Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas.
Facultad Matemática, Física y Computación
Licenciatura en Matemática

TRABAJO DE DIPLOMA

Diseño Estadístico de Experimentos.

Autor: *Félix Arley Díaz Rosell.*
Tutor: *Dra. Gladys Cardoso Romero.*

"Año de la Revolución Energética en Cuba"

Santa Clara
2006

Hago constar que el presente trabajo fue realizado en la Universidad Central Marta Abreu de Las Villas como parte de la culminación de los estudios de la especialidad de Licenciatura en Matemáticas, autorizando a que el mismo sea utilizado por la institución, para los fines que estime conveniente, tanto de forma parcial como total y que además no podrá ser presentado en eventos ni publicado sin la autorización de la Universidad.

Firma del autor

Los abajo firmantes, certificamos que el presente trabajo ha sido realizado según acuerdos de la dirección de nuestro centro y el mismo cumple con los requisitos que debe tener un trabajo de esta envergadura referido a la temática señalada.

Firma del tutor

Firma del jefe del Seminario

Dedicatoria.

A Jesús de Nazaret mi salvador y padre fiel.
A mi madre Caridad Rosell y a Francisco R.
Siempre pendientes de mí.
A Yainet por existir.
A mis hermanos y amigos.

Agradecimientos.

Con este trabajo culmina una etapa importante de nuestra vida, y el momento insta a la reflexión y en nuestra memoria se dibujan las imágenes de todos aquellos que contribuyeron de una u otra forma a la culminación exitosa del mismo, a alcanzar una meta tan deseada como esta. No quisiera mencionar sus nombres, pues cometería la grave injusticia de olvidar algunos y eso sería imperdonable. Así damos las gracias a esa inmensidad, a los que nos enseñaron poniendo en nosotros su esperanza, a aquel que un día nos dio una hoja o nos prestó un lápiz, a aquel que en un momento amargo nos hizo sonreír, al que nos escuchó, al que se mostró espontáneo, a todos aquellos que confiaron en nosotros.

También es el momento para pedir excusas por aquellas interrupciones, o por alguna tardanza o quizás porque algún día fui inoportuno.

En fin agradecer la dedicación y la paciencia, por darnos un espacio de su tiempo, un pedacito de sus vidas, porque cualquier atención, preocupación, desvelo, aunque pequeño siempre será recordado.

Especiales.

Para la Dr. Gladys Cardoso Romero y Lic. Juan M. Navarro Céspedes, por sus valiosos y oportunos conocimientos, los cuales me sirvieron de gran ayuda en el desarrollo del trabajo.

Resumen.

En este trabajo se presenta un material bibliográfico que tendrá como fin el apoyo de la docencia para las carreras de Licenciatura en Matemáticas y Licenciatura en Química específicamente para la asignatura Diseño de Experimentos.

En él, se ofrece una serie de definiciones y conceptos preliminares, lo que posibilita preparar al lector para el estudio del contenido ha desarrollarse. Además se presenta un compendio teórico de diferentes Diseños Estadísticos agrupados por capítulos según sus características. El material cuenta también con una colección de ejercicios resueltos y propuestos.

Summary.

In this work we present a bibliographical material that has specifically as the end the support of the teaching for the careers of Degree in the Mathematics and Degree in the Chemistry for the subject Designs of Experiments.

In him, we offer a series of definitions and the preliminary concepts, what facilitates to prepare the reader for the study of the volume has to be developed. A theoretical summary of several Statistical Designs contained by chapters according to their characteristics. The material also has a collection of resolved exercises and proposed exercises.

Índice.

Introducción.

La aplicación de las técnicas estadísticas a las investigaciones para la planificación inicial de los experimentos, el procesamiento e interpretación de los resultados obtenidos se ha convertido en una necesidad imperiosa de las ciencias, particularmente para obtener la mayor información del sistema estudiado con un mínimo de experiencias en el menor tiempo posible.

La experimentación como una de las principales vías para adquirir conocimientos de una determinada disciplina ha sido objeto de atención de numerosos científicos. Para mejorar la eficiencia del trabajo experimental se han desarrollado durante el siglo XX un conjunto de técnicas y procedimientos con fundamentos estadísticos. En este contexto es que surge el Diseño de Experimentos que tiene como principal precursor a Ronald A. Fisher. Aunque biólogo de profesión, sus investigaciones en la agricultura y en ramas de la genética lo obligaron a desarrollar toda una teoría estadística para poder darle respuesta a problemas que surgieron producto de las investigaciones desarrolladas él.

En breves palabras el Diseño Estadístico de Experimentos no es más que planificar el experimento de forma tal que sea capaz de proporcionar toda la información para el análisis de las hipótesis bajo estudio.

Sin embargo también es importante que el diseño sea tan simple como sea posible. Además la investigación debe llevarse a cabo de la forma más eficiente posible. Esto es, debe hacerse todo el esfuerzo posible para ahorrar tiempo, dinero, personal y material experimental. Generalmente la mayoría de los diseños estadísticos no sólo son fáciles de analizar sino también son eficientes en ambos sentidos, el económico y el estadístico.

En las carreras de Licenciatura en Matemática y Licenciatura en Química se imparte la asignatura optativa: Diseño Estadístico de Experimentos, por lo cual debido a la falta de bibliografía suficiente se decidió elaborar un material de apoyo a la docencia que se ajuste a los programas de las asignaturas. En el cual se brindan las características de los diferentes diseños, su formulación teórica así como algunos ejercicios resueltos y propuestos de forma que sirvan de guía para el desarrollo de la asignatura.

Por lo cual los objetivos del trabajo de diploma son:

- Elaborar un material de apoyo a la docencia para la asignatura optativa Diseño Estadístico de Experimentos que se imparte en las carreras de Lic. en Matemáticas y Lic. en Química.

- Desarrollar los aspectos teóricos relativos a los diseños siguientes:

    - Diseño Completamente al Azar.
    - Diseño de Bloques Completamente al Azar.
    - Diseño Cuadrado Latino.
    - Diseño de Bloques Incompletos.
    - Diseños factoriales.
    - Diseño 2^k.
    - Diseño de Parcelas Divididas.
    - Diseños jerárquicos.
    - Regresión lineal simple y múltiple.
    - Análisis de Covarianza.

- Crear un folleto que conste de un gran número de ejercicios propuestos para que le permiten el trabajo independiente de los estudiantes.

Para ello el presente trabajo consta de 5 Capítulos, los cuales presentan los siguiente subtemas:

Capítulo 1.

- Principios básicos, conceptos y definiciones.

Capítulo 2.

- Diseño Completamente al Azar.
- Diseño de Bloques Completamente al Azar.
- Diseño Cuadrado Latino.
- Diseño de Bloques Incompletos.

Capítulo 3.

- Diseños factoriales.
- Diseños 2^k.

Capítulo 4.

- Diseño de Parcelas Divididas.
- Diseños jerárquicos.

Capítulo 5.

- Regresión lineal simple y múltiple.
- Análisis de Covarianza.

Capítulo 1. Principios básicos, conceptos y definiciones.

En este capítulo analizaremos una serie de definiciones y conceptos que nos serán útiles a lo largo del estudio de los Diseños Estadísticos de Experimentos.

Que es un experimento: Es un conjunto de pruebas con el objetivo de obtener información que permita variar cierto efecto de un objeto o proceso en estudio. La finalidad última es ayudar a tomar alguna decisión importante con respecto a lo estudiado.

Experimento aleatorio: Es aquel en que el resultado no se puede predecir con exactitud.

Cual es el resultado del experimento: Aquellas características de calidad o productividad resultantes del producto o proceso sobre las que se quiere incidir para mejorar.

Qué se entiende por "diseño de un experimento"

- Diseñar un experimento significa *planear* un experimento de modo que reúna la información pertinente al problema bajo investigación.
- El diseño de un experimento es la secuencia completa de pasos tomados de antemano para asegurar que los datos apropiados se obtendrán de modo que permitan un análisis objetivo que conduzca a deducciones válidas con respecto al problema establecido.

La necesidad de un diseño de experimento surge de la necesidad de responder a preguntas como:

- ¿Cómo se va a medir el efecto? ó ¿Cuáles son las características a analizar?
- ¿Qué factores afectan las características que se van a analizar?
- ¿Cuáles son los factores que se estudiaran en esta investigación?
- ¿Cuántas veces deberá ejecutarse el experimento?
- ¿Cuál será la forma de análisis?
- ¿A partir de que valores se considera importante el efecto?

Objetivos de un diseño de experimentos

- Proporcionar la máxima cantidad de información pertinente al problema bajo investigación.
- El diseño, plan o programa debe ser tan simple como sea posible.
- La investigación debe efectuarse lo más eficientemente posible; ahorrar tiempo, dinero, personal y material experimental. "Proporcionar la máxima cantidad de información al mínimo costo".

1.1 Principios básicos del diseño de experimentos

Al planificar un experimento hay cuatro principios básicos que se deben tener siempre en cuenta:

- Reproducción.
- El principio de aleatorización.
- El control local o bloqueo.
- La factorización del diseño.

Los dos principios (aleatorizar y bloquear) son estrategias eficientes para asignar los tratamientos a las unidades experimentales sin preocuparse de qué tratamientos considerar. Por el contrario, la factorización del diseño define una estrategia eficiente para elegir los tratamientos sin considerar en absoluto como asignarlos después a las unidades experimentales.

Reproducción. (También se llama replicación)

- Proporciona una estimación del error experimental.
- Permite obtener una estimación más precisa del efecto medio de cualquier factor.

<u>Unidad Experimental</u>

Unidad a la cual se le aplica un solo tratamiento (que puede ser una combinación de muchos factores) en una reproducción del experimento.

<u>Error Experimental</u>

Describe la situación de no llegar a resultados idénticos con dos unidades experimentales tratadas idénticamente y refleja:

- Errores de experimentación
- Errores de observación
- Errores de medición
- Variación del material experimental (esto es, entre unidades experimentales)
- Efectos combinados de factores extraños que pudieran influir las características en estudio, pero respecto a los cuales no se ha llamado la atención en la investigación.

El error experimental puede reducirse:

- Usando material experimental más homogéneo o por estratificación cuidadosa del material disponible.
- Utilizando información proporcionada por variables aleatorias relacionadas.
- Teniendo más cuidado al dirigir y desarrollar el experimento.
- Usando un diseño experimental muy eficiente.

Confusión

Dos o más efectos se confunden en un experimento si es posible separar sus efectos, cuando se lleva a cabo el subsiguiente análisis estadístico.

Aleatorización.

Asignación al azar de tratamiento a las unidades experimentales. Una suposición frecuente en los modelos estadísticos de diseño de experimentos en que las observaciones o los errores en ellas están distribuidos independientemente. La aleatorización hace válida esta suposición.

“Aleatorizar todos los factores no controlados por el experimentador en el diseño experimental y que pueden influir en los resultados serán asignados al azar a las unidades experimentales”.

Ventajas de aleatorizar los factores no controlados:

- Transforma la variabilidad sistemática no planificada en variabilidad no planificada o ruido aleatorio. Dicho de otra forma, aleatorizar previene contra la introducción de sesgos en el experimento.
- Evita la dependencia entre observaciones al aleatorizar los instantes de recogida muestral.
- Valida muchos de los procedimientos estadísticos más comunes.

Control local.

Consiste en el uso de técnicas de balanceo, bloqueo y agrupamiento de las unidades experimentales para asegurar que el diseño usado sea el más eficiente.

Agrupamiento.

Colocación de un conjunto de unidades experimentales homogéneas en grupos, de modo que los diferentes grupos puedan sujetarse a distintos tratamientos.

Bloqueo.

Distribución de las unidades experimentales en bloques, de manera que las unidades dentro de un bloqueo sean relativamente homogéneas, de esta manera, la mayor parte de la variación predecible entre las unidades queda confundida con el efecto de los bloques.

Balanceo.

Obtención de las unidades experimentales, el agrupamiento, el bloqueo y la asignación de los tratamientos a las unidades experimentales de manera que resulte una configuración balanceada.

Tratamiento o combinación de tratamientos.

Conjunto particular de condiciones experimentales que deben imponerse a una unidad experimental dentro de los confines del diseño seleccionado.
Combinación de variantes y/o niveles de cada factor que se utiliza en una determinada prueba.

Factor.

Una variable independiente. En la mayoría de las investigaciones se trata con más de una variable independiente y con los cambios que ocurren en la variable independiente, cuando varia una o mas de las variables independientes.

"Se deben dividir o particionar las unidades experimentales en grupos llamados bloques de modo que las observaciones realizadas en cada bloque se realicen bajo condiciones experimentales lo más parecidas posibles.
A diferencia de lo que ocurre con los factores tratamiento, el experimentador no está interesado en investigar las posibles diferencias de la respuesta entre los niveles de los factores bloque".
Bloquear es una buena estrategia siempre y cuando sea posible dividir las unidades experimentales en grupos de unidades similares.
La ventaja de bloquear un factor que se supone que tienen una clara influencia en la respuesta pero en el que no se está interesado, es la siguiente:

- Convierte la variabilidad sistemática no planificada en variabilidad sistemática planificada.

Con el siguiente ejemplo se trata de indicar la diferencia entre las estrategias de aleatorizar y de bloquear en un experimento.

Ejemplo.

Se desea investigar las posibles diferencias en la producción de dos máquinas, cada una de las cuales debe ser manejada por un operario.
En el planteamiento de este problema la variable respuesta es “la producción de una máquina (en un día)”, el factor-tratamiento en el que se está interesado es el “tipo de máquina” que tiene dos niveles y un factor nuisance es el “operario que maneja la máquina”. En el diseño del experimento para realizar el estudio se pueden utilizar dos estrategias para controlar el factor “operario que maneja la máquina”.

Aleatorizar: Se seleccionan al azar dos grupos de operarios y se asigna al azar cada grupo de operarios a cada una de las dos máquinas. Finalmente se evalúa la producción de las mismas.

Bloquear: Se introduce el factor-bloque “operario”. Se elige un único grupo de operarios y todos ellos utilizan las dos máquinas.

¿Qué consideraciones se deben tener en cuenta al utilizar estas dos estrategias? ¿Qué estrategia es mejor?

La factorización del diseño.

“Un diseño factorial es una estrategia experimental que consiste en cruzar los niveles de todos los factores tratamiento en todas las combinaciones posibles”.

Ventajas de utilizar los diseños factoriales:

- Permiten detectar la existencia de efectos interacción entre los diferentes factores tratamiento.
- Es una estrategia más eficiente que la estrategia clásica de examinar la influencia de un factor manteniendo constantes el resto de los factores.

1.2 Etapas de un diseño de experimentos

- Enunciado o planteamiento del problema.
- Formulación de hipótesis.
- Proposición de la técnica experimental y el diseño.
- Examen de sucesos posibles y referencias en que se basan las razones para la indagación que asegure que el experimento proporcionará la información requerida y en la extensión adecuada.
- Consideración de los posibles resultados desde el punto de vista de los procedimientos estadísticos que se aplicarán y para asegurar que se satisfagan las condiciones necesarias para que sean válidos estos procedimientos.
- Ejecución del experimento.

- Aplicación de las técnicas estadísticas a los resultados experimentales.
- Extracción de conclusiones con medidas de la confiabilidad de las estimaciones generadas. Deberá darse cuidadosa consideración a la validez de las conclusiones para la población de objetos o eventos a la cual se van a aplicar.
- Valoración de la investigación completa y contrastación con otras investigaciones del mismo problema o similares.

Lista de comprobación para planear programas de pruebas.

Obtenga un enunciado claro del problema

1. Identifique la nueva e importante área del problema.
2. Subraye el problema específico dentro de sus limitaciones usuales.
3. Defina el propósito exacto del programa de prueba.
4. Determine la relación del problema particular con la investigación total o desarrollo del programa.
5. Reúna la información básica disponible.
6. Investigue todas las fuentes de información posible.
7. Tabule los datos pertinentes para planear el nuevo problema.
8. Diseñe el programa de prueba
9. Sostenga una conferencia respecto a todas las partes concernientes.

   a. Enuncie las proposiciones por probar.
   b. Especifique respecto a la magnitud de las diferencias que usted considere que valen la pena.
   c. Esboce las alternativas posibles de los sucesos.
   d. Escoja los factores por estudiar.
   e. Determine el rango práctico de estos factores y los niveles específicos a los que se harán las pruebas.
   f. Escoja las mediciones finales que van a hacerse.
   g. Considere el efecto de variabilidad de muestreo y de la precisión de métodos de prueba.
   h. Considere las posibles interrelaciones (o interacciones) de los factores.
   i. Determine las limitaciones de tiempo, costo, materiales, potencia humana, instrumentación y otros factores y de condiciones extrañas tales como condiciones meteorológicas.
   j. Considere los aspectos de las relaciones humanas del programa.

10. Diseñe el programa en forma preliminar.

    a. prepare una cédula sistemática y completa.
    b. Proporcione las etapas de ejecución o adaptación de la cédula si es necesario.
    c. Elimine los efectos de las variables que no están en estudio.
    d. Reduzca al mínimo el número de ejecuciones del experimento.
    e. Elija el método de análisis estadístico.
    f. Haga las indicaciones prudentes para una acumulación ordenada de datos.

11. Revise el diseño con todo lo concerniente.

    a. Ajuste el programa de acuerdo con los comentarios.
    b. Desglose en términos precisos los pasos a seguir.

12. Planee y lleve a cabo el trabajo experimental.

    1) Desarrolle métodos, materiales y equipo.
    2) Aplique los métodos o técnicas.
    3) Supervise y verifique los detalles modificando los métodos si es necesario.
    4) Registre cualquier modificación al diseño del programa.
    5) Sea cuidadoso en la colección de datos.
    6) Registre el avance del programa.

13. Analice los datos.

    1) Reduzca los datos registrados a forma numérica, si es necesario.
    2) Aplique las técnicas adecuadas de la Estadística Matemática.

14. Interprete los resultados.

    1) Considere todos los datos observados.
    2) Limite las conclusiones a deducciones estrictas a partir de la evidencia obtenida.
    3) Pruebe, mediante experimentos independientes, las controversias que susciten los datos.
    4) Llegue a conclusiones, tanto respecto al significado técnico de resultados como respecto a significación estadística.
    5) Especifique lo que implican los resultados para su aplicación y para trabajos posteriores.
    6) Tome en cuente las limitaciones impuestas por los métodos usados.
    7) Enuncie los resultados en términos de probabilidades verificables.

15. Prepare el reporte.

    1) Describa claramente el trabajo dando antecedentes, aclaraciones pertinentes del problema y del significado de los resultados.
    2) Use métodos gráficos y tabulares para la presentación de los datos en forma eficiente para usos futuros.
    3) Suministre información suficiente para que el lector pueda verificar resultados y sacar sus propias conclusiones.
    4) Limite las conclusiones a un resumen objetivo, tal que el trabajo evidencie su uso para consideraciones rápidas y acciones decisivas.

1.3 Ventajas y Desventajas de los experimentos diseñados estadísticamente

Ventajas

1. Se requiere una estrecha colaboración entre los estadísticos y el investigador o científicos con las consiguientes ventajas en el análisis e interpretación de las etapas del programa.
2. Se enfatiza respecto a las alternativas anticipadas y respecto a la pre-planeación sistemática, permitiendo aun la ejecución por etapas y la producción única de datos útiles para el análisis en combinaciones posteriores.
3. Debe enfocarse la atención a las interrelaciones y a la estimación y cuantificación de fuentes de variabilidad en los resultados.
4. El número de pruebas requerido puede determinarse con certeza y a menudo puede reducirse.
5. La comparación de los efectos de los cambios es más precisa debido a la agrupación de resultados.
6. La exactitud de las conclusiones se conoce con una precisión matemáticamente definida.

Desventajas

1. Tales diseños y sus análisis, usualmente están acompañados de enunciados basados en el lenguaje técnico del estadístico. Sería significativos a la generalidad de la gente, además, el estadístico no debería subestimar el valor de presentarnos los resultados en forma gráfica. De hecho, siempre debería considerar a la representación gráfica como un paso preliminar de un procedimiento más analítico.
2. Muchos diseños estadísticos, especialmente cuando fueron formulados por primera vez, se han criticado como demasiado caros, complicados y que requieren mucho tiempo. Tales críticas, cuando son válidas, deben aceptarse de buena fe y debe hacerse un intento honesto para mejorar la situación, siempre que no sea en detrimento de la solución del problema.

1.4 Modelos de Diseño de Experimentos

Los modelos de "Diseño de experimentos" son modelos estadísticos clásicos cuyo objetivo es averiguar si unos determinados factores influyen en la variable de interés y, si existe influencia de algún factor, cuantificarla. Ejemplos donde habría que utilizar estos modelos son los siguientes:

- En el rendimiento de un determinado tipo de máquinas (unidades producidas por día) se desea estudiar la influencia del trabajador que la maneja y la marca de la máquina.

- Se quiere estudiar la influencia del tipo de pila eléctrica y de la marca en la duración de las pilas.
- Una compañía telefónica está interesada en conocer la influencia de varios factores en la variable de interés "la duración de una llamada telefónica". Los factores que se consideran son los siguientes: hora a la que se produce la llamada; día de la semana en que se realiza la llamada; zona de la ciudad desde la que se hace la llamada; sexo del que realiza la llamada; tipo de teléfono (público o privado) desde el que se realiza la llamada.
- Una compañía de software está interesada en estudiar la variable "porcentaje que se comprime un fichero al utilizar un programa que comprime ficheros" teniendo en cuenta el tipo de programa utilizado y el tipo de fichero que se comprime.
- Se quiere estudiar el rendimiento de los alumnos en una asignatura y, para ello, se desean controlar diferentes factores: profesor que imparte la asignatura; método de enseñanza; sexo del alumno.

La metodología del diseño de experimentos se basa en la experimentación. Es conocido que si se repite un experimento, en condiciones indistinguibles, los resultados presentan variabilidad que puede ser grande o pequeña. Si la experimentación se realiza en un laboratorio donde la mayoría de las causas de variabilidad están muy controladas, el error experimental será pequeño y habrá poca variación en los resultados del experimento. Pero si se experimenta en procesos industriales, administrativos, u otros la variabilidad es grande en la mayoría de los casos.

El objetivo del diseño de experimentos es estudiar si utilizar un determinado tratamiento produce una mejora en el proceso o no. Para ello se debe experimentar utilizando el tratamiento y no utilizándolo. Si la variabilidad experimental es grande, sólo se detectará la influencia del uso del tratamiento cuando éste produzca grandes cambios en relación con el error de observación.

La metodología del Diseño de Experimentos estudia cómo variar las condiciones habituales de realización de un proceso empírico para aumentar la probabilidad de detectar cambios significativos en la respuesta, de esta forma se obtiene un mayor conocimiento del comportamiento del proceso de interés.

Para que la metodología de diseño de experimentos sea eficaz es fundamental que el experimento esté bien diseñado.

Un experimento se realiza por alguno de los siguientes motivos:

- Determinar las principales causas de variación en la respuesta.
- Encontrar las condiciones experimentales con las que se consigue un valor extremo en la variable de interés o respuesta.
- Comparar las respuestas en diferentes niveles de observación de variables controladas.
- Obtener un modelo estadístico-matemático que permita hacer predicciones de respuestas futuras.

La utilización de los modelos de diseño de experimentos se basa en la experimentación y en el análisis de los resultados que se obtienen en un experimento bien planificado. En muy pocas ocasiones es posible utilizar estos métodos a partir de datos disponibles o datos históricos, aunque también se puede aprender de los estudios realizados a partir de datos recogidos por observación, de forma aleatoria y no planificada. En el análisis estadístico de datos históricos se pueden cometer diferentes errores, los más comunes son los siguientes:

- **Inconsistencia de los datos.** Los procesos cambian con el tiempo, se producen cambios en el personal (cambios de personas, mejoras del personal por procesos de aprendizaje, motivación,...), cambios en las máquinas (reposiciones, reparaciones, envejecimiento,...). Estos cambios tienen influencia en los datos recogidos, lo que hace que los datos históricos sean poco fiables, sobre todo si se han recogido en un amplio espacio de tiempo.

- **Variables con fuerte correlación.** Puede ocurrir que en el proceso existan dos o más variables altamente correlacionadas que pueden llevar a situaciones confusas. Por ejemplo, en el proceso hay dos variables X_1 y X_2 fuertemente correlacionadas que influyen en la respuesta, pero si en los datos que se tiene aumenta al mismo tiempo el valor de las dos variables no es posible distinguir si la influencia es debida a una u otra o a ambas variables (confusión de los efectos). Otra situación problemática se presenta si solo se dispone de datos de una variable (por ejemplo de X_1 y no de X_2), lo que puede llevar a pensar que la variable influyente es la X_1 cuando, en realidad, la variable influyente es la X_2 (variable oculta).

- **El rango de las variables controladas es limitado.** Si el rango de una de las variables importantes e influyentes en el proceso es pequeño, no se puede saber su influencia fuera de ese rango y puede quedar oculta su relación con la variable de interés o los cambios que se producen en la relación fuera del rango observado. Esto suele ocurrir cuando se utilizan los datos recogidos al trabajar el proceso en condiciones normales y no se experimenta (cambiando las condiciones de funcionamiento) para observar el comportamiento del proceso en situaciones nuevas.

1.5 Tipos de variabilidad

Uno de los principales objetivos de los modelos estadísticos y, en particular, de los modelos de diseño de experimentos, es controlar la variabilidad de un proceso estocástico que puede tener diferente origen. De hecho, los resultados de cualquier experimento están sometidos a tres tipos de variabilidad cuyas características son las siguientes:

- **Variabilidad sistemática y planificada.** Esta variabilidad viene originada por la posible dispersión de los resultados debida a diferencias sistemáticas entre las distintas condiciones experimentales impuestas en el diseño por expreso deseo del experimentador. Es el tipo de variabilidad que se intenta identificar con el diseño estadístico.

  Cuando este tipo de variabilidad está presente y tiene un tamaño importante, se espera que las respuestas tiendan a agruparse formando grupos (clusters).

  Es deseable que exista esta variabilidad y que sea identificada y cuantificada por el modelo.

- **Variabilidad típica de la naturaleza del problema y del experimento.** Es la variabilidad debida al ruido aleatorio. Este término incluye, entre otros, a la componente de variabilidad no planificada denominada error de medida. Es una variabilidad impredecible e inevitable.

  Esta variabilidad es la causante de que si en un laboratorio se toman medidas repetidas de un mismo objeto ocurra que, en muchos casos, la segunda medida no sea igual a la primera y, más aún, no se puede predecir sin error el valor de la tercera. Sin embargo, bajo el aparente caos, existe un patrón regular de comportamiento en esas medidas: todas ellas tenderán a fluctuar en torno a un valor central y siguiendo un modelo de probabilidad que será importante estimar.

  Esta variabilidad es inevitable pero, si el experimento ha sido bien planificado, es posible estimar (medir) su valor, lo que es de gran importancia para obtener conclusiones y poder hacer predicciones.

  Es una variabilidad que va a estar siempre presente pero que es tolerable.

- **Variabilidad sistemática y no planificada.** Esta variabilidad produce una variación sistemática en los resultados y es debida a causas desconocidas y no planificadas. En otras palabras, los resultados están siendo sesgados sistemáticamente por causas desconocidas. La presencia de esta variabilidad supone la principal causa de conclusiones erróneas y estudios incorrectos al ajustar un modelo estadístico.

  Como se estudiará posteriormente, existen dos estrategias básicas para tratar de evitar la presencia de este tipo de variabilidad: la aleatorización y la técnica de bloques.

  Este tipo de variabilidad debe de intentar evitarse y su presencia lleva a conclusiones erróneas.

1.6 Planificación de un experimento

La experimentación forma parte natural de la mayoría de las investigaciones científicas e industriales, en muchas de las cuales, los resultados del proceso de interés se ven afectados por la presencia de distintos factores, cuya influencia puede estar oculta por la variabilidad de los resultados maestrales. Es fundamental conocer los factores que influyen realmente y estimar esta influencia. Para conseguir esto es necesario experimentar, variar las condiciones que afectan a las unidades experimentales y observar la variable respuesta. Del análisis y estudio de la información recogida se obtienen las conclusiones.

La forma tradicional que se utilizaba en la experimentación, para el estudio de estos problemas, se basaba en estudiar los factores uno a uno, esto es, variar los niveles de un factor permaneciendo fijos los demás. Esta metodología presenta grandes inconvenientes:

- Es necesario un gran número de pruebas.
- Las conclusiones obtenidas en el estudio de cada factor tiene un campo de validez muy restringido.
- No es posible estudiar la existencia de interacción entre los factores.
- Es inviable, en muchos casos, por problemas de tiempo o costo.

Las técnicas de diseño de experimentos se basan en estudiar simultáneamente los efectos de todos los factores de interés, son más eficaces y proporcionan mejores resultados con un menor coste.

A continuación se enumeran las etapas que deben seguirse para una correcta planificación de un diseño experimental, etapas que deben ser ejecutadas de forma secuencial. También se introducen algunos conceptos básicos en el estudio de los modelos de diseño de experimentos.

Las etapas a seguir en el desarrollo de un problema de diseño de experimentos son las siguientes:

1) Definir los objetivos del experimento.
2) Identificar todas las posibles fuentes de variación, incluyendo:

    - Factores tratamientos y sus niveles.
    - Unidades experimentales.
    - Factores nuisance (molestos): factores bloque, factores ruido y covariables.

3) Elegir una regla de asignación de las unidades experimentales a las condiciones de estudio (tratamientos).
4) Especificar las medidas con que se trabajará (la respuesta), el procedimiento experimental y anticiparse a las posibles dificultades.
5) Ejecutar un experimento piloto.
6) Especificar el modelo.
7) Esquematizar los pasos del análisis.
8) Determinar el tamaño muestral.
9) Revisar las decisiones anteriores. Modificarlas si se considera necesario.

Los pasos del listado anterior no son independientes y en un determinado momento puede ser necesario volver atrás y modificar decisiones tomadas en algún paso previo.

A continuación se hace una breve descripción de las decisiones que hay que tomar en cada uno de los pasos enumerados. Sólo después de haber tomado estas decisiones se procederá a realizar el experimento.

1) Definir los objetivos del experimento

Se debe hacer una lista completa de las preguntas concretas a las que debe dar respuesta el experimento. Es importante indicar solamente cuestiones fundamentales ya que tratar de abordar problemas colaterales puede complicar innecesariamente el experimento.

Una vez elaborada la lista de objetivos, puede ser útil esquematizar el tipo de conclusiones que se espera obtener en el posterior análisis de datos.

Normalmente la lista de objetivos es refinada a medida que se van ejecutando las etapas del diseño de experimentos.

2) Identificar todas las posibles fuentes de variación

Una fuente de variación es cualquier "cosa" que pueda generar variabilidad en la respuesta. Es recomendable hacer una lista de todas las posibles fuentes de variación del problema, distinguiendo aquellas que, a priori, generarán una mayor variabilidad. Se distinguen dos tipos:

- **Factores tratamiento:** Son aquellas fuentes cuyo efecto sobre la respuesta es de particular interés para el experimentador.
- **Factores "nuisance":** Son aquellas fuentes que no son de interés directo pero que se contemplan en el diseño para reducir la variabilidad no planificada.

