

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
"Félix Varela"**

**Villa Clara**

**Departamento de Ciencia Exactas**

**Título:**

**Modelo didáctico sustentado en la heurística  
para el proceso de enseñanza-aprendizaje  
de la Matemática asistida por  
computadora.**

**Tesis para optar por el grado científico de doctor  
en ciencias pedagógicas.**

**Autor:** Lic. Eric T. Crespo Hurtado.

**Tutoras:** Dr.C. Rosalina Torres Rivera.  
Dr.C. Tomás Crespo Borges.

**Santa Clara**

**2007**

# *Dedicatoria*

*Se la dedico*

*Mi padre porque, con su luz me ha guiado hasta aquí.*

*Mis hijos que son mi mayor tesoro.*

*Mi esposa por su inmenso amor.*

*Mi suegra por su apoyo decisivo en los difíciles momentos.*

*Mi madre por acompañarme en cada paso.*

*Carmen.*

*Todos mis amigos que confiaron en mí.*

# *Agradecimientos*

## *Agradezco*

*La Dra.C. Rosalina Torres por su ayuda incondicional y las horas infinitas de desvelo.*

*La Dra.C. Eraida Campos por abrirme sus puertas sin medir el tiempo.*

*Mi amigo excepcional Carlos Carrazana por regalarme su experiencia.*

*El Dr.C. Rodolfo Gutiérrez por enseñarme que la Pedagogía es ciencia.*

*Mis fieles compañeros de departamento que sufrieron cada minuto de trabajo conmigo.*

*Todos aquellos que pusieron su mano en mi hombro para poder seguir adelante.*

*Los que me hicieron crecer ante las dificultades.*

# *Síntesis*

## SÍNTESIS

La sociedad actual como nunca antes enfrenta los retos que impone el desarrollo científico-técnico, el cual experimenta un ritmo de crecimiento sin precedente. Esta problemática trasciende a la escuela, la que tiene entre sus objetivos preparar a las nuevas generaciones en una cultura informática para que sean capaces de enfrentar los nuevos desafíos que el contexto histórico-social ha condicionado. La Matemática asistida por computadora es una necesidad en las condiciones actuales para lograr la formación integral de la personalidad de los educandos y es una pretensión de los programas actuales del nivel preuniversitario.

A pesar de ello, no existe en la literatura consultada la orientación al profesor para que pueda integrar didácticamente la computadora al proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática con la coherencia y el alcance a que se aspira en el actual modelo formativo del nivel preuniversitario. El empleo de la computadora como un medio auxiliar heurístico constituye una novedad. Bajo esta concepción se propone un modelo didáctico sustentado en la heurística para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática asistida por computadora.

Constituyen aportes teóricos de esta tesis; la definición de medio auxiliar heurístico, el programa heurístico general para la resolución de problemas, el redimensionamiento del modelo de Polya G. cuando en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática se utiliza la computadora como medio auxiliar heurístico, así como el análisis de la portabilidad de este al tratamiento metodológico de las situaciones típicas en dicho proceso, en particular la formación de conceptos. Elemento integrador de todo lo anterior es el modelo didáctico sustentado en la heurística para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática asistida por computadora en el nivel preuniversitario.

Las valoraciones prospectivas avalan la relevancia y viabilidad, del modelo propuesto, lo cual fue constatado por el criterio de expertos comprometidos y no comprometidos, así como, en intervenciones parciales en la práctica escolar realizada por diplomantes y profesores que han estado bajo la orientación del colectivo de investigación del proyecto al que pertenece la presente tesis.

# *Índice*



# ÍNDICE

<b>CONTENIDOS</b>		<b>Pág.</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b>		<b>1</b>
<b>CAPÍTULO I. FUNDAMENTOS TEÓRICOS METODOLÓGICOS PARA EL ESTUDIO DE LA INCIDENCIA DE LA COMPUTADORA COMO MEDIO EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN EL NIVEL PREUNIVERSITARIO</b>		<b>11</b>
1.1. Análisis de la heurística		12
1.1.1 Conceptualización		12
1.1.2 Descripción de los elementos heurísticos		16
1.1.3 Los modelos heurísticos		21
1.2. El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas y las tendencias internacionales para la Matemática bajo la óptica de la realidad cubana		28
1.3. La clase con software educativo. La SofTarea, la WebQuest y MiniQuest		33
1.3.1. La clase con software educativo		36
1.3.2. La SofTarea		37
1.3.3. Las WebQuests y MiniQuests		38
<b>CAPÍTULO II. MODELO DIDÁCTICO SUSTENTADO EN LA HEURÍSTICA PARA EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA ASISTIDA POR COMPUTADORA</b>		<b>42</b>
2.1. Precisiones sobre el modelo		42
2.1.1. Análisis del modelo a la luz de los referentes teórico		42
2.1.2. Fundamentos teóricos del modelo		43
2.2. La computadora como medio auxiliar heurístico		52
2.2.1. Definición y fundamentación		52
2.2.2. Posibilidades que ofrecen los asistente tipo Derive para la enseñanza de la Matemática en el nivel preuniversitario		54
2.2.3. Posibilidades que ofrecen las aplicaciones tipo Excel para la enseñanza de la Matemática en el nivel preuniversitario		59
2.2.4. Posibilidades que ofrecen los asistentes de geometría dinámica para la enseñanza de la Matemática en el nivel preuniversitario Contexto necesario para que la computadora sea un medio auxiliar heurístico		62
2.2.5. Contexto necesario para que la computadora sea un medio auxiliar heurístico		66
2.3. Programa heurístico general para la resolución de problemas de Matemática		67
2.4. Redimensionamiento del modelo de Polya, G. por el empleo de la computadora como medio auxiliar heurístico		70
2.5. Portabilidad del redimensionamiento del modelo de Polya, G. a los modelos metodológicos para el tratamiento de la situaciones típicas de la Matemática		79
2.6. La guía formativa con una intencionalidad heurística		82
2.7. Representación general del modelo		87

<b>CAPÍTULO III. EVALUACIÓN DEL MODELO DIDÁCTICO SUSTENTADO EN LA HEURÍSTICA PARA EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA ASISTIDA POR COMPUTADORA</b>	<b>90</b>
3.1. Preliminares	90
3.2. Proyección y resultados del curso de postgrado	91
3.3. Resultados de las valoraciones prospectivas de los expertos	99
3.4. Valoraciones cualitativas de las intervenciones en la práctica escolar	106
<b>CONCLUSIONES</b>	<b>114</b>
<b>RECOMENDACIONES</b>	<b>116</b>
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	
<b>ANEXOS</b>	

# *Introducción*

## INTRODUCCIÓN

La sociedad actual como nunca antes enfrenta los retos que impone el desarrollo científico-técnico, el cual experimenta un ritmo de crecimiento sin precedente, lo que contribuye a elevar el nivel de vida en un mundo donde la globalización de la información es un hecho. Los contenidos de la información, la informática, la tecnología multimedia y las telecomunicaciones, entre otras, han devenido en una de las mayores fuentes productivas de riquezas, que determinan una economía encaminada a los servicios.

Esta problemática trasciende a la escuela, la que tiene entre sus objetivos preparar a las nuevas generaciones en una cultura informática para que sean capaces de enfrentar los nuevos desafíos que el contexto histórico-social ha condicionado.

La explosión científico-técnica del presente siglo trae como consecuencia que el total de los conocimientos que la humanidad ha asimilado a través de su historia se duplique cada once años. Por tal motivo, se necesita consultar un gran volumen de información en poco tiempo y ese caudal de conocimientos está a prueba cada día cuando las nuevas generaciones deben enfrentar disímiles problemas como los sociales, científico-técnicos, económicos e ideológicos. Esta situación impacta en la escuela, que tiene como tarea resolver la contradicción entre el volumen siempre creciente de información y el tiempo constante que se dedica al proceso de enseñanza-aprendizaje.

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática como asignatura, con el fin de preparar al hombre para la vida, debe dotarlo de un sistema de conocimientos, habilidades, hábitos, modos de actuación y convicciones para su accionar en la sociedad en que vive, a tono con el contexto actual que impone el vertiginoso desarrollo científico-técnico. Esta asignatura, como todas, se encuentra condicionada por el contexto histórico-social, se transforma, se actualiza, se desarrolla acorde a las nuevas exigencias y, por ende, no puede estar ajena a la revolución informática.

Tales causas motivaron la creación en 1986 de la "Commission on Standards for School Mathematics", por parte de la junta directiva del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas) de Estados Unidos, para establecer un marco amplio que permitiera encuadrar la reforma de las matemáticas en la escuela a partir de la década del 90. Esta comisión tuvo dos objetivos fundamentales.

- I. Crear una visión coherente de lo que significa poseer "cultura matemática" en un mundo sustentado por calculadoras y ordenadores.

II. Crear un conjunto de estándares para guiar la revisión del currículo matemático escolar y la valuación asociada a esta posición. (NCTM, 1989)

Las ideas fundamentales plasmadas en el documento elaborado por la comisión, reflejan la necesidad de introducir la computadora en las clases de Matemática y en el trabajo diario del alumno, de forma tal que:

- La clase debe convertirse en un verdadero laboratorio donde se utilice la tecnología actual para investigar, conjeturar y verificar hallazgos.
- El alumno debe desarrollar investigaciones individuales, donde genere y resuma datos como parte de un proyecto o de su trabajo diario.

De esto se infiere que el uso de la computadora debe convertirse en una verdadera herramienta de trabajo que potencie la adquisición de definiciones, conceptos, teoremas, algoritmos y procedimientos para su puesta en práctica en la resolución de problemas reales.

Por otra parte, en el mencionado documento se precisan los contenidos a los que se han de prestar mayor y menor atención en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en función de las ventajas y facilidades que brinda la utilización de esta tecnología dentro de dicho proceso cuando se apunta: "La docencia debe ser sumamente exploratoria y estar basada en experiencias numéricas y geométricas que aprovechen la tecnología de la calculadora y el ordenador..."<sup>1</sup>

Esto apunta hacia la necesidad de introducir el uso de productos informáticos con la pretensión de ser empleados en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática con un mayor nivel de asimilación.

En 1991, durante la Octava Conferencia Internacional de Educación Matemática se plantea:

"Definitivamente la Matemática y la Computación se encuentran muy ligadas, casi como una simbiosis; las necesidades de la ciencia de la computación han acelerado el trabajo en algunas áreas de la matemática. Por otro lado, la utilización del computador y la inteligencia artificial, han acelerado el trabajo en muchas áreas de la Matemática. Entonces la pregunta es: ¿Y nosotros profesores de Matemática, qué cambios estamos incrustando dentro del curriculum de la Matemática en la escuela? ¿Qué cambios estamos introduciendo para que nuestros alumnos se beneficien por la utilización del computador y las calculadoras electrónicas?"<sup>2</sup>

Estas interrogantes no tuvieron respuestas en ese congreso y desde entonces, en diversas reuniones y eventos internacionales se aborda el tema, se muestran experiencias particulares; la gran mayoría aplicadas en el nivel universitario debido principalmente a razones económicas ya que es en este nivel

donde se encuentra la tecnología requerida. La comunicación vía Internet permite que los investigadores de este tema compartan sus ideas, pero en niveles educacionales inferiores no se han concretado todavía las transformaciones deseadas.

Por otra parte, las experiencias de algunos investigadores carecen de una fundamentación psicopedagógica, van encaminadas a describir la labor realizada, las posibilidades que brinda el sistema informático empleado y los resultados alcanzados. (Meza Cascante, Luis Gerardo. 1999; Jiménez Castro, Maynor Pracmat. 2000; Meza Cascante, Luis.1999).

En la mayoría de los casos en que se muestran argumentaciones, estas se hacen desde posiciones conductistas o constructivistas, legado de los primeros intentos de introducir la computadora como medio en el proceso de enseñanza-aprendizaje, las que no coinciden con la Teoría Histórico Cultural seguida por la escuela cubana. (Carranza Schaller, Siegfried. 2000; Bueno, Isabel. 1999; Meza Cascante, Lui. 1998).

Tampoco se encuentran en la bibliografía consultada modelos generales ni metodologías que permitan aplicar las modernas técnicas de la computación en dicho proceso para la Matemática y que constituyan bases orientadoras para que el profesor pueda desarrollar su actividad científicamente fundamentada y no guiada por un accionar empírico como generalmente sucede.

Los pedagogos cubanos no han estado alejados de estas problemáticas y se han hecho investigaciones encaminadas a la búsqueda de nuevas soluciones que perfeccionen el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Al respecto en Cuba se destaca el Grupo Beta con los resultados más integrales de Investigación en Educación Matemática.

En el artículo titulado La enseñanza de la Matemática en el umbral del siglo XXI (Delgado J., 1999), expresa tres ideas fundamentales, que coinciden en sentido general con las dadas por NCTM.

- I. Hay que fundamentar desde el punto de vista psicológico y didáctico cómo usar la computadora para que constituya un aprendizaje significativo y cualitativamente superior.
- II. Hay que hacer una revisión de los contenidos del proceso de enseñanza-aprendizaje, de aquellas habilidades que deberán formarse con y sin el uso de estas tecnologías.
- III. Hay que combinar los métodos deductivos con los experimentales para que los alumnos investiguen, sugieran hipótesis, formulen definiciones y teoremas, vinculando lo inductivo- heurístico con los deductivo-lógicos a partir del uso de la computadora. (Delgado J. , 1999)

Esta temática es abordada por prestigiosos investigadores, como son: García, R.; Balderas, G.; Crespo, T; Torres, P., entre otros. Sus trabajos han sido consultados como antecedentes obligados de esta tesis, por ser fuentes que abordan la introducción de la computadora en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, a pesar de estar sustentados sobre la vieja tecnología de ocho bits. (García R., 1988, Balderas, G., 1995; Crespo, T.1997; Torres, P.1997)

De todas las investigaciones anteriormente citadas, la más afín al presente trabajo es Influencias de la computación en la enseñanza de la Matemática en la que se plantea: "La idea central a defender es que la introducción de la computación en la enseñanza de la Matemática no puede hacerse como si fuera un instrumento externo desligado del sistema didáctico de esta asignatura".<sup>3</sup>

Este autor hace énfasis en que al introducir la computadora en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática se producen cambios en los componentes del proceso a partir de las interrelaciones mutuas que se dan entre ellos, porque trae como resultado un sistema más complejo y más rico en cuanto a su forma y alcance.

El panorama sobre uso de la computadora en la escuela cubana ha cambiado en general y también para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la última década. En el caso del nivel preuniversitario estos cambios pueden resumirse en:

- Aumento del número de computadoras en las escuelas.
- Nuevos software de propósitos generales.
- Nuevos software educativos como los de la colección Futuro.
- Mayor dominio de la computación por parte de los profesores.
- Un sistema de teleclases donde se muestra el empleo de la computadora.

Por otra parte, en los planes de estudio se declara la intención de utilizar la computadora en el proceso de enseñanza-aprendizaje, cuando se declara: "La utilización de las tecnologías de la informática y la comunicación con el objetivo de adquirir información y racionalizar el trabajo de cálculo, pero también con fines heurísticos."

Y más adelante se señala:

"Otro elemento a tener en cuenta en la planificación de las clases es la introducción coherente del software educativo, los sistemas de aplicación y los asistentes matemáticos como Equation y el Geometra, los cuales deben ser utilizados por los alumnos dentro y fuera de las clases, a partir de la certera orientación

de los profesores. Dentro del software educativo... está el de la colección Futuro, para la educación preuniversitaria.”<sup>4</sup>

Se han hecho innumerables esfuerzos para alcanzar tales propósitos y hoy este logro constituye una fortaleza con la que cuenta la escuela cubana actual. Al respecto, el Ministro de Educación plantea: “En este curso escolar se ha venido desarrollando una verdadera revolución en su docencia en secundaria básica, preuniversitarios, politécnicos y escuelas de oficios se han instalado cerca de veinte mil computadoras y más de veinte mil se están instalando en las escuelas primarias.”<sup>5</sup>. Esto demuestra que existe en Cuba la voluntad política necesaria para hacer realidad el uso eficiente de la computadora en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

La introducción de la computadora en la escuela ha suscitado gran expectativa por tratarse de un medio que permite la transmisión interactiva de la información, pero también puede elevar a planos superiores el cumplimiento de los objetivos y funciones de la Matemática en el currículo del nivel preuniversitario.

El uso eficiente de la computadora puede permitir el desarrollo de habilidades y capacidades en la comprensión teórica y sobre todo en su aplicación para la resolución de problemas, esto posibilita modificar las formas de enfrentar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Estas pretensiones no se logran, entre otras causas, por carecer de un modelo que permita integrar coherentemente el uso de la computadora en la clase de Matemática.

Al revisar los informes de la comisión de asignatura priorizada, en los cursos 2003-04, 2004-05 y 2005-06 en la provincia de Villa Clara, se observa que existen insuficiencias al utilizar los software educativos y asistentes matemáticos en la clase de Matemática y se atribuyen estas deficiencias a tres causas fundamentales:

1. La falta de preparación de los profesores para utilizar los software educativos y asistentes matemáticos.
2. La falta de orientaciones metodológicas precisas para el uso de estas herramientas informáticas y de materiales que apoyen el trabajo de los profesores.
3. La falta de un trabajo metodológico en los departamentos encaminado al uso de los software de la colección Futuro y los asistentes matemáticos.



De las entrevistas y encuestas aplicadas a los actores (profesores y directivos) con el propósito de diagnosticar la situación real del uso de la computadora en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática se obtienen los siguientes resultados:

1. Las actividades docentes controladas presentan carencias en:
  - El uso asistemático de la computadora en la clase.
  - La orientación de la actividad no se hace con toda la precisión requerida lo que propicia que no se exploten las posibilidades del software educativo.
  - El uso inadecuado de los asistentes matemáticos y sistemas de aplicación.
2. La preparación informática de los profesores presenta:
  - Potencialidades en cuanto al dominio de los contenidos básicos necesarios para manipular la computadora.
  - Debilidades en cuanto al dominio de los asistentes matemáticos y software educativos.
3. Las principales causas por las que los profesores no utilizan la informática están dadas por debilidades en:
  - La orientación metodológica sobre el uso de la computadora como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje en general y de la Matemática en particular.
  - El trabajo metodológico departamental sobre el uso de la computadora como medio de enseñanza.
  - La orientación explícita del empleo de los software educativos y asistentes matemáticos desde las videoclases.
  - La preparación de los profesores para utilizar la computadora en la resolución de los problemas con una intencionalidad heurística en su labor cotidiana.
4. Las principales necesidades del departamento y de los profesores con respecto al proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática asistida por computadoras están encaminadas hacia:
  - La capacitación de los profesores en el uso del software educativo, asistentes matemáticos y sistemas de aplicación, con el objetivo de demostrar las posibilidades que ofrecen los mismos para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática y la resolución de problemas.
  - La preparación metodológica de los profesores encaminada a insertar de una forma coherente y sistémica la computadora en sus clases.

Sobre la base de lo anteriormente expresado, se infiere el **problema científico** que se aborda en esta tesis:

¿Cómo integrar didácticamente la computadora al proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en el preuniversitario con la coherencia y el alcance a que se aspira en el actual modelo formativo en ese nivel?

Por tales motivos es que la presente investigación tiene como **título**: Modelo didáctico sustentado en la heurística para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática asistida por computadora, y como **objetivo** proponer un modelo didáctico que, partiendo de un redimensionamiento del modelo heurístico de Polya, G., oriente la integración de la computadora en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática y responda a las realidades de la informática educativa en el preuniversitario, así como a las aspiraciones del actual modelo formativo en ese nivel.

En la misma se toma como **objeto de estudio** el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en el nivel preuniversitario, donde se enmarca su campo **de acción** en el enfoque heurístico del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática asistida por computadora en el nivel preuniversitario como vía para la resolución de problemas.

Para el estudio se parte de un sistema de **preguntas científicas** que son perfeccionadas y depuradas durante el proceso de investigación y que constituyen la guía para la realización del trabajo, finalmente el informe responde a las siguientes interrogantes:

1. ¿Qué referentes teóricos permiten sustentar y perfeccionar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática asistida por computadora y la utilización de la heurística como vía para la resolución de problemas?
2. ¿Cómo se aborda en la actualidad el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática asistida por computadora y su utilización en la resolución de problemas?
3. ¿Qué modelo fundamenta la integración de la computadora al proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, a partir del redimensionamiento del modelo heurístico de Polya, G., contextualizado en las condiciones actuales del desarrollo de la informática educativa en el nivel preuniversitario y en las aspiraciones de la actual revolución educacional?
4. ¿Qué valoraciones prospectivas avalan la relevancia y viabilidad del modelo propuesto?

Estas interrogantes científicas condujeron a las siguientes **tareas científicas**:

1. Sistematización de diferentes fuentes de información acerca del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, la instrucción heurística y las concepciones pedagógicas de la informática educativa; para contribuir al establecimiento de los referentes teóricos de la investigación.
2. Determinación de necesidades educativas para conocer el estado en que se encuentra el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática asistida por computadora y su utilización en la resolución de problemas.
3. Elaboración de un modelo didáctico sustentado en la heurística para la resolución de problemas, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática asistida por computadoras.
4. Valoración prospectiva del modelo propuesto, a través del criterio de experto así como la constatación y valoración cualitativa de intervenciones parciales en la realidad pedagógica.

Durante el desarrollo de la investigación se utilizan diversos **métodos de investigación**, entre los que se encuentran:

➤ **Del nivel teórico.**

- El analítico-sintético, el inductivo-deductivo y el enfoque sistémico, para estudiar las tendencias didáctico-metodológicas del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en el nivel preuniversitario y las particularidades de esta didáctica cuando se introduce la computadora como medio de enseñanza; valorar las fuentes de información y extraer de ellas regularidades y tendencias relacionadas con el tema de investigación; así como, para diseñar el modelo a proponer y el sistema de acciones que posibilitan su aplicación.
- El histórico-lógico, para analizar el comportamiento del problema de la investigación en los diferentes enfoques estudiados y la evolución de las soluciones propuestas.
- La modelación, para plantear el redimensionamiento de los modelos y concepciones tradicionales de la Metodología de la Enseñanza de la Matemática cuando en el proceso de enseñanza-aprendizaje de esta asignatura se introduce la computadora.

➤ **Del nivel empírico.**

- La encuesta y la entrevista para buscar hechos que fundamentan la existencia del problema de investigación en el objeto y determinar las potencialidades y carencias de los claustros que aplican

el modelo propuesto, conocer la opinión de expertos sobre el modelo, y obtener información que permita perfeccionarlo.

- La observación, para apreciar el desempeño de alumnos y profesores en el proceso de enseñanza-aprendizaje y valorar los resultados de la intervención en la práctica.
- Las pruebas pedagógicas, para valorar el nivel de aprovechamiento de los alumnos durante la intervención en la práctica.

➤ **Del nivel estadístico.**

- Valoración de la consulta a expertos para la evaluación de los aspectos teóricos y resultados prospectivos del modelo propuesto.
- Métodos de la Estadística descriptiva para caracterizar el comportamiento de indicadores previamente definidos en muestras de alumnos, expertos y actores.

Los **resultados científicos** propuestos en esta tesis son los siguientes:

➤ **Aportes teóricos.**

- Definición de medio auxiliar heurístico.
- Redimensionamiento del modelo de Polya, G. para la resolución de problemas, cuando en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática se utiliza la computadora como medio auxiliar heurístico.
- Programa heurístico general para la resolución de problemas de Matemática.
- Redimensionamiento de los modelos heurísticos para el tratamiento metodológico de la formación de conceptos como situación típica del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, al utilizar la computadora como medio auxiliar heurístico.
- Modelo didáctico sustentado en la heurística para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática asistida por computadora.

➤ **Aportes prácticos.**

- La implementación del modelo didáctico que, partiendo de un redimensionamiento del modelo de Polya, G. y del programa heurístico general para la resolución de problemas, oriente la integración de la computadora en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática y responda a las realidades de la informática educativa en las condiciones actuales del nivel preuniversitario.

- El programa de postgrado para capacitar a los profesores en el uso de la computadora como medio auxiliar heurístico.

➤ **Novedad científica.**

Está dada en la introducción coherente de la computadora como un medio auxiliar heurístico contemplado en el modelo didáctico para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática asistida por computadora.

La tesis consta de las siguientes partes: introducción, tres capítulos, conclusiones, recomendaciones, bibliografía y anexos.

El primer capítulo se dedica a la fundamentación teórica del trabajo por medio de la exposición de los fundamentos de la instrucción heurística, las posibilidades que brindan los asistentes matemáticos y las principales tendencias en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática asistida por computadora.

En el segundo capítulo se precisa el modelo; se fundamentan las concepciones filosóficas, lógicas, psicopedagógicas, sociológicas y pedagógicas que lo sustentan, lo que permite señalar los paradigmas a seguir en cuanto a Teoría Histórico Cultural, el modelo de Polya, G., las concepciones de NCTM y tendencias internacionales que se correspondan con la realidad económica, social y educacional cubana.

Se fundamenta la computadora como medio auxiliar heurístico se exponen las posibilidades que brindan los asistentes matemáticos para dar cumplimiento a los objetivos propuestos en el plan de estudio. Se precisa el contexto necesario para que la computadora sea un medio auxiliar heurístico. También se describe un programa heurístico general para la resolución de problemas de Matemática. Se hace un análisis del redimensionamiento del modelo de Polya, G. para la resolución de problemas, cuando se utiliza la computadora como medio auxiliar heurístico.

Se valoran los cambios en los modelos metodológicos del tratamiento de la formación de conceptos, como una de las situaciones típicas en la clase de Matemática. Se brindan las consideraciones y criterios de la guía formativa con intencionalidad heurística y finalmente se declara el modelo propuesto.

El tercer capítulo está dedicado a la valoración del modelo propuesto utilizando fundamentalmente el criterio de expertos y la combinación de los métodos cuantitativos y cualitativos.

Se añaden anexos útiles para la mejor comprensión del trabajo.

# *Capítulo I*

## CAPÍTULO I. FUNDAMENTOS TEÓRICOS METODOLÓGICOS PARA EL ESTUDIO DE LA INCIDENCIA DE LA COMPUTADORA COMO MEDIO EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN EL NIVEL PREUNIVERSITARIO

"Si tomas una conclusión heurística como una certeza, podrás equivocarte y sentirte engañado; pero si rechazas totalmente las conclusiones heurísticas, no harás ningún progreso"

George Polya

Al realizar el análisis de los elementos teóricos, que de una forma u otra se relacionan con lo planteado en las orientaciones metodológicas para el nivel preuniversitario, con referencia a la utilización de las tecnologías de la informática y las comunicaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática se destaca:

"La utilización de las tecnologías de la informática y la comunicación con el objetivo de adquirir información y racionalizar el trabajo de cálculo, pero también con fines heurísticos. Hacia estas aspiraciones debe encaminarse el trabajo docente, metodológico y de superación en los institutos preuniversitarios. Esto hace imprescindible la planificación de las clases como sistema, así como de las tareas docentes para el trabajo independiente dentro de la clase y el estudio individual."

"Otro elemento a tener en cuenta en la planificación de las clases es la introducción coherente del software educativo, los sistemas de aplicación y los asistentes matemáticos como Equation y el Geometra, los cuales deben ser utilizados por los alumnos dentro y fuera de las clases, a partir de la certera orientación de los docentes. <sup>6</sup>

De ahí que, tomando en consideración estas orientaciones y con el propósito de contribuir a su cumplimiento efectivo, se investiga y reflexiona acerca de la instrucción heurística, su conceptualización y los distintos modelos propuestos, con vista a la determinación de las particularidades que adopta la misma cuando la computadora como medio se introduce en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática.

Se hacen reflexiones sobre el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos (NCTM) y las tendencias internacionales para la Matemática en el nivel preuniversitario como marco de referencia para cualquier estudio serio que se haga sobre la necesidad de cambios en su proceso de enseñanza-aprendizaje.

Finalmente se resumen las concepciones pedagógicas del software educativo cubano, las características de la clase con software como elemento dinamizador del proceso de enseñanza-aprendizaje de la

Matemática; la SofTarea, la WebQuest y MiniQuests como las formas más significativas de orientación de la actividad de los educandos para la interacción con el medio informático a partir de criterios nacionales e internacionales.

## 1.1 Análisis de la heurística

### 1.1.1 Conceptualización

Según Atocha, A.:

"La palabra heurística, como muchas otras ricas en contenido, aparece en más de una categoría gramatical. Cuando se encuentra como sustantivo, se identifica con el arte o la ciencia del descubrimiento, una disciplina digna de estudio. Cuando aparece como adjetivo, se refiere a cosas más concretas como estrategias heurísticas, reglas heurísticas o incluso silogismos y conclusiones heurísticas. Claro está que estos dos usos están íntimamente relacionados ya que la heurística usualmente propone estrategias heurísticas que guían el descubrimiento."<sup>7</sup>

Etimológicamente, heurística o heurética, es una palabra que procede del griego (Eurisko) y quiere decir descubrir. En este sentido, considerada como ciencia de las regularidades del descubrimiento y la invención, ha encontrado campo de aplicación en la filosofía, la psicología, la matemática y la pedagogía, atribuyéndose su utilización en la antigüedad por matemáticos tan destacados como Aristóteles, Arquímedes, Apolonio, Euclides, Pappus, Descartes, Leibniz y Bolzano, o por pedagogos y especialistas en didáctica como Diesterweg, Armstrong, Polya, Jungk, Zillmer, Müller, etc.

El Diccionario pedagógico dice de la heurística: "Que sirve o lleva al descubrimiento de algo. Los métodos de investigación que posibilitan la búsqueda y descubrimientos."<sup>8</sup>

Para Polya, G., la heurística es el "...nombre de una ciencia bastante mal definida y que se relaciona con la Lógica, con la Psicología o la Filosofía. Tenía por objeto el estudio de las reglas y de los métodos del descubrimiento o la invención." Y agrega: "La heurística moderna trata de comprender los métodos que conducen a la resolución de problemas, en particular las operaciones mentales típicamente útiles en este proceso."<sup>9</sup>

Müller, H. da una definición más integral y precisa a la anterior: "La heurística es una disciplina científica aplicable en todas las ciencias e incluye la elaboración de principios, estrategias, reglas y programas que facilitan la búsqueda de vías de solución para problemas, es decir, para tareas de carácter no algorítmico de cualquier tipo y de cualquier dominio científico o práctico."<sup>10</sup>



Los fundamentos para asumir esta definición están dados porque en la misma se precisan elementos que deben estar presentes explícitamente en el objeto de nuestro trabajo y en el modelo que presentamos tales como:

- 1 “La heurística es una disciplina científica aplicable a todas las ciencias.” Si bien el trabajo está enfocado a la Matemática donde la heurística se ha utilizado tradicionalmente, la novedad que se presenta está en revelar las amplias posibilidades que brinda el empleo de la computadora (tecnología) en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, pero en la relación dialéctica tecnología-ciencia dentro de dicho proceso, donde en ocasiones la computadora pasa de medio a objeto de enseñanza y no está exenta en ese momento, de la posibilidad de aplicarse la heurística para la enseñanza de contenidos específicos de ella.
- 2 La precisión de que la heurística incluye “...la elaboración de principios, estrategias, reglas y programas que facilitan la búsqueda de vías de solución para problemas...”, tiene un apreciable valor metodológico para la planificación y organización del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática asistida por computadoras.
- 3 Finalmente, al expresar “...es decir, para tareas de carácter no algorítmico de cualquier tipo y de cualquier dominio científico o práctico”, permite ampliar el concepto de problema, pues basta que la tarea cumpla con el requisito de no tener un carácter algorítmico para que exista la posibilidad de aplicarse la heurística a su resolución, y librarse del marco estrecho del problema tradicional permitiendo buscar por la vía heurística la demostración de un teorema, la definición de un concepto, un nuevo algoritmo o los pasos para una construcción geométrica. (Müller, H., 1990)

A partir de lo planteado se puede precisar el concepto de problema. Lo difícil de esta tarea se puede constatar si se observa que ni siquiera Polya, G. se atrevió a dar tal definición cuando en 1945 publicó su obra cumbre How to solve it? Este matemático esperó a 1961 cuando escribió “*Mathematical Discovery*” y en el capítulo V, después de una amplia explicación práctica sobre algunos procesos que intervienen en la resolución de problemas expresó:

“Problema es la búsqueda consciente, con alguna acción apropiada, para lograr una meta claramente concebida pero no inmediata de alcanzar”<sup>11</sup>

Otras definiciones de problema se muestran en el anexo 1.1.

Como se puede observar, todas estas definiciones del referido anexo enfatizan los aspectos que sus

autores desean destacar por algún motivo, pero en cada una hay elementos importantes que la caracterizan, como son:

1. Existencia de una dificultad que no tiene solución inmediata.
2. Ausencia de un camino conocido.
3. Presencia de un interés por resolver la dificultad.
4. Demanda de una intensa actividad cognoscitiva.
5. Carácter objetivo, subjetivo y relativo del problema.

Un concepto de problema que se corresponde con estas exigencias, es el establecido en la Metodología de la Enseñanza de la Matemática, retomada por el colectivo de autores cubanos en el libro de texto vigente para la asignatura en los Institutos Superiores Pedagógicos y expresa que:

“Un problema es un ejercicio que refleja, determinadas situaciones a través de elementos y relaciones del dominio de las ciencias o la práctica, en el lenguaje común y exige de medios matemáticos para su solución; se caracteriza por tener una situación inicial (elementos dados, datos) conocida y una situación final (incógnita, elementos buscados) desconocida, mientras que su vía de solución también desconocida se obtiene con ayuda de procedimientos heurísticos”.<sup>12</sup>

En la tesis El problema matemático y su proceso de resolución. Una perspectiva desde la teoría del procesamiento de la información, Alonso, I. se da una definición de problema matemático, la cual se toma como base para asumir la siguiente definición:

“Problema es una situación que contempla tres elementos: objetos, características de esos objetos y relaciones entre ellos; agrupados en dos componentes: condiciones y exigencias relativas a esos elementos; y que motiva en un sujeto la necesidad de dar respuesta a las exigencias o interrogantes, para lo cual deberá operar con las condiciones, en el marco de su base de conocimientos y experiencias.”<sup>13</sup>

En esta definición se encuentran los elementos que caracterizan un problema cuya búsqueda de la vía de solución es objeto de la heurística. Así, identificar cuales son los objetos que constituyen las condiciones del problema, las características de estos objetos, la relación que existen entre ellos y las exigencias o interrogantes que se plantean en el mismo, constituye el primer paso enmarcado en la determinación de los elementos objetivos que conforman el problema. La necesidad en un sujeto de darle respuesta a las exigencias o interrogantes planteadas constituye el elemento subjetivo necesario para poder resolver cualquier problema, identificando primero el hecho de la situación planteada, representa para él un

problema que debe resolver, considerando esta actividad como un proceso consciente. Ahora bien, ese sujeto que desea resolver el problema, solo dispone de sus conocimientos y experiencias, para que, operando con los elementos heurísticos y las leyes de la lógica -incluyendo la búsqueda de nuevos conocimientos o la actualización de los que posee- poderle dar solución satisfactoria al problema concreto. De esta manera se evidencia la complementación de las dos definiciones.

Definido los anteriores conceptos queda precisar qué se entiende por resolver un problema. Frecuentemente se intenta responder esta pregunta a partir del término problema para finalizar especificando las acciones que conducen a su resolución, interpretada esta como toda la actividad desarrollada por la persona que lo aborda y a pesar de que este proceso se da en la práctica de manera continua, para su mejor estudio, los investigadores del tema, lo han separado en etapas como lo veremos al abordar los distintos modelos propuestos para la resolución de problemas. Esta opción tiene la ventaja de centrar la atención en el proceso, puesto que los aspectos relativos a cada uno de sus términos han sido previamente aclarados.

Tomando el camino antes mencionado la pregunta está respondida, no obstante se prefiere retomar la etimología de la palabra heurística como arte o la ciencia del descubrimiento para considerar la resolución de problemas:

Una investigación enmarcada en un proceso de indagación donde el sujeto que la afronta ha de reunir determinadas condiciones iniciales (en cuanto a conocimientos y grado de compromiso con la búsqueda de la vía de solución) que le permita superar los retos que supone y que, en la medida que se van alcanzando los fines perseguidos (por quien intenta resolver o problema o por quien guía la resolución de problema), proporciona en él, o los sujetos que lo abordan un cambio sustancial respecto de su situación de partida.

En esta descripción se destaca aspectos relevantes, la resolución de problemas es vista como un proceso de investigación, de búsqueda de un resultado y no como la obtención de un resultado, pues como investigación es posible que se alcancen resultados o se llegue a la conclusión de que no tiene solución, lo que también constituye una solución del problema.

Aunque los propósitos que se persiguen con el método heurístico han quedado definidos, es prudente establecer explícitamente la diferencia que existe entre instrucción heurística y el método heurístico. Para ello Ballester, S. expresa: "El método heurístico se caracteriza por un método de enseñanza mediante el

cual se le plantean a los alumnos preguntas, sugerencias, indicaciones, a modo de impulsos que facilitan la búsqueda independiente de problemas y de sus soluciones. Al utilizar este método el maestro no le informa a los alumnos los conocimientos terminados que se someterán a su asimilación, sino que los lleva al redescubrimiento de las suposiciones y reglas correspondientes, de forma independiente."

Y agrega: "La instrucción heurística, es la enseñanza consciente y planificada de reglas generales y especiales de la heurística para la solución de problemas, por lo que es necesario, que cuando se estudien por primera vez las mismas, se destaquen de un modo claro y preciso, y se apliquen en clases posteriores hasta que los alumnos hayan hecho una buena fijación y puedan aplicarlas independientemente en la solución de nuevos ejercicios y tareas".<sup>14</sup>

### 1.1.2 Descripción de los elementos heurísticos

En los trabajos de Müller, H. no se define el concepto de elementos heurísticos, pero desde tiempos de Euclides, y así lo recoge el diccionario como una de sus acepciones, por elementos se entiende "...los fundamentos y primeros principios de las ciencias y artes..."<sup>15</sup>, partiendo de esta idea y sin pretender dar con esto una definición, se asume lo que la mayoría de otros autores, como el mismo Müller, H. considera que es un concepto primario (algunos dicen intuitivo) y clasifican los elementos heurístico en dos categorías: los medios auxiliares heurísticos y los procedimientos heurísticos; estos a su vez se subdividen en principios, reglas y estrategias; existe para las dos primeras una subdivisión en principios y reglas generales y especiales. (Müller, H., 1990)

En su tesis Propuesta metodológica para la enseñanza de la programación visual en el bachillerato mexicano Aguilasocho, D. resumió en un esquema esta clasificación adaptada a las condiciones de la heurística en la programación, en este trabajo se amplía ese resumen y se contextualiza a las particularidades de las vías y métodos de resolución de problemas en Matemática. (Ver anexo 1.2). A continuación, tomando como referencia este resumen, se describen cada uno de ellos. (Aguilasocho, D., 2004)

**Medios auxiliares heurísticos:** En los textos referenciados no aparece una definición de medio auxiliar heurístico, el autor decide tratarlo en el capítulo II, en ellos se dice que el profesor los utiliza y enseña a sus alumnos a utilizar con el propósito de facilitar la comprensión de los problemas planteados y la búsqueda de la solución por vías efectivas y racionales.

**Procedimientos heurísticos.** Por procedimiento se entiende el método de ejecutar algunas cosas y en este caso se dice además que “apoyan la realización consciente de actividades mentales complejas y exigentes”<sup>16</sup>, se dividen en principios, reglas y estrategias.

**Principios heurísticos.** Los principios, expresa el diccionario son “cada una de las verdades, que sirve de fundamento a una ciencia”<sup>17</sup> y para el diccionario de la enciclopedia Encarta(2006), entre otras acepciones, principio es “cada una de las primeras proposiciones o verdades fundamentales por donde se empiezan a estudiar las ciencias o las artes.”<sup>18</sup>

Para la heurística, la analogía, la reducción, la inducción y la generalización como principios generales constituyen su fundamento porque:

1. Determinan en gran medida la acción de quien se enfrenta a resolver un problema.
2. Su campo de acción se extiende a todas las ramas del saber donde se aplique la heurística.
3. Son esenciales en la búsqueda de la vía de solución de un problema.

Lo anterior se muestra al analizar por separado cada uno de estos principios:

**Analogía.** La analogía, entre otras acepciones, tiene la de relación o semejanza y el diccionario de sinónimos, entre otros, consigna los de correspondencia, correlación, relación, parecido, semejanza, similitud, afinidad. Desde este punto de vista, la analogía permite resolver un problema a partir de determinar su relación, semejanza, correspondencia, parecido, afinidad, o similitud con otro ya resuelto.

Guétmanova, A. precisa que analogía es el “Razonamiento sobre la pertenencia a un objeto o clase de objetos homogéneos de un determinado indicio (propiedad o relación) a base de la semejanza de indicios sustanciales con otro objeto (o clase de objetos homogéneos). El objeto examinado directamente se llama modelo y el objeto del cual se busca la analogía prototipo (original)”<sup>19</sup>

La analogía puede ser de propiedades y de relaciones. En el primer caso responde al siguiente esquema según la lógica:

El objeto A posee propiedades a,b,c,d,e,f

El objeto B posee propiedades a,b,c,d

Es probable que el objeto B posea las propiedades e,f

En la analogía de relaciones se conocen las relaciones entre dos objetos o clases de objetos homogéneos:

(a R b) y (c R 1 d), las relaciones  $R$  y  $R^{-1}$  son análogas, pero "a" no es análogo a "c" ni "b" es análogo a "d". Un ejemplo clásico de este tipo de analogía es el que se establece entre el sistema planetario y la distribución de los electrones alrededor del núcleo atómico.

Para Expósito, C. 'La analogía como un factor heurístico positivo, puede ayudar en tres direcciones:

1. Puede aplicarse para que los alumnos descubran una proposición nueva para ellos, y la formulen.
2. Puede sugerir el método y el procedimiento para la demostración de una proposición nueva.
3. Puede sugerir la vía para la resolución de un problema, de un ejercicio." <sup>20</sup>

La analogía puede emplearse en todas las situaciones que se dan en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, tales son los casos de:

- Elaboración de concepto y definiciones.
- Tratamiento de teoremas matemáticos y sus demostraciones.
- Tratamiento de construcciones geométricas
- Tratamiento de algoritmos
- Resolución de problemas

**Reducción** es la acción de reducir o reducirse", y reducir entre otras acepciones tiene la de "convertir una cosa en otra" y entre sus sinónimos están: "mudar, cambiar, convertir"<sup>21</sup>. La reducción puede darse en cuatro formas diferentes:

1. **Reducir un problema a otro ya resuelto.** Esto generalmente es posible en un momento de la resolución del problema, cuando se llega a un punto en que la situación existente se puede reducir a un problema ya resuelto.
2. **La recursión.** Se transforma lo desconocido acudiendo a lo conocido. Generalmente en este proceso permite reducir un problema de mayor complejidad a problemas de menor complejidad.
3. **Dividir el problema en subproblemas ya resueltos.** En métodos de demostración donde se apliquen diferentes estrategias, se hace una diferenciación de casos, se reduce la demostración de una proposición a otra proposición equivalente que ha sido resuelta o que es más fácil resolver; reducir una refutación a la búsqueda de un contraejemplo.
4. **La modelación.** Esta variante de la reducción es tan importante que en ocasiones se plantea como un principio independiente. Consiste en buscar una interpretación o modelo del problema dado en otro dominio con el fin de poder aplicar las leyes del nuevo dominio a la resolución del problema

transformado y, realizando la transformación inversa del “modelo”, llegar así a una resolución del problema de partida.

**Inducción.** Según Guétmanova, A. se destacan dos enfoques de la inducción: uno perteneciente a la lógica tradicional, que llama inducción al razonamiento de un conocimiento de menor grado de universalidad a un nuevo conocimiento de mayor grado de universalidad, cuando de algunos pasos particulares se pasa a un juicio universal. En el segundo enfoque propio de la lógica matemática, se llama inducción el razonamiento que da un juicio probable. Es decir, se llega a la suposición de que existe una relación general, a partir del análisis de una serie de resultados particulares. Se hace en este caso una generalización empírica. (Guétmanova, A., 1991)

**Generalización.** Es la acción de generalizar, hacer general o común una cosa, abstraer lo que es común a muchas cosas para comprenderlas todas en un concepto general.

La generalización a veces está relacionada con la inducción, es decir, obtener suposiciones de un conjunto de objetos, fenómenos o relaciones, a partir del análisis de casos particulares o especiales, pero cuando se obtienen esta generalización de forma reductiva es necesario demostrar la validez de las suposiciones así obtenidas.

Los principios heurísticos particulares de medir y probar, de movilidad y el de casos extremos, también tienen un importante rol entre los procedimientos heurísticos, los que toman una mayor connotación para la Matemática asistida por computadoras. Esto se podrá constatar en el capítulo II, ya que el desarrollo de los asistentes de geometría dinámica y asistentes matemáticos los potencia al poderse aplicar, como su nombre lo indica, a situaciones particulares.

**Principio de movilidad.** “Consiste en suponer que, en figuras o cuerpos geométricos, un elemento es movable y, a partir de ellos, analizar los cambios que se producen. Se aplica generalmente en la búsqueda de suposiciones, con el objetivo de provocar la variación de condiciones y propiciar la búsqueda de relaciones y dependencias.”<sup>22</sup>

En la actualidad con el empleo de los asistentes de geometría dinámica como el Cabri o el Geometra, no es necesario hacer “suposiciones de movimiento”, los elementos de las figuras realmente se mueven y se pueden constatar los cambios que se producen.

**Principio de medir y probar o medir y comparar.** Este principio es asociado generalmente al principio anterior, dado que medir y probar o medir y comparar se hace después de efectuar un movimiento al igual

que lo analizado en la movilidad. Pero la movilidad ya no está asociada solamente a una figura, también puede ser un conjunto de valores que cambian producto de una generación automática de datos mediante una tabla de un tabulador electrónico u otro asistente matemático.

**Principio de extremos o de casos especiales y límites.** También potenciados por los asistentes matemáticos, permite analizar el comportamiento de funciones y gráficos alrededor de valores extremos, los que, por la complejidad del cálculo no es posible analizarlo por vía manuales.

Los asistentes matemáticos también han potenciado este principio, ya que permite analizar el comportamiento de funciones y gráficos alrededor de valores extremos, los que, por la complejidad del cálculo, no son posibles analizar por una vía manual.

**Reglas heurísticas.** Tienen la finalidad de impulsos dentro del proceso de búsqueda del nuevo conocimiento o de la vía de solución del problema. No tienen el alcance de aplicación de los principios aunque son de gran utilidad, ya que expresan las acciones y operaciones a realizar en la búsqueda de los medios y de las vías para resolver un problema.

**Estrategias heurísticas.** En un proceso regulable, la estrategia es el conjunto de las reglas que aseguran una decisión óptima en cada momento. En este sentido, constituyen los procedimientos principales para encontrar la idea fundamental de resolución y resolver un problema, por lo que también se llaman estrategias de búsqueda.

La literatura reconoce, en especial para la Matemática, dos estrategias heurísticas generales o universales que pueden aplicarse a cualquier tipo de problema: el trabajo hacia adelante o método sintético y el trabajo hacia atrás o método analítico. Para tipos de ejercicios especiales se dan otras estrategias como es el caso del esquema de Descartes, estrategia de dividir el problema en subproblemas, que en ocasiones se incluye dentro del principio de reducción, pero por su importancia se trata en este apartado.

**Trabajo hacia adelante.** Es la estrategia más conocida y usada, se caracteriza porque las reflexiones para hallar la idea de la resolución del problema parten de los datos y de ellos se infiere lo que se busca, pasando por una serie de pasos intermedios, apoyándose en los conocimientos que se tienen, de manera que se obtenga la sucesión de ideas que permitan elaborar la secuencia de pasos necesarios para darle solución al problema.



Como estrategia, su esencia está en buscar cuáles son los objetivos parciales o resultados intermedios que se pueden alcanzar partiendo de las condiciones previas. En el anexo 1.3 se muestra el esquema de trabajo de esta estrategia.

**Trabajo hacia atrás.** Esta es una estrategia heurística muy recomendada (aunque no siempre usada) en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Se caracteriza por el examen previo de lo que se busca, entiéndase, se parte de lo que debe obtener y apoyándose en los conocimientos y recursos de que dispone (algoritmos, conceptos, uso de medios auxiliares heurísticos, principios heurísticos, reglas heurísticas, etcétera), analizar posibles resultados intermedios de los que se puede deducir lo buscado, es decir, en cada momento es preciso hacer una pregunta análoga a la siguiente ¿qué se necesita hacer para obtener este resultado?, hasta llegar a un resultado elemental o a los datos necesarios. De manera que recorriendo el razonamiento en sentido inverso (esto es fundamental, paso hacia adelante) se obtiene la idea que da la vía de solución del problema. El esquema de trabajo es el que se muestra en anexo 1.4.

**Descomponer un problema en subproblemas.** Esta estrategia heurística responde al viejo principio latino **divide et impera** (divide y vencerás). Consiste en la división de un problema en problemas más elementales con vías de solución conocida, parcialmente conocidas o de vías de solución más o menos evidente, cada uno de los cuales mantiene una independencia relativa con el resto de los subproblemas y el problema en general.

Este método permite abordar problemas cada vez más complejos a desarrollar por el individuo con una estrategia de resolución inteligente y en un caso más complejo facilita el trabajo en equipo, donde cada miembro tiene una tarea (subproblema) que debe resolver para darle solución al problema mayor. En el esquema del anexo 1.5 se ilustra que esa división debe ser una división jerárquica, no arbitraria, también se ilustra la relación de análisis y síntesis que se pone de manifiesto en la aplicación de la estrategia.

### 1.1.3 Los modelos heurísticos

Aunque se pudiera partir del supuesto de qué es un modelo, y analizar solo los modelos heurísticos, por su importancia para referencias posteriores se precisará el concepto de modelo el cual es: "... un sistema concebido mentalmente o realizado en forma material, que, reflejando o reproduciendo el objeto de la investigación, es capaz de sustituirlo de modo que su estudio nos dé nueva información sobre dicho objeto".<sup>23</sup>

Por la referencia que hace a la heurística resulta más interesante y aceptable en el contexto de este trabajo la definición dada por Pérez, G. al plantear: "El modelo científico es un instrumento de la investigación de carácter material o teórico, creado por los científicos para reproducir el fenómeno que se está estudiando. El modelo es una reproducción simplificada de la realidad, que cumple una función heurística, ya que permite descubrir y estudiar nuevas relaciones y cualidades del objeto de estudio." <sup>24</sup>

La interpretación como realidad del proceso investigativo, la búsqueda de modelos, expresados en métodos para investigar, ha preocupado en todos los tiempos a científicos y filósofos. En los anexos 1.6 y 1.7, se muestra el modelo de Descartes y el de Bunge, M.

Descartes en su famoso libro "El discurso sobre el método" propone uno de estos modelos, apuntando cuatro preceptos fundamentales de su método de investigación, lo que hasta nuestros días son considerados clásicos. Obsérvese que el segundo precepto coincide con la estrategia heurística de dividir un problema en subproblemas.

Más reciente Bunge, M., aunque plantea en su libro "La investigación científica" que "No se conoce receta infalible para preparar soluciones correctas a problemas de investigación mediante el mero manejo de los ingredientes del problema", aclara posteriormente que "...pueden darse algunos consejos para la manipulación de problemas de investigación para aumentar la probabilidad del éxito"<sup>25</sup> y da las reglas heurísticas o consejos que aparecen en el anexo antes referido.

Se parte de los modelos de Descartes y Bunge, M. para la investigación, porque el objetivo principal de la instrucción heurística en la escuela, es la de plantearle al alumno situaciones similares a las que se enfrenta el investigador ante un problema desconocido al que tiene que darle solución y por tanto, para resolver los problemas escolares, tiene que emplear conscientemente reglas, vías y métodos similares a las que utiliza el investigador, siempre que estos se acerque lo más posible a la realidad.

Estas reglas vías y métodos no pueden ser inferidas por el alumno, tienen que ser enseñadas y desarrolladas por el profesor como parte de la instrucción heurística que se debe impartir en la clase, solo así el alumno podrá disponer de métodos para resolver problemas en forma independiente. A continuación se resumen algunas propuestas de modelos para la resolución de problemas:

Uno de los tratados más importantes para la búsqueda de soluciones a problemas de Matemática utilizando la heurística se debe a Polya, G., mencionado anteriormente en una de las definiciones de heurística. En su libro How to solve it?, este autor plantea un plan para resolver un problema, para ellos se

basó en las observaciones que había hecho como profesor de Matemática y en la obra de algunos psicólogos.

El modelo de Polya, G. consta de cuatro etapas que dirigen la acción de quien se enfrenta a un problema, con el fin de ayudarlo a eliminar las discrepancias entre el objeto del problema y la solución de este:

1. Comprender el problema
2. Concebir el plan
3. Ejecutar el plan y
4. Examinar la solución obtenida. (Polya, G. 1964)

Polya, G. propone también una serie de preguntas, convenientemente formuladas, para dirigir el proceso de resolución de un problema, las que se encuentran resumidas en la tabla del anexo 1.8

Después de Polya, G. la cantidad de modelos propuestos forman una lista casi interminable: Fridman, L., Jungk, W., Zillmer, W., Mason, F., Schoenfeld, A., Bell, T., Müller, H., De Guzmán, M., Algarabel, S., Riverón, R. y diferentes autores cubanos, por mencionar solo algunos. De manera que, la tarea de valorarlos a todos y sintetizar sus características esenciales, satisfacer además punto de vistas y hasta preferencias de los lectores, sin excluir la posibilidad de que se escape algún modelo puntualmente localizado dentro de la gran red de información, resulta una tarea tendente a lo imposible.

Por tales motivos se toma el modelo de Polya, G. como paradigma para este trabajo porque, siendo clásico, mantiene su vigencia y simplicidad, y como pivote, porque sobre él, criticándolo o tratándolo de superar giran todos los demás.

Sin particularizar en las concepciones bajo las cuales cada autor define su modelo, tomando en consideración las etapas definidas en cada uno y la relativa correspondencia que existe entre ellas, en el anexo 1.9 se resumen en una tabla los ocho modelos más referenciados en la literatura internacional.

Un simple vistazo a la referida tabla justifica la posición asumida en cuanto a tomar el modelo de Polya, G. como paradigma y pivote. Así, Schoenfeld, A. trabajó en la creación de subestrategias generadas a partir de las estrategias de Polya, G., que según él, resultan más fáciles de manejar por los alumnos diseñando un modelo considerado por muchos más completo, sobre todo en cuanto a las estrategias heurísticas.

La relevancia del modelo de Schoenfeld, A. que al mismo tiempo lo hace más complejo, es el considerar cuatro categorías necesarias para la comprensión de la forma en que los alumnos resuelven los problemas: recursos cognitivos, estrategias heurísticas, estrategias metacognitivas y sistema de creencias.

Después de Polya, G. Schoenfeld, A. presenta un trabajo amplio e importante y está recogido en libros y artículos, la mayoría consultados total o parcialmente, el autor coincide con Campistrous, L. cuando, al referirse a Schoenfeld, A. plantea: "...estas estrategias no son fáciles de enseñar y requieren para ello una preparación especializada en el campo de la matemática, lo que hace que la mayor parte de los maestros no lo reconozcan con facilidad y, lo que es más grave aún, no suelen enseñarlas a sus alumnos" <sup>26</sup>

Bell, T., también divide en pasos el proceso de resolución de problemas y sugiere en cada uno de ellos un conjunto de técnicas o estrategias cuya implementación, potencialmente, conduce a la solución. Las etapas de modelo de Bell, T., así como su caracterización son explicadas por González en su libro *El corazón de las Matemáticas*. (González, F., 1992)

Como elemento más significativo de este modelo está la explícita reformulación del problema, lo que fue seguido y aplicado con éxitos por Aguilasocho, D. en el modelo propuesto en su tesis para la programación visual, que ya ha sido mencionada en este trabajo; pero este aspecto está incluido como una regla heurística en la concepción que sigue el autor y se presenta en el esquema que se muestra en el capítulo II.

A diferencia de los anteriores que orientan sus modelos hacia la enseñanza media, Fridman, L. dedica su modelo a la resolución de problemas en la enseñanza superior. En el texto *Metodología para enseñar a los alumnos del nivel superior a resolver problemas de matemática* de Fridman, L., L. ofrece un modelo con las siguientes etapas: análisis del problema, escritura esquemática del problema, búsqueda del plan de solución, ejecución del plan de solución, prueba del plan de solución investigación del problema, formulación de la respuesta al problema y análisis final de la solución del problema.

Se destaca dentro de sus diferencias de este modelo con el clásico de Polya, G. **la escritura esquemática de un problema**, donde se exige que los resultados del análisis preliminar del problema deban ser de alguna manera consignados.

Esa forma compacta, cómoda, clara e ilustrativa de fijar los resultados del análisis, Fridman, L. lo denomina **escritura esquemática del problema**, y aunque advierte que no es obligatorio hacerlo para cada problema, en opinión del autor esta es una recomendación importante y está dentro de las correcciones que se deben hacer al modelo de Polya, G., en el proceso de su implementación en la clase, precisando el resultado que debe mostrar el alumno al finalizar cada paso. Esta concepción queda expresada en el capítulo II al mostrar las transformaciones que se proponen al modelo de Polya, G. como

consecuencia de la introducción de la computadora como medio auxiliar heurístico en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Por la importancia que tiene para la formación de un egresado de la Educación Superior la valoración de sus resultados investigativos, Fridman, L. enfatiza en este paso que se corresponde con el cuarto del modelo de Polya, G. y lo descompone en tres etapas: la **Prueba de la solución-investigación del problema**. (Convencerse de que la solución es correcta y satisface todos los requerimientos del problema y establecer bajo cuáles condiciones el problema tiene solución; cuántas son las soluciones en cada caso posible; bajo qué condiciones el problema no tiene solución, etc.) **Formulación de la respuesta al problema** (formular de manera precisa la respuesta al problema) y **análisis final de la solución del problema** (Con fines cognoscitivos y de aprendizaje, determinar si no existe otro modo (vía) más racional para resolver el problema, cuáles son las conclusiones que se pueden derivar de la solución, etc.)

Fridman, L. aclara que estas etapas no están separadas una de la otra, sino que se entrelazan. El orden de las etapas también puede cambiar en ocasiones. No todas las etapas son obligatorias, está en dependencia de las exigencias del problema y de la preparación de los alumnos para enfrentar su resolución.

Como puede observarse, estas precisiones de Fridman, L. pueden incluirse dentro del modelo de Polya, G. siempre que en su implementación el profesor elabore un sistema de reglas heurísticas algunas de ellas consideradas en dicho modelo (Ver anexo 1.10). En la tabla del anexo 1.9 se ilustra lo planteado.

Jungk, W. con un propósito más didáctico orientado a la Metodología de la Enseñanza de la Matemática, con la intención de establecer un procedimiento metodológico para el tratamiento de los problemas en la clase, refiere los siguientes momentos: orientación hacia el problema, trabajo en el problema, solución del problema y evaluación de la solución. Se destaca que la fase trabajo con el problema se caracteriza por: la precisión del problema, el análisis del problema y la búsqueda de la idea de solución. (Jungk, W., 1981) Estos pasos son seguidos por los autores cubanos en lo que llaman Programa heurístico general para el trabajo con problemas.

De Guzmán, M. presenta uno de los últimos modelos publicados que se puede observar en el anexo 1.9. Este se basa en las cuatro fases de Polya, G., y tiene la particularidad de orientar y animar al resolutor; más que un modelo es la interpretación que da un buen maestro del modelo de Polya, G. Esta apreciación se puede constatar en un excelente artículo del autor donde en el epígrafe titulado La heurística (problem

solving) en la enseñanza de la Matemática plantea: "La forma de presentación de un tema matemático basada en el espíritu de la resolución de problemas debería proceder más o menos del siguiente modo: Propuesta de la situación problema de la que surge el tema (basada en la historia, aplicaciones, modelos, juegos...)

- manipulación autónoma por los alumnos
- familiarización con la situación y sus dificultades
- elaboración de estrategias posibles
- ensayos diversos por los alumnos
- herramientas elaboradas a lo largo de la historia (contenidos motivados)
- elección de estrategias
- ataque y resolución de los problemas
- recorrido crítico (reflexión sobre el proceso)
- afianzamiento formalizado (si conviene)
- generalización
- nuevos problemas
- posibles transferencias de resultados, de métodos, de ideas...

En todo el proceso el eje principal ha de ser la propia actividad dirigida con tino por el profesor, colocando al alumno en situación de participar, sin aniquilar el placer de ir descubriendo por sí mismo lo que los grandes matemáticos han logrado con tanto esfuerzo. Las ventajas del procedimiento bien llevado son claras: actividad contra pasividad, motivación contra aburrimiento, adquisición de procesos válidos contra rígidas rutinas inmotivadas que se pierden en el olvido...".<sup>27</sup>

Finalmente se encuentran en la tabla del anexo 1.9, los que han tratado de reducir el número de pasos de Polya,G., tales son los casos de:

- Mayer estudió el proceso de resolución de los problemas matemáticos, considerando que las cuatro fases enumeradas por Polya, G., se pueden reducir a dos grandes procesos: traducción y solución del problema. (Alonso, I. 2001)
- Mason, F. identificó en el proceso de resolver problemas tres fases importantes: la entrada al problema, el atacar el problema y la revisión o evaluación del proceso. (Alonso, I. 2001)

- Algarabel. S., hace alusión a un programa que consta de tres etapas, las mismas son: análisis, exploración y verificación de la solución. (Algarabel. S., 1996)

Para estos dos últimos modelos se ha reflejado en la tabla (Ver anexo 1.9) la correspondencia con los pasos del modelo de Polya, G.

Con la posición adoptada respecto al modelo propuesto por Polya, G. no se pretende ser apologético, se reconoce que su obra ha recibido grandes críticas por matemáticos, pedagogos y estudiosos de la educación Matemática, sin embargo, continúa teniendo un gran valor como recurso de aprendizaje. Este modelo se trata fundamentalmente de desarrollar habilidades en el uso de procedimientos heurísticos, pero ningún modelo por sí solo no puede hacer milagros en las aulas, es el maestro quien debe hacerlo a partir de una formación adecuada.

Por otro lado, existen experiencias positivas utilizando el modelo de Polya, G. , tal es el caso de Cruz, C., quien con alumnos que presentaban bajo rendimiento al resolver problemas en la Facultad de Ingeniería en la Universidad Central de Venezuela, diseñó un curso de iniciación como programa previo, en el cual trabajó un equipo multidisciplinario, donde aplicaron inicialmente el programa de Polya y después de un perfeccionamiento, otros programas, logrando mejorar los resultados en el proceso de aprendizaje y el desarrollo de habilidades para resolver problemas. (Cruz, C.1990)

Castro, N. cita a Puig, L., uno de los críticos de Polya, G., al participar en el panel sobre resolución de problemas durante la Séptima Conferencia Interamericana sobre Educación Matemática planteó acertadamente: "No quiero decir que la metodología de Polya, G. sea errónea. Lo que he dicho es que el modelo de Polya, G. es la descripción de la solución ideal de un problema. ... Considero que la obra de Polya, G. es fundamental para entender lo que pasa con la solución de problemas, pero sabiendo que lo que hay ahí es un modelo ideal....La metodología se trabaja en clase, no puede ser esquemática, sino un método de enseñanza más que una descripción paso a paso para resolver un problema."<sup>28</sup>

## **1.2. El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas y las tendencias internacionales para la Matemática bajo la óptica de la realidad cubana**

En 1986, la junta directiva del Consejo Nacional de Profesores de Matemática de los Estados Unidos creó la "Commission on Standards for School Mathematics" con el objetivo de ayudar a la mejora de la calidad del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática.

Esta comisión tuvo dos tareas bien definidas:

- I. "Crear una visión coherente de lo que significa poseer cultura matemática en un mundo sustentado por calculadoras y ordenadores, donde las matemáticas se desarrollan vertiginosamente y aumentan día a día sus aplicaciones a los más diversos campos.
- II. Crear un conjunto de estándares para guiar la revisión del currículo matemático escolar y la valuación asociada a esta posición. Los grupos de trabajo de esta comisión prepararon estos estándares en respuesta a estas necesidades."<sup>29</sup>

Aunque este estudio estuvo dirigido a las escuelas norteamericanas, por el prestigio que tiene el NCTM y la objetividad del informe, constituye desde entonces fuente de referencia para cualquier estudio serio que se haga sobre la necesidad de cambios en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Este documento contiene una concepción que se corresponde con el desarrollo tecnológico y las necesidades sociales, estableciendo un marco amplio donde encuadra la reforma de las matemáticas en la escuela desde la última década del siglo XX. En este sentido aporta una visión general de lo que se debe incluir o no en el currículo de esta ciencia en cuanto a prioridad e importancia de contenidos.

