68	40.46	69	34.98	70	30.29										
71	28.41	72	51.96	73	51.07	74	48.48	75	46.48										
76	43.40	77	38.53	78	30.90	79	20.00	80	18.00										
81	52.49	82	51.26	83	48.47	84	46.39	85	44.42										
86	38.68	87	30.18	88	18.00	89	53.37	90	52.18										
91	49.23	92	47.79	93	45.34	94	38.98	95	29.09										
96	9.00	97	55.49	98	55.04	99	54.94	100	53.59										
101	52.97	102	51.72	103	49.58	104	40.66	105	27.26										
106	10.00	107	56.60	108	56.79	109	57.10	110	58.27										
111	60.31	112	63.12	113	66.94	114	70.00	115	60.82										
116	42.39	117	28.07	118	10.00	119	8.00	120	55.33										
121	55.59	122	55.53	123	55.28	124	54.23	125	53.91										
126	53.11	127	50.51	128	48.12	129	38.62	130	25.49										
131	10.00	132	8.00	133	53.98	134	53.78	135	53.44										
136	52.30	137	50.75	138	50.19	139	49.45	140	47.11										
141	44.57	142	37.59	143	27.84	144	17.73	145	8.00										

Tiempo: 13 (_t=1 sem) Gastos reales en nodos conocidos (hm3/sem)									
79	9.622	80	-0.624	88	-0.398	96	1.896		
106	8.295	114	-47.724	118	1.148	119	-2.072		
131	15.420	132	0.345	145	0.820				

Balance Hídrico del Acuífero (hm3):

VINICI= 904.467
 SUMGAS= 26.500
 SUMGCR= -13.270
 SUMCON= 26.500
 VFINAL= 891.238

Tiempo: 13 (_t=1 sem) Trasmisividades por triángulos (m2/día)									
1	823	2	822	3	2018	4	2005	5	1958
6	2124	7	2083	8	7407	9	7314	10	6235
11	2214	12	2199	13	2013	14	1973	15	2114
16	5615	17	5849	18	6037	19	851	20	830
21	1962	22	1932	23	5666	24	3778	25	3614
26	4340	27	1004	28	966	29	1957	30	1868
31	4020	32	1484	33	841	34	758	35	813

Anexos Textuales

36	782	37	1966	38	1909	39	1814	40	3646
41	1365	42	2503	43	2183	44	2070	45	2201
46	2519	47	2082	48	5074	49	2503	50	2454
51	6941	52	2399	53	6401	54	6983	55	2101
56	2408	57	4870	58	3340	59	1711	60	233

Tiempo: 14 (_t=1 sem)

Nodos y cargas h(m)

1	47.53	2	47.52	3	47.47	4	47.24	5	46.80
6	46.21	7	45.57	8	45.06	9	44.52	10	44.31
11	44.28	12	47.55	13	47.53	14	47.48	15	47.20
16	46.69	17	46.06	18	44.58	19	44.14	20	44.03
21	44.02	22	47.62	23	47.58	24	47.50	25	47.02
26	46.35	27	44.46	28	43.04	29	42.96	30	42.89
31	47.81	32	47.61	33	47.48	34	46.75	35	45.94
36	43.89	37	42.58	38	42.46	39	48.07	40	47.86
41	47.33	42	46.51	43	45.36	44	42.19	45	48.56
46	48.08	47	46.94	48	45.84	49	44.50	50	43.12
51	41.69	52	41.39	53	40.60	54	49.07	55	48.48
56	46.82	57	45.36	58	43.50	59	41.54	60	39.27
61	38.27	62	37.30	63	49.84	64	48.93	65	47.06
66	45.23	67	42.75	68	39.95	69	34.59	70	30.02
71	28.19	72	51.01	73	50.16	74	47.71	75	45.86
76	42.89	77	38.11	78	30.63	79	20.00	80	18.00
81	51.71	82	50.52	83	47.83	84	45.88	85	44.00
86	38.37	87	29.97	88	18.00	89	52.83	90	51.65
91	48.74	92	47.39	93	45.04	94	38.75	95	28.92
96	9.00	97	55.17	98	54.68	99	54.60	100	53.28
101	52.69	102	51.46	103	49.40	104	40.50	105	27.14
106	10.00	107	56.40	108	56.58	109	56.89	110	58.09
111	60.18	112	63.02	113	66.89	114	70.00	115	60.79
116	42.30	117	27.99	118	10.00	119	8.00	120	55.16
121	55.41	122	55.36	123	55.12	124	54.09	125	53.78
126	52.98	127	50.39	128	48.02	129	38.54	130	25.42
131	10.00	132	8.00	133	53.81	134	53.61	135	53.28
136	52.14	137	50.60	138	50.04	139	49.30	140	46.97
141	44.44	142	37.49	143	27.76	144	17.70	145	8.00