A continuación se precisan más estos importantes conceptos.

1) Factores y sus niveles

Se denomina factor tratamiento a cualquier variable de interés para el experimentador cuyo posible efecto sobre la respuesta se quiere estudiar.

Los niveles de un factor tratamiento son los tipos o grados específicos del factor que se tendrán en cuenta en la realización del experimento.

Los factores tratamiento pueden ser cualitativos o cuantitativos.

Ejemplos de factores cualitativos y sus niveles respectivos son los siguientes:

- Proveedor (diferentes proveedores de una materia prima).
- Tipo de máquina (diferentes tipos o marcas de máquinas).
- Trabajador (los trabajadores encargados de hacer una tarea).

- Tipo de procesador (los procesadores de los que se quiere comparar su velocidad de ejecución).
- Un aditivo químico (diferentes tipos de aditivos químicos).
- El sexo (hombre y mujer).
- Un método de enseñanza (un número determinado de métodos de enseñanza cuyos resultados se quieren comparar).

Ejemplos de factores cuantitativos son los siguientes:

- Tamaño de memoria (diferentes tamaños de memoria de ordenadores).
- Droga (distintas cantidades de la droga).
- La temperatura (conjuntos de temperaturas seleccionadas en unos rangos de interés).

Debe tenerse en cuenta que en el tratamiento matemático de los modelos de diseño de experimento los factores cuantitativos son tratados como cualitativos y sus niveles son elegidos equiespaciados o se codifican. Por lo general, un factor no suele tener más de cuatro niveles.

Cuando en un experimento se trabaja con más de un factor, se denomina:

Tratamiento a cada una de las combinaciones de niveles de los distintos factores.

Observación es una medida en las condiciones determinadas por uno de los tratamientos.

Experimento factorial es el diseño de experimentos en que existen observaciones de todos los posibles tratamientos.

2) Unidades experimentales

Son el material donde evaluar la variable respuesta y al que se le aplican los distintos niveles de los factores tratamiento.

Ejemplos de unidades experimentales son:

- En informática, ordenadores, páginas Web, buscadores de Internet.
- En agricultura, parcelas de tierra.
- En medicina, individuos humanos u animales.
- En industria, lotes de material, trabajadores, máquinas.

Cuando un experimento se ejecuta sobre un período de tiempo de modo que las observaciones se recogen secuencialmente en instantes de tiempo determinados, entonces los propios instantes de tiempo pueden considerarse unidades experimentales.

Es muy importante que las unidades experimentales sean representativas de la población sobre la que se han fijado los objetivos del estudio. Por ejemplo, si se utilizan los estudiantes universitarios de un país como unidades experimentales, las conclusiones del experimento no son extrapolables a toda la población adulta del país.

3) Factores "nuisance": bloques, factores ruido y covariables

En cualquier experimento, además de los factores tratamiento cuyo efecto sobre la respuesta se quiere evaluar, también influyen otros factores, de escaso interés en el estudio, pero cuya influencia sobre la respuesta puede aumentar significativamente la variabilidad no planificada. Con el fin de controlar esta influencia pueden incluirse en el diseño nuevos factores que, atendiendo a su naturaleza, pueden ser de diversos tipos.

<u>Factor bloque.</u> En algunos casos el factor nuisance puede ser fijado en distintos niveles, de modo que es posible controlar su efecto a esos niveles. Entonces la forma de actuar es mantener constante el nivel del factor para un grupo de unidades experimentales, se cambia a otro nivel para otro grupo y así sucesivamente. Estos factores se denominan factores de bloqueo (factores-bloque) y las unidades experimentales evaluadas en un mismo nivel del bloqueo se dice que pertenecen al mismo bloque. Incluso cuando el factor nuisance no es medible, a veces es posible agrupar las unidades experimentales en bloques de unidades similares: parcelas de tierra contiguas o períodos de tiempo próximos probablemente conduzcan a unidades experimentales más parecidas que parcelas o períodos distantes.

Desde un punto de vista matemático el tratamiento que se hace de los factores-bloque es el mismo que el de los factores-tratamiento en los que no hay interacción, pero su concepto dentro del modelo de diseño de experimentos es diferente. Un factor-tratamiento es un factor en el que se está interesado en conocer su influencia en la variable respuesta y un factor-bloque es un factor en el que no se está interesado en conocer su influencia pero se incorpora al diseño del experimento para disminuir la variabilidad residual del modelo.

<u>Covariable.</u> Si el factor nuisance es una propiedad cuantitativa de las unidades experimentales que puede ser medida antes de realizar el experimento (el tamaño de un fichero informático, la presión sanguínea de un paciente en un experimento médico o la acidez de una parcela de tierra en un experimento agrícola). El factor se denomina covariable y juega un papel importante en el análisis estadístico.

<u>Ruido.</u> Si el experimentador está interesado en la variabilidad de la respuesta cuando se modifican las condiciones experimentales, entonces los factores nuisance son incluidos deliberadamente en el experimento y no se aísla su efecto por medio de bloques. Se habla entonces de factores ruido.

En resumen, las posibles fuentes de variación de un experimento son:

Fuente	Tipo
Debida a las condiciones de interés (Factores tratamiento)	Planificada y sistemática
Debida al resto de condiciones controladas (Factores “nuisance”)	Planificada y sistemática
Debida a condiciones no controladas (error de medida, material experimental,...)	No planificada, pero ¿sistemática?

1.7 Elegir una regla de asignación de las unidades experimentales a las condiciones de estudio (“tratamientos”)

La regla de asignación o diseño experimental especifica que unidades experimentales se observarán bajo cada tratamiento. Hay diferentes posibilidades:

- Diseño factorial o no.
- Anidamiento.
- Asignación al azar en determinados niveles de observación.
- El orden de asignación, etc.

En la práctica, existen una serie de diseños estándar que se utilizan en la mayoría de los casos.

1.8 Especificar las medidas que se realizarán (la “respuesta”), el procedimiento experimental y anticiparse a las posibles dificultades

Variable respuesta o variable de interés. Los datos que se recogen en un experimento son medidas de una variable denominada variable respuesta o variable de interés.

Es importante precisar de antemano cuál es la variable respuesta y en qué unidades se mide. Naturalmente, la respuesta está condicionada por los objetivos del experimento. Por ejemplo, si se desea detectar una diferencia de 0.05 gramos en la respuesta de dos tratamientos no es apropiado tomar medidas con una precisión próxima al gramo.

A menudo aparecen dificultades imprevistas en la toma de datos. Es conveniente anticiparse a estos imprevistos pensando detenidamente en los problemas que se pueden presentar o ejecutando un pequeño experimento piloto (etapa 5). Enumerar estos problemas permite en ocasiones descubrir nuevas fuentes de variación o simplificar el procedimiento experimental antes de comenzar.

También se debe especificar con claridad la forma en que se realizarán las mediciones: instrumentos de medida, tiempo en el que se harán las mediciones, etc.

1.9 Ejecutar un experimento piloto

Un experimento piloto es un experimento que utiliza un número pequeño de observaciones. El objetivo de su ejecución es ayudar a completar y chequear la lista de acciones a realizar. Las ventajas que proporciona la realización de un pequeño experimento piloto son las siguientes:

- Permite practicar la técnica experimental elegida e identificar problemas no esperados en el proceso de recogida de datos.
- Si el experimento piloto tiene un tamaño suficientemente grande puede ayudar a seleccionar un modelo adecuado al experimento principal.
- Los errores experimentales observados en el experimento piloto pueden ayudar a calcular el número de observaciones que se precisan en el experimento principal.

1.10 Especificar el modelo

El modelo matemático especificado debe indicar la relación que se supone que existe entre la variable respuesta y las principales fuentes de variación identificadas en el (paso 2). Es fundamental que el modelo elegido se ajuste a la realidad con la mayor precisión posible.

Los modelos de diseño de experimentos, según sean los factores incluidos en el mismo, se pueden clasificar en: modelo de efectos fijos, modelo de efectos aleatorios y modelos mixtos. A continuación se precisan estas definiciones.

<u>Factor de efectos fijos:</u> Es un factor en el que los niveles han sido seleccionados por el experimentador. Es apropiado cuando el interés se centra en comparar el efecto sobre la respuesta de esos niveles específicos.

<u>Ejemplo:</u> Un empresario está interesado en comparar el rendimiento de tres máquinas del mismo tipo que tiene en su empresa.

<u>Factor de efectos aleatorios</u>: Es un factor del que sólo se incluyen en el experimento una muestra aleatoria simple de todos los posibles niveles del mismo. Evidentemente se utilizan estos factores cuando tienen un número muy grande de niveles y no es razonable o posible trabajar con todos ellos. En este caso se está interesado en examinar la variabilidad de la respuesta debida a la población entera de niveles del factor.

<u>Ejemplo:</u> Una cadena de hipermercados que tiene en plantilla 300 trabajadores de caja está interesada en estudiar la influencia del factor trabajador en la variable “tiempo en el cobro a un cliente”.

<u>Modelo de efectos fijos</u>: Es un modelo en el que todos los factores son factores de efectos fijos.

Modelo de efectos aleatorios: Es un modelo en el que todos los factores son factores de efectos aleatorios.

Modelo mixto: Es un modelo en el que hay factores de efectos fijos y factores de efectos aleatorios.

1.11 Esquematizar los pasos del análisis estadístico

El análisis estadístico a realizar depende de:

- Los objetivos indicados en el paso 1.
- El diseño seleccionado en el paso 3.
- El modelo asociado que se especificó en el paso 5.

Se deben esquematizar los pasos del análisis a realizar que deben incluir:

- Estimaciones que hay que calcular.
- Contrastes a realizar.
- Intervalos de confianza que se calcularán.
- Diagnosis y crítica del grado de ajuste del modelo a la realidad.

1.11.1 Determinar el tamaño muestral

Calcular el número de observaciones que se deben tomar para alcanzar los objetivos del experimento.

Existen, dependiendo del modelo, algunas fórmulas para determinar este tamaño. Todas ellas sin embargo requieren el conocimiento del tamaño de la variabilidad no planificada (no sistemática y sistemática, si es el caso) y estimarlo a priori no es fácil, siendo aconsejable sobreestimarla. Normalmente se estima a partir del experimento piloto y en base a experiencias previas en trabajos con diseños experimentales semejantes.

1.11.2 Revisar las decisiones anteriores. Modificar si es necesario

De todas las etapas enumeradas, el proceso de recogida de datos suele ser la tarea que mayor tiempo consume, pero es importante realizar una planificación previa, detallando los pasos anteriores, lo que garantizará que los datos sean utilizados de la forma más eficiente posible.

Es fundamental tener en cuenta que:

“Ningún método de análisis estadístico, por sofisticado que sea, permite extraer conclusiones correctas en un diseño de experimentos mal planificado”.

Recíprocamente, debe quedar claro que el análisis estadístico es una etapa más que está completamente integrado en el proceso de planificación.

“El análisis estadístico no es un segundo paso independiente de la tarea de planificación. Es necesario comprender la totalidad de objetivos propuestos antes de comenzar con el análisis. Si no se hace así, tratar que el experimento responda a otras cuestiones a posteriori puede ser (lo será casi siempre) imposible”.

Pero no sólo los objetivos están presentes al inicio del análisis sino también la técnica experimental empleada. Una regla de oro en la experimentación y que debe utilizarse es la siguiente:

“No invertir nunca todo el presupuesto en un primer conjunto de experimentos y utilizar en su diseño toda la información previa disponible”.

Finalmente indicar que todas las personas que trabajan en el experimento se deben implicar en el mismo, esto es:

“Toda persona implicada en la ejecución del experimento y en la recolección de los datos debe ser informada con precisión de la estrategia experimental diseñada”.

1.12 Resumen de los principales conceptos

En esta sección se hace un resumen de la terminología común utilizada en la teoría de los modelos de diseño de experimentos:

<u>Unidad experimental:</u> Son los objetos, individuos, intervalos de espacio o tiempo sobre los que se experimenta.

<u>Variable de interés o respuesta:</u> Es la variable que se desea estudiar y controlar su variabilidad.

<u>Factor:</u> Son las variables independientes que pueden influir en la variabilidad de la variable de interés.

<u>Factor tratamiento:</u> Es un factor del que interesa conocer su influencia en la respuesta.

<u>Factor bloque:</u> Es un factor en el que no se está interesado en conocer su influencia en la respuesta pero se supone que ésta existe y se quiere controlar para disminuir la variabilidad residual.

Niveles: Cada uno de los resultados de un factor. Según sean elegidos por el experimentador o elegidos al azar de una amplia población se denominan factores de efectos fijos o factores de efectos aleatorios.

Tratamiento: Es una combinación específica de los niveles de los factores en estudio. Son, por tanto, las condiciones experimentales que se desean comparar en el experimento. En un diseño con un único factor son los distintos niveles del factor y en un diseño con varios factores son las distintas combinaciones de niveles de los factores.

Observación experimental: Es cada medición de la variable respuesta.

Tamaño del experimento: Es el número total de observaciones recogidas en el diseño.

Interacción de factores: Existe interacción entre dos factores FI y FJ si el efecto de algún nivel de FI cambia al cambiar de nivel en FJ. Esta definición puede hacerse de forma simétrica y se puede generalizar a interacciones de orden tres o superior.

Ortogonalidad de factores: Dos factores FI y FJ con I y J niveles, respectivamente, son ortogonales si en cada nivel I de FI el número de observaciones de los J niveles de FJ están en las mismas proporciones. Esta propiedad permite separar los efectos simples de los factores en estudio.

Diseño equilibrado o balanceado: Es el diseño en el que todos los tratamientos son asignados a un número igual de unidades experimentales.

1.13 Algunos diseños experimentales clásicos

Un diseño experimental es una regla que determina la asignación de las unidades experimentales a los tratamientos. Aunque los experimentos difieren unos de otros en muchos aspectos, existen diseños estándar que se utilizan con mucha frecuencia. Algunos de los más utilizados son los siguientes:

- Diseño Completamente Aleatorizado.
- Diseño en Bloques Completamente al azar.
- Diseño Cuadrado Latino.
- Diseños Factoriales.
- Diseños 2^k.
- Diseños de Parcelas Divididas.
- Diseños Jerárquicos.

Capítulo 2 Diseños unifactoriales, bifactoriales y trifactoriales.

- Diseño Completamente al Azar.
- Diseño de Bloques Completamente al Azar.
- Diseño Cuadrado Latino.
- Diseño de Bloques Incompletos.

2.1 Diseño Completamente al Azar

El diseño completamente al azar (DCA) es el más simple de todos los diseños. Es un diseño en el cual los tratamientos son asignados aleatoriamente a las unidades experimentales sin ningún tipo de restricción. Este diseño es utilizado cuando las unidades experimentales son bastante homogéneas, es decir, cuando la variabilidad entre ellas es pequeña y no existe ningún criterio de bloqueo que permita disminuirla. Dado que los tratamientos constituyen el único criterio de clasificación para las unidades experimentales, a este diseño se le conoce también como diseño de clasificación de una vía (One Way).

Se verán los casos paramétrico y no paramétrico del DCA, el análisis de la varianza y las pruebas de comparación de medias de tratamientos.

2.1.1 Ventajas, desventajas y usos del DCA.

Ventajas

- Es un diseño flexible en tanto que el número de tratamientos y de repeticiones solo está limitado por el número de unidades experimentales.
- El número de repeticiones puede variar entre tratamientos aunque generalmente lo ideal es tener un número igual para cada tratamiento.
- El análisis estadístico es simple ya sea cuando todos los tratamientos tengan igual número de réplicas (balanceado), diferente número de réplicas (desbalanceado) o pérdida de datos, caso en el cual se trata como un análisis desbalanceado.
- El número de grados de libertad para estimar el error experimental es máximo: Ocurre porque el diseño tiene solo dos fuentes de variación que son los tratamientos y el error y los grados de libertad para este error están dados por la expresión $k(n-1)$. Esto mejora la precisión del experimento.
- En el caso en que se hayan perdido algunos datos, el método de análisis sigue siendo sencillo y la pérdida relativa de información es de menor importancia que en cualquier otro diseño.

Desventajas

- Solo se aplica en situaciones en las que el material experimental es homogéneo.
- Dado que no hay restricciones de aleatoriedad toda la variabilidad existente en las unidades experimentales tratadas en el mismo tratamiento estará incluida en el error experimental.

Usos

- Es recomendado cuando es posible que gran parte de las unidades experimentales no respondan al tratamiento o puedan perderse durante el experimento.
- Es útil en experimentos en los que el número de unidades experimentales es limitado, ya que provee el máximo número de grados de libertad del error.

2.1.2 Aleatorización y Croquis Experimental

Como ya se mencionó, en este diseño no existe ninguna restricción de aleatoriedad por lo que la asignación de los tratamientos a las unidades experimentales será completamente aleatoria (Esto quiere decir que cualquier distribución de los tratamientos en las unidades experimentales es igualmente probable), y permite:

1) La validación del error experimental.
2) Evita sesgos.
3) Garantiza la independencia de los errores.

Para lograr la asignación aleatoria de los tratamientos se puede utilizar cualquier método de generación de números aleatorios como los que mostramos a continuación:

1) La tabla de números al azar.

Explicación:
Suponga que se tienen N= 16 unidades experimentales (u.e) homogéneas, para un experimento bajo un DCA con t= 4 tratamientos y r= 4 réplicas. Inicialmente asigne los dígitos 01, 02, . . ., 16 a las u.e, ubique la punta de su lápiz aleatoriamente en cualquier lugar de la tabla de números aleatorios, por decir en la fila 26 columna 4 donde aparece el número 24878, a partir de lo dos primeros dígitos (24) empiece a recorrer en cualquier sentido, suponga que se hace hacia abajo de la columna donde está el número 24, registre los números de dos cifras (o de tres cifras cuando los rótulos de las u.e tengan tres cifras) que estén entre 1 y 16 inclusive. En este caso son: 04, 02, 01, 14, continuando desde la parte inferior de la columna (6) hacia arriba se obtiene: 06, 13, 10, 11 siga a la parte superior de la columna (7): 15, 09, 16, 07, continuando se asignan las otras cuatro: 03, 08, 05, 12. Por lo que al tratamiento 1 se le siguientes cuatro: 04, 02, 01, 14 al tratamiento 2 las siguientes cuatro: 06, 13, 10, 11 las restantes al: 15, 09, 16, 07 y al tratamiento 3 las restantes 03, 08, 05, 12.

2) Modelo de urnas.

Explicación:

Suponga que se tienen N= 16 unidades experimentales (u.e) homogéneas, para un experimento bajo un DCA con t= 4 tratamientos y r= 4 réplicas. Marque las 16 unidades experimentales con los números 1, 2, 3, ...,16. Luego rotule unos papelitos con los números k =1, 2, 3, ...,16, colóquelos en una bolsa. Seleccione un papelito y márquelo por el reverso de donde esta marcado con el número (11), deje este papelito fuera de la bolsa. Proceda nuevamente a seleccionar otro papelito y márquelo ahora con el número (12). Continúe este proceso hasta que queden marcados todos los papelitos como 11, 12,..., 4, 21,22,..., 24, 31, 32, ...,34. Si un papelito está rotulado 4 y por el reverso con la etiqueta (3,2), entonces la unidad experimental marcada con el número 4 recibirá el tratamiento 3 y 2 será la réplica.

3) Sistema de cómputo (aunque los números generados por calculadoras y computadoras no son estrictamente aleatorios sino solo pseudo aleatorios, son aceptables).

Explicación:

Mediante la opción *Ram#*, la cual genera números aleatorios entre 0 y 1. Si usted tiene 16 unidades experimentales y 4 tratamientos de 4 réplicas cada uno, se enumeran las unidades experimentales de 01 a 16, luego active la función con *Shift*, *Ran#* que produce por ejemplo el número 0.3047432316, usted debe seleccionar los dos primeros dígitos, en este caso es 30 pero no existe una u.e rotulada con este número por tanto debemos generar otro número aleatorio activando nuevamente *Shift*, *Ran#* suponga que se obtiene 0.0800937965, así la primera u.e del primer grupo será la rotulada con el número 08. Continué este proceso hasta obtener las cinco primeras u.e del primer grupo y así sucesivamente hasta obtener las u.e de los demás grupos. Asigne las primeras 4 u.e al tratamiento 1 y así para los demás tratamientos.

2.1.3 Presentación de los datos

Al arreglar el material experimental de manera aleatoria utilizando un procedimiento de aleatorización para el caso de un experimento con 16 unidades experimentales (u. e.) y 4 tratamientos y 4 réplicas por tratamiento usted puede obtener por ejemplo el siguiente arreglo:

	Tratamientos				
	T_1	**T_2**	….	**T_k**	
Réplicas	Y_{11}	Y_{21}	….	Y_{k1}	
	Y_{12}	Y_{22}	….	Y_{k2}	
	….	….	….	….	
	Y_{1n1}	Y_{2n2}	….	Y_{knk}	
$T_{i\cdot}$	**$T_{1\cdot}$**	**$T_{2\cdot}$**	**….**	**$T_{k\cdot}$**	**$T_{\cdot\cdot}$**

2.1.4 Modelo matemático del diseño lineal

El modelo aditivo lineal para un diseño completamente al azar es el siguiente:

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij} \qquad i = 1,\ldots.,k \qquad j = 1,\ldots.,n_i$$

donde:

Y_{ij} es el valor o rendimiento observado en el i-ésimo tratamiento, j-ésima repetición.

μ es el efecto de la media general.

α_i es el efecto del i-ésimo tratamiento, definido como la diferencia entre la media del i-ésimo tratamiento y la media global; esto es, $\alpha_i = \mu_i - \mu$.

ε_{ij} es el efecto del error experimental en el i-ésimo tratamiento, j-ésima repetición, la cual cumple los supuestos: (i) Normalidad con media cero (ii) Independencia (iii) Homogeneidad de varianza.

k es el número de tratamientos.

n_i es el número de repeticiones para el i-ésimo tratamiento

Ejemplo 1: Se realizó un experimento para evaluar el efecto de la adicción de compuestos vitamínicos al alimento balanceado en la ganancia de peso en cerdos. Tres diferentes compuestos fueron evaluados (A, B y C) y un control (D –sin la adicción de compuesto vitamínico). El aumento de peso tras una semana en una muestra aleatoria de 22 cerdos se da a continuación:

Compuesto Vitamínico	Aumento de peso tras una semana en lb					
A	11.1	10.9	10.8	10.2	11.4	10.7
B	11.5	11	10.8	10.6	11.2	10.9
C	10.1	10.6	11.2	10.2	10.4	
D	9.2	9.8	10.1	9.7	10.4	

Este experimento fue conducido bajo los lineamientos de un DCA, por lo que el modelo aditivo es el siguiente:

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij} \qquad i = 1,....., k \qquad j = 1,...., n_i$$

donde:

Y_{ij} es la ganancia de peso obtenida en el j-ésimo cerdo alimentado con el i-ésimo compuesto vitamínico.

μ es el efecto de la media general de peso.

α_i es el efecto del i-ésimo compuesto vitamínico.

ε_{ij} es el efecto del error experimental con el j-ésimo cerdo alimentado con el i-ésimo complejo vitamínico.

$k = 4$ (Número de tratamientos)

$n_1 = 6,\ n_2 = 6,\ n_3 = 5,\ n_4 = 5$ (número de repeticiones por tratamiento).

2.1.5 Supuestos del Modelo Estadístico

El modelo estadístico debe cumplir con los siguientes supuestos:

1) Aditividad: Los efectos del modelo son aditivos.
2) Linealidad: Las relaciones entre los efectos del modelo son lineales.
3) Normalidad: Los errores del modelo deben tener una distribución normal con media cero y varianza σ^2.
4) Independencia: Los resultados obtenidos en el experimento son independientes entre sí.
5) Homogeneidad de la Varianza: Las diferentes poblaciones generadas por la aplicación de los diferentes tratamientos tienen variancias iguales (σ^2).

Más adelante se presentarán pruebas estadísticas para evaluar los supuestos de normalidad de errores y de homogeneidad de varianzas.

2.1.6 ¿Cómo obtener los residuales?

Para que el análisis a realizar sea válido es necesario determinar si los datos experimentales obtenidos evidencian el cumplimiento de los supuestos del modelo, para lo cual se debe obtener *todos los residuales* y con estos realizar las pruebas de normalidad con media cero, independencia y homogeneidad de varianza.

El residual de cada respuesta Y_{ij} es denotado por ε_{ij} y se pueden obtener calculando la diferencia entre el valor real y el valor estimado por el modelo; es decir,

$$\varepsilon_{ij} = y_{ij} - \hat{y}_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij} = respuesta\ observada - respuesta\ teórica\ estimada$$

Donde el valor de la respuesta teórica estimada según el modelo, $\hat{y}_{ij}$ es obtenido como el estimado del valor esperado de una respuesta según el modelo, esto es:

$$\hat{y}_{ij} = \widehat{E(y_{ij})} \qquad \textbf{(1)}$$

Pero como $Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$ entonces reemplazando en la expresión anterior se tiene que el valor esperado del modelo, $E(\mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij})$ es determinado como

$$E(\mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}) = E(\mu) + E(\alpha_i) + E(\varepsilon_{ij})$$

Se conoce que μ y α_i son parámetros y por tanto constantes entonces su valor esperado es el mismo: $E(\mu)=\mu$ y $E(\alpha_i) = \alpha_i$. También de los supuestos del modelo se tiene que la variable error ε_{ij} se distribuye normal con media (o valor esperado) cero, $E(\varepsilon_{ij})=0$. Luego

$$E(\mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}) = \mu + \alpha_i$$

Reemplazando en (1) se tiene

$$\begin{aligned} \hat{y}_{ij} &= \mu + \alpha_i \\ &= \hat{\mu} + \hat{\alpha}_i \end{aligned}$$

Donde $\hat{\mu}$ es el estimador de la media global, $\hat{\alpha}_i$ es el estimador del efecto del *i-ésimo* tratamiento.

Vemos que se requiere encontrar los estimadores $\hat{\mu}, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3, \hat{\alpha}_4$ de los parámetros del modelo: $\mu, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ lo cual se hace utilizando uno de los métodos de estimación puntual de parámetros denominado **mínimos cuadrados**, el cual busca los mejores estimadores de los parámetros de tal manera que la suma de los cuadrados de todos los residuales sea mínima; en otras palabras se puede decir que determina la curva que mejor se acerca a los datos observados. Para aplicar el método de mínimos cuadrados se debe:

a) Escribir la Suma de Cuadrados del error (SC_{error}). En este caso es dada por:

$$
\begin{aligned}
SC_{error} &= (\varepsilon_{11})^2 + (\varepsilon_{11})^2 + ...(\varepsilon_{1nk})^2 \\
&+ (\varepsilon_{21})^2 + ... + (\varepsilon_{2nk})^2 \\
&+ (\varepsilon_{31})^2 + ... + (\varepsilon_{3nk})^2 \\
&+ (\varepsilon_{k1})^2 + ... + (\varepsilon_{knk})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} (\varepsilon_{ij})^2
\end{aligned}
$$

y como $\varepsilon_{ij} = y_{ij} - \hat{y}_{ij}$ entonces

$$
\begin{aligned}
SC_{error} &= (y_{11} - \hat{y}_{11})^2 + ... + (y_{1nk} - \hat{y}_{1nk})^2 \\
&+ (y_{21} - \hat{y}_{21})^2 + ... + (y_{2nk} - \hat{y}_{2nk})^2 \\
&+ (y_{31} - \hat{y}_{31})^2 + ... + (y_{3nk} - \hat{y}_{3nk})^2 \\
&+ (y_{k1} - \hat{y}_{k1})^2 + ... + (y_{knk} - \hat{y}_{knk})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} + (y_{ij} - \hat{y}_{ij})^2
\end{aligned}
$$

pero sabemos también que: $\hat{y}_{ij} = \hat{\mu} - \hat{\alpha}_i$ por lo que toma la forma:

$$
\begin{aligned}
SCE &= (y_{11} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_1)^2 + ... + (y_{14} - \hat{\mu} \overset{2}{-} \hat{\alpha}_1) \\
&+ (y_{21} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_2)^2 + ... + (y_{24} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_2)^2 \\
&+ (y_{k1} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_k)^2 + ... + (y_{kk} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_k)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_i)^2
\end{aligned}
$$

Para determinar los valores de los parámetros μ y α_i (i= 1, 2, …, k), se debe derivar la suma de cuadrados del error con respecto a cada parámetro e igualar a cero y luego resolver el sistema de k+ 1 ecuaciones. Haciendo lo anterior se llega a que los estimadores de los parámetros son:

$$
\begin{aligned}
\hat{\mu} &= \overline{Y}_{\bullet\bullet} \\
\hat{\alpha}_i &= \overline{Y}_{1\bullet} - \overline{Y}_{\bullet\bullet} \quad \text{(i= 1,2, … , k)}
\end{aligned}
$$

y así el valor estimado según el modelo para cada observación $\hat{y}_{ij}$ es dado por

$$
\begin{aligned}
\hat{y}_{ij} &= \hat{\mu} + \hat{\alpha}_i = \overline{Y}_{\bullet\bullet} + (\overline{Y}_{i\bullet} - \overline{Y}_{\bullet\bullet}) \\
&= \overline{Y}_{i\bullet}
\end{aligned}
$$

Es decir cada respuesta observada se puede modelar como el valor de la media del tratamiento donde se encuentra la observación.

2.1.7 Estimación de los efectos

Los efectos del modelo son estimados por el método de Mínimos Cuadrados. Este método permite obtener los valores de μ y α_i que minimizan la suma de los errores al cuadrado, es decir, que minimizan la siguiente expresión:

$$Q = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=i}^{n}\varepsilon_{ij}^{2} = \sum\sum(Y_{ij} - \mu - \alpha_i)^2$$

Para calcular los valores de μ y α_i que minimizan la suma de los errores al cuadrado, se debe solucionar el sistema de ecuaciones obtenido al igual las derivadas parciales de Q con respecto a μ y cada uno de los α_i a cero, y la siguiente restricción adicional:

$$\sum r_i\alpha = 0$$

La ampliación de este método de los siguientes resultados para la estimación de los parámetros.

$$\hat{\mu} = Y_{..}$$
$$\hat{\alpha} = \bar{y}_{i,} - \bar{y}_{..}$$
$$\hat{\hat{\varepsilon}} = y_{ji,} - \bar{y}_{i.}$$

Ejemplo 1 (Cont.): Con los datos del ejemplo anterior, la media estimada es:

$$\hat{\mu} = 10.582$$

Los efectos estimados de los tratamientos:

$$\hat{\alpha}_1 = \overline{Y}_{1\bullet} - \overline{Y}_{\bullet\bullet} = 10.850 - 10.582 = 0.268$$
$$\hat{\alpha}_2 = \overline{Y}_{2\bullet} - \overline{Y}_{\bullet\bullet} = 11.000 - 10.582 = 0.418$$
$$\hat{\alpha}_3 = \overline{Y}_{3\bullet} - \overline{Y}_{\bullet\bullet} = 10.500 - 10.582 = -0.082$$
$$\hat{\alpha}_4 = \overline{Y}_{4\bullet} - \overline{Y}_{\bullet\bullet} = 9.840 - 10.582 = -0.742$$

El efecto estimado del error ε_{42}:

$$\varepsilon_{42} = Y_{42} - \overline{Y}_{4\bullet} = 9.8 - 9.840 = -0.04$$

2.1.8 Obtener la tabla ANOVA. Análisis de varianza de clasificación simple.

La técnica de análisis de varianza le permite al experimentador probar la hipótesis global:

H_o: Las medias de los tratamientos son iguales.
H_1: Algún par de medias de los tratamientos difieren.