La primera y más importante idea reflejada en este documento es: "Existe el consenso...de que todos los estudiantes necesitan aprender más matemáticas, y a menudo diferentes,...por tanto, la educación Matemática debe ser revisada en profundidad."<sup>30</sup>

Este criterio está sustentado en:

**La sociedad de la información.** El uso de toda esta tecnología ha provocado un cambio drástico en las ciencias físicas, sociales y de la vida; los negocios; la industria y el gobierno. La información es el nuevo capital y el nuevo material, y la comunicación es el nuevo medio de producción. El impacto que ha tenido este cambio tecnológico ha dejado de ser una abstracción intelectual, se ha convertido en una realidad económica. Hoy día, el ritmo del cambio económico se acelera con la continua innovación en las comunicaciones y en la tecnología informática.

Aunque esta "Sociedad de la información" se desarrolla dentro de un mundo de desigualdades económicas, sociales y políticas, no es menos cierto que su impacto se impone, hoy es una realidad las palabras de Ernesto Guevara: "Todo indica que esta ciencia se constituirá en algo así como una medida del desarrollo; quien la domine será un país de vanguardia. Vamos a volcar nuestro esfuerzo en este sentido con audacia revolucionaria."<sup>31</sup>



**Nuevos objetivos sociales.** Existe el consenso internacional de que la escuela, tal como está organizada hoy día, es producto de la era industrial, cuando se exigía de todos los alumnos una mínima competencia en lectura, escritura y aritmética; el entrenamiento académico más avanzado se reservaba para una selecta minoría. Actualmente los nuevos objetivos sociales de la educación exigen: trabajadores con educación matemática, aprendizaje continuo, la oportunidad para todo el mundo. Estos objetivos sociales, aspiraciones en muchos países del mundo, son una realidad en el nuestro y es el estado quien impulsa nuevas metas de superación desde los inicios del triunfo de la Revolución.

**Trabajadores con educación matemática.** Este criterio internacionalmente aceptado plantea que hoy día, la supervivencia económica y el crecimiento dependen del establecimiento de fábricas nuevas con ciclos de mercado de producción y servicios más complejos en un menor tiempo. Esta realidad de los países con un desarrollo capitalista también tuvo su incidencia en Cuba, cuando por exigencias económicas fue necesario transformar con celeridad la industria y reorientar por medio de la superación a sus trabajadores.

En cuanto a las exigencias matemáticas de los nuevos trabajadores se plantea que deben ser capaces de:

- Plantear sus propios problemas con las operaciones adecuadas.
- Conocer técnicas diversas para plantear y resolver problemas.
- Comprender las implicaciones matemáticas de un problema.
- Poder trabajar en grupos sobre un problema.
- Ver la posibilidad de aplicar ideas matemáticas a problemas comunes y complejos.
- Estar preparados para enfrentarse a problemas abiertos, dado que la mayoría de los problemas reales no están bien formulados.
- Creer en la utilidad y validez de las matemáticas

La resolución de problemas posee gran importancia, lo que se corresponde con los objetivos de los programas cubanos que plantean: "Que los conocimientos, habilidades, modos de la actividad mental y actitudes que se desea formar en los alumnos se adquieran mediante la resolución de problemas, que propicien que los mismos se habitúen, en un ambiente interactivo, a reflexionar, plantear hipótesis y conjeturas, validarlas y valorarlas, de modo que la resolución de problemas no sea solo un medio para fijar, sino también para adquirir nuevos conocimientos."<sup>32</sup>

**Aprendizaje permanente.** En el contexto internacional se proyecta y es casi una realidad que los trabajadores cambien de trabajo al menos de cuatro a cinco veces durante los próximos veinte años, por lo que se necesita una fuerza laboral flexible que sea capaz de seguir aprendiendo de por vida; esto implica que las matemáticas escolares deben subrayar una forma de instrucción dinámica

El aprendizaje permanente, extendido ahora con las concepciones de la Universalización de la Enseñanza y otras formas como pueden ser el Programa de Universidad para Todos, hacen de este principio una realidad en nuestro país.

**Oportunidad para todos.** Internacionalmente los alumnos estudian menos matemáticas, en las mujeres se acentúa más, las que están pobremente representadas en carreras científicas y tecnológicas. Este principio es una realidad educativa de nuestro país.

El informe NCTM planteó los fines generales establecidos desde el 9<sup>no</sup> hasta el 12<sup>mo</sup> grado y desde entonces se han convertido en estándares considerados intencionalmente, incluso para la evaluación de la calidad en proyectos como CESE y PISA. Estos son:

1. Que aprendan a valorar las matemáticas.
2. Que se sientan seguros de su capacidad para hacer matemáticas.
3. Que quieran resolver problemas matemáticos.
4. Que aprendan a comunicarse mediante las matemáticas.
5. Que aprendan a razonar matemáticamente. (NCTM, 1989)

Pese al énfasis que hacía NCTM sobre el desarrollo tecnológico, expresaba que:

“Reconocemos sin embargo que el acceso a esta tecnología no garantiza que todos los alumnos vayan a adquirir una cultura matemática. Las calculadoras y los ordenadores para los que manejan las matemáticas, al igual que los procesadores de textos para los escritores, son herramientas que simplifican la tarea que se tiene entre manos, pero que no la resuelven. Por tanto, nuestra visión de las matemáticas escolares se basa en las matemáticas básicas que van a necesitar los alumnos y no solo en el entrenamiento tecnológico que les va a facilitar el manejo de dicha matemática

De igual modo, la disponibilidad de calculadoras no quita que los alumnos tengan que aprender algoritmos. Es importante que exista cierto dominio del cálculo de algoritmos con lápiz y papel,...”<sup>33</sup>

Pero el informe no quedaba en la retórica de sugerencia para determinar cuándo y dónde utilizar la calculadora o la computadora al realizar el cálculo. En el anexo 1.11 se presenta un esquema para que

profesores y alumnos escojan las opciones adecuadas ante problemas que requieran de cálculo; hasta el cálculo mental es tomado en consideración, pasando siempre por la estimación de los resultados, esa estimación tan necesaria en la resolución del problema y tan olvidada en nuestras aulas.

Respecto al uso de las calculadoras y las nuevas tecnologías, el informe de NCTM precisa que debía haber calculadoras científicas con capacidad gráfica a disposición de todos los alumnos en cada momento.

En el contexto cubano, aunque tales calculadoras no existen dada la realidad económica de la escuela, donde no es posible proyectar una concepción para la Matemática soportada en esta tecnología, se encuentran aplicaciones en las computadoras que están al acceso de los alumnos en todas las escuela y que son verdaderas calculadoras científicas, las que pueden ser utilizadas para las tareas que corresponda según el esquema del anexo 1.11.

Sobre el empleo de las calculadoras, las tendencias internacionales siguiendo a NCTM plantean que para usarla los alumnos han de entender las matemáticas subyacentes (por ejemplo, el orden de las operaciones o el significado de una línea de fracción) y además aplicar la sintaxis más adecuada para el tipo de calculadora que se utilice. Este tema ha sido ampliamente estudiado por distintos investigadores cubanos entre los que se destacan los trabajos de Campistrous, L. (Campistrous, L., 1996)

NCTM también planteaba que los programas de ordenador pueden usarse eficazmente para demostraciones en la clase y de forma individual por parte de los alumnos para que exploren ejemplos adicionales, desarrollen investigaciones, generen y resuman datos como parte de un proyecto o elaboren sus trabajos de clase, con el propósito de transformar el ambiente de la clase de Matemática en un laboratorio muy semejante al ambiente de muchas clases de ciencias, en la que se emplee la tecnología actual para investigar, conjeturar y verificar sus hallazgos. (NCTM, 1989)

Esta es la concepción de la llamada "Matemática experimental" la que ha sido tomada en consideración, solo que en el modelo que se propone, la experimentación debe realizarse bajo la orientación del profesor, cumpliendo con los principios de la teoría de la actividad: la orientación, la ejecución y el control, donde se ponga de manifiesto explícitamente la intencionalidad heurística de la tarea a realizar.

Consecuente con esto, la resolución de problemas la tendencia internacional es que muchos problemas que se resolvían tradicionalmente a base de álgebra se pueden ahora resolver de forma más efectiva y general usando la representación geométrica y las técnicas de gráfica por ordenador. Este enfoque hace

que la destreza de manipulación algebraica no sea un requisito previo, y por lo tanto permite que todos los alumnos se enfrenten a problemas de interés y exploren ideas matemáticas importantes. Por otro lado, las ecuaciones polinómicas, que resultan muy útiles para describir relaciones entre variables en un amplio campo de situaciones reales, no tienen que ser ya un tema reservado para alumnos que vayan a seguir un curso de análisis.

Al valorar en el capítulo II las posibilidades que brindan los asistentes matemáticos se hace referencia con ejemplos concreto a lo antes mencionados y a la posibilidad de que el alumno profundice en contenidos que son impartidos sin una adecuada fundamentación matemática, de manera que en ellos prevalece el cálculo reproductivo, tal es el caso del cálculo de las raíces de una ecuación. Por otro lado, como se mostrará, utilizando los asistentes matemáticos es posible tratar en el nivel medio temas que corresponden a la llamada matemática superior, aprovechando lo que también es tendencia internacional, el hecho de que el empleo de la computadora proporciona más tiempo lectivo y más potencia en los cálculos, lo que permite la adquisición de estructuras conceptuales y su puesta en práctica en aplicaciones realistas,

Además de estos elementos conceptuales, los Estándares Curriculares aceptados intencionalmente a partir de NCTM exponen los contenidos que consideran se le debe dar mayor y menor atención respectivamente. (Ver anexo 1.12).

Sobre los contenidos a los que se debe dar mayor atención el autor considera que pese al enfoque constructivista que aflora en muchos enunciados, existen tópicos que están presentes en nuestros planes de estudios y otros que debe valorarse su inclusión, tales son los casos de:

- Aproximaciones sucesivas y utilidades gráficas, para resolver ecuaciones e inecuaciones.  
Este es un tema de suma importancia, conceptos como error y aproximación son desconocidos por nuestros bachilleres y la inclusión de estos temas no requiere de modificaciones curriculares el contenido puede ser asumida por la asignatura Computación.
- Las matrices y sus aplicaciones.  
Es un tema que adquiere cada vez más importancia en la formación matemática de un bachiller, pero que requiere de estudios para cambios curriculares; mientras es posible introducirlos desde la clase de Computación al impartir los tabuladores electrónicos
- El uso de utilidades gráficas para resolver ecuaciones e inecuaciones.

Sobre este tema y una propuesta de resolución a partir del empleo de asistentes matemáticos se tratará en el capítulo II.

- Estadística y probabilidad.

La estadística descriptiva está en los programas del nivel preuniversitario y sobre las posibilidades de desarrollar este tema utilizando la computadora se tratará en el tópico 2.4.2 del capítulo II.

Sobre los contenidos a los que se debe dar menos atención, el autor comparte lo planteado en los Estándares Curriculares, pero la experiencia del trabajo realizado (Ver capítulo III) demuestra que se requiere de tiempo y convicción para que los profesores resten importancia a temas tradicionalmente tratados como son:

### Álgebra

- La simplificación de expresiones radicales.
- El uso de los factores para resolver ecuaciones y para simplificar expresiones racionales.
- Las operaciones con expresiones racionales.
- La resolución de sistemas que ecuaciones usando determinantes.

### Trigonometría

- La verificación de identidades complejas.
- La resolución de ecuaciones trigonométricas a base de lápiz y papel.

### Funciones

- Las fórmulas dadas como modelos de problemas del mundo real.
- La expresión de ecuaciones de una función de forma analítica, con el exclusivo objeto de representarlas gráficamente.

Solo la demostración de las posibilidades que brinda la computadora para la Matemática, el trabajo de superación y metodológico con los profesores, el análisis, discusión y valoración de propuestas como la que estamos defendiendo pueden hacer posible el cambio que se requiere en nuestras aulas.

En cuanto a los cambios en la práctica docente, en el anexo 1.13 hay un resumen de ello, los que son compartidas por el autor y hay consenso de su necesidad por parte de la mayoría de los profesores.

### 1.3. La clase con software educativo. La SofTarea, la WebQuest y MiniQuest

El desarrollo de la computación desde sus inicios ha estado matizado por un progreso vertiginoso del hardware y el software, los que han provocado una verdadera revolución en la informática caracterizada

por sus ventajas en cuanto al ahorro de recursos, la comunicación y la actualización de la información, soportado a partir de las aplicaciones prácticas de las redes de computadoras, siendo la Internet su expresión más alta en estos momentos.

La simbiosis hardware–software ha potenciado la aparición de la multimedia, el hipertexto y la hipermedia, facilitando la elaboración de productos que combinen textos, imágenes, sonidos y videos, con una gran interactividad, fácil comunicación y acceso rápido a la información.

Estas cualidades son las que han hecho posible su impacto en los más diversos campos de la sociedad actual, la que se conoce como la Sociedad de la Información. En estos momentos se tiene como recurso de poder el conocimiento y la información a partir de las transformaciones que van teniendo las economías de los países más desarrollados, las que transitan de una economía manufacturera a una economía de los servicios.

Bajo estas condiciones, la escuela, como parte integrante de la superestructura de la sociedad, juega un papel protagónico en la preparación de los ciudadanos ante los retos que nos impone el desarrollo científico tecnológico, el cual experimenta un ritmo de crecimiento sin precedente, para elevar el nivel de vida, educación y cultura, en un mundo dado a la globalización de la información. Por tales motivos se impone formar una cultura informática en la nuevas generaciones, que sean capaces de afrontar los retos que el contexto histórico ha condicionado para el momento en que vive, y pueda jugar su papel transformador en la sociedad acorde a los principios morales de la misma.

Una síntesis de lo expresado sería “que en el contexto de la Sociedad actual y para cubrir sus expectativas se requiere de elevar la calidad de la educación, en el sentido que entendemos este, en un proceso del cual no puede excluirse el uso de la informática que más que un medio constituye un recurso sobre el que se sustenta la exigencias actuales.”<sup>34</sup>

Lo antes planteado conlleva a “...un perfeccionamiento del sistema educativo que de respuesta a los problemas que trae el vertiginoso desarrollo de los conocimientos, la interdisciplinariedad y multidisciplinariedad del conocimiento y una educación permanente a partir de la participación activa del estudiante en el mismo.”<sup>35</sup>

En nuestro país se ha estado llevando a cabo una verdadera revolución educacional en las últimas décadas, no solo desde el punto de vista del aseguramiento material con las novedosas computadoras instaladas en las escuelas a lo que se hizo referencia en la introducción del presente trabajo, también se

han encaminado los esfuerzos a la preparación de los profesores. Reflejo de ello lo podemos constatar en las palabras del Ministro de Educación, Gómez, L. cuando plantea al respecto "Por otra parte, hemos puesto todo el empeño en la preparación del personal docente: 900 maestros se prepararon en el mes de agosto, renunciando incluso a sus vacaciones, para lograr ya en el mes de septiembre comenzar a trabajar en las escuelas primarias donde se hizo la instalación de las computadoras. Actualmente, se preparan 10970 para comenzar en el mes de enero a aplicar masivamente la computación en todas las escuelas primarias...todos los maestros (más de 69 000 de la educación primaria) recibirán un curso de 32 horas para que no estén ajenos a esta importante revolución que ya entra en todas las escuelas primarias de nuestro país en el presente curso escolar".<sup>36</sup>

Para el logro de los objetivos propuestos, el Ministerio de Educación se ha dado a la tarea de elaborar colecciones informáticas, tales son el caso de la colección Multisaber, el Navegante y Futuro para la enseñanza primaria, secundaria y preuniversitaria respectivamente. Estas colecciones están dotadas de un conjunto de software educativos, los que cuentan con una concepción integradora de los contenidos educativos para cada una de ellas, teniendo un carácter curricular extensivo al ser un soporte informático pleno para el proceso de enseñanza-aprendizaje correspondiente a cada asignatura del nivel al que esté dirigido, entiéndase, cada asignatura está cubierta totalmente en el software.

De esta forma se rompe con el tradicional software educativo elaborado anteriormente en Cuba donde solo se abordaba contenidos específicos y no eran el resultado de una investigación pedagógica previa, se hacían a partir de la intuición de sus productores. A esta nueva concepción pedagógica del software educativo cubano se le ha dado a llamar hiperentorno de aprendizaje, donde se mezclan de forma armónica los diferentes tipos de softwares educativos sustentados en tecnología hipermedia creando un ambiente agradable y de fácil navegación por cada uno de los módulos con que cuenta.

El software Eureka, dentro de la colección Futuro, es el de mayor interés para esta investigación, ya que el mismo fue creado para la Matemática y abarca todos los contenidos de los tres grados del nivel, dando cobertura plena al currículo de la asignatura. El producto está compuesto por los módulos, Temas, Simulador, Ejercicios, Juegos, Biblioteca, Resultados y Profesor. A este producto se puede acceder según el tipo de usuario como estudiante, profesor o invitado por los que debe registrarse antes de comenzar a trabajar en él.

Eureka fue concebido con el objetivo de "formar en los estudiantes procedimientos generales y

particulares que propicien en los mismos independencia en la solución de ejercicios y problemas, para lo cual se dan sugerencias que se ejemplifican en cada caso.”<sup>37</sup>

Entre los elementos más significativos se encuentra un eficaz mecanismo de búsqueda, la que puede ser local o avanzada. Acceso a aplicaciones externas, las que se convierten en herramientas de trabajo para el alumno. Un visor de traza, el que resulta de vital importancia para el profesor, teniendo la posibilidad de constatar los resultados de sus estudiantes, valorar el trabajo realizado y el desempeño de los mismos. La ficha “En este tema”, en la que se pueden encontrar una síntesis de los conocimientos previos que el alumno debe dominar para comenzar el estudio de un tema determinado, qué contenidos aprenderá en ese tema, un resumen del mismo y orientaciones o sugerencias para profundizar en él.

En este producto también “se incluyen facilidades como un sistema para acceder a las efemérides, a un forum de discusión, un visualizador/editor de noticias y un sistema de navegación Web.”<sup>38</sup>

### **1.3.1 La clase con software educativo**

A partir de la introducción de la computadora en la escuela y de la aparición de hiperentornos de aprendizaje diseñados en nuestro país, surge la terminología Clase con software educativo. A decir del Disco Compacto “Software educativo a tu alcance”, la clase con software educativo es aquella, en la que el medio de enseñanza-aprendizaje fundamental lo constituye la unidad computadora-software y cuyos objetivos se corresponden con los de la asignatura Computación y objetivos de las restantes asignaturas del Plan de Estudio, vinculadas con los software empleados.<sup>39</sup>

Este tipo de clase está caracterizada por su interdisciplinaridad, dado por la relación que se establece entre la Computación y las restantes asignatura del currículo, mediante el software educativo. La asimilación de los contenidos es dado a través de la realización de actividades docentes dirigidas a la búsqueda, selección, creación, procesamiento y conservación de la información.

Estas actividades, estructuradas de forma sistémica, deben potenciar la adquisición independiente de dichos contenidos y el logro de los objetivos, para lo cual se hace indispensable la aplicación de métodos, medios y formas de organización que garanticen lo que se conoce como “aprender a aprender”. La efectividad de este proceso viene dado por la interrelación dialéctica que se da entre los componentes del proceso pedagógico de enseñanza-aprendizaje.

La clase con software educativo sugiere la utilización de una guía orientadora, la que establecerá el sistema de acciones u operaciones que el alumno tendrá que realizar, individual o colectivamente, en



interacción con el software educativo. Una propuesta de la estructura de la guía y una descripción de cada uno de los elementos se encuentra en el anexo 1.14

El nivel de interacción de los alumnos con un software educativo como medio, determina la clasificación de estos en medios pasivos y activos. En este caso, los medios activos se caracterizan por su retroalimentación, por las posibilidades que le brindan para constatar sus respuestas, los aciertos y desaciertos obtenidos, otras respuestas, pistas para resolver las interrogantes o problemáticas planteadas, sugerencias para consultar la información requerida y enfrentar la tarea, en fin, múltiples opciones de ayuda cognitivas que pone al estudiantes y a la computadora en una comunicación perfecta, donde ocupan indistintamente, durante la comunicación, el rol de receptor y emisor. La iniciativa de la dinámica de la actividad es tomada por el software y el alumno se dejará guiar por este.

Todo lo contrario ocurre con lo medios pasivos los que son carentes de una retroalimentación. Representantes de estos medios lo constituyen las enciclopedias, sitios Web, bases de datos, simuladores. En este caso la iniciativa es tomada por el alumno, no por el medio, y las acciones u operaciones van encaminadas a la búsqueda, selección y adquisición de información con los recursos informáticos antes mencionados.

La colección Futuro y el software Eureka, como elemento de esta, es una perfecta simbiosis donde, como se dijo anteriormente, se mezclan de forma armónica los diferentes tipos de software educativos sustentados en tecnología hipermedia. En ella se encuentran módulos pasivos como Temas y la Bibliotecas con su galería, los Forum de discusión y la navegación en la Web, así como módulos activos en Juegos y Ejercicios, lo que permite al alumno constatar su respuesta y retroalimentarse en Resultados.

### 1.3.2. La SofTarea

Como actividad fundamental de la clase con software educativo, en las condiciones actuales del nivel preuniversitario, se propone la SofTarea la cual se define como: "...**sistema de actividades de aprendizaje**, organizado de acuerdo a objetivos específicos, cuya esencia consiste en la interacción con **software educativos**, que tiene como finalidad **dirigir y orientar** a los educandos en los procesos de asimilación de los contenidos a través de los mecanismos de **búsqueda, selección, creación, conservación y procesamiento interactivo de la información**."<sup>40</sup>

De la definición antes planteada se puede inferir que la SofTarea como sistema de actividades de aprendizaje conduce al alumno a la interacción con los software educativos los "...que puede adoptar

posturas tanto **activas** como **pasivas...**"<sup>41</sup> . Una SofTarea puede contener tareas tanto de carácter activo como pasivo.

La SofTarea debe propiciar en los alumnos la apropiación del contenido y desarrollar, paralelamente con él, habilidades informáticas en cuanto a la búsqueda, selección, creación, conservación y procesamiento interactivo de la información.

Por otra parte, las mismas se realizarán en los tiempos de máquinas de los laboratorios de Computación, así como en los turnos de clase de la asignatura de informática, la que cuenta dentro de su programa con 16 horas-clase para el uso del software educativo en cada grado del nivel, o en los propios turnos de clase de la asignatura en cuestión en correspondencia de la disponibilidad del laboratorio y con previa coordinación.

Para la elaboración de la SofTarea se proponen los pasos en correspondencia con la estructura de la actividad (orientación, ejecución y control). En el anexo 1.15 se encuentra una descripción de los mismos.

Para la elaboración de la SofTarea se propone la estructura que se muestra a continuación:

- a) Título o Identificador (SofTarea N<sup>o</sup>)
- b) Asignatura(s)
- c) Grado o nivel
- d) Introducción
- e) Recursos
- f) Secuencia: Tareas – Sugerencias
- g) Orientación para la elaboración de conclusiones
- h) Comprobar la actividad diseñada mediante la ejecución de la misma.
- i) Definir la forma de control de la actividad.

### 1.3.3. Las WebQuests y MiniQuests

La convergencia que ha estado experimentando en estas últimas décadas la Electrónica, la Informática y las Telecomunicaciones, ha llevado al surgimiento de la Internet, uno de los fenómenos más mencionados y utilizados en el planeta en estos tiempos de la era digital. También uno de los grandes mitos del mundo contemporáneo que más ha contribuido a modificar la esfera económica y social de nuestros días.

Para la educación la Internet se convierte en una eficaz herramienta didáctica. Esta hace que se practique una educación interactiva, con una fuente inagotable de búsqueda e intercambio de información, haciendo

el proceso del todo flexible para adaptarse a las características personales del educando quien establece su propio ritmo de aprendizaje y propicia una total integración de los contenidos. De esta forma se puede alcanzar la transformación que se aspira en los educandos.

En este contexto el rol del profesor se precisa como los encargados de integrar este nuevo medio en su actividad docente, de acuerdo con su área de conocimiento y sus estrategias de enseñanza-aprendizaje, se convierte la red en un recursos didáctico más, dentro del proceso educativo pero no basta con la inserción de los nuevos medios, si no pasan a formar parte integrada y organizada en el currículum.<sup>42</sup>

Este papel rector del profesor se pone de manifiesto en las WebQuests., idea desarrollada en la Universidad Estatal de San Diego por Dodge, B. y March, T., definidas como:

- "... una actividad de investigación guiada en la cual la mayoría o toda la información utilizada por los alumnos procede de Internet. Diseñadas para favorecer un buen uso del tiempo, las WQ están más orientadas al tratamiento de la información que a su búsqueda."<sup>43</sup>
- "Las WebQuest, se pueden definir como una actividad orientada a desarrollar habilidades de investigación, que se caracteriza por crear en los alumnos, de forma sistemática, la necesidad de tener que resolver problemas, y donde la mayoría de la información para resolver los mismos, pueden encontrarla en Internet".<sup>44</sup>
- "WebQuests es una actividad orientada a la investigación en la que la mayor parte de la información que se debe usar está en la Web. Es un modelo que pretende rentabilizar el tiempo de los alumnos, centrarse en el uso de la información más que en su búsqueda y reforzar los procesos intelectuales en los niveles de análisis, síntesis y evaluación."<sup>45</sup>

De esta forma, en la medida que los alumnos investigan se apropian de mecanismos de búsqueda, métodos y estrategias de trabajo para la comunicación, búsqueda y procesamiento de la información. Desarrolladas estas habilidades para el trabajo en la Web, el profesor se limita a proponer temas y los alumnos buscan las soluciones en forma independiente, llegando a un "último estado de total autonomía, los estudiantes pueden proponer temas de interés al profesor que pasa a elegir entre ellos lo que sea más conveniente para el aprendizaje personal y del grupo."<sup>46</sup>

Tomando como punto de partida el tiempo que el alumno invierte en la realización de la WebQuests, las mismas se clasifican en WebQuests a corto plazo y a largo plazo. De estas se puede encontrar su caracterización y la de los componentes que integran su estructura en el anexo 1.16.

En la red se pueden encontrar más de cincuenta formas de asignar las tareas a los alumnos, pero se puede hacer una clasificación en función de sus regularidades. Cabe destacar que en una WebQuests pueden estar presentes más de un de los tipos de tareas: periodísticas, creativas, analíticas, de exposición, científicas, de recopilación, de misterio, de búsqueda de consenso, de persuasión, de autoconocimiento, de juicio, entre otras.

Una nueva modalidad de WebQuests a corto plazo son las MiniQuest las que consisten en una versión de las WebQuests. Las MiniQuest fueron desarrolladas en respuesta a las limitaciones del tiempo de los profesores para la búsqueda de la información que le permitiera diseñar, producir e implementar WebQuests, así como sus deficiencias prácticas. Por otra parte, el reducido número de computadoras disponibles, con acceso Internet en los centros. Esta nueva modalidad de actividad basada en Internet requiera de un menor tiempo para su preparación por parte de los profesores y al desarrollarse en un solo turno de clase, posibilita el trabajo independiente de los alumnos o en pequeños grupos.

Según la bibliografía consultada se han desarrollado tres tipologías de MiniQuest, las que están en correspondencia con el momento que ellas ocupan dentro de la unidad temática objeto de estudio:

- MiniQuest de Descubrimiento
- MiniQuest de Exploración
- MiniQuest de Culminación

Las MiniQuests adoptan un modelo similar al de la WebQuests, pero están compuestas solo por tres componentes o secciones: Escenario, Tarea y Producto. De cada uno de estos componentes se encuentra su caracterización en el anexo 1.17.

Para poder comprender con más claridad la complejidad de las WebQuests o la sencillez de las MiniQuests, se pueden apreciar sus semejanzas y diferencias en una tabla resumen tomada básicamente del trabajo titulado "Construyendo una MiniQuest"<sup>47</sup> que se encuentra en el anexo 1.18.

Las consideraciones antes planteadas para la introducción de la Internet en las aulas, la orientación de la actividad en ella a partir de las WebQuests o MiniQuests, son válidas también para el empleo del software Eureka ya que el mismo cuenta con conectividad en la red y posibilidades de navegación en la Web cuando las condiciones objetivas del país la permitan. Por otra parte, dichas consideraciones sobre las WebQuests, Mini Quests y SofTarea serán objeto de análisis en el capítulo II, donde se exponen los

puntos de vista del autor en cuanto a la orientación y organización de la actividad de los alumnos cuando hacen uso de la computadora como medio auxiliar heurístico.

En resumen, se presenta un análisis de la conceptualización de la heurística y una descripción de sus elementos. También se hace una valoración de los distintos modelos heurísticos más conocidos en la bibliografía internacional para la resolución de problemas, de los cuales se asume el modelo de Polya como paradigma para este trabajo porque, siendo clásico, mantiene su vigencia y simplicidad.

Se realiza una síntesis de las principales concepciones dadas por el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas, las tendencias internacionales y nacionales, para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática asistida por computadora. En tal sentido se precisan los principales cambios curriculares que deben producirse en cuanto a contenidos que se le presten mayor o menor interés.

Se aborda la clase con software educativo, especialmente la SofTarea, la WebQuest y la MiniQuest, como concepciones nacionales e internacionales de orientación de la actividad docente cuando se utiliza la computadora como medio.

# *Capítulo II*

## CAPÍTULO II. MODELO DIDÁCTICO SUSTENTADO EN LA HEURÍSTICA PARA EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA ASISTIDA POR COMPUTADORA

"El pensamiento, en el auténtico sentido de la palabra, consiste en una penetración en nuevas capas de lo existente, de modo que se excava y se saca a la luz del día algo hasta entonces en ignotas profundidades..."

S. L. Rubinstein:

### 2.1. Precisiones sobre el modelo

En este capítulo se retoma el problema científico teniendo en cuenta los referentes teóricos analizados. Se dan los fundamentos teóricos del modelo que se propone, se describen los elementos que lo integran y se establecen las relaciones que existen entre los mismos, así como las transformaciones que de forma explícita o implícita ocurren en los componentes del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática cuando se emplea la computadora como medio auxiliar heurístico. Finalmente, se muestra una representación gráfica que, de forma holística, integra todos los componentes de dicho modelo.

#### 2.1.1. Análisis del modelo a la luz de los referentes teóricos

En el primer capítulo se analizaron los referentes teóricos necesarios para abordar la solución del problema científico planteado. Se valoró la heurística en toda su amplitud desde su definición hasta sus componentes, pasando por las precisiones de la definición de problema. Se realizó un estudio comparativo de distintas propuestas de modelos para la resolución de problemas y un análisis de NCTM y sus propuestas de cambios en componentes significativos del proceso de enseñanza-aprendizaje a partir de la introducción de la computadora en dicho proceso. Finalmente, se valoran significativas concepciones que sobre la incidencia de la computadora en la clase se dan en el contexto de la educación cubana e internacional.

Teniendo en cuenta todos los elementos señalados anteriormente, y tomándolos como base, el autor consideró factible la elaboración de un modelo didáctico, entendido este como: "Construcción teórico formal que basada en supuestos científicos e ideológicos pretende interpretar la realidad escolar y dirigirla hacia determinados fines educativos." <sup>48</sup>

Con el propósito de describir cómo se desarrolla el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática cuando en el mismo se introduce la computadora y de revelar las transformaciones explícitas y/o implícitas que se producen en los componentes de dicho proceso; de un redimensionamiento de modelos de Polya al ser este el principal representante de los establecidos para la resolución de problemas, así como la

posibilidad de transferir este redimensionamiento a las restantes situaciones típicas de la Metodología de la Enseñanza de la Matemática.

El autor asume la resolución de problemas como objetivo fundamental de la Matemática, al ser una vía para el desarrollo de los contenidos, por ello, el concepto de problema precisado en el capítulo I juega un papel determinante. También es asumida la heurística como disciplina científica aplicable a todas las ciencias, concretada en modelos como el de Polya, es esta la teoría clásica más inmediata en la que se sustenta el modelo propuesto.

Complementan los referentes teóricos del modelo las concepciones sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje asistida por computadoras, las que contribuyen a explicar el redimensionamiento de modelos clásicos bajo las nuevas condiciones, así como en las directivas de los programas de estudios para el bachillerato cubano y las tendencias internacionales más significativas relacionadas con el tema.

### **2.1.2. Fundamentos teóricos del modelo**

Aunque en el capítulo anterior se hizo necesario priorizar las informaciones teóricas imprescindibles y no se analizan explícitamente los aspectos: filosófico, lógico, psicológico y didáctico, ellos están presentes en las ideas esenciales que sustentan teóricamente el modelo que se propone.

#### **➤ Fundamentos filosóficos**

El modelo se sustenta filosóficamente en las concepciones del marxismo-leninismo, especialmente en el método materialista-dialéctico y en la gnoseología correspondiente a esta concepción.

Tal concepción se hace patente desde la definición de problema que se asume, donde la objetividad del conocimiento es dada como reflejo del mundo real, al tiempo que para dar respuesta a las exigencias del mismo, el resolutor debe operar en el marco de su base de conocimientos y experiencias, es decir, a partir de su práctica social. En la resolución del mismo, esa base de conocimiento es enriquecida, lo que revela la cognoscibilidad del objeto del conocimiento y el carácter dialéctico del mismo.

En los cuatro pasos del modelo de Polya se constata la correspondencia con el criterio marxista del camino dialéctico del proceso del conocimiento de la percepción viva al pensamiento abstracto, y de este a la práctica, donde se reflejan los niveles o etapas del mencionado proceso.

Por otro lado, al transferir el redimensionamiento del modelo de Polya, G. a las situaciones típicas de la Metodología de la enseñanza de la Matemática, se toma como ejemplo el programa para la formación de concepto y en él se parte de fenómenos de la realidad o de entes matemáticos que partieron de la



realidad, mostrando los nuevos conceptos como reflejo del mundo real, posición que es consecuente con la solución materialista al aspecto ontológico del problema filosófico fundamental de la matemática.

Una vez elaborado el nuevo concepto matemático, se realizan las precisiones necesarias operando en el plano abstracto y luego se vuelve a lo concreto realizando identificaciones y analizando aplicaciones. De este modo se es consecuente con el ya referido camino lógico del conocimiento según la gnoseología marxista-leninista.

#### ➤ **Fundamentos lógicos**

El modelo se fundamenta también en las concepciones de la lógica formal y la lógica dialéctica.

Los procesos de analogía, reducción, inducción y generalización son elevados a la categoría de principios generales de la heurística; importante también resulta para la fundamentación lógica del modelo el estudio de la recursión y la modelación así como la lógica que encierra la aplicación de los principios especiales de medir y comparar, movilidad, análisis de casos extremos, especiales y límites.

También se presta atención a la definición como operación lógica esencial en la estructuración metodológica de la formación de conceptos y el operar con ellos, lo que constituye una de las habilidades fundamentales en el proceso de asimilación.

#### ➤ **Fundamentos psicológicos**

Desde el punto de vista psicológico, la propuesta se sustenta en la Teoría Histórico Cultural, representada por Vigotsky, L. y sus seguidores. Según sus representantes; el aprendizaje de conceptos, definiciones y procedimientos matemáticos, tienen lugar a través de la actividad. Un tipo especial de actividad, idóneo para este fin, es la resolución de problemas asistida por computadoras.

Al hacer uso de la computadora para resolver problemas y apropiarse de nuevos conocimientos, llegando al empleo de los software sociales, se presenta un vínculo más directo con la actividad práctica, se logra una mejor vinculación entre lo afectivo y lo cognitivo, lo que se traduce en una motivación más efectiva en el alumno. De esta manera se contribuye a la unidad de la esfera afectivo-motivacional con la esfera cognitivo-instrumental para formar la personalidad integral de los educados.

Al principio el profesor muestra los modos de actuación ante los problemas, empujando la computadora como medio auxiliar heurístico; luego plantea problemas similares, en correspondencia con el diagnóstico y tratando de reducir la zona de desarrollo próximo para lo que ofrece los niveles de ayuda correspondientes u orienta al alumno a través de la guía formativa las vías y formas de proceder.

Posteriormente va retirando el apoyo directo o la orientación en las guías hasta que el alumno trabaje de manera independiente al considerar que la educación antecede al desarrollo. De esta forma se alcanzan las habilidades requeridas para resolver los problemas o para buscar en el medio informático la ayuda necesaria con este fin y apropiarse de nuevos conocimientos.

El accionar descrito anteriormente responde al enfoque humanista de la educación cubana, así como al principio de la unidad entre la actividad y la comunicación, los que forman parte del sustento teórico de nuestro modelo.

#### ➤ **Fundamentos sociológicos**

Desde el punto de vista sociológico el modelo propuesto se sustenta en que la escuela como institución debe reproducir los valores de la sociedad. Consecuente con tal principio en el capítulo anterior se planteó que “la resolución de problemas en la escuela tiene como objetivo fundamental situar a los alumnos ante situaciones similares a las que se enfrenta un investigador, por lo que se requiere que el alumno emplee conscientemente reglas, vías y métodos similares a los que se utilizan en el proceso de investigación, lo que se hará cada más evidente en la medida en que los problemas planteados se acerquen a la realidad práctica.”

El modelo contribuye a la preparación de un tipo de egresado que coadyuve al desarrollo de esa sociedad, que se forme desde la misma escuela y no después de graduado, que esté presto para desempeñar un papel en el contexto social, con cualidades que se correspondan con los intereses de este, para enfrentar los retos de la revolución científico-técnica de una manera práctica, creadora, renovadora y transformadora.

Otro elemento a considerar en el modelo son las relaciones sociales que se producen entre los componentes personales del proceso, las que se redimensionan al trascender las barreras de lo convencional y gozar de una ubicuidad (que está presente a un mismo tiempo en todas partes) y una intemporalidad (que está fuera del tiempo o lo trasciende). Esto se hace posible por el desarrollo de las redes informáticas.

#### ➤ **Fundamentos pedagógicos**

El modelo que se propone en esta tesis tiene un carácter didáctico; en este sentido es factible establecer que la didáctica es ciencia, en tanto posee un objeto de estudio, leyes, metodología propia y un sistema categorial. Precisamente el objeto de estudio de la didáctica es el proceso de enseñanza-aprendizaje, es

un tipo de proceso formativo, dirigido, orientado y que se debe ejecutar sobre sólidos fundamentos teóricos. Por tales motivos debe responder a la didáctica general como ciencia y modelo teórico generalizador.

En la relación del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática asistida por computadora, con el contexto social radica la esencia de la primera ley de la didáctica. Con el fin de preparar al hombre para la vida, la Matemática como asignatura en el contexto escolar siempre ha sido de vital importancia por su contribución al ideal del ciudadano que se desea formar, dotándolo de un sistema de conocimientos, hábitos, habilidades, modos de actuación, convicciones, etc. para su accionar en la sociedad en que vive. Esta asignatura se encuentra condicionada por el contexto histórico social, se transforma, se actualiza acorde a las nuevas exigencias sociales y por ende no escapa de la revolución científica técnica.

Por tales motivos en el programa del nivel preuniversitario se expresa el siguiente objetivo general: "Desarrollar hábitos de estudio y técnicas para la adquisición independiente de nuevos conocimientos y la racionalización del trabajo mental con ayuda de los recursos de las tecnologías de la informática y la comunicación, que le permitan la superación permanente y la orientación en el entorno natural, productivo y social donde se desenvuelve".<sup>49</sup>

La introducción de la computadora en la clase de Matemática como medio, se convierte en una necesidad real que plantea nuevos retos sobre los que se debe reflexionar, en cuanto al proceso de enseñanza-aprendizaje de esta ciencia y donde se valore la interrelación dialéctica que se da entre cada uno de los componentes. Esta relación constituye la esencia de la segunda ley de la didáctica: La educación a través de la instrucción.

En el proceso pedagógico intervienen componentes personales, es decir, el profesor, el alumno y el grupo, los que interactúan entre sí. También intervienen los llamados componentes personalizados que adquieren vida propia en las condiciones de su empleo por la persona que enseña o por la que aprende. Estos componentes interactúan en sistema, en una dinámica propia que se hace necesario comprender para poder realizar una dirección acertada del proceso.

"Dentro de los componentes personalizados a tener en cuenta por el educador para dirigir el proceso pedagógico y por los alumnos para que se impliquen como sujetos activos de su propia educación, se encuentran: el objetivo, el contenido, los métodos, los medios, la evaluación y las formas de organización del proceso pedagógico".<sup>50</sup>

La computadora constituye en estos momentos uno de los medios más relevantes producto al desarrollo tecnológico alcanzado; el educando y el profesor se encuentran frente a un medio interactivo como nunca antes, dotado de imágenes, sonidos, videos y textos, que le brindan toda la información necesaria. Por otra parte, también dispone de recursos para la búsqueda de la información y productos con fines específicos, donde se brindan múltiples ventajas las que casi nadie pone en duda.

Al introducir la computadora como medio en el proceso enseñanza–aprendizaje, específicamente de la Matemática, los componentes alcanzan nuevas dimensiones dentro de esta ciencia a partir de sus relaciones internas.

Al hacer uso de la computadora los objetivos pueden alcanzarse con un mayor nivel, redimensionarse. Esto es posible al hacer el proceso de enseñanza-aprendizaje más objetivo, al aprovechar en mayor grado las potencialidades de los órganos de los sentidos, al disminuir el tiempo dedicado a este proceso y permitir una mayor retención de los contenidos.

El redimensionamiento de los objetivos de la Matemática viene dado a través del modelo que se propone, ya que los mismos se alcanzan a un mayor nivel teórico conceptual y práctico. Torres, P. plantea que la computadora como medio "...posibilita elevar a planos superiores el cumplimiento de los objetivos y funciones que tiene la Matemática en el currículo escolar, pues permite poner el énfasis en la comprensión teórica y en el desarrollo de capacidades y habilidades, sobre todo en la resolución de problemas..."<sup>51</sup>

Por otra parte, se introduce el uso de la computadora de forma integradora como herramienta de trabajo en la resolución de problemas, lo que contribuye a formar una cultura informática, deja de ser objetivo privativo de la asignatura Computación. También permite que los educandos se apropien del método heurístico como forma o vía para la búsqueda del conocimiento.

Sin embargo, los objetivos constituyen la categoría rectora del proceso "es lo que queremos lograr en el estudiante, son los propósitos y las aspiraciones que pretendemos formar en los alumnos."<sup>52</sup> El uso de la computadora debe estar en correspondencia con los objetivos que se tracen los que determinan qué producto emplear, en qué momento emplearlo y cómo emplearlo.

El objetivo asumido conscientemente por el alumno propicia su posición activa en el proceso, hace que deje de ser objeto y se convierta en sujeto de su propio aprendizaje, orienta su accionar con conocimiento de causa para interactuar con el medio y determinar hasta dónde ha llegado, qué le falta y qué acciones debe emprender para alcanzar los resultados que espera él y su profesor.

Los objetivos se desdoblaron en los contenidos de la enseñanza, los determinan. Entiéndase por contenido, "el sistema de conocimientos, habilidades y hábitos, valores y rasgos de la actividad creadora que el alumno debe apropiarse para alcanzar el objetivo" <sup>53</sup>

La relación objetivo-contenido cumple una acción orientadora en la dirección de las actividades del proceso de enseñanza-aprendizaje, precisan el carácter de las transformaciones que se han de operar en la personalidad del educando.

Es en esa transformación de la personalidad donde se alcanza el objetivo trazado, haciendo uso del medio. Pero la computadora en el ámbito de la Matemática le propicia a ella nuevos contenidos. A partir del modelo que se propone se pueden introducir otros conocimientos, relacionados o no, con el programa, otros conceptos de Matemática superior, los asistentes matemáticos como objeto de estudio y la heurística con sus principios, reglas y estrategias. Todo ello hace que el sistema de conocimientos se amplíe como cultura en el saber matemático.

En la búsqueda del nuevo contenido se reafirman y se adquieren conocimientos de la computación dados en conceptos y procedimientos. Se desarrollan y sistematizan, habilidades y hábitos informáticos en la interacción con los sistemas de aplicación, asistentes matemáticos, software educativos y sociales.

En los educandos se forman valores al emitir juicios del proceso, al evaluar el resultado y al realizar las valoraciones retrospectivas, lo cual se potencia al trabajarse en pequeños grupos, como parte del método utilizado, se socializa la actividad al intervenir más de un alumno en el proceso de búsqueda de la información o resolución de un problema y reproducir el accionar científico.

En el proceso de búsqueda de la vía de solución de un problema se comparten rasgos de la actividad creadora que desarrolla el alumno en cuanto a la ética, los métodos y el estilo de trabajo de los científicos.

Los objetivos y contenido de la Matemática se han enriquecido, pero no se puede dejar pasar por alto que los medios a emplear deben estar en correspondencia con el objetivo, pero que reflejen también los contenidos de que el alumno debe apropiarse. Ello incide en la selección de los productos informáticos a utilizar.

"La interacción del objetivo y el contenido precisa de los métodos del proceso pedagógico, sin los cuales resulta imposible lograr las acciones de los sujetos para alcanzarlos"<sup>54</sup>, al entenderse estos como las vías o modos que asume el profesor y el alumno para desarrollar la dinámica de la actividad y la comunicación

en el proceso de enseñanza-aprendizaje (lógica, orden, secuencia de los mismos y operaciones) con el propósito de lograr la asimilación del contenido y alcanzar el objetivo.

El objetivo determina el método, al condicionar el sistema de acciones para interactuar con el contenido en el proceso de enseñanza-aprendizaje, el cual queda expresado en su formulación al precisar los conocimientos y las habilidades a alcanzar.

La resolución de problemas como objetivo del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática determina el empleo del método heurístico. El programa heurístico general y el redimensionamiento del modelo de Polya propuesto en esta tesis, condicionan el sistema de acciones para interactuar con el contenido a partir de la aplicación de los principios, reglas y estrategias heurísticas.

Como el autor asume la tendencia de enseñar a los alumnos a resolver problemas en un trabajo paralelo al desarrollo del curso de Matemática, la heurística es objetivo del proceso de enseñanza-aprendizaje como fin a alcanzar, es contenido de ella y es método al aplicar sus principios, reglas y estrategias en su accionar.

El método también está determinado en gran medida por el contenido ya que cada complejo de materia condiciona el modo de actuación particular. Es por ello que en el modelo propuesto se evidencia la portabilidad de sus principales componentes ante las diferentes situaciones típicas del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática y diversos contenidos, lo que en el capítulo II se ejemplifica con la estructuración metodológica de la formación de conceptos. Si embargo, el método es el que posibilita el movimiento del contenido para que sea asimilado por el alumno hasta alcanzar el objetivo planteado.

Por otra parte, el método, al determinar el modo de actuación del profesor y del alumno condicionado por el objetivo, define el papel que juega cada uno ante los medios que se disponen, los que propiciarán de forma más efectiva el movimiento del contenido hasta el objetivo.

En estos tiempos se demanda del proceso de enseñanza-aprendizaje, la utilización de métodos más activos, creativos y desarrolladores, donde el alumno juegue un papel protagónico en la construcción de su propio conocimiento, siendo así más independiente, desarrollando cualidades investigativas y valores morales acordes a las exigencias sociales.

La introducción de la computadora como medio auxiliar heurístico, contribuye a dar respuesta a tales exigencias si se hace de un modo eficiente, teniendo en cuenta la dinámica que se da entre los componentes del proceso. Se generan cambios en la actividad y la comunicación, ya que esta es mediada

por la computadora, de manera que el profesor viabiliza el proceso para que el alumno asuma un rol más activo en la construcción de su conocimiento. Construcción que no es arbitraria, es estructurada, planificada y sistémica, supervisada por el profesor, al estimular la experimentación, la investigación, la toma de decisiones y valoraciones.

En el momento de seleccionar el método más adecuado este debe responder a las potencialidades que le brinda el medio informático en general, adaptándose a las nuevas condiciones que les impone el mismo. Esto se traduce en las acciones y operaciones que el educando debe realizar para alcanzar el objetivo. El medio informático le aporta al método su filosofía y concepción de interacción con él, por ende, establece su propia dinámica de la actividad y la comunicación en el proceso. Estos aspectos han sido tomados en cuenta en el modelo, al considerar la computadora como medio auxiliar heurístico por excelencia, al redimensionar el modelo de Polya, G. y mostrar la portabilidad de este redimensionamiento a la estructuración metodológica del tratamiento de las situaciones típicas.

“El método se erige como el componente del proceso que permite resolver a favor del desarrollo de la personalidad, las contradicciones inherentes a él, donde las acciones del profesor personalizadas por los alumnos hacen posible la formación de nuevos conocimientos, sentimientos y valores, el desarrollo de hábitos y habilidades que permitan superar etapas precedentes para dar lugar a la formación de nuevas formaciones psicológicas en los educandos que lo hagan protagonistas creativos en la misma medida que se acercan al contenido con un carácter independiente, activo, reflexivo y participativo como sujeto de su propio desarrollo. Por supuesto, este ideal de personalidad está fijado en el objetivo y reflejado en el contenido del proceso pedagógico”.<sup>55</sup>

La didáctica establece que en el proceso de enseñanza-aprendizaje la evaluación permite valorar tanto al profesor como al alumno, en qué medida los resultados se corresponden con los objetivos, métodos y medios empleados, cómo ha funcionado la dinámica sistémica entre los diferentes componentes del proceso, lo que hace posible tener una visión integradora del mismo, diagnosticar y retroalimentarse para rediseñar el accionar en dicho proceso con conocimiento de causa.

Es en este sentido que el alumno constata lo acertado del resultado obtenido, analiza la efectividad de la vía utilizada para la adquisición del conocimiento a través del uso de la computadora como medio auxiliar heurístico, las conclusiones a las que arriba en cada uno de los pasos del modelo de Polya, G. redimensionado, las valoraciones retrospectivas que hace y la aplicación consciente de los principios,

reglas y estrategias heurísticas acordes con la estructura lógica del programa heurístico general que se propone en esta tesis.

La autoevaluación del propio desempeño es una parte de este proceso, se deben evaluar en cada actividad realizada el accionar de sus compañeros. En tal sentido se analiza la apropiación de los modos de actuación en el saber matemático y de las ciencias en general, de forma tal que se establecen mecanismos de autocontrol y autoevaluación permanentes. La evaluación es una categoría esencial en el proceso de enseñanza-aprendizaje que permite interpretar, medir y tener juicios de la labor realizada, de manera que se consideran tanto el proceso como el resultado.

Así, los componentes objetivos, contenidos, métodos, medios y evaluación como elementos esenciales del proceso de enseñanza-aprendizaje, son personalizados en una determinada forma de organización. Esta última, como componente del proceso, estructura y organiza las relaciones que se establecen entre los componentes personales. En ella se desarrolla el método mediante el cual los alumnos se apropian del contenido y alcanzan el objetivo haciendo uso de la computadora como medio auxiliar heurístico.

La clase es la forma fundamental de organización del proceso de enseñanza-aprendizaje. A partir del diagnóstico de los alumnos y del grupo, el maestro establece las condiciones necesarias para fundir la enseñanza y la educación en un proceso único que dota a los alumnos de conocimientos, hábitos, habilidades y valores, desarrollar sus capacidades cognoscitivas y las cualidades de su personalidad en correspondencia con las exigencias de la educación.

Es la clase la forma regular que se utiliza para llevar a cabo este proceso en el nivel preuniversitario. En la misma puede predominar el trabajo independiente del alumno con o sin ayuda del profesor, por pequeños grupos de trabajo u otras formas que se estructure en función de los restantes componentes.

Los distintos tipos de formas de organización no se pueden ver aisladas o dissociadas una de otras, hay que verlas en una estructura sistémica, planificada y organizada en correspondencia con sus particularidades, en función de los demás componentes del proceso para cada momento.

“La esencia de la optimización del proceso pedagógico radica precisamente, en la selección consciente por el educador, dada las condiciones pedagógicas concretas, de la variante más acertada para la estructuración dinámica entre sus componentes, con vista a alcanzar en el trabajo con los alumnos la efectividad máxima. De aquí el valor que se le atribuye a la comprensión por el maestro de la dinámica



entre los componentes del proceso pedagógico para que pueda contextualizarla en el segmento de su realidad educativa con un carácter creativo, específico y auténtico".<sup>56</sup>

En resumen, la regularidad seguida hasta aquí ha mostrado cómo cada componente y sus interrelaciones mutuas se materializan en este contexto. El modelo didáctico sustentado en la heurística para la enseñanza de la Matemática en el nivel preuniversitario posee carácter didáctico y toma como uno de sus criterios vertebradores la didáctica general. De esta manera, se declara la didáctica general como modelo teórico generalizador para el desarrollo de la Matemática en el nivel preuniversitario.

## 2.2. La computadora como medio auxiliar heurístico

### 2.2.1. Definición y fundamentación

En el capítulo I al hacer referencia a los medios auxiliares heurísticos se expresó que: "En los textos referenciados no aparece una definición de este término, por su importancia para el modelo que se propone, ella se argumentará en el capítulo II...". Para precisar esta definición se debe responder la pregunta ¿qué particularidades deben tener los medios de enseñanza para que sean medios auxiliares heurísticos y no un medio más?

Se ha de partir para este análisis del concepto de medio de enseñanza. Algunas definiciones consultadas: Klingbers, L., González, V., Gutiérrez, R. coinciden de una u otra forma en que los medios sirven de soporte material al proceso de enseñanza-aprendizaje, pero las dadas por González, V. y Gutiérrez, R. los ponen en función de los métodos y los objetivos, aspectos de interés para analizar la relación entre los componentes del proceso de enseñanza-aprendizaje y su vínculo con el modelo de Polya, G., en el cual los medios se emplean para:

1. La interpretación del problema (comprensión del problema, primer paso del modelo de Polya, G.).
2. La concepción del plan de solución, segundo paso del modelo de Polya, G., donde el conjunto de reglas o impulsos heurísticos que se aplican hacen que los medios jueguen un rol determinante (Ver anexo 1.8)

Partiendo de estos presupuestos se propone la siguiente definición:

**Los medios auxiliares heurísticos son todos aquellos elementos que sirven de soporte material a la resolución de un problema y facilitan la aplicación de las reglas, principios y estrategias heurísticas.**

Tradicionalmente se han considerado como medios auxiliares heurísticos los que aparecen en el cuadro resumen del anexo 1.2, pero la computadora, con la revolución que impregna a todos los procesos donde se inserta, redimensiona estos medios convirtiéndose en un eficiente apoyo a alumnos y profesores en la posresolución de problemas. Así, los medios auxiliares heurísticos anteriormente mencionados adoptan nuevas formas mediante el empleo de la computadora, encaminados a:

1. La búsqueda de la información (contenidos) que posibilita un aprendizaje no lineal mediante:
  - Hipertextos
  - Hiperentornos de aprendizaje como el Eureka.
  - Enciclopedias
  - Búsquedas en la red (Intranet, Internet)
  - Software sociales (Correo Electrónico, chat, listas de discusión, foros de discusión weblog, wiki, etc.)

Este primer aspecto está directamente relacionado con los mementos señalados por Ballester, S. y con los compendios de diferentes estructuras de Müller, H. que aparecen en el referido anexo 1.2, los que facilitan la búsqueda y consulta de las definiciones, teoremas, fórmulas, propiedades y procedimientos requeridos para determinar la vía de solución del problema.

2. Procesar la información haciendo uso de asistentes matemáticos , agrupados generalmente en los que permiten:
  - El procesamiento algebraico, el tratamiento de funciones con el graficado de las mismas y el trabajo con conjuntos numéricos, matrices, polinomios, vectores, etc., mediante un sistema de herramientas interactivas con las que pueden realizarse diferentes cálculos de un alto nivel de complejidad. Estos software tienen como finalidad facilitar a distintos profesionales el engorroso cálculo matemático, sin interés del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. El Derive se ha escogido como representante de este grupo de asistentes, por ser relativamente pequeño y de fácil manipulación el cual está presente en el Eureka (hiperentorno educativo de la colección Futuro, software educativo destinado al nivel preuniversitario).
  - El procesamiento estadístico de los datos, haciendo posible el tratamiento de los contenidos de estadística descriptiva que se imparten en los niveles de secundaria básica y preuniversitario. En este caso, por ser objeto de estudio en la asignatura Computación y por las posibilidades que

brinda, se ha seleccionado la aplicación Excel, caracterizada por operar con los datos mediante hojas de cálculo, análogo a como lo hacen otros asistentes matemáticos más profesionales como son el SPSS y el STATISTIC, los que posiblemente el alumno estudie en la educación superior.

- El tratamiento de gráficos geométricos, haciendo posible realizar diferentes construcciones análogas a las que se realizan sobre papel utilizando reglas y compás, pero con la particularidad de que estas construcciones además de precisas, tienen la cualidad de ser dinámicas, es decir, los puntos principales de ellas pueden desplazarse por el plano conservando las figuras sus propiedades fundamentales. Estas bondades hacen que la Matemática pueda ser experimentada como las ciencias naturales. A diferencia de los asistentes mencionados anteriormente, estos han sido diseñados con propósitos docentes y brindan un conjunto de herramientas interactivas para el trabajo con ellos. Por las mismas razones que el Derive, se ha tomado como representante de este grupo el Geometra y en alguna medida el Cabri.

De lo antes expresado se puede concluir que la computadora se ha convertido en el medio auxiliar heurístico por excelencia, para la búsqueda de información y el procesamiento de los datos, indispensables para hacer inferencias a partir de aplicar los principios y estrategias heurísticas. Particularmente importante resulta el empleo de los asistentes matemáticos de geometría dinámica en la aplicación de los principios especiales de movilidad, medir y comparar y análisis de casos límite; los de procesamiento algebraico para el estudio del comportamiento de las funciones donde también el análisis de casos límites es de suma importancia y los de procesamiento estadístico para el manejo de grandes cantidades de datos, donde el agrupamiento conveniente y la comparación de los resultados juegan un papel determinante.

### **2.2.2. Posibilidades que ofrecen los asistentes tipo Derive para la enseñanza de la Matemática en el nivel preuniversitario**

A partir del análisis teórico, las experiencias nacionales e internacionales, la práctica del autor, el consenso de los integrantes del proyecto de investigación en el que se inserta esta tesis, trabajos de curso, trabajos de diploma y las opiniones de profesores que han utilizado el Derive, este asistente matemático ofrece posibilidades para:

- La sistematización y profundización de contenidos
- La introducción de nuevos contenidos relacionados con el nivel preuniversitario

- La inferencia de propiedades y su posterior demostración
- La introducción de conceptos de matemática superior

➤ **Ejemplos para la sistematización y profundización de contenidos.**

En el nivel preuniversitario se estudian los gráficos de las funciones correspondientes a la parábola, la parábola cúbica, la hipérbola equilátera, las trigonométricas, las exponenciales y las logarítmicas. De ellos se analizan las propiedades de las funciones que los generan y sus características, pero los alumnos resuelven ecuaciones e inecuaciones con expresiones cuyos gráficos desconocen, ejemplos de ellos son los que aparecen en el anexo 2.1.

Generalmente el alumno opera algebraicamente con estas funciones, le determina el conjunto solución de las mismas, pero el resultado es de poca significación para él. El empleo de los asistentes tipo Derive constituyen una alternativa para que estas soluciones sean más relevantes y productivas a partir de la interpretación del gráfico de la función. Con ello que se sistematiza y se profundiza en:

- El concepto de cero, como el punto donde la curva corta al eje de las abscisas.
- El concepto de periodicidad de las soluciones de ecuaciones trigonométricas
- La constatación de que los ceros de la función coinciden con los valores de la abscisa de los puntos de intersección entre las funciones que forman la ecuación.
- El concepto de soluciones de un sistema de ecuaciones como las coordenadas de los puntos de intersección de las curvas que representan cada ecuación.
- El análisis del comportamiento de la función en los intervalos correspondientes a las soluciones de la inecuación.

Esto se puede observar en las gráficas de las funciones que aparecen en el anexo 2.1.

Se observa que no se han valorado las posibilidades que tienen los asistentes matemáticos para resolver ecuaciones, inecuaciones o sistemas de ecuaciones, ya que no se correspondería este planteamiento con los objetivos declarados en el plan de estudio, aunque no se debe rechazar categóricamente esta posibilidad ante ecuación de determinado nivel de complejidad y que se corresponden con problemas de la práctica como el siguiente:

Si se quiere construir un recipiente cilíndrico de  $1000 \text{ cm}^3$  de capacidad, utilizando la mínima cantidad de materiales, teniendo en cuenta que se necesita un sobrante de  $0,25 \text{ cm}$  para poder doblar y soldar el material, entonces es necesario resolver la siguiente ecuación:

$$4\pi r^4 + \pi r^3 - 2000r - \frac{500}{\pi} = 0$$

Una vez obtenido  $r$  se puede calcular la altura mediante el despeje de la fórmula.

$$\pi r^2 h = 1000$$

Teniendo las dimensiones del cilindro.

Esta ecuación, que en un momento (todavía para algunos) pudo resultar “extraña” o “imposible de plantear” hoy es comprensible por los alumnos, solo que su resolución requiere del uso de un asistente matemático. El gráfico de la referida función aparece en el anexo 2.2.

Las soluciones calculadas en Derive con la opción de aproximación son:

$$r = -0.07957801116 \text{ ó } r = 5.363857880$$

A partir de este resultado el alumno debe seleccionar la solución adecuada y calcular el valor correspondiente a la altura para resolver el problema.

➤ **Ejemplos para la introducción de nuevos contenidos relacionados con el nivel preuniversitario.**

Cuando en este u otro apartado se hace referencia introducir nuevos contenidos, no se tiene como objetivo proponer cambios curriculares, esto se concibe como una consecuencia de la enseñanza de la Matemática asistida por computadoras, ya que el autor comparte el criterio de que “...al introducir la computadora en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática se deben producir cambios en las categorías principales del sistema didáctico: objetivos-contenidos-métodos.”<sup>66</sup>

La posibilidad de introducir estos “nuevos contenidos” está sustentada en la intencionalidad heurística dada en la enseñanza de la Matemática, de modo que las tareas se conviertan en verdaderos incentivos para la búsqueda y la investigación como escalón primario del aprendizaje permanente.

Algunos ejemplos pueden ser ampliar los conceptos de:

- **Ecuación:** Si se solicita a los alumnos que den ejemplos de ecuaciones, pueden dar disímiles respuestas, pero rara vez plantean ejemplos de ecuaciones donde se combinen funciones trigonométricas, algebraicas, exponenciales, logarítmicas, etc.

Partiendo del concepto de cero dado y de ecuaciones como  $x - \text{sen}(x) = 5$ , se puede inferir por analogía que las soluciones de ellas, se obtener utilizando el modo trazado que ofrece el Derive. Ver gráfico y solución en ejemplo 1 del anexo 2.3.

- **Ceros de una ecuación:** Sobre la cantidad de soluciones de una ecuación los alumnos del nivel preuniversitario, en su gran mayoría, consideran que es un número finito, aunque al estudiar la

periodicidad de las ecuaciones trigonométricas se infiere su infinitud, no siempre se presentan ecuaciones con infinitas soluciones. Uno de los múltiples ejemplos que pueden presentarse es la ecuación:

$$\text{sen } ( x ) = \frac{1}{x}$$

Cuyos gráficos y soluciones en el intervalo  $[0; 20]$  se muestra en el ejemplo 2 del anexo 2.3.

➤ **Ejemplos de inferencias de propiedades para su posterior demostración.**

El proceso de inferir propiedades generalmente está basado en la aplicación de los principios de movilidad y, medir y comparar. Los asistentes del tipo Derive son apropiados para comprender las modificaciones de la ecuación y del gráfico de una función por dilatación, contracción, traslación o la realización de algún movimiento. Este asistente también es adecuado para inferir o verificar hipótesis acerca de los parámetros de un tipo de ecuación que describe alguna situación de la realidad. Un ejemplo de esta posibilidad se muestra en el anexo 2.4.

Aunque Derive brinda la posibilidad de construir tablas, es más práctico utilizar otras aplicaciones como el Excel para el análisis y la valoración de las mismas.

El Derive, al igual que otros asistentes de su tipo, cuenta con su propio lenguaje de programación el que se puede enseñar a alumnos aventajados y con ello hacer inferencias como las que muestra en los siguientes ejemplos:

La relación entre la divisibilidad de los números de Fibonacci y la divisibilidad de los índices correspondientes a los términos de la sucesión se puede determinar por el programa en Derive que aparece en el anexo 2.4.

```
[ [3, 21, 144, 987, 6765, 46368, 317811, 2178309, 14930352, 102334155] ]
  [4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40]
    [mcd_número, mcd_índice]
      [3, 4]
```

La invocación a la función definida como `DIVISIBLE_POR(3)`, devuelve el siguiente resultado:

Del mismo se infiere que:

“Un número de Fibonacci es divisible por 3 si y solo si su índice es divisible por 4.”