Tiempo: 14 (_t=1 sem) Gastos reales en nodos conocidos (hm3/sem)

79	9.113	80	-0.582	88	-0.477	96	1.897
106	8.124	114	-47.907	118	1.090	119	-2.053
131	15.255	132	0.345	145	0.798		

Balance Hídrico del Acuífero (hm3):

VINICI=	891.238
SUMGAS=	26.500
SUMGCR=	-14.396
SUMCON=	26.500
VFINAL=	879.134

Tiempo: 14 (_t=1 sem) Trasmisividades por triángulos (m2/día)

Anexos Textuales

1	805	2	804	3	1976	4	1964	5	1923
6	2086	7	2052	8	7325	9	7229	10	6153
11	2162	12	2149	13	1969	14	1932	15	2071
16	5508	17	5764	18	5953	19	827	20	809
21	1916	22	1890	23	5546	24	3701	25	3574
26	4283	27	975	28	939	29	1913	30	1828
31	3937	32	1460	33	827	34	758	35	798
36	765	37	1930	38	1882	39	1789	40	3613
41	1357	42	2484	43	2166	44	2048	45	2188
46	2508	47	2064	48	5045	49	2491	50	2442
51	6908	52	2389	53	6374	54	6960	55	2093
56	2403	57	4850	58	3323	59	1704	60	233

Tiempo: 15 (_t=1 sem)

Nodos y cargas h(m)

1	46.81	2	46.80	3	46.75	4	46.53	5	46.13
6	45.59	7	44.99	8	44.52	9	44.02	10	43.81
11	43.79	12	46.82	13	46.80	14	46.76	15	46.50
16	46.02	17	45.43	18	44.05	19	43.64	20	43.53
21	43.53	22	46.86	23	46.83	24	46.75	25	46.31
26	45.68	27	43.89	28	42.53	29	42.46	30	42.39
31	47.03	32	46.84	33	46.72	34	46.04	35	45.28
36	43.32	37	42.08	38	41.96	39	47.26	40	47.06
41	46.57	42	45.79	43	44.71	44	41.69	45	47.66
46	47.21	47	46.16	48	45.13	49	43.87	50	42.55
51	41.19	52	40.90	53	40.12	54	48.13	55	47.57
56	46.03	57	44.66	58	42.90	59	41.02	60	38.80
61	37.83	62	36.89	63	48.91	64	48.05	65	46.30
66	44.60	67	42.21	68	39.48	69	34.23	70	29.77
71	27.98	72	50.20	73	49.38	74	47.05	75	45.32
76	42.44	77	37.74	78	30.38	79	20.00	80	18.00
81	51.05	82	49.90	83	47.28	84	45.44	85	43.64
86	38.09	87	29.78	88	18.00	89	52.38	90	51.20
91	48.32	92	47.05	93	44.79	94	38.56	95	28.78
96	9.00	97	54.90	98	54.38	99	54.32	100	53.03
101	52.47	102	51.25	103	49.25	104	40.38	105	27.05
106	10.00	107	56.24	108	56.41	109	56.72	110	57.94
111	60.07	112	62.94	113	66.85	114	70.00	115	60.77
116	42.22	117	27.93	118	10.00	119	8.00	120	55.02
121	55.27	122	55.22	123	54.99	124	53.98	125	53.67
126	52.88	127	50.30	128	47.94	129	38.47	130	25.38
131	10.00	132	8.00	133	53.67	134	53.48	135	53.14
136	52.02	137	50.48	138	49.92	139	49.18	140	46.86
141	44.34	142	37.41	143	27.71	144	17.67	145	8.00

Tiempo: 15 (_t=1 sem) Gastos reales en nodos conocidos (hm3/sem)

79	8.644	80	-0.544	88	-0.545	96	1.897
106	7.980	114	-48.053	118	1.041	119	-2.037
131	15.124	132	0.346	145	0.781		

Balance Hídrico del Acuífero (hm3):

VINICI= 879.134
SUMGAS= 26.500

Anexos Textuales

SUMGCR= -15.366
 SUMCON= 26.500
 VFINAL= 867.999

Tiempo: 15 (_t=1 sem) Trasmisividades por triángulos (m2/día)

1	789	2	788	3	1936	4	1926	5	1889
6	2048	7	2019	8	7232	9	7134	10	6067
11	2114	12	2103	13	1928	14	1893	15	2030
16	5404	17	5679	18	5867	19	806	20	790
21	1875	22	1852	23	5433	24	3630	25	3536
26	4228	27	951	28	916	29	1875	30	1791
31	3862	32	1439	33	815	34	758	35	785
36	751	37	1899	38	1859	39	1767	40	3585
41	1350	42	2469	43	2152	44	2029	45	2178
46	2499	47	2050	48	5021	49	2481	50	2433
51	6882	52	2381	53	6353	54	6942	55	2086
56	2399	57	4835	58	3309	59	1699	60	233