Que de manera simbólica queda:
H_o: $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$
H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ para algún $i \neq j$; $i = 1,2, \ldots, k$; $j = 1,2,\ldots, nk$

2.1.8.1 Para obtener la tabla de ANOVA es necesario determinar:

a) Las fuentes de variación
En un experimento bajo un DCA con un sólo factor de, las fuentes de variación son:
1) Tratamientos
2) Error experimental
3) Total

b) Determinar los grados de libertad de las fuentes de variación.

$gl_{tratamientos}$ = Número de tratamientos -1 = k -1
gl_{total} = Número de datos -1 = n - 1
gl_{error} = gl_{total}- $gl_{tratamientos}$ = n - k

c) Determinar las sumas de cuadrados de las fuentes de variación. En general la suma de cuadrados es dada por:

$$SC_{Trat} = \sum_{i=1}^{k} \frac{T_{i\bullet}^2}{n_i} - FC$$

d) Determinar las sumas de cuadrados del error. En general la suma de cuadrados es dada por:

$$SC_{error} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2 - FC - (\sum_{i=1}^{k} \frac{T_{i\bullet}^2}{n_i} - FC)$$

d) Determinar la suma de cuadrados total. En general la suma de cuadrados total es dada por:

$$SC_{total} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2 - FC$$

e) Calcular FC.

$$FC = \frac{T_{\bullet\bullet}^2}{n}$$

donde:

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

f) Calcular el valor de F.

$$F = \frac{CM_{Trat}}{CM_{error}} \sim F_{\alpha}[(k-1);(n-k)]$$

g) Expresar la tabla de **ANOVA**.

Causa de Variación	Suma de cuadrados (SC)	Grados de libertad (gl)	Cuadrados Medios (CM)	F
Tratamientos	SC_{trat}	k-1	$CM_{Trat} = \frac{SC_{Trat}}{k-1}$	$\frac{CM_{Trat}}{CM_{Eror}}$
Error Experimental	SC_{error}	n-k	$CM_{T} = \frac{SC_{tratamientos}}{k-1}$	
Total	SC_{total}	n-1		

h) Comparación y grado de significación.

Si $F_{cal} < F_{crít}$ H_0 no se rechaza.
Si $F_{cal} > F_{crít}$ H_0 se rechaza.

Ejemplo 1 (Cont.): A continuación se presenta el análisis de varianza y la prueba de hipótesis correspondiente para el ejemplo tratado en esta sección:

$$SC_{total} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2 - FC$$

$$= (11.1^2 + 10.9^2 + ... + 10.4^2) - \frac{232.8^2}{22} = 7.1527$$

$$SC_{Trat} = \sum_{i=1}^{k} \frac{T_{i\bullet}^2}{n_i} - FC =$$

$$= \frac{65.1^2}{6} + \frac{66^2}{6} + \frac{52.5^2}{5} + \frac{49.2^2}{5} - \frac{232.8^2}{22} = 4.2657$$

$$SC(Error) = SC(Total) - SC(Trat.) = 2.8870$$

Cuadro ANOVA

Fuente de variación	Gl	SC	CM	F
Tratamientos	3	4.2657	1.4219	8.87
Error Exptal.	18	2.8870	0.1604	
Total	21	7.1527		

Asumiendo un modelo de efectos fijos, la hipótesis en términos de los efectos de los tratamientos son:

H_o: $\alpha_i = 0$ con $i = 1, \ldots, 4$
H_1: $\alpha_i \neq 0$ para algún i

En términos de las medias de los tratamientos:

H_o: $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_4$
H_1: $\mu_i \neq \mu$ para algún i

o literalmente;

H_o: Todos los compuestos vitamínicos tienen el mismo defecto en la ganancia de peso de los cerdos.
H_1: Con al menos uno de los compuestos vitamínicos se obtiene una ganancia de peso diferente.

El estadístico de prueba es $F = 8.87$. El valor de la tabla para un nivel de significación del 5% es $F_{(0.95,3.18)} = 3.19$. Dado que el estadístico de prueba resulta mayor que el valor de la tabla se rechaza H_o. En conclusión, existe suficiente evidencia estadística para aceptar que con al menos uno de los compuestos vitamínicos se obtienen ganancias de peso diferentes en los cerdos.

El nivel de significación usual y aceptado en investigación científica para considerar que un efecto o diferencia es significativa es 5%. Cuando la prueba resulta significativa con α= 1% se dice que el efecto o diferencia es altamente significativo.

2.1.9 Prueba de Duncan

MLG: Comparaciones múltiples post hoc de las medias observadas. La prueba de rangos múltiples de Duncan, la de Student-Newman-Keuls (S-N-K) y la b de Tukey son pruebas de rangos que asignan rangos a medias de grupo y calculan un valor de rango. Estas pruebas no se utilizan con tanta frecuencia como las pruebas explicadas previamente. La prueba t de Waller-Duncan utiliza una aproximación Bayesiana. Esta prueba de rango emplea la media armónica del tamaño de la muestra cuando los tamaños de las muestras no son iguales. La prueba de Duncan realiza comparaciones por pares utilizando un orden por pasos idéntico al orden usado por la prueba de Student-Newman-Keuls, pero establece un nivel de protección en la tasa de error para la colección de contrastes, en lugar de usar una tasa de error para los contrastes individuales. Utiliza el estadístico del rango estudentizado. La prueba Waller-Duncan realiza la prueba de comparaciones múltiples basada en un estadístico t. Utiliza la aproximación Bayesiana.

Se aconseja seguir los siguientes pasos:

1) Ordenar las medias en orden creciente.

P	1	2	…	k
$\bar{Y}_j$	$\dfrac{\sum_{j=1}^{n_1} y_{1j}}{n_1}$	$\dfrac{\sum_{j=1}^{n_2} y_{2j}}{n_2}$	…	$\dfrac{\sum_{j=1}^{n_k} y_{ij}}{n_k}$

2) Calcular el error estándar de la media.

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{CM_{error}}{r}}$$

r representa el número de datos por tratamientos y en este caso $n_1 = n_2 = ... = n_k = r$.

3) Se buscan los valores críticos en la prueba de Duncan.

Llamaremos P= 2,3,…,k en n-k y un α.

Nota: En esta no se toma el primer tratamiento, sino que se empieza desde el segundo.

Tabla de Duncan:

Valor P	2	3	…	k
V_T	V_{T1}	V_{T2}		V_{Tk}
Rp	R_2	R_3	…	R_k

Donde:
Los valores V_{Ti} están en tablas.

$$R_p = V_T * S_{\bar{x}}$$

4) Se construye la tabla siguiente de doble entrada y se analiza la significación de la diferencia de las medias.

P	**2**	**3**	**…**	**K**
Rp	R_2	R_3	…	R_k
$\bar{Y}$	$\bar{Y}_a$	$\bar{Y}_b$	…	$\bar{Y}_k$
$\bar{y}_1$	$\bar{Y}_a - \bar{y}_1$	$\bar{Y}_b - \bar{y}_1$	…	$\bar{Y}_k - \bar{y}_1$
$\bar{y}_2$	$\bar{Y}_a - \bar{y}_2$	$\bar{Y}_b - \bar{y}_2$	…	$\bar{Y}_k - \bar{y}_2$
…	…	…	…	…
$\bar{y}_{k-1}$	$\bar{Y}_a - \bar{y}_{k-1}$	$\bar{Y}_b - \bar{y}_{k-1}$	…	$\bar{Y}_k - \bar{y}_{k-1}$

Los valores dentro de la tabla representan las diferencias entre las medias ($\bar{Y}_i - \bar{y}_j$). Los valores de $\bar{Y}_i$ comienzan por el segundo elemento y están ordenados de mayor a menor; y los valores $\bar{y}_j$ comienzan desde el primer elemento y no toma el último, además están ordenados de menor a mayor.

Comencemos a analizar la significación de la primera columna (P= 2)
$\bar{Y}_i - \bar{y}_j$ y se señalan los que no presentan diferencias significativas entre si:

Entonces los tratamientos que sean señalados no tienen diferencias significativas entre sí, y por consiguiente los restantes si presentan diferencias significativas. El que mayor valor tiene es el tratamiento de mayor rendimiento.

2.1.10 Prueba de Duncan cuando las observaciones por tratamiento difieren

Llamaremos *S* a:

$$S = \sqrt{CM_{error}}$$

Si

$$\frac{(\overline{Y}_i - \overline{y}_j)}{\sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j})}} \rangle R_p$$

entonces la diferencia es significativa, siendo

Rp= S (Valor tabulado de Duncan.)

Nota: Un aspecto que debe puntualizarse es que es posible que el ANOVA rechace H_0 y sin embargo al aplicar Duncan no se detectan diferencias entre las medias, esta situación no es común pero refleja que el ANOVA es una prueba más potente que el de Duncan. En este caso lo que sucede es que los errores de tipo II en la prueba de Duncan son más frecuentes y mayores que el del ANOVA.

2.1.11 Coeficiente de Variación

Es una medida usada para los experimentadores para evaluar el grado de homogeneidad de los resultados de un experimento. Para saber si un determinado coeficiente de variación es demasiado grande o pequeño, es preciso tener experiencia con datos similares.

En el DCA, el cuadrado medio del error (CME) es el estimador de la varianza del experimento σ^2 y el coeficiente de variación es calculado por la siguiente expresión:

$$cv = \frac{\sqrt{CME}}{\overline{Y}_{\bullet\bullet}}$$

Con los datos del ejemplo, el coeficiente de variación será:

$$cv = \frac{\sqrt{0.1604}}{10.58} = 3.78\%$$

Ejemplo 2: Se desarrolló un experimento para evaluar 4 tratamientos para la preparación del terreno:

T1: Aplicación de herbicida.
T2: Quemado del campo.
T3: Escarificación.
T4: Control (Sin preparación del terreno)

La variable respuesta fue el tamaño de los plantones en cm. a los 30 días. Los resultados del experimento se dan a continuación:

	Tratamiento			
Repetición	**T1**	**T2**	**T3**	**T4**
1	25	15	12	4
2	18	22	7	6
3	29	17	8	5
4	24	17	13	9

Este experimento fue conducido bajo los lineamientos de un DCA, por lo que el modelo aditivo lineal es el siguiente:

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij} \qquad i = 1,.....,k \qquad j = 1,....,n_i$$

donde:
Y_{ij} es el tamaño de los plantones a los 30 días obtenido con el i-ésimo método de preparación del terreno y en la j-ésima repetición.
μ es el efecto de la media general de los tamaños de los plantones.
α_i es el efecto del i-ésimo método de preparación del terreno.
ε_{ij} es el efecto del error experimental con el i-ésimo método de preparación del terreno en la j-ésima repetición.
$k = 4$ (Número de tratamientos)
$n = 6$ (Número de repeticiones por tratamiento).

En este problema aceptamos los supuestos de normalidad y homogeneidad de varianza y proponemos al lector la prueba de esta. El cuadro de análisis de varianza se presenta a continuación:

<u>Cuadro ANOVA:</u>

Fuente de Variación	Gl	SC	CM	F
Tratamientos	3	773.2	257.7	24.02
Error	12	128.8	10.7	
Total	15	901.9		

H_o: $\mu_1 = \mu$ $\qquad i = 1,\dots,4$
H_1: $\mu_i \neq \mu$ para algún i

Como $F = 24.02 > F_{[0.95,3,12]} = 3.49$, entonces se rechaza H_0 y se concluye que existe suficiente evidencia estadística con un nivel de significación del 5% para aceptar que con al menos uno de los tratamientos para la preparación del terreno se obtienen resultados diferentes en el tamaño de los plantones. El coeficiente de variación en este problema es:

$$cv = \frac{\sqrt{10.73}}{14.44} = 22.68\%$$

2.1.12 Pruebas de Comparación de Medias de Tratamientos

Note que la conclusión obtenida tras un análisis de varianza significativo es que con al menos uno de los tratamientos se obtienen resultados diferentes. Si bien esta conclusión ya resulta valiosa, definitivamente no es suficiente. Un investigador, querrá ir más allá en el análisis y responder preguntas tales como: ¿Con qué tratamiento se obtienen los mejores resultados?, ¿es este tratamiento significativamente superior a los demás?, ¿es el tratamiento A mejor que el B?. Para responder a este tipo de preguntas será necesario realizar pruebas adicionales que permitan comparar a los distintos tratamientos, en forma individual o por grupos, unos con otros.

A algunas de estas pruebas se les conoce también como pruebas de comparaciones múltiples, ya que permiten efectuar un conjunto de comparaciones. Suponga por ejemplo que usted conduce un experimento con 3 tratamientos (A, B y C). En este caso usted podría efectuar 3 comparaciones por pares (A con B, A con C y B con C). Si tiene cuatro tratamientos, el número de comparaciones por pares sería 6, con cinco tratamientos sería 10, y en general, con t tratamientos, el número de comparaciones por pares sería C_2^t.

Debido a que se están efectuando varias pruebas de hipótesis simultáneamente y no solo una, un problema a tener en cuenta es el de la definición del nivel de significación. Por ejemplo, suponga que usted hace un experimento con 5 tratamientos entre los cuales realmente no existen diferencias. En este caso la hipótesis nula de no diferencias sería verdadera para todas las comparaciones, aunque de hecho por cuestiones de azar usted obtendría resultados ligeramente diferentes en su experimento. Si usted realiza una prueba para comparar dos de estos tratamientos a un nivel de significación del 5%, y repitiera esta misma prueba con diferentes datos varias veces, encontraría diferencias significativas en aproximadamente el 5% de las veces; pero ¿qué pasa si usted decide comparar los dos tratamientos en los que se obtuvieron los resultados más similares?, ¿Qué pasa si usted decide comparar los dos tratamientos en los que se obtuvieron los resultados más extremos? En el primer caso la probabilidad de encontrar diferencias significativas va a ser menor a 5% y en el segundo caso mayor. Por esta razón, algunas de las pruebas que se verán más adelante deben ser planteadas con anterioridad a la ejecución del experimento y no sugeridas por los resultados obtenidos.

Por último, otro factor a considerar es el número de comparaciones que se están efectuando. En el caso descrito anteriormente, con un total de cinco tratamientos, usted efectuará 10 pruebas. Cada una de esas pruebas tendrá probabilidad de 5% de resultar en diferencias, pero ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de las 10 comparaciones resulte significativa?. Dado que realmente no existen diferencias entre los 5 tratamientos, bastará que se encuentren diferencias significativas en una de las 10 comparaciones para cometer un error. Obviamente, la probabilidad de errar en al menos una de las 10 comparaciones será mayor al 5%. Esta característica lleva a la necesidad de definir el nivel de significación en dos formas. Al total de comparaciones por pares que se puedan plantear entre todos los tratamientos considerados en un experimento se le llamará una “familia de comparaciones”, y entonces al nivel de significación para una comparación se le llamará “error individual” y al nivel de significación para el total de comparaciones (probabilidad de encontrar diferencias significativas en al menos una de las comparaciones) “error por familia”. Las pruebas en las que el nivel de significación sea individual servirán para efectuar comparaciones individuales planeadas con anterioridad; las pruebas en las que el nivel de significación sea por familia servirán para efectuar todas las comparaciones posibles (comparaciones múltiples).

2.1.13 Prueba de Tukey

La prueba de Tukey permite evaluar la significación de todas las diferencias entre tratamientos. Las hipótesis correspondientes a todas las comparaciones constituyen una familia y por lo tanto el error es familiar. Los supuestos para la realización de esta prueba son:

- Varianzas homogéneas.
- Las muestras son extraídas al azar.

Hipótesis:

H_o: $\mu_i = \mu_j \quad \forall\ i \neq j$

$H_{1:}$ $\mu_i \neq \mu_j$

Amplitud Límite Significativa de Tukey:

$$ALS(T) = AES(T)\ S_d$$

donde:

- AES(T) es la amplitud estandarizada significativa de Tukey, obtenida desde la tabla de Tukey con α= nivel de significación, *p*= número de tratamientos del experimento y los grados de libertad del error experimental.

- $S_d = \sqrt{\dfrac{CME}{n}}$ es la desviación estándar de la diferencia de las medias maestrales de dos tratamientos para la prueba de Tukey cuando los tratamientos tienen el mismo número de repeticiones.

Si los tratamientos no están igualmente repetidos, entonces la desviación estándar puede calcularse por:

$$S_d = \sqrt{\frac{CME}{2}\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$$

Sin embargo, esta aproximación hace que la prueba sea ligeramente conservada (esto es, disminuye la probabilidad de detectar diferencias significativas) ya que el nivel de significación real es ligeramente menor que el establecido en la prueba.

<u>Regla de Decisión:</u>

La hipótesis nula se rechaza con un nivel de significación α si $\left|\overline{Y}_{i\bullet} - \overline{Y}_{j\bullet}\right| > ALS(T)$.

Ejemplo 1 (Cont.):
Aplique la prueba de Tukey para evaluar la significación de las diferencias entre los tratamientos.

En este caso se están evaluando un conjunto de hipótesis:

$H_0: \ \mu_A = \mu_B$	$H_0: \ \mu_A = \mu_C$	$H_0: \ \mu_A = \mu_D$
$H_1: \ \mu_A \neq \mu_B$	$H_1: \ \mu_A \neq \mu_C$	$H_1: \ \mu_A \neq \mu_D$
$H_0: \ \mu_B = \mu_C$	$H_0: \ \mu_B = \mu_D$	$H_0: \ \mu_C = \mu_D$
$H_1: \ \mu_B \neq \mu_C$	$H_1: \ \mu_B \neq \mu_D$	$H_1: \ \mu_C \neq \mu_D$

El valor de tabla con α= 5%, *p*= 5 tratamientos y 18 grados de libertad para el error experimental es AES(T)= 4.00. Dado que los tratamientos tienen diferentes números de repeticiones, la desviación estándar para la diferenta de dos medias será diferente dependiendo de los tratamientos que se estén comparando. En el siguiente cuadro se resumen los cálculos necesarios para efectuar las 6 comparaciones:

Tratamientos comparados	Número de repeticiones	S_d	ALS(T)	$\lvert \overline{Y}_{i\bullet} - \overline{Y}_{j\bullet} \rvert$	Sig.
A y B	6 y 6	0.1675	0.6840	0.15	n.s.
A y C	6 y 5	0.1715	0.6859	0.35	n.s.
A y D	6 y 6	0.1715	0.6859	1.01	*
B y C	6 y 5	0.1715	0.6859	0.50	n.s.
B y D	6 y 6	0.1715	0.6859	1.16	*
C y D	5 y 5	0.1791	0.7164	0.66	n.s.

"n.s." significa que la diferencia entre ambos tratamientos no es significativa (es decir, que no existe evidencia suficiente para rechazar H_0).

"*" significa que la diferencia entre ambos tratamientos si es significativa. Es usual el símbolo "*" para denotar diferencias o efectos significativos con α= 5% y "**" para denotar diferencias o efectos significativos con α= 1%. En el primer caso se dice que la diferencia o efecto es "significativo" y en el segundo que es "altamente significativo". Esta simbología es muy útil para presentar los resultados de pruebas múltiples en las que se evalúan un gran número de hipótesis.

2.1.14 Prueba de Sheffé

Hipótesis:

H_0: $\mu_i = \mu_j \ \forall$ i, j
H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ para al menos alguno distinto

$$D = \sqrt{CM_{Error}\left(\frac{1}{b_i} + \frac{1}{bj}\right)(k-1)F_{\alpha}[(k-1);(b-k)]}$$

si $\lvert \overline{y}_i - \overline{y}_j \rvert > D$ entonces H_0 se rechaza.

si $\lvert \overline{y}_i - \overline{y}_j \rvert < D$ entonces H_0 no se rechaza.

2.1.15 Prueba de Dunnet

Hipótesis:

H_0: $\mu_i = \mu_j$ $\forall$ i, j
H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ para al menos alguno distinto

Dunnet $$S_d = \sqrt{\frac{2CME}{t}}$$

si $\left|\overline{y}_i - \overline{y}_j\right| > S_d$ entonces H_0 se rechaza.

si $\left|\overline{y}_i - \overline{y}_j\right| < S_d$ entonces H_0 no se rechaza.

2.1.16 Diseño Completamente al Azar Desbalanceado

Algunas veces es posible que el número de réplicas de cada tratamiento sea diferente y así cada tratamiento tendrá r_i réplicas (i = 1, 2, 3,…, t). Estos diseños se pueden presentar en el caso que se esté comparando un control contra otros tratamientos ya que queremos obtener buena información acerca del control, por ello este tendrá más replicaciones que los otros tratamientos (¿Cuántas?, Ver Montgomery). Otro caso en el que suele presentarse es cuando entre los t tratamientos algunos son más importantes que otros. Otra razón es cuando la observación de alguna unidad experimental por algún motivo se pierde. El modelo sobre el cual se basa el análisis está dado por:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \qquad i = 1,2,...,t; \qquad j = 1,2,...,r_i$$

La tabla del ANOVA está dada por:

Causa de variación	**Grados de libertad**	**Suma de cuadrados**	**Cuadrados medios**
Tratamientos	***t*- 1**	$\mathbf{SC_{Trat}}$	$\mathbf{CM_{Trart}}$
Error	$\sum_{i=1}^{t} r_i - t$	$\mathbf{SC_{error}}$	$\mathbf{CM_{Error}}$
Total	$\sum_{i=1}^{t} r_i - 1$		

donde:

$$SC_{Tratamientos} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_1}(\overline{y}_{i\bullet} - \overline{y}_{\bullet\bullet})^2 = \sum_{i=1}^{t} r_i(\overline{y}_{i\bullet} - \overline{y}_{\bullet\bullet})^2$$

$$SC_{Error} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_1}(\overline{y}_{ij} - \overline{y}_{i\bullet})^2$$

$$SC_{Total} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_1}(\overline{y}_{ij} - \overline{y}_{\bullet\bullet})^2$$

Ejemplo: Se realizó un experimento para determinar la influencia de dos medicamentos sobre el tiempo en realizar una tarea por parte de unos estudiantes. Los datos se presentan a continuación:

Grupo 1 (No medic.)	**Grupo 2 (Medic. 1)**	**Grupo 3 (Medic. 2)**	**Grupo 4 (Ambos medic.)**
1	12	12	13
8	10	4	14
9	13	11	14
9	13	7	17
4	12	8	11
0	10	10	14
1		12	13
		5	14

Analice la anterior situación

2.1.17 Submuestreo de un diseño completamente al azar

En algunos experimentos, pueden obtenerse varias observaciones en cada Unidad Experimental (UE). Si éstas observaciones están todas en la misma característica (o se mide la misma variable respuesta), el proceso para obtener las observaciones es frecuentemente llamado Submuestreo.

En algunos estudios de educación cuando se quieren comparar dos métodos de enseñanza, (tratamientos) se considera a la clase (colección de estudiantes) como la unidad experimental. Pero como las observaciones al aplicar una prueba se hacen sobre cada estudiante, entonces los estudiantes son las unidades observacionales. En este caso se presenta un error asociado a las unidades observacionales el cual es llamado error de muestreo u observacional ya que los estudiantes tomados para el estudio serían una muestra de los posibles que pueden pertenecer a dicha clase. Este tipo de estudios generalmente se refieren a Diseño completamente Aleatorio con submuestreo.

Algunos ejemplos de submuestreo son:

1) En un experimento de campo, el investigador puede no tener tiempo de cosechar (totalmente) cada parcela experimental, de esta manera podrá seleccionar al azar varios cuadros por parcela y cosechar el grano en cada cuadro seleccionado. Esta observaciones serán muestras dentro de la UE.
2) En un experimento de tecnología de alimentos que implica el almacenamiento de fresas congeladas, se almacenan 10 pintas (UE) a cada 5 lapsos de almacenamiento (tratamientos). Cuando se hicieron las determinaciones de ácido ascórbico después del almacenamiento, se hicieron dos determinaciones en cada pinta (muestra dentro de la UE).

La realización del submuestreo tiene efectos sobre el análisis. El modelo estadístico propuesto por un DCA se transforma en:

Modelo para desigual número de observaciones por UE y diferentes réplicas por UO.

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} + \eta_{ijk} \begin{cases} i = 1,2,\ldots,t \\ j = 1,2,\ldots,r_i \\ k = 1,2,\ldots,r_{ij} \end{cases}$$

Modelo para igual número de observaciones por UE e igual réplica por UO.

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} + \eta_{ijk} \begin{cases} i = 1,2,\ldots,t \\ j = 1,2,\ldots,r \\ k = 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

Donde ε_{ij} representa el error experimental y η_{ijk} el error observacional. Se supone que $\varepsilon_{ij} \sim i.i.d.\ N(0,\sigma_s^2)$ y $\eta_{ij} \sim i.i.d.\ N(0,\sigma_\eta^2)$.

Calculemos la suma de cuadrados para realizar el análisis de varianza:

$$SC_{TTOS} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\sum_{k=1}^{r_{ij}} (\bar{y}_{i\bullet\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}) \qquad SC_{EE} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\sum_{k=1}^{r_{ij}} (\bar{y}_{ij\bullet} - \bar{y}_{i\bullet\bullet})$$

$$SC_{EM} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\sum_{k=1}^{r_{ij}} (y_{ijk} - \bar{y}_{ij\bullet}) \qquad SC_{T} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\sum_{k=1}^{r_{ij}} (y_{ijk} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})$$

La tabla de análisis de varianza para un modelo de efectos fijos desbalanceado es dada por:

Causa de variación	Grados de liberta	Suma de cuadrados	Cuadrados medios
Tratamientos	$t-1$	SC_{TTOS}	$SC_{TTOS}/(t-1)$
Error Experimental	$\sum_{i=1}^{t}(r_i-1)$	SC_{EE}	$SC_{EE}/\sum_{i=1}^{t}(r_i-1)$
Error de Muestreo	$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(r_{ij}-1)$	SC_{EM}	$\dfrac{SC_{EM}}{\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}(r_{ij}-1)}$
Total	$N-1$	SC_T	

Para un experimento de efectos fijos bajo un DCA con submuestreo, igual número de réplicas y de observaciones por UE presentaremos la tabla de análisis de varianza a continuación.

Antes presentaremos las sumas de cuadrados:

$$SC_{TTOS} = rn\sum_{i=1}^{t}(y_{1\bullet\bullet} - y_{\bullet\bullet\bullet})^2 \qquad SC_{EE} = n\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(\overline{y}_{ij} - \overline{y}_{i\bullet\bullet})^2$$

$$SC_{EO} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{n}(Y_{ijk} - \overline{y}_{ij\bullet})^2 \qquad SC_T = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{n}(Y_{ijk} - \overline{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2$$

Tabla **ANOVA**:

Causa de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	Esperanza de cuadrados medios
Tratamientos	$t-1$	SC_{TTOS}	$CM_{(\mathrm{TTOS})}$	$\sigma_\eta^2 + \eta\sigma_s^2 + \dfrac{r\eta}{t-1}\sum_{i=1}^{t}\tau_i^2$
Error Experimental	$t(r-1)$	SC_{EE}	$CM_{(\mathrm{EE})}$	$\sigma_\eta^2 + \eta\sigma_s^2$
Error Observacional	$tr(n-1)$	SC_{EO}	$CM_{(\mathrm{EO})}$	σ_η^2
Total	$trn-1$	SC_T		

2.1.18 Ejercicios resueltos y propuestos

1) Una empresa fundidora de acero surte de laminas de hojalata a tres fabricantes de latas, la especificación principal es que el peso del revestimiento de estaño deberá ser al menos de 0.25 libras en el fondo del envase de hojalata. La fundidora y cada uno de los fabricantes de latas tienen laboratorios donde se realizan mediciones de los pesos de los revestimientos de estaño, tomando muestras de cada cargamento. Al ocurrir algunos desacuerdos sobre los pesos reales de los revestimientos de estaño de los cargamentos de láminas, se desea realizar un experimento para determinar si los cuatro laboratorios están realizando mediciones consistentes. Un factor que complica las cosas es que parte del proceso de medidas consiste en eliminar con productos químicos el estaño de la superficie del metal de la base; de manera que es imposible tener las mismas mediciones en las muestras de cada laboratorio para determinar qué tan aproximadas son las mediciones.

Se mandaran aleatoriamente 12 muestras a cada uno de los laboratorios (considerando que tendrán un revestimiento promedio o igual) cortados de igual forma.

Cada laboratorio mide los pesos de los revestimientos de estaño de 12 discos y los resultados son los siguientes:

Lab. A	Lab. B	Lab. C	Lab. D
.25	.18	.19	.23
.27	.28	.25	.30
.22	.21	.27	.28
.30	.23	.24	.28
.27	.25	.28	.24
.28	.20	.26	.34
.32	.27	.28	.20
.24	.19	.24	.18
.31	.24	.25	.24
.26	.22	.20	.28
.21	.29	.21	.22
.28	.16	.19	.21
3.21	**2.72**	**2.86**	**3.00**

$\mathbf{F_C =}$ $(11.69)^2/48 = 2.8470$

$\mathbf{SC_T}$ $= (0.25)^2 + (0.22)^2 + \ldots\ldots + (0.22)^2 + (0.21)^2 - 2.8470 = 0.0809$

$\mathbf{SC_{(Tr)}}$ $= [(3.21)^2 + (2.72)^2 + (2.76)^2 + (3.00)^2]/12 - 2.8470 = 0.0130$

$\mathbf{SC_E}$ $= 0.0809 - 0.0130 = 0.0679$

Fuente de Variación	Grados de Libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	F
Laboratorios	3	0.0130	0.0043	2.87
Error	44	0.0679	0.0015	-
Total	47	0.0809	-	-

Como el valor obtenido para F excede a 2.82 que corresponde al valor de $F_{0.05}$ con 3 y 44 grados de libertad, la hipótesis nula puede rechazarse con nivel de significación de 0.05. Se concluye que los laboratorios no están logrando resultados consistentes.