Otro ejemplo de inferencias utilizando el Derive es la solución del siguiente problema planteado por la delegación de Gran Bretaña a la 28a Olimpiada Internacional de Matemática.

“Los números  $d(n,m)$  con  $m$  y  $n$  enteros y  $0 \leq m \leq n$ , están definidos por:

$$d(n,0)=d(n,n)=1 \text{ para todo } n \geq 0, \text{ y}$$

$$md(n,m)=md(n-1,m)+(2n-m)d(n-1,m-1) \text{ para } 0 < m < n$$

Probar que todo los números  $d(n,m)$  son enteros.”

La solución del problema se reduce a:

1. Encontrar qué tipo de números son los que se obtienen bajo las condiciones dadas en el problema.
2. Demostrar la propiedad encontrada mediante la inducción completa.

La primera tarea es la más difícil y a ella puede ayudar el programa que aparece en el anexo 2.4.

Para  $n=3$ ,  $n=5$  y  $n=8$  se obtienen los valores que facilitan la inferencia (Ver anexo 2.4.)

➤ **Ejemplos para la introducción de conceptos de matemática superior.**

Es posible introducir algunos conceptos de matemática superior tales como puntos de discontinuidad, asíntotas, problemas de máximo y mínimo, así como soluciones numéricas de ecuaciones.

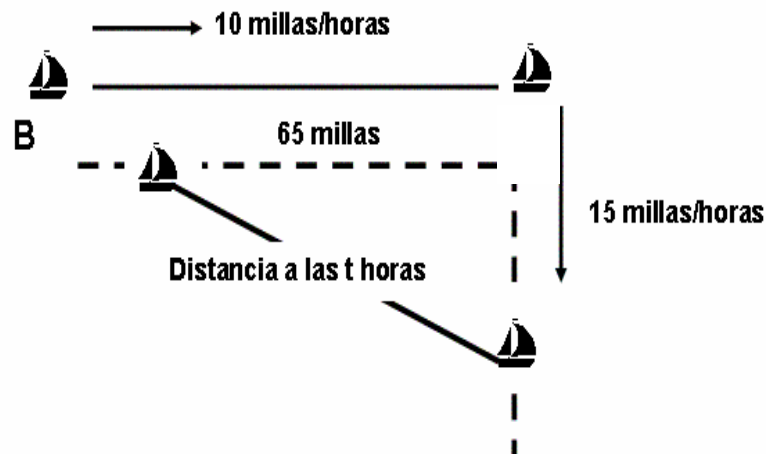
Entre los ejemplos que se planteó al inicio de este apartado, (Ver anexo 2.1) estaba la solución de la

inecuación 
$$\frac{x^3 - 7}{x^2 - 3x + 1} \geq 0$$

Con expresiones análogas se plantean otros ejercicios, como pueden ser la determinación del dominio de la función. La representación gráfica de ellas permiten un primer acercamiento al problema (determinación del las soluciones y dominio de la inecuación). Pero su construcción por las vías tradicionales de lápiz y papel en el nivel preuniversitario no es posible porque los alumnos no poseen los conocimientos necesarios, por lo que el Derive constituye un medio excelente para mostrar los elementos antes mencionado.

Es posible también resolver problemas clásicos de máximo y mínimo sin recurrir al cálculo de derivadas, ejemplo:

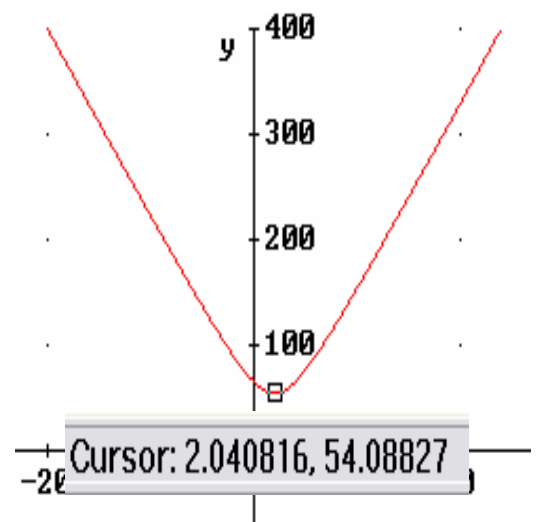
En un instante determinado un barco B se encuentra a 65 millas al oeste de un barco A. El barco B comienza a navegar hacia el este a una velocidad de 10 millas/horas, mientras A lo hace hacia el sur a una velocidad de 15 millas/horas. Sabiendo que los valores no se modifican. Determine aproximadamente la distancia mínima a que pueden encontrarse los barcos en su recorrido y al cabo de qué tiempo se produce.



A partir del esquema, aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene la siguiente ecuación:

$$D(t) = \sqrt{(15t)^2 + (65 - 10t)^2} \quad D(t) = 5\sqrt{13}\sqrt{t^2 - 4t + 13}$$

Graficando esta función con el Derive, haciendo los ajustes necesarios con el efecto Zoom y empleando el modo trazado se pueden obtener las coordenadas del punto mínimo, que se corresponden con el tiempo en horas y la distancia mínima en millas. Algo similar se puede hacer con el caso de la determinación de la dimensiones del recipiente de 1000 cm<sup>3</sup> a construir con el mínimo de material, problema planteado anteriormente como ecuación a resolver con el auxilio de la computadora.



### 2.2.3. Posibilidades que ofrecen las aplicaciones tipo Excel para la enseñanza de la Matemática en el nivel preuniversitario.

Excel brinda posibilidades análogas al Derive para la sistematización, profundización e introducción de nuevos contenidos, la inferencia de propiedades y la introducción de conceptos de matemática superior. Esta aplicación, al ser una Hoja Electrónica de Cálculo, propicia la elaboración de tablas que permiten durante el proceso de comprensión y búsqueda de la vía de solución de un problema, el descubrimiento de regularidades y relaciones entre los datos y las incógnitas. También, en el proceso de las valoraciones retrospectivas, facilita la validación de los resultados, así como el análisis de valores extremos y casos especiales; pero su empleo más frecuente viene dado en:

- El procesamiento de datos relacionados con la estadística.



- El tratamiento de gráficos, particularmente estadísticos.
- La introducción de conceptos considerados de importancia para el nivel preuniversitario, según las tendencias internacionales.

➤ **El procesamiento de datos relacionados con la estadística.**

Es imposible en la actualidad trabajar en Estadística sin el apoyo de la computadora, pero para ello es imprescindible conocer los conceptos estadísticos y la metodología de su aplicación. Evidentemente, de nada servirá la computadora si no se sabe qué hacer con ella. Lo ideal es la concepción formada por la combinación entre metodología, práctica y aplicación informática. La integración de estos tres conceptos produce como resultado la optimización de la aplicación práctica de los métodos estadísticos.

Una aplicación como Excel, posee la virtud de presentar una interfaz agradable y una adecuada facilidad de uso. En él los procedimientos estadísticos, diseñados a través de funciones de aplicación inmediata, optimizan la funcionalidad en momentos en que la tendencia informática es hacia la simplificación. Esta aplicación es un software claro, conciso, completo y a la vez simple para los requerimientos del trabajo estadístico en el nivel preuniversitario, con la ventaja de que su entorno se corresponde con el del resto de las aplicaciones conocidas por los alumnos.

Para resolver los problemas de estadística correspondientes a los contenidos que se imparten en el nivel preuniversitario y dar cumplimiento al objetivo de "Procesar datos sobre el desarrollo económico, político y social en Cuba y en otras regiones y sobre problemas científico-ambientales para valorar la obra del socialismo, los males del capitalismo y las consecuencias de políticas científicas y tecnológicas, utilizando recursos de la estadística descriptiva..."<sup>58</sup> el profesor puede optar por tres posibilidades que ofrece Excel.

1. **Mediante funciones:** Mediante el empleo de las funciones de Excel que facilitan los cálculos estadísticos, por lo que su empleo es el menos automatizado. De esta forma se fijan los conceptos y contenidos que se imparte en Matemática, al tiempo que se desarrolla la asignatura Computación en el nivel preuniversitario. Solo se requiere de un trabajo interdisciplinario coordinado en el departamento.
2. **Mediante herramientas de análisis:** Este servicio de Excel no siempre está habilitado, el procesamiento es sencillo y eficiente, pero la automatización de la respuesta hace que funcione como "caja negra", por lo que se requiere del dominio de los conceptos para la interpretación de los

resultados. Si el profesor decide enseñar a los alumnos esta opción debe hacerlo después que el proceso de fijación de conceptos haya concluido exitosamente.

3. **Mediante tabla dinámicas:** Este no es un contenido que se imparte en la asignatura Computación del nivel preuniversitario, pero puede utilizarse para el trabajo con alumnos de alto aprovechamiento, ya que las mismas son de fácil creación y de vital importancia para la elaboración de tablas cruzadas.

➤ **El tratamiento de gráficos, particularmente gráficos estadísticos.**

Las posibilidades de Excel para graficar funciones, aunque no tan amplia como los asistentes tipo Derive, son dignas de tomarse en cuenta, máxime cuando ellos se generan a partir de tablas. En esta aplicación los gráficos por excelencia son los estadísticos, los que aparecen en su correspondiente menú. También posee los histogramas asociados a las herramientas de análisis de datos, opción esta a la que se hizo referencia anteriormente; además ofrece los importantes gráficos dinámicos que al igual que las tablas dinámicas no son objeto de estudio del programa de Computación, pero constituyen una posibilidad a tratar según el diagnóstico del grupo y de los alumnos.

➤ **La introducción de conceptos considerados de importancia para el nivel preuniversitario según las tendencias internacionales.**

Al analizar los planteamientos de NCTM y tendencias internacionales se hizo referencia a dos contenidos que se le debe dar mayor atención y no están presentes en los programas del nivel preuniversitario cubano, esto son los relativos a matrices, sistemas de ecuaciones y los elementos de matemática numérica.

Tratar de acercarse a las normas y tendencias internacionales es un objetivo que se proponen muchos investigadores o instituciones que aspiran a contribuir al mejoramiento de la calidad del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática; este trabajo no es una excepción. Como se ha declarado, el acercamiento se produce sin cambios curriculares. Para lograrlo se parte del criterio que los contenidos de la Matemática no deben limitarse solo al entorno de esta asignatura. Desde la clase de Computación se pueden introducir temas de Matemática que no aparecen al programa de esta. En el anexo 2.5 se muestra un material elaborado por el autor, donde se expone cómo se pueden introducir los contenidos relativos a matrices y sistemas de ecuaciones empleando el Excel. Por su parte, en el anexo 2.6 se plantean ocho problemas relacionados con los elementos de matemática numérica que pueden ser resueltos en la clase de Computación.

#### 2.2.4. Posibilidades que ofrecen los asistentes de geometría dinámica para la enseñanza de la Matemática en el nivel preuniversitario

La Geometría tiene como uno de sus objetivos el desarrollo del pensamiento espacial, para ello es necesario el trabajo con lo que algunos han llamado Geometría Activa, mediante la cual el alumno incursiona de manera directa en los procesos de manipulación e interacción con los elementos geométricos. De igual forma se debe enfatizar en las representaciones bidimensionales del espacio tridimensional y las transformaciones geométricas que puedan sufrir los objetos de estudio. Con esta concepción, los asistentes de geometría dinámica juegan un rol fundamental y el estudio de la geometría se encamina cada vez más a:

- La exploración del plano y el espacio.
- El desarrollo de la imaginación.
- La formulación y discusión de conjeturas.
- La resolución de problemas de la práctica o lo más cercanos a ella.

Los asistentes matemáticos de geometría dinámica son elementos de “mediación” dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Constituyen un mediador especial, ya que son el puente que el profesor facilita, apoyado en un adecuado nivel de ayuda, para convertir la zona de desarrollo próximo del alumno en zona de desarrollo actual. Los asistentes tipo Geometra o Cabri posibilitan que esto transcurra con una capacidad de visualización tan amplia, que las representaciones sobre la pantalla sean verdaderos modelos manipulables de objetos matemáticos, no de manera abstracta como sucede por las vías tradicionales.

“Con relación a estas herramientas, Balacheff & Kaput (1996), han señalado que su mayor impacto es de carácter epistemológico, refiriéndose con ello al hecho de que las herramientas computacionales han generado un nuevo realismo matemático. En efecto, los objetos virtuales se pueden manipular de tal forma que se genera una sensación de existencia casi material.”<sup>59</sup>

Aunque tanto Geometra como Cabri son asistentes conocidos y por lo expresado es conveniente hacer algunas precisiones.

Estos asistentes tienen como principio base el estudio de los componentes fundamentales de las figuras geométricas, las relaciones entre estos y las propiedades que presentan. La construcción de las mismas le permite al alumno la exploración, la manipulación directa y la dinámica que conduce a la elaboración de

conjeturas; esta experiencia les sirve para desarrollar habilidades que les posibilitará acceder posteriormente al estudio formal de la geometría euclidiana.

Con Geometra y Cabri se experimenta una especie de “materialización” de los objetos matemáticos, de sus representaciones y de sus relaciones, de tal forma, que se desarrolla un tipo de experimentación matemática que otros ambientes de aprendizaje no proporcionan. Por consiguiente, es natural que los alumnos que trabajen con estos asistentes puedan avanzar en la comprensión y conocimiento de la geometría de una manera distinta y a un mayor nivel que la si utilizan medios tradicionales.

Tanto Geometra como Cabri pueden ser utilizados para la sistematización de contenidos. El autor comparte el criterio de González, J. quien identifica tres formas básicas para repasar contenidos ya estudiado mediante los esbozos que se pueden hacer con el asistente Geometra:

- **Repaso activo de conocimientos.** Esto transcurre mediante la utilización de presentaciones preparadas por el profesor de modo tal que permitan encontrar respuestas accionando en ellas.
- **Redescubriendo de lo conocido.** En este caso se sitúa al alumno en la posición de investigador, mediante la realización de acciones con el asistente para dar respuesta a preguntas con la que redescubrirá y recordará contenidos estudiados.
- **Construir y calcular.** Este tipo de ejercicio se utiliza para sistematizar las propiedades fundamentales de determinada figura, así como las fórmulas para el cálculo de su área y perímetro. Permite la individualización del trabajo y el autocontrol. (González, J.,2006)

Se han sistematizado también tres posibilidades para la introducción de nuevos contenidos utilizando el Geometra:

- **Mediante esbozos dirigidos a la introducción de nuevos conceptos.** Se le plantea al alumno realizar construcciones, mediciones, comprobaciones de relaciones, arrastrar figuras con el ratón, etc. y se dirige la atención sobre el comportamiento de determinadas características o relaciones que permiten identificar las propiedades esenciales del concepto.
- **Empleando esbozos dirigidos a la búsqueda de teoremas:** También se plantea al alumno realizar construcciones, mediciones, comprobaciones de relaciones, arrastrar figuras con el ratón, etc. pero se llama la atención sobre el comportamiento de determinadas relaciones afines o métricas de donde resultan las nuevas propiedades a estudiar asociadas a un ente geométrico.

- **Presentando esbozos dirigidos a la comprobación de propiedades:** Se caracteriza por plantear como tarea la realización de construcciones, mediciones, arrastrar figuras con el ratón, etc. pero con el propósito de comprobar propiedades que ya han sido enunciadas.

Como medio auxiliar heurístico Geometra y Cabri dan la posibilidad de generar procesos de asimilación e inferencia heurística a través de sus tres funciones específicas que son ejercidas sobre las construcciones originales de los objetos geométricos:

- Arrastre (dragging) de las figuras construidas, lo que favorece la búsqueda de rasgos que permanecen invariantes durante la deformación a que son sometidas. El principio especial de movilidad permite revelar estas propiedades invariantes, las que constituyen genuinas propiedades geométricas, quedando de esta manera definido el objeto que se estudia.  
El arrastre facilita el estudio de una "familia" o colección de figuras más que el de una figura en particular en las cuales se podrá apreciar de forma invariante las propiedades que las caracterizan, atendiendo puntualmente a su definición, el contenido y el volumen que la conforma.
- El uso extensivo de locus y trace (huella que deja una figura geométrica cuando se le arrastra) para visualizar y descubrir hechos geométricos.
- La animación de figuras permite presenciar como en una película el proceso constructivo de un hecho geométrico.

Con estas posibilidades que brindan los asistentes de geometría dinámica se redimensiona la regla heurística de "hacer un esquema de las condiciones del problema", ya que el gráfico adquiere una mayor connotación para la búsqueda de la vía de solución por las posibilidades que brinda el medio.

El empleo de los asistentes de geometría dinámica como herramienta y con una intencionalidad heurística hace que ellos conviertan a la computadora en un excelente medio auxiliar heurístico. Se establece una simbiosis herramienta de cálculo-medio auxiliar heurístico, las que no se presentan de forma excluyente, ellas constituyen un proceso de interrelación dialéctico que requiere de la adecuada orientación del profesor y entrenamiento del alumno en el empleo de las estrategias heurísticas, porque como proceso del pensar requiere tiempo de observación, análisis, establecimiento de relaciones, síntesis, asimilación de nuevos conocimientos, como parte del tránsito de la zona de desarrollo actual a la zona de desarrollo próximo.

Cuando los asistentes matemáticos, en particular los de geometría dinámica, se utilizan en el rol de herramienta de cálculo, el objeto matemático amplía su contenido y se logra ver más allá de su simple definición, dándose la posibilidad de interactuar con el objeto, y en la medida en que conscientemente se empleen los principios reglas y estrategias heurísticas, es posible descubrir en él propiedades y relaciones nunca antes vistas.

Del mismo modo que el lápiz y papel o el procesador de texto, median en el proceso de escritura, "...la presencia de los instrumentos computacionales en la educación matemática, ha hecho evidente un principio de mediación general, sistematizado en el trabajo de Wertsch (1993): Toda acción cognitiva es una acción mediada por instrumentos materiales o simbólicos...en todos los casos, el conocimiento producido depende de los instrumentos de mediación que pongamos en juego para su construcción, y del lugar que tales instrumentos tengan en el entorno sociocultural"<sup>60</sup>

En este sentido los asistentes matemáticos juegan un papel de herramientas en el proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que el alumno se auxilia de ellas para realizar ciertos procedimientos (cálculos, representaciones, registros, etc.) dentro de un problema o situación a la cual ya le ha encontrado o le busca la solución, entonces el asistente agiliza el procesos, ayuda en la exactitud y veracidad del mismos, "pues su auxilio es complementario al tren del pensamiento del estudiante. La herramienta no modifica, sino que complementa el pensamiento del estudiante"<sup>61</sup>. Tal es la función principal del Derive o el Excel, cuando el alumnos realiza con un cálculo para resolver un problema cuya vía de solución ya se ha pensado.

En el dialéctico proceso de enseñanza-aprendizaje los asistente matemáticos se pueden convertir en mediadores directos del proceso de búsqueda y asimilación del conocimiento, ya que es posible que su uso reiterado y los impulsos heurísticos del profesor produzca cambios en las estrategias de planteamiento, interpretación y solución de problemas, generación de representaciones e interacción entre las mismas; "en otras palabras puede ocurrir que el pensamiento matemático del estudiante quede afectado radicalmente por la presencia de la herramienta"<sup>62</sup>. Los asistentes así utilizados, han dejado su papel de herramienta y se han convertido en un medio auxiliar heurístico, ya no se emplean solo en apoyar y auxiliar el proceso cognitivo, sino que influye en él de manera directa.

Aunque este rol lo juegan también los asistentes tipo Derive y Excel como se muestra en múltiples situaciones, los asistentes de geometría dinámica son por excelencia medios auxiliares heurísticos.

### 2.2.5. Contexto necesario para que la computadora sea un medio auxiliar heurístico

En este epígrafe se ha definido el concepto de medio auxiliar heurístico y se han analizado las posibilidades que brindan los asistentes matemáticos para lograr que la computadora se convierta en el medio auxiliar heurístico por excelencia, lo que permite redimensionar el modelo de Polya, G. y concatenar armónicamente los distintos elementos del modelo didáctico que se construye.

Por otro lado, se ha insistido que no se proponen cambios en el currículo, entendido este como el documento donde se especifica qué se estudia, cómo se debe desarrollar el proceso de enseñanza-aprendizaje, cuándo y en qué orden se presentan los diversos temas. En su lugar se han mostrado las posibilidades de introducir determinados contenidos desde la propia clase, los que van desde profundizaciones en temas de los programas actuales del bachillerato, como el análisis de las propiedades y elementos de las funciones a partir de su gráfico, pasando por matrices, sistemas de ecuaciones y elementos de matemática numérica, sugeridos por NCTM y que hoy constituyen una tendencia internacional, hasta la solución de problemas que se abordan la matemática superior al utilizar la definición operacional de dichos conceptos en este nivel.

El tomar la opción de exponer estas ideas teóricamente fundamentas y parcialmente constatadas en la práctica, se hace con el propósito de contribuir a la aspiración de que los alumnos aprendan más. Para lograrlo se parte de la necesidad de perfeccionar el proceso de enseñanza-aprendizaje donde se defiende como vía insertar el modelo didáctico que se propone, de transformar la clase.

Los especialistas del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas consideran que la clase tradicional debe transformarse en una clase desarrolladora, caracterizada por: "Un profesor director y facilitador del conocimiento, conocedor de las particularidades de sus alumnos para orientarle actividades de forma diferenciada; que oriente su clase a la búsqueda y exploración del conocimiento por parte de ellos, desde posiciones reflexivas; estimule la formación de conceptos y el desarrollo de los procesos lógicos del pensamiento (análisis, síntesis, abstracción, generalización); trabaje los distintos niveles de asimilación del conocimiento (conocer, saber, saber hacer, crear); logre una adecuada interacción de lo individual con lo colectivo en el proceso de aprendizaje; vincule el contenido de aprendizaje con la práctica social y con la vida (plano vivencial); integre lo instructivo con lo educativo y estimule la zona de desarrollo potencial del grupo y de cada estudiante; lográndose de esta manera alumnos protagonista, participativo, reflexivo y constructores de su conocimiento".<sup>63</sup>

Solo en una clase desarrolladora, la computadora se convierte en un medio auxiliar heurístico y de esta forma se integra sistémicamente al resto de los componentes del proceso, modificando su rol y alcance, a partir de las relaciones mutuas que se dan en la dinámica que se establecen en el proceso con dichas condiciones.

Bajo estas concepciones, el uso de la computadora como medio de enseñanza, impacta a nivel curricular, sin variar el programa de la asignatura. Esto hace que se pase de un currículo centrado en contenidos, a uno centrado en la resolución de problemas. El empleo de la computadora permite abordarlos en contextos reales, a partir de la obtención de información o datos empíricos, para su posterior sistematización y análisis. De esta forma se posibilita el cambio y obliga a que en la resolución de problemas complejos se puedan emplear diferentes herramientas matemáticas, logrando la integración de las diversas ramas: geometría, álgebra, estadística, donde ese empleo se haga de manera natural y se potencie el proceso de búsqueda de la vía de solución.

### **2.3. Programa heurístico general para la resolución de problemas de Matemática**

En el capítulo I se abordaron los fundamentos de la heurística, expresados en principios, estrategias y reglas, así como los modelos propuestos por distintos autores para la resolución de problemas. Se particularizó en los cuatro pasos del modelo de Polya, G. y en el conjunto de reglas o impulsos heurísticos para cada uno de ellos, los que conducen a la resolución de un problema concreto. También se precisa la relación entre este modelo y los elementos heurísticos a los que se ha hecho referencia anteriormente; de ahí el programa heurístico general para la resolución de problemas, lo que se muestra esquemáticamente en el anexo 2.7.

El esquema antes mencionado muestra que el programa parte de la triada Naturaleza-Sociedad, Hombre y de ahí la **práctica** donde se dan los problemas, es decir, se parte del criterio filosófico de que todo problema (en particular los problemas que son objeto de estudio de la Matemática) se da en la práctica, "...actividad del hombre que asegura la existencia y el desarrollo de la sociedad,..."<sup>64</sup> en la interacción del hombre con la naturaleza y la sociedad. En la definición de problema se precisa que un problema es una "...situación que contempla tres elementos: objetos, características de esos objetos y relaciones entre ellos; agrupados en dos componentes: condiciones y exigencias relativas a esos elementos..." (Realidad objetiva) "...y motiva en un sujeto..." (Hombre) "...la necesidad de dar respuesta a las exigencias o



interrogantes para lo cual deberá operar con las condiciones, en el marco de su base de conocimientos...” (Teoría) “...y experiencias...” (Teoría llevada a la práctica).

La práctica también tiene otra significación para el pensamiento matemático en la resolución de problemas, al respecto Lenin, V. planteó: “Toda abstracción científica (concreta, seria, no absurda) refleja la naturaleza en la forma más profunda, verás y completa. De la percepción viva al pensamiento abstracto, y de ésta a la práctica: tal es el camino dialéctico del conocimiento de la verdad, del conocimiento de la realidad objetiva”<sup>65</sup>

Sin proponérselo tal vez, el modelo del Polya, G. recorre el camino indicado por Lenin, V.: “De la percepción viva”; **entiende el problema** (los medios auxiliares heurísticos propician esta “percepción viva”), “al pensamiento abstracto”; **haz un plan**, “y de este a la práctica”; **lleva a cabo el plan, analiza la solución.**

Siguiendo a Polya, G., el paso inicial para la resolución del programa es “entender el problema”, pero se puede asumir la que cada autor propone en este paso según el modelo elegido. En este programa heurístico general se expresa como **análisis del problema**. Para desarrollarlo se propone utilizar las reglas heurísticas analizadas en el capítulo I, las que son:

- Separa lo dado de lo buscado.
- Reformula el problema en terminología propia de la Matemática.
- Recuerda conocimientos relacionados con lo dado y lo buscado.
- Confecciona una figura de análisis.
- Busca relaciones entre los elementos dados y los buscados.
- Transforma la tesis en una expresión equivalente.
- Analiza la tesis.

El segundo paso del programa es el más difícil, identificado como **búsqueda de la idea de solución**. En el esquema este paso se representa como un rectángulo en líneas discontinuas que dentro tiene distintas alternativas. Con él se indica que cada una de ellas puede conducir a la solución del problema y por tanto, pasar a solucionarlo, terminando la búsqueda de la idea de solución.

La secuencia de las alternativas se dan en un nivel de complejidad creciente, así la primera corresponde a la aplicación del principio de reducción **¿se reduce el problema a uno ya resuelto?** Ante la afirmación a esta interrogante se produce la salida del rectángulo punteado hacia el paso de **solución del problema**.

Si el principio de reducción no es suficiente se puede probar con la analogía, de ahí la alternativa **¿existe resuelto un problema análogo?** Al igual que la anterior, con una respuesta afirmativa se da paso a la **solución del problema.**

De ser negativa cabe valorar la posibilidad de la modelación **¿se corresponde con un modelo existente?** Esta alternativa se sitúa en tercer lugar porque, pese a que la modelación es una forma de reducción, en la práctica se ha constatado que generalmente resulta más fácil para el alumno establecer la analogía entre dos problemas concretos, que reducir un problema al modelo utilizado en la resolución de otro por el nivel de abstracción de los mismos.

Ante la imposibilidad de encontrar la vía de solución mediante los principios generales se recurre a aplicar los principios especiales de **movilidad, medir y comparar o el análisis de casos límite.** Cualquiera de estos puede facilitar que se encuentre la idea de solución, o a partir de ellos reiniciar el ciclo para aplicar los principios de analogía o reducción.

Otra opción para encontrar la idea de solución es aplicar las estrategias de **paso hacia atrás y el método de Descartes o descomponer un problema en subproblemas.** Al analizar cada paso hacia atrás o cada subproblema, se reitera la aplicación de los principios de analogía o reducción en sus distintas variantes. Esto se expresa con las flechas en líneas discontinuas que indican el retorno y el reinicio del proceso.

Una vez resuelto todos los subproblemas en los que se dividió el problema o los problemas parciales generados por el paso hacia atrás, se debe producir un proceso de síntesis e integración de los problemas parciales.

No se han mencionado los principios heurísticos de inducción y generalización para la **búsqueda de la idea de solución,** los que pueden o no estar presentes para determinados problemas, porque dichos principios tienen más aplicación en las valoraciones retrospectivas y prospectivas de la solución.

Adjunto a la **búsqueda de la idea de solución,** e interactuando con el proceso que se modela, aparecen las **reglas heurísticas** que están presentes en todo lo descrito y la **ampliación de la base de conocimientos para superar el reto que propone el problema.** Este último aspecto, pocas veces es tomado en consideración para la resolución de problemas, porque la heurística solo se puede aplicar sobre la base de lo conocido, de ahí que en la definición de problema se considere que para dar la respuesta deseada el sujeto que pretende resolver el problema "...deberá operar con las condiciones, en el marco de su base de conocimientos y experiencias...".

El siguiente paso del programa que se analiza coincide con el tercero del modelo de Polya, G., **solución del problema**, y con el casi siempre olvidado cuarto pasos, **valoraciones retrospectivas y evaluación de la solución**. De esta forma se cierra el ciclo práctica-teoría-práctica.

En el programa heurístico general para la resolución de problemas de Matemática se destacan cuatro flechas con doble sentido que parten de las **valoraciones retrospectivas y evaluación de la solución**. Las tres primeras relacionan estas valoraciones con: la **práctica**, como constatación y valoración del resultado alcanzado, las **reglas heurísticas** empleadas y la **búsqueda de la idea de solución**. El análisis de estas interacciones es fundamental para: reflexionar y perfeccionar el resultado alcanzado, la búsqueda de nuevas vías de solución, la generalización del métodos empleado, la determinación de nuevos algoritmos así como para la adquisición de nuevos conocimientos y experiencias que sean la base para la aplicación de la heurística a la resolución de otros problemas.

La cuarta flecha va al inicio, donde se valora en qué medida el análisis inicial del problema incidió en la búsqueda de la idea de solución. Finalmente, el problema resuelto se incorpora a la práctica y a partir de él se pueden generar nuevos problemas.

#### **2.4. Redimensionamiento del modelo de Polya, G. por el empleo de la computadora como medio auxiliar heurístico**

En el capítulo I, al precisar los elementos teóricos "...se asume la posición de tomar el modelo de Polya, G. como paradigma, porque siendo clásico, mantiene su vigencia y simplicidad, constituye el pivote sobre el cual, criticándolo o tratándolo de superar giran todos los demás." Por tales motivos es que en este epígrafe se revela una de las aristas de los cambios que, según Torres, P., se deben producir en los componentes del proceso al introducir la computadora como medio.

Esta arista se refiere a la interrelación entre el método, modelo de Polya, G. para resolver problemas, y el medio, computadora como medio auxiliar heurístico, de modo tal que se redimensiona el mencionado modelo al tratarse bajo la óptica de las posibilidades que brinda el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática asistida por computadora y las tendencias actuales de su didáctica. También se contextualiza en las condiciones y objetivos del proceso de enseñanza-aprendizaje de esta ciencia en el nivel preuniversitario cubano.

En el epígrafe 1.1.3, se enunciaron y describieron las cuatro etapas que dirigen la acción de quien se enfrenta a un problema, dadas por Polya, G. en su obra cumbre How to solve it?, con el fin de ayudarlo a

eliminar las discrepancias entre el objeto del problema y la solución de este. Para cada una de estas etapas propone un conjunto de preguntas, que dirige el proceso de solución, las que están resumidas en la tabla del anexo 1.8. También en el mismo epígrafe se hace un análisis de los ocho modelos más referenciados en la literatura internacional y su relación con el modelo de Polya, G.. Por tal motivo, cualquier estudio que se haga sobre este modelo, se puede transferirse a los restantes modelos tomando como base la referida tabla.

En el anexo 2.8 se presenta el esquema que resume las ideas que se expondrán sobre las consecuencias que tiene para el modelo de Polya, G. el empleo de la computadora, especialmente como medio auxiliar heurístico. El esquema de exposición se presenta en dos columnas paralelas; a la izquierda, las etapas del modelo de Polya, G. y los elementos que la conforman y a la derecha, las posibilidades que brinda la tecnología informática para la realización de las acciones del modelo de Polya, G.. El esquema se inicia con los tres elementos: Naturaleza-Sociedad, Hombre y Práctica a los que se hizo referencia en la explicación del programa heurístico general para la resolución de problemas de Matemática.

Tras el planteamiento del problema y decidido el resolutor a resolverlo, se da a la tarea de la búsqueda de la solución, teniendo como primer y más importante paso, el que se enuncia por "entender el problema", donde se decide prácticamente la solución del mismo. Entre las reglas o impulsos heurísticos propuestas por Polya, G. para este hay una casi inmediata: "dibuja una figura", si esto es posible, el esquema lleva a la columna de la derecha: "utiliza un asistente como el Geometra o el Cabri. La aplicación de los principios heurísticos especiales de movilidad, medir y comparar y análisis de casos extremos pueden dar respuestas a las preguntas que constituyen las reglas heurísticas en esta etapa.

El proceso de constatación de las condiciones del problema para determinar si las mismas son, necesarias, suficientes, insuficientes o redundantes se puede hacer mediante el empleo de diversas aplicaciones informáticas, así, una tabla adecuadamente elaborada en Excel con los datos numéricos del problema puede evidenciar contradicciones o redundancias o también reflejar el comportamiento de los datos y los resultados cuando estos toman valores extremos.

Para el caso de los problemas donde intervengan funciones, el Derive propicia el gráfico de las mismas como se valoró en el apartado anterior y permite también analizar el comportamiento de los datos en las condiciones del problema.

Por su parte el Eureka, por las facilidades que brinda para la búsqueda de la información, puede ser fuente de análisis y explicación teórica de posibles contradicciones entre los datos del problema y la teoría existente. Ejemplo: en un problema se da en los datos las longitudes de los lados de un triángulo y estas se corresponden con los valores 8 cm., 6 cm. y 15 cm. respectivamente, si el alumno no es capaz de detectar el error, un primer intento "experimental" puede ser el intento de construir el triángulo con el asistente de geometría dinámica, al no poderlo hacer, un segundo paso sería buscar en el Eureka la información teórica relativa a los triángulos que le permita explicar lo observado, en este caso, las condiciones de la desigualdad triangular. Lo expuesto constituye solo una propuesta de las innumerables posibilidades que existen para utilizar la computadora en la etapa de análisis de un problema.

La propuesta de introducir una notación clara para plantear el problema (reformular el problema según otros modelos) y la orientación enfática de escribir en forma separada las partes del problema, en condiciones y exigencias, permite emplear un editor de texto, lo que posibilita almacenar la información de lo más significativo correspondiente a cada problema resuelto.

Al finalizar cada una de las etapas, en el modelo de Polya, G. redimensionado, se precisa cuál es el resultado que se debe alcanzar. Con esto se pretende subsanar la deficiencia que desde el punto de vista del autor tienen todos los modelos de resolución de problemas, al no precisar qué resultados se deben alcanzar en cada etapa para que al menos en los inicios, estos resultados sirvan de guía, de control al profesor y de autocontrol al alumno.

Para la etapa de **comprender el problema**, los cuatro resultados parciales más significativos a alcanzar son:

1. Los datos cualitativos y cuantitativos, así como las condiciones del problema.
2. Las incógnitas y el resultado al que se debe llegar.
3. La relación que existe entre datos e incógnitas.
4. Una reformulación del problema en lenguaje matemático.

Estos resultados deben quedar registrados y constituyen la manifestación objetiva y concreta de la tan repetida expresión **comprender el problema**. Lo propuesto es solo un acercamiento a lo deseado, pues la comprensión de un problema se da el plano introspectivo del sujeto; no es posible tener la certeza por evidencias externas. Los cuatro aspectos solicitados pueden ser considerados como indicadores que

guían al alumno en el proceso de búsqueda de la solución de un problema y al profesor en su tarea orientadora.

Sobre esta base es posible continuar el proceso de búsqueda heurística en "hacer un plan", importante etapa de organización y proyección del trabajo, para la cual Polya, G. sugiere numerosos impulsos relacionados casi todos con la necesaria búsqueda de la información.

Esta búsqueda puede comenzar en los ficheros que el alumno debe tener organizado, ficheros estos que contemplan mementos, resúmenes, compendios o libreta de notas de clases, los que diferentes autores, consideran medios auxiliares heurísticos y los profesores siempre le han orientado tener a sus alumnos. Hoy la tecnología permite tener organizado en ficheros una recopilación de teoremas, fórmulas, algoritmos, modelos y soluciones de problemas, así como las valoraciones de las vías y métodos utilizadas en la búsqueda de estas soluciones.

Diversas son las posibilidades que existen para organizar esta información de modo que sea fácil su búsqueda, pero este hábito debe formarse en los alumnos porque ante el cúmulo de información que existe en la actualidad, la organización selectiva de ésta es fundamental.

Otra opción sería ir al hiperentorno educativo Eureka u otro análogo, donde están organizados todos los contenidos correspondientes al nivel, con fácil acceso a los mismos. También las enciclopedias tipo Encarta pueden constituir búsqueda particulares para informaciones relacionadas con aspectos de cultura general. Para ello se requiere desarrollar habilidades de trabajo con estos productos.

Se puede hacer una búsqueda más especializada en las ayudas de los asistentes matemáticos, donde además de explicaciones sobre la manipulación del software se presentan informaciones elementales sobre conceptos, teoremas y en algunas ocasiones demostraciones y problemas resueltos.

En la red local se pueden hacer búsquedas de materiales complementarios, libros electrónicos, simulaciones u orientados que los profesores hayan colocado en la misma, de forma tal que contribuya a la elaboración del plan. Este tipo de materiales debe convertirse en práctica cotidiana de los profesores. Al igual que los alumnos, ellos deben crear ficheros que recojan experiencias en la resolución de problemas, búsquedas realizadas, documentos intercambiados con otros profesores, etc., como otrora lo hacían con libros, temarios de pruebas, guías de estudios e incluso clases preparadas.

Internet constituye una opción privilegiada que puede ayudar al alumno a obtener la información necesaria para hacer el plan de solución del problema. Esta búsqueda debe realizarse bajo la orientación del

profesor, ya que junto a las informaciones de calidad, existe casi el doble de páginas y sitios que no ameritan ser consultados. Hacer este proceso más óptimo que evite consultar información no deseada, es el objetivo de las WebQuests analizadas en el capítulo I.

La última opción de búsqueda que se plantea en el esquema viene dada por el empleo de software sociales que permiten la comunicación con personas que puedan ayudar en la resolución del problema y que no necesariamente pertenecen al grupo del aula. En los últimos tiempos con el desarrollo del correo y el chat el grupo se amplía y la comunicación con personas que comparten inquietudes comunes es una realidad, además, esto se ha convertido no solo en una opción de búsqueda, también es una vía para la resolución de problemas en equipos o en forma cooperativa. En lo antes expresado se muestran las posibilidades de lo que puede hacer el alumno con ayuda del profesor o con la ayuda de otro, utilizando la computadora, es decir, en una actividad de interrelación social.

Como se muestra en la figura del anexo 2.9, la tradicional interrelación, cara a cara, que se dan entre los componentes personales del proceso, sin excluirla, ahora se presenta mediada por la computadora, la que se sitúa en un vértice del triángulo para ilustrar una forma de interrelación que ya es presente en la escuela y que se abre paso como forma cotidiana en el futuro.

En estas facilidades que brinda la tecnología se puede tener un proceso en el que existe un primer nivel de trabajo -con ayuda- y que revela las potencialidades del alumno para aprender y un segundo nivel, cuando puede trabajar por sí solo, correspondiente al desarrollo ya alcanzado, ya logrado por el alumno; en cualquier circunstancia existe la distancia entre el estado actual y el deseado que Vigotsky denominó "Zona de Desarrollo Próximo", y que con computadora, o sin computadora, ha de ser tenido en cuenta por el profesor que dirige y controla el proceso de enseñanza-aprendizaje. Esta dirección y control es lo que permitirá transformar, lo que en un momento es potencial y se convierta en desarrollo real con su acción pedagógica.

Se ha mostrado una gradación del tránsito por los distintos niveles de ayuda para hacer el plan de resolución del problema, que va desde la búsqueda de los elementos necesarios en la información organizada por el alumno hasta la solicitud de ayuda al profesor o a otro alumno, para que pueda alcanzar el objetivo propuesto.

Para la elaboración de un plan Polya, G. plantea otro importante impulso heurístico, esta vez en forma de sugerencia: "podría ayudarte algún elemento auxiliar". Los asistentes matemáticos analizados y los

hiperentornos de aprendizaje son importantes elementos auxiliares. Ejemplos de ello pueden ser: una tabla que relacione datos elaborada en una hoja de cálculo. (Excel, OpenOfficeorgCalc), un asistente para graficar funciones que muestre el comportamiento de éstas (Derive) y un simulador como los que ofrece el Eureka.

Desde la etapa de **entender el problema** se ponen de manifiesto dificultades en su comprensión de modo que al llegar a esta etapa se obligue al replanteo del mismo o a resolver primero otro similar más accesible, más general, con características especiales que permitan arrojar luz sobre la posible vía de solución u otro que por su analogía con el problema planteado permita transferir el modelo de solución a este.

Pocas veces se recurre por varias razones a esta propuesta hecha por Polya, G., una de ella viene dada porque los "problemas" planteados en la clase tienen todos los elementos para que a partir de los datos y empleando una cadena casi lineal de razonamientos se llegue a la respuesta, por lo que la tarea de replantear los problemas raras veces es asumida por los alumnos. En la medida que estos problemas se acerquen a la realidad práctica, el empleo de esta regla heurística se hace más necesaria. Por otro lado, ante la imposibilidad de encontrar la vía de solución de un problema, la búsqueda de otro análogo con menor complejidad no resulta factible empleando las vías tradicionales, pero el empleo de la computadora resulta una alternativa por las posibilidades que ofrece y que han sido analizadas.

Una vez reformulado el problema o tomada la decisión de resolver primero otro problema similar, más sencillo, accesible, general, especial o análogo (por parte del alumno o por sugerencia del profesor o alguna de las personas consultadas), se puede repetir el proceso de búsqueda de la vía de solución del nuevo problema o problema transformado como se muestra en el esquema del modelo de Polya, G. redimensionado.

Antes de finalizar el análisis del redimensionamiento de este paso es conveniente acotar los nexos que tiene este con la **búsqueda de la idea de solución** del programa heurístico general para la resolución de problemas de Matemática (epígrafe 2.3). Comparando ambos se puede constatar la correspondencia entre las interrogantes expresadas en formas de reglas planteadas por Polya, G. y las alternativas de dicho programa, teniendo los principios y estrategias allí reflejadas, vías concretas de realización utilizando la computadora como medio auxiliar heurístico. Así, para aplicar los principios de analogía y reducción se requiere de información cuya búsqueda se puede realizar por las vías ya explicadas. Particularmente



importante resulta el uso de la computadora y las distintas aplicaciones sugeridas para emplear los principios de movilidad, medir y comparar y análisis de casos especiales o límites también explicados, los que puede ser retomados si se aplican estrategia heurísticas.

“La ampliación de la base de conocimiento para superar el reto que propone el problema” es un aspecto no contemplado explícitamente en el modelo de Polya, G. y que se destaca en el programa heurístico general para la resolución de problemas de Matemática haciendo uso de la computadora como medio auxiliar heurístico para lograrlo.

En las condiciones del nivel preuniversitario cubano, el Eureka facilita esta actualización de conocimientos ya que en este software se encuentra toda la teoría relativa a los contenidos de la Matemática, organizada de forma tal que facilita cualquier búsqueda que se solicite. Otra opción puede ser el uso de Intranet o de redes mayores llegando a la red de redes.

Al igual que la etapa anterior, esta concluye con un resultado: **el texto del plan elaborado destacando la sucesión de pasos que se debe seguir para darle solución al problema.**

La tercera etapa del modelo de Polya, G. es la más interesante y dinámica, **lleva a cabo el plan.** En su inicio se plantean las acciones para revisar el plan y para abordar la solución del problema. Al emplear la tecnología informática y revisar los pasos escritos en el fichero elaborado al efecto, en caso de existir errores hay que regresar a la etapa de **entender el problema**, por eso se señala como la más importante.

En el momento de **ejecutar el plan elaborado** para esta etapa, es donde se puede utilizar con mayor regularidad las aplicaciones informáticas, aunque se reduce su rol de medios auxiliares heurísticos. El esquema se explica por sí solo, pero es necesario hacer algunas precisiones:

- Los hiperentornos de aprendizaje tipo Eureka pueden ayudar para buscar y seleccionar las fórmulas necesarias o la justificación que debe darse en cada paso de ser esto necesario.
- Los asistentes matemáticos tipo Derive son ideales para al cálculo algebraico, así como el graficado y evaluación de funciones.
- Los asistentes matemáticos de geometría dinámica facilitan los gráficos, los cálculos de Geometría elemental, el estudio de lugares geométricos y las transformaciones en el plano.
- Las aplicaciones tipo Excel u otras más especializada tipo SPSS facilitan la construcción de tablas y análisis estadístico, tanto descriptivo como inferencial.

El resultado final de la etapa se resume en elaborar un informe que refleje:

- El plan seguido en la resolución del problema.
- Los cálculos realizados y la vía utilizada.
- Los resultados parciales y finales
- Las valoraciones de los resultados.

Aunque este resultado es complicado para problemas relativamente sencillos, pero si se quiere formar en los alumnos habilidades y hábitos de trabajos que le permita resolver problemas de la práctica, esto permite establecer hábitos de trabajo, que queda en manos de los profesores la gradación de las exigencias.

Finalmente el cuarto paso, **analiza la solución**. Siendo este un paso tan importante como el primero es olvidado por alumnos y profesores; varias son las razones de este "olvido", pero la principal es que todavía se pretende enseñar a resolver problema, por repetición o imitación y no está en el centro de atención la resolución de problemas sustentada en la heurística. Por la importancia de este paso se harán algunas consideraciones.

Polya, G. plantea pocas interrogantes en este paso, las dos primeras son: ¿está bien el resultado? ¿están bien los argumentos? La primera de las preguntas evidencia que el alumno debe valerse de medios propios para comprobar si sus resultados son correctos, con lo que se acerca la tarea del alumno a la de un investigador.

Al partir del criterio de que el profesor tiene la responsabilidad de responderle al alumno la pregunta de ¿cómo hacer para...? en la parte derecha del esquema se plantean tres importantes vías para que el alumno compruebe si sus resultados son correctos, las que son:

1. Comprueba la correspondencia entre el plan y los pasos desarrollados.

Si la concepción del plan de solución del problema fue correcta entonces, siguiendo los pasos se debe llegar a un resultado correcto. En caso de que estos pasos se hayan variado, es necesario analizar las causas de este cambio, pero para poder hacer este análisis, se necesita constancia de los pasos planificados (etapa 2) y los pasos ejecutados (etapa 3); de ahí la insistencia de los resultados de cada una de estas etapas.

2. Comprueba si los resultados (ver en Eureka) se corresponden con la teoría, es decir, si no hay contradicción entre resultados y teoría. En el epígrafe 2.4 ante un problema de la práctica se plantea:

“Las soluciones calculada en Derive con la opción de aproximación son:

$r = -0.07957801116$  ó  $r = 5.363857880$  como es lógico a partir de este resultado el alumno debe escoger la solución adecuada y calcular el valor correspondiente a la altura para resolver el problema”.

En este caso, al tratarse del cálculo de un radio, el valor negativo debe ser desechado aún cuando sea el resultado de resolver la ecuación correcta. La posibilidad de decidir si una solución es o no correcta no siempre es tan evidente, se puede utilizar procedimientos análogos a los sugeridos para el análisis de los datos en el primer paso del modelo, en particular el referente a la contradicción entre resultados y teoría.

3. Comprueba si los resultados son lógicos, al emplear los asistentes matemáticos antes mencionados, es decir, si se corresponden con la práctica, utiliza “juego de datos”, tomados del problema o de la práctica, incluyendo en ellos valores extremos que permitan revelar la posibilidad de generalizar o no los resultados.

Este es el punto clave de la constatación de los resultados, de ahí la doble flecha entre este paso y la inicial práctica colocada antes de comenzar la descripción del modelo de Polya, G. En la práctica se comprueban los resultados “...si la teoría se aplica con éxito en la práctica, ello significa que es válida...”<sup>66</sup>. Aunque en la vía número 2 se ha establecido una relación resultados-teoría, por la importancia de la constatación práctica de los resultados se plantea en la vía 3 y también en la anterior. Se considera la práctica como criterio de verdad, pues: “...cuando establecemos la veracidad de una determinada proposición recurriendo a la demostración lógica, nos basamos en última instancia, en la comprobación práctica de alguna tesis inicial de tal o cual teoría, tesis que, en el marco de la teoría dada, no está sujeta a comprobación especial.”<sup>67</sup>

En la evaluación final se plantea la búsqueda de otra vía de solución, de particular importancia para tener una visión amplia con distintas variantes de solución ante un problema, lo que denota dominio del contenido y habilidad para resolverlo. Este proceso de búsqueda de una nueva solución puede llevar a la segunda etapa del modelo para hacer un nuevo plan, aunque ya este no tiene que ser tan exhaustivo como el primero es digno de tomarse en consideración a la hora de valorar la complejidad del mismo comparado con la primera solución que se encontró.

Finalmente Polya, G. plantea las preguntas prospectivas ¿puedes utilizar el resultado en otro problema? ¿puedes utilizar el método de solución para resolver un problema análogo? Responderlas constituye tener

adelantado un peldaño en la resolución de un futuro problema por eso en el efecto del redimensionamiento del modelo de Polya, G. la respuesta a estas pregunta se concreta en la orientación de **“almacena las respuestas a estas preguntas en un fichero, con ellas podrás dar respuestas a interrogantes plantadas en la búsqueda de la solución al tratar de resolver otros problemas** y la correspondiente flecha la relaciona con la primera sugerencia de empleo de la informática en la etapa de hacer un plan enunciado como **“utiliza tu fichero de análisis y valoración de las soluciones dadas a problemas que has resuelto”**.

La conclusión de esta etapa es la resolución del problema de ahí que se plantea para finalizar la orden siguiente; elabora un informe en el que se refleje:

- Plan seguido en la resolución del problema.
- Cálculos realizados y vía utilizada.
- Resultados parciales y finales.
- Valoración de los resultados.

## **2.5. Portabilidad del redimensionamiento del modelo de Polya, G. a los modelos metodológicos para el tratamiento de la situaciones típicas de la Matemática**

Para la didáctica de la Matemática, elaborada por distintas personalidades del quehacer pedagógico cubano, donde se conjuga nuestra tradición pedagógica con las mejores experiencias internacionales, se plantea que en la clase de Matemática se dan como situaciones típicas el tratamiento de:

- Conceptos y definiciones
- Teoremas y sus demostraciones
- Ejercicios y problemas
- Construcciones geométricas
- Procedimientos algorítmicos

Para cada una de ellas existen propuestas de tratamientos metodológicos, expresados en:

- “.... programa heurístico general para ofrecer un resumen detallado sobre la estructuración metodológica de la formación de conceptos ...”<sup>68</sup>
- “Procesos parciales en el tratamiento de problemas”<sup>69</sup>

- "Procedimiento metodológico para el tratamiento de los procesos parciales en la resolución de ejercicios geométricos de construcción de acuerdo con el esquema básico de trabajo en un problema"<sup>70</sup>.

Cuando se analizan las etapas de estos programas, modelos, procedimiento o cualquier otra denominación, se puede observar una gran similitud con los pasos del modelo de Polya, G.. Esto hace pensar que el empleo de la computadora como medio auxiliar heurístico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, tiene las mismas consecuencias para el tratamiento de estas situaciones típicas establecidas, que las analizadas para el tratamiento de la resolución de problema, por lo que se puede establecer cierta analogía con el fin de redimensionar dichos procedimientos metodológicos.

Para expresar la idea anterior se empleará el término portabilidad, el cual es utilizado en el ámbito de la Informática para referirse a software que pueden transportarse fácilmente de un ordenador a otro con diferentes arquitecturas, al igual que existen elementos del redimensionamiento del modelo de Polya, G. que pueden adecuarse (transportarse fácilmente) a los requerimientos de los referidos programa, modelos o procedimiento de la didáctica de la Matemática por lo que ellos también resultan redimensionados.

Es indudablemente que lo antes planteado requiere de estudio y profundización para trabajos futuros, pero como concepción general es tomado por el autor como elemento constitutivo del modelo, ilustrando lo planteado con el "programa heurístico general sobre la estructuración metodológica de la formación de conceptos" siguiendo el texto "Metodología de la enseñanza de la Matemática" a los que se ha hecho referencia anteriormente.

En el anexo 2.10 se muestra el redimensionamiento del referido programa, así como en el anexo 2.11 las transformaciones que pueden hacerse, ilustradas a partir de ejemplos planteados en el referido texto para la identificación y realización de conceptos.

El programa heurístico general para la formación de conceptos tiene cuatro etapas:

1. Orientación hacia el problema.
2. Trabajo con el problema.
3. Solución del problema.
4. Consideraciones retrospectivas y perspectivas.

En la **orientación hacia el problema** hay una etapa de búsqueda de información, donde la computadora se convierte en el medio ideal, permitiendo transferir todas las posibilidades de analizadas anteriormente con este fin, así como para lograr la motivación e introducir un concepto determinado.

En la etapa del **trabajo con el problema** la tradicional "Creación de una situación de partida mediante la preparación y elaboración de objetos de análisis correspondientes al objetivo." se redimensiona mediante el uso de la computadora al plantear "la orientación y el trabajo con software seleccionado o elaborados con este propósito".

La **solución del problema** con sus etapas de establecer las características comunes y no comunes, así como formular la definición, lleva primero a escribir una primera definición a partir de las observaciones realizadas y la búsqueda de distintas definiciones que permita hacer comparaciones y valoraciones.

La etapa final, **consideraciones retrospectivas y perspectivas**, con sus amplias posibilidades para la inferencia y valoraciones de casos extremos y especiales, muestra todas las posibilidades de aplicar la computadora hasta llegar al enriquecimiento del memento informático al que se hizo referencia en el redimensionamiento del modelo de Polya, G..

Una vez elaborado el concepto se procede a la fijación, dividida en tres etapas:

- Identificar el concepto.
- Realizar el concepto.
- Aplicar el concepto.

En el anexo 2.11 se muestran los dos ejemplos que aparecen en el referido texto de metodología (páginas 306 y 307).

Sobre la identificación, además del objetivo que se persigue y el ejemplo que se plantea en el texto, se añaden las posibilidades que brinda el empleo de la computadora, en este caso en particular un software de geometría dinámica con lo que se enriquece la identificación del concepto, algunos aspectos a destacar son:

1. Se plantea construir la figura utilizando un asistente de geometría dinámica, esto implica que aún en un nivel reproductivo el alumno se relaciona con los elementos conceptuales fundamentales.
2. El planteamiento del ejercicio tradicional de identificación: "Busca en la figura ángulos inscritos, centrales y seminscritos" se amplía al exigir que los mida, posibilidad que brinda el empleo del Geometra o el Cabri.

3. Los resultados de la medición traen como consecuencia una reflexión en la interrogante "Justifica el porqué hay ángulos que tienen iguales amplitudes. Y en particular ¿por qué  $90^\circ$ ?"
4. El inciso (d) aprovecha las posibilidades del software de geometría dinámica "Mueve el punto F sobre la circunferencia hasta alcanzar una posición en la que mayor cantidad de ángulos tomen una amplitud igual a  $90^\circ$ . Justifica este hecho".
5. Los incisos e, f y g permiten ejercitar lo planteado en los incisos d y e del ejemplo clásico y además establecer otras generalizaciones a partir de mover puntos sobre la figura.

En el anexo 2.11 se muestra que el ejemplo planteado en el texto para la realización del concepto, tiene tres incisos, mientras que la adaptación hecha del mismo ejercicio a las posibilidades que brinda la computadora permite plantear 7 incisos con un mayor nivel de generalización.

Las transformaciones hechas a los ejercicios utilizados en los ejemplos, plantean la necesidad de un cambio en los que tradicionalmente aparecen en los libros de texto, para dar paso a otros con nuevas y mayores exigencias en el plano conceptual y deductivo. El empleo de la computadora resulta pernicioso para el aprendizaje de una matemática reproductiva y centrada en el cálculo, objetivo que cumplen la mayoría de estos problemas, a los que les falta el nivel de exigencia y la complejidad para que realmente se requiera el uso de la computadora en su resolución.

## **2.6. La guía formativa con una intencionalidad heurística**

En el epígrafe 1.3 se expresan las ideas fundamentales sobre la clase con software educativo, la SofTarea, las WebQuests y MiniQuests. En ellas, de una u otra forma, se sugiere la utilización de una guía orientadora, la que establecerá el sistema de acciones u operaciones que el alumno tendrá que realizar, individual o colectivamente, con el auxilio de la computadora.

Para la implementación de la representación hipotética del modelo que se propone en esta tesis, el autor asume el concepto de guía formativa dado por Gutiérrez, R. definida como: "Elaboración didáctica del profesor que centrada en los objetivos y diagnósticos de los alumnos es contentiva de la base orientadora para la realización del proceso de acciones y operaciones de las tareas para el trabajo independiente que debe realizar el alumno mediante su autoaprendizaje con vista a alcanzar los objetivos formativos propuestos".<sup>71</sup>

En el presente trabajo no se precisa un formato o estructura fija para la guía formativa, se considera que el profesor, debe tener libertad para utilizar la propuesta de Gutiérrez, R. o elegir otra siempre que esté

“centrada en los objetivos y diagnósticos de los alumnos”, teniendo como hilo conductor la intencionalidad heurística.

La definición precisa que la guía formativa “...es contentiva de la base orientadora para la realización del proceso de acciones y operaciones de las tareas para el trabajo independiente que debe realizar el alumno...”; esta base orientadora, con distintos niveles de detalles, en dependencia del diagnóstico individual y colectivo, debe corresponderse con los pasos del modelo de Polya, G. redimensionado o la portabilidad del mismo a los modelos metodológicos para el tratamiento de las situaciones típicas.

Con este fin, se estarán dando en cada momento los impulsos heurísticos necesarios para que los alumnos se apropien de los principios, reglas y estrategias heurísticas de esta forma los incorpora paulatinamente en su actividad de estudio-investigación, utilizando para ello la computadora como medio auxiliar heurístico.

La definición también acota que “...mediante su autoaprendizaje...” el alumno debe desarrollar las acciones y operaciones de las tareas propuestas. Al respecto, el profesor debe tener en cuenta que en la orientación de este autoaprendizaje ha de ponerse en juego todas las posibilidades que brinda la computadora como medio auxiliar heurístico, las que han sido expuestas en la descripción del modelo.

Finalmente, respecto a la meta, en la definición se plantea “...alcanzar los objetivos formativos propuestos...”; para este caso, los objetivos formativos están declarados en el programa de estudio y la aplicación de la instrucción heurística contribuye a alcanzarlos como se ejemplifica a continuación:

- La analogía, la generalización, la diferenciación de casos contribuyen al objetivo: “Demostrar una concepción científica del mundo y una cultura político - ideológica a través del modo en que se argumentan los contenidos matemáticos, la consecuencia con que se sostienen los principios de la batalla de ideas y las ideas de Martí, el Che y Fidel, la forma en que se defienden las conquistas del socialismo cubano, y la profundidad con que se rechaza al capitalismo y al poder hegemónico del imperialismo yanqui.”<sup>72</sup>
- Los principios heurísticos relacionados en el párrafo anterior, unidos a la modelación, la reducción de un problema a otro ya resuelto, las estrategias de descomponer un problema en subproblemas, el paso hacia delante y hacia atrás contribuyen al objetivo: “Adoptar decisiones responsables en su vida personal, familiar y social sobre la base de la comprensión de las necesidades vitales del país, la aplicación de procesos del pensamiento, técnicas y estrategias de trabajo y la utilización de conceptos, relaciones y procedimientos de la estadística descriptiva, la aritmética, el álgebra, la geometría y la



trigonometría.”<sup>73</sup> En este objetivo en particular se hace referencia a la estadística descriptiva que ha tenido un tratamiento especial mediante el empleo del Excel.

- El modelo de Polya, G. redimensionado contribuye al objetivo: “Formular y resolver problemas relacionados con el desarrollo político, económico y social local, nacional, regional y mundial y con fenómenos y procesos científico-ambientales, que requieran transferir conocimientos y habilidades aritméticas, algebraicas, geométricas y trigonométricas a diferentes contextos y promuevan el desarrollo de la imaginación, de modos de la actividad mental, de sentimientos y actitudes, que le permitan ser útiles a la sociedad y asumir conductas revolucionarias y responsables ante la vida.”<sup>74</sup>
- Las precisiones dadas en este epígrafe sobre la guía formativa con una intencionalidad heurística, en la que también debe tenerse en cuenta el modelo heurístico general para resolver problemas, contribuyen al objetivo: “Desarrollar hábitos de estudio y técnicas para la adquisición independiente de nuevos conocimientos y la racionalización del trabajo mental con ayuda de los recursos de las tecnologías de la informática y la comunicación, que le permitan la superación permanente y la orientación en el entorno natural, productivo y social donde se desenvuelve.”<sup>75</sup>

La guía formativa como parte del modelo didáctico sustentado en la heurística para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática asistida por computadora, debe tener en cuenta los **criterios teóricos** que se exponen a continuación:

#### **I. La orientación investigadora de la educación científica.**

El fin de la didáctica, desde su propia etimología, se identifica con el arte o la ciencia del descubrimiento, o con las vías y métodos que conducen al descubrimiento. Bajo esta concepción, la orientación investigadora debe estar presente en la guía formativa, la que debe comenzar por la necesaria motivación de resolver un problema, de indagar o profundizar sobre el objeto de estudio, para posteriormente dar la correspondiente orientación investigativa de la tarea planteada con los impulsos heurísticos para llevarla a feliz término.

La función esencial del llamado método investigativo, en el proceso de enseñanza-aprendizaje, es enseñar a realizar independientemente el proceso del conocimiento. Es el método de organización de la actividad de búsqueda creadora de los alumnos, dirigido a solucionar problemas verdaderos. La intencionalidad heurística de la guía formativa debe cumplir esta función.

Por otro lado, el método investigativo ofrece conocimientos integrales, que se hacen perfectamente conscientes y que pueden aplicarse de un modo operativo y flexible. El carácter científico de la actividad

se manifiesta en la planificación del proceso de búsqueda, en la interpretación, en la articulación de los elementos que se van hallando y en la exposición lógica de los resultados.

La orientación hacia la planificación del proceso de búsqueda es la que debe estar explícitamente detallada en la guía formativa, para lograr como meta la interpretación y exposición lógica de los resultados.

Lo antes expresado presupone desarrollar habilidades para la búsqueda y procesamiento de la información orientadas a un objetivo. Según Danilov y Skatkin, estas habilidades exigen:

- tener en cuenta todos los datos, correlacionarlos entre sí y establecer nexos,
- revelar los datos que sobran y faltan,
- correlacionar los pasos en la búsqueda de la solución, entre sí y con lo pedido,
- demostrar cada conclusión,
- procurar que se agoten todas las posibles soluciones, comprobaciones y determinar su eficiencia,
- agotar todas las posibles conclusiones de conformidad con lo pedido,
- verificar la solución y su adecuación a la exigencia de la tarea.

Todas estas exigencias son inherentes a la didáctica, la que se manifiesta al asumir los métodos de enseñanza de esta ciencia como modelo teórico generalizador, para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en el nivel preuniversitario.

Estas actividades, estructuradas de forma sistémica, deben potenciar la adquisición independiente de conocimientos y habilidades para el lograr el objetivo que se conoce como “aprender a aprender”.

## **II. La utilización de la computadora como medio auxiliar heurístico.**

La guía formativa con intencionalidad heurística debe propiciar que la orientación investigadora de la educación científica antes mencionada, se haga empleando la computadora como medio auxiliar heurístico. En este sentido se ha de tomar como punto de partida la formulación adecuada del problema o de la situación objeto de estudio, de forma tal que en el proceso de resolución surja la necesidad de emplear este medio. Por tal motivo se hace imprescindible valorar, y de ser necesarios reformular, los problemas que hasta ahora se han resuelto sin su auxilio.

En la guía formativa con intencionalidad heurística, junto con las orientaciones para la planificación del proceso de búsqueda de la solución de un problema, debe estar explícitamente detallada, en cada una de las acciones y operaciones, cómo el alumno va a operar con la computadora para darle respuesta a las

mismas. Las referidas acciones y operaciones se expresarán a través de impulsos heurísticos para que, como medio auxiliares heurísticos, facilite "...la aplicación de las reglas, principios y estrategias heurísticas en dicho proceso...".