2) Se diseñó un experimento para estudiar el rendimiento de cuatro detergentes diferentes. Las siguientes lecturas de "blancura" se obtuvieron con un equipo especialmente diseñado para 12 cargas de lavado distribuidas en tres modelos de lavadoras:

-	Lav. 1	Lav. 2	Lav. 3	Totales
Detergente A	45	43	51	139
Detergente B	47	46	52	145
Detergente C	48	50	55	153
Detergente D	42	37	49	128
Totales	182	176	207	565

Considerando los detergentes como tratamientos y las lavadoras como bloques, se obtiene la tabla de análisis de varianza adecuada y se prueba con un nivel de significación de 0.01 si existen diferencias entre los detergentes o entre las lavadoras.

H_0 : $a_1 = a_2 = a_{13} = a_4 = 0$; $ß_1 = ß_2 = ß_3 = 0$
H_1 : Al menos alguna es distinta de cero.

$\mathbf{T_{1.}} = 139$ $\mathbf{T_{2.}} = 145$ $\mathbf{T_{3.}} = 153$ $\mathbf{T_{4.}} = 128$ $\mathbf{T_{..}} = 565$

$$\sum\sum y_{ij}^2 = 26867 \qquad FC = (565)^2 / 12 = 26602$$

SCT$= 45^2 + 43^2 + \ldots\ldots. + 49^2 - FC = 265$

SC(Tr)$= [139^2 + 145^2 + 153^2 + 128^2]/3 - FC = 111$

SC(Bl)$= [182^2 + 176^2 + 207^2]/4 - 26602 = 135$

SCE= 265 -11 -135= 19

Fuente de Varianza	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	F
Detergentes	3	111	37.0	11.6
Lavadoras	2	135	67.5	21.1
Error	6	19	3.2	-
Total	11	265	-	-

Dado que $F_{tr} = 11.6$ sobrepasa 9.78 que es el valor de $F_{0.01}$ con 3 y 6 grados de libertad, concluye que existen diferencias en la eficiencia de los cuatro detergentes.

También, puesto que $F_{bl} = 21.1$ excede a 10.9, el valor de $F_{0.01}$ con 2 y 6 grados de libertad, se llega a que existen diferencias significativas entre los resultados de las 3 lavadoras.

Se rechaza H_0 esto quiere decir que al menos una de ellas tiene un rendimiento significativamente distinto al de los demás.
Por lo que los efectos de los detergentes y las lavadoras son significativos.

3) En una estación experimental se estudiaron cuatro dosis de insecticidas (3 l/ha, 5 l/ha, 7 l/ha y 9 l/ha) para el control de la Racha de la papa. Los resultados se presentan a continuación en TM de rendimiento de para por ha:

Dosis de insecticida			
3 l/ha	5 l/ha	7 l/ha	9 l/ha
4.29	8.50	10.75	5.63
4.24	8.03	11.52	2.96
4.53	7.94	11.49	5.47
4.26	6.75	11.52	6.01
4.62	7.16	10.81	6.09

a) Presente el modelo aditivo lineal e interprete cada uno de sus componentes en términos del problema.
b) Estime los efectos de los tratamientos.
c) Realice el análisis de varianza. Calcule el coeficiente de variación.
d) Realice la prueba de Tukey.
e) Antes de realizar el experimento, el experimentador sostenía que con la dosis 2 (5 l/ha) se podía obtener un rendimiento medio superior en más de 2 Tm/ha al de la dosis 1 (3 l/ha). A que conclusión puede llegar con la información del experimento.

4) Se desea comparar los resultados obtenidos en el examen parcial de Métodos Estadísticos para la investigación I por las clases de 4 profesores. A continuación se presentan los resultados de una muestra aleatoria de 8 alumnos de cada clase.

Profesor	Nota en el examen parcial							
A	10	16	17	13	14	17	18	12
B	16	14	13	7	9	13	11	14
C	9	6	10	8	14	11	12	8
D	13	13	12	16	8	11	7	12

a) ¿Presentan los datos suficiente evidencia para aceptar que las notas en el examen parcial son diferentes entre los grupos?

5) Los datos que se presentan a continuación corresponden al tiempo de coagulación (en segundos) de sangre extraída a 24 animales, asignados aleatoriamente a cuatro dietas diferentes.

Dieta			
A	**B**	**C**	**D**
62	63	68	56
60	67	66	62
63	71	71	60
59	64	67	61
	65	68	63
			64

a) Presente el modelo aditivo lineal. Interprete cada uno de sus componentes en términos del problema.
b) Estime los efectos de los tratamientos.
c) Calcules los residuales obtenidos con la dieta B (error experimental).
d) Realice el análisis de varianza. Calcule el coeficiente de variación.
e) Realice la prueba de Tukey.

6) Se realizó un estudio para evaluar el efecto de tres fármacos en la duración de la relajación masculina inducida. En el experimento 24 pacientes fueron aleatoriamente asignados a los cuatro grupos, cinco pacientes a los primeros grupos y 7 a los dos últimos.
Un grupo no recibió fármaco alguno, uno recibió Innovar, uno Droperidol y uno Fenatayl antes de la aplicación de anestesia. Para cada paciente la duración de la relajación muscular fue registrada en minutos. Los siguientes resultados del experimento son dados a continuación:

Fármaco			
Sin droga	**Innovar**	**Droperidol**	**Fentayl**
5.9	16.1	10.3	7.2
8.0	11.2	6.8	10.5
11.5	9.0	5.3	8.5
6.0	8.8	3.2	4.2
9.2	10.2	6.5	6.5
		7.0	6.6
		7.5	9.1

a) Presente el modelo aditivo lineal. Interprete cada uno de sus componentes en términos del problema.
b) Estime los efectos de los tratamientos.
c) Calcules los residuales obtenidos con la droga Innovar.
d) Realice el análisis de varianza. Calcule el coeficiente de variación.
e) Uno de los objetivos del experimento era comparar los fármacos Droperidol y Fentayl, razón por la cual se asignaron 7 repeticiones a cada uno.
¿Existe suficiente evidencia estadística para aceptar que Fentayl es mejor que Droperidol?

7) Cuatro programas de entrenamiento para cierto trabajo fueron probados con 20 empleados nuevos. Los 20 empleados fueron asignados al mismo supervisor y, al final del periodo de entrenamiento, el supervisor calificó a los empleados de acuerdo a su habilidad para el trabajo, asignando los rangos más bajos a aquellos empleados con la menor habilidad.

Programa	Rangos				
A	4	6	7	2	10
B	1	8	12	3	11
C	20	19	19	14	5
D	18	15	17	13	9

¿Indican estos datos diferencias en la efectividad de los programas de entrenamiento? Si la respuesta es afirmativa, ¿Cuáles son diferentes?

2.2 Diseño de Bloques Completamente al Azar

El Diseño Completamente al Azar (DCA) es aplicable en casos en los que la única fuente de variabilidad son los tratamientos. En casos en los que se identifican de antemano otras fuentes de variación, que no constituyen el objetivo de la investigación, estas deberán ser controladas por el experimentador. Esto puede ocurrir por ejemplo en experimentos en el terreno, en donde se sabe que parcelas adyacentes suelen presentar resultados más homogéneos entre sí que parcelas más separadas, o en experimentos en donde los datos se toman por días, y en donde se sabe que los resultados pueden diferir entre los distintos días. Estas fuentes de variación son controladas mediante la formación de bloques; la idea es agrupar a las observaciones en los distintos bloques de modo que sean lo más homogéneas dentro del bloque y heterogéneas entre bloques.

Al diseño que controla una fuente de variación adicional a los tratamientos se le conoce como el Diseño de Bloques. Aquí se verá el Diseño de Bloques Completos al Azar (DBCA), en el caso paramétrico y no paramétrico, y sus respectivas pruebas de comparación de medias. Los bloques son completos porque todos los tratamientos aparecen en igual número, usualmente una vez, dentro de cada bloque, y son al azar por que los tratamientos son asignados aleatoriamente dentro de cada bloque. A este diseño se le conoce también como diseño de clasificación de dos vías sin interacción (Two Way).

Los diseños de bloques pueden también ser incompletos balanceados. En este caso, los bloques son incompletos porque no todos los tratamientos aparecen dentro de cada bloque, y balanceados porque el número de tratamientos dentro de cada bloque es el mismo y cada tratamiento se repite el mismo número de veces dentro del experimento.

2.2.1 Ventajas y desventajas del DBCA

Ventajas

- El agrupamiento de las unidades experimentales en bloques, debido a la existencia real de esta fuente de variabilidad, aumenta la precisión del experimento con relación al DCA.
- No existen restricciones en cuanto al número de tratamientos o bloques.
- El análisis estadístico es simple.
- Si se pierden los datos de un bloque completo, estos puedes omitirse sin mayores complicaciones para el análisis. Si faltan datos de unidades experimentales, estos pueden estimarse

Desventajas

- Cuando la variabilidad entre las unidades experimentales dentro de los bloques es grande, resulta un error experimental considerable. Esto ocurre usualmente cuando el número de tratamiento es muy grande.
- Si existe interacción entre los bloques y los tratamientos, ésta va incluida en el error experimental.
- Si no existe una real diferencia entre los bloques, habrá una pérdida de precisión en el experimento con relación al DCA, debido a la disminución de los grados de libertad del error.

2.2.2 Aleatorización y Croquis Experimental

En este diseño los tratamientos son asignados en forma aleatoria dentro de cada bloque. Por ejemplo suponga que va a evaluar **k** tratamientos con **b** repeticiones cada uno, en donde cada repetición constituye un bloque; en este caso necesitará de **b*k** unidades experimentales. Para asignar los tratamientos en forma aleatoria dentro de un bloque, se puede ver los métodos dados para el Diseño Completamente al Azar.

Esquema de los datos:

BLOQUES

		B_1	B_2	…	B_b	$T_{i\cdot}$
TRAT.	T_1	Y_{11}	Y_{12}	…	Y_{1b}	$T_{1\cdot}$
	T_2	Y_{21}	Y_{22}	…	Y_{2b}	$T_{2\cdot}$
	:	…	…	…	…	:
	T_k	Y_{k1}	Y_{k2}	…	Y_{kb}	$T_{k\cdot}$
	$B_{\cdot j}$	$B_{\cdot 1}$	$B_{\cdot 2}$	…	$B_{\cdot b}$	$T_{\cdot\cdot}$

2.2.3 Modelo Aditivo Lineal

El modelo matemático se expresa de la siguiente forma:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

donde

$i = 1,2,\ldots, k$ y $j = 1,2,\ldots, b$

μ es una media general

α_i es el efecto del i-ésimo tratamiento

β_j es el efecto del j-ésimo bloque

ε_{ij} es el término usual de error aleatorio

Ejemplo 1: Tres diferentes soluciones están siendo estudiadas para evaluar su efectividad en el retardo del crecimiento de bacterias en contenedores de leche de 5 galones. Los análisis son hechos en un laboratorio y solo tres ensayos pueden efectuarse en un día dado. Debido a que los días pueden ser una fuente de variabilidad, el investigador decide utilizar un diseño de bloques completamente al azar. Las observaciones fueron tomadas en cuatro días y los datos (en UFC) se muestran en la siguiente tabla.

	Días			
Solución	1	2	3	4
1	13	22	18	39
2	16	24	17	44
3	5	4	1	22

El modelo aditivo lineal es el siguiente:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

donde

$$i = 1,2,\ldots, k \;\; y\; j = 1,2,\ldots, b$$

Y_{ij} es el número de UCF observado con la i-ésima solución, j-ésima día (bloque).
μ es el efecto de la media general.
α_i es el efecto del i-ésimo solución.
β_j es el efecto del j-ésimo día (bloque).
ε_{ij} es el efecto del error experimental con la i-ésima solución, j-ésimo día (bloque).
t= 3 (Número de tratamientos).
b= 4 (Número de días o bloques).

2.2.4 Supuestos del modelo estadístico

El modelo estadístico debe cumplir con los siguientes supuestos:

1. Aditividad: Los efectos del modelo aditivo.
2. Linealidad: Las relaciones entre los efectos del modelo son lineales.
3. Normalidad: Los errores del modelo deben tener una distribución normal con media cero.
4. Independencia: Los resultados obtenidos en el experimento son independientes entre sí.
5. Homogeneidad de Variancias: Las diferentes poblaciones generadas por la aplicación de los diferentes tratamientos tienen variancias iguales (σ^2).
6. No existe interacción entre

2.2.5 Estimación de los efectos

Los efectos del modelo, μ, α_i, β_j, son estimados de modo que se minimice la siguiente expresión (Método de Mínimos Cuadrados):

$$Q = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{r_i} \varepsilon_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{r_i} (Y_{ij} - \mu - \alpha_i - \beta_j)^2$$

Inicialmente se considera que tanto los tratamientos como los bloques son factores fijos. Más aún, los efectos de tratamiento y de bloque se consideran como desviaciones de la media general, por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0 \qquad \text{y} \qquad \sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0$$

La aplicación de este método da los siguientes resultados para la estimación de los parámetros:

$$\hat{\mu} = \overline{Y}_{\bullet\bullet} \qquad \hat{\alpha}_i = \overline{Y}_{i\bullet} - \overline{Y}_{\bullet\bullet}$$

$$\hat{\beta}_j = \overline{Y}_{\bullet j} - \overline{Y}_{\bullet\bullet} \qquad \varepsilon_{ij} = Y_{ij} - \overline{Y}_{i\bullet} - \overline{Y}_{\bullet j} + \overline{Y}_{\bullet\bullet}$$

Ejemplo 1 (Cont.): Con los datos del ejemplo anterior, la media estimada es:

$$\hat{\mu} = 18.75$$

Los efectos estimados de los tratamientos:

$$\hat{\alpha}_1 = \overline{Y}_{1\bullet} - \overline{Y}_{\bullet\bullet} = 23 - 18.75 = 4.25$$
$$\hat{\alpha}_2 = \overline{Y}_{2\bullet} - \overline{Y}_{\bullet\bullet} = 25.25 - 18.75 = 6.5$$
$$\hat{\alpha}_3 = \overline{Y}_{3\bullet} - \overline{Y}_{\bullet\bullet} = 8 - 18.75 = -10.75$$

Los efectos estimados de los bloques:

$$\hat{\beta}_1 = \overline{Y}_{\bullet 1} - \overline{Y}_{\bullet\bullet} = 11.33 - 18.75 = -7.42$$
$$\hat{\beta}_2 = \overline{Y}_{\bullet 2} - \overline{Y}_{\bullet\bullet} = 16.67 - 18.75 = -2.08$$

$$\hat{\beta}_3 = \overline{Y}_{\bullet 3} - \overline{Y}_{\bullet\bullet} = 12 - 18.75 = -6.75$$
$$\hat{\beta}_4 = \overline{Y}_{\bullet 4} - \overline{Y}_{\bullet\bullet} = 35 - 18.75 = 16.25$$

El efecto estimado del error ε_{24}:

$$\hat{\varepsilon}_{24} = Y_{24} - \overline{Y}_{2\bullet} - \overline{Y}_{\bullet 4} + -\overline{Y}_{\bullet\bullet} = 44 - 25.25 - 35 + 18..75 = 2.5$$

2.2.6 Análisis de Varianza

En este modelo la variabilidad total se descompone en tres fuentes de variación, la explicada por los tratamientos, la explicada por los bloques y la explicada por el error. Por lo tanto, el modelo de descomposición de la varianza será el siguiente:

$$Variabilidad_{Total} + Var_{(Trat)} + Var_{(Bloq)} + Var_{(Error)}$$

La variabilidad total es cuantificada por la suma de cuadrados total:

$$SC_{total} = SC(y) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{b}(Y_{ij} - \overline{T}_{\bullet\bullet})^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{b}Y_{ij}{}^2 - \frac{T_{\bullet\bullet}^2}{kb}$$

donde $\frac{T_{\bullet\bullet}{}^2}{kb}$ es el término de correlación (TC).

Las sumas de los cuadrados de los tratamientos, bloques y error se calculan de la siguiente manera:

$$SC_{Trat.} = \sum_{i=1}^{k}\frac{T_{i\bullet}^2}{b} - TC \qquad SC_{Bloques} = \sum_{j=1}^{b}\frac{T_{\bullet j}^2}{k} - TC$$

$$SC_{Error} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{b}Y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{k}\frac{T_{i\bullet}^2}{b} - \sum_{j=1}^{b}\frac{T_{\bullet j}^2}{k} + TC$$

$$SC_{Error} = SC_{Total} - SC_{Trat} - SC_{Bloq}$$

Estas fuentes de variación son comparadas mediante la prueba de hipótesis a partir del cuadro de análisis de varianza (Cuadro ANOVA)

2.2.7 Construcción de la tabla ANOVA

Para la obtener la tabla ANOVA es necesario determinar:

a) Determinar los grados de libertad de las fuentes de variación.

$gl_{trat} = k - 1$
$gl_{bloque} = b - 1$
$gl_{total} = kb - 1$
$gl_{error} = (k-1)(b-1)$

b) Obtener los Cuadrados Medios (CM)

La obtención de los CM se tiene al dividir la Suma de Cuadrados y los Grados de Libertad.

$$CM_{Trata.} = \frac{SC_{Trat.}}{gl_{Trat.}} \qquad CM_{Bloques} = \frac{SC_{Bloques}}{gl_{Bloques}}$$

$$CM_{Error} = \frac{SC_{Error}}{gl_{Error}}$$

c) Expresar la tabla de **ANOVA**.

Causa de Variación	Suma de Cuadrados (SC)	Grados de Libertad (gl)	Cuadrados Medios (CM)	F
Bloques	$SC_{Bloques}$	$b-1$	$CM_{Bloques}$	$\frac{CM_{Bloques}}{CM_{Error}}$
Tratamientos	$SC_{Tratamienot}$	$k-1$	$CM_{Tratamienot}$	$\frac{CM_{Trat}}{CM_{Error}}$
Error Experimental	SC_{Error}	$(k-1)(b-1)$	CM_{Error}	
Total	SC_{Total}	$kb-1$		

d) Hipótesis.

Para el Modelo I (Efectos fijos) las hipótesis son, en términos de los efectos de los tratamientos siguientes:

H_0: $\alpha_i = 0 \ \forall$ i

H_1: $\alpha_i \neq 0$ para al menos algún i

En términos de las medias de los tratamientos:

H_0: $\mu_{Bi} = \mu_{Bj} \ \forall$ i, j

H_1: $\mu_{Bi} \neq \mu_{Bj}$ para al menos alguno distinto

H_0: $\mu_{Ti} = \mu_{Tj} \ \forall$ i, j

H_1: $\mu_{Ti} \neq \mu_{Tj}$ para al menos alguno distinto

Para el Modelo II (Efectos aleatorios) las hipótesis serán planteadas en términos de la varianza de los tratamientos:

H_0: $\sigma_k^2 = 0$

H_1: $\sigma_k^2 > 0$

En cualquiera de los casos, la hipótesis nula implica que los tratamientos no afectan la variable respuesta o lo que es lo mismo, que con todos los tratamientos se obtienen los mismos resultados.

Ejemplo 1 (Cont.): A continuación se presenta el análisis de varianza y la prueba de hipótesis correspondiente para el ejemplo tratado en esta sección:

$$SC_{Total} = (13^2 + 22^2 + ... + 22^2) - \frac{225^2}{(3)(4)} = 1862.25$$

$$SC_{Tratamienot} = \frac{92^2}{4} + \frac{101^2}{4} + \frac{32^2}{4} + \frac{225^2}{(3)(4)} = 703.5$$

$$SC_{Bloques} = \frac{34^2}{3} + \frac{50^2}{3} + \frac{36^2}{3} + \frac{105^2}{3} - \frac{225^2}{(3)(4)} = 1106.92$$

$$SC(Error) = SC(Total) - SC(Trat.) - SC(Bloq) = 51.83$$

<u>Cuadro ANOVA</u>

Causa de Variación	**Suma de Cuadrados (SC)**	**Grados de Libertad (gl)**	**Cuadrados Medios (CM)**	**F**
Tratamientos	2	703.5	351.75	40.72
Bloques	3	1106.92	368.97	
Error Experimental	6	51.83		
Total	11	1862.25		

Asumiendo un modelo de efectos fijos, la hipótesis en términos de los efectos de los tratamientos son:

H_0: $\alpha_i = 0 \ \forall$ i
H_1: $\alpha_i \neq 0$ para al menos algún i

En términos de las medias de los tratamientos:
H_0: $\mu_{Bi} = \mu_{Bj} \ \forall$ i, j
H_1: $\mu_{Bi} \neq \mu_{Bj}$ para al menos alguno distinto

H_0: $\mu_{Ti} = \mu_{Tj} \ \forall$ i, j
H_1: $\mu_{Ti} \neq \mu_{Tj}$ para al menos alguno distinto

O literalmente
H_0: Las tres soluciones son iguales efectivas en el retardo del crecimiento de bacterias en contenedores de leche.
H_1: Al menos una de las soluciones tiene una efectividad diferente en el retardo del crecimiento de bacterias en contenedores de leche.

El estadístico de prueba es $F = 40.72$. El valor de tabla para un nivel de significación del 5% es $F_{(0.95,2,6)} = 5.14$. Dado que el estadístico de prueba resulta mayor que el valor de tabla se rechaza H_0. En conclusión, existe suficiente evidencia estadística para aceptar que las tres soluciones no son igualmente efectivas en el retardo del crecimiento de bacterias en contenedores de leche.

El coeficiente de variación para este experimento es:

$$cv = \frac{\sqrt{CME}}{\overline{Y}_{\bullet\bullet}} = \frac{\sqrt{8.64}}{18.75} = 15.68\%$$

e) Valores Esperados de los Cuadrados Medios.

En la siguiente tabla se presentan los valores esperados de los cuadrados medios para un experimento en DBCA, en el caso de los efectos fijos y aleatorios tanto para los tratamientos como para los bloques.

Causa de Variación	**Grados de Libertad (gl)**	**Valor Esperado de los Cuadrados Medios**	
		Modelo I	**Modelo II**
Tratamientos	$k-1$	$\sigma^2 + b\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i^2}{k-1}$	$\sigma^2 + b\sigma_\alpha^2$
Bloques	$b-1$	$\sigma^2 + k\sum_{j=1}^{b}\frac{\beta_j^2}{b-1}$	$\sigma^2 + k\sigma_\beta^2$
Error Experimental	$(k-1)(b-1)$	σ^2	σ^2
Total	$kb-1$		

h) Estadístico de Prueba.

$$F_{Bloques} = \frac{CM_{Bloques}}{CM_{Error}} \sim F_\alpha[(b-1);(b-1)(k-1)]$$

Si $\quad F_{Bloques} > F_\alpha[(b-1);(b-1)(k-1)]$

Entonces H_0 se rechaza y

$\therefore$ Hay diferencias entre los bloques.

$$F_{Trat} = \frac{CM_{Trat}}{CM_{Error}} \sim F_{\alpha}[(k-1);(b-1)(k-1)]$$

Si $F_{Trat} > F_{\alpha}[(k-1);(b-1)(k-1)]$

Entonces H_0 se rechaza y

∴ Hay diferencias entre los tratamientos.

2.2.8 Prueba de Sheffé

Hipótesis:

H_0: $\mu_{Bi} = \mu_{Bj}$ $\forall$ i, j

H_1: $\mu_{Bi} \neq \mu_{Bj}$ para al menos alguno distinto

$$D = \sqrt{CM_{Error}\left(\frac{1}{b_i} + \frac{1}{bj}\right)(k-1)F_{\alpha}[(k-1);(b-k)]}$$

si $\left|\bar{y}_i - \bar{y}_j\right| > D$ entonces H_0 se rechaza.

si $\left|\bar{y}_i - \bar{y}_j\right| < D$ entonces H_0 no se rechaza.

2.2.9 Bloques al Azar (BA) con datos perdidos

Algunas veces los datos de ciertas unidades se pierden o no son utilizables, como es el caso de un animal que se enferma o muere, y no completa todo el tratamiento; cuando se pierde una parcela experimental en un campo, producto de una plaga, u otra causa cualquiera.

Yates (1933) desarrolló un método para estimar los datos perdidos. El estimado de un dato perdido no proporciona una información adicional, sino que solo facilita el análisis de los datos restantes.

Cuando se pierde un dato en el diseño de BA se puede calcular un estimado del valor perdido mediante la expresión siguiente:

$$\hat{Y}_{ij} = \frac{bB + kT - G}{(b-1)(k-1)}$$

donde:

B: total de unidades restantes en el bloque al que pertenece el valor.

T: total de las unidades restantes en el tratamiento al que pertenece el valor.

G: gran total.

b: número de bloques.
k: número de tratamientos.

El valor obtenido se introduce en la tabla de datos y se realiza el análisis de varianza de la forma tradicional y después se rectifica como se muestra a continuación.
El análisis de varianza ajustado se calcula entonces de la siguiente forma:

$$SC_{Bloques(ajustados)} = SC_{Bloques} - \frac{(T + bB - G_1)^2}{k(k-1)(b-1)^2}$$

$$SC_{Trat(ajustados)} = SC_{Trat} - \frac{(B + kT - G_1)^2}{b(b-1)(k-1)^2}$$

donde G_1 es el gran total de la tabla con los nuevos datos incluidos.

Además, debe restársele 1 grado de libertad a los grados de libertad de error y el total.

2.2.10 Ejercicios propuestos

1) El propósito del experimento de comparar cuatro procesos, A, B, C y D para la producción de penicilina. La materia prima, licor de maíz, es algo variable y sólo puede ser preparada en cantidad suficiente para cuatro en sayos. De este modo, cinco preparaciones son necesarias para poder contar con cinco repeticiones. Los resultados del experimento, para la producción de penicilina en mg. se presentan en la siguiente tabla:

	Preparación				
Proceso	**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**
A	85	81	82	85	82
B	85	79	86	89	81
C	97	92	89	91	86
D	93	85	87	88	87

a) Presente el modelo aditivo lineal e interprete cada uno de sus componentes en términos del problema.
b) Efectúe el análisis de varianza.
c) Se justifica el uso de los bloques. Explique brevemente.
d) Realice las comparaciones por pares en caso de ser necesario.
e) Estime los efectos de los tratamientos.
f) Antes de realizar el experimento se tenía principal interés en comparar los procesos C y D. Realice la prueba correspondiente.

g) Los procesos A y B son dos variantes de una metodología, llamémosla metodología 1, y los procesos C y D son variantes de otra, llamémosla metodología 2. Se cree que la metodología 2 es mejor que la metodología 1. ¿Aportan los resultados de este experimento suficiente evidencia para aceptar que la metodología 2 es mejor que la metodología 1?

2) Se realizó un experimento para comparar el contenido de colesterol de 3 alimentos dietéticos. Cada uno de los 3 laboratorios que fabrican alimentos dietéticos produce alimentos de estos 3 tipos en paquetes de similar peso. Al evaluar el contenido de colesterol (en miligramos por paquete) se obtuvo los siguientes resultados:

Alimento Dietético	Laboratorio		
	1	**2**	**3**
A	13	15	12
B	17	18	14
C	15	18	13

a) Presente el modelo aditivo lineal e interprete cada uno de sus componentes en términos del problema.
b) Efectúe el análisis de varianza.
c) Realice la prueba de Tukey.

3) En un experimento de riegos en el cultivo de algodón se tuvieron los siguientes tratamientos que están expresados en metros cúbicos de agua absorbidos por hectárea:

T_1= 5400, T_2= 4800, T_3= 4200 y T_5= 3600. El experimento se condujo en parcelas de 300 m^2 de área útil y los resultados están expresados en kilogramos.

A continuación se dan los rendimientos:

Bloques	Tratamientos			
	T_1	**T_2**	**T_3**	**T_4**
I	68	73	53	50
II	86	90	62	62
III	68	71	46	50

a) Presente el modelo aditivo lineal e interprete cada uno de sus componentes en términos del enunciado.
b) Efectúe el análisis de varianza.

c) Realice la prueba de Tukey.
d) ¿Se puede afirmar que con T_2 el rendimiento por parcela supera en más de 80 kilogramos al que se obtiene con T_4?

4) Con la finalidad de estudiar el efecto de los tratamientos de semilla de soya sobre el % de germinación, se llevó a cabo un experimento conducido en el DBCA. En el experimento se utilizaron 3 tratamientos + 1 testigo (semillas no tratadas), en 4 unidades experimentales. Los resultados fueron:

	Tratamiento			
Bloque	**Testigo**	**A**	**B**	**C**
1	92	98	96	91
2	90	94	90	93
3	88	93	91	97
4	86	91	89	95

a) Presente el modelo aditivo lineal e interprete cada uno de sus componentes en términos del enunciado.
b) Efectúe el análisis de varianza.

5) Un investigador realiza un estudio de la efectividad de cuatro cremas para el tratamiento de un cierto tipo de enfermedad cutánea. El cuenta con 28 pacientes para dividirlos en cuatro grupos de 7 pacientes cada uno. Los pacientes son evaluados y colocados en bloques de cuatro de acuerdo a la severidad de la condición inicial de su piel. De esta manera, los cuatros casos más severos son asignados al primer bloque, los cuatro siguientes más severos al segundo, y así hasta completar el séptimo bloque con los cuatro casos menos severos. Los cuatro miembros de cada bloque fueron asignados aleatoriamente, uno a cada uno de los cuatro tratamientos. Al final del tratamiento, cada paciente fue nuevamente evaluado y calificado en una escala del 1 al 7 de acuerdo al estado final de su piel. El calificativo de 7 corresponde a una piel completamente sana. Los resultados del experimento se presentan en la siguiente tabla:

Crema	Bloque						
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	3	3	4	4	3	4	5
2	4	4	6	5	5	6	6
3	5	4	6	5	5	7	7
4	4	5	4	6	4	6	7

a) ¿Existen diferencias significativas entre las cremas?
b) Realice comparaciones.

6) A seis soldadores, con diferente nivel de experiencia, se les pidió que unieran dos tubos metálicos utilizando 5 diferentes tipos de llama. Las llamas fueron utilizadas en orden aleatorio por cada soldador. Las soldaduras ya terminadas fueron evaluadas sobre una variedad de factores cualitativos y calificadas del 1 al 10, donde 10 representa un trabajo perfecto. Los resultados fueron los siguientes:

Soldador	Tipo de llama				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	3.9	4.1	4.2	4.1	3.3
2	9.4	9.5	9.4	9.0	8.6
3	9.7	9.3	9.3	9.2	8.4
4	8.3	8.0	7.9	8.6	7.4
5	9.8	8.9	9.0	9.0	8.3
6	9.9	10.0	9.7	9.6	9.1

a) Presente el modelo aditivo lineal e interprete cada uno de sus componentes en términos del enunciado.
b) ¿Existen diferencias significativas entre las llamas?
c) Realice comparaciones.