En todos los casos se potenciará el aprovechamiento óptimo de los productos informáticos para la búsqueda y procesamiento de la información, las que fueron analizadas en el epígrafe 2 de este capítulo. Con esto se pretende que el alumno domine las posibilidades que brindan cada uno de ellos, los asocie en su accionar con los principios y reglas heurísticas, y los aplique en la resolución de un problema según los pasos del modelo de Polya, G. redimensionado. Es en este sentido que la computadora se empleará como medio auxiliar heurístico, de manera integradora en el proceso de resolución de un problema.

El uso de la computadora como medio auxiliar heurístico en la guía formativa, debe incentivar la cooperación en la búsqueda de la información, el intercambio de ella, el trabajo en grupo, el respeto por la propiedad intelectual y el rechazo al plagio o al no hacer referencia a las fuentes de donde fueron tomadas.

### **III. El programa heurístico general para la resolución de problemas de Matemática y el modelo de Polya, G. redimensionado como objetivo, contenido y método en la resolución de problemas.**

En la fundamentación pedagógica del presente trabajo se precisa que "...el autor asume la tendencia de enseñar a los alumnos a resolver problemas en un trabajo paralelo al desarrollo del curso de Matemática...". Bajo tal concepción, la heurística "...es objetivo del proceso de enseñanza-aprendizaje como fin a alcanzar, es contenido de ella y es método al aplicar sus principios, reglas y estrategias en su accionar."

La guía formativa con intencionalidad heurística ha de ser reflejo de lo antes expresado. Ella, de forma consciente y planificada, debe "...enseñar a los alumnos a resolver problemas..." mediante el programa heurístico general para la resolución de problemas de Matemática y el modelo de Polya, G. redimensionado. Ello conlleva a que se destaque de un modo claro y preciso los elementos heurísticos que se ponen de manifiesto en cada uno; lo que se asume como una instrucción heurística. Este proceso transcurre "...en un trabajo paralelo al desarrollo del curso" de Matemática.

Es necesario hacer explícito en la guía formativa el modelo de Polya, G. redimensionado así como de las acciones que propone el programa heurístico general para la resolución de problemas de Matemática, de forma tal que el alumno se apropie de ellos y los aplique de forma consciente al enfrentar un problema.

En tal sentido es que el programa heurístico general para la resolución de problemas de Matemática y el modelo de Polya, G. redimensionado serán "...objetivo del proceso de enseñanza-aprendizaje como fin a alcanzar...", "...contenido de ella..." y "...método al aplicar sus principios, reglas y estrategias en..." en la resolución de problemas.

#### **IV. El enfoque sistémico del uso de los recursos informáticos, de los temas matemáticos y de la instrucción heurística.**

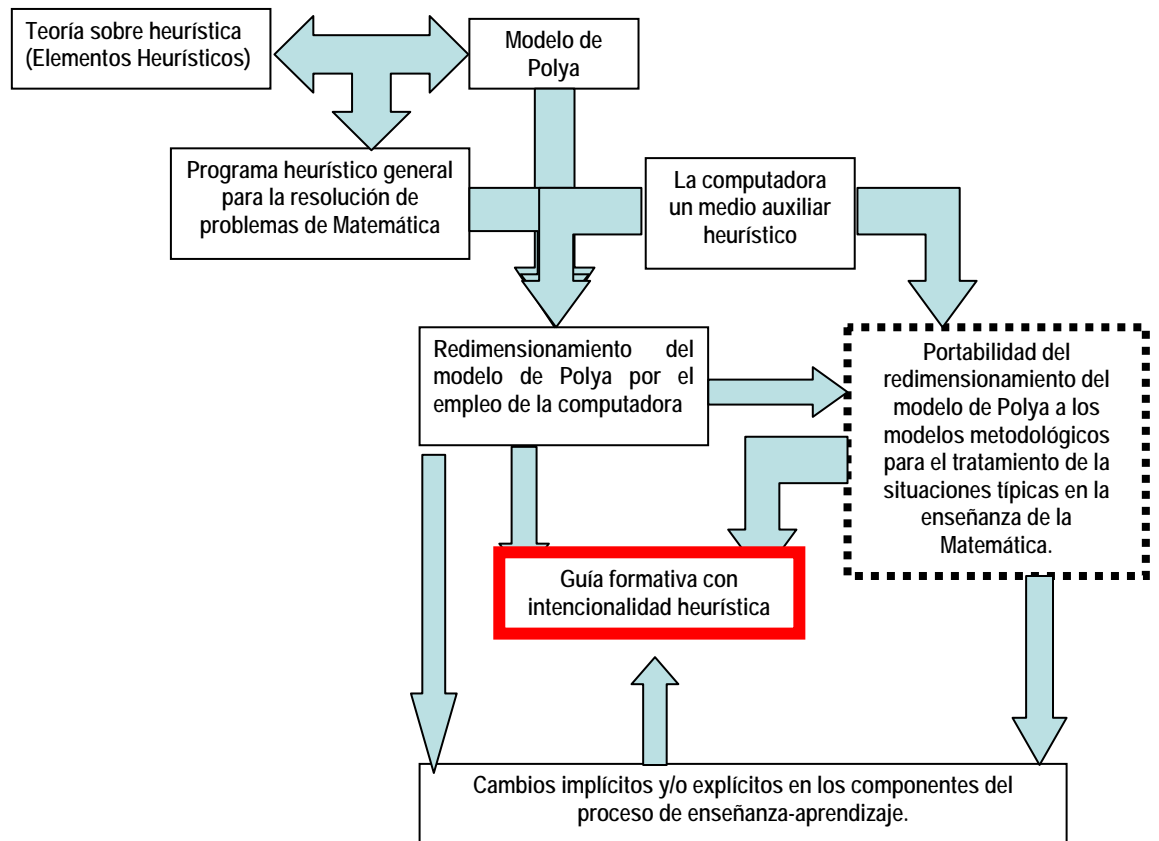
Al enfrentar la tarea de elaborar la guía formativa debe hacerse desde una concepción sistémica, con las tareas armónicamente concatenadas, donde se ponga de manifiesto la aplicación de los distintos principios, reglas y estrategias heurísticas. De manera que en un aprendizaje en espiral el alumno se apropie del proceder heurístico como vía de investigación y resolución de problemas, del sistema de contenidos de la Matemática y su aplicación a la resolución de problemas y del uso de las herramientas informáticas necesarias para enfrentar las tareas que se le plantean, desde la escuela y para la vida. Solo de esta manera es posible lograr como meta final que el "...alumno se apropie del modelo de Polya, G. redimensionado y de las acciones que se proponen el programa heurístico general para la resolución de problemas de Matemática, de forma tal que la aplique de forma consciente al enfrentar un problema...", aspecto planteado al analizar el criterio anterior.

Por lo antes planteado, se ha insistido en la necesidad de estimular el uso de los recursos informáticos en toda su variedad, los que comprenden: la búsqueda de la información en los software educativos y otras fuentes de información, los asistentes matemáticos para la inferencia de propiedades o constatación de resultados y el empleo de los software sociales.

Aunque la resolución de problemas constituye el objetivo esencial de la Matemática, la guía formativa no puede reducirse al planteamiento y resolución de ellos. Es posible seguir los planteamientos de portabilidad de las ideas esenciales empleadas en el modelo redimensionado de Polya, G. para el tratamiento de otras situaciones típicas, al orientar el tratamiento heurístico de las mismas.

De todo lo expuesto se puede concluir que la guía formativa con intencionalidad heurística es el soporte didáctico-material que permite concretar en la práctica la propuesta, en ella se le da tratamiento a todos los elementos del modelo didáctico sustentado en la heurística para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática asistida por computadora.

## 2.7. Representación general del modelo



En los epígrafes precedentes se han descritos los elementos que constituyen el modelo y se han revelado las relaciones entre ellos, lo cual se representa de forma sintética en el esquema anterior. Primeramente se muestran las bases que sustentan el modelo; la **teoría sobre la heurística**, expresada en los medios, principios, reglas y estrategias, así como el **modelo de Polya, G.** para la resolución de problemas.

Del análisis y sistematización de los elementos del modelo anteriormente referidos se ha llegado al **programa heurístico general para la resolución de problemas de Matemática**. En este se revela la presencia de los elementos heurísticos en los pasos del modelo de Polya, G., donde se destaca en el segundo paso de este programa una sucesión de alternativas, lógicamente estructuradas, que expresan el proceso de búsqueda de la vía de solución de un problema, a diferencia del enfoque de orientación didáctica que tienen las reglas o impulsos heurísticos planteados por Polya, G.

La concepción del empleo de **la computadora como medio auxiliar heurístico** incorpora al modelo las distintas posibilidades de este medio para la búsqueda y procesamiento de la información analizada en el epígrafe 2.2.

Al incorporar la computadora al proceso de enseñanza-aprendizaje como medio auxiliar heurístico, le imprime una dinámica tal que provoca el necesario **redimensionamiento del modelo de Polya, G.**, lo cual se analiza detalladamente en el epígrafe 2.4, esto trasciende tanto en su manifestación externa como en la concepción interna y trae consecuencias para los componentes del proceso. Este redimensionamiento constituye el componente fundamental del modelo por la importancia que tiene la resolución de problemas para dicho proceso en la Matemática.

Lo analizado tiene consecuencias para el tratamiento de otras situaciones típicas de la Matemática, para las que existen programas heurísticos y modelos con componentes análogos al modelo de Polya, G. y están fundamentados teóricamente y constatados en la práctica. Esto permite redimensionarlos mediante procedimientos similares a los empleados en el modelo para la resolución de problemas.

En el esquema anterior representativo del modelo, se observa que la **portabilidad del redimensionamiento del modelo de Polya, G. a los modelos metodológicos para el tratamiento de las situaciones típicas de la Matemática**, se ha enmarcado en un rectángulo con líneas discontinuas. Con ello se indica que, aunque es un elemento constitutivo del modelo, requiere de análisis, estudio y profundización, ya que en el epígrafe 2.5 solo se muestra la posible portabilidad de los procedimientos utilizados y se ha presentado solamente el redimensionamiento del programa heurístico para el tratamiento de la formación de concepto.

Los redimensionamiento antes mencionados provocan **cambios implícitos y/o explícitos en los componentes del proceso de enseñanza-aprendizaje**, los que han sido analizados a lo largo del presente trabajo.

La concreción del modelo para su aplicación práctica se pone de manifiesto en la **guía formativa con intencionalidad heurística**, tal como se ha expresado en el epígrafe 2.6.

En resumen, se presenta el modelo didáctico sustentado en la heurística para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática asistida por computadora en el nivel preuniversitario, sus fundamentos teóricos, el programa heurístico general para la resolución de problemas de esta asignatura como resultado de la sistematización de dichos fundamentos, el redimensionamiento del modelo de Polya, G. y su portabilidad a otras situaciones típicas, al introducirse la computadora como medio auxiliar heurístico, así como su impacto en los componentes del proceso de enseñanza-aprendizaje, hasta llegar a la guía formativa con intencionalidad heurística como una de las formas que posibilita la aplicación de este modelo en la práctica.

# *Capítulo III*

## CAPÍTULO III. EVALUACIÓN DEL MODELO DIDÁCTICO SUSTENTADO EN LA HEURÍSTICA PARA EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA ASISTIDA POR COMPUTADORA

"Los "puristas" demandan del divorcio entre los enfoques cuantitativo y cualitativo, como si el viejo enemigo del positivismo atacara de nuevo, aduciendo que aquello llamado objetividad no existe..."

Roberto Hernández Sampieri

### 3.1. Preliminares

En la evaluación objetiva del modelo didáctico sustentado en la heurística para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática asistida por computadora en el nivel preuniversitario se buscaron diferentes fuentes de valoración y la combinación de métodos .aplicados en diferentes momentos del proceso investigativo, lo que permitió perfeccionar .el modelo que se elabora, además de evaluar resultados parciales.

Las principales fuentes de evaluación fueron:

1. Los resultados del curso de postgrado desarrollado con profesores de los preuniversitarios de ciencias pedagógicas de la Ciudad Escolar "Ernesto Guevara".
2. Las valoraciones de los expertos, entendidos estos como "...un individuo, grupo de personas u organizaciones capaces de ofrecer con un máximo de competencia, valoraciones conclusivas sobre un determinado problema, hacer pronósticos reales y objetivos sobre efecto, aplicabilidad, viabilidad, y relevancia que pueda tener en la práctica la solución que se propone y brindar recomendaciones de qué hacer para perfeccionarla."<sup>76</sup> En este trabajo .se establece la diferencia entre:
  - a. Expertos comprometidos, aquellos que cumplen condiciones establecidas para expertos y que por su participación en el proceso de investigación pudieran estar identificados o parcializados con la propuesta, pero que por su experiencia y profesionalidad deben ser tomados en consideración.
  - b. Expertos no comprometidos, los que coinciden con la definición de expertos que se ha dado y que no han participado en el proceso de la investigación, conociendo de ella por la información que el autor le presenta como resultado científico.
3. Los criterios de los "...actores sociales, esos grupos o conglomerados humanos que se asocian, consciente o inconscientemente, porque tienen objetivos e intereses comunes en función de su rol en la sociedad y que ejercen influencia en áreas en la que tienen determinado grado de dirección y poder,



...esos metodólogos, jefes de departamentos directores, decanos, etc., que en ocasiones tomamos como expertos, pero que realmente tienen otro rol, que hay que diferenciar, porque son ellos, en última instancia, los que pueden decidir con criterios de dirección si un modelo, metodología o estrategia puede o no aplicarse, pero hasta el momento, o no son tomados en consideración, o son tomados en el rol de expertos,..."<sup>77</sup>

4. Las experiencias más significativas de profesores que participaron en el curso de postgrado impartido y que realizaron en sus aulas aplicaciones parciales del modelo propuesto.
5. Los resultados cuantitativos y cualitativos de los alumnos que participaron en esta experiencia.
6. Las valoraciones de los alumnos que participaron en las experiencias antes mencionadas.
7. Las opiniones de los padres acerca de estas experiencias en la que participaron sus hijos.
8. Los resultados alcanzados por los diplomantes, que desarrollaron trabajos relacionados con temas sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática asistida por computadora y que están dentro del proyecto de investigación al que pertenece la presente tesis.

Los resultados de estas evaluaciones se organizaron en:

1. Proyección y resultados del curso de postgrado donde se impartieron las ideas esenciales del modelo.
2. Resultados de las valoraciones prospectivas de los expertos.
3. Las valoraciones cualitativas de las intervenciones en la práctica escolar como complemento de las valoraciones de los expertos.

### **3.2. Proyección y resultados del curso de postgrado**

#### **➤ Constatación de necesidades**

Como se hizo referencia en la introducción, la primera constatación de necesidades se hizo durante la determinación del problema que se estudia, al revisar la información documental de los informes de la comisión de Matemática como asignatura priorizada que en los últimos dos años se ha planteado de una u otra forma la necesidad de utilizar los software educativos y asistentes matemáticos en la clase de Matemática y se atribuye esta deficiencia a tres causas fundamentales:

1. La falta de preparación de los profesores para utilizar los software educativos y asistentes matemáticos.
2. La falta de orientaciones metodológicas precisas para el uso de estas herramientas informáticas, acompañadas de materiales que apoyen el trabajo de los profesores.

3. La falta de un trabajo metodológico en los departamentos encaminados al uso de los software de la colección Futuro y los asistentes matemáticos.

A partir de este diagnóstico elemental, se comienza un trabajo de orientación metodológica en los dos departamentos de Ciencias Exactas de los institutos preuniversitarios de ciencias pedagógicas de la Ciudad Escolar “Ernesto Guevara”, exponiendo y debatiendo en estos colectivos las principales ideas del modelo que se tenía elaborado sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática asistida por computadora, así como la trascendencia de estas en las otras asignaturas que se imparten en esos departamentos: Computación y Física.

La idea original de desarrollar un trabajo metodológico para que los profesores transformaran la clase y a través de ella constatar los resultados que tendría la aplicación práctica del modelo propuesto, tuvo que ser reorientada hacia un curso de postgrado, debido a las dificultades que presentan los profesores en cuanto al dominio y empleo de los asistentes matemáticos y software de la colección Futuro, por lo que fue necesario proceder a un diagnóstico fino de las necesidades del colectivo con el que se trabajaba.

Este diagnóstico se realiza mediante entrevistas a los actores: jefes de departamentos, subdirectores y directores de los respectivos institutos preuniversitarios de ciencias pedagógicas, directivos de la Ciudad Escolar (Ver anexo 3.1) y a los profesores (Ver anexo 3.2), siguiendo lo planteado por Bilbao, M. en su tesis de maestría respecto a la determinación de necesidades para implementar un curso de postgrado.

Los resultados de las entrevistas a los actores se pueden sintetizar en:

1. En las actividades docentes controladas se aprecian carencias en:
  - El uso de la computadora en la clase y cuando se emplean no se hace en forma sistémica.
  - La orientación de la actividad, la que no se hace con toda la precisión requerida ni se explotan las posibilidades del software educativo.
  - El uso de los asistentes matemáticos y sistemas de aplicación.
2. Sobre la preparación informática de los profesores se constatan:
  - Potencialidades en cuanto al dominio de los contenidos básicos necesarios para manipular la computadora.
  - Debilidades en cuanto al dominio de los asistentes matemáticos y software educativo.
3. Las principales causas por las que los profesores no utilizan la informática están dadas por debilidades en:

- La orientación metodológica sobre el uso de la computadora como recursos didácticos en el proceso de enseñanza-aprendizaje en general y de la Matemática en particular.
  - El trabajo metodológico departamental sobre el uso de la computadora como medio de enseñanza.
  - La orientación explícita del empleo de los software educativos y asistentes matemáticos desde las videoclases.
  - La preparación de los profesores para utilizar la computadora en la resolución de los problemas con una intencionalidad heurística en su labor cotidiana.
4. Las principales necesidades del departamento y de los profesores con respecto la proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática asistida por computadora están encaminadas a:
- Capacitación de los profesores en el uso del software educativo, asistentes matemáticos y sistemas de aplicación con el objetivo de demostrar las posibilidades que ofrecen los mismos para la Matemática y la resolución de problemas.
  - Preparación metodológica de los profesores encaminada a insertar de una forma coherente y sistémica la computadora en sus clases.

Las entrevistas a los profesores se puede sintetizar en:

En el anexo 3.3 se muestran las tablas y gráficas con el procesamiento de las entrevistas a los profesores y de ellas se infiere que:

- I. Los profesores poseen una adecuada formación informática básica: sistema operativo, procesadores de textos, presentaciones electrónicas. Más del 45,00% recibieron estos contenidos en el pregrado y más del 35,00% en postgrado, mientras que aproximadamente el 16,00% declara poseer estos conocimientos a partir de la práctica y la autosuperación.
- II. Los asistentes matemáticos no han sido estudiados por los profesores y en cuanto al software educativo, o no lo han estudiado o lo han hecho en forma autodidacta.
- III. Al analizar las Gráficas B, C y D se puede observar que las mayores deficiencias se encuentran en la navegación por páginas Web, compactar y descompactar información, así como imprimir documentos.
- IV. En cuanto a los tabuladores electrónicos sus conocimientos están limitados a la construcción de tablas y algunos tipos de gráficos, no dominan el empleo de fórmulas matemáticas y estadísticas y

desconocen las posibilidades de análisis de datos, tablas y gráficos dinámicos, en esto último se incluyen los profesores de Computación. (Ver Gráfica G, anexo 3.3).

- V. No dominan el trabajo con asistentes matemáticos de tratamiento algebraico, gráfico y geometría dinámica.(Ver Gráficas F y H anexo 3.3)
- VI. Aunque dominan los aspectos esenciales de los software de la colección Futuro, no tienen un conocimiento del modelo pedagógico que los sustentan, su estructura general, una concepción de cómo utilizarlo en los distintos momentos del proceso de enseñanza- aprendizaje, ni un dominio de sus posibilidades.
- VII. En cuanto a las insatisfacciones de los profesores (Ver gráfica I, anexo 3.3), respecto a sus conocimientos informáticos, manifiestan que las mismas están en los fundamentos de la informática educativa, el dominio de los software educativos y el trabajo con los asistentes matemáticos, de geometría dinámica y tratamiento de problemas algebraicos, funciones y gráficos. Esta apreciación de los profesores se corresponde con lo planteado en las Gráficas A-H del anexo 3.3.

Con la determinación de necesidades, insuficiencias e insatisfacciones de los profesores, la preparación metodológica iniciada se transformó en un curso de postgrado que siguiendo el modelo propuesto del anexo 3.4, queda plasmado en el programa que se muestra en el anexo 3.5.

Otras indagaciones con los profesores permiten recopilar información complementaria para la impartición del postgrado orientado hacia aspectos de particular importancia. Algunos de ellos son:

- VIII. Todos los profesores manifestaron estar muy dispuestos a aprender informática educativa.
- IX. En cuanto a las posibilidades de tiempo para aprender Informática un 74,00% dijo tener posibilidades y un 26,00% expresó tener pocas posibilidades.
- X. Sobre los software educativos que conocían todos mencionaban la colección Futuro y de asistentes matemáticos un 23,00% mencionó al Geometra.

En los temas de la asignatura donde utilizan los software no hay respuesta, algunos hacen referencia a temas donde se pudiera utilizar, señalando la geometría como uno de los principales, pero señalan que no los utilizan.

- XI. Los momentos de la clase dónde pueden utilizar los software, todos coincide los utilizan para la motivación y la fijación de nuevo contenido, tres seleccionan además el aseguramiento del nivel de

partida y ninguno marca la opción de orientación hacia el objetivo ni la introducción de nuevo contenido.

XII. Los cinco aspectos positivos que influyen en el uso de los software educativo en el nivel preuniversitario señalados son:

- Facilita la ejercitación de contenidos.
- Desarrolla habilidades informáticas.
- Motiva a los alumnos.
- Ayudan al desarrollo de contenidos.
- Facilitan la relación intermaterias.

Como las cinco dificultades los profesores plantean:

- La Preparación de los profesores.
- Limitado acceso a los laboratorios.
- Escaso trabajo metodológico para orientar profesores en ejercicio y formación.
- Faltan software por instalar.
- Aunque se menciona el uso de la computadora en los programas de estudios, no aparece declarado su uso como una prioridad.

Esta información fue constatada con la observación directa y se pudo comprobar la veracidad de lo planteado, aunque el punto dos relativo al limitado acceso a los laboratorios, responde más a un problema organizativo que a una situación de real disponibilidad.

XIV. Todos los profesores coinciden en que los software educativos favorecen la clase.

XV. Las causas que más se destacan por lo que no los utilizan en las clases son:

1. No estar capacitado para usarlos
2. Falta tiempo para usarlo en la clase y cumplir en tiempo las exigencias de los programas.

XVI. Las cinco fortalezas de la preparación de los profesores identificadas por estos para la incorporación de los software al proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemáticas son:

1. Dominio de las habilidades informáticas elementales.
2. Dominio de los contenidos de la Matemática.
3. Deseos de aprender.
4. Motivación para utilizarlo.

El dominio de las habilidades informáticas elementales son reveladas en la determinación de las insuficiencias. El dominio de los contenidos está dado por la experiencia del claustro y los deseos de aprender y motivación para utilizar los software se han puesto de manifiesto en todo momento.

XVII. Las cinco debilidades para la preparación para la incorporación de los software al proceso de enseñanza-aprendizaje:

1. Falta de tiempo al impartir las clases.
2. Necesidades de laboratorios.
3. Falta de preparación metodológica.
4. Falta de tiempo para el estudio de los profesores.

Como puede observarse estas debilidades son reiteraciones de las planteadas anteriormente.

XVIII. La mayoría de los profesores consideran que las orientaciones para el uso de los software son ambiguas y que no existen especificaciones de cómo integrar la clase televisiva a la clase empleando los software educativos.

XIX. Los pocos profesores que opinan sobre aspectos a cambiar en los software (el 13,00%) consideran que pueden cambiarse:

1. Aumentar la variedad en los ejercicios.
2. Dar posibilidades de que los maestros incorporen ejercicios según el diagnóstico de sus alumnos.
3. Mejorar el equipamiento existente y las conexiones en redes en las escuelas para que los software se ejecuten con todas su posibilidades.

XIII. Solo dos profesores mencionan la Enciclopedia Encarta como software utilizado diferente de la colección Futuro.

#### ➤ **Resultados del curso de postgrado.**

El curso se caracterizó por la participación activa de los profesores, colocados siempre en situaciones problemáticas a partir de la realidad que todos y cada uno tenía en sus aulas y por la inserción en su actividad docente de las actividades que se desarrollaron en el curso. Como conclusión del curso se desarrolló un debate alrededor de tres ideas fundamentales.

I. ¿Qué aportó el curso en cuanto a :

- a. Contenidos aprendidos.

- b. Aspectos metodológicos.
  - c. Transformaciones en su modo de actuar en el aula.
- II. ¿Qué deficiencias tuvo el curso?
- III. ¿Qué necesitan a partir del curso, para profundizar y definir nuevas necesidades de aprendizaje?  
(última parte del modelo utilizado por Bilbao, M., anexo 3.4)

➤ **Aportes del curso de postgrado.**

**Contenidos aprendidos.**

- Las posibilidades que brinda el Excel para el procesamiento estadístico, aplicable tanto en la docencia como en la investigación pedagógica.
- El estudio del Derive, particularmente las posibilidades gráficas que brinda este sistema, interesante para su aplicación a la Física.
- El estudio de los software de geometría dinámica, tanto el Geometra como el Cabri por sus amplias posibilidades para demostrar las propiedades de las figuras geométricas, en especial aprovechando las posibilidades de aplicar los principios de movilidad y medir y comparar, así como la simulación de experimentos de la Física y su correspondiente representación matemática.

**En aspectos metodológicos.**

- El dominio de la estructura de la colección Futuro, los elementos comunes a los software de la colección y particularmente las posibilidades que brinda el Eureka lo que facilita la orientación de las tareas a los alumnos.
- La estructura de la guía formativa con una intencionalidad heurística posibilita que los colectivos de asignaturas elaboren sistemas de estas actividades para sus clases.
- El curso propició tener una concepción general y coherente de cómo combinar en la clase el uso de los software educativos de la colección Futuro y los asistentes matemáticos.
- Quedó diseñada la estrategia para la preparación metodológica desde el departamento sobre el uso de la computadora como medio auxiliar heurístico en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

**Transformaciones en el modo de actuación de los profesores en el aula.**

- Desde la clase de Computación se ha hecho el tratamiento de los temas de estadística, lográndose una relación interdisciplinaria cuya posible aplicación se demostró en la práctica.

- Se ha tomado la decisión por la dirección de la institución de que la unidad correspondiente al uso de los software educativos que aparece en la última unidad de la asignatura Computación sea la primera como una forma de preparar las condiciones para que estos software sean utilizados por las distintas asignaturas.
- La tesis final de dos maestrantes de “Ciencia de la Educación” que participan en el curso versarán sobre temas relacionados con la Matemática asistida por computadora.
- El trabajo de diploma de Rodríguez, Osvaldo se utilizará para la implementación de dos círculos de interés sobre Geometría mediante el empleo de los software de geometría dinámica con alumnos de los preuniversitarios de ciencias pedagógicas.
- En las clases, a modo de demostración, se ha utilizado el Derive y el Geometra para el tratamiento de contenidos relacionados con estos software.
- Un profesor desarrolló una experiencia en su grupo de clase, con énfasis particular en la unidad de estadística siguiendo los principales aspectos del modelo que se exponen en esta tesis.

#### **Deficiencias del curso.**

- Se dedicó poco tiempo al desarrollo de los contenidos, en especial el estudio del Excel, Derive, Geometra y Cabri.
- Poco tiempo a la ejercitación, en especial para las tareas parciales.
- Necesidad de dedicar el día de la superación solo a esa actividad y no superponerla con otras actividades.

#### **Necesidades a partir del curso definir nuevas necesidades de aprendizaje.**

- Desarrollar talleres para intercambiar experiencias sobre la Matemática asistida por computadora.
- Organizar en el trabajo metodológico del departamento actividades que propicien la búsqueda de estrategias para la enseñanza asistida por computadoras.
- Perfeccionar la organización de los laboratorios y de la escuela en general para que se facilite el trabajo de la enseñanza asistida por computadoras.
- Basado en el banco de problemas de la escuela desarrollar tareas de investigación involucrando a los alumnos tomando como modelo la experiencia del profesor Carlos Carrazana Rodríguez.
- Repetir el curso con extensión a toda la Ciudad Escolar, con los profesores que pasaron este curso como facilitadores.



El curso impartido posibilita el intercambio de ideas con los profesores y permite perfeccionar las concepciones que se tienen, constatar teoría con práctica y profundizar en aspectos teóricos y prácticos que no se habían considerado inicialmente, de manera que sin diseñar una investigación- acción, este paradigma investigativo estuvo presente en el desarrollo del trabajo.

### 3.3. Resultados de las valoraciones prospectivas de los expertos

#### Evaluación de los expertos comprometidos.

Después de finalizado el curso de postgrado y entregada las evaluaciones se sometió el modelo propuesto a la consideración de los 31 profesores que participaron en el curso, tomando como criterio para seleccionarlos como expertos las fuentes de argumentación que se adjuntan en la siguiente tabla que también aparece referenciada en el anexo 3.6.

FUENTES DE ARGUMENTACIÓN	ALTO	MEDIO	BAJO
Experiencia en su actividad docente como profesor de Matemática, Física o Computación.	50,00%	40,00%	25,00%
Conocimiento del estado actual de la enseñanza asistida por computadora en contextos internacional.	5,00%	4,00%	2,50%
Conocimiento del estado actual de la enseñanza asistida por computadora en contextos del país.	5,00%	4,00%	2,50%
Participación en actividades metodológica (no cursos) sobre la enseñanza asistida por computadora	15,00%	12,00%	7,50%
Su participación en actividades investigativas o experiencias pedagógicas de avanzada (no necesariamente relacionadas con la enseñanza asistida por computadoras).	25,00%	20,00%	12,50%
<b>TOTAL</b>	<b>100,00%</b>	<b>80,00%</b>	<b>50,00%</b>

Las exigencias de estos expertos está concentrada en sus experiencias como profesores del área de las ciencias exactas, su participación en actividades metodológicas relacionadas con el proceso de enseñanza-aprendizaje asistido por computadora y en su actividad investigativa, según sus posibilidades incluyendo en esta las experiencias pedagógicas de avanzada, de manera que sin poseer un grado de categoría científica, las fuentes de argumentación permitan confiar en su valoración.

El menor peso se le ha dado al conocimiento acerca del proceso de enseñanza-aprendizaje asistido por computadora, pues el diagnóstico inicial y el comportamiento durante el curso nos dieron los elementos necesarios para evaluar su competitividad como expertos que con cierto nivel de parcialidad pueden evaluar la propuesta.

Los resultados de los criterios de expertos fueron procesados por el libro en Excel elaborado por el profesor Crespo y facilitado en la conferencia antes mencionada.

Los expertos son consultados sobre dos aspectos fundamentales del modelo:

- I. Sobre la concepción teórica, encaminada a que los expertos opinen sobre qué tan cierta y sólida pueden ser las argumentaciones que se dan sobre el uso de la computadora en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática.
- II. Sobre valoraciones prospectivas, es decir, siguiendo a Crespo "El pronóstico (se retoma la definición de pronóstico) del comportamiento que deben tener los indicadores, obtenidos de la operacionalización de las variables dependientes, si se aplicara en una práctica concreta el resultado científico objeto de estudio."<sup>78</sup>

Tomando como referencia los objetivos de los programas de Matemática para nivel preuniversitario, sus orientaciones metodológicas y el informe NCTM, se seleccionan tres aspectos para que los expertos valoran las consecuencias que tendría en ellos la aplicación del modelo propuesto, estos son:

- I. La comprensión de los conceptos, propiedades y relaciones que se estudian y el dominio de la base conceptual que subyace en los algoritmos y procedimientos de trabajo que emplean en el nivel preuniversitario, pues los conceptos juegan un papel determinante en cualquier ciencia y constituye uno de los objetivos fundamentales de la Matemática.
- II. La formulación y resolución de problemas relacionados con el desarrollo político, económico y social local, nacional, regional y mundial y con fenómenos y procesos científico-ambientales, que requieran transferir conocimientos y habilidades aritméticas, algebraicas, geométricas y trigonométricas a diferentes contextos y promuevan el desarrollo de la imaginación, de modos de la actividad mental, de sentimientos y actitudes, que le permitan ser útiles a la sociedad y asumir conductas revolucionarias y responsables ante la vida. Este aspecto es fundamental dado que resolver problemas es uno de los fines de la Matemática escolar declarado en todos los planes y programas de la asignatura.
- III. El desarrollo de hábitos de estudio y técnicas para la adquisición independiente de nuevos conocimientos y la racionalización del trabajo mental con ayuda de los recursos de las tecnologías de la informática y la comunicación, que le permitan la superación permanente y la orientación en el entorno natural, productivo y social donde se desenvuelve. Este objetivo, declarado en nuestros

programas constituye uno de los más destacados en NCTM como necesidad de la educación matemática contemporánea.

El procesamiento de los datos arroja los siguientes resultados:

- I. En cuanto a la competencia de los expertos comprometidos bajo los criterios antes expuestos en las fuentes de argumentación se obtuvo el siguiente resultado:

TOTALES		%
Competencia Alta.	16	51,61%
Competencia Media.	15	48,39%
Competencia Baja.	0	0,00%
Criterios tomados.	> que	<= que
Competitividad alta.	0,8	1
Competitividad media.	0,5	0,8
Competitividad baja.		0,5

- II. En cuanto a la valoración de los expertos comprometidos ( anexo 3.7) se observa que solo en los indicadores 14 y 15 se obtiene un consenso de “Bastante adecuado”, esto se corresponde con la pregunta acerca de:

VALORACIONES PROSPECTIVAS
De las consecuencias que tendría la aplicación del modelo propuesta. Para dar cumplimiento al objetivo. Formular y resolver problemas relacionados con el desarrollo político, económico y social local, nacional, regional y mundial y con fenómenos y procesos científico-ambientales, que requieran transferir conocimientos y habilidades aritméticas, algebraicas, geométricas y trigonométricas a diferentes contextos y promuevan el desarrollo de la imaginación, de modos de la actividad mental, de sentimientos y actitudes, que le permitan ser útiles a la sociedad y asumir conductas revolucionarias y responsables ante la vida.
El redimensionamiento del modelo de Polya, G. para la resolución de problemas, aprovechando las posibilidades que ofrece la computadora como medio auxiliar heurístico.
El uso de los asistentes matemáticos.

Aunque para “bastante adecuado” no se exige hacer valoraciones cualitativas, al obtener este resultado se interrogó a los participantes y señalan como mayores preocupaciones:

- I. Se necesita adiestramiento y estudio para tener dominio de las distintas herramientas informáticas y poder utilizarlas eficientemente, implementando el redimensionamiento propuesto para el modelo de Polya, G.
- II. Si bien los asistentes matemáticos de geometría dinámica favorecen la resolución de problemas y los de tipo Excel ayudan al procesamiento de gran cantidad de datos, los de tipo Derive son de gran ayuda en graficar funciones, pero puede que los alumnos lo utilicen para resolver otras tareas como es

el caso de solución de ecuaciones, inecuaciones, sistemas de ecuaciones y la simplificación de expresiones algebraicas y trigonométricas, cuyo procesamiento manual son objetivos del programa de Matemática, en su lugar proponen utilizar solamente el simulador de graficar funciones que suministra el Eureka..

Este resultado se corresponde con lo que aparece en el anexo 3.8 relacionado con la valoración de los componentes del modelo a partir de la relación relevancia-viabilidad, entendidos estas con la definición que aparece en el anexo 3.6, inciso B:

- Relevancia: Cualidad o condición de relevante, importancia, significación. En el caso que nos ocupa se pretende determinar el grado de importancia para una introducción coherente de la computadora como medio auxiliar heurístico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática.
- Viabilidad: Cualidad de viable. Viable entre sus diferentes acepciones nos interesa la que expresa "Dicho de un asunto: Que, por sus circunstancias, tiene probabilidades de poderse llevar a cabo." Para la investigación que hacemos expresa la posibilidad de implementar en la práctica docente el aspecto de la propuesta evaluada.

En el anexo 3.8 se puede observar que aunque la viabilidad siempre se encuentra por debajo de la relevancia, solo toma un mínimo valor de 8 en las posibilidades de los asistentes matemáticos y el redimensionamiento del modelo de Polya, G., siendo significativamente altos los demás valores.

Como conclusión importante el modelo propuesto es relevante y viable con indicadores superiores a 7 en una escala de 1 a 10.

#### **Evaluación de los expertos no comprometidos.**

Por razones obvias de constatación científica el modelo se sometió a valoración a un grupo de expertos que han sido ajenos al trabajo, lo que permite además valorar la coincidencia o no entre personas que han tenido alguna experiencia de estudio, valoración o incidencia del autor y personas totalmente ajenas. De ellos:

Especialidad	Nacionalidad	Cantidad
Matemática	Cubana	8
	Mexicana	4
	Española	2
	Colombiana	5
	Costarricense	1
	Peruana	1

Computación	Cubana	7
	Mexicana	1
	Española	1
	Costarricense	1
	Alemana	2
	Peruana	1

NACIONALIDAD	MASTER	DOCTORES EN CIENCIAS MATEMÁTICAS O TÉCNICAS	DOCTORES EN CIENCIAS PEDAGÓGICAS	DOCTORES EN SEGUNDO GRADO
Cubana	11	2	2	
Mexicana		3	2	
Española	1	1		1
Colombiana	1	2	2	
Costarricense		2		
Peruana		1	1	
Alemana				2

Los quince cubanos están distribuidos en la siguiente forma:

CENTROS DE TRABAJO	MATEMÁTICA	COMPUTACIÓN
ISP Félix Varela	2	3
Ciencias Médicas	2	
UCLV	1	1
ISP Manzanillo	1	1
ISP Santiago De Cuba		1
Universidad de Holguín		1
Teleprofesores	2	

Con la distribución hecha se evita la posibilidad de un sesgo cultural.

Para estos expertos, por no tener la experiencia del trabajo con el modelo propuesto, al determinar su competitividad se fue más exigente en cuanto a conocimientos teóricos y prácticos sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje asistida por computadora, en particular de la Matemática, para garantizar que fueran capaces de realizar una acertada valoración a partir de la lectura que hicieran de los materiales

que se le suministraron. Las fuentes de argumentación y el peso de los valores asignados a cada una fueron:

FUENTES DE ARGUMENTACIÓN	ALTO	MEDIO	BAJO
Experiencias personal relacionadas con la enseñanza asistida por computadoras.	30,00%	24,00%	15,00%
Investigaciones o trabajo metodológicos realizado por usted sobre la enseñanza asistida por computadoras.	10,00%	8,00%	5,00%
Experiencia adquirida en su actividad profesional impartiendo docencia de Matemática o Computación (años de experiencias, trabajos realizados, etc.)	30,00%	24,00%	15,00%
Estudio de literatura especializada y publicaciones de autores nacionales relacionadas con la enseñanza asistida por computadoras.	10,00%	8,00%	5,00%
Estudio de literatura especializada y publicaciones de autores extranjeros relacionadas con la enseñanza asistida por computadoras.	10,00%	8,00%	5,00%
Conocimiento del estado actual de la enseñanza de la matemática asistida por computadoras en Cuba.	5,00%	4,00%	2,50%
Conocimiento del estado actual de la enseñanza de la matemática asistida en otros países.	5,00%	4,00%	2,50%
Total	100,00%	80,00%	50,00%

Obsérvese que a la experiencia se le da el mayor peso, pues entre las cualidades de un experto está la efectividad de su actividad profesional. Un principio elemental de sabiduría popular expresa que: "nadie puede evaluar o criticar lo que no haya sido capaz de hacer" y antes de utilizar cualquier criterio para determinar la competencia del experto, el análisis de su actividad profesional se convierte en el primer elemento de selección."<sup>79</sup>

La competencia de estos expertos determinadas bajo los criterios antes expuestos en las fuentes de argumentación se muestra en la siguiente tabla:

TOTALES		%
Competencia alta	32	94,12%
Competencia media	2	5,88%
Competencia baja	0	0,00%
<b>Criterios tomados</b>	<b>&gt; que</b>	<b>&lt;= que</b>
Competitividad alta	0,8	1
Competitividad media	0,5	0,8
Competitividad baja		0,5

En la valoración de los expertos presentada en el anexo 3.9 se observa que solo en el indicador 14 se obtiene un consenso de "Bastante adecuado", esto se corresponde con la valoración de los expertos comprometidos. Un análisis de las valoraciones cualitativas, en particular los extranjeros, al referirse al indicador 14 del que se comentó en la valoración de los expertos comprometidos, apuntan a dos cuestiones fundamentales:

1. Criticar el objetivo plantados en lo relativo a "que requieran transferir conocimientos y habilidades aritméticas, algebraicas, geométricas y trigonométricas " y plantean de una u otra forma que el mismo se debe referir a "habilidades para utilizar los asistentes matemáticos en la resolución de problemas relacionados con aritmética, álgebra, geometría y trigonometría", pues en la forma redactada da a entender (como lo es en realidad) que se refiere a que los alumnos resuelvan estos problemas sin el empleo de los medios de cómputos.

Evidentemente, la concepción de lo expertos se acerca a los planteamientos de NCTM respecto a la enseñanza de la Matemática en el nivel preuniversitario utilizando la computadora, lo que implicaría cambios en los objetivos y por tanto en el currículo, entendido este como un documento, lo que no es objeto de esta investigación, ya que se ha reiterado que los cambios que se proponen, aunque inciden indirectamente en el currículo con la concepción de centrarlo en la resolución de problemas, en lugar de hacerlo en los contenidos, no tienen esta intencionalidad explícita en el trabajo.

2. Los expertos no recibieron el texto del capítulo I, por eso, aunque en ese capítulo se justifica el empleo del modelo de Polya, G. para su redimensionamiento y se demuestra que los demás modelos parten

del de Polya, G. y de una forma u otra lo incluyen, algunos expertos lo consideran no apropiado y superado por el de Schoenfeld, A. el de Fridman, L. o el De Guzmán, M., M. según las preferencias.

3. La diferencia con los expertos comprometidos respecto al indicador 15 está dada por la opinión de los expertos extranjeros a partir de su experiencia, de que los asistentes matemáticos deben aplicarse con toda amplitud en el nivel preuniversitario y este criterio es contrario al de los profesores cubanos.

En el anexo 3.10 se presenta la gráfica que expresa la relación entre la relevancia y viabilidad de los aspectos que forman el núcleo del modelo propuesto para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática asistida por computadora, a diferencia de la valoración de los expertos comprometidos, estos colocan la viabilidad por encima o a la par de la relevancia, obteniéndose en todos valores entre 9 y 10 como promedio, lo que confirma lo expresado por los expertos comprometidos incluso superándolo en todos los aspectos. El sesgo cultural está presente en estas valoraciones, así, en un contexto dominado por la Internet la viabilidad de la propuesta es perfecta, lo que la hace que sea relativamente menos relevante cuando este término se acerca al concepto de "novedoso". Es criterio del autor que estos contrastes de criterios permiten enriquecer la valoración realizada, donde evidentemente, la propuesta del modelo propuesto sale airoso.

### **3.4. Valoraciones cualitativas de las intervenciones en la práctica escolar**

El modelo que se presenta se ha construido a partir de los resultados y las constataciones realizadas por diplomantes y profesores que han realizado intervenciones parciales en la práctica escolar y que han estado bajo la orientación del colectivo de investigación del proyecto al que pertenece la presente tesis.

#### **Trabajo de diploma:**

#### **"Posibilidades de utilizar el Derive en la enseñanza de temas relacionados con polinomios en preuniversitario"**

En julio del 2003 se defienden el trabajo de diploma con el título antes mencionado. En este trabajo se enunciaron dos objetivos fundamentales:

- "Determinar las posibilidades que brinda el procesador matemático Derive para optimizar el proceso de enseñanza-aprendizaje en temas relacionados con polinomios y elaborar las correspondientes sugerencias metodológicas.
- Elaborar ficheros de aplicación en Derive, para optimizar el proceso de enseñanza-aprendizaje en temas relacionados con polinomios."



Como parte de la constatación se aplica una experiencia con 30 alumnos de décimo grado del Instituto Preuniversitario de la Ciudad Escolar Ernesto Guevara, escogidos por sus dificultades en los siguientes elementos del conocimiento:

- Descomposición factorial.
- Resolución de ecuaciones.
- Funciones.

En esta experiencia el trabajo con el Derive constituye una alternativa didáctica para la atención diferenciada de estos alumnos.

#### **Trabajo de diploma:**

**“Posibilidades de utilizar el Derive en la enseñanza de fracciones algebraicas en preuniversitario”.**

También en julio del 2003 se defienden el trabajo de diploma con objetivos análogos al anterior, pero precisando en uno de ellos: “Elaborar sugerencias para el empleo del Derive en el tratamiento de las fracciones algebraicas, con el propósito de optimizar el proceso de enseñanza-aprendizaje en estos temas.”<sup>80</sup>

En este trabajo también se aplica una experiencia con 34 alumnos de décimo grado del Instituto Preuniversitario en el Campo “Capitán Roberto Rodríguez”, escogidos por sus dificultades en elementos del conocimiento relacionados con fracciones, particularmente en los siguientes temas:

- Operaciones con fracciones algebraicas.
- Resolución de ecuaciones fraccionarias.
- Resolución de inecuaciones fraccionarias.
- Cálculo del valor numérico de una expresión algebraica.

Siguiendo la misma estrategia del anterior trabajo, se utilizó el Derive como alternativa didáctica para la atención diferenciada de estos alumnos.

Como resultado de estos trabajos se tuvo la posibilidad de tener un primer acercamiento al problema de que los alumnos del nivel preuniversitario utilizaran los asistentes matemáticos aún cuando no se disponía de un software educativo como el Eureka ni de un programa de asignatura como el actual donde se plantea el uso del Derive.

Del intercambio con los profesores asesores de estos diplomantes en su práctica profesional se pudo concluir que:

1. Los alumnos del nivel preuniversitario aprenden con facilidad la manipulación de un asistente tipo Derive y lo pueden aplicar a la resolución de problemas de la escuela.
2. Con el empleo del Derive los alumnos fueron capaces de :
  - a. Apropiarse de conceptos que por la vía tradicional no llegaron a dominar, relativos a las características de los polinomios, ecuaciones, inecuaciones y el comportamiento de las funciones estudiadas, verificando los resultados obtenidos y facilitando la comprensión de estos resultados.
  - b. Profundizar en conceptos tales como dominio, imagen y ceros de la función.
  - c. Apropiarse de conceptos tales como polos y asíntotas verticales que corresponden a niveles superiores, así como de una idea intuitiva sobre límites infinitos.
  - d. Establecer la relación entre los resultados de las soluciones de ecuaciones polinómicas e inecuaciones fraccionarias con el comportamiento de la curva que representa dichas funciones.
  - e. Utilizar las facilidades que brinda el procesador Derive en lo referente a definir funciones y graficar tanto la función como parte de ellas (gráfico de la expresión que define el numerador y denominador respectivamente).
3. Pese a que las actividades en estas experiencias se desarrollaron en tiempo extradocente y en el inapropiado horario nocturno, los alumnos mostraron interés por la actividad y se mantuvieron motivados por el trabajo todo el tiempo, lo que garantizó el éxito de los resultados.

#### **Trabajo de curso-diploma:**

“El asistente Geometra: Una alternativa para perfeccionar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la disciplina Matemática en el nivel preuniversitario.”

En julio del 2005 se defiende este trabajo de curso que tiene por objetivos:

General:

“Proponer alternativas didáctico-metodológicas para el empleo del asistente matemático Geometra en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la resolución de problemas relacionados con la geometría escolar del décimo grado y primer año de la Enseñanza Técnica y Profesional, correspondientes al nivel preuniversitario.

Específicos:

- ✓ Determinar las necesidades del empleo del asistente matemático Geometra en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en el décimo grado primer año de la Enseñanza Técnica y Profesional vigente, para el perfeccionamiento del mismo.

- ✓ Determinar en el programa de la disciplina Matemática para el décimo grado y primer año de la Enseñanza Técnica y Profesional, los contenidos en el que es posible introducir el asistente.
- ✓ Elaborar las alternativas didáctico- metodológicas para el tratamiento de dichos contenidos empleando el asistente.
- ✓ Valorar la calidad de la propuesta realizada según el criterio de especialistas.<sup>81</sup>

Derivado de este trabajo Rodríguez, O. defiende el trabajo de diploma "El asistente Geometra: una alternativa para perfeccionar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría escolar", esta vez con el objetivo de:

"Proponer un sistema de talleres para el empleo del asistente matemático Geometra en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, específicamente en la solución de problemas relacionados con la geometría escolar de 10mo grado o primer año de la Enseñanza Técnica y Profesional."<sup>82</sup>

Estos trabajos tuvo en mayor medida la orientación de la concepción que se propone en el modelo aplicando los criterios del trabajo independiente y de la instrucción heurística. Sus resultados también permiten replantear algunas concepciones que se tienen relacionadas principalmente sobre el tiempo necesario para que los alumnos se familiarizaran con el ambiente de trabajo de un software de geometría dinámica como el Geometra.

El sistema de talleres propuesto que se puso en práctica con 10 alumnos del ISP "Félix Varela", que cursaban la habilitación para la enseñanza preuniversitaria en el área Ciencias Exactas en el curso 2005-06.

Estos alumnos ya habían cursado la asignatura Geometría y en tiempo extra desarrollaron los 4 talleres.

La evaluación de los resultados se realiza en cada taller, para ello se aplican las técnicas participativas:

- Diagnóstico inicial. (Taller1)
- Técnica participativa "razón suficiente". (Taller1)
- Técnica participativa "¿Cómo me siento ahora". (Taller2)
- Técnica participativa "El abanico". (Taller3)
- Técnica participativa "Buscando la utilidad". (Taller4)
- Control del estudio independiente.
  - Técnica ¿cómo me fue?

- Observación sistemática por parte del profesor para evaluar el desempeño de los alumnos en el trabajo con el asistente.

Con estos trabajos de curso y diploma se constata que el empleo de la técnica de taller permite que en poco tiempo los alumnos se apropiaran de la información necesaria para manipular y aplicar las posibilidades que brindan un software de geometría dinámica en la resolución de problemas. En este resultado fue significativo la aplicación de los principios reglas y estrategias heurísticas propuesto en el modelo lo que permite que los alumnos transitaran por los tres niveles de desempeño del siguiente modo:

**Diagnóstico inicial:** Desconocimiento total del trabajo con asistentes de geometría dinámica y su aplicación en la escuela.

**Al culminar el segundo taller:** Todos los alumnos alcanzan el objetivo propuesto a un nivel reproductivo.

**Al culminar el tercer taller:** El 80,00% de los alumnos alcanzan un nivel de aplicación al darle solución a las actividades planificadas, y un 20,00% alcanza niveles de creación al dar sugerencias y nuevas vías de solución a tareas planteadas.

**Al culminar el cuarto taller:** Todos los alumnos son capaces de crear nuevas figuras y problemas geométricos aplicando en forma creadora las posibilidades que brinda el asistente Geometra.

**Experiencias en un grupo del Instituto Preuniversitario Vocacional de Ciencias Exactas “Ernesto Guevara”.**

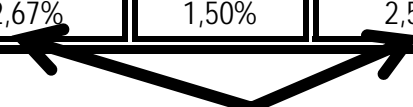
En los inicios del curso 2005-2006 un experimentado profesor, por orientación de la Dirección provincial y el ISP “Félix Varela” impartió una preparación metodológica de estadística a profesores de Matemática del décimo grado de la Ciudad Escolar “Ernesto Guevara”, comenzando a relacionarse con el modelo que se propone, esta vez sobre los temas de estadística, comprobando la factibilidad de la propuesta durante el trabajo con los profesores.

En diciembre del 2005 el referido profesor asumió la docencia del grupo 3 del décimo grado del Instituto Preuniversitario de Ciencias Exactas de la Ciudad Escolar “Ernesto Guevara” y a partir de ese momento comenzó a introducir en sus clases las principales acciones del modelo que se desarrollaban en el postgrado antes descrito.

Los resultados de las notas de los alumnos de este grupo en cada uno de los controles se recogen en la tabla del anexo 3.11.

En los gráficos de los anexos 3.12, 3.13 y 3.14, hechos con el procesador estadístico STATISTICA 7.0 a partir de los datos del anexo 3.11, se muestra el progreso del grupo hacia una estandarización y uniformidad de los resultados alrededor de las medidas de tendencia central media y mediana. Se observa que además del "salto brusco" del primero al segundo trabajo de control, donde se desplazan hacia valores superiores los valores mínimos y todas las medidas de tendencia central, la distribución de los datos se concentra alrededor de la media y la mediana; después se nota el avance gradual del segundo al tercer trabajo de control y un leve descenso en el que casi se repiten los resultados del segundo control aunque con un coeficiente de variación menor, lo que indica una mayor concentración de los datos alrededor de la media. En la tabla que se muestra a continuación se puede observar estas variaciones, en particular los coeficientes de variación: 8,33%, 2,67%, 1,50% y 2,58%

	PIMER TC	SEGUNDO TC	TERCER TC	PRUEBA FINAL
MEAN case 1-27	92,4814815	97,3333333	98,7407407	97,4074074
MEDIAN case 1-27	95	98	99	98
SD case 1-27	7,70299827	2,60177454	1,48304761	2,51547914
VALID_N case 1-27	27	27	27	27
SUM case 1-27	2497	2628	2666	2630
MIN case 1-27	73	87	95	87
MAX case 1-27	100	100	101	100
_25th% case 1-27	85	97	98	97
_75th% case 1-27	99	99	100	99
Coeficiente de variación	8,33%	2,67%	1,50%	2,58%



Es a destacar que en las pruebas aplicadas el nivel de dificultad aumenta gradualmente, lo que indica que el incremento cuantitativo antes descrito, estuvo acompañado de un incremento cualitativo; de ahí que haciendo un análisis a partir de la clasificación de las preguntas por niveles análogos a las evaluaciones del SECE (Sistema de Evaluación de la Calidad de la Educación) se tienen los resultados que se muestran en el anexo 3.15 y que por sí solo muestran la tendencia al incremento de alumnos en los niveles dos y tres:

Coincidiendo con este trabajo se realizan dos controles del SECE y una comprobación provincial con los siguientes resultados que aunque no son altamente significativos, indican la correspondencia en el avance de los alumnos que se manifiesta a través de distintos niveles de control:

EMPLEO DE LA COMPUTADORA	PRUEBA DEL SECE REALIZADA	ALUMNOS PRESENTADOS	I NIVEL	II NIVEL	III NIVEL
No	Primera	10	8	2	0
Si	Segunda	10	6	2	2
Si	Comprobación provincial	23	11	3	9

Es digno de destacar en esta experiencia, que contrario a lo que se ha planteado en las entrevistas y encuestas por parte de los profesores acerca de que la falta de tiempo es una limitante para incorporar la computadora al proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, el referido profesor la empleó como una forma de racionalizar el tiempo.

Al impartir los contenidos de estadística se utiliza las posibilidades que brinda la aplicación Excel, culminando el tema con un trabajo investigativo, para ello se divide el grupo en 4 equipos de alumnos que trabajan sobre:

- a) Estudio estadístico del consumo energético de una vivienda durante una quincena.
- b) Estudio estadístico del control de los turnos de clases perdidos en el décimo de una unidad durante una quincena.
- c) Estudio estadístico del control de la participación en tiempos de máquinas de los alumnos en un laboratorio durante una quincena.
- d) Estudio estadístico del consumo de calorías en el comedor de la Ciudad Escolar durante una quincena.

Estos trabajos, que responden a las prioridades de calidad del aprendizaje y atención a los recursos económicos y los servicios, se desarrollan exitosamente por parte de los alumnos, que terminan con una actividad evaluativa final de exposición y debate combinado con actividades políticas y culturales donde estuvieron presentes padres y dirigentes de la institución.

Como parte del proceso de investigación, se recogen las principales opiniones de alumnos, padres y dirigentes que se sintetizan del siguiente modo:

#### Los alumnos

- Están más motivados al ver que con lo que aprenden pueden resolver problemas de la práctica social.

- Los entrena en el trabajo con la computadora y constatan la relación Matemática-Computación llegando a verla como una sola asignatura.
- Sienten que estos trabajos difieren de lo que hasta el momento han hecho en la secundaria básica y en el grado, por el nivel de aplicación e importancia para la escuela.
- Este tipo de trabajo es más exigente, obligándolos a trabajar y estudiar sin tener las exigencias tradicionales de otros momentos.
- Ven estas tareas como puntos de partidas para hacer un trabajo investigativo en el futuro.
- Se han apropiado de métodos de trabajo en equipo, en condiciones similares a como deben hacerlo los científicos.

### **Los padres**

- Con trabajos como estos se forman realmente para la vida y los prepara para tareas futuras de estudios e investigación.
- Los forman en la responsabilidad de entregar un resultado importante y necesario para el trabajo de dirección y de organización de la escuela.
- Le proporciona un estilo de trabajo para abordar problemas de la vida y enfrentarlo en forma crítica y analítica, haciéndolo reflexionar sobre sus propios problemas.

### **La dirección de la escuela**

- El trabajo es interesante y debe continuarse y extenderse a todos los grupos como método de trabajo.
- Ahora se resuelven estadísticamente problemas de la escuela, pero hay que utilizar situaciones del banco de problemas de la escuela para que sean resueltos en forma similar.
- La experiencia debe extenderse a otras asignaturas y colectivos por la incidencia de este tipo de trabajo en el protagonismo estudiantil y en su desarrollo político-ideológico al enfrentarlos a resolver y reflexionar científicamente sobre problemas de su entorno social.

En resumen las valoraciones prospectivas avalan la relevancia y viabilidad, del modelo sustentado en la heurística para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática asistida por computadora en el nivel preuniversitario, lo cual fue constatado por el criterio de expertos comprometidos y no comprometidos, así como, en intervenciones parciales en la práctica escolar realizadas por diplomantes y profesores que han estado bajo la orientación del colectivo de investigación del proyecto al que pertenece la presente tesis.

# *Conclusiones*



## CONCLUSIONES

### **1. Los referentes teóricos analizados y sistematizados permitieron determinar que:**

Existe consenso tanto en el ámbito nacional como en el internacional sobre la necesidad de transformar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática a partir de la introducción de la computadora como medio; pero no existen las orientaciones concretas que permitan la integración coherente del mismo en la actualidad.

Existe una amplia información relacionada con la introducción de la computadora en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, pero no está suficientemente sistematizado su empleo.

Existen esfuerzos para aplicar los distintos productos informáticos, pero se siguen realizando de forma aislada e independiente y no de manera sistémica.

Existen diversos modelos para la resolución de problemas sustentados en la heurística, a la que se le reconoce su importancia en el accionar pedagógico, pero no se incluye como objeto de estudio en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática.

### **2. El estado en que se encuentra el empleo de la computadora en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática es el siguiente:**

Los profesores tienen un dominio de los contenidos básicos necesarios para manipular la computadora, pero no hay un modelo didáctico que permita hacer uso de la computadora como medio auxiliar heurístico en la resolución de problemas, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática.

Los profesores presentan deficiente preparación en el manejo de los software educativos y los asistentes matemáticos, aunque los programas y las orientaciones metodológicas indican su empleo.

### **3. El modelo didáctico sustentado en la heurística para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática asistida por computadora se fundamenta de forma sintética en los criterios teóricos generales siguientes:**

- La utilización de la computadora como medio auxiliar heurístico.
- El programa heurístico general y el modelo de Polya, G. redimensionado como objetivo, contenido y método en la resolución de problemas.
- El enfoque sistémico del uso de los recursos informáticos, de los temas matemáticos y de la instrucción heurística.

- La orientación investigadora de la educación científica teniendo como soporte material la guía formativa con intencionalidad heurística.
- La consideración de la didáctica general como modelo teórico generalizador.

#### **4. Las valoraciones prospectivas del modelo propuesto demuestran:**

La argumentación científica para el empleo de los asistentes matemáticos en el nivel preuniversitario.

El modelo para el uso de la computadora como medio auxiliar heurístico en el tratamiento de las situaciones típicas de la Matemática.

La necesidad de una guía formativa con intencionalidad heurística para el empleo de la computadora como medio auxiliar heurístico.

La relevancia y viabilidad del modelo propuesto a partir de la valoración prospectiva del criterio de expertos.

La posibilidad de elaborar un modelo que fundamente la integración de la computadora en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática a partir del redimensionamiento del modelo de Polya, G. en las condiciones actuales del desarrollo de la informática educativa en el nivel preuniversitario.

La necesidad de elaborar un programa heurístico general, del que se constató su relevancia y viabilidad en las valoraciones prospectivas realizadas con el criterio de experto y la intervención en la práctica.

# *Recomendaciones*

## RECOMENDACIONES

A partir de la valoración prospectiva del modelo propuesto para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática asistida por computadora, se recomienda:

1. La introducción de los resultados obtenidos, para:
  - Hacer extensiva la impartición del curso de postgrado a profesores de los departamentos de Ciencias Exactas de la provincia de Villa Clara, con el fin de contribuir a elevar su preparación teórico-metodológica y práctica, el uso eficiente del software educativo de la colección Futuro y de los software profesionales.
  - Hacer extensiva la aplicación de la propuesta a los centros de la enseñanza media superior sobre la base de la preparación inicial y continua de los profesores.
2. Hacer estudios para:
  - Estructurar metodológicamente el tratamiento de cada uno de los temas a partir de la concepción propuesta en el modelo.
  - Realizar las transformaciones curriculares de la Matemática, teniendo en cuenta los criterios expuestos en la memoria escrita de la tesis.
  - Generalizar la portabilidad el modelo de Polya, G. redimensionado y del programa heurístico general para la resolución de problemas a las diferentes situaciones típicas de la Matemática.

*REFERENCIAS  
BIBLIOGRÁFICAS*

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NTCM). Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática. Edición en castellano: Sociedad Andaluza de Educación Matemática "THALES". Sevilla. 1989. Pág. 2.
2. MORALES ALDANA, LEONEL. Matemática-Computación-Educación. Actas de la octava conferencia internacional de educación matemática. 43 colección de documentos. UNESCO. Pág. 89.
3. TORRES LIMA, PASTOR. Influencias de la computación en la enseñanza de la matemática. Tesis para optar por el grado científico de doctor en Ciencias Pedagógicas. La Habana, 1997. Pág. 8.
4. MINISTERIO DE EDUCACIÓN, REPUBLICA DE CUBA. Programa de Matemática. Décimo Grado. Vigente a partir del Curso 2004-2005. Pág. 6.
5. GÓMEZ GUTIÉRREZ, LUÍS IGNACIO. Intervención en el II Seminario Nacional para Educadores. Folleto: Editorial Pueblo y Educación. .2001. Pág. 2.
6. MINISTERIO DE EDUCACIÓN, REPUBLICA DE CUBA. Programa de Matemática. Décimo Grado. Vigente a partir del Curso 2004-2005. Pág. 8 - 9.
7. ATOCHA, ALISEDA. HEURÍSTICA. Hipótesis y demostración en Matemáticas. Instituto de investigaciones filosóficas. <http://minervas.filosoficas.unam.mx/> (12-1-04).
8. DICCIONARIO DE LAS CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN. Editorial Santillana, México, 2002.
9. POLYA, GEORGE. How to solve it?, Rinehart and Winston Inc., N.Y., U.S.A., 1964. Pág. 15.
10. MÜLLER, HORST. El trabajo heurístico y la ejercitación en la enseñanza de la matemática en la enseñanza general politécnica y laboral. Folleto editado en el I.S.P. "Frank País García". Santiago de Cuba. 1990. Pág. 2.
11. POLYA, GEORGE. (1962). Mathematical Discovery. On understanding, learning, and teaching problem solving. Vol. 1. Ed. John Wiley and Sons, Inc. USA. Pág. 112.
12. BALLESTER, SERGIO. y otros. Metodología de la enseñanza de la Matemática. Tomo 1. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana. 1992. Pág. 407.
13. ALONSO BERENGUER, ISABEL. El problema matemático y su proceso de resolución. Una perspectiva desde la teoría del procesamiento de la información. Tesis para optar por el grado científico de doctor en Ciencias. Universidad de Oriente 2001. Pág. 47.

14. BALLESTER, SERGIO y otros. Metodología de la enseñanza de la Matemática. Tomo 1. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana. 1992. P. 407.
15. DICCIONARIO DE LAS CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN. Editorial Santillana, México, 2002.
16. BALLESTER, SERGIO. y otros: Metodología de la enseñanza de la Matemática. Tomo 1. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana. 1992. Pág. 227.
17. DICCIONARIO DE LAS CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN. Editorial Santillana, México, 2002.
18. MICROSOFT® ENCARTA® 2006. © 1993-2005 Microsoft Corporation. Reservados todos los derechos.
19. GUÉMÁNNOVA, A. y otros. Lógica en forma simple sobre lo complejo. Diccionario. Editorial Progreso. Moscú, 1991.
20. EXPÓSITO, CARLOS. Elementos Heurísticos, material inédito. s/a.
21. MICROSOFT® ENCARTA® 2006. © 1993-2005 Microsoft Corporation. Reservados todos los derechos.
22. BALLESTER, SERGIO. y otros: Metodología de la enseñanza de la Matemática. Tomo 1. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana. 1992. Pág. 232.
23. MARIMÓN CARRAZANA, JOSÉ ANTONIO. Aproximación al estudio del modelo como resultado científico. Centro de Estudio de Ciencias Pedagógicas "Félix Varela". Villa Clara. 2002. Pág. 4.
24. PÉREZ RODRÍGUEZ, GASTÁN. Metodología de la investigación educacional, Editorial. Pueblo y Educación, Ciudad de La Habana, Cuba, 1996, Pág. 80.
25. BUNGE, MARIO. La Investigación científica. Editorial Ciencias Sociales. La Habana 1972. Pág. 224.
26. CRUZ FERRÁS, ALDO. La instrucción heurística en la enseñanza de la geometría. Tesis para optar por el grado científico de master en Ciencias Pedagógicas. Holguín, 2002. Pág. 28.
27. DE GUZMÁN, MIGUEL. Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Organización de Estados Iberoamericanos Para la Educación, la Ciencia y la Cultura <http://www.campus-oei.org/oeivirt/ciencias.htm> (23-01-2006)
28. HERMIDAS NELDI V. Propuesta de instrucción heurística mediante la disciplina geometría. Tesis de maestría. Granada, España. 1998. Pág. 27.

29. NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NTCM). Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática. Edición en castellano: Sociedad Andaluza de Educación Matemática "THALES". Sevilla. 1989. Pág. 3.
30. IBÍDEM. Pág. 4.
31. VALDÉS MENÉNDEZ, RAMIRO. Conferencia magistral ofrecida en el marco de Metánica. 1997.
32. MINISTERIO DE EDUCACIÓN, REPUBLICA DE CUBA. Programa de Matemática. Décimo Grado. Vigente a partir del Curso 2004-2005. Pág. 6.
33. NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NTCM). Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática. Edición en castellano: Sociedad Andaluza de Educación Matemática "THALES". Sevilla. 1989. Pág. 9.
34. RODRÍGUEZ LAMAS, RAÚL y otro. Introducción a la Informática Educativa. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana 2002. Pág. 10.
35. IBIDEM Pág. 7.
36. GÓMEZ GUTIÉRREZ, LUÍS IGNACIO. Intervención en el II Seminario Nacional para Educadores. Folleto: Editorial Pueblo y Educación. .2001. Pág. 3.
37. DISCO COMPACTO "SOFTWARE EDUCATIVO A TU ALCANCE".Dpto de Software Educativo del Ministerio de Educación. Ciudad de la Habana. 2005.
38. IBIDEM.
39. IBIDEM.
40. IBIDEM.
41. IBIDEM.
42. Una propuesta metodológica para utilizar Internet en el aula  
<http://www.aula21.net/tercera/introduccion.htm>
43. PORTAL COLOMBIANO. Haciendo referencia a la definición dada por el creador de las WebQuests Bernie Dodge. <http://www.eduteka.org/>
44. CENTRO NACIONAL DE INFORMACIÓN Y COMUNICACIÓN EDUCATIVA.  
<http://www.cnice.mecd.es/>
45. Una propuesta metodológica para usar Internet en el aula. <http://www.aula21.net/index.htm>
46. Una propuesta metodológica para usar Internet en el aula.<http://www.aula21.net/segunda/clic.htm>



47. Construyendo una MiniQuest. <http://www.biopoint.com/miniquests/miniquests.html>.
48. SIERRA SALCEDO, REGLA ALICIA. Modelación y estrategia: Algunas consideraciones desde una perspectiva pedagógica. Editorial. Pueblo y Educación, Ciudad de La Habana, Cuba, 2002, p. 317.
49. MINISTERIO DE EDUCACIÓN, REPUBLICA DE CUBA. Programa de Matemática. Décimo Grado. Vigente a partir del Curso 2004-2005. Pág. 6.
50. GUTIÉRREZ MORENO, RODOLFO B. Los componentes del proceso pedagógico y su dinámica. Soporte electrónico. Santa Clara. 2001.
51. TORRES LIMA, PASTOR. Influencias de la computación en la enseñanza de la matemática. Tesis para optar por el grado científico de doctor en Ciencias Pedagógicas. La Habana, 1997. Pág. 6.
52. ÁLVAREZ DE ZAYAS, CARLOS M. Didáctica. La escuela en la vida. La Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1999. Pág. 78.
53. GUTIÉRREZ MORENO, RODOLFO B., El contenido del Proceso Pedagógico. Su enfoque complejo – integral. Soporte electrónico. Santa Clara. 2001.
54. IBIDEM.
55. IBIDEM.
56. IBIDEM.
57. TORRES LIMA, PASTOR. Influencias de la computación en la enseñanza de la matemática. Tesis de Doctorado. Sancti Spíritus. 1997. Pág. 8.
58. MINISTERIO DE EDUCACIÓN, REPUBLICA DE CUBA. Programa de Matemática. Décimo Grado. Vigente a partir del Curso 2004-2005. Pág. 10.
59. MORENO, LUÍS. Instrumentos matemáticos computacionales. En: Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. Bogotá. 2002. Pág. 82.
60. ÁLVAREZ ALFONSO, INGRITH YADIRA.: Alternativa metodológica para la acomodación de las estructuras cognitivas acerca de los polígonos. Tesis de maestría. Santa Clara. 2006. Pág. 60.
61. IBIDEM. Pág. 86.
62. FIALLO RODRÍGUEZ, JORGE. Conferencia en Taller Técnicas o procedimientos para un aprendizaje desarrollador. La Habana. ICCP. Diciembre del 2005. Presentación PowerPoint.
63. ROSENTAL, M. Y LUDIN, P. Diccionario Filosófico. Edición Revolucionaria. La Habana 1984. (Teoría y Práctica).

64. VLADIMIR ILICH, LENIN. Cuaderno de Filosóficos. Editorial MIR. Moscú 1983. Pág. 35.
65. M. ROSENTAL P. LUDIN. Diccionario Filosófico. Edición Revolucionaria. La Habana 1984. (Criterio de la verdad). Pág. 92.
66. IBIDEM. Pág. 92.
67. BALLESTER, SERGIO. y otros: Metodología de la enseñanza de la Matemática. Tomo 1. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana. 1992. Pág. 298.
68. IBIDEM Pág. 333.
69. IBIDEM Pág. 384.
70. GUTIÉRREZ MORENO, RODOLFO. Precisiones metodológicas para la concepción y evaluación del proceso de formación del profesional de la Educación en la Universalización Pedagógica. ISP "Félix Varela". Material en soporte magnético. Santa Clara. 2005.
71. MINISTERIO DE EDUCACIÓN, REPUBLICA DE CUBA. Programa de Matemática. Décimo Grado. Vigente a partir del Curso 2004-2005. Pág. 2.
72. MINISTERIO DE EDUCACIÓN, REPUBLICA DE CUBA. Programa de Matemática. Décimo Grado. Vigente a partir del Curso 2004-2005. Pág. 2.
73. IBIDEM Pág. 2.
74. IBIDEM Pág. 2.
75. CRESPO BORGES, TOMÁS. Respuestas a 16 preguntas sobre el empleo de expertos en la investigación pedagógica. Material inédito en soporte magnético tomado de la Conferencia impartida por el autor a alumnos del doctorado curricular. ISP "Félix Varela" sobre El empleo de los criterios de en la Investigación pedagógica. 30 de mayo del 2006. Pág. 10.
76. IBIDEM Pág. 103.
77. IBIDEM Pág. 2.
78. IBIDEM Pág. 26.
79. IBIDEM Pág.15.
80. ACEVEDO ROJAS, MAYDELIS Y YANISLEY HERRERA DELGADO. Posibilidades de utilizar el derive en la enseñanza de temas relacionados con polinomios en preuniversitario Trabajo de diploma. Santa clara 2003. Pág.3.

81. RODRÍGUEZ BUENO, OSVALDO. El asistente Geometra: Una alternativa para perfeccionar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la disciplina Matemática en el nivel medio superior. Trabajo de curso. Santa Clara 2005. Pág. 4.
82. IBIDEM. Pág. 5.

# *Bibliografía*

## BIBLIOGRAFÍA

1. ACEVEDO ROJAS, MAYDELIS y YANISLEY HERRERA DELGADO. Posibilidades de utilizar el derive en la enseñanza de temas relacionados con polinomios en preuniversitario Trabajo de diploma. Villa Clara, 2003.
2. ADDINE FERNÁNDEZ, FÁTIMA. Didáctica y optimización del proceso de enseñanza-aprendizaje. La Habana. IPLAC, 1998, Material en soporte magnético.
3. \_\_\_\_\_ . Didáctica: teoría y práctica. Editorial Pueblo y Educación. La Habana, 2004.
4. AGUILASOCHO MONTOYA, DIEGO y CRESPO BORGES TOMÁS. La Heurística en la Enseñanza de la Programación. Biblioteca Digital para los ISP No. 1, Computación Educacional. La Habana, 2000.
5. AGUILASOCHO MONTOYA, DIEGO. Propuesta metodológica para la enseñanza de la programación visual en el bachillerato mexicano. Tesis de para optar por el grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Villa Clara, 2004.
6. ALEMÁN, ÁNGELA. La enseñanza de la matemática asistida por computador. Artículo. Soporte magnético, 2004.
7. ALGARABEL, S. Solución de problemas: una revisión del uso de heurísticos y una evaluación de su utilización en Matemáticas, pp.143-165. Revista. 1996.
8. ALMEIDA CARAZO, BERNARDINO A. y BORGES ECHEVARRÍA, JOSÉ T. Didáctica de la resolución de problemas en la escuela media. ISP "Juan Marinillo" Matanzas. Material en soporte magnético, 2000.
9. ALONSO BERENGUER, ISABEL. El problema matemático y su proceso de resolución. Una perspectiva desde la teoría del procesamiento de la información. Tesis para optar por el grado Científico de Coctor en Ciencias. Universidad de Oriente, 2001.
10. ÁLVAREZ ALFONSO, INGRITH YADIRA. Alternativa metodológica para la acomodación de las estructuras cognitivas acerca de los polígonos. Tesis de maestría. Villa Clara, 2006:
11. ÁLVAREZ DE ZAYAS, C. M. La Escuela en la Vida. La Habana: Colección Educación y Desarrollo, 1992.

12. \_\_\_\_\_. La Pedagogía como Ciencia (Epistemología de la Educación). La Habana, 1998.
13. \_\_\_\_\_. Metodología de la Investigación Científica. Santiago de Cuba: Centro de Estudios de Educación Superior "Manuel F. Gran". Universidad de Oriente, 1995.
14. ÁLVAREZ DE ZAYAS, RITA MARÍA. Capítulo 1. Fundamentos didácticos y curriculares. Material en soporte magnético, s/a.
15. \_\_\_\_\_. Hacia un curriculum integrador y contextualizado. La Habana: Editorial Academia. Colección AISI, 1997.
16. ÁLVAREZ PÉREZ, MARTA. Interdisciplinariedad: Una aproximación desde la enseñanza-aprendizaje de las ciencias. Editorial Pueblo y Educación. La Habana, 2004.
17. ALVAREZ, J. Estrategia para la formación de representaciones en el proceso de resolución de problemas matemáticos en la enseñanza preuniversitaria. Tesis para optar por el grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Santiago de Cuba. Cuba, 2001.
18. ANDREU GÓMEZ, NANCY. Metodología para elevar la profundización docente en el diseño de tareas docentes desarrolladoras. Tesis presentada para optar por el grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. I. S. P. "Félix Varela", 2006.
19. ARTEAGA VALDÉS, ELOY. El sistema de tareas para el trabajo independiente creativo en la enseñanza de la Matemática en el preuniversitario. Tesis para optar por el grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Instituto Superior Pedagógico "Conrado Benítez García". Cienfuegos, 2001.
20. ARTÍCULO01.PDF. Internet, 2005. (En: <http://www.eduteka.org/>)
21. ASECIO CABOT, ESPERANZA. Modelo didáctico para la dinamización del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Física General en la formación de profesores de Física. Tesis presentada para optar por el grado científico de Doctora en Ciencias Pedagógicas. I. S. P. "Félix Varela", 2002.
22. ASTIGARRAGA, E. El método Delphi. Facultad de Ciencias Empresariales. Universidad de Deusto San Sebastián, 2002.
23. ATOCHA, ALISEDA.. Heurística, Hipótesis y demostración en Matemáticas. Instituto de investigación filosófica. Internet, 2004. (En: <http://www.minervas.filosoficas.unam.mx/>)

24. BABANSKI, YU. K. Optimización del proceso de enseñanza. Editorial Pueblo y Educación, Ciudad de La Habana, 1982.
25. BALLESTER, SERGIO. y otros. Metodología de la enseñanza de la Matemática. Tomo 1. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana, 1992.
26. BÁXTER, E. El proceso de investigación en la metodología cualitativa: El enfoque participativo y la investigación acción. Desafío Escolar. La Habana, 2000.
27. BERMÚDEZ MORRIS, RAQUEL y LORENZO MIGUEL PÉREZ MARTÍN. Aprendizaje formativo y crecimiento personal. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana, 2004.
28. \_\_\_\_\_ Teoría Histórico Cultural de L. S. Vigotsky. Algunas ideas básicas acerca de la educación y el desarrollo psíquico. Material en soporte magnético, s/a.
29. BERMÚDEZ MORRIS, RAQUEL. La Teoría Histórico Cultural. Material en soporte magnético, s/a.
30. BERMÚDEZ SARGUERA, ROGELIO. Teoría y Metodología del Aprendizaje. Editorial Pueblo y Educación. La Habana, 1996.
31. BERMÚDEZ, R. y M. RODRÍGUEZ. Teoría y Metodología del aprendizaje. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana, 1996.
32. BERNARDINO ALMEIDA, JOSÉ M. y GONZÁLEZ HERNÁNDEZ, SILVIA. Los procedimientos heurísticos en la enseñanza de la Matemática. Material mimeografiado. La Habana, 1990.
33. BILBAO CONSUEGRA, MAIDA. Sistema de acciones de superación para la formación informática básica en docentes del ISP "Félix Varela". Tesis de Maestría. UCLV Villa Clara, 2005.
34. BLANCO PÉREZ, ANTONIO. Filosofía de la educación. Selección de lecturas. Editorial Pueblo y Educación. La Habana, 2003.
35. BOLETÍN 45 DE LA UNESCO. Proyecto principal de educación. Internet, abril de 1998.
36. BUENO, ISABEL. Aprendiendo álgebra lineal con Matlab. Una experiencia didáctica. Memorias del I congreso internacional de la enseñanza de la Matemática asistida por computadora, Costa Rica. 2000.
37. BUNGE, MARIO. La Investigación científica. Editorial Ciencias Sociales. La Habana, 1972.

38. CAMPANARIO, JUAN MIGUEL. La ciencia que no enseñamos. Internet, 2006 (Email: fscampanario@alcala.es)
39. CAMPINSTROUS, LUIS. RIZO Aprende a resolver problemas aritméticos. Editorial. Pueblo y Educación. La Habana, 1996.
40. CAMPISTROUS, LUIS; RIZO, CELIA Indicadores e Investigación Educativa. Documento en soporte electrónico, 1998.
41. CARRANZA SCHALLER, SIEGFRIED Enseñanza de matemática mediante computador:CD de Matemática Básica Facultad de Ingeniería de Sistemas, Universidad de Lima, Perú, 2000.. E-mail: scarranz@correo.ulima.edu.pe.
42. CASTELLANOS SIMONS, BEATRIZ. Esquema conceptual, referencial y operativo sobre la investigación educativa. Editorial Pueblo y Educación. La Habana, 2005.
43. CASTELLANOS SIMONS, DORIS. Hacia una concepción del aprendizaje desarrollador. La Habana, 2001.
44. CASTRO HERMIDAS, NELDI V. Una propuesta de instrucción heurística mediante la disciplina geometría. Tesis de maestría. Granada, España, 1998:
45. CENTRO NACIONAL DE INFORMACIÓN Y COMUNICACIÓN EDUCATIVA. Internet, 2003. (En:<http://www.cnice.mecd.es/>).
46. CERVERA, P. Algunas estrategias para la Resolución de Problemas Geométricos en duodécimo grado. Tesis para optar por el grado científico de master en Ciencias de la Educación. C. H. Cuba, 1998.
47. CHÁVEZ RODRÍGUEZ, JUSTO ALBERTO. Acercamiento necesario a la Pedagogía General. Editorial Pueblo y Educación. Habana, 2005.
48. \_\_\_\_\_ .Tendencias contemporáneas para transformar la educación en los países iberoamericanos. Ediciones INAES. México, DF, 1996.
49. \_\_\_\_\_ .Acercamiento necesario a la Pedagogía General Ciudad de La Habana: Editorial Pueblo y Educación, 2005.
50. CIENCIA, TECNOLOGÍA, SOCIEDAD Y CULTURA EN EL CAMBIO DE SIGLO. Colectivo de autores. Organización de Estados Iberoamericanos. Editorial Biblioteca Nueva, 2001. (<http://www.oci.es/ctsi9900.htm>)



51. COLECTIVO DE AUTORES. La personalidad: su diagnóstico y su desarrollo. Editorial Pueblo y Educación. La Habana 2004.
52. COLL SALVADOR, CÉSAR. La importancia de los contenidos en la enseñanza. Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación. Universidad de Barcelona. Internet, 2000.
53. CONSTRUYENDO UNA MINIQUEST. Internet, 2005  
(En :<http://www.biopoint.com/miniquests/miniquests.html>)
54. CRESPO BORGES, TOMÁS. Heurística y computación. Folleto. ISP. "Félix Varela". Villa Clara, 1990.
55. \_\_\_\_\_. Respuestas a 16 preguntas sobre el empleo de expertos en la investigación pedagógica. Material inédito en soporte magnético tomado de la Conferencia impartida por el autor a alumnos del doctorado curricular. ISP "Félix Varela" sobre "El empleo de los criterios de en la Investigación pedagógica". 30 de mayo del 2006.
56. CRESPO BORGES, TOMÁS. y otros. La contribución de la clase de Computación a la introducción y desarrollo de conceptos elementales de matemática numérica en el nivel medio. Publicado en revista electrónica La Matemática en la enseñanza media. Internet, 2004. (En: <http://www.matematicaparatodos.com>.)
57. CRUZ GARCÍA, C. A. Como desarrollar en estudiantes habilidades para Resolver Problemas. (Universidad Central de Venezuela), pp. 156-182. Revista Educación Matemática en las Américas VII. Enseñanza Científica Tecnológica. Colección de Documentos 37.UNESCO, París, (CIAEM), 1990.
58. CRUZ FERRÁS, ALDO. La instrucción heurística en la enseñanza de la geometría. Tesis para optar por el grado científico de master en Ciencias Pedagógicas. Holguín, 2002.
59. DANILOV, M. A: Y SKATKIN. M. N. Didáctica de la escuela media. Editorial Libros para la Educación. La Habana, 1980.
60. DAVÝDOV, V. V. Tipos de generalización en la enseñanza, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, Cuba.
61. DE ARMAS RAMÍREZ, NERELY. Caracterización y diseño de los resultados científicos como aportes de la investigación educativa. Curso 85. Pre reunión en el Congreso Internacional Pedagogía 2003. Material en soporte magnético.

62. DE GUZMÁN OZÁMIZ, MIGUEL. Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Organización de Estados Iberoamericanos Para la Educación, la Ciencia y la Cultura. Internet, 2005. (En: <http://www.campus-oei.org/oeivirt/ciencias.htm>.)
63. \_\_\_\_\_ Tendencias innovadoras en educación matemática. Universidad Complutense de Madrid. Internet, 2005. (En: <http://www.campus-oei.org/oeivirt/ciencias.htm>.)
64. DELGADO DARIAS, LUIS FELIPE. Sistema de tareas docentes: una alternativa para elevar el aprendizaje de los contenidos físicos en la Enseñanza General Media. Tesis para optar por el grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Instituto Superior Pedagógico "Félix Varela". Villa Clara, 2003.
65. DELGADO RUBÍ, JOSÉ RAÚL. La Enseñanza De La Matemática En El Umbral Del Siglo XXI. En soporte magnético, 1999.
66. DESCARTES, RENÉ. Discurso sobre el Método. Investigación de la Verdad. Ediciones Universales. Bogotá, 1994.
67. DÍAZ GÓMEZ, ARNALDO. Modelo Teórico con enfoque interdisciplinario para la formación de los conceptos del cálculo infinitesimal en la preparación de profesores de Física y de Ciencias Exactas. Tesis para optar por el grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Instituto Superior Pedagógico "Félix Varela". Villa Clara, 2003.
68. DICCIONARIO DE LAS CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN. Editorial Santillana, México, 2002.
69. DISCO COMPACTO "SOFTWARE EDUCATIVO A TU ALCANCE". Dpto. de Software Educativo del Ministerio de Educación. Ciudad de la Habana, 2005.
70. EXPÓSITO RICARDO, CARLOS y OTROS. Algunos elementos de metodología de la enseñanza de la informática. Soporte electrónico. La Habana, 2001.
71. EXPÓSITO RICARDO, CARLOS. Elementos de heurística. material inédito. La Habana, 1993.
72. FARFÁN, R. M. Heurística, Sección de Matemática Educativa. CINVESTAV-INP. México, 1995.
73. FERNÁNDEZ RODRÍGUEZ, BERTA. Temas de didáctica. Primera parte. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad Pedagógica "Enrique J. Varona", 1997. Material en soporte magnético, s/a.

74. FERNÁNDEZ, S. Sobre heurística matemática. Enseñanza de la ciencia. Revista de investigación y experiencias didácticas (número extra) Barcelona, 1987.
75. FIALLO RODRÍGUEZ JORGE. Interdisciplinariedad en la escuela: De la utopía a la realidad. La Habana. Cuba. Resumen del Curso 01. IPLAC. Pedagogía 2001. Material en soporte magnético.
76. \_\_\_\_\_. Conferencia en Taller Técnicas o procedimientos para un aprendizaje desarrollador. La Habana. ICCP. Diciembre del 2005. Presentación PowerPoint.
77. FRIDMAN, M.LEV. Metodología para enseñar a los estudiantes del nivel superior a resolver problemas de matemática. Editorial Moscú, 1979. (Traducido en la Universidad de Sonora). Méjico, 1993.
78. GALPERIN, P. YA. Sobre el método de formación por etapas de las acciones intelectuales. Antología de la psicología pedagógica y de las edades. La Habana: Pueblo y Educación, 1986.
79. GARCÍA CRUZ, JUAN ANTONIO. La Didáctica de las Matemáticas: una visión general. Internet, 2006. (En: <http://nti.educa.rcanaria.es/rtee/rtee.htm>).
80. GARCÍA MUÑOZ, JOSÉ JULIÁN. Modelo teórico-metodológico para el perfeccionamiento del proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo aritmético en el primer ciclo de la enseñanza primaria. Tesis para optar por el grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Santa Clara, 2004.
81. GASCÓN, J. El papel de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas. Rev. Educación Matemática. Vol. 6, No. 3. México, 1994.
82. GIL PÉREZ, DANIEL Y JUAQUÍN MARTÍNEZ TORREGOSA. ¿Cómo evaluar si se "hace" ciencia en el aula? (17-28) En Revista Alambique. Didáctica de las Ciencias Experimentales. El trabajo científico en el aula. El estudio de la ecología. Número 20, abril 1999.
83. GIL PÉREZ, DANIEL. ¿Cómo promover el interés por una cultura científica? Una propuesta didáctica fundamentada por la educación científica de jóvenes de 15 a 18 años. Oficina Regional de Educación para América Latina y el Caribe. OREAL/ UNESCO. Andros Impresores. Chile Santiago, Chile, 2005.
84. \_\_\_\_\_. Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura. Algunas tendencias innovadoras espontáneas: Aportes y limitaciones. Internet, 2002. (En <http://campus-oei.org/oeivirt/gil01.htm>)
85. \_\_\_\_\_. Atención a la situación mundial de la educación científica para el futuro. Editorial Academia. La Habana:, 1999.

86. \_\_\_\_\_. Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Tendencias e innovaciones. Editorial Popular S.A. España, 1993.
87. GÓMEZ GUTIÉRREZ, LUÍS IGNACIO. Intervención en el II Seminario Nacional para Educadores. Folleto: Editorial Pueblo y Educación, .2001.
88. GONZÁLEZ CASTRO, VICENTE. Profesión: Comunicador. Editorial Pablo de la Torriente. La Habana 1989.
89. GONZÁLEZ CASTRO, VISENTE. Teoría y Práctica de los Medios de Enseñanza. Editorial Pueblo Y Educación. Ciudad de la Habana, 1986.
90. GONZÁLEZ CONCEPCIÓN, JORGE FRANCISCO. Algunas consideraciones sobre la utilización del Geómetra para sistematizar contenidos en los diferentes grados y niveles de enseñanza, haciendo énfasis en la enseñanza preuniversitaria. Villa Clara. Soporte electrónico, 2006.
91. \_\_\_\_\_. Informe de oponencia a Rodríguez Bueno, Osvaldo. El Asistente "Geómetra": Una alternativa para perfeccionar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la disciplina Matemática en el nivel Medio Superior. Trabajo de curso. Villa Clara, 2005.
92. GONZÁLEZ REY, FERNANDO. Comunicación, personalidad y desarrollo. Editorial Pueblo y Educación. La Habana, 1995.
93. \_\_\_\_\_. La personalidad su educación y desarrollo. Editorial Pueblo y Educación. La Habana, 1989.
94. GONZÁLEZ SOCA, ANA MARÍA Y CARMEN REINOSO CÁPIRO. Nociones de sociología, psicología y pedagogía. Ciudad de La Habana. Editorial Pueblo y Educación, 2002.
95. GONZÁLEZ, F. Psicología, Principios y categorías. Editorial Ciencias Sociales. La Habana. Cuba, 1989.
96. \_\_\_\_\_. Metodología de la enseñanza de la Matemática. Tomo 1. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana, 1992.
97. GONZÁLEZ, OTMARA Tendencias pedagógicas contemporáneas. Capítulo 12. El enfoque histórico-cultural como fundamento de una concepción pedagógica. Impresión ligera, s/a .
98. \_\_\_\_\_. El planeamiento curricular en la enseñanza superior. Impresión ligera. La Habana. 1998.

99. GUÉMÁNOVA, A. y otros. Lógica en forma simple sobre lo complejo. Diccionario. Editorial Progreso. Moscú, 1991.
100. GUTIÉRREZ MORENO, RODOLFO B. Formas organizativas del Proceso Pedagógico. I. S. P "Félix Varela". Material en soporte magnético, 2004.
101. \_\_\_\_\_ . Los componentes del proceso pedagógico y su dinámica. Soporte electrónico. Villa Clara, 2001.
102. \_\_\_\_\_ , El contenido del Proceso Pedagógico. Su enfoque complejo – integral. Soporte electrónico. Villa Clara, 2001.
103. \_\_\_\_\_ . Precisiones metodológicas para la concepción y evaluación del proceso de formación del profesional de la Educación en la Universalización Pedagógica. ISP "Félix Varela". Soporte electrónico. Villa Clara, 2005.
104. GUZMAN, MIGUEL DE. Para pensar mejor. Editorial Labor, S.A., Madrid, 1991.
105. HERMIDAS NELDI V. Propuesta de instrucción heurística mediante la disciplina geometría". Tesis de maestría. Granada, España, 1998.
106. HERNÁNDEZ FERNÁNDEZ, M. A. y otros. Hacia una eficiencia educativa. Ed. Instituto Superior Tecnológico "América" e Instituto Superior Pedagógico para la ETP. Dpto. Editorial del Ejército Sangolquí, Valle de los Chillos, 1993.
107. HERNÁNDEZ SAMPIER, ROBERTO. Metodología de la investigación. La Habana: Editorial Félix Varela, 2003.
108. ILICH LENIN, VLADIMIR. Cuaderno de Filosóficos. Editorial MIR. Moscú, 1983.
109. JIMÉNEZ CASTRO, MAYNOR. PRACMAT: una herramienta para el estudio y preparación para el examen del bachillerato en matemáticas. Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica, 2000. E-mail: mjimenez@ice.co.cr.
110. JUNGK, WERNER. Conferencias sobre metodología de la enseñanza de la matemática 2 (primera parte) Editorial de Libros para la educación. Ciudad de la Habana, 1982.
111. KLINGBERG, LOTHAR. Introducción a la didáctica general. Editorial Pueblo y educación. La Habana, 1985.

112. LABAÑINO RIZZO CÉSAR A. y MARIO DEL TORO RODRÍGUEZ. Multimedia para la Ecuación. Editorial Pueblo y Educación. La Habana, 2001.
113. LABARRERE REYES, GUILLERMINA. Pedagogía. La Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1988.
114. LABARRERE SARDUY, ALBERTO F. Bases psicopedagógicas de la enseñanza de la solución de problemas matemáticos en la escuela primaria. Editorial Pueblo y Educación. La Habana, 1987.
115. \_\_\_\_\_ . Pensamiento, análisis y autorregulación de la actividad cognoscitiva de los alumnos. Editorial. Pueblo y Educación. La Habana 1996.
116. LABARRERE, G. y VALDIVIA, G. Pedagogía. Editorial Pueblo y Educación. La Habana, 1988.
117. LARA DÍAZ, LIDIA MERCEDES. Sistema de tareas didácticas para la dirección del trabajo independiente en la Metodología de la Enseñanza de la Física. Tesis para optar por el grado científico de Doctora en Ciencias Pedagógicas. Ciudad de La Habana, 1995.
118. LEONTIEV, ALEXEI N. Actividad Conciencia Personalidad. Editorial Pueblo y Educación, La Habana, 1982.
119. LEYVA HAZA, JULIO. La estructura del método de solución de tareas experimentales de Física como invariante del contenido. Tesis para optar por el grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Instituto Superior Pedagógico "Félix Varela". Villa Clara, 2002.
120. LOMPSCHER, J., K. MARKOVA, A. Y DAVIDOV, V. V. Formación de la actividad docente de los escolares. Editorial Pueblo y Educación. La Habana, 1987.
121. LÓPEZ, B. y COSTA, N. Modelo de enseñanza - aprendizaje centrado en la resolución de problemas: Fundamentación, presentación e implicaciones educativas. Revista Enseñanza de las Ciencias. Vol. 14 No 1, marzo, 1996.
122. LÓPEZ HURTADO, JOSEFINA Fundamentos de la educación/ Josefina López Hurtado Editorial Pueblo y Educación. La Habana, 2000.
123. LÓPEZ PALACIOS, JUAN VIRGILIO. La educación como sistema complejo. Conferencia impartida en el I. S. P. "Félix Varela". Impresión ligera, 2001.
124. MACEDO, BEATRIZ. III Congreso Internacional Didáctica de las Ciencias. Seminario Internacional "La enseñanza de las Ciencias en el S. XXI". "La formación científica como herramienta de inclusión social". Oficina Regional de Educación para América Latina y el Caribe. UNESCO-Santiago.

- Conferencia impartida por la Especialista Regional el 10 de febrero del 2004 en La Habana. Cuba. Material en soporte magnético.
125. MACEDO, BEATRIZ. IV Congreso Internacional Didáctica de las Ciencias. Habilidades para la vida: Contribución desde la educación científica en el marco de la Década de la educación para el desarrollo sostenible. Ciudad de La Habana: Educación Cubana, 2006.
  126. MAJMUTOV, M. I. La enseñanza problémica. La Habana: Pueblo y Educación, 1986.
  127. MARIMÓN CARRAZANA, JOSÉ ANTONIO. Aproximación al estudio del modelo como resultado científico. Centro de Estudio de Ciencias Pedagógicas "Félix Varela". Villa Clara, 2002.
  128. MARTÍNEZ LLANTADA, M. Filosofía de la Educación. IPLAC. La Habana, 1998.
  129. \_\_\_\_\_ .Calidad educacional, actividad pedagógica y creatividad. La Habana: Editorial Academia, 1998.
  130. MASON, J. Pensar matemáticamente. LMC. Barcelona, 1989.
  131. MAYER, F. Describing and improving learning. In R. R. Schemek Ed. Styles and strategies of learning. Plenum New York, 1983.
  132. MEZA CASCANTE, LUIS. Enseñanza del cálculo diferencial e integral con apoyo del programa Geometer's Sketchpa. Revista Comunicación, 1999.
  133. \_\_\_\_\_. Estrategias didácticas para el desarrollo de procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática asistida por computadora. Presentado en el Taller Matemática asistida por computadora. ITCR. Sede Regional San Carlos, 1998.
  134. \_\_\_\_\_. Problemas de máximos y mínimos en la educación secundaria con Geometer's Sketchpad Memorias del I Congreso Internacional de la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora, Costa Rica. 2001.
  135. MICROSOFT® ENCARTA® 2006. © 1993-2005 Microsoft Corporation. Reservados todos los derechos.
  136. MIGUEL J., LLIVINA LAVIGNE. Hacia una concepción del aprendizaje desarrollador ISP "Enrique José Varona", 2001.

137. MINISTERIO DE EDUCACIÓN REPUBLICA DE CUBA. Programa de Matemática. Décimo Grado. MINED. Vigente a partir del Curso 2004-2005. Soporte electrónico.
138. \_\_\_\_\_ . Programa de Matemática. Undécimo Grado. Vigente a partir del Curso 2004-2005. Soporte electrónico.
139. \_\_\_\_\_ . Programa de Matemática. Duodécimo Grado. Vigente a partir del Curso 2004-2005. Soporte electrónico.
140. MINISTERIO DE EDUCACIÓN, REPUBLICA DE CUBA. Programa de Computación. Décimo Grado. Vigente a partir del Curso. Soporte electrónico.
141. MITJANS MARTÍNEZ, ALBERTINA. Creatividad, personalidad y Educación. Editorial Pueblo y Educación La Habana, 1995.
142. MORALES ALDANA, LEONEL. Matemática-Computación-Educación. Actas de la octava conferencia internacional de educación matemática. 43. Colección de documentos. UNESCO, 1993.
143. MORENO, LUÍS. Instrumentos matemáticos computacionales. En: Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. Bogotá, 2002.
144. MÜLLER HORST. El trabajo Heurístico y la Ejercitación en la Enseñanza de la Matemática en la Enseñanza General Politécnica y Laboral. Folleto editado en el I.S.P. "Frank País García". Santiago de Cuba, 1990.
145. NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NTCM). Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática. Edición en castellano: Sociedad Andaluza de Educación Matemática "THALES". Sevilla, 1989.
146. NELDI V. CASTRO HERMIDAS. Una propuesta de instrucción heurística mediante la disciplina geometría. Tesis para optar por el grado científico de maestría en Ciencias de la Educación. Holguín, 1998.
147. ORGANIZACIÓN DE ESTADOS IBEROAMERICANOS PARA LA EDUCACIÓN, LA CIENCIA Y LA CULTURA. Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Internet, 2005. (En:<http://www.campus-oei.org/oeivirt/ciencias.htm>).



148. PÉREZ RODRÍGUEZ, GASTÓN. Metodología de la investigación pedagógica y psicológica. Editorial Pueblo y Educación, La Habana, 1984.
149. POLYA, GEORGE. Cómo plantear y resolver problemas. Editorial Trillas. México, 1964.
150. \_\_\_\_\_. How to solve it?, Rinehart and Winston Inc., N.Y., U.S.A., 1964.
151. \_\_\_\_\_. Mathematical Discovery. On understanding, learning, and teaching problem solving. Vol. 1. Ed. John Wiley and Sons, Inc. USA, 1962.
152. PORTAL COLOMBIANO. Haciendo referencia a la definición dada por el creador de las WebQuests Bernie Dodge. Internet, 2005. (En: <http://www.eduteka.org/>).
153. RAKITOV A. Fundamentos de Filosofía. Editorial Progreso, Moscú: 1989.
154. RAMOS LOZANO, ADRIÁN y VERGEL FAIRE, YULEIDYS. Posibilidades de utilizar el derive en la enseñanza de temas relacionados con fracciones algebraicas en preuniversitario. Trabajo de Diploma. Villa Clara, 2003.
155. REMEDIOS GONZÁLEZ, JUANA MARÍA. La creatividad y los modos de actuación en el desempeño profesional de los maestros. Universidad Pedagógica "Capitán Silverio Blanco. Curso 55 de Pedagogía 2003. Material en soporte magnético.
156. RICO MONTERO, PILAR. La Zona de Desarrollo Próximo. Procedimientos y tareas de aprendizaje. Editorial Pueblo y Educación. La Habana:, 2003.
157. RIETA, J. J. La resolución de problemas y la educación matemática: hacia una mayor interrelación entre investigación y desarrollo curricular. En Enseñanza de la Ciencias, Vol.7 N°1, p. 63 – 71, Barcelona, 1989.
158. RIVERO PÉREZ, HÉCTOR R. Un modelo para el tratamiento didáctico integral de las tareas teóricas de física y su solución. Tesis para optar por el grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Villa Clara, 2002.
159. RODRÍGUEZ BUENO, OSVALDO. El Asistente "Geómetra: Una alternativa para perfeccionar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la disciplina Matemática en el nivel Medio Superior. Trabajo de curso. Villa Clara, 2005.

160. RODRÍGUEZ LAMAS, RAÚL y otro. Introducción a la Informática Educativa. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana, 2002.
161. ROSENTAL, M. Y LUDIN, P. Diccionario Filosófico. Edición Revolucionaria. La Habana 1984.
162. RUIZ, E. Exploración de estrategias heurísticas en la Resolución de Problemas. Soporte magnético, 1995.
163. SHUARE, MARTHA. La Psicología soviética tal y como yo la veo. Moscú: Ed. Progreso, 1990.
164. SIERRA SALCEDO, REGLA ALICIA. Modelación y estrategia: Algunas consideraciones desde una perspectiva pedagógica. Editorial Pueblo y Educación, Ciudad de La Habana, Cuba, 2002.
165. SILVESTRE ORAMAS, MARGARITA. Aprendizaje, educación y desarrollo. Editorial Pueblo y Educación La Habana, 2001.
166. TALÍZINA, NINA FIODORNA. Psicología de la Enseñanza. Editorial Progreso. Moscú 1980.
167. TORRES RIVERA, ROSALINA. Estrategia metodológica para diseñar el sistema de tareas docentes de la Física con un enfoque sociocultural. Tesis en opción al título de Master en Ciencias Pedagógicas. Instituto Superior Pedagógico "Félix Varela". Villa Clara, 2002.
168. TORRES FERNÁNDEZ, PAUL. Didáctica de la escuela contemporánea. Un punto de vista cubano. Potosí Bolivia. Material en soporte magnético, s/a.
169. \_\_\_\_\_. El método heurístico en la enseñanza de la Matemática del nivel medio general. En: Revista Educación No. 60. MINED. La Habana, 1986.
170. \_\_\_\_\_. Utilización de procedimientos heurísticos en la formación metodológica. En: Revista Pedagogía Cubana Año I/ julio-septiembre de / No.2. Pág. 22 La Habana, 1989.
171. TORRES LIMA, PASTOR. Influencias de la computación en la enseñanza de la matemática. Tesis para optar por el grado científico de Doctora en Ciencias Pedagógicas. La Habana, 1997.
172. UNA PROPUESTA METODOLÓGICA PARA USAR INTERNET EN EL AULA. Internet, 2006 (En: <http://www.aula21.net/index.htm>, [aula.http://www.aula21.net/segunda/clic.htm](http://www.aula21.net/segunda/clic.htm), [://www.aula21.net/tercera/introduccion.htm](http://www.aula21.net/tercera/introduccion.htm) )
173. VALDÉS MENÉNDEZ, RAMIRO. Conferencia magistral ofrecida en el marco de Metánica. 1997.

174. VIGOTSKY L. Psicología y Pedagogía. Ed. Akal. Madrid., 1979.
175. \_\_\_\_\_. Zona de desarrollo próximo, una nueva aproximación. El desarrollo de los procesos psicológicos. Editorial Grijalbo, Barcelona, 1979.
176. \_\_\_\_\_. La concepción de aprendizaje y de la enseñanza Tomado de: Colectivo de autores. Tendencias pedagógicas contemporáneas. CEPES. Universidad de La Habana, 1999.
177. \_\_\_\_\_. Pensamiento y lenguaje. Editorial Pueblo y Educación, La Habana, 1982.
178. \_\_\_\_\_. Aprendizaje y desarrollo intelectual en la edad escolar. Editorial Infancia y aprendizaje. España, 1984.
179. ZILBERSTAIN TORUNCHA, J. Una didáctica para una enseñanza y un aprendizaje desarrollado. Curso del Congreso Pedagogía'99. La Habana, 1999.
180. \_\_\_\_\_. Principios didácticos en un proceso de enseñanza – aprendizaje que instruya y eduque. Preparación Pedagógica Integral para profesores universitarios (pp. 19 - 31). La Habana, 2003.
181. ZILBERSTEIN TORUNCHA, J.; SILVESTRE, M. Hacia una didáctica desarrolladora. Pueblo y Educación. La Habana, 2002.
182. ZILLMER, W. Complementos de metodología de la enseñanza de la matemática. Editorial Libros para la Educación. La Habana., 1981.

*Anexos*

# ANEXOS DEL CAPÍTULO I

## ANEXO 1.1

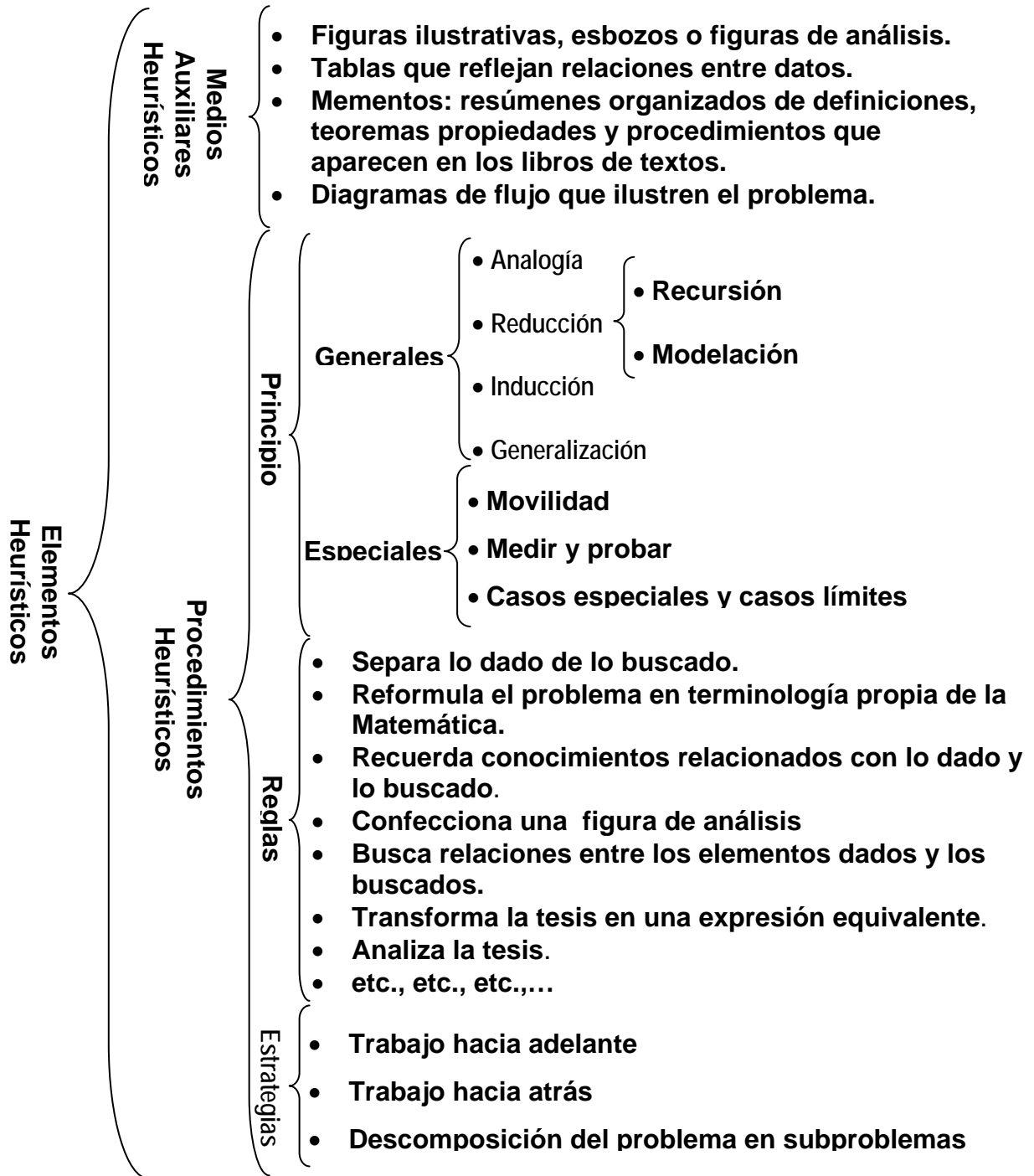
### **Recopilación de definiciones de problemas**

1. Es una pregunta a la que es imposible dar respuesta. Esta pregunta determina toda la actividad posterior del sujeto dándole un carácter selectivo. (Luria, A. 1981).
2. Una tarea difícil para el individuo que está tratando de resolverla (Schoenfeld, A. 1985).
3. Situación inherente a un objeto, que determina una necesidad en un sujeto, el cual desarrolla una actividad para transformarla (Álvarez, C.1995).
4. Es una situación en la que se intenta alcanzar un objetivo y se hace necesario encontrar un medio para conseguirlo (Chi, M., Glaser, R. 1986).
5. Una tarea cuyo método de realización y resultado son desconocidos, pero poseyendo los conocimientos y habilidades necesarias, se está en condiciones de acometer la búsqueda de los resultados o del método que se ha de aplicar (Barrios, S.1987).
6. Situación en la que existen nexos, relaciones, cualidades de y entre los objetos que no son accesibles directa o inmediatamente a la persona (Labarrere A, 1994).
7. Problema es la búsqueda consciente, con alguna acción apropiada, para lograr una meta claramente concebida Una situación desde la que se quiere llegar a otra y no se conoce el camino que puede llevar de una a otra (De Guzmán, M. 1994).
8. Situaciones matemáticas provenientes de diversos campos del conocimiento y que plantean alguna interrogante que no haya sido resuelta por el sujeto específico que la enfrenta (Bofil, Flores y Rodguez, 1995).
9. Situación nueva, sorprendente, de ser posible, interesante o inquietante, en la que se conoce el punto de partida y de llegada, pero no los procesos mediante los cuales se puede llegar. Es una situación abierta que admite varias vías de solución (Pozo, A. 1995)
10. Situación o conflicto para el que no hay respuesta inmediata, ni algoritmo, ni heurística, ni se sabe que información se necesita para conseguir una respuesta (Garret, M. 1998).
11. Toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo (Campistrous, L. 1998).

12. Un problema en matemática puede definirse como una situación - a la que se enfrenta un individuo o un grupo - para la cuál no se vislumbra un camino aparente u obvio que conduzca hacia su solución. Por tal razón, la resolución de problemas debe apreciarse como la razón de ser del quehacer matemático, un medio poderoso de desarrollar el conocimiento matemático y un logro indispensable para una educación que pretenda ser de calidad." Orientaciones para el trabajo pedagógico de matemática. Ministerio de educación del Perú. 2004

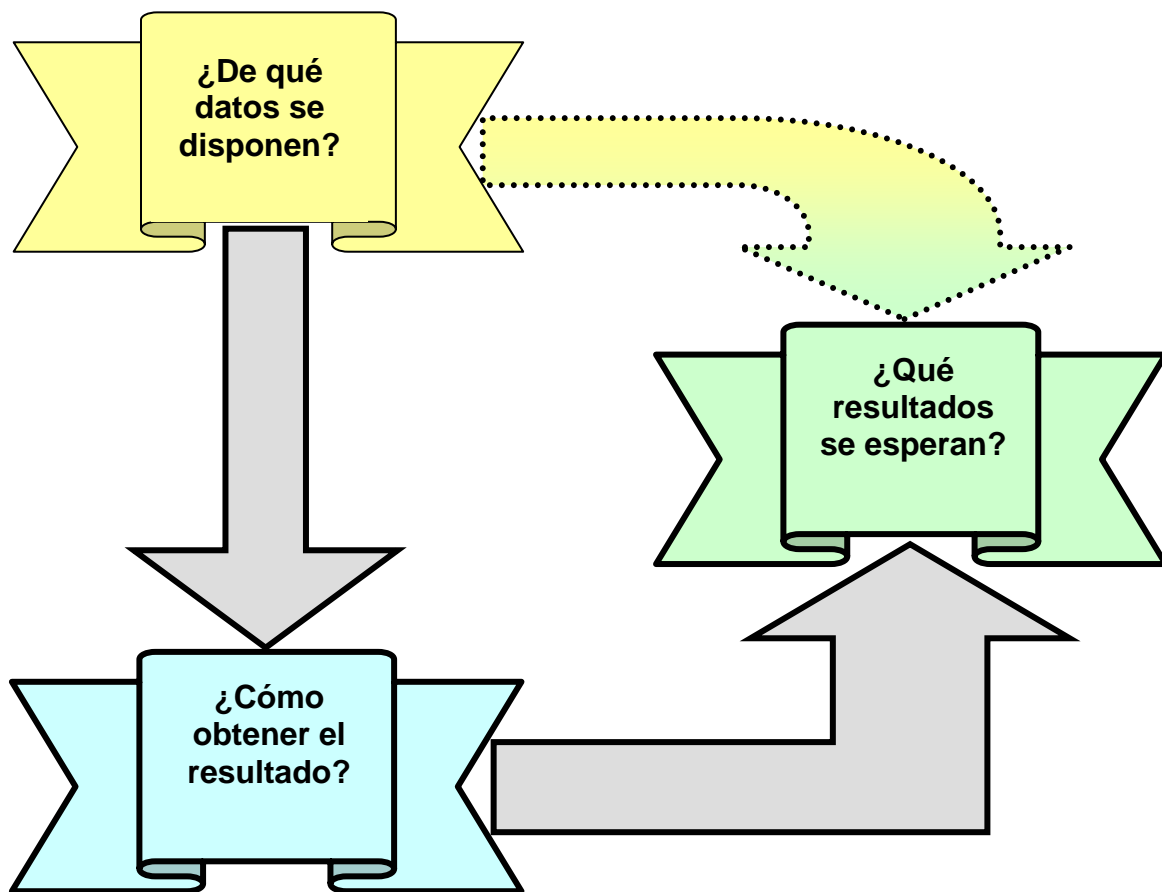
## ANEXO 1.2

### Clasificación de los elementos heurísticos



ANEXO 1.3

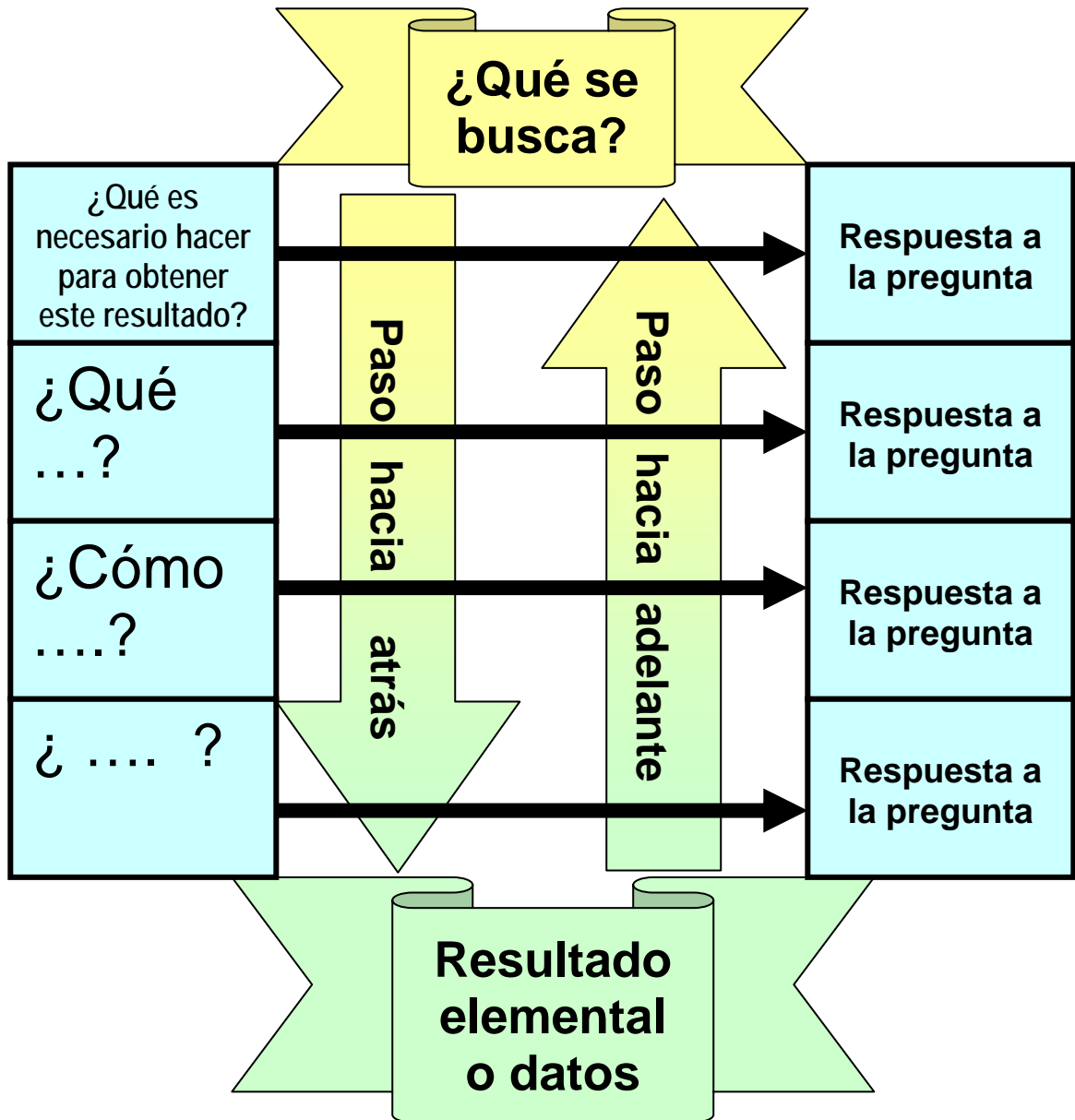
Trabajo hacia adelante. Esquema





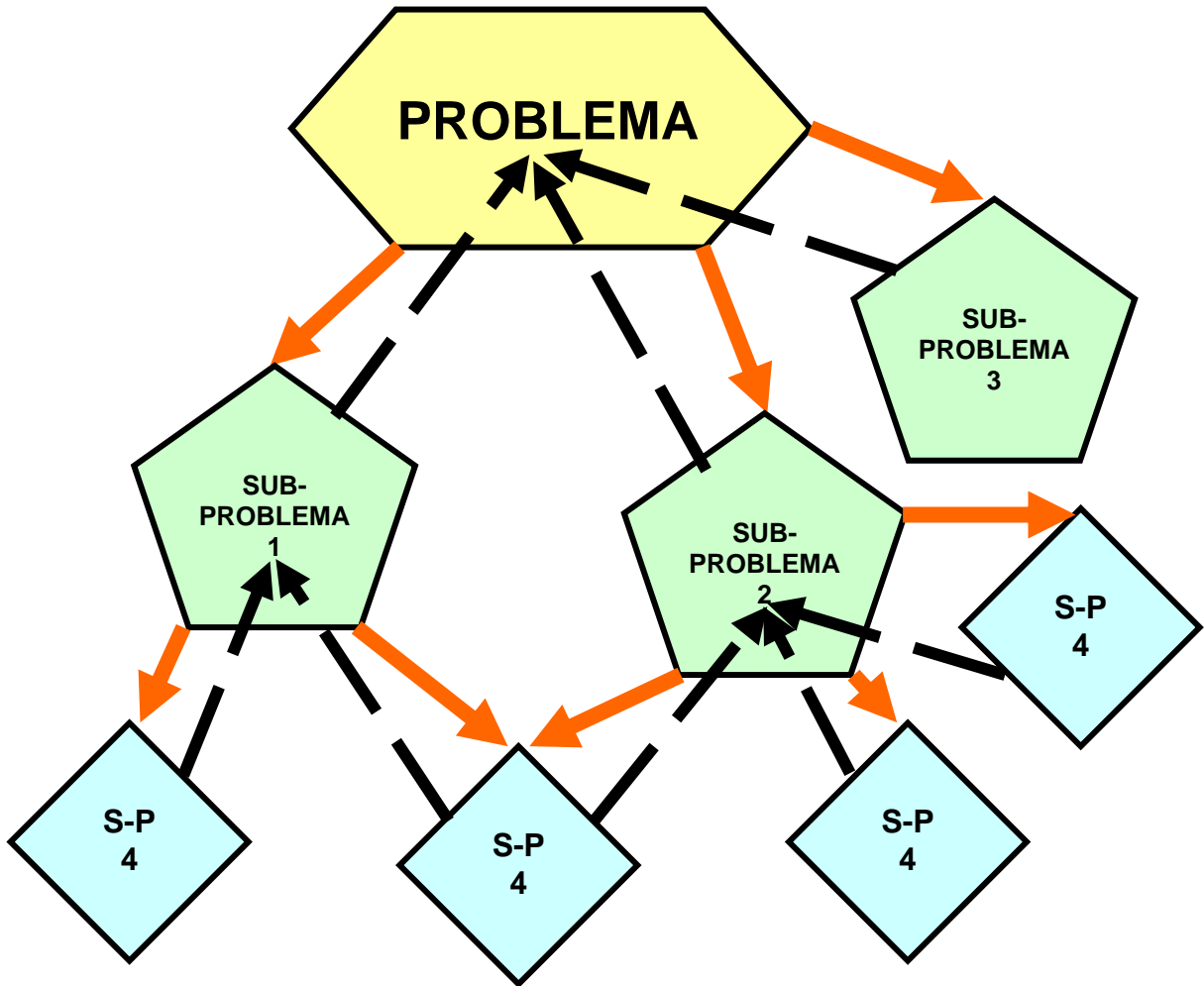
## ANEXO 1.4

### Trabajo hacia atrás. Esquema



ANEXO 1.5

Descomponer un problema en subproblemas. Esquema



## ANEXO 1.6

### **Método de investigación de Descartes**

“Así como la exagerada multiplicidad de leyes es con frecuencia excusa de las infracciones, y del mismo modo que los Estados mejor organizados son los que dictan pocas leyes, pero de rigurosa observancia, creí que, en lugar de los numerosos preceptos que contiene la lógica, bastan cuatro reglas, pero cumplidas de tal modo que ni por una sola vez fueran infringidas bajo ningún pretexto.

El primero de estos preceptos consistía en no recibir como verdadero lo que con toda evidencia no reconociese como tal, evitando cuidadosamente la precipitación y los prejuicios, y no aceptando como cierto sino lo presente a mi espíritu de manera tan clara y distinta que acerca de su certeza no pudiera haber la menor duda.

El segundo, era la división de cada una de las dificultades con que tropieza la inteligencia al investigar la verdad, en tantas partes como fuera necesario para resolverlas.

El tercero, ordenar los conocimientos, empezando siempre por los más sencillos, elevándome por grados hasta llegar a los más compuestos, y suponiendo un orden en aquellos que no lo tenían por naturaleza.

Y el último, consistía en hacer enumeraciones tan completas y generales, que me dieran la seguridad de no haber incurrido en ninguna omisión”<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Descartes, Renato. Discurso sobre el Método. Investigación de la Verdad. Ediciones Universales. Bogotá 1994. pág 31

## ANEXO 1.7

### **Modelo heurístico de Mario Bunge para preparar soluciones a los problemas de investigación**

“No se conoce receta infalible para preparar soluciones correctas a problemas de investigación mediante el mero manejo de los ingredientes del problema: sólo la resolución de problemas de rutina es, por definición una actividad en gran medida regida por reglas. (Secc. 4,4) Pero pueden darse algunos consejos para la manipulación de problemas de investigación para aumentar la probabilidad del éxito. Por ejemplo, la siguiente docena de reglas heurísticas.

#### **1.- Formular el problema con claridad.**

Minimizar la vaguedad de los conceptos y la ambigüedad de los signos.

Seleccionar símbolos adecuados, tan sencillos y sugestivos como sea posible.

Evitar formas lógicas defectuosas.

#### **2.- Identificar los constituyentes.**

Señalar las premisas y las incógnitas y escribir en forma desarrollada el generador

#### **3.- Descubrir los presupuestos.**

Explicitar los presupuestos relevantes de más importancia.

#### **4.- Localizar el problema.**

Determinar si el problema es sustantivo o estratégico; en el primer caso, si es empírico o conceptual; en el segundo caso, si es metodológico o de valoración.

Insertar el problema en una disciplina (problema unidisciplinario) o en un grupo de disciplinas (problema interdisciplinario).

Averiguar la historia reciente del problema, si la tiene.

#### **5.- Seleccionar el método.**

Elegir el método adecuado a la naturaleza del problema y a la clase de solución deseada.

Estimar por anticipado las posibles ventajas y lo posibles inconvenientes de los varios métodos, si los hay.

En caso de no tener a mano ningún método, formular el problema estratégico de arbitrar uno, y empezar por este problema.

#### **6.- Simplificar.**

Eliminar la información redundante.

Comprimir y simplificar los datos.

Introducir supuestos simplificadores.

**7.- Analizar el problema.**

*Divide et impera*: desmenuzar el problema en sus unidades más simples o sea, en pasos más cortos (subproblemas).

**8.-Planear.**

Programar la estrategia: ordenar los problemas-unidad en orden de prioridad lógica; si esto no es posible, ordenarlos según su grado de dificultad.

**9.-Buscar problemas análogos resueltos.**

Intentar incluir el problema dado en una clase conocida de problemas, haciendo así rutinaria la tarea.

**10.- Transformar el problema.**

Variar constituyentes y/o formulación, interpretando convertir el problema dado en otro más tratable y del mismo campo. Siempre que sea posible, desplazarse hacia un problema equivalente.

**11.- Exportar el problema.**

Si fracasan los intentos anteriores, intentar cambiar el problema dado por un problema homólogo de otro campo, como se hace cuando un problema de fisiología humana se transfiere al terreno de la fisiología de la rana.

**12.- Controlar las soluciones.**

Comprobar si la solución es correcta, por lo menos, razonable.

Repasar los presupuestos simplificadores y, si es necesario, abandonar algunas de esas restricciones para atacar el nuevo problema más complejo que resulte.

Repetir todo el proceso y, si es posible, probar con otra técnica.

Estimar la precisión alcanzada.