2.3 Diseño Cuadrado Latino

Anteriormente se estudió el Diseño de Bloques al Azar, en el cual se controlaba una fuente de variación adicional a los tratamientos que constituía los bloques. El diseño en el cual las unidades experimentales son clasificadas de acuerdo a los criterios de bloqueo se conoce como el Diseño Cuadrado Latino (DCL), también es concebido como una extensión del DBA. Al igual que en el DBCA, los bloques formados en el DCL en sus dos criterios de clasificación, a los que se llamará bloques por filas y bloques por columnas, son completos, es decir, cada tratamiento aparece una vez en cada fila y en cada columna. El número de criterios de clasificación por bloques puede ser aun mayor que en el DCL. Así tenemos por ejemplo el Diseño Greco-Latino (3 criterios de bloques) y el Diseño Hiper Greco-Latino (4 criterios de bloques).

El DCL es usado en muchos campos de investigación donde hay dos fuentes principales de variación en la realización del experimento. En experimentos sobre el terreno, la disposición de las unidades experimentales suele ser sobre un área rectangular, permitiendo así la eliminación de la variación proveniente de diferencias en el suelo en dos direcciones. El DCL ha sido utilizado también un la industria, laboratorio y en las ciencias sociales.

La principal desventaja de este diseño es que el número de tratamientos, filas y columnas debe ser el mismo. Los cuadrados más comunes van de 5x5 a 8x8; cuadrados muy pequeños dejan muy pocos grados de libertad para la estimación del error experimental y cuadrados muy grandes implican la utilización de muchas unidades experimentales además de que al tener bloques grandes el error experimental aumenta.

2.3.1 Ventajas y Desventajas del DCL

Ventajas:

- La existencia real de dos fuentes de variabilidad entre las unidades experimentales y su separación en el análisis de varianza permite incrementar la precisión del experimento.
- La pérdida de una o más unidades experimentales no influye esencialmente en el análisis de varianza, siendo posible estimar los resultados de las unidades experimentales perdidas.

Desventajas:

- El número de tratamientos, filas y columnas debe ser el mismo. Por esta razón, no es recomendable para un número elevado de tratamientos ya que se requerirá de un número elevado de unidades experimentales (u.e.) (el número de u.e. es igual a t^2).
- Si existe interacción entre los bloques y tratamientos, ésta va incluida en el error experimental. En este caso se tiene la interacción filas por columnas, filas por tratamientos, columnas por tratamientos y filas por columnas por tratamientos.

2.3.2 Aleatorización y Croquis Experimental

En este diseño se tienen dos restricciones de aleatoriedad para la asignación de los tratamientos a las u.e. (filas y columnas) por lo que cada tratamiento debe aparecer una vez en cada fila y en cada columna. La aleatorización en este diseño consiste en elegir un cuadrado al azar de entre todos los cuadrados latinos posibles.

Tomaremos A_i como el tratamiento *i*-ésimo de los *t* tratamientos que existen, los cuales se usan en las filas de manera aleatoria en cada una de ellas.

FILAS	COLUMNAS			
	C_1	**C_2**	**…**	**C_t**
F_1	A_1	A_5	…	A_7
F_2	A_7	A_t	…	A_2
…	…	…	…	…
F_t	A_3	A_6	…	A_4

donde:
C_i: Columna i-ésima.
F_j: Fila j-ésima
Y_{ij}: Tratamiento aplicado a la i-ésima columna y j-ésima fila.

2.3.3 Modelo Aditivo Lineal

El modelo aditivo lineal para un Diseño Cuadrado Latino es el siguiente:

$$Y_{ij(k)} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \zeta_{(k)} + \varepsilon_{ijk}$$

donde:

$Y_{ij(k)}$: es el valor de la observación en el i-ésimo tratamiento, j-ésima fila, k-ésima columna.
μ : efecto de la media general.
α_i : efecto del i-ésimo tratamiento.
β_j : efecto del i-ésimo fila.
$\zeta_{(k)}$: efecto de la k-ésima columna.
ε_{ijk} : efecto del error experimental en el i-ésimo tratamiento, j-ésima fila, k-ésima columna.
t: es el número de tratamientos que es igual al número de filas y de columnas.

La simbología (i) implica que no es una clasificación ordinaria de tres vías.

Ejemplo 1: Se realizó un experimento para comparar la efectividad de 4 abonos nitrogenados en el cultivo de caña de azúcar. Las claves para los abonos son:

1) **NA:** Nitrato amónico NH_4NO_3
2) **SA:** Sulfato amónico $(NH_4)_2SO_4$
3) **SS:** Salitre sódico.
4) **UR:** Urea.

Todos los abonos se aplicaron a razón de 100 Kg. Por hectárea. El diseño empleado fue un Cuadrado Latino, donde las unidades experimentales fueron clasificadas en filas y columnas según su ubicación en el terreno tal y como se muestra en el siguiente croquis junto con los resultados del experimento (en Kg. de caña/parcela):

Fila	Columna			
	1	**2**	**3**	**4**
1	432(SA)	518(NA)	458(SS)	583(UR)
2	550(SS)	724(UR)	400(NA)	524(SA)
3	556(UR)	384(SS)	400(SA)	297(NA)
4	500(NA)	506(SA)	501(UR)	494(SS)

El modelo aditivo lineal es el siguiente:

$$Y_{(i)jk} = \mu + \alpha_{(i)} + \beta_j + \zeta_k + \varepsilon_{(i)jk}$$

donde:

$Y_{(i)jk}$: es el rendimiento de caña observado con el *i*-ésimo abono nitrogenado, *j*-ésimo bloque por fila, *k*-ésimo bloque por columna.
μ : efecto de la media general.
$\alpha_{(i)}$: efecto del *i*-ésimo abono nitrogenado.
β_j : efecto del *i*-ésimo bloque fila.
$\zeta_{(k)}$: efecto de la *k*-ésimo bloque columna.
ε_{ijk} : efecto del error experimental en el *i*-ésimo abono nitrogenado, *j*-ésima bloque fila, *k*-ésima bloque columna.
$t = 4$: es el número de tratamientos que es igual al número de filas y de columnas.

2.3.4 Supuestos del Modelo Estadístico

El modelo estadístico debe cumplir con los siguientes supuestos:

1. Aditividad: Los efectos del modelo son aditivos.
2. Normalidad: Las relaciones entre los efectos del modelo son lineales.
3. Normalidad: Los errores del modelo deben tener una distribución Normal con media cero y varianza (σ^2).
4. Independencia: Los resultados obtenidos en el experimento son independientes entre sí.
5. Homogeneidad de varianza: Las diferentes poblaciones generadas por la aplicación de los diferentes tratamientos tienen varianzas iguales (σ^2).

No existe interacción entre los bloques por filas, por bloques y los tratamientos.

2.3.5 Estimación de los Efectos

Los efectos del modelo $\mu, \alpha_{(i)}, \beta_j \; y \; \zeta_k$ son de modo que se minimice la siguiente expresión (Método de los Mínimos Cuadrados):

$$Q = \sum_{j=1}^{t} \sum_{k=1}^{t} \varepsilon_{(i)jk}^2 = \sum_{j=1}^{t} \sum_{k=1}^{t} (Y_{(i)jk} - \mu - \alpha_{(i)} - \beta_j - \zeta_k)^2$$

teniendo en cuenta las siguientes restricciones:

$$\sum_{i=1}^{t} \alpha_{(i)} = 0 \qquad \sum_{j=1}^{t} \beta_j = 0 \qquad \sum_{k=1}^{t} \zeta_k = 0$$

La aplicación de este método da los siguientes resultados para la estimación de los parámetros:

$$\hat{\mu} = \overline{Y}_{(\bullet)\bullet\bullet} \qquad \hat{\alpha}_{(i)} = \overline{Y}_{(i)\bullet\bullet} - \overline{Y}_{(\bullet)\bullet\bullet}$$

$$\hat{\beta}_j = \overline{Y}_{(\bullet)j\bullet} - \overline{Y}_{(\bullet)\bullet\bullet} \qquad \zeta_k = \overline{Y}_{(\bullet)\bullet k} - \overline{Y}_{(\bullet)\bullet\bullet}$$

$$\hat{\varepsilon}_{(i)jk} = Y_{(i)jk} - \overline{Y}_{(i)\bullet\bullet} - \overline{Y}_{(\bullet)j\bullet} - \overline{Y}_{(\bullet)\bullet k} + 2\overline{Y}_{(\bullet)\bullet\bullet}$$

Ejemplo 1 (Cont.): Con los datos del ejemplo anterior, la media estimada es:

$$\hat{\mu} = \overline{Y}_{(\bullet)\bullet\bullet} = 489.2$$

Los efectos estimados de los tratamientos:

$$\hat{\alpha}_{(1)} = \overline{Y}_{(1)\bullet\bullet} - \overline{Y}_{(\bullet)\bullet\bullet} = 428.8 - 489.2 = -60.4$$
$$\hat{\alpha}_{(2)} = \overline{Y}_{(2)\bullet\bullet} - \overline{Y}_{(\bullet)\bullet\bullet} = 465.5 - 489.2 = -23.7$$
$$\hat{\alpha}_{(3)} = \overline{Y}_{(3)\bullet\bullet} - \overline{Y}_{(\bullet)\bullet\bullet} = 471.5 - 489.2 = -17.7$$
$$\hat{\alpha}_{(4)} = \overline{Y}_{(4)\bullet\bullet} - \overline{Y}_{(\bullet)\bullet\bullet} = 591.0 - 489.2 = 101.8$$

Los efectos estimados de los bloques por columnas:

$$\hat{\beta}_1 = \overline{Y}_{(\bullet)1\bullet} - \overline{Y}_{(\bullet)\bullet\bullet} = 497.7 - 489.2 = 8.5$$
$$\hat{\beta}_2 = \overline{Y}_{(\bullet)2\bullet} - \overline{Y}_{(\bullet)\bullet\bullet} = 549.5 - 489.2 = 60.3$$
$$\hat{\beta}_3 = \overline{Y}_{(\bullet)3\bullet} - \overline{Y}_{(\bullet)\bullet\bullet} = 409.2 - 489.2 = -80$$
$$\hat{\beta}_4 = \overline{Y}_{(\bullet)4\bullet} - \overline{Y}_{(\bullet)\bullet\bullet} = 500.25 - 489.2 = 11.05$$

Los efectos estimados de los bloques por columnas:

$$\zeta_1 = \overline{Y}_{(\bullet)\bullet 1} - \overline{Y}_{(\bullet)\bullet\bullet} = 509.5 - 489.2 = 20.3$$
$$\zeta_2 = \overline{Y}_{(\bullet)\bullet 2} - \overline{Y}_{(\bullet)\bullet\bullet} = 533 - 489.2 = 43.8$$
$$\zeta_3 = \overline{Y}_{(\bullet)\bullet 3} - \overline{Y}_{(\bullet)\bullet\bullet} = 439.7 - 489.2 = -49.5$$
$$\zeta_4 = \overline{Y}_{(\bullet)\bullet 4} - \overline{Y}_{(\bullet)\bullet\bullet} = 474.5 - 489.2 = -14.7$$

El efecto estimado del error ε_{21}:

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}_{(1)23} &= Y_{(1)23} - \overline{Y}_{(1)\bullet\bullet} - \overline{Y}_{(\bullet)2\bullet} - \overline{Y}_{(\bullet)\bullet 3} + 2\overline{Y}_{(\bullet)\bullet\bullet} \\ &= 400 - 428.8 - 549.5 - 439.7 + 2(489.2) = -39.6\end{aligned}$$

2.3.6 Análisis de Varianza

En este modelo la variabilidad total se descompone en cuatro fuentes de variación, la explicada por los tratamientos, por los bloques filas, por los bloques columnas y por el error.

Por lo tanto, el modelo de descomposición de la varianza será el siguiente:

$$Variabilidad_{Total} = Var_{Trat} + Var_{Bloq\ Fila} + Var_{Bloq\ Col} + Var_{Error}$$

La variabilidad total es cuantificada por la suma de los cuadrados total:

$$sc_{Total} = \sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{t}(Y_{(i)jk} - \overline{Y}_{(\bullet)\bullet\bullet})^2 = \sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{t}Y_{(i)jk}^2 - \frac{Y_{(\bullet)\bullet\bullet}^2}{t^2}$$

donde $FC = \frac{Y_{(\bullet)\bullet\bullet}^2}{t^2}$ (Factor de corrección).

Las sumas de cuadrados de los tratamientos, bloques por filas y por columnas y error experimental se calculan de la siguiente manera:

$$SC_{Trat} = \sum_{i=1}^{t}\frac{Y_{(i)\bullet\bullet}^2}{t} - FC \qquad SC_{bloq\ Fila} = \sum_{j=1}^{t}\frac{Y_{(\bullet)j\bullet}^2}{t} - FC$$

$$SC_{bloq\ Columnas} = \sum_{k=1}^{t}\frac{Y_{(\bullet)\bullet k}^2}{t} - FC$$

$$SC_{Error} = \sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{t}Y_{(i)jk}^2 - \sum_{i=1}^{t}\frac{Y_{(i)\bullet\bullet}^2}{t} - \sum_{j=1}^{t}\frac{Y_{(\bullet)j\bullet}^2}{t} - \sum_{k=1}^{t}\frac{Y_{(\bullet)\bullet k}^2}{t} + 2FC$$

$$SC_{Error} = SC_{Total} - SC_{Trat} - SC_{Bloq\ Fila} - SC_{Bloq\ Col}$$

Estas fuentes de variación son comparadas mediante el siguiente procedimiento de prueba de hipótesis a partir del cuadro de análisis de varianza (Cuadro ANOVA)

Fuentes de Variación	Suma de Cuadrados (SC)	Grados de Libertad (gl)	Cuadrados Medios (CM)	F
Filas	SC(Filas)	$t-1$	$\frac{\text{SC(Filas)}}{\text{gl(Filas)}}$	$\frac{\text{CM(Trat)}}{\text{CM(Error)}}$
Columnas	SC(Col.)	$t-1$	$\frac{\text{SC(Col)}}{\text{gl(Col)}}$	
Tratamientos	SC(Trat)	$t-1$	$\frac{\text{SC(Trat)}}{\text{gl(Trat)}}$	
Error	SC(Error)	$(t-1)(t-2)$	$\frac{\text{SC(Error)}}{\text{gl(Error)}}$	
Total	SC(Total)	t^2-1		

Hipótesis:

Para el Modelo I (Efectos fijos) las hipótesis son, en términos de los efectos de los tratamientos las siguientes:
H_0: $\alpha_i = 0 \ \forall i$
H_1: $\alpha_i \neq 0$ para algún i

En términos de las medias de los tratamientos:
H_0: $\mu_i = \mu \ \forall i$
H_1: $\mu_i \neq \mu$ para algún i

Para el Modelo II (Efectos aleatorios) las hipótesis serán planteadas en términos de la varianza de los tratamientos:
H_0: $\sigma_t^2 = 0$
H_1: $\sigma_t^2 > 0$

En cualquiera de los casos, la hipótesis nula implica que los tratamientos no afectan a la variable respuesta o lo que es lo mismo, que con todos los tratamientos se obtienen los mismos resultados.

Valores Esperados de los Cuadrados Medios.
En la siguiente tabla se presentan los valores esperados de los cuadrados medios para un experimento en DCL, en el caso de los efectos fijos y aleatorios tanto para los tratamientos como por filas y columnas.

Causa de Variación	Grados de Libertad (gl)	Valor Esperado de los Cuadrados Medios	
		Modelo I	Modelo II
Tratamientos	***t*-1**	$\sigma^2 + t\sum_{i=1}^{t}\frac{\alpha_i^2}{t-1}$	$\sigma^2 + t\sigma_\alpha^2$
Filas	***t*-1**	$\sigma^2 + t\sum_{j=1}^{t}\frac{\beta_j^2}{t-1}$	$\sigma^2 + t\sigma_\beta^2$
Columna	***t*-1**	$\sigma^2 + t\sum_{j=1}^{t}\frac{\zeta_k^2}{t-1}$	$\sigma^2 + t\sigma_\zeta^2$
Error Experimental	**(*t*- 1)(*t*- 2)**	σ^2	σ^2
Total	**t^2- 1**		

Estadístico de Prueba.

$$F = \frac{CM_{Trat}}{CM_{Error}} \sim F_{(gl(Trat),gl(Error))}$$

Regla de decisión:

Si $F > F_{(gl(Trat),gl(Error))}$

Entonces H_0 se rechaza y
∴ Hay entre los tratamientos.

Ejemplo 1 (Cont.): A continuación se presenta el análisis de varianza y la prueba de hipótesis correspondiente para el ejemplo tratado en esta sección:

$$sc_{Total} = \sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{t} Y_{(i)jk}^2 - \frac{Y_{(\bullet)\bullet\bullet}^2}{t^2}$$

$$= (432^2 + 550^2 + ... + 494^2) - \frac{7827^2}{4^2} = 42586$$

$$SC_{Trat} = \sum_{i=1}^{t} \frac{Y_{(i)\bullet\bullet}^{2}}{t} - FC$$

$$= \frac{1715^2}{4} + \frac{1862^2}{4} + \frac{1886^2}{4} + \frac{2364^2}{4} + \frac{7827^2}{4^2} = 59570$$

$$SC_{bloq\ Fila} = \sum_{j=1}^{t} \frac{Y_{(\bullet)j\bullet}^{2}}{t} - FC$$

$$= \frac{1991^2}{4} + \frac{2198^2}{4} + \frac{1637^2}{4} + \frac{2001^2}{4} + \frac{7827^2}{4^2} = 40893$$

$$SC_{bloq\ Columnas} = \sum_{k=1}^{t} \frac{Y_{(\bullet)\bullet k}^{2}}{t} - FC$$

$$= \frac{2038^2}{4} + \frac{2132^2}{4} + \frac{1759^2}{4} + \frac{1898^2}{4} + \frac{7827^2}{4^2} = 19968$$

$$SC_{Error} = SC_{Total} - SC_{Trat} - SC_{Bloq\ Fila} - SC_{Bloq\ Col} = 22426$$

ANOVA

Fuentes de Variación	Suma de Cuadrados (SC)	Grados de Libertad (gl)	Cuadrados Medios (CM)	F
Filas	59570	3	19857	5.31
Columnas	40893	3	13631	
Tratamientos	19968	3	6656	
Error	22426	6	3738	
Total	142856	15		

Asumiendo un modelo de efectos fijos, las hipótesis en términos de los efectos de los tratamientos son:

H_0: $\alpha_i = 0\ \forall\, i$
H_1: $\alpha_i \neq 0$ para algún i

En términos de las medias de los tratamientos:

H_0: $\mu_i = \mu \ \forall i$
H_1: $\mu_i \neq \mu$ para algún i

O literalmente:

H_0: Los cuatro abonos nitrogenados tienen el mismo efecto en el cultivo de caña de azúcar.
H_1: Con al menos uno de los abonos nitrogenados se obtiene un efecto diferente en el cultivo de caña de azúcar.

El estadístico de prueba es $F = 5.31$. El valor de tabla para un nivel de significación del 5% es $F_{(0.95,3,6)} = 4.76$. Dado que el estadístico de prueba resulta mayor que el valor de la tabla se rechaza H_0 y se concluye que existe suficiente evidencia estadística para aceptar que con al menos uno de los abonos nitrogenados se obtiene un efecto diferente (rendimientos diferentes) en el cultivo de la caña de azúcar.

El coeficiente de variación para este experimento es:

$$cv = \frac{\sqrt{CME}}{\overline{Y}_{(\bullet)\bullet\bullet}} = \frac{\sqrt{3738}}{489.19} = 12.50\%$$

2.3.7 Pruebas de Comparación de Medias de Tratamientos

A continuación se presentan las desviaciones estándar a utilizar en cada una de las pruebas:

1) Prueba *t* y DLS $\qquad S_d = \sqrt{\frac{2CME}{t}}$

2) Contrastes Ortogonales $\qquad S_{\hat{L}} = \sqrt{CME \sum_{i=1}^{t} \frac{c_i^2}{t}}$

3) Tukey $\qquad S_d = \sqrt{\frac{CME}{t}}$

4) Dunnet $\qquad S_d = \sqrt{\frac{2CME}{t}}$

2.3.8 Ejercicios

1) Un ingeniero industrial está investigando el efecto que tiene cuatro métodos de ensamblaje (A, B, C y D) sobre el tiempo (en minutos) de ensamblaje de un componente para televisores a color. Se seleccionan cuatro operadores para realizar este estudio.
Por otra parte, el ingeniero sabe que no todos los operadores son igualmente hábiles y que el trabajo produce fatiga, por lo que el tiempo que se tarda en el último ensamblaje es mayor que en el primero, independientemente del método. Para controlar estas posibles fuentes de variabilidad, el ingeniero utiliza el DCL. Los resultados se muestran a continuación:

Orden de Montaje	Operador			
	1	**2**	**3**	**4**
1	C= 10	D= 14	A= 07	B= 08
2	B= 07	C= 18	D= 11	A= 09
3	A= 05	B= 10	C= 11	D= 09
4	D= 10	A= 10	B= 12	C= 14

   a) Presente el modelo aditivo lineal e interprete cada uno de sus componentes en términos del enunciado.
   b) Efectué el análisis de varianza.
   c) Mediante la prueba DLS compare los métodos A y D.

2) Se probaron 4 raciones alimenticias para pollos, criados en jaula tipo batería de 4 pisos (filas) y 4 casilleros (columnas). La variable analizada fué: Peso del pollo (kg.) a las 8 semanas de edad

Pisos	**Casilleros**			
	1	**2**	**3**	**4**
1	1.40(A)	1.38(B)	1.40(C)	1.60(D)
2	1.35(B)	1.28(A)	1.45(D)	1.62(C)
3	1.38(C)	1.40(D)	1.42(B)	1.63(A)
4	1.39(D)	1.39(C)	1.40(A)	1.60(B)

   a) Presente el Modelo Aditivo Lineal
   b) Realice la Prueba de Hipótesis correspondiente. Use α=0.05
   c) Realice la Prueba de Duncan para comparar si existe diferencias entre los tratamientos en estudio. Use α=0.05
   d) Realice la prueba de Tukey para comparar si existe diferencia entre el tratamiento A y B. Use α=0.05

e) Realice la prueba DLS para comparar si existe diferencia entre el tratamiento C y D. Use α=0.01
f) Utilice la prueba T para comparar si el peso promedio utilizando el tratamiento C es menor al peso promedio usando el tratamiento B. Use α=0.05

3) Se realizó un experimento para observar el rendimiento en kilogramos por parcela de 5 variedades de garbanzo (A, B, C, D y E) en el cual se tuvo que utilizar el diseño Cuadrado Latino. Las filas fueron definidas como niveles de riego y las columnas como fertilidad del suelo. Los datos se presentan a continuación:

Niveles de riego	Fertilidad del suelo				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	B= 65	C= 80	A= 55	E= 83	D= 80
2	C= 95	A= 60	E= 94	D= 95	B= 62
3	A= 63	E= 98	D= 79	B= 69	C= 100
4	E= 97	D= 94	B= 46	C= 71	A= 42
5	D= 76	B= 54	C= 106	A= 36	E= 96

a) Presente el modelo aditivo lineal e interprete cada uno de sus componentes en términos del enunciado.
b) Presente el cuadro ANOVA y pruebe la hipótesis respectiva.
c) Realice la prueba de Tukey.

2.4 Diseño de Bloques Incompletos

Es posible que en algunos experimentos que usan diseños por bloques no puedan realizarse los ensayos de todas las combinaciones de tratamiento dentro de cada bloque o que en algún momento se pierdan los valores tomados. Situaciones como éstas ocurren debido a escasez en los recursos del experimento, por descuidos o por el tamaño físico de los bloques. Por ejemplo, supongamos un experimento en el que el tamaño físico de las probetas sólo alcanza para probar tres puntas en cada probeta. En estos casos en posible usar diseños aleatorizados por bloques en los que cada tratamiento no está presente en cada bloque. Estos diseños se conocen como **Diseños Aleatorizados de Bloques Incompletos (DBI)**, y serán el motivo de estudio.

Cuando las comparaciones entre todos los tratamientos tienen la misma importancia, éstas deben elegirse de manera que ocurran en forma balanceada dentro de cada bloque. Esto significa que cualquier par de tratamientos ocurren juntos el mismo número de veces que cualquier otro par. Por lo tanto, un diseño balanceado de bloques incompletos es un diseño de bloques incompletos en el que cualquier par de tratamientos ocurren juntos el mismo número de veces.

2.4.1 Análisis estadístico

Como es usual, suponemos que existen *a* tratamientos y *b* bloques. Se supone además, que se prueban *k* tratamientos en cada bloque, que cada tratamiento sucede *r* veces en el diseño (o se repite *r* veces) y que hay un total de N= *a*•*r* = *b*•*k* observaciones. Más aún, el número de veces que cada par de tratamientos ocurre en el mismo bloque es

$$\lambda = r \cdot (k-1)/a-1$$

Se dice que el diseño es simétrico si *a* = *b*.

El parámetro λ debe ser un entero. Para deducir la relación de λ, considérese cualquier tratamiento, por ejemplo el 1.Como el tratamiento 1 ocurre en r bloques, y hay otros *k*-1 tratamientos en cada uno de esos bloques, existen *r*• (*k*-1) observaciones en un bloque que contiene al tratamiento 1. Estas *r*• (*k*-1) observaciones deben representar al resto de los *a*-1 tratamientos λ veces. Por lo tanto, λ• (*a*-1) =*r*• (*k*-1).

EJEMPLO 1: Para *a* = 4 (nº de tratamientos), *b* = 4, (nº de bloques) *k* = 3 (tratamientos en cada bloque), un diseño BIB puede ser construido con:
R = (*b*• *k* / a)= 3 (cada tratamiento sucede 3 veces en el diseño)
λ = *r*• (*k*-1) . a-1 =3. (3- 1)/4-1 =2 (el número de veces que cada par de tratamientos ocurre en el mismo bloque)

Bloques	**Tratamientos**		
1	1	2	3
2	1	2	4
3	1	3	4
4	2	3	4

EJEMPLO 2: Para *a* = 4 (nº de tratamientos), *b* = 6, (nº de bloques) *k* = 2 (tratamientos en cada bloque), un diseño BIB puede ser construido con:
R = (*b*• *k* / *a*)= 3 (cada tratamiento sucede 3 veces en el diseño)
λ = *r*• (*k*-1) • *a*-1 =3. (2- 1)/4-1 =1 (el número de veces que cada par de tratamientos ocurre en el mismo bloque)

Bloques	Tratamientos	
1	1	2
2	3	4
3	1	3
4	2	4
5	1	4
6	2	3

EJEMPLO 3: Supongamos b = 4 bloques incompletos para investigar b = 6 tratamientos.

Bloques		**Tratamientos**	
1	1	2	3
2	1	3	6
3	2	3	5
4	4	5	6

Aunque *r* =2 (cada tratamiento sucede 2 veces en el diseño), pero no es un diseño BIB porque λ no es igual para todas las parejas de tratamientos. Los pares de tratamientos (1,5), (2,6) y (3,4) no ocurren en todos los bloques, el resto de parejas aparecen una sola vez en el mismo bloque.

2.4.2 Modelo estadístico

El modelo estadístico que se usa en este tipo de diseño es:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

En donde Y_{ij} es la *i*-ésima observación del *j*-ésimo bloque, μ es la media general, τ_i es el efecto del *i*-ésimo tratamiento, β_j es el efecto del *j*-ésimo bloque, y ε_{ij} es la componente del error aleatorio NID (0, σ^2).

2.4.3 Conformando la tabla ANOVA

La variación total en los datos se expresa mediante la suma total de cuadrados corregidos (o ajustados).

$$SS_T = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - (y_{\bullet\bullet}^2 / N)$$

La variabilidad total puede ser descompuesta

$$SS_T = SS_{Tratemientos\ ajustada} + SS_{Bloques} + SS_{\varepsilon}$$

En donde corrige la suma de cuadrados de tratamiento para separar los efectos de tratamiento y de bloque. Esta corrección es necesaria porque cada tratamiento ocurre en un conjunto diferente de *r* bloques. Por esta razón las diferencias entre los totales de tratamientos no corregidos, $y_1, y_2, ..., y_a$ también son afectadas por las diferencias entre los bloques.

La suma de cuadrados de los bloques es

$$SS_{Bloques} = (\sum_{j=1}^{b} y_{\bullet j}^2 / k) - (y_{\bullet\bullet}^2 / N)$$

en donde y_j es el total del *j*-ésimo bloque. La $SS_{Bloques}$ tiene *b*-1 grados de libertad. La suma de cuadrados de tratamiento corregida (o ajustada) es

$$SS_{Tratamientos\ ajustada} = k \sum_{i=1}^{a} Q_i^2 / \lambda a$$

En donde Q_i es el total corregido del *i*-ésimo tratamiento, el cual se calcula mediante

$$Q_i = y_{i\bullet} - (\sum_{j=1}^{b} n_{ij} \cdot y_{\bullet j}) / k, \qquad i = 1,2,....,a$$

con $n_{ij} = 1$ si el tratamiento *i* ocurre en el bloque *j*, $n_{ij} = 0$ en otro caso. Por lo tanto,

$(1/k) \cdot \sum_{j=1}^{b} n_{ij} \cdot y_{\bullet j}$ es el promedio de los totales de

los bloques en los que se aplica el tratamiento *i*. La suma de los totales de tratamiento corregidos siempre será 0. La $SS_{Tratamientos\ ajustada}$ tiene a -1 grados de libertad. La suma de cuadrados del error se calcula por diferencia

$$SS_{\varepsilon} = SS_T - SS_{Tratamientos\ ajustada} - SS_{Bloque}$$

Y tiene $N = a \cdot b \cdot c$ grados de libertad.

SSBloque

La estadística apropiada para probar la igualdad de los efectos de tratamiento es:

$$F = CM_{Tratamientos} / CM_{\varepsilon}$$

Análisis de varianza para el diseño DBI

Fuente de Variación	Suma de Cuadrados	G. libertad	Media Cuadrados	F
Tratamientos Corregidos	$SS_{Tratamientos\ ajustada}$	*a*- 1	$SS_{TTOS}/a-1$	CM_T/CM_E
Bloques	$SS_{Bloques}$	*b*- 1	$SS_{Bloques}/b-1$	
Error	SS_{ε}	N-*a*- b+ 1	$SS_{\varepsilon}/(N-a-b+1)$	
Total	SS_T	N- 1		

Fuente de Variación Suma de cuadrados G. libertad Media Cuadrados F

EJEMPLO: Supóngase que un ingeniero químico cree que el tiempo de reacción en un proceso químico es función del catalizador empleado. De hecho 4 catalizadores están siendo investigados. El procedimiento experimental consiste en seleccionar un lote de materia prima, cargar una planta piloto, aplicar cada catalizador a ensayos separados de dicha planta y observar el tiempo de reacción. Debido a que las variaciones en los lotes de materia prima pueden afectar el comportamiento del catalizador, el ingeniero decide controlar este factor por medio de bloques. Sin embargo, cada lote es lo suficientemente grande para permitir el ensayo de 3 catalizadores únicamente. Por lo tanto, es necesario utilizar un diseño aleatorizado por bloques incompletos. El diseño BIB, junto con las observaciones recopiladas aparecen en la siguiente tabla:

Tratamiento (Catalizador)	Bloque (Lote de Materia Prima)				
	1	**2**	**3**	**4**	$y_{i\bullet}$
1	73	74	-	71	218
2	-	75	67	72	214
3	73	75	68	-	216
4	75	-	72	75	222
$y_{\bullet j}$	221	224	207	218	870= $y_{\bullet\bullet}$

Considérense los datos de la Tabla para el experimento de los catalizadores. Éste es un diseño DBI con $a = 4$, $b = 4$, $k = 3$, $r = 3$, $\lambda = 2$ y N = 12.
A continuación vamos a realizar el análisis de estos datos.