Indicar posibles vías para mejorar la solución.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup> Bunge, Mario. La Investigación científica. Editorial Ciencias Sociales. La Habana 1972. pág 224-226

## ANEXO 1.8

Tabla resumen del modelo de Polya

PASOS	ACCIONES	PREGUNTAS
1	Comprender el problema.	¿Cuál es la incógnita?, ¿Cuáles son los datos?, ¿Cuál es la condición?, ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?, ¿Es insuficiente?, ¿Redundante?, ¿Contradictoria?
2	Concebir el plan.	<p>¿Se ha encontrado con un problema semejante?</p> <p>¿Ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?</p> <p>¿Conoce algún problema relacionado con éste? ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil? Mire atentamente la incógnita y trate de recordar un problema que sea familiar y que tenga la misma incógnita o una incógnita similar.</p> <p>He aquí un problema relacionado al suyo y que se ha resuelto ya. ¿Podría usted utilizarlo? ¿Podría utilizar su resultado? ¿Podría emplear su método? ¿Le haría usted falta introducir algún elemento auxiliar a fin de poder utilizarlo?</p> <p>¿Podría enunciar el problema de otra forma? ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente? Refiérase a las definiciones.</p> <p>Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero algún problema similar. ¿Podría imaginarse un problema análogo un tanto más accesible? ¿Un problema más general? ¿Un problema más particular? ¿Un problema análogo? ¿Puede resolver una parte del problema? Considere sólo una parte de la condición; descarte la otra parte; ¿En qué medida la incógnita queda ahora determinada? ¿En qué forma puede variar? ¿Puede usted deducir algún elemento útil de los datos? ¿Puede pensar en algunos otros datos apropiados para determinar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita o los datos, o ambos si es necesario, de tal forma que la nueva incógnita y los nuevos datos estén más cercanos entre sí?</p> <p>¿Ha empleado todos los datos? ¿Ha empleado toda la condición? ¿Ha considerado usted todas las nociones esenciales concernientes al problema?</p>
3	Ejecutar el plan.	<p>Compruebe cada uno de los pasos, al ejecutar su plan de la solución. ¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede usted demostrarlo?</p>
4	Examinar la solución obtenida.	<p>¿Puede usted verificar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento? ¿Puede obtener el resultado en forma diferente? ¿Puede verlo de golpe? ¿Puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema?</p>



## ANEXO 1.9

Tabla comparativa de los 8 modelos heurísticos más referenciados en la literatura científica

Polya	Schoenfeld	Bell	Fridman	Jungk	de Guzmán	Masón	Algarabel
Comprender el problema.	Analizar y comprender el problema.	Presentar el problema en forma general.	Análisis del problema.	Orientación hacia el problema.	Familiarízate con el problema.	Abordaje.	Análisis.
		Reformular el problema en forma operacional.	Escritura esquemática del problema.				
Concebir el plan.	Diseñar y planificar soluciones.	Formular hipótesis y procedimientos alternativos para atacar el problema.	Búsqueda del plan de solución.	Trabajo en el problema	Búsqueda de estrategias.		Exploración.
Ejecutar el plan.	Explorar soluciones.	Probar las hipótesis y llevar a cabo procedimientos que permitan obtener una solución o conjunto de soluciones.	Ejecución del plan de solución.	Solución del problema.	Lleva adelante tu estrategia.	Ataque.	Verificación de la solución.
Examinar la solución obtenida.	Comprobar la solución.	Analizar y evaluar las soluciones, las estrategias usadas para obtenerlas y los métodos que condujeron al descubrimiento de estrategias para resolver el problema.	Prueba del plan de solución investigación del problema.	Evaluación de la solución y la vía.	Revisa el proceso y saca consecuencias de él.	Revisión.	
			Formulación de la respuesta al problema.				
			Análisis final de la solución del problema.				



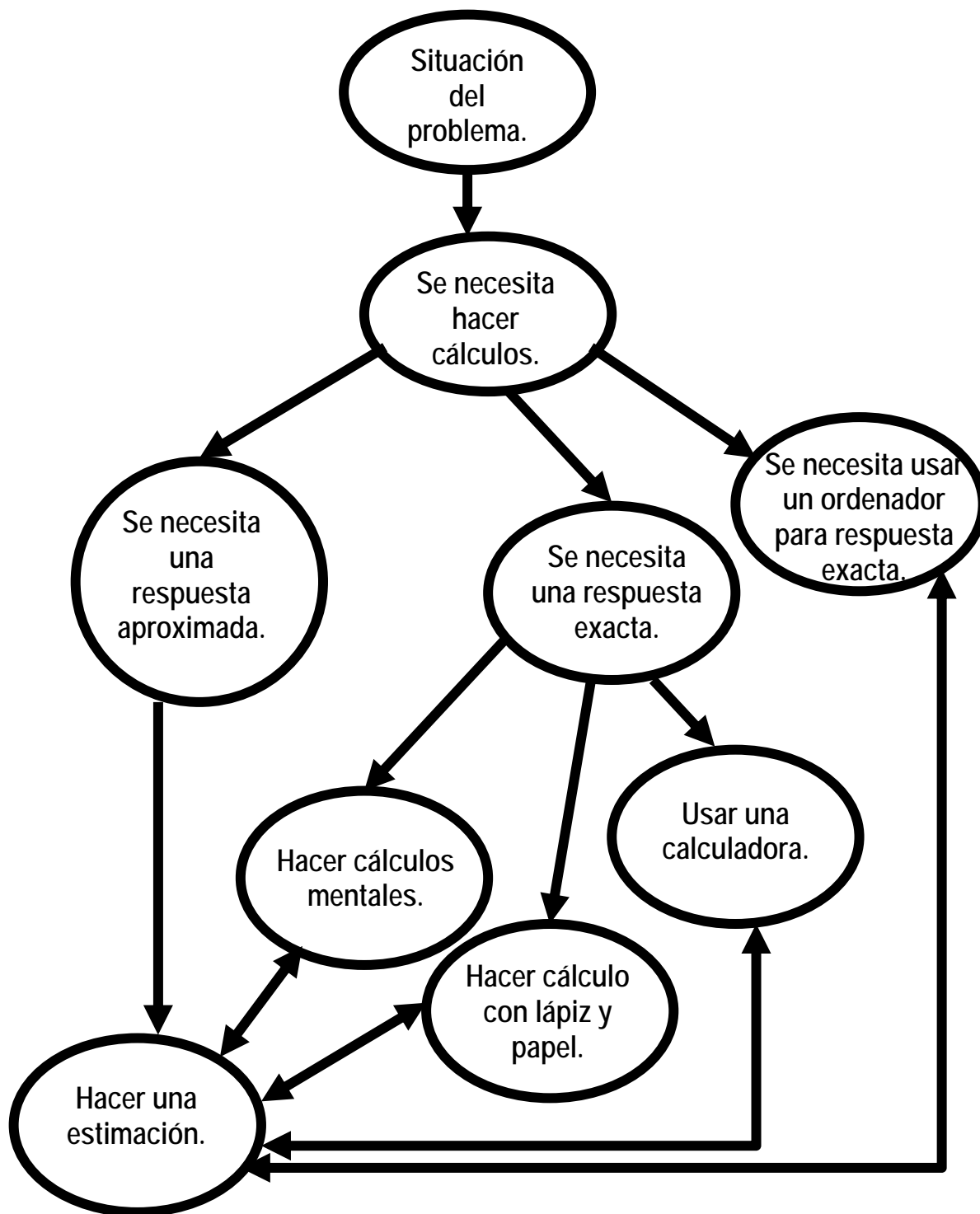
## ANEXO 1.10

Reglas heurísticas utilizando el modelo de Polya para dar respuesta a lo planteado en la etapa final del modelo de Fridman.

ETAPAS FINALES DEL MODELO DE FRIDMAN	REGLAS HEURÍSTICAS PARA EL CUARTO PASO DEL MODELO DE POLYA
Prueba del plan de solución investigación del problema.	¿Puede usted verificar el resultado? (*) ¿Puede verificar el razonamiento? (*) ¿Satisface la respuesta todos los requerimientos del problema? ¿Bajo cuáles condiciones el problema tiene solución? ¿Cuántas de las soluciones dadas son posibles para satisfacer las condiciones del problema? ¿Bajo qué condiciones el problema no tiene solución?
Formulación de la respuesta al problema.	Formule explícitamente la respuesta del problema.
Análisis final de la solución del problema.	¿Puede obtener el resultado en forma diferente? (*) ¿Puede verlo de golpe? (*) ¿Puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema? (*) ¿Cuáles son las conclusiones que se pueden derivar de la solución encontrada?
(*) Preguntas contempladas en el modelo de Polya originalmente. Las demás preguntas son formuladas por el autor en correspondencia con los propósitos del modelo de Fridman y las posibilidades que ofrecen las reglas o impulso heurísticos.	

ANEXO 1.11

Opciones de cálculo ante problemas que lo requieran. Esquema



## ANEXO 1.12

### Resumen de cambios en contenidos y énfasis en las Matemáticas 9-12

#### Temas que han de recibir más atención.

##### ➤ Álgebra.

- El uso de problemas del mundo real para motivar y aplicar la teoría.
- El uso de utilidades matemáticas para desarrollar estructuras conceptuales.
- Los métodos basados en la informática tales como aproximaciones sucesivas y utilidades gráficas, para resolver ecuaciones e inecuaciones.
- La estructura de los conjuntos de números.
- Las matrices y sus aplicaciones.

##### ➤ Geometría.

- La integración de los temas tanto entre sí como a través de los distintos niveles.
- Enfoques coordinados y de transformación.
- El desarrollo de secuencias cortas de teoremas.
- Argumentos educativos expresados de forma o largo de forma de frases o párrafo.
- Exploraciones basadas en la informática, de figuras en 2 o 3 dimensiones.
- Geometría tridimensional.
- Aplicaciones y construcciones de modelos a partir del mundo real.

##### ➤ Trigonometría.

- El uso de calculadoras científicas adecuadas.
- Aplicaciones y construcciones de modelos que sean realistas.
- Las conexiones entre las razones aritméticas en triángulos rectángulos, las funciones trigonometría y las funciones circulares inversas.
- El uso de utilidades gráficas para resolver ecuaciones e inecuaciones.

##### ➤ Funciones.

- La integración de los temas tanto entre sí como a través de los distintos niveles.
- Las conexiones entre una situación de problema, su modelo como fusión en forma simbólica y la representación gráfica de dicha función

- La adecuación de una función expresada de forma analítica como aprobación de la razonabilidad de las representaciones generadas por las unidades gráficas.
- Las funciones incluidas para servir de modelos a problemas del mundo real.
- **Estadísticas.**
- **Probabilidad.**
- **Matemática discreta.**

### **Temas que deban recibir menos atención.**

- **Álgebra.**
  - Enunciados clasificado por tipos, como los de monedas, dígitos y trabajo.
  - La simplificación de expresiones radicales.
  - El uso de los factores para resolver ecuaciones y para simplificar expresiones racionales.
  - Las operaciones con expresiones racionales.
  - Representaciones gráficas de ecuaciones con papel y lápiz por medio de una trama de puntos.
  - Los cálculos logarítmicos usando tablas e interpolación.
  - La resolución de sistemas de ecuaciones usando determinantes.
  - Las secciones cónicas.
- **Geometría.**
  - La geometría euclidiana como sistema axiomático completo.
  - Las demostraciones de incidencia y los teoremas de posición relativa.
  - La geometría desde un punto de vista sintético.
  - Las demostraciones a dos columnas.
  - Los polígonos inscritos y circunscritos.
  - Los teoremas para los círculos que impliquen razones aritméticas entre segmentos.
  - La geometría analítica como curso aparte.
- **Trigonometría.**
  - La verificación de identidades complejas.
  - Las aplicaciones numéricas de las identidades de suma y diferencia de ángulos, del ángulo doble y del ángulo mitad.
  - Los cálculos por medio de tablas de interpolación.

- La resolución de ecuaciones trigonométricas a base de lápiz y papel.

➤ **Funciones.**

- Obtención de valores con lápiz y papel.
- La representación gráfica de funciones a mano usando tablas de valores.
- Las fórmulas dadas como modelos de problemas del mundo real.
- La expresión de ecuaciones de una función de forma analítica, con el exclusivo objeto de representarlas gráficamente.
- Detrás de tratamiento de curso aparte.

## **ANEXO 1.13**

### **Resumen de cambios en la práctica docente para Matemática 9-12**

#### **Más atención a:**

- La implicación activa del alumno en la construcción y aplicación de ideas matemáticas.
- La resolución de problemas como medio y como meta de la docencia.
- Técnicas eficaces de formulación de preguntas que fomenten la interacción de los estudiantes.
- El uso de diversos formatos para docencia (grupos pequeños, exploraciones individuales, instrucción entre compañero, discusión de toda clase, trabajos).
- El uso de calculadoras y ordenadores como herramientas para hacer matemáticas.
- El establecimiento y aplicación de la interrelación entre temas matemáticos.
- El mantenimiento sistemático de lo que aprende el alumno y revisión inserta en el contexto de temas y situaciones de problemas nuevos.
- La evaluación del aprendizaje como parte integrante de la docencia

#### **Menos atención a:**

- Que el profesor-textos sean las fuentes exclusivas del conocimiento.
- La memorización pura de hechos y destrezas.
- Dedicar un tiempo excesivo a trabajo individual de mesa para practicar tareas rutinarias.
- La docencia por medio de la explicación del profesor.
- El trabajo reiterativo que las destrezas con papel y lápiz.
- Considerar las pruebas de evaluación como algo secundario cuyo único propósito sea dar una nota.

## **ANEXO 1.14**

### **Estructura de la guía para la clase con software**

**Título de la tarea:** Identifica la tarea específica.

**Introducción:** Se contextualiza la tarea y se brinda información de aquellos elementos que pueden contribuir a motivar la realización de la tarea.

**Objetivo:** Se plantea el propósito central de la tarea.

**Tarea:** Se amplía la información necesaria para dejar bien explícita la tarea a realizar.

**Proceso:** Se plantean las fases o subprocesos necesarios para la realización de la tarea.

**Recursos:** Se especifican los medios informáticos necesarios para resolver la tarea (software educativo, páginas Web, información digitalizada disponible en el laboratorio de computación como las enciclopedias, revistas, libro de texto, entre otros)

**Conclusiones:** En la solución de toda tarea los alumnos tienen que arribar a conclusiones. En esta parte se pueden especificar aquellos elementos que hay que tener en cuenta en las conclusiones.

**Bibliografía:** Se relacionan las fuentes a consultar para resolver la tarea.

**Evaluación:** Se plantea el criterio que se seguirá para evaluar la tarea, muy importante para que los alumnos puedan realizar su autoevaluación.<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup> Propuesta dada en el CD "Software educativo a tu alcance".Dpto de Software Educativo del Ministerio de Educación. Ciudad de la Habana. 2005

## ANEXO 1.15

### Fases de la actividad en la SofTarea

- **Fase de orientación:** El docente podrá presentar la SofTarea utilizando diversas vías según sus posibilidades (de forma oral, impresa como una hoja de trabajo, a través de un documento Word o Página Web que sea colocada en la carpeta perteneciente a su grupo de estudiante en las computadoras del laboratorio de la escuela).
  - **Introducción:** Motivación y planteamiento de los objetivos de la tarea.
  - **Formulación de la tarea:** Planteamiento de los ejercicios o preguntas a solucionar.
  - **Sugerencias generales:** Expresa cómo proceder para darle solución a la tarea en sentido general, los recursos informáticos que puede utilizar, la forma de organización (individual o grupal) y tiempo de ejecución según la complejidad de la tarea (corto, mediano o largo plazo). Además se debe precisar si los estudiantes harán una exposición oral de la tarea o colocarán sus trabajos en la carpeta que le pertenece a su grupo en las computadoras.
  - **Explicación de la forma de evaluación:** Se comunica de forma breve los indicadores que se tendrán en cuenta en la calificación.
  - **Indicación de los recursos de información necesarios:** Se debe precisar el software a utilizar y si pueden hacer uso de alguna fuente bibliografía que se encuentra en la biblioteca de la escuela o que esté al alcance de los estudiantes como el Libro de texto.
- **Fase de ejecución:** En la formulación de la tarea y la orientación se deben precisar las acciones a realizar por el estudiante para poder dar solución a la misma.
  - **Búsqueda de la información:** A través de los mecanismos de localización y búsqueda de la información que ofrece el software.
  - **Selección de la información:** Una vez que el estudiante ha estudiado el tema que se le orientó, seleccionará la parte que necesita para dar solución a la tarea y extraerla hacia la aplicación informática donde la va a procesar.
  - **Extracción de la información:** Se refiere a la extracción de la información seleccionada hacia la aplicación informática donde la va a procesar.
  - **Creación de información:** El estudiante es el que aporta los contenidos a través de su imaginación y creatividad.



- **Conservación de la información:** Almacenar o preservar la información seleccionada hacia los diferentes dispositivos de almacenamiento (disco compacto, disquetes, disco duro, etc.)
- **Procesamiento de la información:** El estudiante determina los aspectos esenciales del contenido estudiado y elabora una nueva información a partir de las pre-existentes.
- **Ejercitación:** Contempla la realización de ejercicios con carácter interactivo que el docente indique en la formulación de la tarea.
- **Entretenimiento instructivo:** Se refiere a la interacción con los juegos que se incluyan en los softwares.

**Nota:** La presencia de cada una de las acciones a realizar por el estudiante estará en dependencia del tipo de tarea y el objetivo que se persigue.

- **Fase de control:** La evaluación de las soluciones a las tareas planteadas.<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup> Propuesta dada en el CD "Software educativo a tu alcance". Dpto de Software Educativo del Ministerio de Educación. Ciudad de la Habana. 2005

## **ANEXO 1.16**

### **Clasificación de las WebQuests y su estructura**

#### **➤ WebQuests a corto plazo.**

Entendiéndose por esta aquellas que se orienta con la intención de adquirir e integrar los conocimiento de un determinado contenido de una o varias materias en el período de tiempo aproximado de tres turnos de clases.

#### **➤ WebQuests a largo plazo.**

Estas se desarrollan en un mayor tiempo, comprendido entre una semana o un mes. Por tales motivos es que sus tareas son más complejas y generalmente terminan con la exposición del trabajo mediante presentaciones en Microsoft PowerPoint, página Web u otras herramientas informáticas con estos fines.

### **Estructura de la WebQuests**

#### **Introducción.**

La introducción debe adentrar a los alumnos en el tema de investigación, en el contexto del problema a resolver a partir de su descripción, para que este funcione como elemento motivacional y el educando tome el papel o rol de un adulto. En la descripción de dicho problema se debe tener en cuenta el conocimiento anterior del alumno para prepararlo con eficiencia. Además, se establecen la pregunta esencial que los estudiantes deben contestar.

#### **➤ Tarea.**

La tarea incluye una serie de preguntas diseñadas con el propósito de adquirir la información objetiva y real que se requiere para contestar la pregunta esencial. Esta, la tarea, debe responder al currículo y está conectada claramente con lo que los alumnos deben saber y poder hacer para alcanzar los objetivos. La misma conducirá al estudiante a sintetizar, tomar decisiones e ir más allá de los datos dados haciendo una generalización y elaborando un producto creativo.

#### **➤ Proceso.**

En el proceso se indicarán claramente los pasos a seguir, para que los alumnos sepan exactamente lo que se pretende que hagan en cada momento. De esta forma el estudiante sabe donde está en cada momento y qué debe hacer después. El proceso aportará las estrategias y las herramientas de organización necesarias para que los alumnos obtengan el conocimiento necesario y realicen la tarea.

Las actividades estarán claramente relacionadas y diseñadas para llevar a los educandos del conocimiento básico a un nivel más alto del pensamiento. Para ello las actividades deben propiciar que ellos adopten diversos papeles, asumiendo varias perspectivas y/o responsabilidades para alcanzar el objetivo.

➤ **Recursos.**

Los recursos proporcionarán los enlaces a excelentes páginas de Internet las que aportarán toda la información necesaria para que los alumnos logren la tarea. Estos enlaces proporcionarán bastante información que ayude a los alumnos a pensar.

➤ **Evaluación.**

En esta etapa se indicarán los criterios de evaluación, los que se describen claramente mediante una rúbrica cada uno. Los criterios incluyen descriptores cualitativos y cuantitativos. La rúbrica mide claramente qué deben saber los alumnos y que deben hacer para lograr la tarea.

➤ **Conclusión.**

En las conclusiones se precisarán claramente cómo se realizarán las mismas, valorando la importancia de la tarea, el análisis del proceso, los logros sobre lo aprendido, así como las deficiencias y lo que falta por aprender. La conclusión debe tener como fin, la generalización por parte de los alumnos de lo aprendido y puedan aplicarlo a otros contextos.

## ANEXO 1.17

### **Estructura de las MiniQuests**

➤ **El escenario.**

Contextualiza el problema a resolver con el objetivo de motivar a los alumnos, y de esta forma asuma un verdadero rol acorde a la situación planteada. Se establecen las preguntas esenciales que el estudiante debe afrontar, las que aparecerán de forma implícita o explícitamente, siendo esta la mejor forma ya que le aporta con exactitud lo que ha de contestar.

➤ **La tarea.**

Es un sistema de preguntas estructuradas para poder dar respuesta a la planteada en el escenario, y de esta forma se apropien de la información deseada en el tiempo establecido para su desarrollo.

➤ **El producto.**

El producto incluye una descripción de la forma en que los estudiantes van a contestar la pregunta esencial del escenario, del cómo se va a mostrar la información objetiva que él adquirió. Además, el producto debe ser real y reflejar adecuadamente el papel (rol) que se asignó al estudiante en el escenario. El profesor debe comprobar la apropiación del conocimiento, en qué medida el alumno fue capaz de transformar la información y expresarla en el producto elaborado.

## ANEXO 1.18

### Cuadro comparativo entre las MiniQuests y las WebQuests

CARACTERÍSTICAS	MINIQUEST	WEBQUESTS
Componentes	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Escenario</li> <li>✓ Tarea</li> <li>✓ Producto</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Introducción</li> <li>✓ Tarea</li> <li>✓ Recursos</li> <li>✓ Proceso</li> <li>✓ Evaluación</li> <li>✓ Conclusión</li> </ul>
Tiempo requerido para su desarrollo. (Basado en un profesor individual que diseña totalmente la actividad)	Profesores sin experiencia: 2 días. Profesores experimentados: 3-4 horas. (Definición: Un profesor experimentado es aquel que ha realizado diseños de currículos en línea.)	Profesores sin experiencia: 4-6 días, como mínimo. Profesores experimentados: 2-3 días. (Nota: Este estimativo es para WebQuests de "larga duración", el tiempo de desarrollo de una WebQuests de "corta duración" no se conoce, es muy variable.)
Clasificación de la WebQuests	De corta duración	De corta y larga duración
Tiempo de clase necesario para desarrollarlo.	Periodos de 1 ó 2 clases de 45 minutos cada una.	Entre una semana y un mes (basado en clases de 45 minutos cada una)
Fundamento pedagógico	Construcción de conocimiento basado en la Indagación / Investigación con énfasis en las habilidades del pensamiento de orden superior.	Construcción de conocimiento basado en la Indagación / Investigación con énfasis en las habilidades del pensamiento de orden superior.
Papeles de los estudiantes	El escenario provee un papel para el estudiante.	En caso de requerirse, los grupos de trabajo cooperativo asumen los papeles, reales, especificados en la tarea.
Se requiere o usa una pregunta esencial	Si	Se da a entender. Implícita.
Se realizan en forma individual o cooperativa.	Pueden realizarse individual o cooperativamente.	Regularmente se realizan en un proceso cooperativo.
Es multidisciplinario	Generalmente no, ya que se basa en una actividad de corta duración	Es posible; la larga duración permite extensiones intercurriculares. <sup>5</sup>

**Nota:** Esta tabla fue tomada del sitio de BioPoint y traducida al español por EDUTEKA. ([www.eduteka.org](http://www.eduteka.org)) y se puede encontrar en <http://www.biopoint.com/miniquests/thefaceoff.htm>  
Fecha de la última actualización: Abril 13 de 2002.

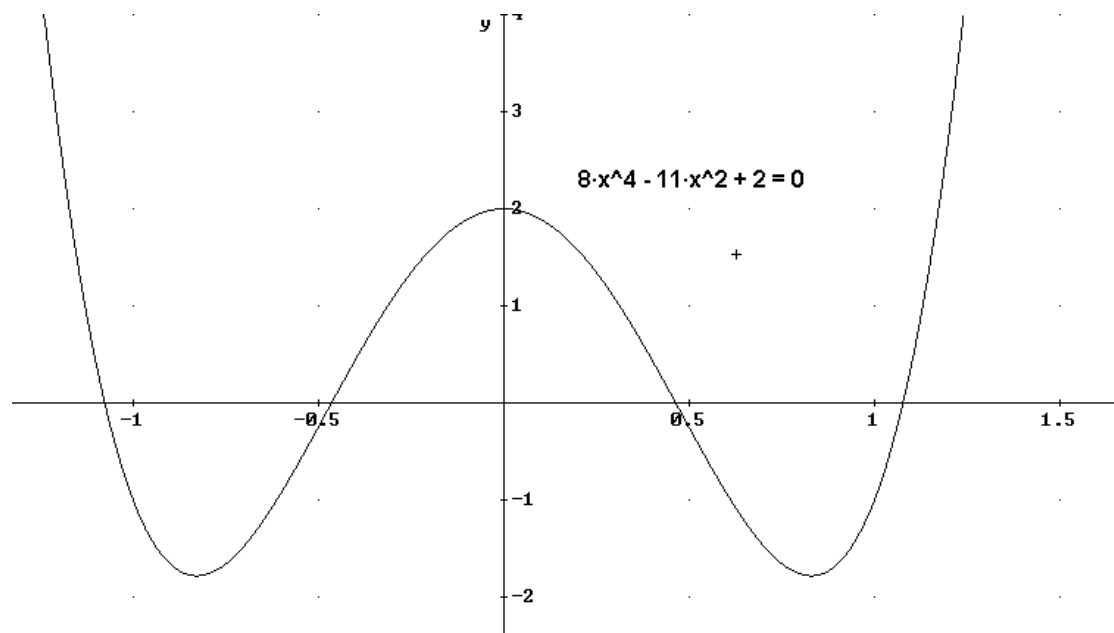
<sup>5</sup>Construyendo una MiniQuest. <http://www.biopoint.com/miniquests/miniquests.html>. (2003)

## ANEXOS DEL CAPÍTULO II

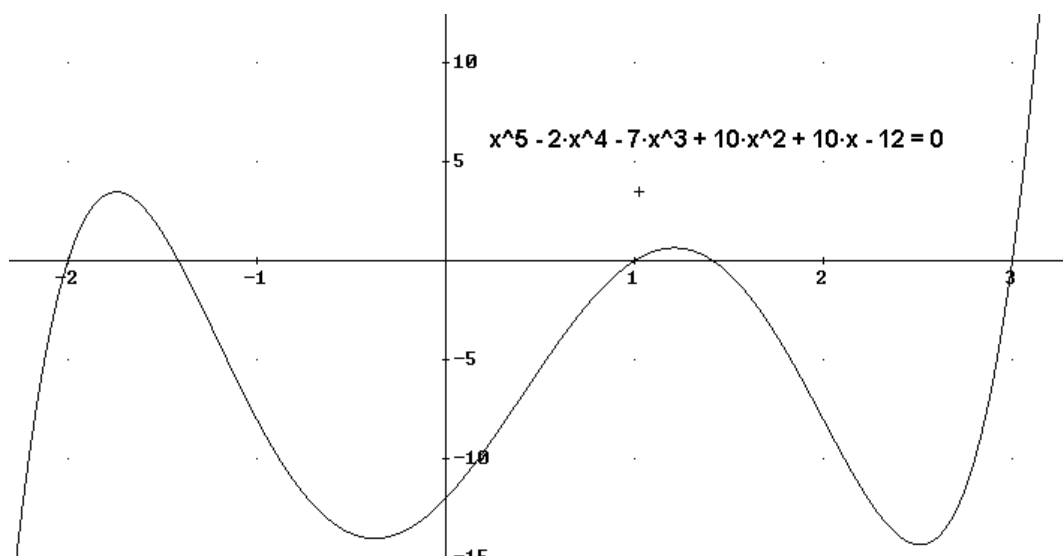
### ANEXO 2.1

Ejemplos de ecuaciones tomados del hiperentorno educativo Eureka que deben ser resueltas por los alumnos y cuyas representaciones gráficas pueden aportar al alumno nuevas informaciones para sistematizar y profundizar en los conocimientos.

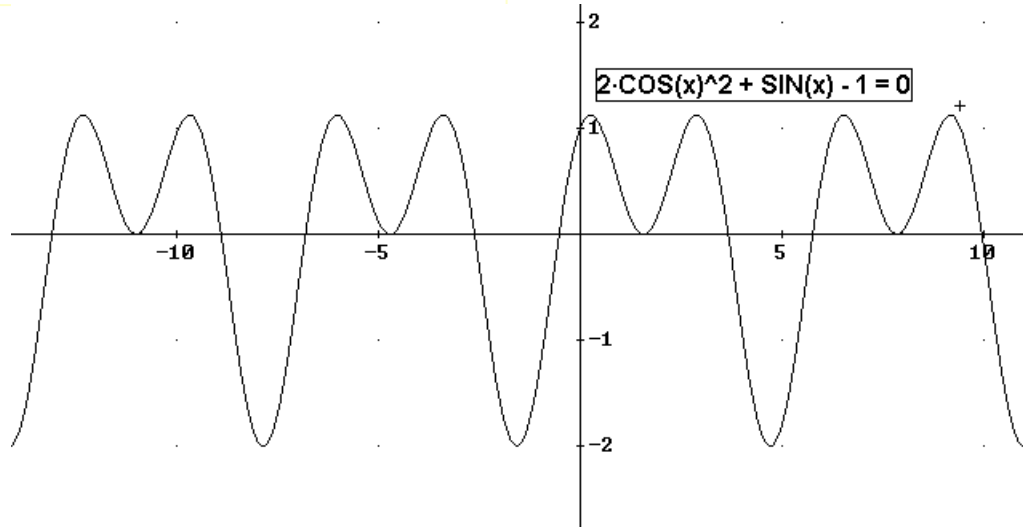
$$8x^4 - 11x^2 + 2 = 0$$



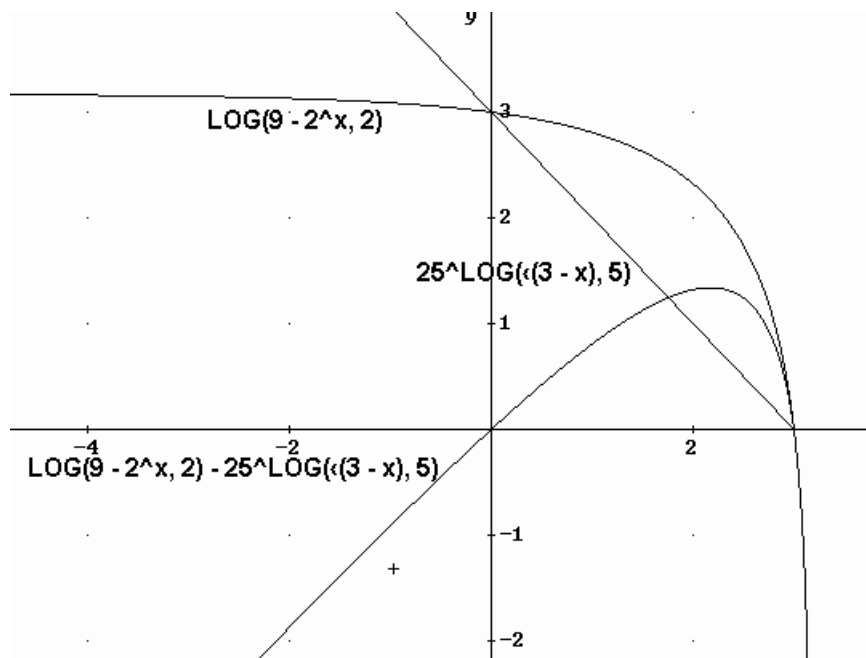
$$x^5 - 2x^4 - 7x^3 + 10x^2 + 10x - 12 = 0$$



$$2 \cos^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$$



$$\log_2(9 - 2^x) = 25^{\log_5 \sqrt{3-x}}$$

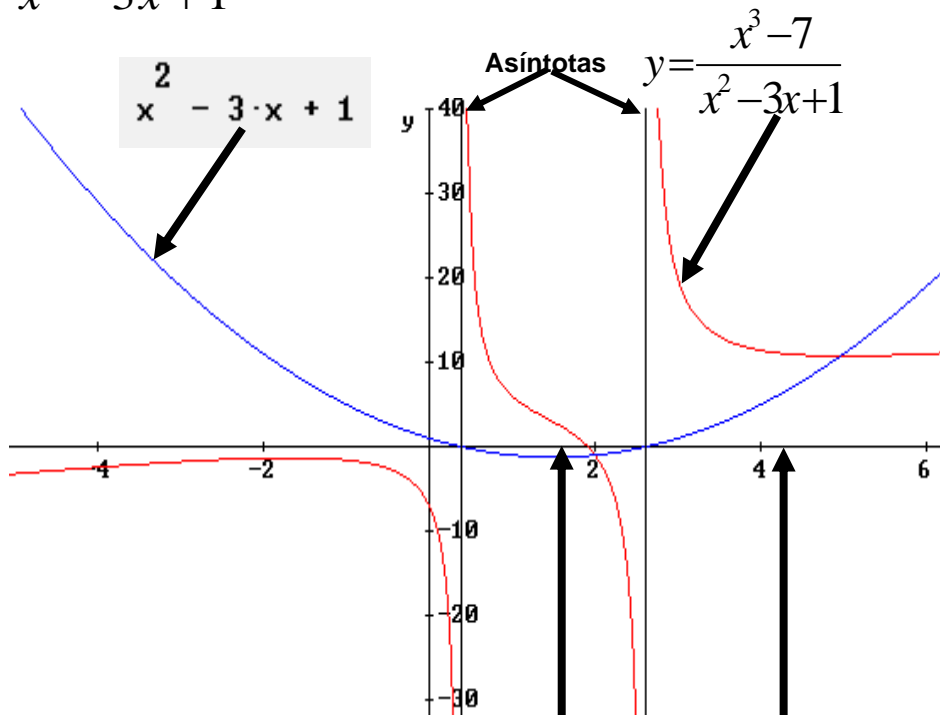


En este caso se observa la relación entre el cero de la función y la intersección de las dos funciones que forman la ecuación.





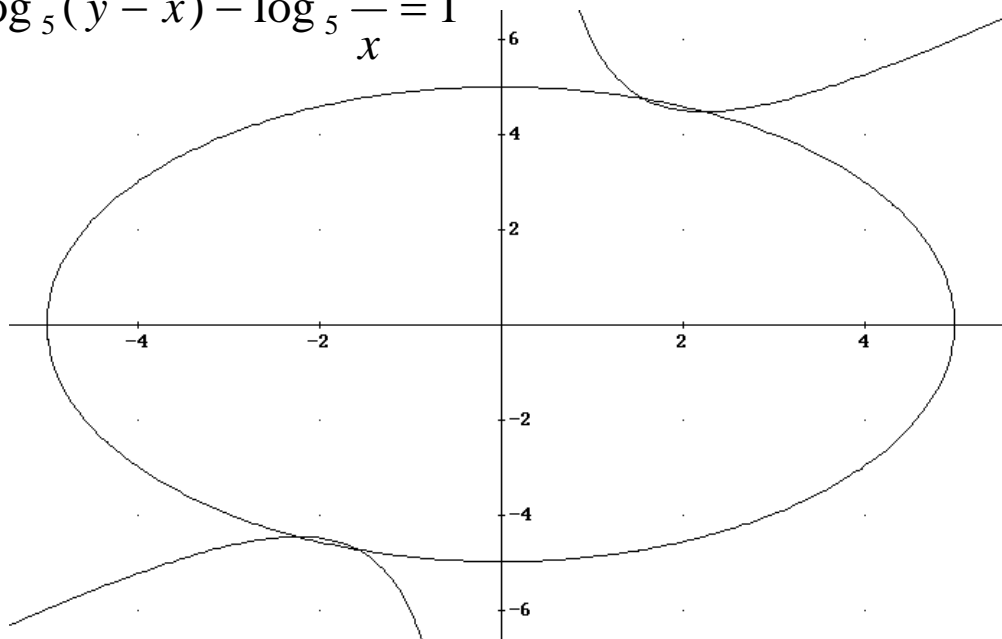
$$\frac{x^3 - 7}{x^2 - 3x + 1} \geq 0$$



Soluciones de la inecuación:

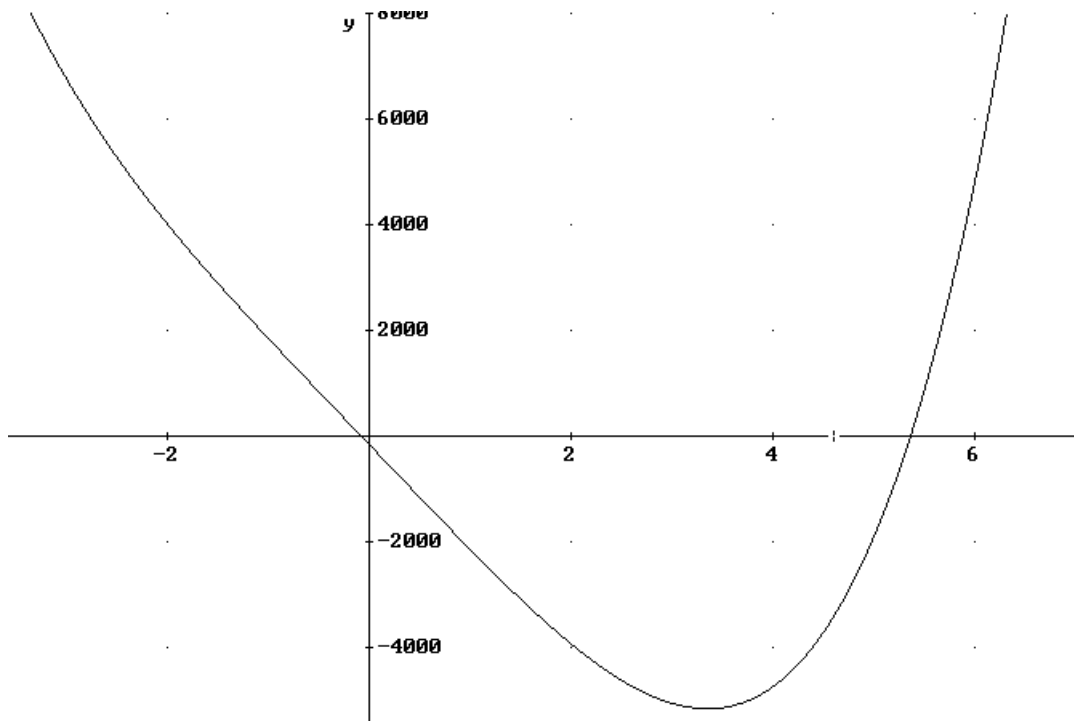
$$\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} < x \leq 7^{1/3} \vee x > \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ \log_5(y - x) - \log_5 \frac{1}{x} = 1 \end{cases}$$



## ANEXO 2.2

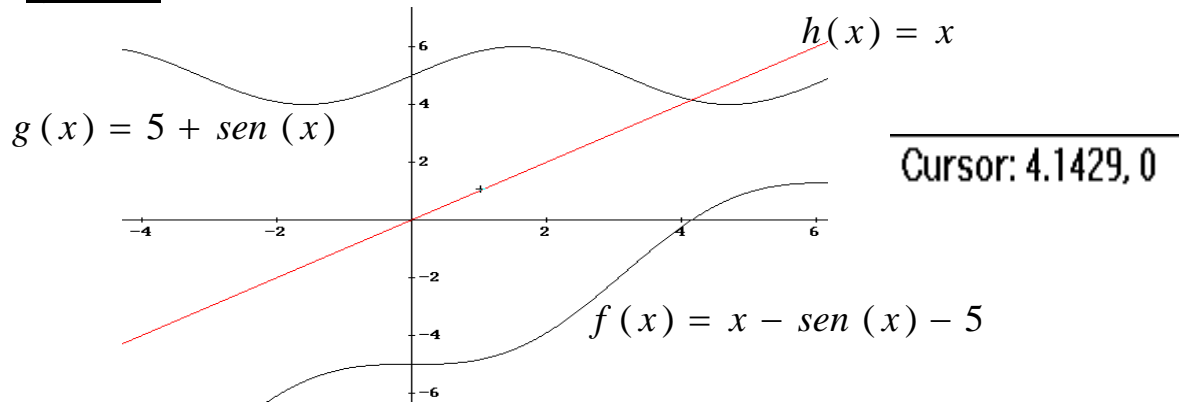
Gráfico de la función correspondiente a la ecuación  $4\pi r^4 + \pi r^3 - 2000r - \frac{500}{\pi} = 0$



## ANEXO 2.3

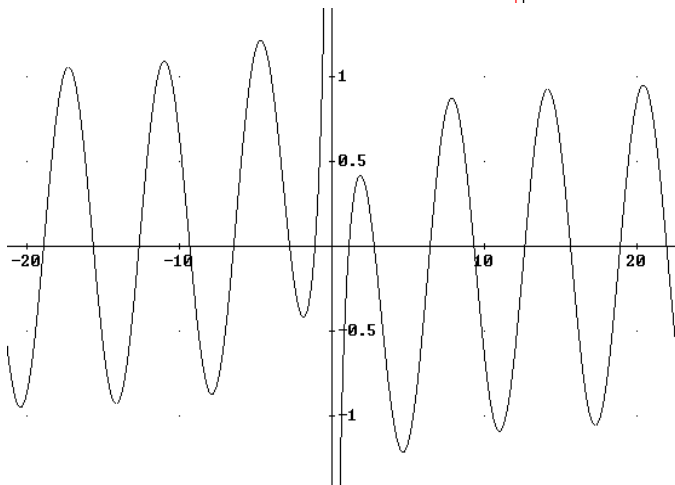
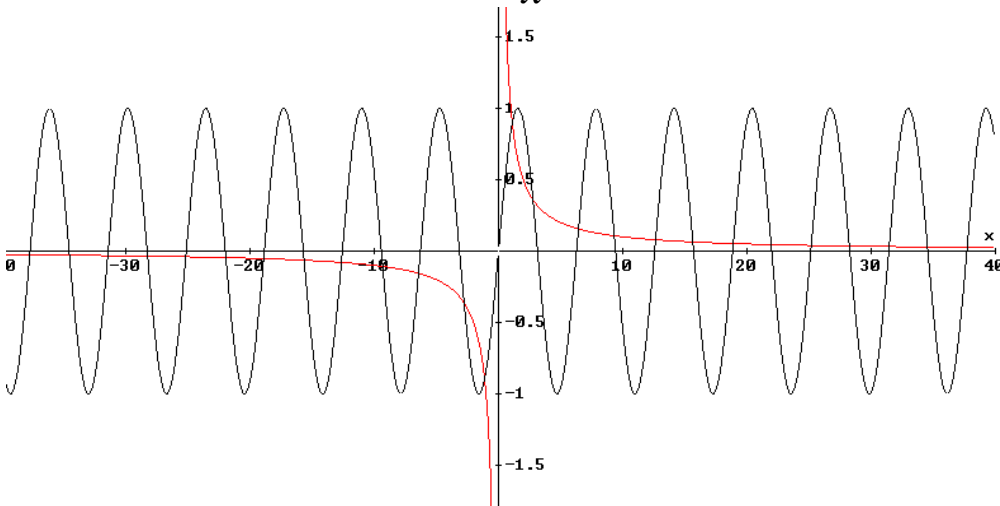
Ejemplos para ampliar el concepto de ecuación y ceros de una ecuación

### Ejemplo 1



### Ejemplo 2

$$\text{sen}(x) = \frac{1}{x}$$



Soluciones calculadas con el Derive en el intervalo  $[0; 20]$

$$x = 1.114157140$$

$$x = 2.772604708$$

$$x = 6.439117238$$

$$x = 9.317242941$$

$$x = 12.64553257$$

$$x = 15.64399737$$

$$x = 18.90248373$$

## ANEXO 2.4

Inferir propiedades para su posterior demostración

Ilustración de la variación de una función de la forma  $f(x) = (x-a)^2 - c$

utilizando la opción de graficar del Derive

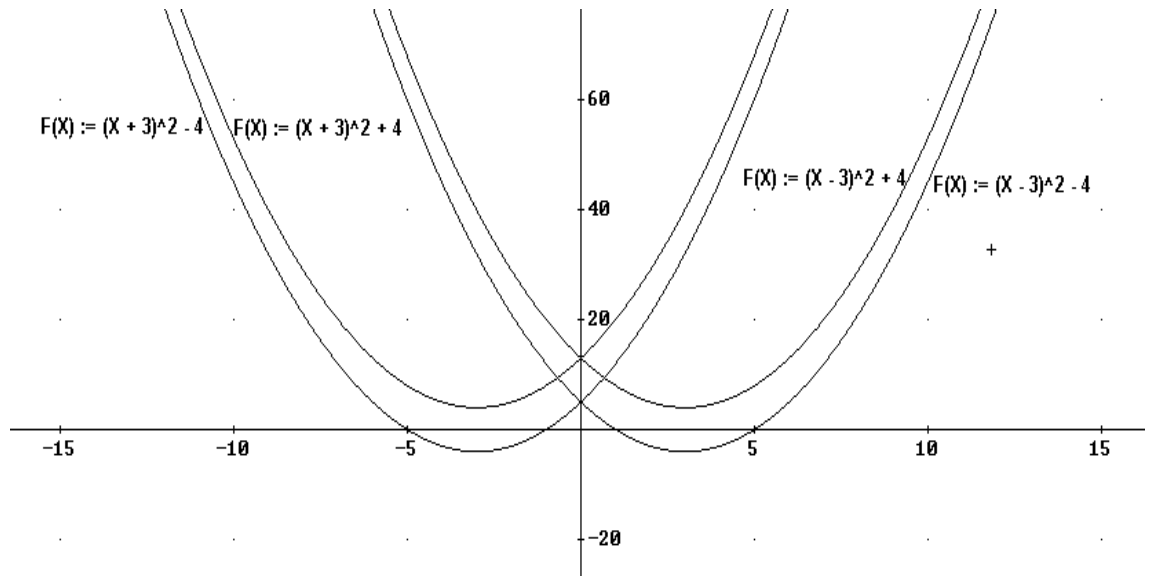
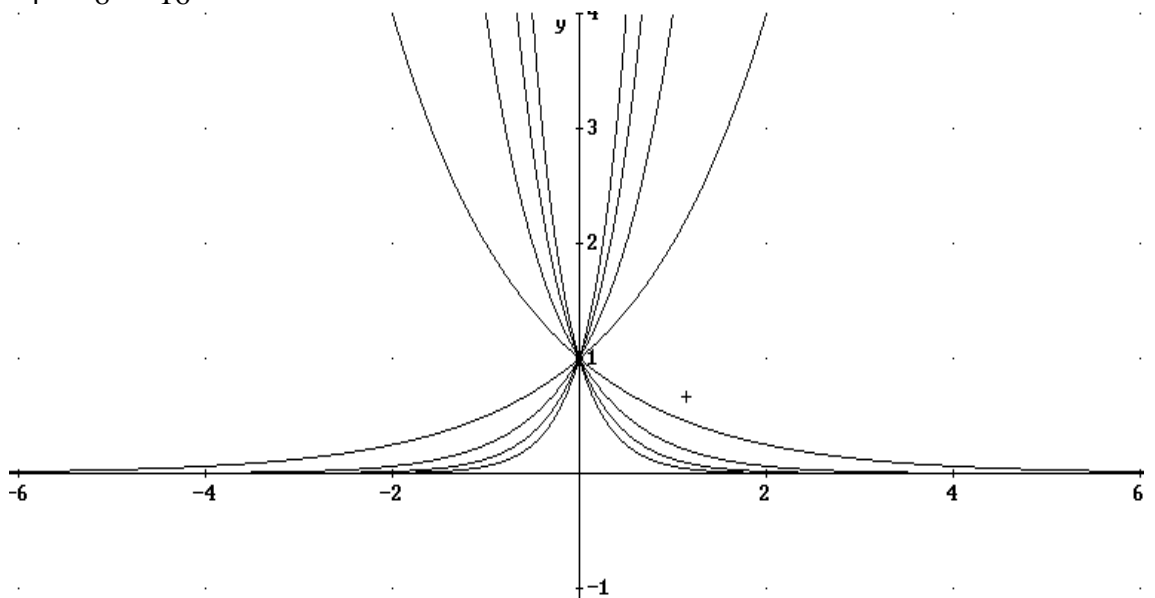


Ilustración de la variación de una función de la forma  $g(x) = a^x$

utilizando la opción de graficar del Derive, asignando al parámetro a los valores

$\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{1}{16}$ , 2, 4, 8, 16



Programa en Derive sobre relación entre la divisibilidad de los números de Fibonacci y la divisibilidad de los índices correspondientes a los términos de la sucesión.

```

DIVISIBLE_POR(N) :=
  Prog
    s := [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]
    v := [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]
    i := 1
    k := 1
  Loop
    F := FIBONACCI(k)
    If MOD(F, N) = 0
      v↓i := F
    If MOD(F, N) = 0
      s↓i := k
    If MOD(F, N) = 0
      i := i + 1
    k := k + 1
    If i > 10
      RETURN [v; s; [mcd_número, mcd_índice]; [GCD(v), GCD(s)]]

```

Programa para inferir la solución del problema planteado por la delegación de Gran Bretaña a la 28va Olimpiada Internacional de Matemática

```

d(n, m) :=
  If m = 0 ∨ m = n
#1: 1
      (m·d(n - 1, m) + (2·n - m)·d(n - 1, m - 1))/m

genera_d(c) :=
  Prog
    k := VECTOR([0, 0, 0], i, 1, c + 1)
    k↓1 := [n, m, d]
    i := 0
  Loop
#2:  k↓(i + 1)↓1 := c
      k↓(i + 1)↓2 := i
      k↓(i + 1)↓3 := d(c, i)
      If i = c
        RETURN k
      i := i + 1

```

Para n=3, n=5 y n=8 se obtienen los valores que facilitan la inferencia:

$$\begin{array}{c}
 \text{genera\_d}(3) \\
 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 9 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \\
 \text{genera\_d}(5) \\
 \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 25 \\ 5 & 2 & 100 \\ 5 & 3 & 100 \\ 5 & 4 & 25 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \left( \begin{array}{c} n \\ m \end{array} \right)^2
 \begin{array}{c}
 \text{genera\_d}(8) \\
 \begin{bmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & 64 \\ 8 & 2 & 784 \\ 8 & 3 & 3136 \\ 8 & 4 & 4900 \\ 8 & 5 & 3136 \\ 8 & 6 & 784 \\ 8 & 7 & 64 \\ 8 & 8 & 1 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

## ANEXO 2.5

### Posibilidades de introducir contenidos elementales sobre matrices y solución de sistemas de ecuaciones lineales desde la clase de Excel

#### Definición

Una matriz es un conjunto de elementos de cualquier naturaleza aunque, en general, suelen ser números ordenados en filas y columnas.

	A	B	C	D
1	1	1	2	
2	2	-1	2	
3	4	1	4	
4				
5				
6				

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Las

matrices se denotan con letras mayúsculas: A, B, C, ... ; los elementos de las mismas con letras minúsculas y subíndices que indican el lugar ocupado: a, b, c, ... Un

elemento genérico que ocupe la fila  $i$  y la columna  $j$  se escribe  $a_{ij}$ . Si el elemento genérico aparece entre paréntesis también representa a toda la matriz:  $A = (a_{ij})$

**Operaciones con matrices:** El algoritmo para sumar y restar matrices es el mismo de sumar o restar números, sólo hay que tomar en consideración que el resultado es una matriz. El algoritmo a seguir es:

	A	B	C	D
1		1	1	2
2	<b>Matriz A</b>	2	-1	2
3		4	1	4
4				
5		3	4	5
6	<b>Matriz B</b>	2	2	3
7		2	3	4
8				
9		=B1:D3+B5:D7		
10	<b>Matriz A+B</b>			
11				
12				

1. Seleccionar la parte de la tabla donde va a colocar la matriz .suma.
2. Escribir el signo igual.
  - a. Seleccionar la primera matriz.
  - b. Escribir el signo +.

- c. Seleccionar la segunda matriz.
- d. Terminar con la combinación de teclas Ctrl+MAYÚSCULA+Enter.

Toda fórmula matricial debe finalizar con la combinación de teclas Ctrl+MAYÚSCULA+Enter.

De aquí el resultado. Observe que esta fórmula aparece entre llaves

	A	B	C	D
1		1	1	2
2	<b>Matriz A</b>	2	-1	2
3		4	1	4
4				
5		3	4	5
6	<b>Matriz B</b>	2	2	3
7		2	3	4
8				
9		4	5	7
10	<b>Matriz A+B</b>	4	1	5
11		6	4	8

Para la multiplicación de matrices existe la función **MMULT(matriz1; matriz2)**

El algoritmo a seguir es:

1. Seleccionar la parte de la tabla donde va a colocar la matriz .mutiliclicación.
2. Escribir el signo igual
  - a. Seleccionar la función **MMULT**
  - b. Seleccionar en el diálogo las matrices a multiplicar.
  - c. Termina con la combinación de teclas Ctrl+MAYÚSCULA+Enter

MMULT

Buscar una función:

Escriba una breve descripción de lo que desea hacer y, a continuación, haga clic en Ir

O seleccionar una categoría: Usadas recientemente

Seleccionar una función:

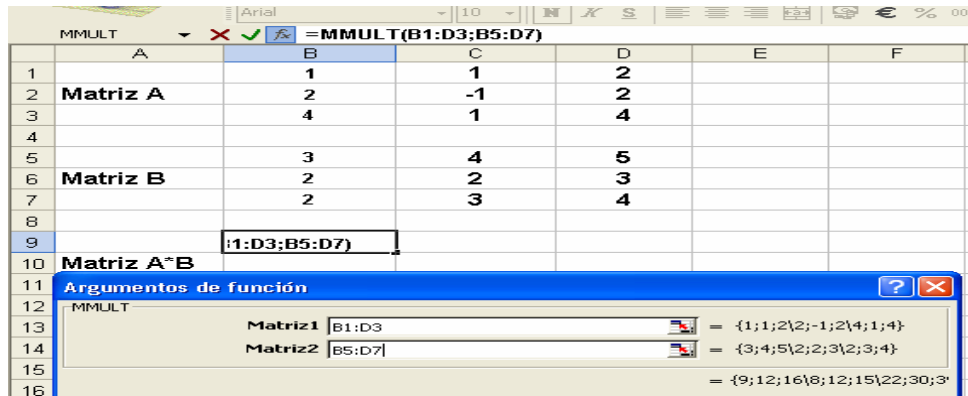
- MMULT
- MINVERSA
- SUMA
- MDTERM
- FRECUENCIA
- DISTR.NORM.INV
- CONTAR.BLANCO

**MMULT(matriz1;matriz2)**  
Devuelve el producto matricial de dos matrices, una matriz con el mismo número de filas que Matriz1 y columnas que Matriz2.

Ayuda sobre esta función

Aceptar Cancelar

Finalmente resulta:



	1	1	2
<b>Matriz A</b>	2	-1	2
	4	1	4
	3	4	5
<b>Matriz B</b>	2	2	3
	2	3	4
	9	12	16
<b>Matriz A*B</b>	8	12	15
	22	30	39

Algunos tipos de matrices.

Hay algunas matrices que aparecen frecuentemente las que, por su forma y la naturaleza de sus elementos, reciben nombres diferentes:

**Matriz fila:** Es una matriz que sólo tiene una fila, es decir  $m = 1$  y por tanto es de orden  $1 \times n$ .

	A	B	C	D
1				
2	2	-1	2	
3				
4				

**Matriz columna:** Es una matriz que sólo tiene una columna, es decir,  $n = 1$  y por tanto es de orden  $m \times 1$ .

	A	B	C
1		1	
2		-1	
3		1	
4			

**Matriz cuadrada:** Es aquella que tiene el mismo número de filas que de columnas, es decir  $m = n$ . En estos casos se dice que la matriz cuadrada es de orden  $n$ , y no  $n \times n$ .



Los elementos  $a_{ij}$  con  $i = j$ , o sea  $a_{ii}$  forman la llamada diagonal principal de la matriz cuadrada, y los elementos  $a_{ij}$  con  $i + j = n + 1$  la diagonal secundaria.

	A	B	C	D	E
1					
2		1	1	2	
3		2	1	2	
4		4	1	4	
5	<b>diagonal secundaria</b>				<b>diagonal principal</b>
6					

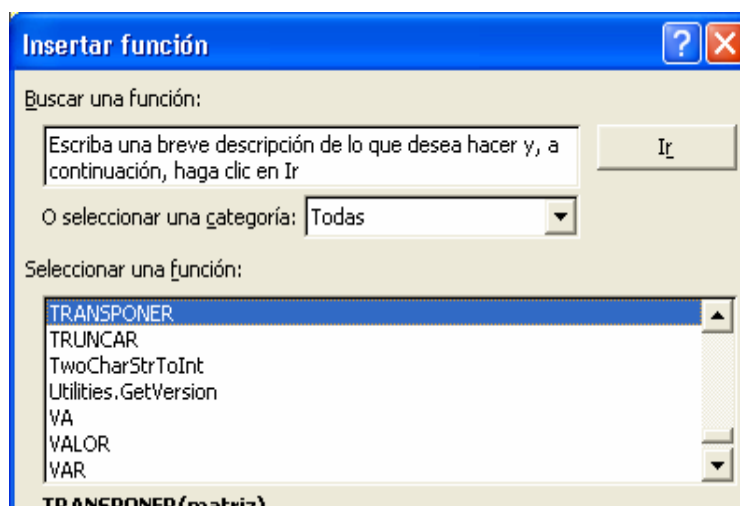
**Matriz transpuesta:** Dada una matriz A, se llama transpuesta de A, y se representa por  $A^t$ , a la matriz que se obtiene cambiando filas por columnas. La primera fila de A es la primera fila de  $A^t$ , la segunda fila de A es la segunda columna de  $A^t$ , etc.

EXCEL posee la función **TRANSPONER** que permite hallar la transpuesta de una matriz.

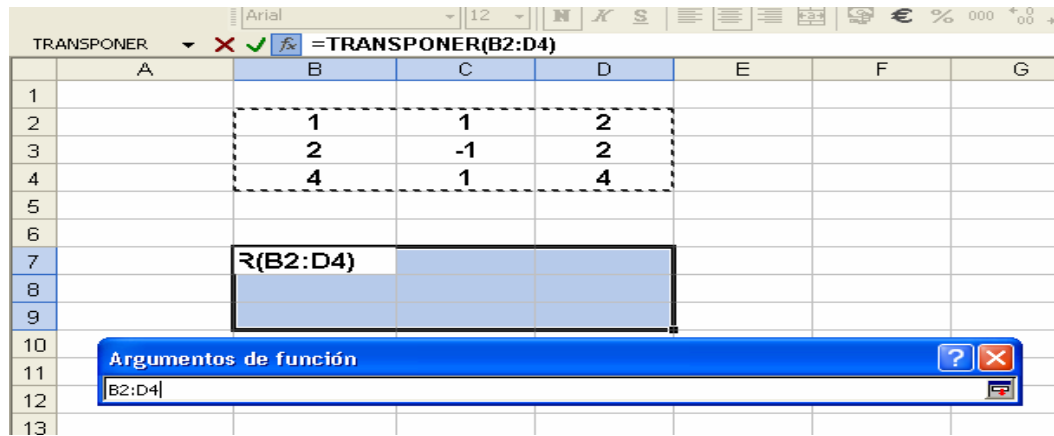
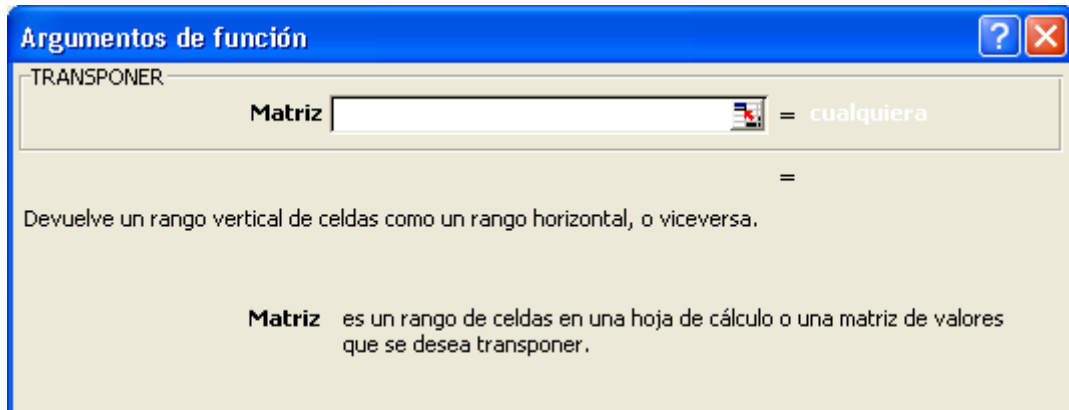
Sintaxis: **TRANSPONER (matriz)** para utilizarla debe proceder del siguiente modo:

1. Seleccionar la parte de la tabla donde va a colocar la matriz transpuesta.
2. Escribir el signo igual y seleccionar la función transponer.

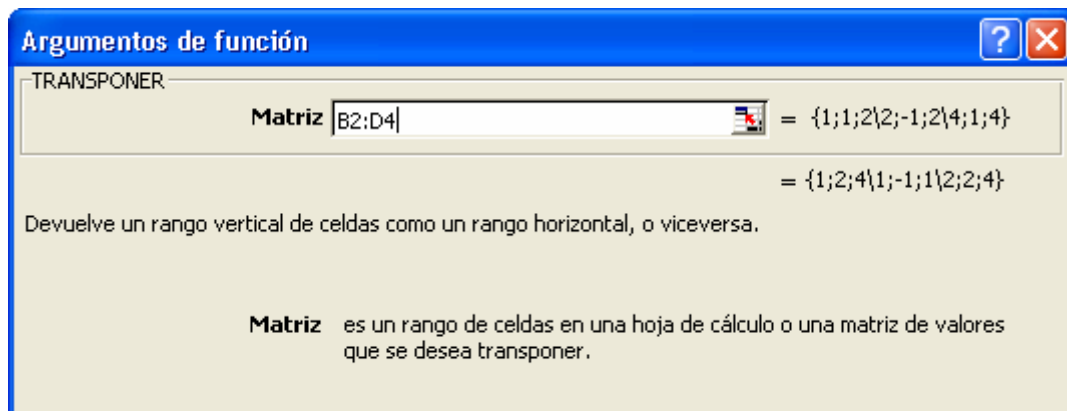
	1	1	2	
	2	-1	2	
	4	1	4	



3. Seleccionar la matriz.



4. Como toda fórmula matricial debe finalizar con la combinación de teclas Ctrl+MAYÚSCULA+Enter. Después se obtiene el resultado.



	A	B	C	D	E
1					
2		1	1	2	
3		2	-1	2	
4		4	1	4	
5					
6					
7		1	2	4	
8		1	-1	1	
9		2	2	4	
10					

**Matriz simétrica:** Una matriz cuadrada A es simétrica si  $A = A^t$ , es  $a_{ij} = a_{ji}$  i, j

La matriz es igual a su transpuesta.

	B	C	D
1	1	2	4
2	2	-1	1
3	4	1	4

**Matriz nula:** es aquella que todos sus elementos son 0 y se representa por 0.

	A	B	C	D
1				
2		0	0	0
3	Matriz nula	0	0	0
4		0	0	0
5				
6		5	0	0
7	Matriz Diagonal	0	-6	0
8		0	0	8
9				
10		1	1	1
11	Matriz unidad o identidad (I)	1	1	1
12		1	1	1

**Matriz diagonal:** Es una matriz cuadrada, en la que todos los elementos que no pertenecientes a la diagonal principal son nulos.

**Matriz unidad o identidad. Se designa por I:**

Es una matriz .en la que todos sus elementos son iguales a 1.

**Matriz inversa:** Una matriz cuadrada A tiene inversa,  $A^{-1}$ , si se verifica que:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Es decir, el producto de una matriz por su inversa es igual a la matriz unidad.

Excel tiene la función **MINVERSA (matriz)** con la que se puede calcular la inversa de una matriz.

	A	B	C
1	1	1	2
2	2	-1	2
3	4	1	4
4			
5	=		
6			
7			

	A	B	C	D
1		1	1	2
2	<b>Matriz</b>	2	-1	2
3		4	1	4
4				
5		-1	-0,3333333	0,666667
6	<b>Inversa</b>	0	-0,6666667	0,333333
7		1	0,5	-0,5
8				

### Solución de sistemas de ecuaciones.

Utilizando los conceptos y operaciones dadas es posible calcular las soluciones de un sistema de ecuaciones.

Daremos a continuación los elementos teóricos indispensables para comprender el algoritmo.

#### Partamos de lo conocido:

Sea la ecuación

$$3x = 6$$

Multiplicando por 1/3 ambos miembros se tiene:

$$1/3 * 3 x = 6 * 1/3$$

$$1 * x = 2$$

Solución

$$x = 2$$

#### Situación nueva

$$x + y + 2 z = - 1$$

Sea el sistema de ecuaciones:

$$2 x - y + 2 z = - 4$$

$$4 x + y + 4 z = - 2$$

Este sistema se puede expresar por la ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Multiplicando ambos miembros por la matriz inversa se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

Por la definición se sabe que el producto de una matriz por la inversa da como resultado la idéntica, por tanto se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

Y de aquí se concluye:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

Llegando a las soluciones del sistema:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

**El algoritmo seguido es:**

1. Expresar el sistema como la matriz del sistema y la matriz columna formada por los términos independientes.
2. Calcular la inversa de la matriz del sistema.
3. Multiplicar la matriz inversa por la matriz columna de los términos independientes.
4. El resultado son las soluciones del sistema

Un esquema del proceso y las fórmulas utilizadas se muestra a continuación.