La Suma Total de Cuadrados:

$$SS_T = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - (y_{\bullet\bullet}^2/12)$$
$$= 63.156 - (870)^2/12 = 81.00$$

La Suma de Cuadrados de Bloque es:

$$SS_{Bloques} = (\sum_{j=1}^{4} y_{\bullet j}^2 \big/ 3) - (y_{\bullet\bullet}^2 \big/ 12)$$

$$= \frac{(221)^2 + (207)^2 + (224)^2 + (218)^2}{3} - \frac{(870)^2}{12} = 55.00$$

Para calcular la suma de cuadrados de tratamiento corregida que tome en cuenta los bloques, primero hay que determinar los totales de tratamientos corregidos:

Q_1= (218) – (221+ 224 + 218)/ 3 = - 9/ 3
Q_2 = (214) – (207 + 224 + 218) /3 = - 7/3
Q_3 = (216) – (221 + 207+ 224) / 3 = - 4/3
Q_4 = (222) – (221 + 207 + 224) /3 = 20 /3

Se calcula ahora la suma de cuadrados de tratamiento corregida:

$$SS_{Tratamientos\ ajustada} = k \sum_{i=1}^{a} Q_i^2 \big/ \lambda a$$

$$= 3 \cdot \frac{(-\frac{9}{3})^2 + (-\frac{7}{3})^2 + (-\frac{4}{3})^2 + (\frac{20}{3})^2}{2 \cdot 4} = 22.75$$

La suma de cuadrados del error se calcula por diferencia:

$$SS_{\varepsilon} = SS_T - SS_{Tratamientos\ ajustada} - SS_{Bloque}$$

$$= 81.00 - 22.75 - 55.00 = 3.25$$

Vamos a escribir la Tabla para el Análisis de la Varianza:

Fuente de Variación	**Suma de Cuadrados**	**Grados de Libertad**	**Media de Cuadrados**	**F**
Tratamientos (corregidos)	22.75	3	7.58	11.66
Bloques	55.00	3	----	
Error	3.25	5	0.65	
Total	81.00	11		

Como $F > F_{0.05;3,5} = 5.41$, se concluye que el catalizador empleado tiene un efecto significativo sobre el tiempo de reacción.

2.4.4 Calculo de los efectos

Evaluación de los efectos del bloque:

En ocasiones, se desea evaluar los efectos de los bloques. Para lograrlo se requiere una descomposición alterna de SS_T, en otras palabras,

$$SS_T = SS_{Tratemientos\ ajustada} + SS_{Bloques} + SS_{\varepsilon}$$

$$Q_j` = y_{\bullet j} - \left(\sum_{i=1}^{a} n_{ij} \cdot y_{i\bullet}\right) \Big/ r, \qquad j = 1,2,....,b$$

$$SS_{Bloques\ ajustada} = r \sum_{j=1}^{b} (Q_i`)^2 \Big/ \lambda \cdot b$$

Como $a = b = 4$, el diseño balanceado por bloques incompletos es simétrico. Por lo tanto,

Q_1' = (221)- (218+ 216 + 222) / 3 = 7/3

Q_2' = (224) – (218 + 214 + 216) / 3 = 24 /3

Q_3' = (207)- (214 + 216+ 222)/ 3 = -31/3

Q_4' = (218) – (218 + 214 + 222)/3 = 0

$$SS_{Bloques\ ajustada} = 3 \cdot \frac{(\frac{7}{3})^2 + (\frac{24}{3})^2 + (-\frac{31}{3})^2 + 0^2}{2 \cdot 4} = 66.08$$

$$SS_{Tratamientos} = \frac{(218)^2 + (214)^2 + (216)^2 + (222)^2}{3} - \frac{(870)^2}{12} = 11.67$$

El resumen del Análisis de la Varianza para el diseño BIB simétrico, se muestra en la siguiente tabla:

Fuente de Variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Media de Cuadrados	F
Tratamientos (corregidos)	22.75	3	7.58	11.66
Tratamientos (no corregidos)	11.67	3	----	
Bloques	55.00	3	----	
Bloques (corregidos)	66.08	3	22.03	33.90
Error	3.25	5	0.65	
Total	81.00	11		

Hay que observar que la suma se cuadrados asociadas con cada media de cuadrados en la tabla anterior no es igual a la suma total de cuadrados, o sea que

$$SS_T \neq SS_{Tratemientos\ ajustada} + SS_{Bloques\ ajustada} + SS_{\varepsilon}$$

- **Diseños factoriales.**
- **Diseños 2^k.**

3.1 Diseños factoriales

En capítulos anteriores se estudiaron los diseños Completamente al Azar, en los cuales se analizó un solo factor de tratamientos. Un experimento factorial es aquel en el que se estudian simultáneamente varios factores de modo que los tratamientos se forman por todas las posibles combinaciones de los niveles de los factores. Un experimento factorial no constituye un nuevo diseño experimental, sino un diseño para la formación de los tratamientos. Los experimentos factoriales pueden ser conducidos bajo los lineamientos de cualquier diseño experimental tal como el DCA, DBCA o DCL.

Los experimentos factoriales son ampliamente utilizados y son de gran valor en el trabajo exploratorio cuando se sabe poco sobre los niveles óptimos de los factores o ni siquiera qué factores son importantes. Estos experimentos son útiles también en campos de estudio más complejos en los que se sabe que un factor no actúa independientemente sino en estrecha relación con otros factores.

Ahora trataremos los experimentos factoriales con dos factores conducidos bajo los lineamientos de un DCA y DBCA.

3.1.1 Ventajas, Desventajas y Usos

Ventajas:

- Permite obtener más información que en un experimento de un solo factor, ya que se estudian los efectos principales, los efectos simples, los efectos cruzados y de interacción entre los factores.
- Todas las unidades intervienen en la estimación de los efectos principales y de interacción, por lo que el número de repeticiones es elevado para estos casos.
- El número de grados de libertad para el error experimental es alto, comparándolo con los grados de libertad de los experimentos simples de los mismos factores, lo que contribuye a disminuir la variancia del error experimental, aumentando por este motivo la precisión del experimento.

Desventajas:

- Se requiere un mayor número de unidades experimentales que en los experimentos con un solo factor.
- Dado que todos los niveles de un factor se combinan con todos los niveles de los otros, por requerimientos del análisis estadístico, se tendrá que algunas combinaciones que no son de interés para el investigador, serán también incluidas en el experimento.
- El análisis estadístico y la interpretación de los resultados son más complicados que en los experimentos con un solo factor, y la dificultad aumenta considerablemente conforme más factores son incluidos.

Usos:

Los diseños factoriales son apropiados:

- En el trabajo de exploración donde el objetivo es determinar rápidamente los efectos de cada uno de ciertos números de factores dentro de un intervalo.
- En investigaciones de las interacciones entre los efectos de varios factores.
- En experimentos diseñados para poder llegar a recomendaciones que deben aplicarse a una gran variedad de condiciones.

(Sigarroa, A. 1985)

3.1.2 Notación y Definiciones

En este tema abordaremos la notación y algunas definiciones necesarias para la comprensión de este tipo de diseño.

3.1.2.1 Factor

Los factores son designados por letras mayúsculas. Por ejemplo en un experimento en el que se evalúan 3 cantidades de semilla con 4 dosis de nitrógeno por parcela y 2 variedades de maíz destinado a chala, el factor cantidad de semilla se puede denotar por A, el factor dosis de nitrógeno por B y el factor de maíz por C.

3.1.2.2 Niveles de un Factor

Los niveles de un factor son denotados por letras minúsculas con subíndices. Por ejemplo, las 3 cantidades de semilla podrían ser denotadas por a_1, a_2 y a_3, las 4 dosis de nitrógeno por b_1, b_2, b_3, b_4, y las 2 variedades de maíz por c_1, c_2.

Una combinación de letras minúsculas con sus respectivos subíndices es utilizada para denotar una combinación de los niveles de los factores. Por ejemplo la combinación $a_2b_2c_1$ denotará el tratamiento conformado por la aplicación de la cantidad a_2 de semilla con la dosis b_2 de nitrógeno y la variedad c_1 de maíz.

3.1.2.3 Tipos de Factores

Dependiendo de la naturaleza de los niveles de los factores, estos pueden ser cualitativos o cuantitativos. En el ejemplo, los factores *A* y *B* son cuantitativos y el factor C cualitativo. En el caso de factores cuantitativos estos pueden ser igualmente espaciados o no. Así por ejemplo, para el factor B, niveles de 0, 10, 20, 30 Kg/parcela y de 10, 20, 40, y 80 Kg/parcela constituirían niveles igualmente espaciados y no igualmente espaciados respectivamente.

Adicionalmente, los factores pueden ser fijos o al azar, dependiendo de la forma en que son seleccionados sus niveles. Un experimento factorial con todos sus factores fijos corresponderá a un modelo I o de efectos fijos, un experimento factorial con todos sus factores aleatorios corresponderá a un modelo II o de efectos aleatorios y un experimento factorial con algunos factores fijos y otros aleatorios corresponderá a un modelo III o de efectos mixtos. En este caso se considerarán que todos los factores son fijos.

3.1.2.4 Tipos de Experimentos Factoriales

Un experimento factorial queda definido por el número de factores y niveles de cada factor.

Un experimento factorial puede ser denotado utilizando las letras correspondientes a los factores antecedidas por el número de niveles correspondiente a cada uno. Por ejemplo, el experimento con 3 niveles del factor *A*, 4 del factor *B* y 2 del factor *C* puede ser denotado por $3A4B2C$ o simplemente 3x4x2.

3.1.2.5 Efectos en los Experimentos Factoriales

<u>Efecto Principal:</u> Es el efecto de un factor en promedio sobre los niveles de los otros factores.

<u>Efectos Simple:</u> Es el efecto de un factor, en un nivel de los demás factores.

<u>Efectos Interacción:</u> Está dado por la variación que tiene un efecto simple de un factor al pasar de un nivel a otro de otro factor.

<u>Efectos Cruzado:</u> Está dado por las combinaciones cruzadas de dos factores.

3.1.3 Presentación de los datos

A continuación mostraremos la forma en que organizaremos los datos dentro de la tabla, ella nos permitirá expresar de una forma estructural los datos.

F A C T O R B

		B_1	**B_2**	**…**	**B_b**
F A C T O R A	**A_1**	Y_{111}	Y_{121}	**…**	Y_{1b1}
		…	…	**…**	…
		Y_{11r}	Y_{12r}	**…**	Y_{1br}
	A_2	Y_{211}	Y_{221}	**…**	Y_{2b1}
		…	…	**…**	…
		Y_{21r}	Y_{22r}	**…**	Y_{2br}
				…	
	A_h	Y_{h11}	Y_{h21}	**…**	Y_{hb1}
		…	…	**…**	…
		Y_{h1r}	Y_{h2r}	**…**	Y_{hbr}

Ejemplo 1: A continuación se presenta datos para un experimento factorial 2x2.

Niveles del Factor *A*	**a_1**		**a_2**	
Niveles del Factor *B*	b_1	b_2	b_1	b_2
Medias	54	38	45	56

Efectos Simples:

- De A en b_1: ES($A(b_1)$)= $a_1b_1 - a_2b_1$= 54- 45= 9
- De A en b_2: ES($A(b_2)$)= $a_1b_2 - a_2b_2$= 38- 56= -18
- De B en a_1: ES($B(a_1)$)= $a_1b_1 - a_1b_2$= 54- 38= 16
- De B en a_2: ES($B(a_2)$)= $a_2b_1 - a_2b_2$= 45- 56= -11

Efectos Principales:

- De A: EP(A)= $\frac{1}{2}\left[ES(A(b_1) + ES(A(b_2))\right] = \frac{9-18}{2} = -4.5$
- De B: EP(B)= $\frac{1}{2}\left[ES(B(a_1) + ES(B(a_2))\right] = \frac{16-11}{2} = 2.5$

Efecto de interacción:

- De AB: EI(AB)= $\frac{1}{2\times 2}\left[ES(A(b_1) + ES(A(b_2))\right] = \frac{9+18}{2} = 6.75$
- EP(AB)= $\frac{1}{2\times 2}\left[ES(B(a_1) + ES(B(a_2))\right] = \frac{16+11}{2} = 6.75$

Efectos cruzados:

- entre a_1b_1 y a_2b_2: EC(a_1b_1 - a_2b_2)= a_1b_1- a_2b_2= 54- 56= -2
- entre a_1b_2 y a_2b_1: EC(a_1b_2 - a_2b_1)= a_1b_2- a_2b_1= 38- 45= -7

3.1.4 Experimentos Factorial pxq

3.1.4.1 Modelo Aditivo Lineal

En un DCA, el modelo aditivo lineal está dado por:

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij} \qquad i = 1,.....,k \qquad j = 1,....,n_i$$

Ahora, dado que los tratamientos son generados por las combinaciones entre los niveles de dos factores, el efecto de los tratamientos se descompone en el efecto del factor *A*, el efecto del factor *B* y el efecto de la interacción entre los dos factores. Así, el modelo aditivo lineal para un factorial *p*x*q* en DCA será:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + I_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

donde:

Y_{ijk}: es el valor o rendimiento observado con el *i*-ésimo nivel del factor A, *j*-ésimo factor B, *k*-ésima representación de la celda ($_{ij}$).
μ: es el efecto de la media general.
α_i: es el efecto del *i*-ésimo nivel del factor A.
β: es el efecto del *j*-ésimo nivel del factor B.
I_{ij}: es el efecto del interacción del *i*-ésimo nivel del factor *A* con el *j*-ésimo nivel del factor *B*.
ε_{ijk}: es el efecto del error experimental en el i-ésimo nivel del factor A, j-ésimo factor B, k-ésima representación de la celda ($_{ij}$). $\varepsilon_{ijk} \sim N(0; \sigma^2)$.
h: es el número de niveles de factores A.
b: es el número de niveles de factores B.

En el caso de un experimento factorial en DBCA, el modelo aditivo lineal es:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + I_{ij} + \gamma_k + \varepsilon_{ijk}$$

donde:
γ_k: es el efecto del k-ésimo bloque.

Los supuestos del modelo serán los mismos que para el DCA o DBCA con un solo factor vistos anteriormente. Los cálculos y procedimientos presentados de aquí en adelante corresponderán al caso del experimento factorial *p*x*q* en DBCA. El caso del experimento factorial en DCA es similar al del DBCA.

Ejemplo 2 (Experimento Factorial en DBCA):

Se realizó un experimento con un arreglo factorial 2*A*3*B* en DBCA en 4 campos de cultivo, para evaluar el efecto en el rendimiento de maíz obtenido con dos tipos de abono (a_1 y a_2) y tres dosis (b_1=20, b_2= 30, b_3= 40 kg/ha). Los resultados obtenidos (en TM/ha) se presentan a continuación:

Campos	a_1			a_2		
	b_1	**b_2**	**b_3**	**b_1**	**b_2**	**b_3**
1	1.9	1.8	2.7	1.8	2.9	3.0
2	2.3	2.1	2.4	2.2	2.7	3.2
3	2.0	2.4	2.9	2.0	3.2	2.9
4	2.1	2.9	2.8	2.4	3.5	3.4
Total	8.3	9.2	10.8	8.4	12.3	12.5

El modelo aditivo lineal para este ejemplo será:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + I_{ij} + \gamma_k + \varepsilon_{ijk}$$

donde:

Y_{ijk}: es el rendimiento de maíz en Tm/Ha obtenido con el *i*-ésimo nivel de abono, *j*-ésima dosis, *k*-ésimo campo de cultivo.

μ: es el efecto de la media general.

α_i: es el efecto del *i*-ésimo tipo de abono.

β: es el efecto del *j*-ésima dosis de abono.

I_{ij}: es el efecto del interacción del *i*-ésimo tipo de abono, *j*-ésima dosis.

γ_k: es el efecto del *k*-ésimo campo de cultivo.

ε_{ijk}: es el efecto del error experimental en el i-ésimo nivel del factor A, j-ésimo factor B, k-ésima representación de la celda ($_{ij}$). $\varepsilon_{ijk} \sim N(0; \sigma^2)$.

h= 2: es el número de niveles de factores A.

b= 3: es el número de niveles de factores B.

r= 4 es el número de bloques.

3.1.4.2 Estimación de los Efectos.

Los efectos del modelo, μ, α_i, β_j, I_{ij}, γ_k son estimados de modo que se minimice la siguiente expresión (Método de los Mínimos Cuadrados):

$$Q=\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=i}^{r}\varepsilon_{ijk}^2=\sum\sum\sum(Y_{ijk}-\mu-\alpha_i-\beta_j-I_{ij}-\gamma_k)^2$$

teniendo en cuenta las siguientes restricciones:

$$\sum_{i=1}^{h}\alpha_i=0 \qquad \sum_{j=1}^{b}\beta_j=0 \qquad \sum_{i=1}^{h}I_{ij}=0 \qquad \sum_{j=1}^{b}I_{ij}=0 \qquad \sum_{k=1}^{r}\gamma_k=0$$

La aplicación de este método de los siguientes resultados para la estimación de los parámetros:

$$\hat{\mu}=\overline{Y}_{\bullet\bullet\bullet} \qquad \hat{\alpha}_i=\overline{Y}_{i\bullet\bullet}-\overline{Y}_{\bullet\bullet\bullet} \qquad \hat{\beta}_j=\overline{Y}_{\bullet j\bullet}-\overline{Y}_{\bullet\bullet\bullet}$$

$$\hat{I}_{ij}=\overline{Y}_{ij\bullet}-\overline{Y}_{i\bullet\bullet}-\overline{Y}_{\bullet j\bullet}+\overline{Y}_{\bullet\bullet\bullet} \qquad \gamma_k=\overline{Y}_{\bullet\bullet k}-\overline{Y}_{\bullet\bullet\bullet} \qquad \hat{\varepsilon}_{ijk}=Y_{ijk}-\overline{Y}_{\bullet\bullet k}+\overline{Y}_{\bullet\bullet\bullet}$$

Ejemplo 2 (Cont.): Con los datos del ejemplo anterior, la media estimada es:

$$\hat{\mu}=\overline{Y}_{\bullet\bullet\bullet}=2.5625$$

Los efectos estimados de los niveles del factor *A*:

$$\hat{\alpha}_1=\overline{Y}_{1\bullet\bullet}-\overline{Y}_{\bullet\bullet\bullet}=2.3583-2.5625=-0.2042$$
$$\hat{\alpha}_2=\overline{Y}_{2\bullet\bullet}-\overline{Y}_{\bullet\bullet\bullet}=2.7667-2.5625=0.2042$$

Los efectos estimados de los niveles del factor *B*:

$$\hat{\beta}_1=\overline{Y}_{\bullet 1\bullet}-\overline{Y}_{\bullet\bullet\bullet}=2.0875-2.5625=-0.475$$
$$\hat{\beta}_2=\overline{Y}_{\bullet 2\bullet}-\overline{Y}_{\bullet\bullet\bullet}=2.6875-2.5625=0.125$$
$$\hat{\beta}_3=\overline{Y}_{\bullet 3\bullet}-\overline{Y}_{\bullet\bullet\bullet}=2.9125-2.5625=0.35$$

El efecto estimado de la interacción entre el nivel 1 del factor *A* y el nivel 2 del factor *B*:

$$\begin{aligned}\hat{I}_{12}&=\overline{Y}_{12\bullet}-\overline{Y}_{1\bullet\bullet}-\overline{Y}_{\bullet 2\bullet}+\overline{Y}_{\bullet\bullet\bullet}\\&=2.3-2.3583-2.6875+2.5625\\&=-0.1833\end{aligned}$$

El efecto estimado del error $\hat{\varepsilon}_{234}$:

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}_{234}&=Y_{234}-\overline{Y}_{23\bullet}-\overline{Y}_{\bullet\bullet 4}+\overline{Y}_{\bullet\bullet\bullet}\\&=3.4-3.125-2.85+2.5625\\&=-0.0125\end{aligned}$$

3.1.5 Análisis de Varianza

En este modelo la variabilidad total se descompone de la siguiente manera:

$$Variabilidad_{Total} = Var_{Trat} + Var_{Bloq\ Fila} + Var_{Bloq\ Col} + Var_{Error}$$

donde a su vez, la variabilidad corresponde a los tratamientos que se descomponen en:

$$\text{Variabilidad (Trat)} = \text{Var (Factor A)} + \text{Var (Factor B)} + \text{Var (I = AxB)}$$

La variabilidad total es cuantificada por la suma de cuadrados total:

$$SC_{Total} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}(Y_{ijk} - \bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet})^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}Y_{ijk}^2 - FC$$

donde $FC = \frac{Y_{\bullet\bullet\bullet}^2}{kbr}$. El cual significa factor de correlación.

La variabilidad correspondiente a los tratamientos, la cual corresponde al efecto combinado de los factores A y B, se calcula por:

$$SC_I = SC(A) + SC(B) + SC(I) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{b}\frac{Y_{ij\bullet}^2}{r} - FC$$

Las sumas de cuadrados de los factores A y B, para la interacción, bloques y error se calculas de la siguiente manera:

$$SC(A) = \sum_{i=1}^{k}\frac{Y_{i\bullet\bullet}^2}{br} - FC \qquad SC(B) = \sum_{j=1}^{b}\frac{Y_{\bullet j\bullet}^2}{kr} - FC$$

$$\text{SC(I)= SC(I)- SC(A)- SC(B)} \qquad SC_{Bloques} = \sum_{k=1}^{r}\frac{Y_{\bullet\bullet k}^2}{kb} - FC$$

$$SC_{Error} = SC_{Total} - SC_I - SC_{Bloq}$$

Estas Fuentes de variación son comparadas mediante el siguiente procedimiento de prueba de hipótesis a partir del cuadro de análisis de varianza (Cuadro ANOVA):

Fuente de Variación	Grados de Libertad (gl)	Sumas de Cuadrados (SC)	Cuadrados Medios (CM)	F
Bloques	r-1	$SC_{Bloques}$	$\frac{SC_{Bloques}}{gl_{Bloques}}$	
A	k-1	SC_A	$\frac{SC_A}{gl_A}$	$\frac{CM_A}{CM_{Error}}$
B	b-1	SC_B	$\frac{SC_B}{gl_B}$	$\frac{CM_B}{CM_{Error}}$
I= (AxB)	(k-1)(b- 1)	SC_{AB}	$\frac{SC_I}{gl_I}$	$\frac{CM_I}{CM_{Error}}$
Error Experimental	(kb- 1)(r- 1)	SC_{Error}		
Total	kbr- 1	SC_{Total}		

Hipótesis:

Para el Modelo I (Efectos fijos) las hipótesis son, en términos de los efectos de los niveles de los factores las siguientes:

Para el efecto principal de *A*:

H_o: $\alpha_i = 0 \ \forall i$

H_1: $\alpha_i \neq 0$ para al menaos algún *i*.

Para el efecto principal de *B*:

H_o: $\beta_i = 0 \ \forall j$

H_1: $\beta_j \neq 0$ para al menos algún *j*.

Para el efecto principal de *I*:

H_o: $I_{ij} = 0 \ \forall i,j$

H_1: $I_{ij} \neq 0$ para al menos algún i,j.

Para el Modelo II (Efectos aleatorios) las hipótesis serán planteadas en términos de la varianza de los niveles de los factores:

Para el efecto principal de *A*:

H_o: $\sigma_\alpha^2 = 0$

H_1: $\sigma_\alpha^2 > 0$

Para el efecto principal de *B*:

$$H_o: \sigma^2_{\beta} = 0$$

$$H_{1:} \sigma^2_{\beta} > 0$$

Para el efecto principal de *I*:

$$H_o: \sigma^2_{\alpha\beta} = 0$$

$$H_{1:} \sigma^2_{\alpha\beta} > 0$$

<u>Estadístico de Prueba:</u>

Para el efecto principal de *A*: $$F = \frac{\mathrm{CM}_{\mathrm{A}}}{\mathrm{CM}_{\mathrm{Error}}} \sim F_{(gl(A),gl(Error))}$$

Para el efecto principal de *B*: $$F = \frac{\mathrm{CM}_{\mathrm{B}}}{\mathrm{CM}_{\mathrm{Error}}} \sim F_{(gl(B),gl(Error))}$$

Para el efecto principal de *I*: $$F = \frac{\mathrm{CM}_{\mathrm{I}}}{\mathrm{CM}_{\mathrm{Error}}} \sim F_{(gl(I),gl(Error))}$$

<u>Regla de Decisión:</u>
La hipótesis nula se rechaza con un nivel de significación de α si el *F* resulta mayor que el valor de la tabla $F_{(1-\sigma)}$ con los grados de libertad correspondientes a cada caso.

La hipótesis nula a evaluar es la correspondiente a la interacción. Que no exista interacción significa que el efecto de un factor es el mismo en cualquiera de los niveles del otro, por lo que las conclusiones para los factores se obtendrán a partir del análisis de sus efectos principales. Si en cambio existe interacción, el efecto de un factor dependerá de los niveles del otro y el análisis de los efectos principales no será apropiado. En este caso se deberá efectuar un análisis de los efectos simples de los factores.

Ejemplo 2 (Cont.): A continuación se presenta el análisis de varianza y las prueba de hipótesis correspondiente para el ejemplo tratado en esta sección:

$$SC_{Total} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r} Y^2_{ijk} - FC$$

$$= (1.9^2 + 2.3^2 + ... + 3.4^2) - \frac{61.5^2}{(2)(3)(4)} = 6.0763$$

$$SC(A)=\sum_{i=1}^{k}\frac{Y_{i\bullet\bullet}^{2}}{br}-FC$$

$$=\frac{28.3^2}{(3)(4)}+\frac{33.2^2}{(3)(4)}-\frac{61.5^2}{(2)(3)(4)}=1.0004$$

$$SC(B)=\sum_{j=1}^{b}\frac{Y_{\bullet j\bullet}^{2}}{kr}-FC$$

$$=\frac{16.7^2}{(2)(4)}+\frac{21.5^2}{(2)(4)}+\frac{23.3^2}{(2)(4)}-\frac{61.5^2}{(2)(3)(4)}=2.91$$

$$SC_I=SC_I-SC_A-SC_B$$

= 4.4738- 1.0004- 2.91= 0.5633

$$SC_{Bloques}=\sum_{k=1}^{r}\frac{Y_{\bullet\bullet k}^{2}}{kb}-FC$$

$$=\frac{14.1^2}{(2)(3)}+\frac{14.9^2}{(2)(3)}+\frac{15.4^2}{(2)(3)}+\frac{17.1^2}{(2)(3)}-\frac{61.5^2}{(2)(3)(4)}=0.8046$$

$$SC_E=SC_{Total}-SC_I-SC_{Bloq}$$

= 6.0763- 4.4738- 0.8046
= 0.7979

<u>Cuadro ANOVA:</u>

Fuente de Variación	Grados de Libertad (gl)	Sumas de Cuadrados (SC)	Cuadrados Medios (CM)	F
Bloques	3	0.8046	0.2682	
A	1	1.0004	1.0004	18.81
B	2	2.9100	1.4550	27.35
I= (AxB)	2	0.5633	0.2817	5.30
Error Exp.	15	0.7979	0.0532	
Total	23	6.0763		

Para un modelo de efectos fijos las hipótesis serán:

Para el efecto principal de *A*: H_o: $\alpha_i = 0 \ \forall\, i$
H_1: $\alpha_i \neq 0$ para al menaos algún *i*.

Para el efecto principal de *B*:

H$_o$: $\beta_i = 0 \;\forall j$

H$_1$: $\beta_j \neq 0$ para al menos algún *j*.

Para el efecto principal de *I*:

H$_o$: $I_{ij} = 0 \;\forall i,j$

H$_1$: $I_{ij} \neq 0$ para al menos algún i,j.

Para la interacción el estadístico de prueba es $F = 5.30$ y el valor de la tabla, con un nivel de significación de 5% es $F_{(0.95,2,15)} = 3.68$. Dado que el estadístico de prueba resulta mayor que el valor de la tabla se rechaza H_0 y se concluye que hay suficiente evidencia estadística para aceptar la existencia de interacción entre el tipo de abono y la dosis; por lo tanto, será necesario analizar los efectos simples de los factores en vez de sus efectos principales.

El coeficiente de variación para este experimento es:

$$cv = \frac{\sqrt{CME}}{\overline{Y}_{\bullet\bullet\bullet}} = \frac{\sqrt{0.0532}}{2.5625} = 9\%\,.$$

3.1.6 Análisis de Efectos Simples

Este análisis debe ser efectuado en el caso que la interacción resulte significativa y consiste en evaluar a cada factor en cada uno de los niveles del otro. Las hipótesis a contrastar en este caso, asumiendo un Modelo I (Efectos fijos) son las siguientes:

1) Para el efecto simple de *A* en el *j*-ésimo nivel de *B*:
   H$_o$: $\mu_{1j\bullet} = \mu_{2j\bullet} = ... = \mu_{kj\bullet} \;\forall j$
   H$_1$: Al menos un $\mu_{ij\bullet}$ es diferente.
2) Para el efecto simple de *B* en el *i*-ésimo nivel de *A*:
   H$_o$: $\mu_{i1\bullet} = \mu_{i2\bullet} = ... = \mu_{ib\bullet} \;\forall i$
   H$_1$: Al menos un $\mu_{ij\bullet}$ es diferente.

Los grados de libertad para cada efecto simple serán iguales a los grados de libertad del correspondiente efecto principal y las sumas de cuadrados son calculadas de acuerdo con las siguientes fórmulas:

1) Para el efecto simple de *A* en el *j*-ésimo nivel de *B*:

$$SC(Ab_j) = \sum_{i=1}^{k} \frac{Y_{ij\bullet}^2}{r} - \frac{Y_{\bullet j\bullet}^2}{kr}$$

2) Para el efecto simple de *B* en el *i*-ésimo nivel de *A*:

$$SC(Ba_j) = \sum_{j=1}^{b} \frac{Y_{ij\bullet}^2}{r} - \frac{Y_{i\bullet\bullet}^2}{br}$$

Para cada efecto simple el estadístico de prueba F se calcula dividiendo el cuadrado medio del efecto simple entre el cuadrado medio del error. El efecto será significativo con un nivel de significación α si es que el F es mayor que el valor de F de la tabla con los grados de libertad del efecto y del error.