	A	B	C	D	E
1	<b>Matriz del sistema</b>				<b>Términos independientes</b>
2	1	1	2		-1
3	2	-1	2		-4
4	4	1	4		-2
5					
6		<b>Matriz inversa</b>			
7		=MINVERSA(A2:C4)			
8	-1	0,333333333	0,6666667		
9	0	-0,666666667	0,3333333		
10	1	0,5	-0,5		
11				1	=MMULT(A7:C9;E2:E4)
12				2	<b>Soluciones</b>
13				-2	

## ANEXO 2.6

### Problemas de matemática numérica que pueden resolverse en la clase de Excel.

Los problemas que se proponen están relacionados con los siguientes temas de matemática numérica:

- Aproximación.
- Error absoluto.
- Solución de ecuaciones por métodos aproximados.

#### **Problema 1**

##### *Información:*

Para la constante  $\pi$ , cuyo valor aproximado se corresponde con la función PI() suministrada por el EXCEL. Se le han encontrado distintas aproximaciones a lo largo de la historia las matemáticas, tales como:

$$\pi \approx \frac{9}{5} + \frac{3}{\sqrt{5}} \quad (\text{Vieta, 1593})$$

$$\pi \approx \sqrt{13\frac{1}{3} - 2\sqrt{3}} \quad (\text{Kochansky 1685})$$

$$\pi \approx \frac{13}{50}\sqrt{146} \quad (\text{Specht, 1828})$$

$$\pi \approx \frac{1}{2}(4 - \sqrt{7} - \sqrt{3} + \sqrt{13} - \sqrt{5}) \quad (\text{Hagge, 1914})$$

$$\pi \approx \sqrt{21} + \frac{1}{4}\sqrt{5} - 2 \quad (\text{Hartmann, 1928})$$

$$\pi \approx \frac{63}{25} \frac{17 + 15\sqrt{5}}{7 + 15\sqrt{5}} \quad (\text{Ramanujan, 1914})$$

##### *Tarea:*

Haga la tabla en Excel que permita calcular las distintas aproximaciones de  $\pi$ , así como el error absoluto respecto al valor calculado por la función suministrada PI() mediante la expresión  $|PI() - \text{aproximación}|$  generando una tabla como la siguiente :

FÓRMULA PROPUESTA POR:	APROXIMACIÓN	ERROR
Vieta, 1593		
Kochansky, 1685		
.....	.....	.....

La primera línea de esta tabla en Excel y sus respectivos resultados se muestra a continuación:

FÓRMULA PROPUESTA POR..	APROXIMACIÓN	ERROR
Vieta 1593	=9/5+3/(5^(1/2))	=ABS(PI()-B2)
Kochansky 1685		
.....	....	....
Fórmula propuesta por..	Aproximación	Error
Vieta 1593	3,141640786	4,81329E-05
Kochansky 1685		
.....	....	....

Se hace Evidentemente que mediante este problema, en el que se aplican conceptos matemáticos y computacionales conocidos por los alumnos, se repasan e ilustran los conceptos de aproximación y error.

### **Problema 2**

#### ***Información:***

En la antigua Grecia, el gran matemático Arquímedes de Siracusa obtuvo aproximaciones de  $\pi$  mediante el uso de fórmulas de duplicación de los lados de polígonos regulares inscritos y circunscritos a una circunferencia. Para ello se dispone de las siguientes informaciones:

1. Se conoce que el lado de un polígono regular inscrito en una circunferencia se expresa en función del radio mediante la siguiente fórmula:  $l_n = 2R \text{Sen} \frac{\pi}{n}$
2. El perímetro de un polígono regular de  $n$  lados se calculan por la fórmula  $p = nl$  donde  $l$  es la longitud del lado.

3. La fórmula  $L_n = \frac{2r \ln}{\sqrt{4r^2 - \ln^2}}$  expresa el lado del polígono regular circunscrito de  $n$  lados en

función del radio del círculo y del lado del polígono regular inscrito del mismo número de lados.

**Tarea:**

Haga una tabla en Excel que dado el radio de la circunferencia y la cantidad de lados de un polígono, permita calcular el semiperímetro de 10 polígonos inscritos y circunscritos a dicha circunferencia obtenidos por duplicidades sucesivas del polígono original, generando la siguiente tabla:

RADIO DE LA CIRCUNFERENCIA	1	NÚMERO DE LADOS DEL POLÍGONO INICIAL	4	
Número de lados	Longitud del lado del polígono regular inscrito	Semiperímetro del polígono circunscrito	Semiperímetro del polígono inscrito	Diferencia
=D1	=2*\$B\$1*SENO(PI()/A3)	=A3*((2*\$B\$1*B3)/(RAIZ(4*\$B\$1^2-B3^2)))/2	=A3*B3/2	=C3-D3
=2*A3	=2*\$B\$1*SENO(PI()/A4)	=A4*((2*\$B\$1*B4)/(RAIZ(4*\$B\$1^2-B4^2)))/2	=A4*B4/2	=C4-D4

Si en la tabla dada se asigna al radio el valor 1 ( $r = 1$ ) y distintos valores al número de lados, a medida que  $n$  aumenta, el semiperímetro del polígono circunscrito se aproxima cada vez más al semiperímetro del polígono inscrito y ambas se aproximan sucesivamente a  $\pi$ , mientras las diferencias forman una sucesión que se acerca a cero como se muestra en el siguiente ejemplo

RADIO DE LA CIRCUNFERENCIA	1	NÚMERO DE LADOS DEL POLÍGONO INICIAL	4	
Número de lados	Longitud del lado del polígono regular inscrito	Semiperímetro del polígono circunscrito	Semiperímetro del polígono inscrito	Diferencia
4	1,414213562	4	2,828427125	1,171572875
8	0,765366865	3,313708499	3,061467459	0,25224104
16	0,390180644	3,182597878	3,121445152	0,061152726
32	0,196034281	3,151724907	3,136548491	0,015176417
64	0,098135349	3,144118385	3,140331157	0,003787228
128	0,049082457	3,14222363	3,141277251	0,000946379
256	0,024543077	3,141750369	3,141513801	0,000236568
512	0,012271769	3,141632081	3,14157294	5,91403E-05
1024	0,006135914	3,14160251	3,141587725	1,4785E-05
2048	0,00306796	3,141595118	3,141591422	3,69624E-06

En el problema anterior se dan las fórmulas y la tabla modelo; así, para el alumno hay aprendizaje de contenidos de matemática que no recibe explícitamente en la escuela media, pero su tarea es la de interpretar



y transcribir y modificar las fórmulas y algoritmos, con las que repasa los contenidos de Computación, aunque el objetivo del ejercicio se orienta hacia el concepto de aproximación sucesiva.

Las sucesiones se utilizan frecuentemente para el cálculo de valores aproximados, tal es el caso de calcular la raíz n-ésima de un número  $a > 0$  como se plantea en el siguiente problema:

### **Problema 3**

#### **Información:**

La raíz n-ésima de un número  $a > 0$ ,  $\sqrt[n]{a}$  se puede calcular aproximadamente mediante la siguiente sucesión:

$$u_n = \begin{cases} u_0 = a \\ u_{k+1} = u_k - \frac{u_k^n - a}{nu_k^{n-1}}, & k = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Donde cada término se aproxima más que el anterior al valor deseado, de tal manera que si la diferencia entre dos valores sucesivos es menor que un error prefijado se detiene el algoritmo así:

#### **Algoritmo:**

Leer: número: a

índice: n

error: E

Hacer  $\mu_0 = a$

Repetir

$$\mu_1 = \mu_0 - \frac{\mu_0^n - a}{n\mu_0^{n-1}}$$

imprimir  $\mu_1$

Si  $|\mu_1 - \mu_0| \geq E$  Hacer  $\mu_0 = \mu_1$

Hasta que  $|\mu_1 - \mu_0| < E$

#### **Tarea:**

a) Compare la fórmula que expresa la sucesión y lo planteado en el algoritmo, identifique particularmente en

el algoritmo la expresión:  $\mu_{k+1} = \mu_k - \frac{\mu_k^n - a}{n\mu_k^{n-1}}$

b) Implemente este algoritmo en una tabla de EXCEL y establezca, además, el error que se comete utilizando esta aproximación y el cálculo directo de  $\sqrt[n]{a}$  mediante la correspondiente expresión en EXCEL.

Como puede observarse en el enunciado de este problema se dan muchos detalles, porque su propósito es el de destacar los conceptos de matemática numérica, de esta manera la redacción que garantiza que el problema sea accesible a alumnos de la enseñanza media. Para calcular  $\sqrt[3]{3}$  una propuesta de tabla es la siguiente:

RAÍZ	NÚMERO	ERROR	CÁLCULO DIRECTO
3	3		=B3^(1/A3)
<b>APOX-ECO-OTHO</b>	=B3-((B3^\$A\$3-\$B\$3)/(\$A\$3*B3^(\$A\$3-1)))	=ABS(B4-B3)	
	=B4-((B4^\$A\$3-\$B\$3)/(\$A\$3*B4^(\$A\$3-1)))	=ABS(B5-B4)	
	=B5-((B5^\$A\$3-\$B\$3)/(\$A\$3*B5^(\$A\$3-1)))	=ABS(B6-B5)	
	=B6-((B6^\$A\$3-\$B\$3)/(\$A\$3*B6^(\$A\$3-1)))	=ABS(B7-B6)	
	=B7-((B7^\$A\$3-\$B\$3)/(\$A\$3*B7^(\$A\$3-1)))	=ABS(B8-B7)	
	=B8-((B8^\$A\$3-\$B\$3)/(\$A\$3*B8^(\$A\$3-1)))	=ABS(B9-B8)	
	=B9-((B9^\$A\$3-\$B\$3)/(\$A\$3*B9^(\$A\$3-1)))	=ABS(B10-B9)	
	=B10-((B10^\$A\$3-\$B\$3)/(\$A\$3*B10^(\$A\$3-1)))	=ABS(B11-B10)	

Los resultados obtenidos son:

RAÍZ	NÚMERO	ERROR	CÁLCULO DIRECTO
3	3		1,44224957
<b>APOX-ECO-OTHO</b>	2,111111111	0,888888889	
	1,631784139	0,479326972	
	1,463411989	0,16837215	
	1,442554125	0,020857864	
	1,442249635	0,000304491	
	1,44224957	6,42937E-08	
	1,44224957	2,66454E-15	
	1,44224957	2,22045E-16	
1,44224957	0		

#### **Problema 4**

Otras aproximaciones de  $\pi$  que también pueden utilizarse para obtener aproximaciones sucesivas y el estudio del error son:

- Los productos de John Wallis (1616 – 1703)  $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} * \frac{2}{3} * \frac{4}{3} * \frac{4}{5} * \frac{6}{5} * \frac{6}{7} * \frac{8}{7} * \frac{8}{9} * \dots$

*Algoritmo:*

Leer

error: E

PI = 1

K = 2

Repetir:

$$PI = PI * \frac{k}{k-1} * \frac{k}{k+1}$$

Imprimir 2 \* PI

K = K + 2

Hasta que  $|PI() - PI| < E$

La tabla para este caso puede ser:

PI	K	
1	2	<b>CÁLCULO DE PI</b>
$=A2*(B2/(B2-1))*(B2/(B2+1))$	$=B2+2$	$=2*A3$
$=A3*(B3/(B3-1))*(B3/(B3+1))$	$=B3+2$	$=2*A4$
$=A4*(B4/(B4-1))*(B4/(B4+1))$	$=B4+2$	$=2*A5$

Indiscutiblemente que el producto de John Wallis converge "muy lentamente" a  $\pi$  y sólo en la línea 495, para  $k = 986$  aparece el primer 3.14..., con el valor **3,140001571**

- Gottfried Wilhelm Leibniz considerado uno de los mayores intelectuales del siglo XVIII calculó el valor de  $\pi$  mediante la serie infinita de Leibniz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \dots$$

*Algoritmo:*

Leer error: E

PI = 0

K = 1

Repetir:

$$PI = PI + \frac{1}{k}$$

$$K = (|K| + 2) \text{sig}(K) * (-1)$$

Imprimir 4 \* PI

Hasta que  $|Pi() - PI| < E$

La tabla que expresa el algoritmo es la siguiente:

PI	K	VALORES APROXIMADOS A PI
0	1	
=A2+1/B2	=(ABS(B2)+2)*SIGNO(B2)*(-1)	=4*A3
=A3+1/B3	=(ABS(B3)+2)*SIGNO(B3)*(-1)	=4*A4
=A4+1/B4	=(ABS(B4)+2)*SIGNO(B4)*(-1)	=4*A5

Para esta caso se puede hacer notar que los valores sucesivos se encuentran "por encima y por debajo de  $\pi$ ":

PI	K	VALORES APROXIMADOS A PI
0	1	
1	-3	4
0,66666667	5	2,66666667
0,86666667	-7	3,46666667
0,72380952	9	2,895238095
0,83492063	-11	3,33968254
0,74401154	13	2,976046176

Comenzando a tener "cierta convergencia" a partir de la línea 120 cuando aparecen los primeros valores "cercaños" a 3.14

0,78334902	245	3,13339607
0,78743065	-247	3,149722601
0,78338207	249	3,133528269
0,78739813	-251	3,149592526
0,78341407	253	3,133656271
0,78736664	-255	3,149466547
0,78344507	257	3,133780273
0,78733612	-259	3,149344475
0,78347511	261	3,13390046
0,78730653	-263	3,14922613

Lo más importante de las tablas anteriores es ilustrar cómo expresar mediante una tabla elemental una suma sucesiva o un producto sucesivo.

### **Problema 5**

Análogas a las aproximaciones para obtener el valor de  $\pi$ , existen numerosas aproximaciones para la constante  $e$ , o número de Euler, en honor a Leonhard Euler (1707-1783), matemático suizo, cuyos trabajos más importantes se centraron en el campo de las matemáticas puras, campo de estudio que ayudó a fundar. Algunas de estas aproximaciones son:

- Mediante la sucesión  $U_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
- Mediante la suma:  $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots + \frac{1}{n!}$

o mejor, para no depender de  $n!$ , se da la siguiente expresión:

$$e = 1 + \left(1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{5} \dots\right)\right)\right)\right)$$

Con ellas se puede comparar los resultados obtenidos con el cálculo anterior y los valores calculado mediante la función (EXP (potencia))

### **Problema 6**

*Información:*

Relacionada con las constantes  $e$  y  $\pi$  existe una fórmula de aproximación a  $n!$  conocida como fórmula

de Sterling:  $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \dots\right)$

*Tarea:*

Haga la tabla que muestre el porcentaje de diferencia de esta fórmula con el resultado calculado mediante el empleo de la función FACT(número). Es decir, si designamos por FS a la fórmula de Sterling se pide calcular:

$$\frac{n! - FS}{n!} * 100$$

El problema se podría ilustrar mediante la siguiente tabla:

<b>n</b>	<b>n!</b>	<b>FS</b>	<b>d%</b>
0	1	0	100%
—	—	—	—

N	N!	FS	D%
1	=FACT(A2)	=(A2/EXP(1))^A2*((2*PI()*A2)^(1/2)*(1+1/(12*A2)+1/(288*A2^2)))	=(B2-C2)/B2
2	=FACT(A3)	=(A3/EXP(1))^A3*((2*PI()*A3)^(1/2)*(1+1/(12*A3)+1/(288*A3^2)))	=(B3-C3)/B3
3	=FACT(A4)	=(A4/EXP(1))^A4*((2*PI()*A4)^(1/2)*(1+1/(12*A4)+1/(288*A4^2)))	=(B4-C4)/B4
4	=FACT(A5)	=(A5/EXP(1))^A5*((2*PI()*A5)^(1/2)*(1+1/(12*A5)+1/(288*A5^2)))	=(B5-C5)/B5
5	=FACT(A6)	=(A6/EXP(1))^A6*((2*PI()*A6)^(1/2)*(1+1/(12*A6)+1/(288*A6^2)))	=(B6-C6)/B6
6	=FACT(A7)	=(A7/EXP(1))^A7*((2*PI()*A7)^(1/2)*(1+1/(12*A7)+1/(288*A7^2)))	=(B7-C7)/B7
N	N!	FS	D%
1	1	1,00218362	-0,00218362
2	2	2,00062867	-0,00031433
3	6	6,00057815	-9,6358E-05
4	24	24,0009883	-4,1178E-05
5	120	120,002546	-2,1214E-05
6	720	720,008869	-1,2318E-05

Con el problema anterior se introduce el concepto de error relativo expresado como porcentaje.

A partir del concepto de error, aproximación y sucesión de aproximaciones se pueden introducir métodos numéricos elementales tal como se muestra en los problemas siguientes.

### **Problema 7**

#### ***Información:***

De la matemática superior se tiene el teorema plantea:

“Si una función es continua en un intervalo  $[a, b]$  y cambia de signo en ese intervalo entonces tiene al menos un cero en  $[a, b]$ ”, es decir, existe un  $x_c$  tal que:

$$a \leq x_c \leq b \text{ y } f(x_c) = 0.$$

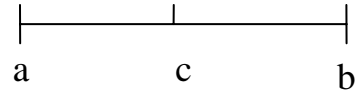
Como no siempre existe un método exacto para determinar  $x_c$ , se han elaborado métodos aproximados, basados en estos existen algoritmos que permiten calcular aproximadamente la solución deseada.

Uno de estos *algoritmos* es el siguiente:

- Dar la función  $f(x)$
- Dar el intervalo  $[a,b]$
- Verificar que en  $[a,b]$  existe una solución:  
si signo de  $f(a) \neq$  signo  $f(b)$
- Dar el error máximo con que se quiere calcular la solución:  $\varepsilon$

Repetir

$$c = \frac{a + b}{2}$$



Si signo de  $f(a) \neq$  signo de  $f(c)$  entonces:

el cero ( $x_0$ ) está en  $[a,c]$ , por lo que el intervalo  $[a,b]$  se puede reducir a  $[a,c]$  haciendo  $b = c$

Si no:

el cero ( $x_0$ ) está en  $[c,b]$ , por lo que el intervalo  $[a,b]$  se puede reducir a  $[c,b]$  haciendo:  $a = c$

hasta que  $|a - b| < \epsilon$ , entonces  $x_c = \frac{a + b}{2}$

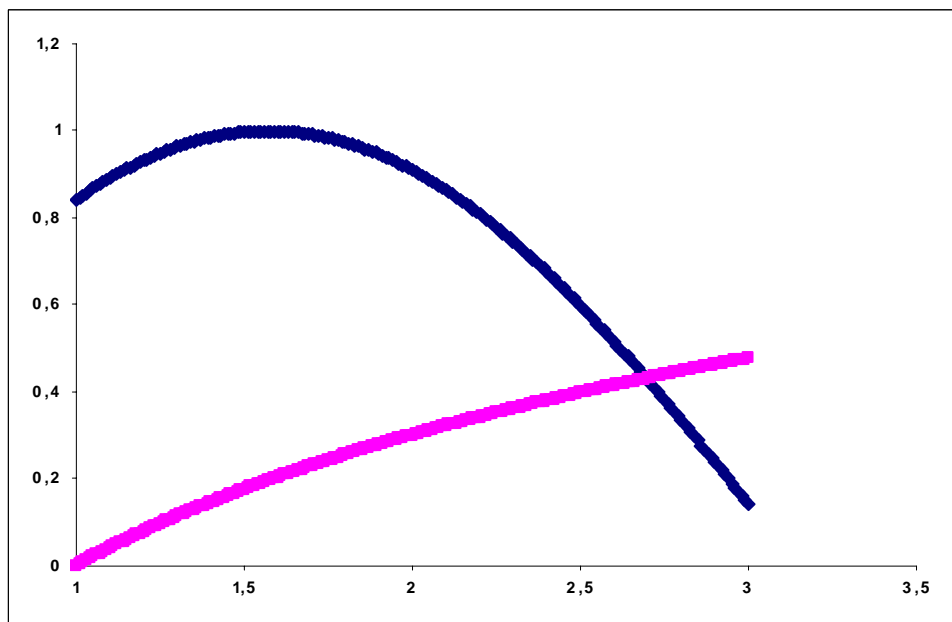
Imprimir "Solución",  $x_c$

**Ejemplo:**

Resolver la ecuación  $\text{sen } x = \log x$  por el método de bisección.

Una idea gráfica de la solución del problema se muestra en el gráfico de dispersión de las dos funciones en el intervalo  $[1;3]$  con un incremento de 0,01:

1	=SENO(A1)	=LOG(A1;10)	=B1-C1	1	0,84147098	0	0,84147098
=A1+0,01	=SENO(A2)	=LOG(A2;10)	=B2-C2	1,01	0,84683184	0,00432137	0,84251047
=A2+0,01	=SENO(A3)	=LOG(A3;10)	=B3-C3	1,02	0,85210802	0,00860017	0,84350785
=A3+0,01	=SENO(A4)	=LOG(A4;10)	=B4-C4	1,03	0,85729899	0,01283722	0,84446176



Evidentemente en el mencionado intervalo ambas curvas se cortan y por tanto la función  $f(x) = \text{sen}x - \log x$  tiene un cero, el cual se puede acotar más al intervalo  $[2,5 ; 3]$

Siguiendo el algoritmo es posible encontrar la solución mediante la tabla cuyo encabezamiento y resultado se muestran a continuación:

a	b	ERROR	c
2,5	3	=ABS(A2-B2)	=(A2+B2)/2
=SI(SIGNO(SENO(\$A2)-LOG(\$A2;10))<>SIGNO(SENO(\$D2)-LOG(\$D2;10));A2;D2)			
		=SI(SIGNO(SENO(\$A3)-LOG(\$A3;10))<>SIGNO(SENO(\$D3)-LOG(\$D3;10));D3;B3)	
2,5	3	0,5	2,75
2,5	2,75	0,25	2,625
2,625	2,75	0,125	2,6875
2,6875	2,75	0,0625	2,71875
2,6875	2,71875	0,03125	2,703125
2,6875	2,703125	0,015625	2,6953125
2,6953125	2,703125	0,0078125	2,69921875
2,6953125	2,69921875	0,00390625	2,697265625
2,6953125	2,697265625	0,001953125	2,696289063
2,6953125	2,696289063	0,000976563	2,695800781

**Tarea:**

A partir del ejemplo anterior se pueden plantear tareas como:

- a) ¿Por qué los cálculos se repiten hasta que  $|a - b| < \varepsilon$  en el algoritmo anterior?
- b) Repita el procesamiento hecho en la tabla para dar solución a las siguientes ecuaciones:

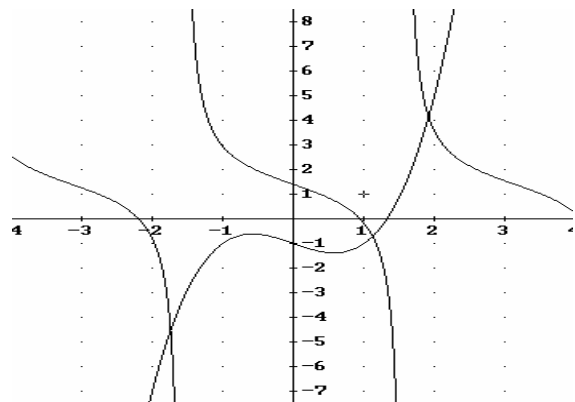
1)  $x^3 - x - 1 = 0$  en el intervalo  $[1,2]$ .

Error menor de 0.001

2)  $1,5 - \tan x = 0,1$  en cada uno de los intervalos  $[-6,-5]$ ;  $[-3,-2]$ ;  $[0,1]$ ;  $[4,5]$ ;  $[7,8]$ .

Determine usted el error con el que desee hacer el cálculo

3) Calcule la diferencia entre los valores sucesivos determinados en el inciso anterior.





4) Sean las funciones  $f(x) = x^3 - x - 1$  y

$g(x) = 1,5 - \tan x$  con las que se trabaja en (1) y (2). El gráfico superpuesto de ambas funciones se adjunta. A partir de lo que observe en el mismo, las tablas elaboradas y el ejemplo, determine los puntos de intersección de ambos gráficos.

5) Observe los valores sucesivos que toma  $c$  y la cantidad de pasos necesarios para obtener cada solución.

### **Problema 8**

La idea expresada en el problema #3 de obtener una sucesión que se "aproxime" a un valor dado, o a un valor aproximado con un error menor que  $\varepsilon$  se puede extender y aplicar a la determinación de soluciones de una ecuación por métodos iterativos, aunque no se enuncien como tal, como puede ilustrarse en el siguiente problema.

**Información:**

$$\text{La sucesión } x_n = \begin{cases} x_0, x_1 \\ x_{k+1} = \frac{f(x_n)x_{n-1} - f(x_{n-1})x_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \end{cases}$$

donde  $x_0$  y  $x_1$  (valores iniciales de la sucesión) se encuentran dentro del intervalo que contiene la solución de la ecuación definida  $f(x) = 0$ , se "acerca" cada vez más a un cero de la función, o sea, un punto  $x_c$  tal que  $f(x_c) = 0$ .

Aplicando esta sucesión se puede elaborar el siguiente

### **Algoritmo:**

- Definir función que expresa la ecuación  $f(x) = 0$
- Dar dos valores "próximos" a la solución:  $x_0, x_1$
- Dar el error:  $\varepsilon$

Repetir

$$x_2 = \frac{f(x_1) * x_0 - f(x_0) * x_1}{f(x_1) - f(x_0)}$$

Si  $|x_1 - x_2| > \varepsilon$  entonces hacer  $x_0 = x_1, x_1 = x_2$

Hasta que  $|x_1 - x_2| < \varepsilon$

Imprimir "Solución"  $x_2$

Para la ecuación  $\text{sen } x = \log x$  resuelta por el método de bisección la tabla puede tener para el nuevo método el siguiente encabezamiento:

x0	x1	x2	ERROR
2,60	2,90	$=((\text{SENO}(B20)-\text{LOG}(B20;10))*A20-(\text{SENO}(A20)-\text{LOG}(A20;10))*B20)/((\text{SENO}(B20)-\text{LOG}(B20;10))-(\text{SENO}(A20)-\text{LOG}(A20;10)))$	=ABS(B20-C20)
=B20	=C20	$=((\text{SENO}(B21)-\text{LOG}(B21;10))*A21-(\text{SENO}(A21)-\text{LOG}(A21;10))*B21)/((\text{SENO}(B21)-\text{LOG}(B21;10))-(\text{SENO}(A21)-\text{LOG}(A21;10)))$	=ABS(B21-C21)

Con ella se obtiene el siguiente resultado para un formato de 15 cifras decimales:

x0	x1	x2	ERROR
2,600000000000000	2,900000000000000	2,693174478887990	0,206825521112012
2,900000000000000	2,693174478887990	2,696167046003500	0,002992567115515
2,693174478887990	2,696167046003500	2,696256610986290	0,000089564982789
2,696167046003500	2,696256610986290	2,696256562716850	0,000000048269444
2,696256610986290	2,696256562716850	2,696256562717600	0,000000000000754
2,696256562716850	2,696256562717600	2,696256562717600	0,000000000000000
2,696256562717600	2,696256562717600	2,696256562717600	0,000000000000000

Compare el resultado de esta tabla con la del método de bisección y observe que en menos pasos se obtienen resultados más exactos.

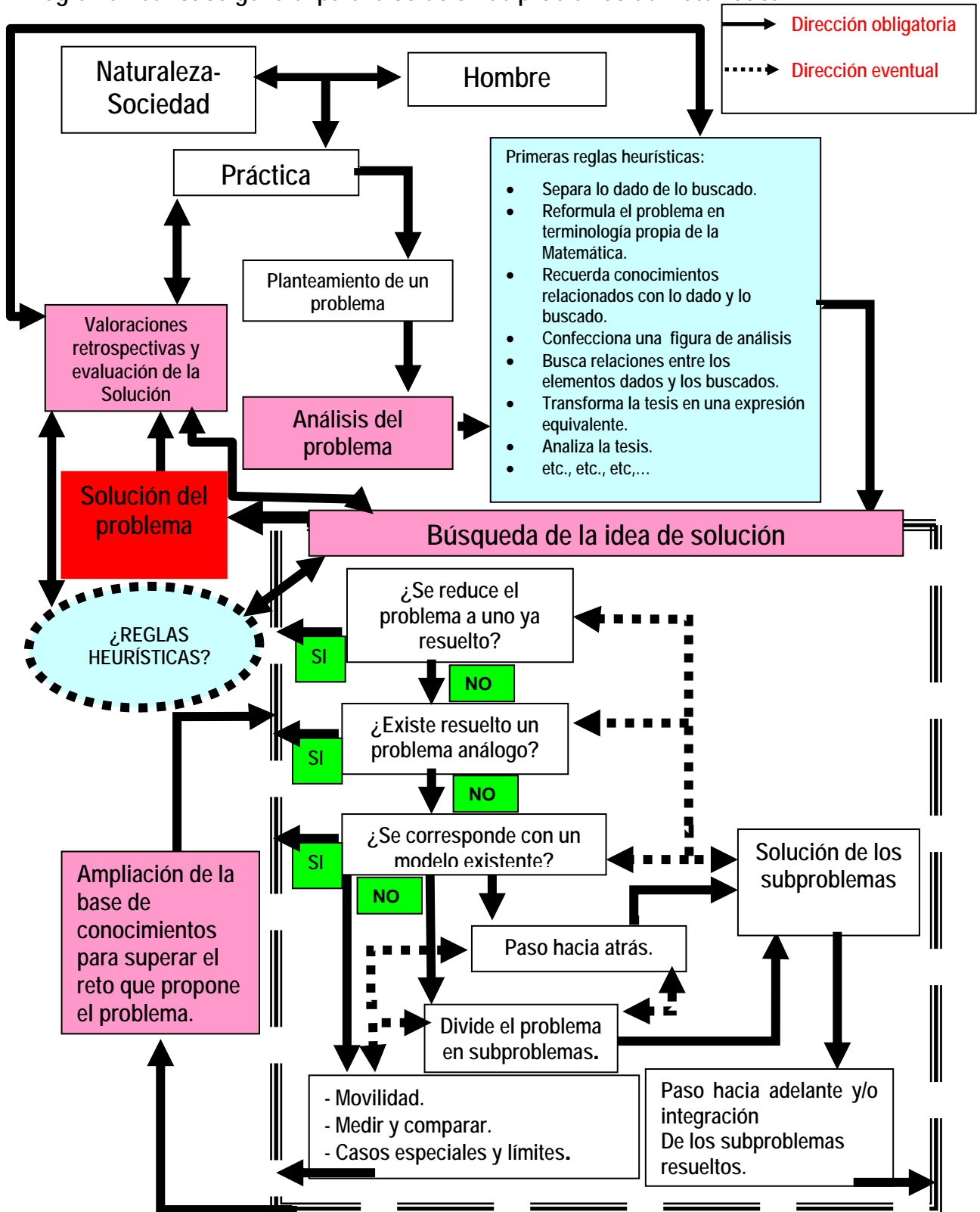
**Tarea:**

- Compare la fórmula dada en la sucesión con las expresadas en el algoritmo.
- Analice por qué el ciclo se repite hasta que  $|x_1 - x_2| < \varepsilon$
- Elabore la tabla que implemente este algoritmo para darle solución a las ecuaciones dadas en el inciso (b) del problema 7. .

Compare los pasos requeridos para calcular las ecuaciones por el algoritmo del problema 7 y el del problema 8.

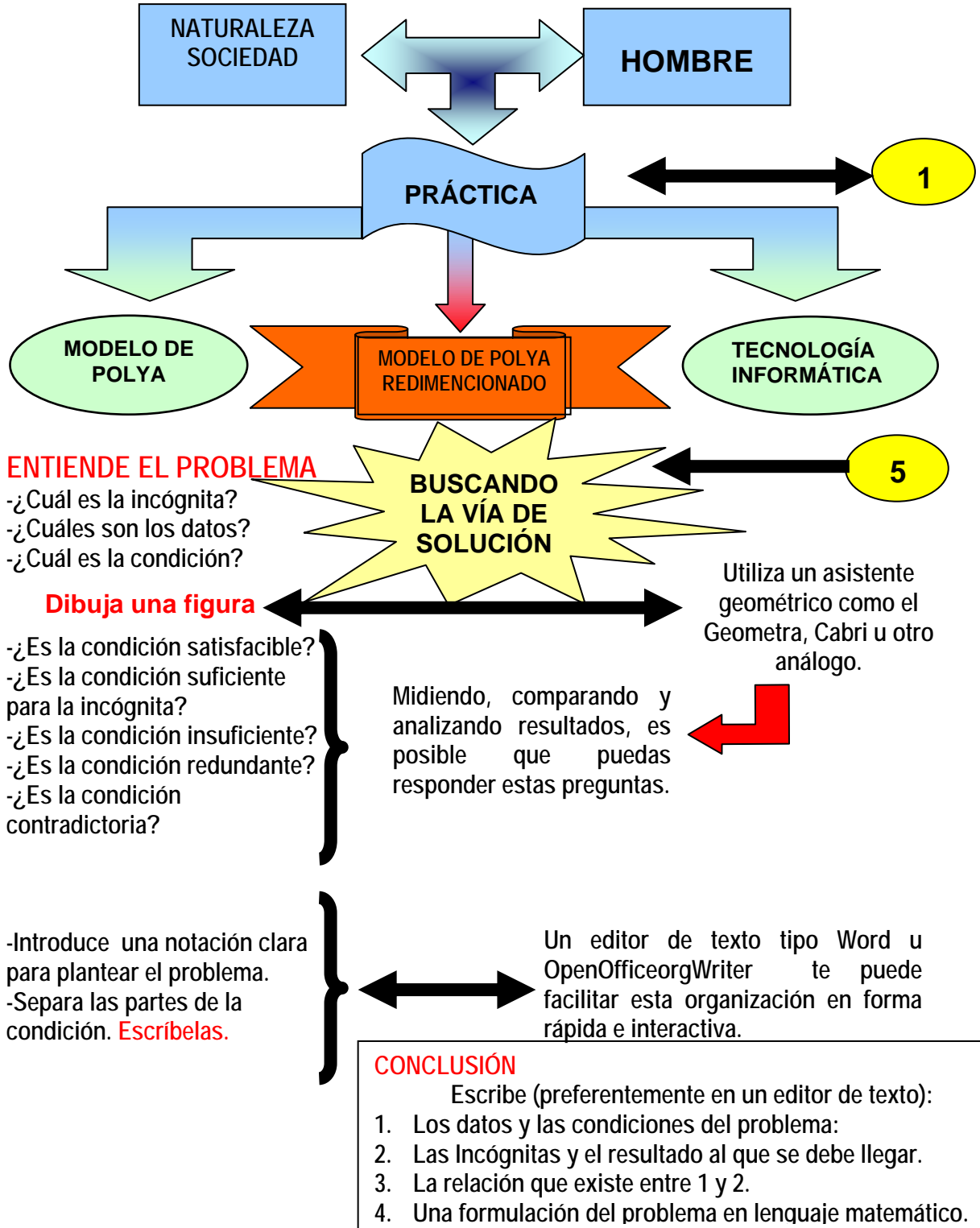
## ANEXO 2.7

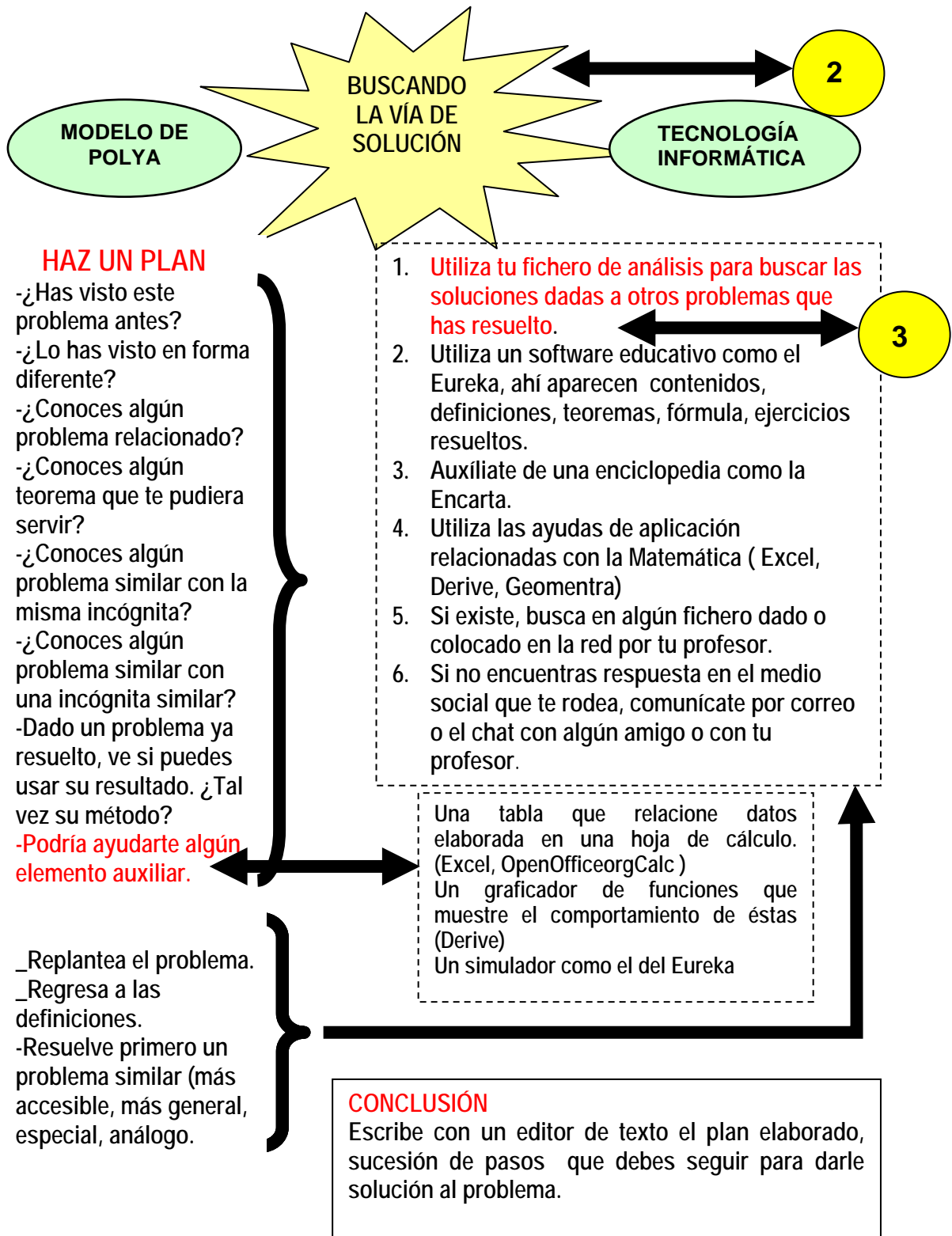
### Programa heurístico general para la solución de problemas de matemática

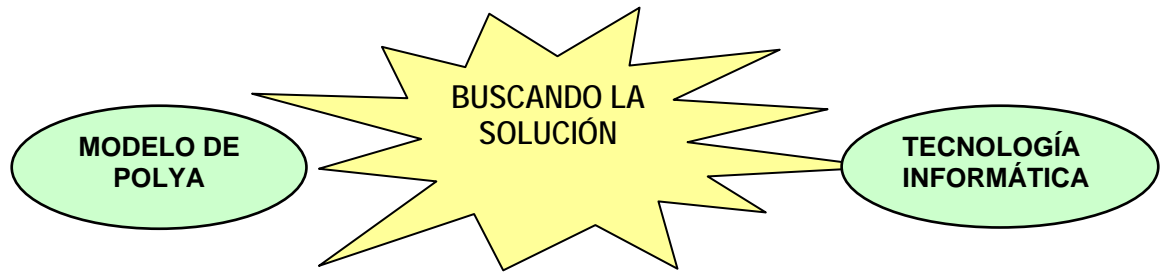


## ANEXO 2.8

### Esquema de solución de problemas de matemática con computadoras







## LLEVA A CABO EL PLAN

- Revisa cada paso.
- ¿Lo ves claro?
- ¿Lo puedes probar?

Revisa los pasos escritos en el fichero elaborado. Ellos te servirán de guía en el paso siguiente.

**Si hay errores**



**Ejecuta el plan  
Elaborado.**

1. Si necesitas utilizar fórmulas o justificar cada paso, Un software educativo tipo Eureka puede ayudarte para seleccionar la adecuada.
2. Para el cálculo algebraico:
  - Simplificación de expresiones.
  - Solución de ecuaciones algebraicas y trascendentes.
  - Solución de sistemas de ecuaciones.
  - Tratamiento de funciones: Gráficos, evaluación de funciones, operaciones con funciones
  - Operaciones con límites, derivadas, integrales, etc.
  - Utilizar un procesador matemático tipo Derive.
- 3- Para el tratamiento de la Geometría sintética y analítica:
  - Transformaciones geométricas.
  - Cálculo de elementos geométricos: perímetro, área, medir ángulos, etc.
  - Estudio de lugares geométricos.
  - Utilizar un procesador tipo Geometra o Cabri.
- 4- Para la construcción de tablas y análisis estadístico, utilizar una hoja de cálculo tipo Excel o una aplicación estadística especializada tipo SPSS.

## CONCLUSIÓN

Elabora un informe en el que se refleje:

- Plan seguido en la solución del problema.
- Cálculos realizado y vía utilizada.
- Resultados parciales y finales.
- Valoración de los resultados.



## ANALIZA LA SOLUCIÓN

-¿Está bien el resultado?  
-¿Están bien los argumentos?

- Comprueba la correspondencia entre el plan y los pasos desarrollados.
- Comprueba si los resultados (ver en Eureka) se corresponden con la teoría, es decir, si no hay contradicción entre resultados y teoría.
- Utilizando los asistentes matemáticos antes mencionados, comprueba con el "juego de datos" dado en el problema o con otro tomado de la práctica, los resultados son lógicos, es decir se corresponden con la práctica (criterio marxista de la verdad). Procura utilizar datos con valores extremos que permitan revelar la generalidad de los resultados.
- Si hay errores

Busca otra vía de solución.

¿Puedes utilizar el resultado en otro problema?  
¿Puedes utilizar el método de solución para resolver un problema análogo?

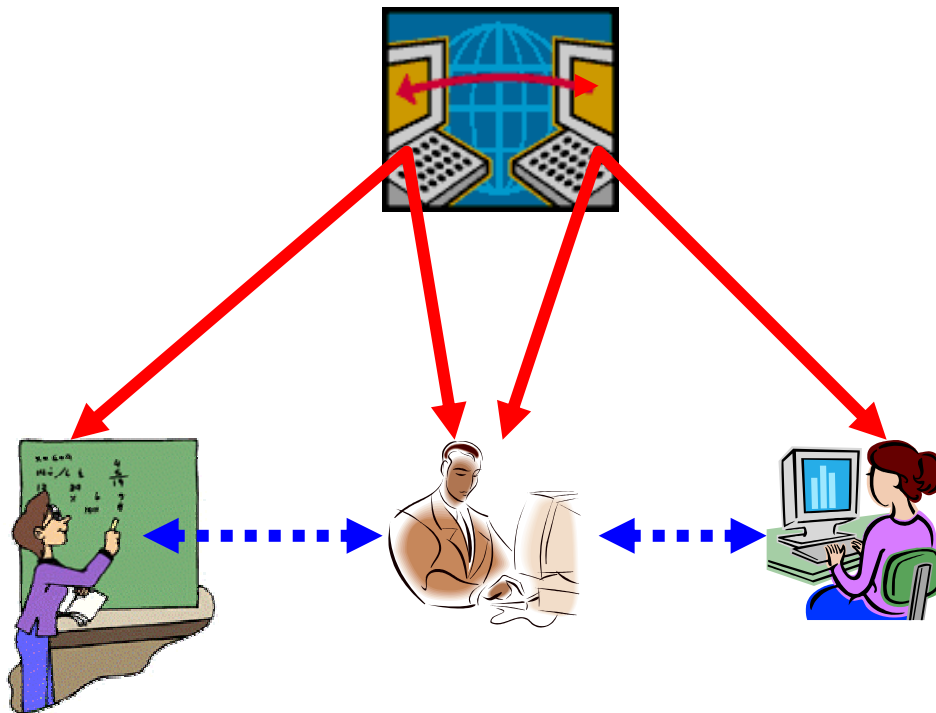
Almacena las respuestas a estas preguntas en un fichero, con ellas podrás dar respuestas a interrogantes plantadas en la búsqueda de la solución al tratar de resolver otros problemas. Las conclusiones del paso anterior pueden complementar tus respuestas. Una aplicación como el INVESTIGADOR suministrado por la Enciclopedia Encarta puede ayudarte.

## CONCLUSIÓN

Al informe elaborado en el paso anterior agrega estas valoraciones retrospectivas sobre la solución dada al problema. Ahora estás en condiciones de mostrar la solución del problema a tu profesor o a tus compañeros o enviarla por correo. Tú sabes que has llegado a la respuesta correcta.

## ANEXO 2.9

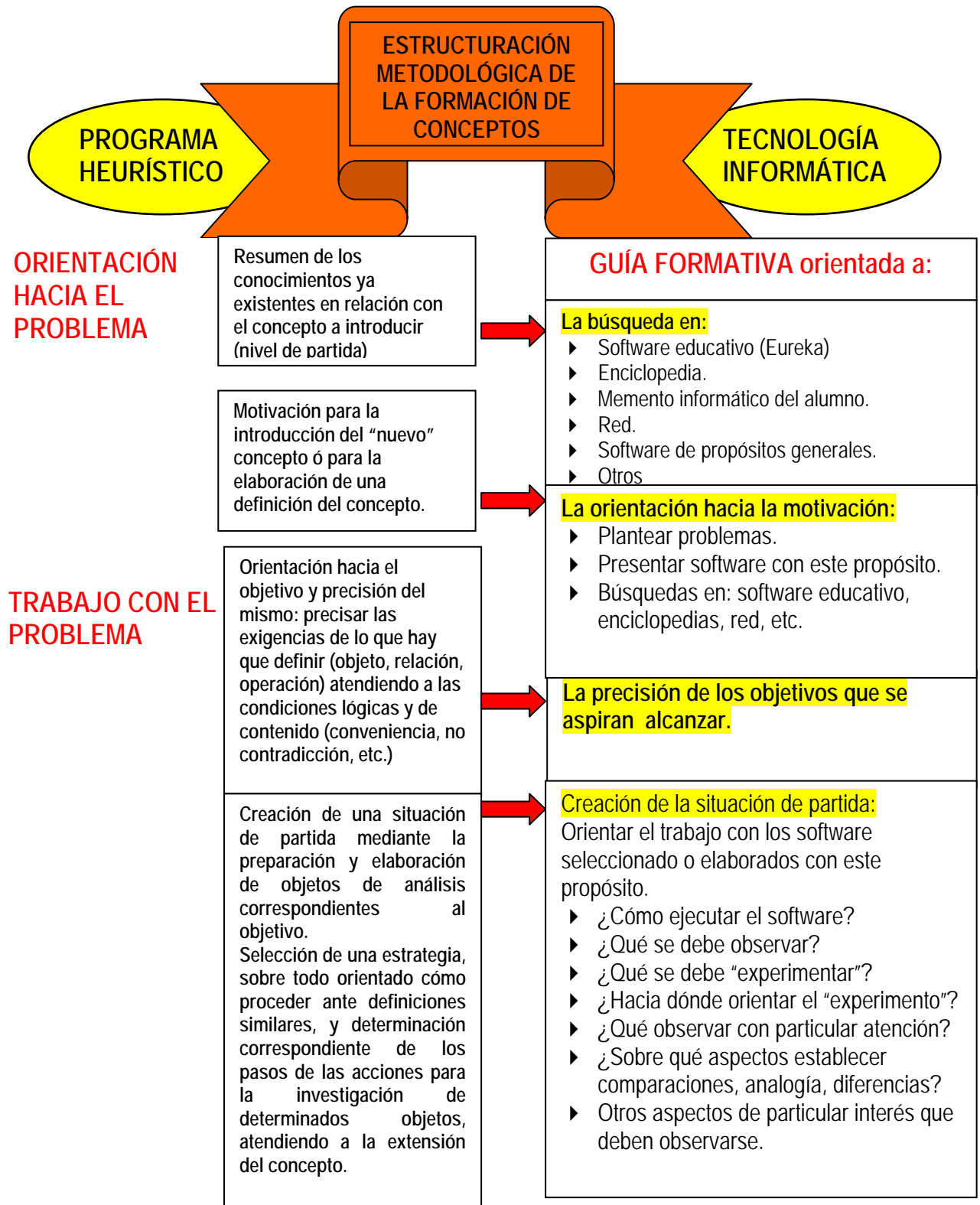
Esquema de las interrelaciones que se establecen el proceso mediado por la computadora





## ANEXO 2.10

### Formación de conceptos mediante computadoras





**ESTRUCTURACIÓN METODOLÓGICA DE LA FORMACIÓN DE CONCEPTOS**

**PROGRAMA HEURÍSTICO**

**TECNOLOGÍA INFORMÁTICA**

**SOLUCIÓN DEL PROBLEMA**

**CONSIDERACIONES RETROSPECTIVAS Y PERSPECTIVAS**

**GUÍA FORMATIVA orientada a:**

Establecimiento de las características comunes y no comunes de los objetos o pares de objetos observados, o búsqueda de relaciones por las cuales se puede sustituir el definiendum.

Formulación de la definición o de la explicación del concepto, reducción de las características comunes a un sistema de características necesarias y suficientes.

Casos límite y casos especiales del concepto

Consideraciones sobre la conveniencia de la definición

Ordenamiento del concepto en un sistema de conceptos.

Explicación de la estrategia aplicada en la formación del concepto, mediante la pregunta sobre las posibilidades de transferencia.

**La búsqueda de la definición:**

- ▶ Establecer las características que le son comunes a los objetos estudiados o las relaciones que existen entre ellos.
- ▶ Escribir en un procesador de texto una definición que exprese lo

**La formulación de la definición:**

- Buscar distintas definiciones en:
- ▶ Software educativo (Eureka)
  - ▶ Enciclopedia.
  - ▶ Red.
  - ▶ Software de propósitos generales.
  - ▶ Otros
- Seleccionar una definición.

**Planteamiento de casos límite:**

- ▶ Plantear problemas que lleven a casos límites o especiales, resuelto mentalmente o mediante aplicaciones informáticas.

**Comparación de definiciones**

Comparar las definiciones encontradas con la elaborada por cada alumno.

Valorar la correspondencia de cada definición encontrada con lo observado durante la etapa de creación de la situación de partida.

Seleccionar una definición o elaborar una nueva.

**Ampliación del memento informático.**

Inscribir en el memento informático de cada alumno la nueva definición con sus ejemplos y los casos límite y especiales

**Análisis de la guía formativa.**

Análisis de cada una las actividades realizadas en la guía y de la estrategia seguida en la búsqueda de la definición.

## ANEXO 2.11

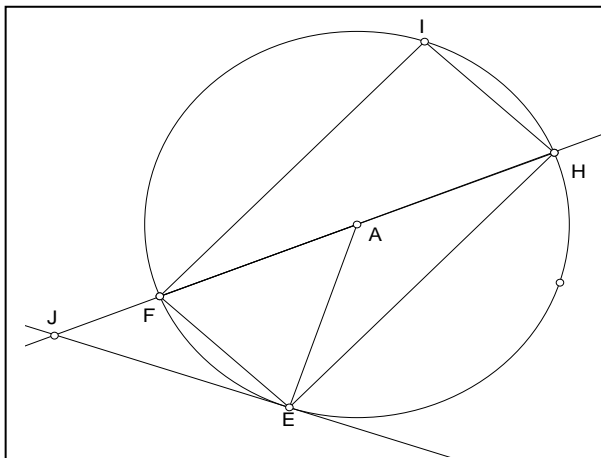
### Esquema de la estructura metodológica de la asimilación de conceptos



IDENTIFICAR EL  
CONCEPTO

DETERMINACIÓN DE LA PERTENENCIA  
O NO DE OBJETOS Y RELACIONES A  
CONCEPTOS DETERMINADOS

EJEMPLO CLÁSICO



- Busca en la figura ángulos inscritos, centrales y seminscritos.
- Cuántos triángulos rectángulos aparecen en la figura. Fundamenta tu respuesta.
- Diga que nombre reciben los siguientes elementos de la circunferencia  $\angle FAE$ ;  $\angle HEF$ ;  $\overline{HI}$ ;  $\overline{EF}$ .
- El segmento  $\overline{HF}$  se puede identificar con ayuda de distintos conceptos. ¿cuáles son estos?
- Para qué triángulos sus vértices están situados en la circunferencia y uno de sus lados es diámetro. ¿qué propiedades especiales cumple?

Comprobar si los objetos mostrados  
cumplen las condiciones del concepto:

- ▶ Buscarlos en objetos matemáticos que se encuentran en Software educativo (Eureka)
- ▶ Identificarlos en objetos matemáticos mandados a construir con el auxilio de aplicaciones o en las transformaciones que pueden sufrir estos objetos mediante el empleo de estas aplicaciones

EJEMPLO ADAPTADO

- Construye la figura utilizando el Geometra
- Busca en la figura ángulos inscritos, centrales y seminscritos y mídelos.
- Justifica el porqué hay ángulos que tienen iguales amplitudes. Y en particular ¿por qué  $90^\circ$
- Mueve el punto F sobre la circunferencia hasta alcanzar una posición en la que mayor cantidad de ángulos tomen una amplitud igual a  $90^\circ$ . Justifica este hecho.
- ¿Cuál es la posición relativa de la recta que contiene al segmento  $\overline{HF}$  y la tangente en E cuando se alcanza la posición descrita en d? Justifica tu respuesta.
- Al mover el punto E sobre la circunferencia, hay ángulos que no cambian su valor. ¿qué valores toman? ¿por qué sucede esto?
- Al mover el punto E sobre la circunferencia ¿cuáles son los valores máximos y mínimos que toma  $\angle JEH$  cuando el punto E se mueve sobre la circunferencia? ¿qué condiciones cumple la figura cuando este ángulo toma los valores notables  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $135^\circ$ ? justifica tus respuestas.



## REALIZACIÓN DE UN CONCEPTO

**CREAR OBJETOS O N-PLOS DE OBJETOS, O COMPLEMENTAR O TRANSFORMAR LOS EXISTENTES O RELACIONARLOS, DE MANERA QUE SE ORIGINEN REPRESENTANTES DE LOS CONCEPTOS DADOS.**

**Crear representantes del concepto; complementar los representantes, o establecer relaciones entre ellos**

- ▶ Buscarlos en objetos matemáticos que se encuentran en Software educativo y complementarlos con nuevas condiciones o relaciones(Eureka)
- ▶ Construir con el auxilio de aplicaciones objetos o n-uplos de objetos que sean representantes del concepto, transformar los existentes o establecer nuevas relaciones.

## EJEMPLO CLÁSICO

The diagram shows a circle with several points labeled: I at the top, H on the right, E at the bottom, F on the left, and J further to the left. Lines connect these points to form a complex figure. A central point A is also marked. The figure is divided into several triangles, including FEA and HIF.

- a. Completa la figura de manera que surja un triángulo congruente con el triángulo FEA
- b. Descomponga el triángulo HIF en dos triángulos isósceles.
- c. Halla el punto medio del segmento PR.

## EL EJEMPLO CLÁSICO ADAPTADO A LA GUÍA

- a. Completa la figura de manera que surja un triángulo congruente con el triángulo FEA.
- b. La figura ha quedado dividida en 4 triángulos. Identifica los que sean congruentes dos a dos.
- c. ¿Existe la posibilidad de que los 4 triángulos sean congruentes?
- d. Trazar las alturas correspondientes a los 4 triángulos que se forman y mídalas.
- e. Calcule el área de cada triángulo. Utilice la calculadora suministrada por el sistema.
- f. Marque cada triángulo de un color distintos con la opción "interior de polígono", calcule el área de cada uno con la opción medir y compárela con la encontrada en e.
- g. Compare las áreas y explique la conclusión a la que ha llegado.

## Anexos del capítulo III

### ANEXO 3.1

#### Entrevista a actores para el diagnóstico de necesidades de los profesores

Guía de entrevista. Se indagó sobre:

1. La utilización de los recursos informáticos en las actividades docentes controladas por el entrevistado en cuanto a si:
  - Se aprecia un uso sistemático de la computación.
  - Se orienta a los alumnos el trabajo con los software.
  - Se utilizan los software o la computadora, en forma general, siempre que el contenido lo permita.
2. La preparación informática de los docentes dirigidos por el entrevistado en cuanto a:
  - La preparación de los docentes de modo que puedan hacer uso de sus conocimientos informáticos como recursos didácticos.
  - La utilización de la computadora por parte de los docentes en la solución de los problemas de su labor cotidiana.
3. Las causas por las que los docentes no utilizan los recursos informáticos en sus clases.
4. Las principales necesidades del departamento y de los docentes para lograr un uso efectivo de los recursos informáticos.

## ANEXO 3.2

### Entrevista a profesores para el diagnóstico de necesidades

Guía de entrevista. La entrevista estuvo dirigida a:

1. Determinar si en pregrado, postgrado, en forma autodidacta los docentes han adquirido los conocimientos de informática que se relacionan a continuación:
  - a. Trabajo con el sistema operativo Windows.
  - b. Procesador de texto (Word).
  - c. Presentaciones electrónicas (PowerPoint).
  - d. Software educativos (en particular colección Futuro).
  - e. Asistentes matemáticos de geometría dinámica (tipo GOEMETRA o Cabri).
  - f. Tabuladores electrónicos (tipo Excel).
  - g. Asistentes matemáticos para el tratamiento algebraico y gráficos de funciones (tipo Derive).
2. Determinar el dominio que poseen los docentes (mucho, algo, poco, nada, no puede evaluar) de los siguientes contenidos:

- **Sistema operativo**

Encendido y apagado del equipo. Manejo del mouse. Trabajo con discos compactos (CD). Trabajo con discos de 3,5 (leer, guardar). Creación y manipulación de carpetas (copiar, mover, borrar). Manipulación de archivos (copiar, mover, borrar). Compactar y descompactar información. Acceso a otras máquinas de la red. Navegar a través de páginas Web. Utilizar el correo electrónico.

- **Microsoft Word.**

Abrir un documento guardado en disco. Editar un documento. Guardar un documento. Configurar el tamaño de la página y los márgenes. Opciones de formato (negritas, cursivas, etc). Imprimir un documento. Incluir tablas en un documento. Incluir gráficos en un documento.

- **PowerPoint.**

Crear una presentación. Guardar una presentación. Incluir efectos de animación. Incluir efectos de transición entre diapositivas. Mostrar la presentación creada.

- **Software educativo.**

Ejecutar un software. Navegar por un software. Criterios para evaluar la calidad de un software educativo. El software disponible para su especialidad. Potencialidades de la computadora como medio de enseñanza.

- **Asistentes matemáticos de geometría dinámica.**

Emplear los recursos para la construcción de gráficos. Emplear los recursos para la medición de los elementos de un gráfico. Hacer animaciones.

- **Tabuladores electrónicos.**

Elaborar tablas Hacer gráficos basados en tablas. Utilizar las funciones definidas por el sistema en particular las funciones estadísticas y matemáticas. Trabajar con las opciones de análisis de datos. Trabajar con tablas y gráficos dinámicos.

- **Asistentes matemáticos para el tratamiento algebraico y gráficos de Funciones.**

Definir expresiones algebraicas y funciones. Utilizar la opción de simplificar expresiones algebraicas. Utilizar las opciones de resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Graficar funciones.

**3. Determinar, según necesidades de los profesores, el grado de satisfacción (muy satisfecho, satisfecho, poco satisfecho, no satisfecho, no puede evaluar) que los mismos poseen en cuanto a sus conocimientos relacionado con los siguientes temas:**

- a. Trabajo con el Sistema operativo Windows.
- b. Procesador de Texto (Word).
- c. Presentaciones electrónicas (PowerPoint).
- d. Informática Educativa.
- e. Software educativos (en particular colección Futuro).
- f. Asistentes Matemáticos de Geometría dinámica (tipo GOEMETRA o Cabri).
- g. Tabuladores electrónicos (tipo Excel).
- h. Asistentes Matemáticos para el tratamiento algebraico y gráficos de funciones (tipo Derive).

**4. Conocer la disposición de los docentes a aprender Informática Educativa.**

(Muy dispuesto, Dispuesto, Poco dispuesto, Nada dispuesto, No puede evaluar)

5. Conocer las posibilidades de tiempo de que dispone los docentes para aprender Informática.  
( Muchas posibilidades., Posibilidades, Pocas posibilidades, , No tiene posibilidades, No puede evaluar).
6. Determinar los Software Educativos y asistentes matemáticos relacionados con la Enseñanza preuniversitaria que el docente conoce.
7. Determinar en qué temas de las asignaturas el docente utilizan los Software Educativos:
8. Determinar en qué momentos de sus clases los docentes utilizan los software:
  - Aseguramiento del nivel de partida.
  - Orientación hacia el objetivo.
  - Motivación.
  - Tratamiento del nuevo contenido.
  - Fijación del contenido.
9. Conocer cuáles son los 5 aspectos positivos y las 5 dificultades más significativas, que según los docentes influyen en el uso de los Software Educativo en el preuniversitario.
10. Determinar cuál afirmación comparten los docentes acerca de :
  - a) El uso de Software Educativos en la clase:( Favorece la clase. Entorpece la clase. No siempre es favorable. Otras causas ¿Cuáles?).
  - b) Las causas por la que no se utilizan los Software Educativos en la clase son: (Falta tiempo para usarlo. Falta de disponibilidad de los laboratorios. No funcionan bien. No me prepararon para usarlos. No me interesa utilizarlos. No poseo la preparación informática adecuada. No conozco los software disponibles. No sé cómo insertar la computación en mi asignatura. Mis clases no lo requieren. No existen condiciones materiales para ello. Otros ¿cuáles?).
11. Conocer cuáles son 5 fortalezas y 5 debilidades que los docentes consideran poseer en cuanto a su preparación para la incorporación de los Software Educativos al Proceso de Enseñanza-Aprendizaje.
12. Conocer cómo consideran los docentes que se refleja el uso de los Software Educativos y asistentes matemáticos en las orientaciones metodológicas de las asignaturas.  
(Adecuadamente. Aceptablemente. Ambiguo. No aparecen).



13. Conocer cómo consideran los docentes que son útiles las orientaciones metodológicas que brindan los Software Educativos.

(Mucho, Poco, Nada).

14. Conocer cómo consideran los docentes que se integran la video clase con los Software Educativos y asistentes matemáticos.

(Adecuadamente, Poco, Nada) .

15. Conocer qué aspectos cambiarían o mejorarían los docentes en los Software Educativos.

16. Conocer si los docentes consideran que se da la relación ínter materia en los Software Educativos.

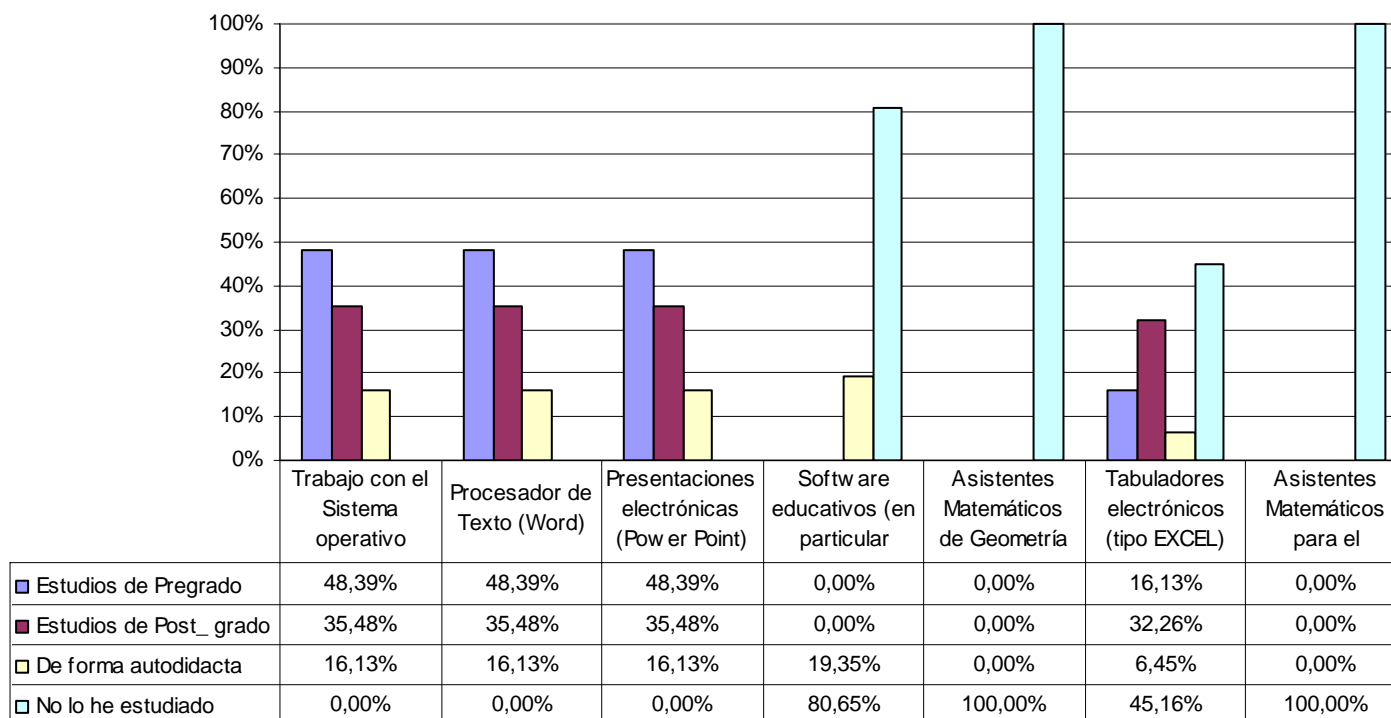
17. Conocer si los docentes utilizan otros Software Educativo que no sean los de la Colección Futuro.

### ANEXO 3.3

#### Procesamiento de la entrevista a profesores

#### Gráfica A

### Vias de adquisición del conocimiento relacionado con la Informática Educativa

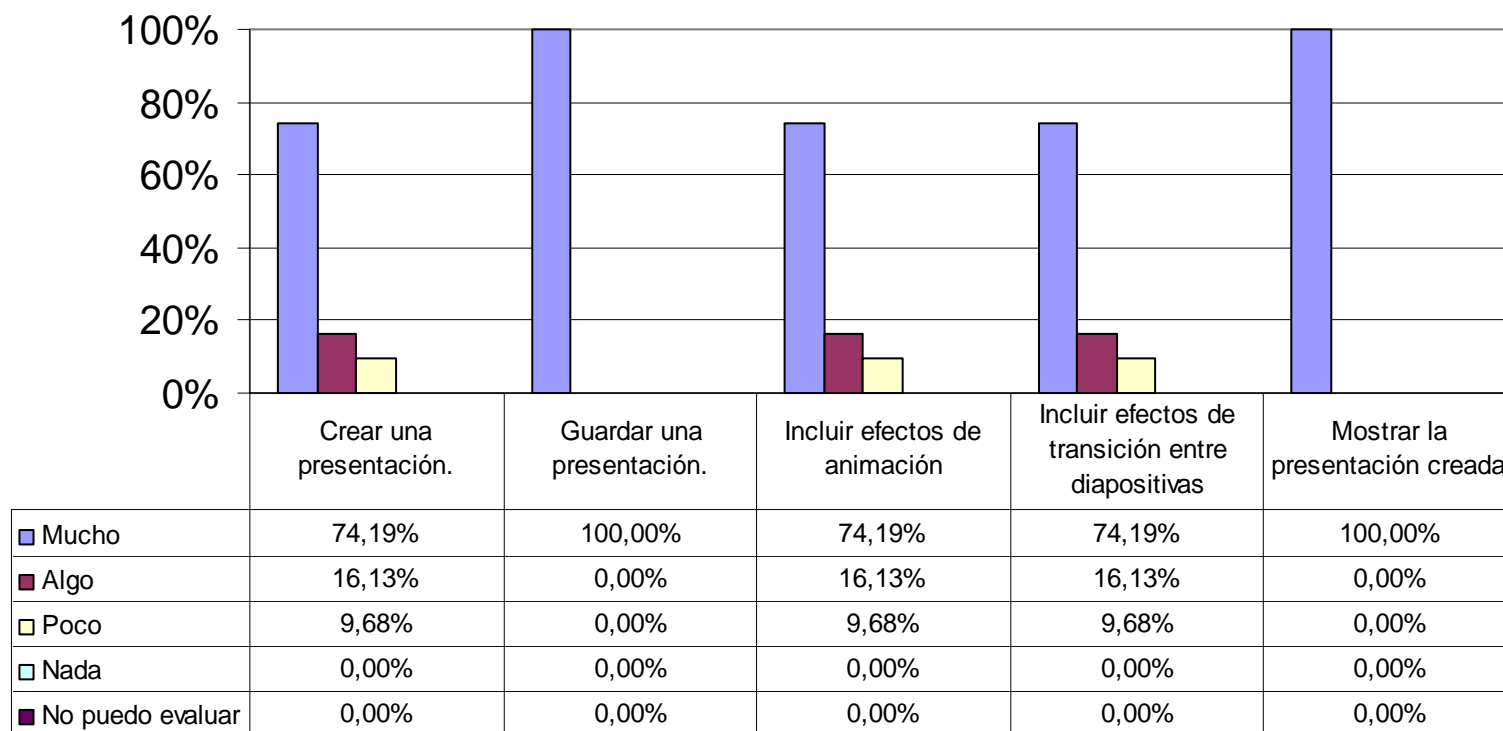






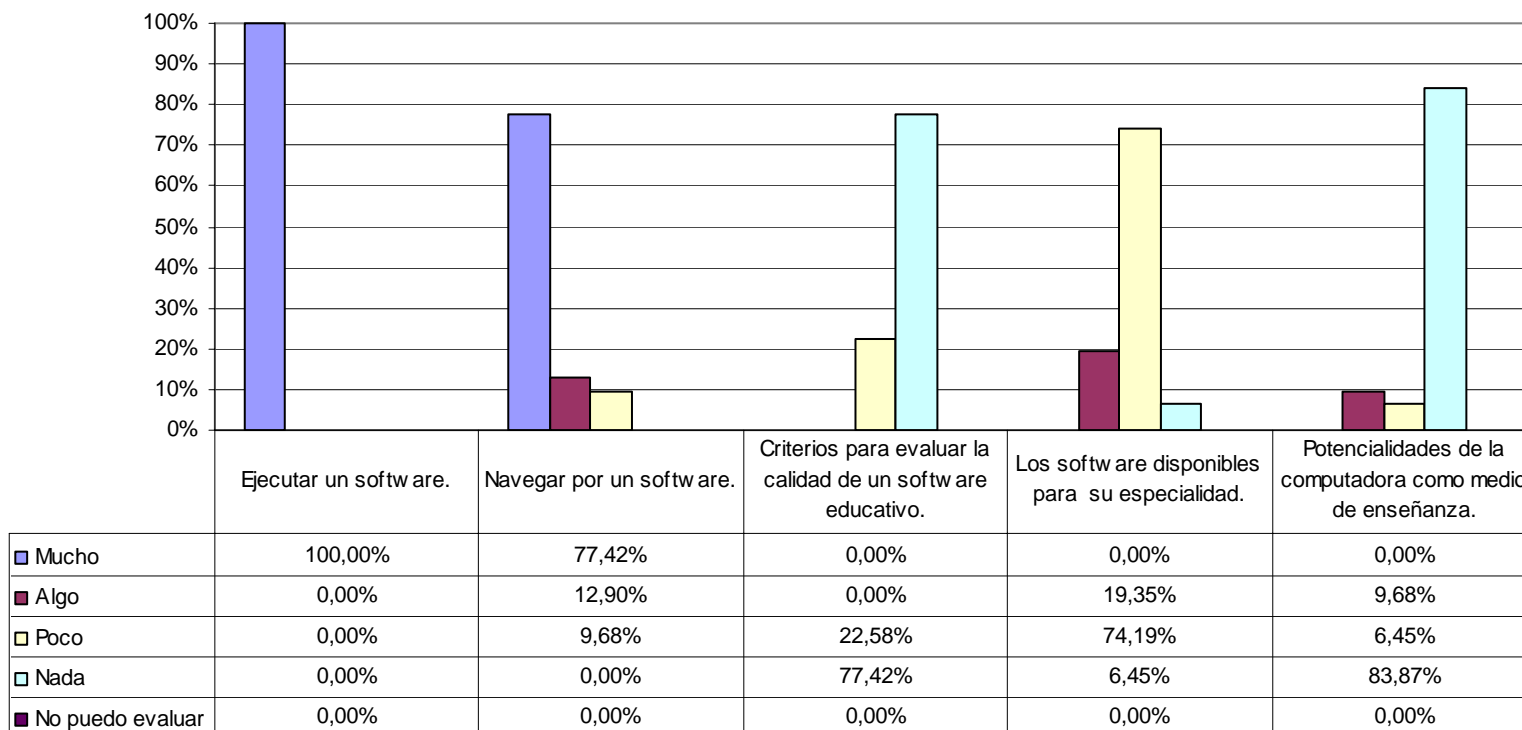
Gráfica D

### Dominio que tienen los docentes sobre Presentaciones Electrónicas



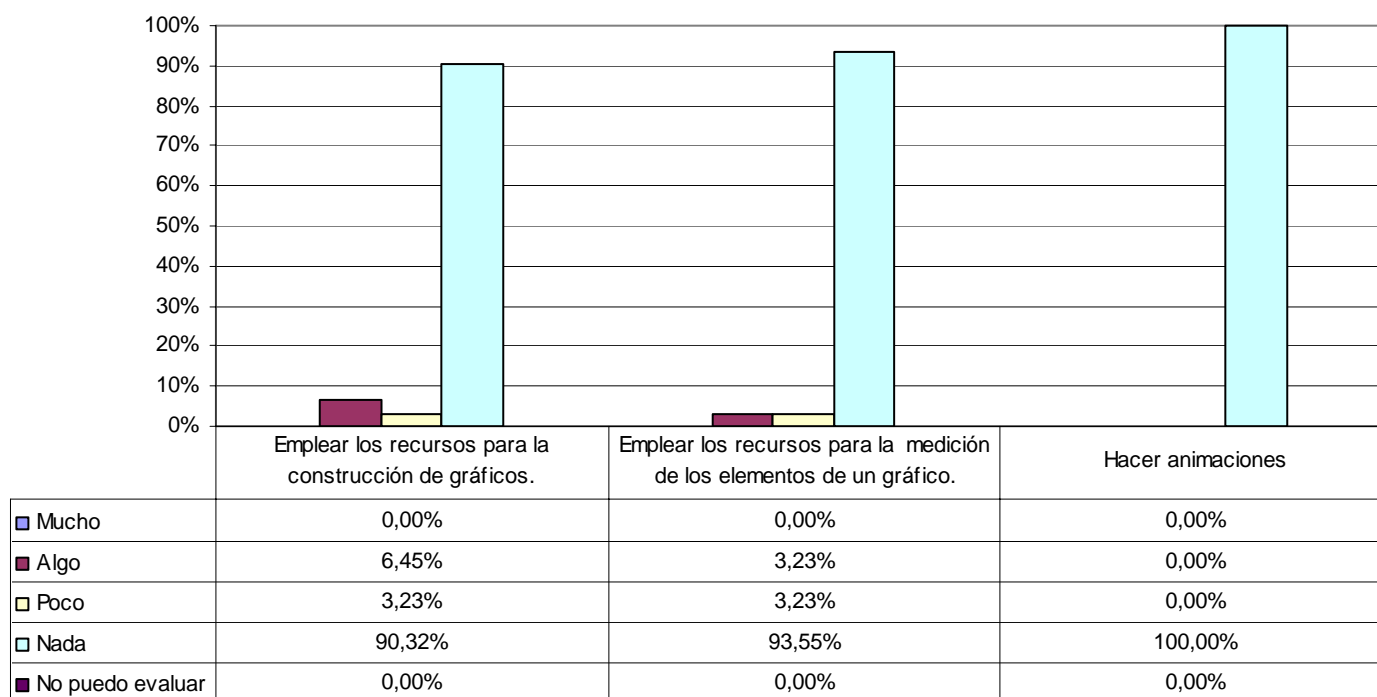
Gráfica E

### Dominio que tienen los docentes sobre Software Educativo



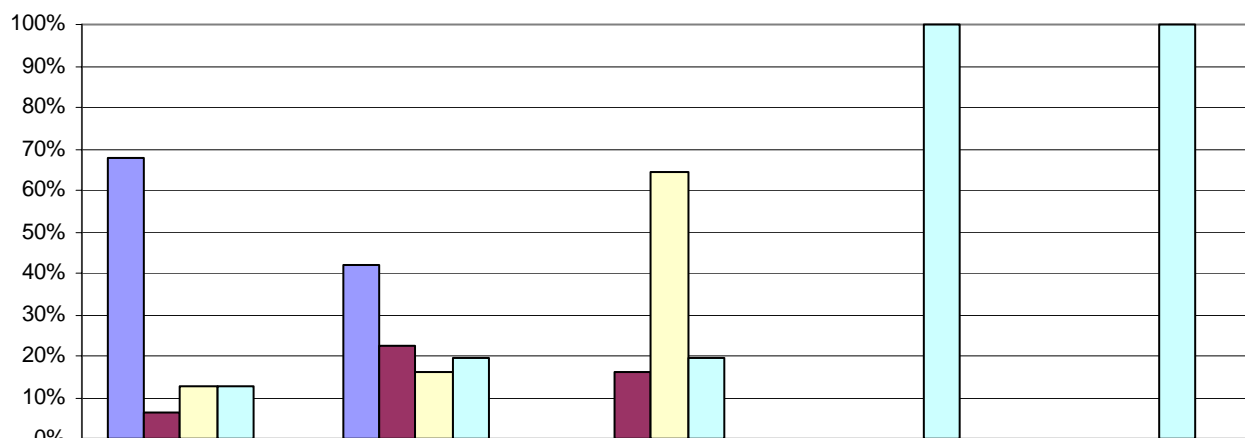
Gráfica F

**Dominio que tienen los docentes sobre Software de Geometría Dinámica**



Gráfica G

**Dominio que tienen los docentes sobre Tabuladores Electrónicos**

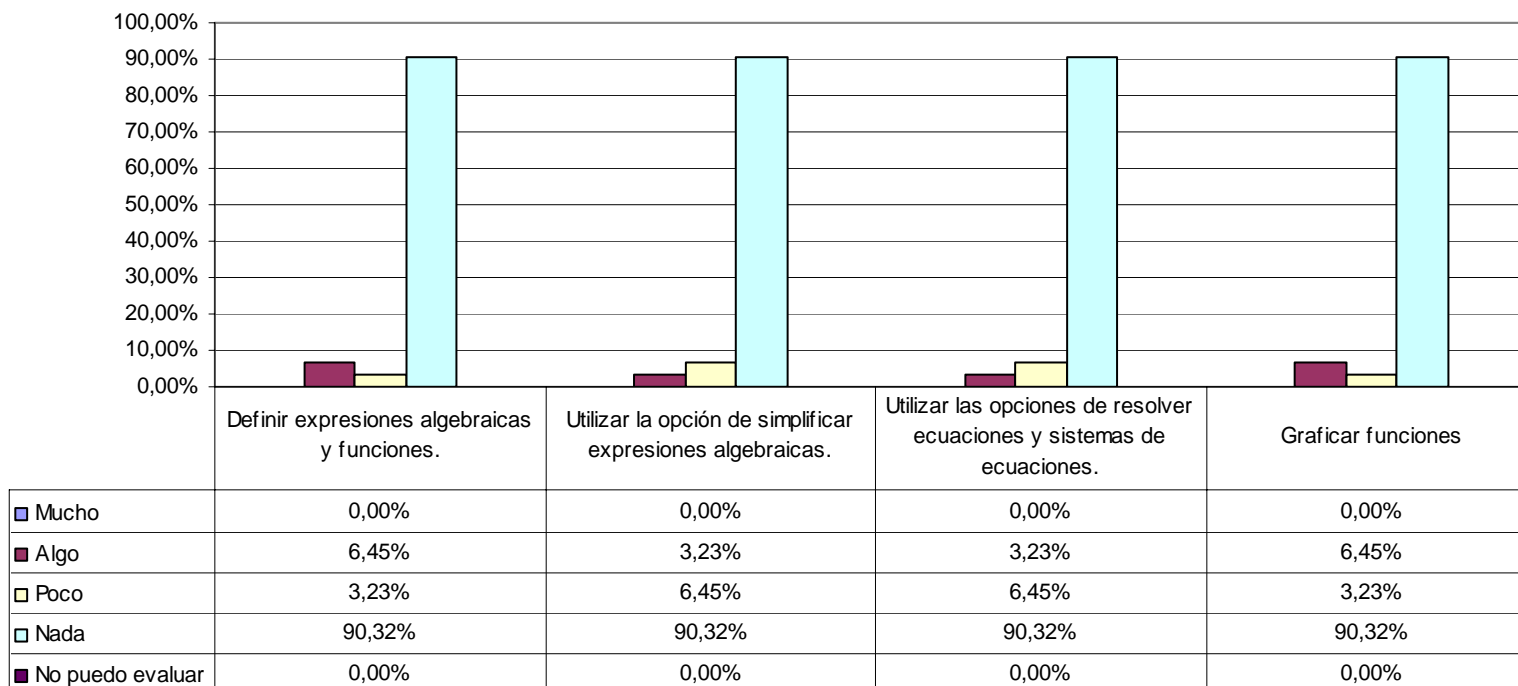


	Elaborar tablas	Hacer gráficos basados en tablas.	Utilizar las funciones definidas por el sistema en particular las	Trabajar con las opciones de análisis de datos.	Trabajar con tablas y gráficos dinámicos
■ Mucho	67,74%	41,94%	0,00%	0,00%	0,00%
■ Algo	6,45%	22,58%	16,13%	0,00%	0,00%
■ Poco	12,90%	16,13%	64,52%	0,00%	0,00%
■ Nada	12,90%	19,35%	19,35%	100,00%	100,00%
■ No puedo evaluar	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%



Gráfica H

**Dominio que tienen los docentes sobre Asistentes Matemáticos para el tratamiento algebraico y gráficos de funciones**

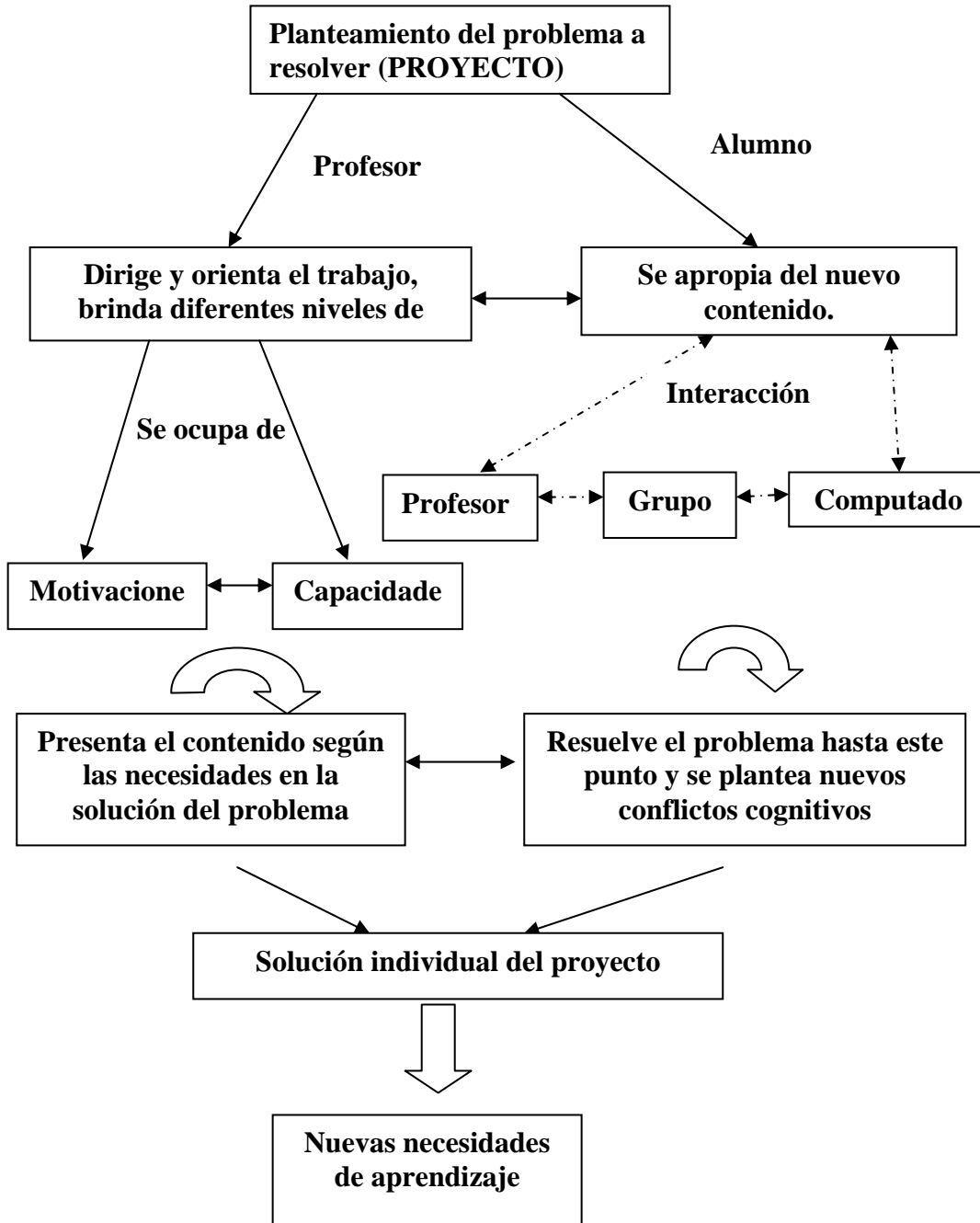




**ANEXO 3.4**

Modelo propuesto por Maida Bilbao

Esquema general de un curso de postgrado



## Anexo 3.5

POSTGRADO

# **Enseñanza de la Matemática asistida por computadoras en el preuniversitario.**



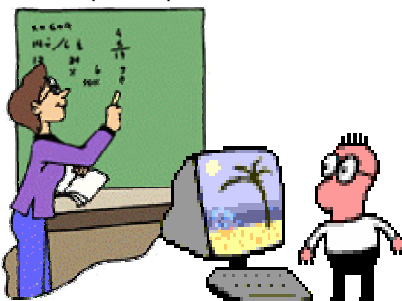
Departamento de "Ciencias Exactas"  
Facultad de Enseñanza Media Superior  
Universidad Pedagógica "Félix Varela".

Aplicación de los software educativos y asistentes matemáticos a la enseñanza de la Matemática en centros de nivel medio de la provincia Villa Clara.

PROFESOR:

Lic. Eric Crespo Hurtado

e-mail: [ericrespo@isp.vcl.rimed.cu](mailto:ericrespo@isp.vcl.rimed.cu)



## INTRODUCCIÓN:

En la séptima orientación metodológica del programa de Matemática para el oncenso grado se expresa:

Utilizar las tecnologías de la informática y la comunicación con el objetivo de adquirir información y racionalizar el trabajo de cálculo, pero también con fines heurísticos...

Otro elemento a tener en cuenta en la planificación de las clases es la introducción coherente del software educativo, los sistemas de aplicación y los asistentes matemáticos como "El Geómetra", los cuales deben ser utilizados por los alumnos dentro y fuera de las clases, a partir de la certera orientación de los docentes.

En correspondencia con estas orientaciones y los objetivos del programa, el aspirante Eric Crespo Hurtado pretende dar respuesta en su tesis de doctorado a la siguiente problemática.

La carencia en Cuba de un modelo didáctico que fundamente la integración de la computación a la clase de Matemática, en las condiciones de la escuela media cubana, revelando las vías y métodos que permitan aprovechar eficientemente los software educativos y asistentes matemáticos a la clase de esta asignatura para lograr resultados superiores en el aprendizaje de los alumnos.

Con el propósito de aplicar en la práctica los resultados alcanzados en esta investigación y ponerlas a disposición de los claustros de

preuniversitarios, respondiendo a las necesidades de los mismos en la provincia Villa clara, constatados en los entrenamientos metodológicos conjuntos, reuniones de asignaturas priorizadas y preparaciones metodológicas, particularmente en los IPVCP de la Ciudad Escolar "Ernesto Guevara", se propone el curso de postgrado:

"Enseñanza de la Matemática asistida por computadoras en el preuniversitario".

## OBJETIVO GENERAL DEL CURSO:

Capacitar a los docentes de los preuniversitarios que imparten docencia en el área de las Ciencias Exactas (Matemática Física Computación), con el fin de contribuir a elevar su preparación teórico-metodológica y práctica, de modo que puedan desempeñar un papel más activo en la transformación de su clase en correspondencia con las exigencias del actual desarrollo de la ciencia y la técnica e incidir en el aprendizaje de sus alumnos, a partir del uso eficiente de los software educativos diseñados para el nivel (Colección Futuro) y de software profesionales en los que se puede apoyar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática; todo ello bajo un modelo didáctico integrador sustentado en el redimensionamiento del modelo heurístico de Polya para la resolución de problemas.

### FORMAS DE ORGANIZACIÓN.

Se ha instrumentado la realización de conferencias discusión mediante la orientación del trabajo de "exploración orientada" de software y la valoración colectiva del estudio realizado, talleres, seminarios, actividades prácticas, debates, presentación de proyectos de guías formativas, entre otros; todo lo cual facilitará un aprendizaje activo de los participantes en las diversas actividades programadas.

### EVALUACIÓN

Se considera una evaluación sistemática según las categorías que establecidas por el Ministerio de Educación Superior, las que estarán determinadas por las participaciones de los alumnos en los talleres, seminarios y actividades prácticas planificadas. Se presentará una softarea final donde se integren los contenidos impartidos en el curso, la cual se expondrá ante el colectivo y un tribunal evaluador formado por el profesor del curso, un profesor invitado del ISP y el jefe del departamento de ciencias exactas del preuniversitario donde se imparta el curso o un cuadro de la dirección o de la reserva de ese centro designado para esta tarea.

### TEMÁTICAS

TEMAS	Horas presenciales	Horas de estudio	Total de horas
1. Estudio del software Eureka Representante de la colección Futuro. La softarea objetivos y estructura.	8	16	24

TEMAS	Horas presenciales	Horas de estudio	Total de horas
2. El EXCEL, asistente Matemático para la Estadística descriptiva.	4	12	16
3. El Geométrica, un software de Geometría dinámica.	8	16	24
4. El DERIVE, un software apropiado para el estudio de las funciones y temas de álgebra.	8	16	24
5. La computadora como medio auxiliar heurístico, consecuencias para el modelo de Polya de resolución de problemas	4	8	12
Total general	32	68	100

### CONSIDERACIONES FINALES:

De los resultados alcanzados se pueden derivar problemas para la maestría de Ciencias de la Educación tales como:

I. Un modelo de softarea atendiendo a las particularidades de la enseñanza de las ciencias exactas en el preuniversitario.

II. Sistema de ejercicios de Estadística con un enfoque interdisciplinar utilizando el EXCEL o software libre análogo.

III. Sitio Web que faciliten el aprendizaje de las aplicaciones: (a) EXCEL. (b) Software libre análogo al EXCEL. (c) GEOMETRA. (d) DERIVE.

IV. Sistema de softareas para la introducción de nuevo contenido de: (a) Geometría. (b) Álgebra. (c) Matemática Numérica. (d) Matemática Superior.

V. Sistema de softareas para orientar la solución de ejercicios planteados en el EUREKA mediante: (a) GEOMETRA. (b) DERIVE

VI. Diseño e implantación del círculo de interés de: (a) Geometría dinámica. (b) DERIVE. (c) Estadística.

VII. Metodología para la aplicación de la "concepción del modelo de Polya haciendo uso de la computadora como medio auxiliar heurístico."

VIII. Concursos de conocimientos de nuevo tipo, utilizando la computadora como medio para la búsqueda y desarrollo de la solución de los problemas planteados.

## **ANEXO 3.6**

### **Encuesta para la valoración de expertos**

Apreciado(a) docente:

Usted ha sido seleccionado(a), por su calificación científico-técnica, sus años de experiencia y los resultados alcanzados en su labor profesional, como posible experto(a) para valorar los resultados teóricos y posible incidencia en la práctica de esta investigación.

El objetivo de la presente encuesta es valorar un modelo para la enseñanza de la Matemática asistida por computadoras tomando en consideración:

- La computadora como medio auxiliar heurístico mediante:
  - Aplicaciones tradicionales (tales como las del paquete Office).
  - Asistentes matemáticos para el tratamiento algebraico (tipo Derive), Geometría Dinámica (tipo Geometra Y Cabri) y Estadística (Excel y otros análogos).
  - Software Educativo (tipo Eureka)
- Las consecuencias para un redimensionamiento del modelo de Polya para la resolución de problemas, esta vez aprovechando las posibilidades que ofrece la computadora como medio auxiliar heurístico.
- Las consecuencias del uso de la computadora como medio auxiliar en los modelos metodológicos para el tratamiento de las situaciones típicas de la enseñanza de la Matemática.
- La intencionalidad heurística en la guía formativa

#### **Información sobre el posible experto.**

Nombre:

Sexo:

Edad:

Nivel de educación:

Cargo que desempeña:

País:

Ciudad:

Institución donde labora:

Años de experiencia:

Marque una cruz (X) en la tabla siguiente, la casilla que refleja su nivel de conocimiento acerca del problema que se aborda en la propuesta.

1. Considere que la escala que se le presenta es ascendente, es decir, el número 10 corresponde al mayor nivel, 9 al siguiente y así sucesivamente hasta el número 0 que corresponde al menor nivel de conocimiento.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

2. Realice una autoevaluación del grado de influencia que cada una de las fuentes que se presentan a continuación, ha tenido en su conocimiento y criterios que le permitan evaluar **la propuesta de un modelo para la enseñanza de la Matemática asistida por computadoras**. Para ello marque con una cruz (X), según corresponda, en A (alto), M (medio) o B (bajo).

### Expertos comprometidos

FUENTES DE ARGUMENTACIÓN		ALTO	MEDIO	BAJO
1	Experiencia en su actividad docente como profesor de Matemática, Física o Computación.			
2	Conocimiento del estado actual de la enseñanza asistida por computadoras en contextos internacional.			
3	Conocimiento del estado actual de la enseñanza asistida por computadoras en contextos del país.			
4	Participación en actividades metodológica (no cursos) sobre la enseñanza asistida por computadoras.			
5	Su participación en actividades investigativas o experiencias pedagógicas de avanzada (no necesariamente relacionadas con la enseñanza asistida por computadoras).			

## Expertos no comprometidos

FUENTES DE ARGUMENTACIÓN	ALTO	MEDIO	BAJO
Experiencias personal relacionadas con la enseñanza asistida por computadoras.			
Investigaciones o trabajo metodológicos realizado por usted sobre la enseñanza asistida por computadora.			
Experiencia adquirida en su actividad profesional impartiendo docencia de Matemática o Computación (años de experiencias, trabajos realizados, etc.).			
Estudio de literatura especializada y publicaciones de autores nacionales relacionadas con la enseñanza asistida por computadoras.			
Estudio de literatura especializada y publicaciones de autores extranjeros relacionadas con la enseñanza asistida por computadoras.			
Conocimiento del estado actual de la enseñanza de la matemática asistida por computadoras en Cuba.			
Conocimiento del estado actual de la enseñanza de la matemática asistida en otros países.			

### A. Valoración de la propuesta de un modelo para la enseñanza de la Matemática asistida por computadoras.

A continuación se presenta una lista de indicadores con las respectivas unidades de medición, con el propósito de que marque con una cruz (X) la celda que corresponda con la evaluación que usted le otorga a cada ítem.

Unidades de medición: Muy adecuado (MA), Bastante adecuado (BA), Adecuado (A), Poco adecuado (PA), Inadecuado (I).



Nº	INDICADORES	VALORACIÓN				
		MA	BA	Ad	PA	IN
<b>SOBRE LA CONCEPCIONES TEÓRICA</b>						
1.	La argumentación del uso de la computadora como medio auxiliar heurístico.					
2.	La argumentación del uso de los asistentes algebraico y el tratamiento de funciones (tipo Derive).					
3.	La argumentación del uso de los asistentes de Geometría Dinámica (tipo Geometra o Cabri).					
4.	La argumentación del uso de tabuladores electrónicos tipo Excel para el tratamiento de los contenidos de Estadística.					
5.	La argumentación del redimensionamiento del modelo de Polya .					
6.	La argumentación de las consecuencias del uso de la computadora como medio auxiliar en los modelos metodológicos para el tratamiento de las situaciones típicas de la enseñanza de la Matemática.					
7.	La argumentación de la guía formativa con una intencionalidad heurística.					
<b>VALORACIONES PROSPECTIVAS DE LAS CONSECUENCIAS QUE TENDRÍA LA APLICACIÓN DEL MODELO PROPUESTA.</b>						
	<b>Para la comprensión de los conceptos, propiedades y relaciones que se estudian y el dominio de la base conceptual que subyace a los algoritmos y procedimientos de trabajo que emplean en el preuniversitario.</b>					
8.	El uso de la computadora como medio auxiliar heurístico.					
9.	El uso de los asistentes algebraico y el tratamiento de funciones (tipo Derive).					
10.	El uso de los asistentes de Geometría Dinámica (tipo Geometra o Cabri).					
11.	El uso de tabuladores electrónicos tipo Excel para el tratamiento de los contenidos de Estadística.					
12.	El uso de la computadora como medio auxiliar en el tratamiento metodológico de las situaciones típicas de la enseñanza de la Matemática.					
13.	La guía formativa con una intencionalidad heurística.					
	<b>Para dar cumplimiento al objetivo</b> Formular y resolver problemas relacionados con el desarrollo político, económico y social local, nacional, regional y mundial y con fenómenos y procesos científico-ambientales, que requieran transferir conocimientos y habilidades aritméticas, algebraicas, geométricas y trigonométricas a diferentes contextos y promuevan el desarrollo de la imaginación, de modos de la actividad mental, de sentimientos y actitudes, que le permitan ser útiles a la sociedad y asumir conductas revolucionarias y responsables ante la vida.					
14.	El redimensionamiento del modelo de Polya para la resolución de problemas, aprovechando las posibilidades que ofrece la computadora como medio auxiliar heurístico.					
15.	El uso de los asistentes matemáticos					
16.	El uso de la computadora como medio auxiliar en el tratamiento metodológico de las situaciones típicas de la enseñanza de la Matemática.					

17.	La guía formativa con una intencionalidad heurística					
	Para dar cumplimiento al objetivo Desarrollar hábitos de estudio y técnicas para la adquisición independiente de nuevos conocimientos y la racionalización del trabajo mental con ayuda de los recursos de las tecnologías de la informática y la comunicación, que le permitan la superación permanente y la orientación en el entorno natural, productivo y social donde se desenvuelve.					
18.	El uso de la computadora como medio auxiliar heurístico.					
19.	El uso de los asistentes matemáticos.					
20.	La guía formativa con una intencionalidad heurística					

## B. Valoración de los componentes del modelo para la enseñanza de la Matemática asistida por computadoras a partir de la relación relevancia-viabilidad.

En una escala de 1 a 10 donde 1 es el menor valor y 10 el mayor, establezca una valoración general para cada uno de los aspectos señalados en la tabla y que constituyen los elementos tomados en consideración en la concepción propuesta tomando como indicadores:

Relevancia: entendida esta como el grado de importancia del aspecto a evaluar de la propuesta para una correcta concepción de la enseñanza de la matemática asistida por computadoras.

Viabilidad: Es la posibilidad de implementar en la práctica docente el aspecto de la propuesta evaluado

ASPECTOS A EVALUAR	RELEVANCIA	VIABILIDAD
La computadora como medio auxiliar heurístico.		
Las posibilidades que brindan los asistentes matemáticos.		
El redimensionamiento del modelo de Polya para la solución de problemas cuando se utiliza la computadora como medio auxiliar heurístico.		
La intencionalidad heurística en la guía formativa de matemática.		
El redimensionamiento de los modelos metodológicos para el tratamiento de las situaciones típicas en la clase de Matemática.		

### C. Recomendaciones generales

Ofrezca sus ideas y criterios sobre las bondades, deficiencias e insuficiencias que presenta **la propuesta de concepción para la enseñanza de la Matemática asistida por computadoras** en su concepción teórica y que pudiera presentar al ser aplicada en la práctica escolar, con el fin de poder generar un perfeccionamiento de la misma. Para sus recomendaciones, tenga en cuenta los indicadores que valoró como: Adecuados (A), Poco adecuados (PA), Inadecuados (I).

Para finalizar, le comunico que sus criterios y opiniones se manejarán de forma anónima. Además, le agradezco por anticipado su valiosa colaboración y estoy seguro que sus sugerencias y señalamientos críticos contribuirán a perfeccionar **la propuesta concepción para la enseñanza de la Matemática asistida por computadora** tanto en su concepción teórica como en su aplicación a la práctica escolar.

Muchas gracias por su cooperación y le pido disculpas por las molestias ocasionadas.

BONDADES	
DEFICIENCIAS	
INSUFICIENCIAS	

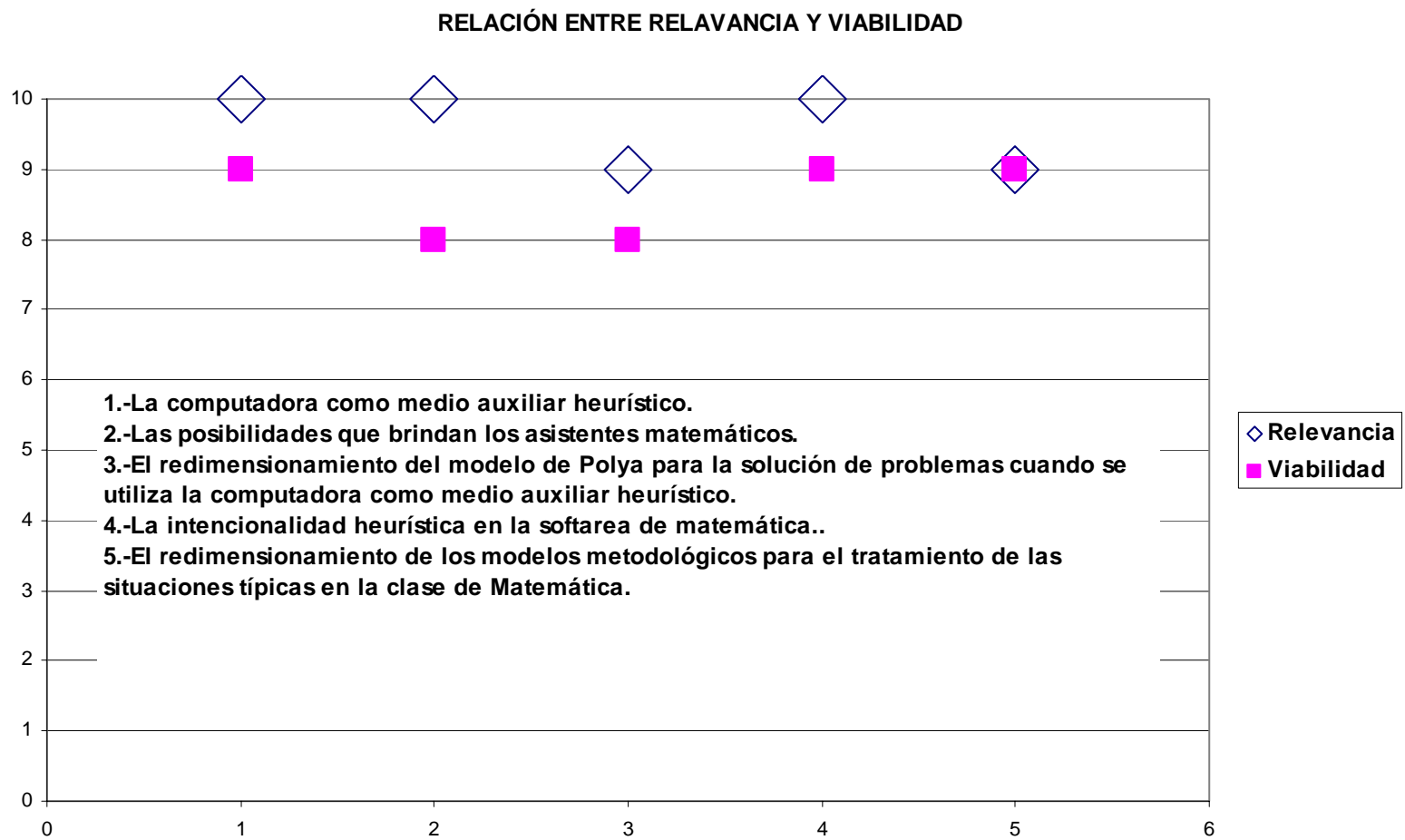
### ANEXO 3.7

#### Consenso de lo expertos comprometidos

	MUY ADECUADO	BASTANTE ADECUADO	ADECUADO	POCO ADECUADO	INADECUADO
IND_1	XXXX				
IND_2	XXXX				
IND_3	XXXX				
IND_4	XXXX				
IND_5	XXXX				
IND_6	XXXX				
IND_7	XXXX				
IND_8	XXXX				
IND_9	XXXX				
IND_10	XXXX				
IND_11	XXXX				
IND_12	XXXX				
IND_13	XXXX				
IND_14		XXXX			
IND_15		XXXX			
IND_16	XXXX				
IND_17	XXXX				
IND_18	XXXX				
IND_19	XXXX				
IND_20	XXXX				

## ANEXO 3.8

### Expertos comprometidos



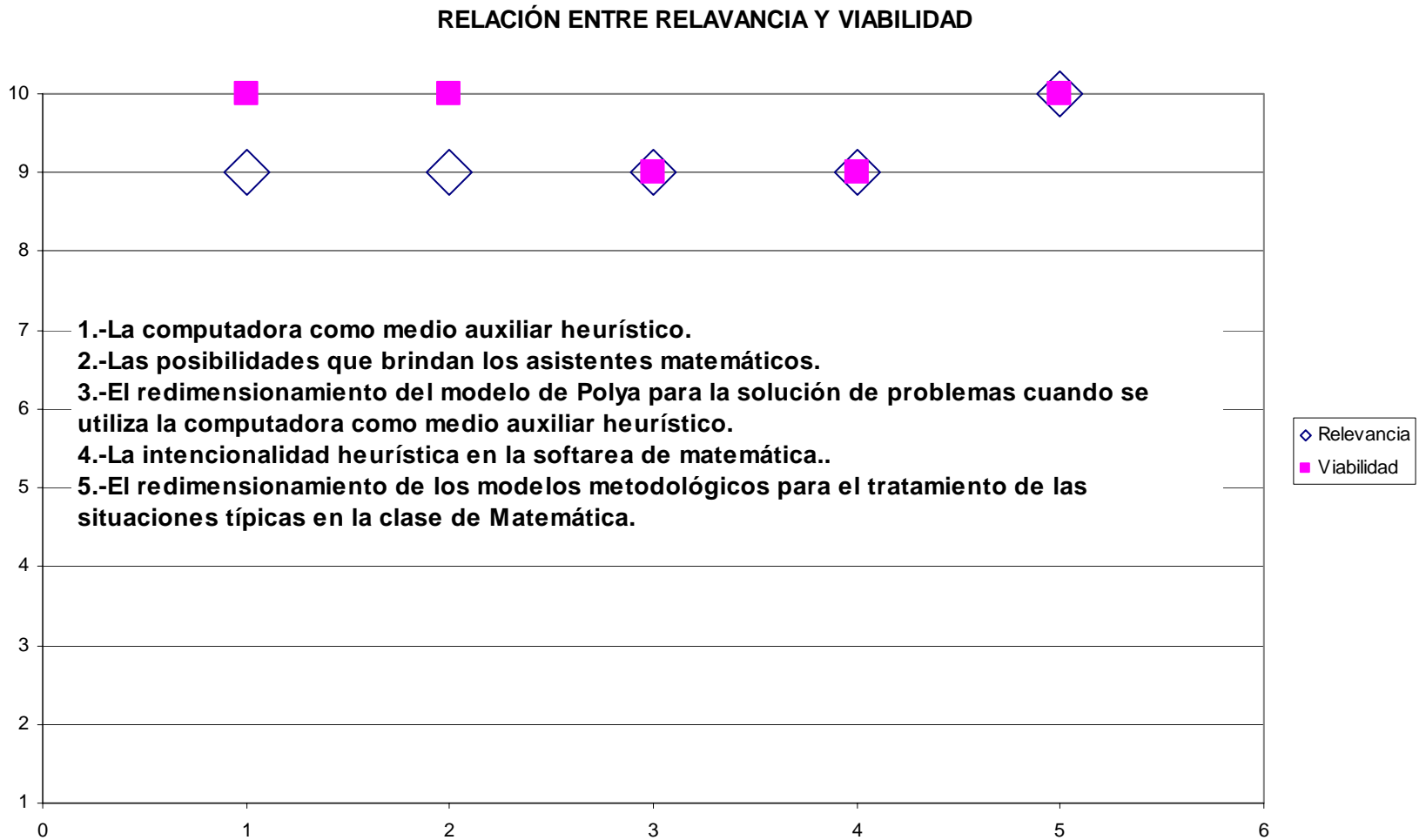
### ANEXO 3.9

#### Consenso de lo expertos no comprometidos

	MUY ADECUADO	BASTANTE ADECUADO	ADECUADO	POCO ADECUADO	INADECUADO
IND_1	XXXX				
IND_2	XXXX				
IND_3	XXXX				
IND_4	XXXX				
IND_5	XXXX				
IND_6	XXXX				
IND_7	XXXX				
IND_8	XXXX				
IND_9	XXXX				
IND_10	XXXX				
IND_11	XXXX				
IND_12	XXXX				
IND_13	XXXX				
IND_14		XXXX			
IND_15	XXXX				
IND_16	XXXX				
IND_17	XXXX				
IND_18	XXXX				
IND_19	XXXX				
IND_20	XXXX				

## ANEXO 3.10

### Expertos no comprometidos



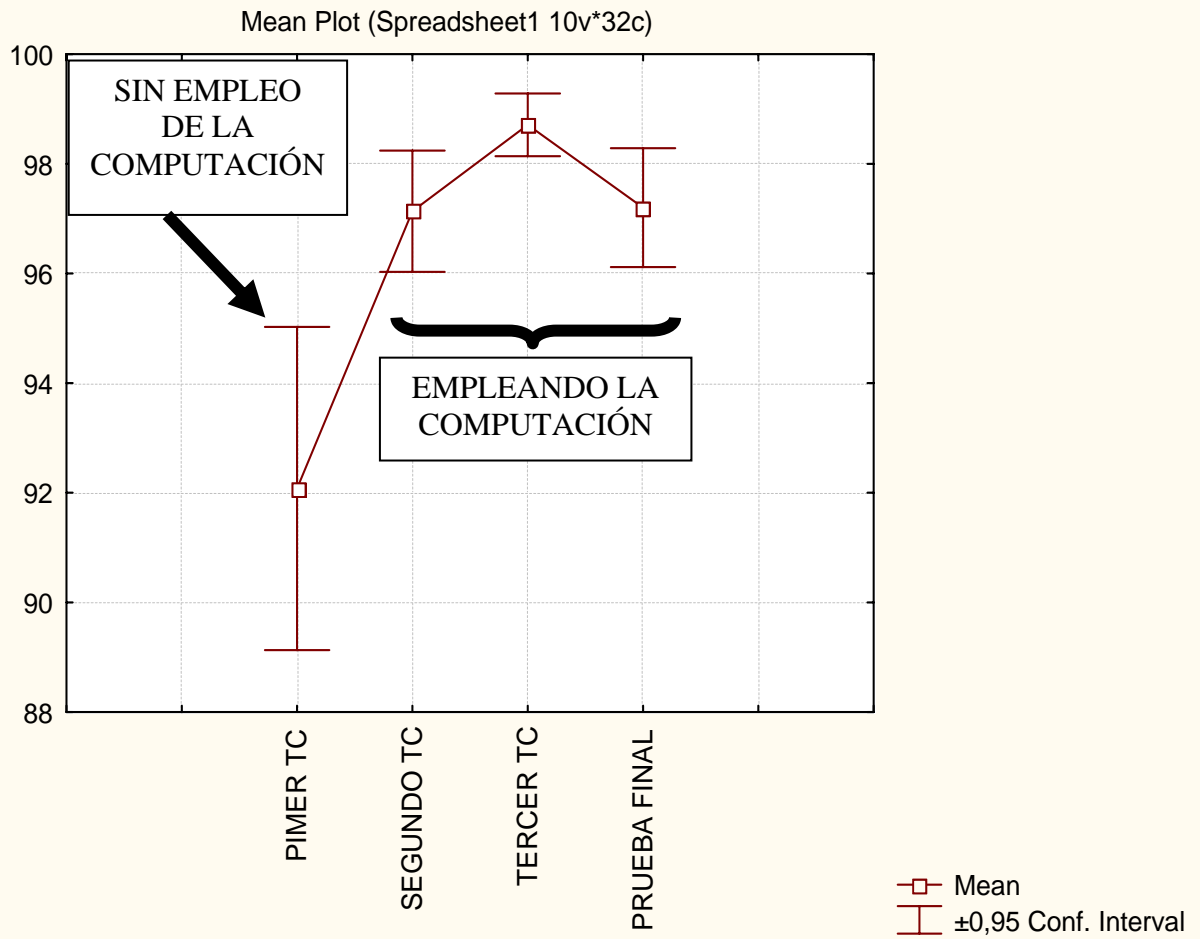
## ANEXO 3.11

No	SIN EMPLEAR EL MODELO	EMPLEANDO ELEMENTOS DEL MODELO		
	PIMER TC	SEGUNDO TC	TERCER TC	PRUEBA FINAL
1	100	100	100	100
2	95	98	98	98
3	92	97	100	97
4	90	98	99	98
5	85	97	100	97
6	99	98	99	98
7	95	95	98	96
8	100	99	99	99
9	100	98	100	98
10	96	99	100	99
11	92	97	98	97
12	97	97	99	97
13	99	99	99	99
14	96	98	101	98
15	94	98	100	98
16	79	96	98	96
17	85	98	100	98
18	100	98	100	98
19	100	100	99	100
20	76	100	95	100
21	85	87	98	87
22	95	97	100	97
23	73	93	98	94
24	96	97	99	97
25	96	98	95	98
26	97	100	97	100
27	85	96	97	96
MEAN case 1-27	92,4814815	97,3333333	98,7407407	97,4074074
MIN case 1-28	73	87	95	87
MAX case 1-29	100	100	101	100
_25th% case 1-30	85	97	98	97
_75th% case 1-31	99	99	100	99

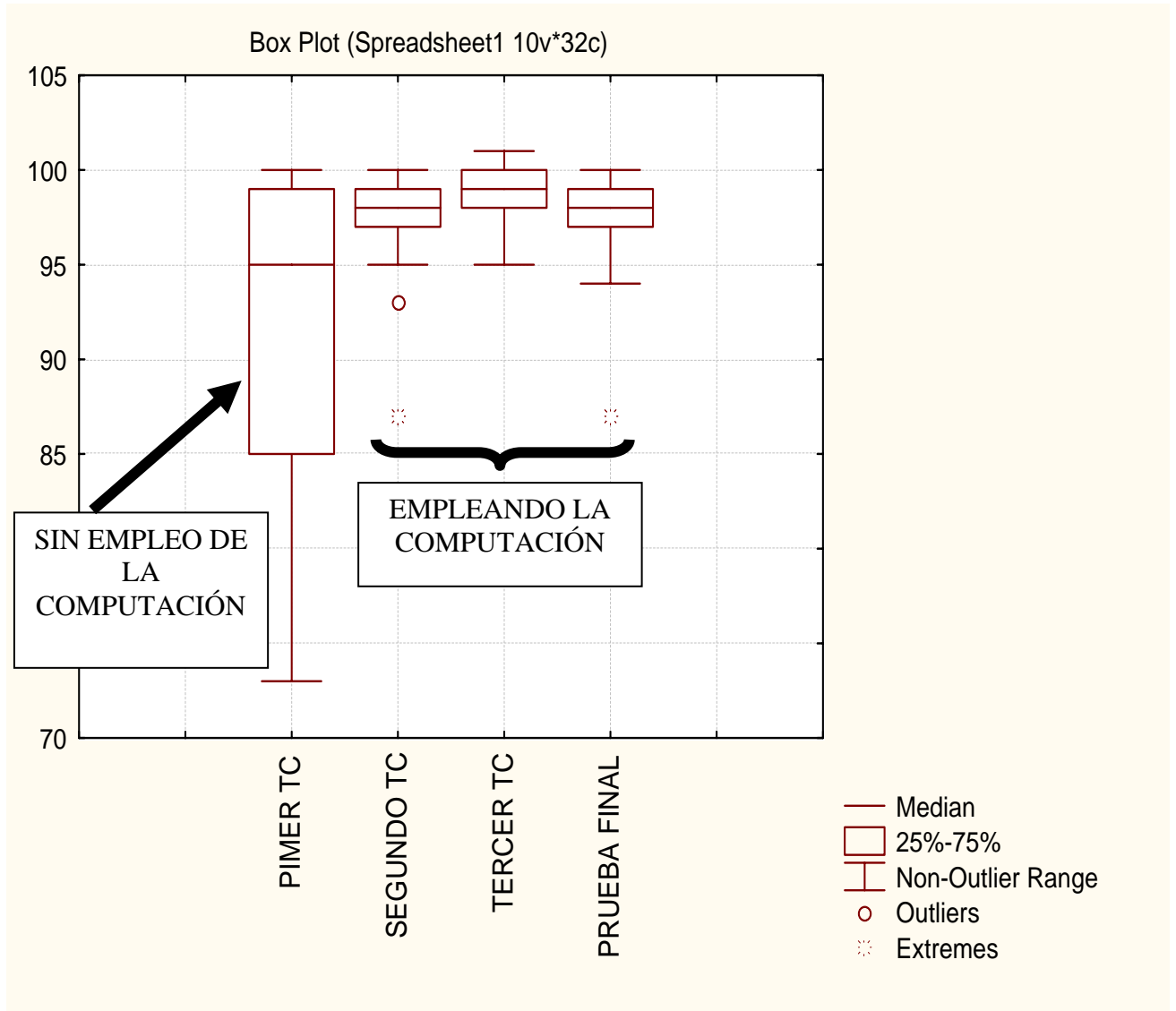




## ANEXO 3.12

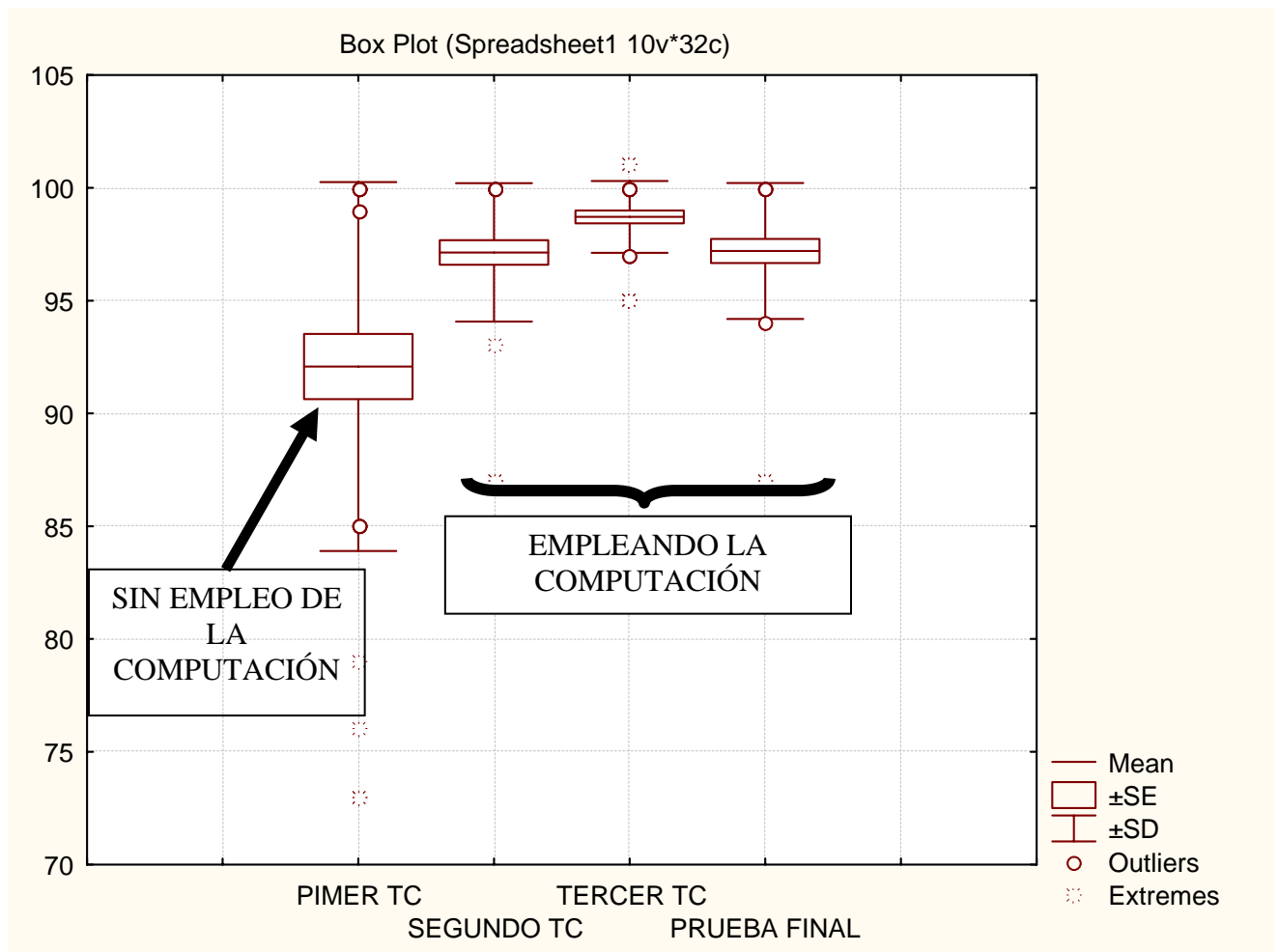


### ANEXO 3.13



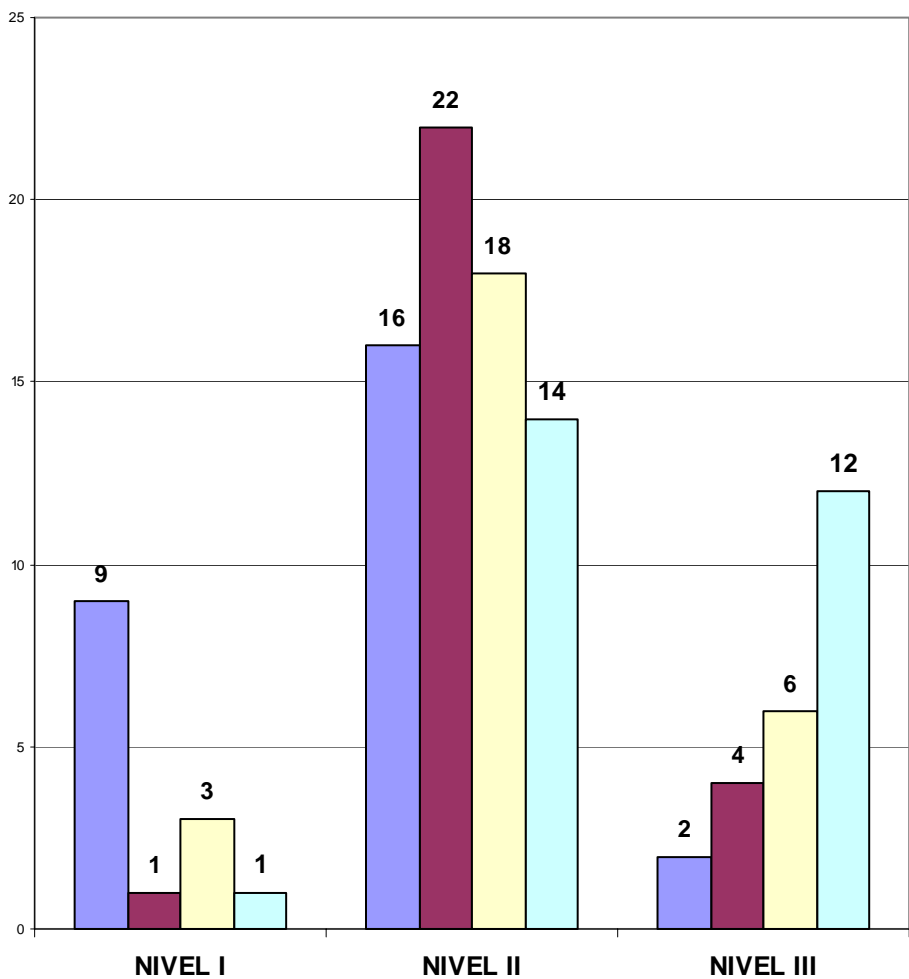


### ANEXO 3.14

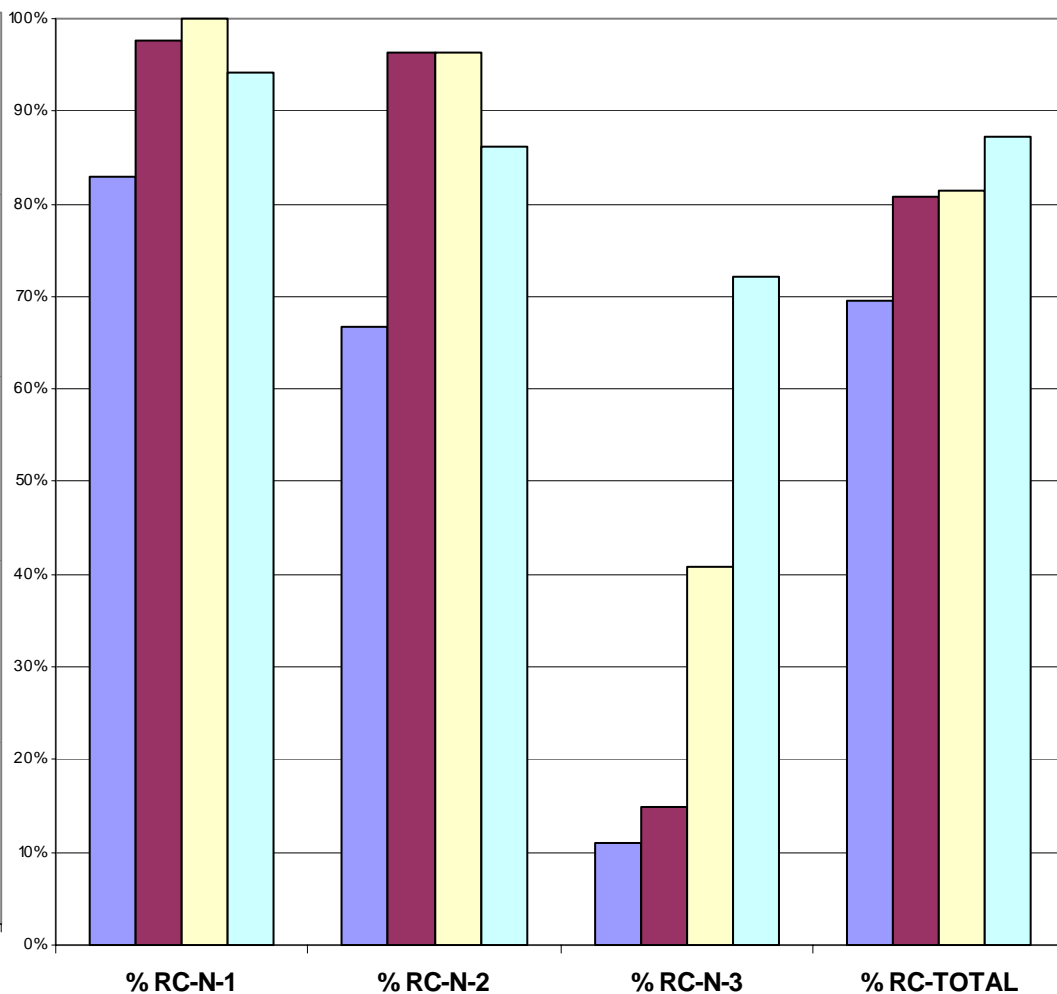


## ANEXO 3.15

### DISTRIBUCIÓN DE ALUMNOS POR NIVELES



### PORCIENTO DE RESPUESTAS CORRECTAS POR NIVELES Y TOTAL



■ PRIMER TRABAJO      ■ SEGUNDO TRABAJO  
■ TERCER TRABAJO      ■ PRUEBA FINAL

■ PRIMER TC      ■ SEGUNDO TC  
■ TERCER TC      ■ PRUEBA FINAL