Ejemplo 2 (Cont.): Análisis de los efectos simples:

$$SC(Ab_1) = \sum_{i=1}^{k} \frac{Y_{i1\bullet}^2}{r} - \frac{Y_{\bullet 1\bullet}^2}{kr} = \frac{8.3^2}{4} + \frac{8.4^2}{4} - \frac{16.7^2}{(2)(4)} = 0.00125$$

$$SC(Ab_2) = \sum_{i=1}^{k} \frac{Y_{i2\bullet}^2}{r} - \frac{Y_{\bullet 2\bullet}^2}{kr} = \frac{9.2^2}{4} + \frac{12.3^2}{4} - \frac{21.5^2}{(2)(4)} = 1.20125$$

$$SC(Ab_3) = \sum_{i=1}^{k} \frac{Y_{i3\bullet}^2}{r} - \frac{Y_{\bullet 3\bullet}^2}{kr} = \frac{10.8^2}{4} + \frac{12.5^2}{4} - \frac{23.3^2}{(2)(4)} = 0.36125$$

$$SC(Ba_1) = \sum_{j=1}^{b} \frac{Y_{1j\bullet}^2}{k} - \frac{Y_{1\bullet\bullet}^2}{kb} = \frac{8.3^2}{4} + \frac{9.2^2}{4} + \frac{10.8^2}{4} - \frac{28.3^2}{(3)(4)} = 0.80167$$

$$SC(Ba_2) = \sum_{j=1}^{b} \frac{Y_{2j\bullet}^2}{k} - \frac{Y_{2\bullet\bullet}^2}{kb} = \frac{8.4^2}{4} + \frac{12.3^2}{4} + \frac{12.5^2}{4} - \frac{33.2^2}{(3)(4)} = 2.67167$$

Cuadro **ANOVA**:

Fuente de Variación	Grados de Libertad (gl)	Sumas de Cuadrados (SC)	Cuadrados Medios (CM)	F
Ab_1	1	0.00125	0.00125	0.02 ns
Ab_2	1	1.20125	1.20125	22.58 *
Ab_3	1	0.36125	0.36125	6.79 *
Ba_1	2	0.80167	0.40083	7.54 *
Ba_2	2	2.67167	1.33583	25.11 *
Error Exp.	15	0.79792	0.05319	
Total	23	6.07625		

Para un modelo de efectos fijos las hipótesis serán:

Para A en b_1:

H$_o$: $\mu_{11\bullet} = \mu_{21\bullet}$

H$_1$: $\mu_{11\bullet} \neq \mu_{21\bullet}$

Para A en b_2:

H$_o$: $\mu_{12\bullet} = \mu_{22\bullet}$

H$_1$: $\mu_{12\bullet} \neq \mu_{22\bullet}$

Para A en b_3:

H$_o$: $\mu_{13\bullet} = \mu_{23\bullet}$

H$_1$: $\mu_{13\bullet} \neq \mu_{23\bullet}$

Para B en a_1:

H$_o$: $\mu_{11\bullet} = \mu_{12\bullet} = \mu_{13\bullet}$

H$_1$: Al menos un $\mu_{1j\bullet}$

Para B en a_2:

H$_o$: $\mu_{21\bullet} = \mu_{22\bullet} = \mu_{23\bullet}$

H$_1$: Al menos un $\mu_{2j\bullet}$

Los efectos simples del factor A son comparados con el valor de la tabla $F_{(0.95,1,15)} = 4.54$ y los efectos simples del factor B con $F_{(0.95,2,15)} = 3.86$. No te que solo el efecto simple A en b_1 resulta no significativo. Las conclusiones en este experimento serían las siguientes:

- No existe suficiente evidencia estadística para aceptar que con los dos tipos de abono se obtengan mejores resultados diferentes en el rendimiento de maíz cuando se aplican en l \a dosis b_1(20 kg/Ha).
- Existe suficiente evidencia estadística para aceptar que con los dos tipos de abono se obtienen resultados diferentes en el rendimiento de maíz cuando se aplican en las dosis b_2(30 kg/ha) y b_3(40 kg/ha).
- Existe suficiente evidencia estadística para aceptar que con al menos una de las dosis se obtienen resultados diferentes en el rendimiento de maíz tanto en el abono a_1 como en el a_1.

3.1.7 Pruebas de comparación de Medias

3.1.7.1 Prueba de comparación de medias de efectos principales

Para comparar las medias de los niveles i y j de un factor sobre todos los niveles del otro utilicemos las siguientes fórmulas para las desviaciones estándar:

Prueba	Factor A	Factor B
T y DLS	$S_d = \sqrt{\frac{2CME}{br}}$	$S_d = \sqrt{\frac{2CME}{kr}}$
Tukey	$S_d = \sqrt{\frac{2CME}{br}}$	$S_d = \sqrt{\frac{2CME}{kr}}$

3.1.7.2 Prueba de comparación de medias de efectos simples

Para comparar las medias de los niveles *i* y *j* de un factor sobre todos los niveles del otro utilicemos las siguientes fórmulas para las desviaciones estándar:

Prueba	Factor A en b_j	Factor B en a_i
T y DLS	$S_d = \sqrt{\frac{2CME}{r}}$	$S_d = \sqrt{\frac{2CME}{r}}$
Tukey	$S_d = \sqrt{\frac{2CME}{r}}$	$S_d = \sqrt{\frac{2CME}{r}}$

3.1.8 Ejercicios

1) En la tabla que se presenta a continuación se representan los tiempos de supervivencia en horas de animales asignados aleatoriamente a tres venenos (v_1, v_2, v_3) y tres antídotos (a_1, a_2, a_3). El experimento fue parte de una investigación para combatir los efectos de ciertos agentes tóxicos y el diseño que fue un DCA.

Rep.	v_1			v_2			v_3		
	a_1	a_2	a_3	a_1	a_2	a_3	a_1	a_2	a_3
1	4.5	6.3	3.5	4.1	4.0	3.6	4.2	4.8	3.9
2	4.4	6.9	3.5	3.9	3.5	3.1	4.3	4.3	3.6
3	4.2	6.4	4.0	3.6	4.0	3.5	3.8	3.9	4.0
4	3.9	6.5	3.2	4.1	4.1	3.9	4.7	4.2	4.1

a) Presente el modelo aditivo lineal e interprete cada uno de sus componentes en términos del enunciado.
b) Efectúe el análisis de la varianza. Analice los efectos principales o simples según corresponda.

c) Efectué la prueba de Tukey para el evaluar si existen diferencias entre los venenos cuando se aplica el antídoto a_2.
d) Se cree que el antídoto a_2 es más efectivo que el a_1 para contrarrestar el veneno v_1. Efectúe la prueba correspondiente.

2) Se realizó un experimento para evaluar es efecto del estrógeno en la ganancia de peso en ovejas. Las ovejas fueron bloqueadas por corral con seis tratamientos por el bloque. Los tratamientos resultaron de las combinaciones del sexo de las ovejas (s_1, s_2) y el nivel de estrógeno (d_1, d_2, d_3). La dosis d_1 fue un testigo (sin la aplicación de estrógeno) y d_3 la dosis mayor. Los resultados en libras se representan en la siguiente tabla.

Bloque	**s_1 (Machos)**			**s_2 (Hembras)**		
	d_1	**d_2**	**d_3**	**d_1**	**d_2**	**d_3**
1	45	57	57	40	49	52
2	50	53	55	45	52	56
3	42	63	65	43	53	55
4	46	60	61	39	50	55

a) Presente el modelo aditivo lineal e interprete cada uno de sus componentes en términos del enunciado.
b) Efectúe el análisis de la varianza. Analice los efectos principales o simples según corresponda.
c) Efectué la prueba de Tukey para el evaluar si existen diferencias entre las dosis.

3) Una compañía grande de productos alimenticios realizó un experimento para investigar el efecto de dos factores, el material de la envoltura de paquete y el color de la envoltura, sobre las ventas de uno de sus productos. Se utilizaron dos tipos de material (a_1= Papel encerado y a_2= Plástico), entres colores (b_1= Amarillo, b_2= Rojo y b_3= Verde). Se seleccionaron 4 supermercados para el experimento y después de estar el producto en el mercado por una semana se registró la venta total (en miles de pesos) para cada una de las 6 combinaciones. Los resultados se muestran a continuación:

Supermercado	**Papel encerado**			**Plástico**		
	Amarillo	**Rojo**	**Verde**	**Amarillo**	**Rojo**	**Verde**
1	2.6	2.7	2.2	2.9	3.0	2.4
2	1.8	2.3	1.5	1.9	2.5	1.8
3	2.4	2.2	1.8	2.4	2.8	2.1
4	2.6	2.9	2.5	2.8	3.2	2.7

a) Presente el modelo aditivo lineal e interprete cada uno de sus componentes en términos del enunciado.

b) Efectúe el análisis de la varianza. Analice los efectos principales o simples según corresponda.
c) Efectué la prueba de Tukey donde sea necesario.

4) Se realizó un experimento para evaluar el efecto de tres densidades de siembra (d_1, d_2, d_3) con tres variedades de frijol (v_1, v_2, v_3), el rendimiento de frijol en kg/parcela. El diseño utilizado para el experimento DBCA.

Bloque	v_1			v_2			v_3		
	d_1	d_2	d_3	d_1	d_2	d_3	d_1	d_2	d_3
I	10.05	9.66	9.14	10.71	10.35	11.42	9.03	10.46	13
II	8.71	8.45	9.02	9.45	10.24	12.91	8.54	10.5	10.1
III	9.9	8.05	8.01	9.25	11.1	11.5	7.24	8.85	11.57

a) Presente el modelo aditivo lineal e interprete cada uno de sus componentes en términos del enunciado.
b) Efectúe el análisis de la varianza. Analice los efectos principales o simples según corresponda.
c) Efectué la prueba de Tukey donde sea necesario.
d) A partir de los resultados obtenidos en las preguntas anteriores, presente sus recomendaciones.

5) En un experimento de algodón se analizaron 3 distanciamientos entre matas y dos dosis de nitrógeno, en 4 campos de cultivo (bloques).

A: Distancia entre matas (25, 37.5, 50 cm)
B: Abonamiento nitrogenado (50 y 100 kg de N por ha)
Y: Rendimiento por parcela (en libras).

Campo	a1		a_2		a_3	
	b_1	b_2	b_1	b_2	b_1	b_2
1	9.56	8.26	9.18	8.90	8.26	9.82
2	9.32	8.50	8.86	8.50	8.64	9.84
3	8.96	8.42	8.22	9.82	8.10	9.7
4	8.78	8.26	8.70	9.78	8.72	10.04

a) Presente el modelo aditivo lineal e interprete cada uno de sus componentes en términos del enunciado.
b) Efectúe el análisis de la varianza. Analice los efectos principales o simples según corresponda.
c) Mediante la prueba DLS compare a_1b_2 con a_3b_2.

6) Con la finalidad de estudiar el efecto de tres niveles de Nitrógeno (a_1, a_2, a_3) y dos niveles de fósforo (b_1, b_2), en el cultivo de una variedad de papa se realizó un experimento con un arreglo factorial conducido en el DCA con 4 repeticiones. Los resultados obtenidos en kg/parcela son los siguientes:

Repetición	**a_1**		**a_2**		**a_3**	
	b_1	**b_2**	**b_1**	**b_2**	**b_1**	**b_2**
1	31	43	42	45	48	51
2	32	41	38	46	50	47
3	34	43	36	44	48	50
4	35	39	41	43	51	52

a) Presente el modelo aditivo lineal e interprete cada uno de sus componentes en términos del enunciado.
b) Efectúe el análisis de la varianza. Analice los efectos principales o simples según corresponda.
c) Efectué la prueba de Tukey donde sea necesario.

3.2 Diseños 2^k

3.2.1 Diseño bifactorial sin replicas

Se puede considerar un diseño en el que se presentas dos factores y sólo se realiza una observación por cada tratamiento.

El modelo es:

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ij}$$

$$i = 1, \ldots, a \qquad j = 1, \ldots, b$$

donde:

μ es el efecto medio global.
α_i es el efecto incremental sobre la media causado por el nivel i del factor *A*.
βj el efecto incremental sobre la media causado por el nivel j del factor B.
(αβ)ij el efecto incremental sobre la media causado por la interacción del nivel i-ésimo del factor *A* y el nivel j-ésimo del factor *B*.
ε_{ij} el término de error

Supongamos que:

$$\sum_{i=1}^{a}\alpha_i = \sum_{j=1}^{b}\beta_i = \sum_{i=1}^{a}(\alpha\beta)_{ij} = \sum_{j=1}^{b}(\alpha\beta)_{ij} = 0$$

Se obtiene una tabla con esta forma:

Factores	***A*₁**	**…**	***A*ₐ**
***B*₁**	Y_{11}	…	Y_{1a}
:	:	…	:
***B*_b**	Y_{b1}	…	Y_{ba}

En este caso, el número de parámetros a estimar es igual que en el caso del diseño bifactorial replicado:

$$1 + (a-1) + (b-1) + (a-1)(b-1) = ab$$

y como el número de observaciones es *ab*, entonces no hay grados de libertad suficientes para estimar $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{MCE}{ab-ab}$.

Una posible solución es considerar que la interacción es nula

$$(\alpha\beta)_{ij} = 0$$

donde *i*= 1, … , a *j*=1, … ,b

Calcularemos la Suma de Cuadrados.

$$SC_A = \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{a} y_{i\bullet}^2 - \frac{1}{ab}y_{\bullet\bullet}^2 \qquad SC_B = \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{b} y_{\bullet j}^2 - \frac{1}{ab}y_{\bullet\bullet}^2$$

$$SC_E = SC_T - SC_A - SC_B \qquad SC_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij}^2 - \frac{1}{ab}y_{\bullet\bullet}^2$$

Calcularemos los test **F**.

$$F_A = \frac{\frac{SC_A}{a-1}}{\frac{SC_E}{(a-1)(b-1)}} \qquad F_B = \frac{\frac{SC_B}{b-1}}{\frac{SC_E}{(a-1)(b-1)}}$$

obteniéndose la siguiente tabla **ANOVA**

Fuente de Variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	F
Factor A	SC_A	a- 1	F_A
Factor B	SC_B	b-1	F_B
Error	SC_E	(a- 1)(b- 1)	
Total	SC_T	ab- 1	

Se observa que al suponer la interacción nula, el efecto de la interacción y el error experimental se juntan.

Otra alternativa es suponer que el efecto de la interacción es de la siguiente forma

$$(\alpha\beta)_{ij} = k\alpha_i\beta_j$$

donde *k* es una constante desconocida que se determina mediante Regresión.

Se descompone la SC_E en dos componentes:

1) Una componente para la interacción con 1 grado de libertad, de modo que la suma de cuadrados correspondiente es:
2)

$$SC_N = \frac{1}{a \cdot b \cdot SC_A \cdot SC_B}\left[\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij}y_{i\bullet}y_{\bullet j} - y_{\bullet\bullet}(SC_A + SC_B + \frac{y_{\bullet\bullet}^2}{ab})\right]^2$$

3) Una componente para el error

$$SC_E^{\ *} = SC_T - SC_N$$

con $(a-1)(b-1)-1$ grados de libertad.

Se determina

$$F_0 = \frac{SC_N}{\dfrac{SC_E^{\ *}}{(a-1)(b-1)-1}}$$

Si $F_0 > F_{1,(a-1)(b-1)-1,\alpha}$ la hipótesis nula de no interacción se rechaza.

3.2.2 Diseño bifactorial con replicas

Se consideran dos factores A y B con a y b niveles respectivamente. Se tienen $a \cdot b$ combinaciones o posibles tratamientos y n observaciones para cada tratamiento, eso es, un diseño balanceado.

El modelo es:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

$$i = 1, \ldots, a \quad j = 1, \ldots, b \quad k = 1, \ldots, n$$

donde:

μ es el efecto medio global.
α_i es el efecto incremental sobre la media causado por el nivel i del factor *A*.
βj el efecto incremental sobre la media causado por el nivel j del factor *B*.
(αβ)ij el efecto incremental sobre la media causado por la interacción del nivel i-ésimo del factor *A* y el nivel j-ésimo del factor *B*.
ε_{ijk} el término de error

Supongamos que:

$$\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = \sum_{j=1}^{b} \beta_i = \sum_{i=1}^{a} (\alpha\beta)_{ij} = \sum_{j=1}^{b} (\alpha\beta)_{ij} = 0$$

Se obtiene una tabla con esta forma:

Factores	A_1	…	A_a
	Y_{111}	…	Y_{1a1}
B_1	:	…	:
	Y_{11k}	…	Y_{1ak}
:	:	…	:
	Y_{b11}	…	Y_{bak}
B_b	:	…	:
	Y_{b1k}	…	Y_{bak}

donde $k = 1, \ldots, n$.

Estimación de los parámetros

Se calcula:

$$\underset{\mu,\alpha_i,\beta_j,(\alpha\beta)_{ij}}{mín}\ \phi = mín\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk} - \mu - \alpha_i - \beta_j - (\alpha\beta)_{ij})^2$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^{a}\alpha_i = \sum_{j=1}^{b}\beta_i = \sum_{i=1}^{a}(\alpha\beta)_{ij} = \sum_{j=1}^{b}(\alpha\beta)_{ij} = 0$$

Se tiene

$$\frac{\partial\phi}{\partial\mu} = -2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk} - \mu - \alpha_i - \beta_j - (\alpha\beta)_{ij})^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk} - abn\mu = 0 \Rightarrow$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{abn}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk} = \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}$$

Para i fijado

$$\frac{\partial\phi}{\partial\alpha_i} = -2\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk} - \mu - \alpha_i - \beta_j - (\alpha\beta)_{ij}) = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk} - bn\mu - bn\alpha_i = 0 \Rightarrow$$

$$\hat{\alpha}_i = \frac{1}{bn}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet} \Rightarrow$$

$$\hat{\alpha}_i = \bar{y}_{i\bullet\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}$$

Análogamente, para j fijado,

$$\hat{\alpha}_j = \bar{y}_{\bullet j\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}$$

Para (i, j) fijado, se deriva respecto de $(\alpha\beta)_{ij}$

$$\frac{\partial\phi}{\partial(\alpha\beta)_{ij}} = -2\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk} - \mu - \alpha_i - \beta_j - (\alpha\beta)_{ij}) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum\left[y_{ijk} - n\overline{y}_{\bullet\bullet\bullet} - n(\overline{y}_{i\bullet\bullet} - \overline{y}_{\bullet\bullet\bullet}) - n(\overline{y}_{\bullet j\bullet} - \overline{y}_{\bullet\bullet\bullet}) - n\overset{***}{(\alpha\beta)}_{ij}\right] = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\overset{***}{(\alpha\beta)}_{ij} = \overline{y}_{ij\bullet} - \overline{y}_{i\bullet\bullet} - \overline{y}_{\bullet j\bullet} + \overline{y}_{\bullet\bullet\bullet}$$

Así

$$\begin{aligned}\hat{y}_{ijk} &= \overline{y}_{\bullet\bullet\bullet} + (\overline{y}_{i\bullet\bullet} - \overline{y}_{\bullet\bullet\bullet}) + \\ &\quad + (\overline{y}_{\bullet j\bullet} - \overline{y}_{\bullet\bullet\bullet}) + (\overline{y}_{ij\bullet} - \overline{y}_{i\bullet\bullet} - \overline{y}_{\bullet j\bullet} + \overline{y}_{\bullet\bullet\bullet}) = \overline{y}_{ij\bullet}\end{aligned}$$

esto quiere decir que:

$$\hat{y}_{ijk} = \overline{y}_{ij\bullet}$$

El número de parámetros a estimar en total es

$$1 + (a-1) + (b-1) + (a-1)(b-1)$$

ya que la suma de las estimaciones de las interacciones por filas es igual a 0, con lo cual hay $(b-1)$ términos. Del mismo modo sucede para las columnas, y se obtienen $(a-1)$ términos.

En total hay $(a-1)(b-1)$ términos.

Como el número total de observaciones es $N = abn$, entonces el número de grados de libertad es:

$$abn - 1 - (a-1) - (b-1) - (a-1)(b-1) = abn - ab = ab(n-1)\,.$$

De este modo, como

$$\begin{aligned}SC_E &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk} - \hat{y}_{ijk})^2 \\ &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk} - \overline{y}_{ij\bullet})^2\end{aligned}$$

entonces la estima de la varianza total es:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{ab(n-1)} \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} (y_{ijk} - \bar{y}_{ij\bullet})^2$$

Descomposición de la varianza

La técnica de análisis de la varianza se utilizará en los siguientes contrastes de hipótesis:

$$\begin{cases} H_0 : \alpha_1 = ... = \alpha_a = 0 & (el\ \ factor\ A\ no\ \ \inf luye) \\ H_1 : a\lg ún\ \alpha_1 \neq 0 & (el\ \ factor\ A\ \ \inf luye) \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 = ... = \beta_a = 0 & (el\ \ factor\ B\ no\ \ \inf luye) \\ H_1 : a\lg ún\ \beta_1 \neq 0 & (el\ \ factor\ B\ \ \inf luye) \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0 : (\alpha\beta)_{11} = ... = (\alpha\beta)_{ab} = 0 & (no\ \ hay\ \ \text{int}\, eracción) \\ H_1 : a\lg ún\ (\alpha\beta)_{ij} \neq 0 & (hay\ \ \text{int}\, eracción) \end{cases}$$

Para contrastar estas hipótesis, descomponemos la Suma de Cuadrados total en la siguiente Suma de Cuadrados:

$$\begin{aligned} SC_T &= \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} (y_{ijk} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} (y_{ijk}^2) - N \cdot \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} (y_{ijk}^2) - \frac{1}{abn} y_{\bullet\bullet\bullet}^2 = \\ &= SC_A + SC_B + SC_{AB} + SC_E \end{aligned}$$

donde $N = abn$ y

$$\begin{aligned} SC_A &= bn\sum_{i=1}^{a} (\bar{y}_{i\bullet\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2 = bn\sum_{i=1}^{a} (\bar{y}_{i\bullet\bullet}^2) - N \cdot \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}^2 = \\ &= \frac{1}{bn} \sum_{i=1}^{a} y_{i\bullet\bullet}^2 - \frac{1}{abn} y_{\bullet\bullet\bullet}^2 \end{aligned}$$

≡ “Suma de Cuadrados explicada debido al factor *A*”.

$$\begin{aligned} SC_B &= an\sum_{j=1}^{b} (\bar{y}_{\bullet j\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2 = an\sum_{j=1}^{b} (\bar{y}_{\bullet j\bullet}^2) - N \cdot \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}^2 = \\ &= \frac{1}{an} \sum_{j=1}^{b} y_{\bullet j\bullet}^2 - \frac{1}{abn} y_{\bullet\bullet\bullet}^2 \end{aligned}$$

≡ “Suma de Cuadrados explicada debido al factor *B*”.

$$SC_{AB} = n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\overline{y}_{ij\bullet} - \overline{y}_{i\bullet\bullet} - \overline{y}_{\bullet j\bullet} + \overline{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2 =$$

$$= n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left[(\overline{y}_{ij\bullet} - \overline{y}_{\bullet\bullet\bullet}) - (\overline{y}_{i\bullet\bullet} - \overline{y}_{\bullet\bullet\bullet}) - (\overline{y}_{\bullet j\bullet} - \overline{y}_{\bullet\bullet\bullet})\right]^2 =$$

$$= n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\overline{y}_{ij\bullet}^{\,2} - N \cdot \overline{y}_{\bullet\bullet\bullet}^{\,2} - SC_A - SC_B =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij\bullet}^2 - \frac{1}{bn}\sum_{i=1}^{a} y_{i\bullet\bullet}^2 - \frac{1}{an}\sum_{j=1}^{b} y_{\bullet j\bullet}^2 - \frac{1}{abn} y_{\bullet\bullet\bullet}^2$$

≡ "Suma de Cuadrados explicada debido a la interacción".

$$SC_E = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk} - \overline{y}_{ij\bullet})^2 = ab(n-1)\hat{\sigma}^2$$

≡ "Suma de Cuadrados residual".

Calculamos las medias cuadráticas.

$$MC_A = \frac{SC_A}{a-1} \qquad MC_B = \frac{SC_B}{b-1}$$

$$MC_{AB} = \frac{SC_{AB}}{(a-1)(b-1)} \qquad MC_E = \frac{SC_E}{ab(n-1)}$$

Calculamos el test **F**.

$$F_A = \frac{MC_A}{MC_E} \qquad F_B = \frac{MC_B}{MC_E} \qquad F_{AB} = \frac{MC_{AB}}{MC_E}$$

La tabla de análisis de la varianza es:

Fuente de Variación	**Suma de Cuadrados**	**Grados de Libertad**	**Media Cuadrática**	**F**
Factor A	SC_A	a- 1	MC_A	F_A
Factor B	SC_B	b-1	MC_B	F_B
Interacción	SC_{AB}	(a- 1)(b- 1)	MC_{AB}	F_{AB}
Error	SC_E	ab(n- 1)	MC_E	
Total	SC_T	abn- 1		

Entonces:

1) Rechazamos $H_0 : \alpha_1 = ... = \alpha_a = 0$ al nivel α cuando

$$F_A > F_{a-1, ab(n-1); \alpha}$$

2) Rechazamos $H_0 : \beta_1 = ... = \beta_a = 0$ al nivel α cuando

$$F_B > F_{b-1, ab(n-1); \alpha}$$

3) Rechazamos $H_0 : (\alpha\beta)_{11} = ... = (\alpha\beta)_{ab} = 0$ al nivel α cuando

$$F_{AB} > F_{(a-1)(b-1), ab(n-1); \alpha}$$

<u>Observación:</u> Siempre trataremos de buscar el modelo más sencillo que explique bien la variable respuesta. Por ejemplo, si aceptamos $H_0 : (\alpha\beta)_{11} = ... = (\alpha\beta)_{ab} = 0$, concluimos que la interacción no influye de manera apreciable en la respuesta, y pasaríamos a considerar un modelo con dos factores sin interacción y calcularíamos de nuevo la tabla **ANOVA**.

Si además, aceptamos que uno de los factores no influye en la respuesta, lo eliminaríamos del modelo y trabajaríamos con un modelo de un factor.

Ejemplo: Se aplican pinturas tapa poros para aeronaves en superficies de aluminio, con dos métodos; inmersión y rociado. La finalidad del tapa poros es mejorar la adhesión de pintura, y puede aplicarse en algunas partes utilizando cualquier método. El grupo de ingeniería de procesos responsable de esta operación está interesado en saber si existen diferencias entre tres tapa poros diferentes e cuanto a sus propiedades de adhesión.

Para investigar el efecto que tienen el tipo de pintura tapa poros y el método de aplicación sobre adhesión de la pintura, se realiza un diseño factorial. Para ello, se pintan tres muestras con cada tapa poro utilizando cada método de aplicación, después se aplica una capa fina de pintura y a continuación se mide la fuerza de adhesión. Los resultados son los siguientes:

Tapa poros	**Inmersión**			**Rociado**		
1	4	4.5	4.3	5.4	4.9	5.6
2	5.6	4.9	5.4	5.8	6.1	6.3
3	3.8	3.7	4	5.5	5	5

Entonces, $a = 3,\ b = 2,\ n = 3,\ N = 18$.

Las medias de las observaciones son:

Tapa poros	Inmersión	Rociado	$\overline{y}_{i\bullet\bullet}$
1	$\overline{y}_{11\bullet} = 4.267$	$\overline{y}_{12\bullet} = 5.3$	$\frac{28.7}{6} = 4.783$
2	$\overline{y}_{21\bullet} = 5.3$	$\overline{y}_{22\bullet} = 6.067$	$\frac{34.1}{6} = 5.683$
3	$\overline{y}_{31\bullet} = 3.833$	$\overline{y}_{32\bullet} = 5.167$	$\frac{27}{6} = 4.5$
$\overline{y}_{\bullet j\bullet}$	$\frac{40.2}{9} = 4.467$	$\frac{49.6}{9} = 5.511$	$\overline{y}_{\bullet\bullet\bullet} = \frac{89.8}{18} = 4.989$

Las sumas de los cuadrados son:

$$SC_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk} - \overline{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk}^2) - N \cdot \overline{y}_{\bullet\bullet\bullet}^2 =$$
$$= 4^2 + 4.5^2 + ... + 5^2 + 5^2 - 18 \times 4.989^2 = 10.72$$

$$SC_A = bn\sum_{i=1}^{a}(\overline{y}_{i\bullet\bullet}^2) - N \cdot \overline{y}_{\bullet\bullet\bullet}^2 =$$
$$= 6(4.783^2 + 5.683^2 + 4.5^2) - 18 \times 4.989^2 = 4.58$$

$$SC_B = an\sum_{j=1}^{b}(\overline{y}_{\bullet j\bullet}^2) - N \cdot \overline{y}_{\bullet\bullet\bullet}^2 =$$
$$= 9(4.467^2 + 5.511^2) - 18 \times 4.989^2 = 4.91$$

$$SC_{AB} = n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\overline{y}_{ij\bullet}^2 - N \cdot \overline{y}_{\bullet\bullet\bullet}^2 - SC_A - SC_B =$$
$$= 3(4.267^2 + 5.3^2 + 5.3^2 + 6.067^2 + 3.833^2 + 5.167^2) -$$
$$- 18 \times 4.989^2 - 4.58 - 4.91 = 0.24$$

$$SC_E = SC_T - SC_A - SC_B - SC_{AB} =$$
$$= 10.72 - 4.58 - 4.91 - 0.24 = 0.99$$

La tabla ANOVA es:

F.V.	S.C.	G.L.	M.C.	F
Tapaporo (A)	4.58	2	2.29	27.7576
Método (B)	4.91	1	4.91	59.5152
Interacción	0.24	2	0.12	1.4545
Error	0.99	12	0.0825	
Total	10.72	17		

$$F_{2,12:0.05} = 3.8853 \qquad F_{1,12:0.05} = 4.7472$$

Por tanto, no hay evidencia de la existencia de interacción entre los factores. Los efectos del tipo de tapaporos y del método de aplicación empleado afectan a la fuerza de adhesión. En este caso, debemos simplificar el modelo, considerado un modelo sin interacción (juntando las sumas de cuadrados de la interacción a las del error), donde la tabla ANOVA sería:

F.V.	S.C.	G.L.	M.C.	F
Tapaporo (A)	4.58	2	2.29	26.082
Método (B)	4.91	1	4.91	55.9225
Error	0.99+0.24=1.23	12+2=14	0.0878	
Total	10.72	17		

$$F_{2,14:0.05} = 3.7389 \qquad F_{1,14:0.05} = 4.6001$$

Concluimos que los efectos del tipo de tapaporos y del modelo de aplicación empleado afectan a la fuerza de adhesión.

Ejemplo: Supongamos que un ingeniero diseña una batería para su uso en un dispositivo que será sometido a ciertas variaciones extremas de temperatura. El único parámetro de diseño que se puede seleccionar es el material de la cubierta de la batería, y tiene tres alternativas. Cuando el dispositivo se manufactura y se envía al campo, el ingeniero no tiene control sobre los extremos de temperatura a que será expuesto el dispositivo, y sabe por experiencia que es probable que la temperatura influya en la duración efectiva de la batería. Sin embargo, sí es posible controlar la temperatura en el laboratorio de desarrollo de productos para los fines de ensayo.

El ingeniero decide probar los tres materiales de la cubierta a tres niveles de temperatura (15, 70 y 125 ^oF) consistentes en el entorno de uso final del producto. Se prueban cuatro baterías con cada combinación de material de cubierta y temperatura y las 36 pruebas se ejecutan al azar. Los datos son los siguientes:

Material	15 °F		70 °F		125 °F	
1	130	155	34	40	20	70
	74	180	80	75	82	58
2	150	188	136	122	25	70
	159	126	106	115	58	45
3	138	110	174	120	96	104
	168	160	150	139	82	60

En este ejemplo: a= 3, b= 3, n= 4, N= 36. Las medias de las observaciones son:

Material	15 °F	70 °F	125 °F	$\bar{y}_{i\bullet\bullet}$
1	134.75	57.25	57.5	83.17
2	155.75	119.75	49.5	108.33
3	144	145.75	85.5	125.083
$\bar{y}_{\bullet j\bullet}$	144.83	107.583	64.17	$\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet} = 105.53$

Las sumas de cuadrados son:

$$SC_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2 =$$

$$= (130 - 105.53)^2 + (155 - 105.53)^2 +$$

$$\ldots + (82 - 105.53)^2 + (60 - 105.53)^2 =$$

$$= 77646.972$$

$$SC_A = bn\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i\bullet\bullet}^{2}) - N\cdot \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}^{2} =$$

$$= 12(83.17^2 + 108.33^2 + 125.083^2) - 36\times 105.53^2 =$$

$$= 10683.722$$

$$SC_B = an\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{\bullet j\bullet}^{2}) - N\cdot \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}^{2} =$$

$$= 12(144.83^2 + 107.583^2 + 192.5^2) - 36\times 105.53^2 =$$

$$= 39118.722$$

$$SC_{AB} = n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\bar{y}_{ij\bullet}^{2} - N\cdot \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}^{2} - SC_A - SC_B =$$

$$= 4(134.75^2 + 57.25^2 + \ldots + 107.583^2 + 192.5^2) - 36\times 105.53^2 -$$

$$- 10633.167 - 39083.167 = 9613.778$$

$$SC_E = SC_T - SC_A - SC_B - SC_{AB} = 18230.75$$

La tabla **ANOVA** es:

F.V.	S.C.	G.L.	M.C.	F
Tapaporo (A)	10683.722	2	5341.861	7.91
Método (B)	39118.722	2	19559.361	28.97
Interacción	9613.778	4	2403.444	3.56
Error	18230.75	27	675.213	
Total	77646.972	35		

$$F_{2,27:0.05} = 3.3541 \qquad F_{4,27:0.05} = 2.7278$$

Por tanto, existe una interacción significativa entre los factores. Los efectos del tipo de material y de la temperatura son significativos.

Estudio de las medias individuales

Si se rechaza la igualdad entre los efectos del factor A ó B se puede considerar el tests de recorrido studentizado (para el factor correspondiente), pero no son recomendables cuando aparece interacción significativa. Se puede hacer fijando un nivel concreto de uno de los factores.

Si se rechaza la igualdad entre las interacciones, se pueden contrastar las medias que aparecen $\bar{y}_{ij\bullet}$ en todos los posibles tratamientos.

3.2.3 Modelo bifactorial mixto

Se puede considerar un modelo de efectos mixtos en el que uno de los factores es fijo y el otro aleatorio:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

donde α_i (para i = 1, . . . , a) corresponde al efecto fijo del factor A, de modo que $\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0$ y el resto de los parámetros del modelo son variables aleatorias independientes entre sí, tales que

$$\beta_j \sim N(0, \sigma_\beta)$$
$$(\alpha\beta)_{ij} \sim N(0, \sigma_{\alpha\beta})$$
$$\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma)$$

para $i = 1, \ldots, a$ $j = 1, \ldots, b$ $k = 1, \ldots, n$

Se puede demostrar que

$$E\left(\frac{SC_A}{a-1}\right)=\sigma^2+n\sigma^2_{\alpha\beta}+bn\frac{\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2}{a-1}$$

$$E\left(\frac{SC_B}{b-1}\right)=\sigma^2+n\sigma^2_{\alpha\beta}+an\sigma^2_{\beta}$$

$$E\left(\frac{SC_{AB}}{(a-1)(b-1)}\right)=\sigma^2+n\sigma^2_{\alpha\beta}$$

$$E\left(\frac{SC_E}{ab(n-1)}\right)=\sigma^2$$

Así, para contrastar

$$\begin{array}{ll} H_0:\alpha_i=0, & (i=1,\ldots,a) \\ H_1:\alpha_i\neq 0 & \end{array} \quad\Rightarrow\quad F_0=\frac{MC_A}{MC_{AB}}$$

$$\begin{array}{l} H_0:\hat{\sigma}^2_{\beta}=0 \\ H_1:\hat{\sigma}^2_{\beta}\neq 0 \end{array} \quad\Rightarrow\quad F_0=\frac{MC_B}{MC_{AB}}$$

$$\begin{array}{l} H_0:\hat{\sigma}^2_{\alpha\beta}=0 \\ H_1:\hat{\sigma}^2_{\alpha\beta}\neq 0 \end{array} \quad\Rightarrow\quad F_0=\frac{MC_{AB}}{MC_E}$$

y las estimas de efectos y los componentes de la varianza son

$$\hat{\mu}=\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}$$

$$\hat{\alpha}_i=\bar{y}_{i\bullet\bullet}-\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet} \qquad (i=1,\ldots,a)$$

$$\hat{\sigma}^2_{\beta}=\frac{MC_B-MC_{AB}}{an}$$

$$\hat{\sigma}^2_{\alpha\beta}=\frac{MC_{AB}-MC_E}{n}$$

$$\hat{\sigma}^2=MC_E$$

3.2.4 El diseño 2^2

Se consideran dos factores *A* y *B* con dos niveles:

BAJO: 0

ALTO: 1

Los niveles altos de los factores se representan mediante las letras *a* y *b* respectivamente y los niveles bajos se representan por la ausencia de dichas letras. Si ambos niveles son bajos se considera un valor igual a (1).

$$\begin{aligned}(0,0) &\Rightarrow (1)\\ (1,0) &\Rightarrow a\\ (0,1) &\Rightarrow b\\ (1,1) &\Rightarrow ab\end{aligned}$$

(1), *a*, *b* y *ab* son las respuestas para las *n* réplicas. Los efectos medios de *A* y *B* son

$$A = \frac{1}{2n}(ab + a - b - (1))$$
$$B = \frac{1}{2n}(ab + a - a - (1))$$

Estos valores se obtienen considerando que, por ejemplo, el efecto de *A* se obtiene como la diferencia entre el nivel alto del factor menos el nivel bajo (en cada caso en relación a los niveles del otro factor): El efecto de *A* en el nivel bajo de *B* es $(a-(1))/n$ y el efecto de *A* en el nivel alto de *B* es $(ab-b)/n$.

Así, el efecto medio de *A* es

$$A = \frac{ab + a}{2n} - \frac{b + (1)}{2n} = \frac{1}{2n}(ab + a - b - (1))$$

El efecto de la interacción *AB* se define como la diferencia media entre el efecto de *A* al nivel alto de *B*, y el efecto de *A* al nivel bajo de *B*:

$$AB = \frac{1}{2n}\left[(ab + a - b - (1))\right] = \frac{1}{2n}\left[ab + (1) - a - b\right].$$

Del mismo modo se puede definir *BA*, obteniéndose que *AB* = *BA*.

En general, se trata de medir la importancia y el efecto de los factores que intervienen, en términos de la magnitud y del signo de los efectos anteriores.

Las sumas de cuadrados se pueden definir en términos, también, de las estimas anteriores:

$$SC_{Factor} = \frac{1}{n\sum_{i=1}^{a} c_i^2} \left[\sum_{i=1}^{a} c_i y_{i\bullet}\right]^2 .$$

Así, en este caso,

$$SC_A = \frac{[ab + a - b - (1)]^2}{4n}$$

$$SC_B = \frac{[ab + b - a - (1)]^2}{4n}$$

$$SC_{AB} = \frac{[ab + (1) - a - b]^2}{4n}$$

La Suma de Cuadrados total es, como habitualmente,

$$SC_T = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}^2 - \frac{y_{\bullet\bullet\bullet}^2}{4n}$$

y tiene $(2 \cdot 2 \cdot n) - 1$ grados de libertad.

La Suma de Cuadrados del error es:

$$SC_E = SC_T - SC_A - SC_B - SC_{AB}$$

y SC_E tiene $4(n-1)$ grados de libertad.

La Media Cuadrática sería:

$$MC_E = \frac{SC_E}{4(n-1)}$$

La **F** del test se calcula de la siguiente forma:

$$F_A = \frac{SC_A}{MC_E} \qquad F_B = \frac{SC_B}{MC_E} \qquad F_{AB} = \frac{SC_{AB}}{MC_E}$$

La tabla de análisis de la varianza es, entonces,

Fuente de Variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Media Cuadrática	F
Factor *A*	SC_A	1	MC_A	F_A
Factor *B*	SC_B	1	MC_B	F_B
Interacción	SC_{AB}	1	MC_{AB}	F_{AB}
Error	SC_E	4(*n*- 1)	MC_E	
Total	SC_T	4*n*- 1		

Ejemplo: Se trata de estudiar la influencia de los factores:

Temperatura (1: alta ó 0: baja) y *Catalizador* (1: se usa ó 0: no se usa)

en la variable respuesta: *dureza* de un material cerámico. Los datos son:

Combinación	Replicación		Respuesta Total	Codificación
	1	**2**		
(0, 0)	86	92	178	(1)
(0, 1)	47	39	86	*a*
(1, 0)	104	114	218	*b*
(1, 1)	141	153	294	*ab*

$$y_{\bullet\bullet\bullet} = 776$$

Los efectos medios y las medias de cuadrados son:

$$A = \frac{294+86-218-178}{4} = -4 \qquad B = \frac{294+218-86-178}{4} = 62$$

$$AB = \frac{294+178-86-218}{4} = 42 \qquad SC_A = \frac{(4\text{A})^2}{4\times 2} = 32$$

$$SC_B = \frac{(4B)^2}{4\times 2} = 7688 \qquad SC_{AB} = \frac{(4AB)^2}{4\times 2} = 3528$$

$$SC_T = (86^2 + \ldots + 153^2) - \frac{776^2}{8} = 11420 \qquad SC_E = 172$$

La tabla de análisis de la varianza es:

Fuente de Variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Media Cuadrática	F
Factor A	32	1	32	0.74
Factor B	7688	1	7688	178.79
Interacción	3528	1	3528	82.05
Error	172	4	43	
Total	11420	7		

De modo que el Factor *B* y la interacción entre *A* y *B* son significativos al nivel 0.05, ya que $F_{1,4;0.05} = 7.71$.

3.2.5 El diseño 2^3

Se introduce un breve resumen de este modelo. Supongamos que se tienen tres factores binarios *A*, *B* y *C*. El número de posibles combinaciones es 8, y con *n* replicaciones se tiene un total de 8*n* observaciones.

Para calcular los efectos se puede usar la siguiente tabla o matriz de diseño:

Efecto Factorial	Combinación de Factores							
	(1)	**a**	**b**	**ab**	**c**	**ac**	**bc**	**abc**
I	+	+	+	+	+	+	+	+
A	-	+	-	+	-	+	-	+
B	-	-	+	+	-	-	+	+
AB	+	-	-	+	+	-	-	+
C	-	-	-	-	+	+	+	+
AC	+	-	+	-	-	+	-	+
BC	+	+	-	-	-	-	+	+
ABC	-	+	+	-	+	-	-	+

La primera fila es la identidad y cualquier fila multiplicada por ella permanece invariante. El resto de filas tiene el mismo número de signos + y signos −. Se pueden obtener los contrastes y los efectos sustituyendo los signos + por 1 y los − por −1, como se ve a continuación.

Por otro lado se pueden obtener las distintas filas a partir del producto entre ellas, por ejemplo:

$$A \cdot B = AB$$

$$(AB)\cdot(B) = A\cdot B^2 = A$$

$$(AC)\cdot(BC) = A\cdot C^2\cdot B = AB$$

Estimación de los efectos:

Los efectos medios se calculan a partir de los contrastes indicados en la tabla anterior partidos entre $4n$:

$$A = \frac{1}{4n}\left[a-(1)+ab-b+ac-c+abc-bc\right]$$
$$B = \frac{1}{4n}\left[b+ab+bc+abc-(1)-a-c-ac\right]$$
$$C = \frac{1}{4n}\left[c+ac+bc+abc-(1)-a-b-ab\right]$$

$$AB = \frac{1}{4n}\left[(1)+ab+c+abc-a-b-ac-bc\right]$$
$$AC = \frac{1}{4n}\left[(1)+b+ac+abc-a-ab-c-bc\right]$$
$$BC = \frac{1}{4n}\left[(1)+a+bc+abc-b-ab-c-ac\right]$$
$$ABC = \frac{1}{4n}\left[abc+a+b+c-ab-ac-bc-(1)\right]$$

Las sumas de los cuadrados son, en cada caso, de manera semejante al diseño 2^2,

$$SC_{Efec} = \frac{Contraste^2}{8n}$$

Ejemplo: Supongamos la siguiente tabla con n= 2 réplicas

Factor A	**Factor B**			
	0		**1**	
	Factor C		**Factor C**	
	0	**1**	**0**	**1**
0	4	7	20	10
	5	9	14	6
1	4	2	4	14
	11	7	6	16

Se tiene que:

(1)= 9	*c*= 16	*b*= 34	*bc*= 16
a= 15	*ac*= 9	*ab*= 10	a*bc*= 30

$$A = \frac{1}{8}\left[15 - 9 + 10 - 34 + 9 - 16 + 30 - 16\right] = -\frac{11}{8} = -1.375$$

$$B = \frac{1}{8}\left[34 + 10 + 16 + 30 - (9 + 15 + 16 + 9)\right] = \frac{41}{8} = 5.125$$

$$C = \frac{1}{8}\left[16 + 9 + 16 + 30 - (9 + 15 + 34 + 10)\right] = \frac{3}{8} = 0.375$$

$$AB = \frac{1}{8}\left[9 + 10 + 16 + 30 - (15 + 34 + 9 + 16)\right] = -\frac{9}{8} = -1.125$$

$$AC = \frac{1}{8}\left[9 + 34 + 9 + 30 - (15 + 10 + 16 + 16)\right] = -\frac{25}{8} = 3.125$$

$$BC = \frac{1}{8}\left[9 + 15 + 16 + 30 - (34 + 10 + 16 + 9)\right] = \frac{1}{8} = 0.125$$

$$ABC = \frac{1}{8}\left[30 + 15 + 34 + 16 - (10 + 9 + 16 + 9)\right] = \frac{51}{8} = 6.375$$

Como, en cada caso,

$$SC_{Efec} = \frac{Contraste^2}{8n}$$

se tiene que:

$$SC_A = \frac{1}{16}11^2 = 7.56 \qquad SC_B = \frac{1}{16}41^2 = 105.06$$

$$SC_C = \frac{1}{16}3^2 = 0.56 \qquad SC_{AB} = \frac{1}{16}9^2 = 5.06$$

$$SC_{AC} = \frac{1}{16}25^2 = 39.06 \qquad SC_{BC} = \frac{1}{16}1^2 = 0.06$$

$$SC_{ABC} = \frac{1}{16}51^2 = 162.56$$

y

$$SC_T = (4^2 + 5^2 + ... + 14^2 + 16^2) - \frac{1}{16}139^2 = 389.44$$

$$SC_E = 69.52$$

La tabla de análisis de la varianza es

Fuente de Variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Media Cuadrática	F
Factor A	7.56	1	7.56	0.87
Factor B	105.06	1	105.06	12.09
Interacción AB	5.06	1	5.06	0.58
Factor C	0.56	1	0.56	0.06
Interacción AC	39.06	1	39.06	4.49
Interacción BC	0.06	1	0.06	0.01
Interacción ABC	162.56	1	162.56	18.71*
Error	69.52	8	8.62	
Total	39.06	15		

Como el valor de la *F* de Snedecor $F_{1,8;0.05} = 5.32$, entonces los valores marcados con (*) son significativos a nivel 0.05.

3.2.6 Supuestos del Modelo Estadístico

Se supone que:

a) los factores son fijos
b) los diseños son completamente aleatorios
c) se satisface la suposición usual de normalidad

El diseño 2^k es particularmente útil en las primeras fases del trabajo experimental, cuando es probable que haya muchos factores por investigar.

Conlleva el menor número de corridas con las cuales pueden estudiarse *k* factores en un diseño factorial completo. Debido a que sólo hay dos niveles para cada factor, debe suponerse que la respuesta es aproximadamente lineal en el intervalo de los niveles elegidos de los factores.

3.2.7 Representación de los factores y niveles

Factor	Niveles
A	1
	:
	k
B	1
	:
	k

3.2.8 Ejercicios

1) Un ingeniero está interesado en el efecto de la velocidad de corte (A),la dureza del metal (B) y el ángulo de corte (C) sobre la duración de una herramienta de corte. Para ello se eligen dos niveles para cada factor y se corren dos réplicas del diseño factorial 2^3. La tabla siguiente presenta los datos de tiempo de duración (en horas) de la herramienta.

Combinación de tratamientos	**Réplica**	
	I	**II**
(1)	221	311
a	325	435
b	354	348
ab	552	472
c	440	453
ac	406	377
bc	605	500
abc	392	419

   a) Calcule los efectos correspondientes a cada uno de los factores.
   b) Determine cuáles de estos efectos son importantes usando la tabla de análisis de varianza. Reporte las conclusiones obtenidas.

2) Usted está recién graduado y acaba de entrar a trabajar en la empresa MPAR, la cual elabora galletas. La compañía ha presentado algunos problemas económicos en los últimos tiempos, así que su misión es tratar de incrementar la calidad y la productividad. Se le pide estudiar la influencia de tres variables sobre la textura de la galleta:

A = tiempo en el horno.
B = porciento de leche.
C = tipo de harina (nacional o importada)

Para ello usted debe:

a) Escribir la matriz de diseño para un experimento 2^3 (completo).
b) A partir de esa matriz de diseño se tomaron las siguientes medidas:

Nivel	***Textura***
(1)	10.0
a	13.0
b	8.0
ab	15.1
c	11.0
ac	12.9
bc	8.1
abc	15.0

Determine cuáles de los factores son influyentes sobre la textura de la galleta realizando gráficos cuantil-cuantil. Justifique y explique. ¿Qué conclusiones saca de allí?

3) En los datos anteriores el factor C no es significativo. ¿Cómo podría reinterpretarse el diseño anterior en función de un diseño 2^2, donde sólo estuviesen involucrados los factores A y B? Generalice esta conclusión a diseños 2^k generales con m factores no significativos.

Capítulo 4 Diseño de Parcelas Divididas y jerárquicos.

- **Diseño de Parcelas Divididas.**
- **Diseños jerárquicos.**

4.1 Diseño de Parcelas Divididas

Los diseños de parcelas divididas se usan generalmente para experimentos factoriales e incorporan en su estructura a los diseños completamente al azar, bloques al azar o cuadrados latinos.

Su principio radica en que las unidades experimentales o parcelas son subdivididas en subdivididas en las que los niveles de uno o más factores se les aplican. Es decir existen unidades y subunidades.

Hemos visto antes que los tratamientos generados aleatoriamente, dependiendo del diseño utilizado, a las unidades experimentales; esto es, los niveles de ambos factores eran aleatorizados simultáneamente. Sin embargo, existen casos en los que esta aleatorización es poco práctica y en los que resulta recomendable aleatorizar primero los niveles de un factor y luego los niveles del otro. El procedimiento consiste entonces en asignar los niveles de un factor a las unidades experimentales completas, también llamadas parcelas, y luego, cada unidad experimental dividirla en subunidades, llamadas subparcelas, a las cuales se les aplicarán los niveles del otro factor.

Por ejemplo, consideremos un experimento en que se prueba el factor *A* con 4 niveles en tus bloques de un diseño de bloques al azar. Un segundo factor, el factor *B* con 2 niveles puede introducirse, dividiendo cada unidad de *A* en dos subunidades y asignando aleatoriamente los niveles de *B* en las unidades.

Por ejemplo:

Factor *A*	α_1	α_2	α_3	α_4

Factor *B*	β_1	β_2

Bloques			

Bloque 1				
	$\alpha_4\beta_2$	$\alpha_1\beta_2$	$\alpha_2\beta_1$	$\alpha_3\beta_2$
	$\alpha_4 b_1$	$\alpha_1 b_1$	$\alpha_2 b_2$	$\alpha_3\beta_1$

Bloque 2	$\alpha_2\,\beta_1$	$\alpha_1\,\beta_2$	$\alpha_4\,\beta_1$	$\alpha_3\,\beta_1$
	$\alpha_2\,\beta_2$	$\alpha_1\,\beta_1$	$\alpha_4\,\beta_2$	$\alpha_3\,\beta_2$

Bloque 3	$\alpha_1\,\beta_1$	$\alpha_2\,\beta_2$	$\alpha_4\,\beta_2$	$\alpha_3\,\beta_1$
	$\alpha_1\,\beta_2$	$\alpha_2\,\beta_1$	$\alpha_4\,\beta_1$	$\alpha_3\,\beta_2$

Esquema de datos.

Factor *A*	**Factor *B***	**Réplicas (Bloques)**
	β_1	Y_{111} … …….Y_{11q}
α_1	:	: :
	β_r	Y_{1r1} … …….Y_{1rq}
:	:	:
	β_1	Y_{p11} … …….Y_{p1q}
α_p	:	: :
	β_r	Y_{pr1} … …….Y_{prq}

Tabla auxiliar

	1	**2**	**….**	**q**	$\mathbf{Y_{i\cdot\cdot}}$
	$Y_{1\cdot 1}$	$Y_{1\cdot 2}$	….	$Y_{1\cdot q}$	$\mathbf{Y_{1\cdot\cdot}}$
Factor *A*	:	:	….	:	**:**
	$Y_{p\cdot 1}$	$Y_{p\cdot 2}$	….	$Y_{p\cdot q}$	$\mathbf{Y_{p\cdot\cdot}}$
$\mathbf{Y_{\cdot\cdot k}}$	$\mathbf{Y_{\cdot\cdot 1}}$	$\mathbf{Y_{\cdot\cdot 2}}$	**….**	$\mathbf{Y_{\cdot\cdot q}}$	

A* \ *B	$\boldsymbol{\beta_1}$	$\boldsymbol{\beta_2}$	**….**	$\boldsymbol{\beta_r}$
$\boldsymbol{\alpha_1}$	$Y_{11\cdot}$	$Y_{12\cdot}$	….	$Y_{1r\cdot}$
:	:	:	….	:
$\boldsymbol{\alpha_p}$	$Y_{p1\cdot}$	$Y_{p2\cdot}$	….	$Y_{pr\cdot}$
$\mathbf{Y_{\cdot j\cdot}}$	$\mathbf{Y_{\cdot 1\cdot}}$	$\mathbf{Y_{\cdot 2\cdot}}$	**….**	$\mathbf{Y_{\cdot q\cdot}}$

Debe notarse que la aleatorización se realiza en dos etapas. Primero aleatorizamos los niveles del factor A sobre las unidades completas, después se aleatorizan los niveles del factor *B* sobre las subunidades, dos por cada unidad completa. Cada unidad completa (parcela) puede ser considerada como un bloque en cuanto al factor *B*, pero es solamente un bloque incompleto cuando tomamos en cuenta las combinaciones de tratamientos. Por este motivo los diseños de parcelas divididas pueden denominarse diseños de bloques incompletos. En resumen la aleatorización del tratamiento principal se realiza sobre los bloques, mientras que la aleatorización de los subtratamientos se realiza en cada parcela o unidad constituyendo, por lo tanto las subunidades.

Trataremos el caso del diseño de parcelas divididas con dos factores, un factor en las unidades completas y un factor en las subunidades, utilizando los diseños completamente al azar y de bloques completamente al azar para la asignación de los niveles del factor que va en las unidades completas. Sin embargo, es posible utilizar el diseño de parcelas divididas con más de un factor, tanto en las unidades completas como en las subunidades. Aunque este diseño fue desarrollado en agricultura (y de ahí su nombre), puede aplicarse en muchas otras disciplinas.

Usos.

El diseño de parcelas divididas se usa en las siguientes situaciones:

1) Cuando los tratamientos asociados con los niveles de uno o más de los factores requieren mayores cantidades de material experimental en una unidad experimental, que los tratamientos para otros factores. Esta característica es común en experimentos de campo, de laboratorio, industriales y sociales.
2) Cuando un factor adicional va a ser añadido para incrementar la amplitud del experimento.
3) A partir de informaciones previas, puede saberse que las mayores diferencias pueden esperarse entre los niveles de determinados factores en comparación con los niveles de otros. En este caso, las combinaciones de tratamientos para los factores donde se esperan grandes diferencias pueden ser asignadas al azar en las unidades completas, a manera de conveniencia.
4) Este diseño se usa cuando se desea una mayor precisión para las comparaciones entre determinados factores que para otros. Esto es esencialmente lo mismo que la situación anterior, pero las razones pueden ser diferentes.

En resumen, puesto que en los experimentos de parcelas divididas, la variación entre subunidades se espera que sea menor que entre las unidades completas, los factores que requieren menor cantidad de material experimental o los que son de mayor importancia, o aquellos en los que se espera que exhiban las menores diferencias y se requiere una mayor precisión se asignan a las subunidades.

(Sigarroa, A. 1985)

4.1.1 Modelo Aditivo Lineal

Dado que en este diseño la aleatorización se realiza en dos etapas, el modelo aditivo lineal tendrá dos fuentes de error, una desde las unidades completas y otra desde las subunidades.

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \gamma_{ij} + \beta_k + (\alpha\beta)_{ik} + \varepsilon_{ijk}$$

donde:

Y_{ijk} es el valor o rendimiento observado con el i-ésimo nivel del factor *A*, j-ésima repetición, y k-ésimo nivel del factor *B*.
μ es el efecto de la media general.
α_i es el efecto del i-ésimo nivel del factor A.
γ_{ij} es el efecto del error experimental en parcelas (Error (α))
β_k es el efecto del k-ésimo nivel del factor *B*.
ε_{ijk} es el efecto del error experimental en subparcelas (Error (b))
i= 1,…, p (p= número de niveles del factor *A*)
j= 1,…, r (r= número de repeticiones para los niveles del factor *A*)
k= 1,…, q (q= número de niveles del factor *B*)

En el caso que el diseño sea un DBCA, el modelo será:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \rho_j + \gamma_{ij} + \beta_k + (\alpha\beta)_{ik} + \varepsilon_{ijk}$$

En este caso:

ρ_j es el efecto del j-ésimo bloque.
j= 1,…, r (r= número de bloques)

Se asume que tanto γ_{ij} como ε_{ijk} están normal e independientemente distribuidos con medias cero y variancias σ_γ^2 σ_ε^2 respectivamente.

Ejemplo (Parcela Dividida en DBCA):

Un experimento diseñado para evaluar tres variedades de cebada y cuatro niveles de abobamiento con nitrógeno (0, 0.01, 0.02 y 0.04 toneladas por parcela) fue conducido en 4 bloques de tres parcelas cada uno. Cada parcela fue dividida en 4 subparcelas. Cada variedad fue sembrada en una parcela mientras que los cuatro niveles de abonamiento fueron utilizados en las subparcelas. Los resultados del experimento (en kilogramos por subparcela) se presentan en la siguiente tabla:

Bloque	**Variedad**	b_1	b_2	b_3	b_4
I (1624)	a_1(572)	111	130	157	174
	a_2(533)	117	114	161	141
	a_3(519)	105	140	18	156
II (1287)	a_1(349)	61	91	97	100
	a_2(453)	70	108	126	149
	a_3(485)	96	124	121	144

Bloque	Variedad	b_1	b_2	b_3	b_4
III	a_1(366)	74	89	81	122
(1178)	a_2(432)	64	103	132	133
	a_3(380)	70	89	104	117
IV	a_1(368)	62	90	100	116
(1091)	a_2(382)	80	82	94	126
	a_3(341)	63	70	109	99

El modelo aditivo lineal para este ejemplo será:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \rho_j + \gamma_{ij} + \beta_k + (\alpha\beta)_{ik} + \varepsilon_{ijk}$$

donde:

Y_{ijk} es el rendimiento observado con la *i*-ésima variedad, *j*-ésimo bloque y *k*-ésimo nivel de abonamiento.

μ es el efecto de la media general.

α_i es el efecto del *i*-ésima variedad.

ρ_j es el efecto del j-ésimo bloque.

γ_{ij} es el efecto del error experimental en parcelas (Error (α))

β_k es el efecto del k-ésimo nivel de abonamiento.

$(\alpha\beta)_{ik}$ es el efecto de la interacción en la *i*-ésima variedad y el *k*-ésimo nivel de abonamiento.

ε_{ijk} es el efecto del error experimental en subparcelas (Error (b))

4.1.2 Análisis de Varianza

Las sumas de los cuadrados para un diseño de parcelas divididas en DBCA son calculadas por:

$$SC(Total\ \ parcelas) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{q} Y_{ijk}^2 - \frac{Y_{\bullet\bullet\bullet}^2}{prq}$$

done $\frac{Y_{\bullet\bullet\bullet}^2}{prq}$ es el factor de corrección (*Fc*).

$$SC(Total\ \ parcelas) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{r} \frac{Y_{ij\bullet}^2}{q} - Fc$$

$$SC(Bloques) = \sum_{j=1}^{r} \frac{Y_{\bullet j \bullet}^2}{pq} - Fc$$

$$SC(Comb.\ AB) = SC(A) + SC(B) + SC(AB) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} \frac{Y_{i \bullet k}^2}{r} - Fc$$

$$SC(A) = \sum_{i=1}^{p} \frac{Y_{i \bullet \bullet}^2}{rq} - Fc \qquad SC(B) = \sum_{j=1}^{q} \frac{Y_{\bullet \bullet k}^2}{pr} - Fc$$

$$SC(AB) = SC(Comb.\ AB) - SC(A) - SC(B)$$

$$SC(Error(b)) = SC(Total\ subunidades) - SC(Total\ unidades) - SC(B) - SC(AB)$$

El cuadro de Análisis de Varianza se presenta a continuación. Generalmente el cuadrado medio del error para las unidades completas, designado por E_a, es mayor que el cuadrado medio del error para las subunidades, designado por E_b, ya que las observaciones en las subunidades tienden a tener resultados más homogéneos dentro de la misma unidad que entre unidades diferentes.

Cuadro ANOVA

Fuentes de Variación	**Grados de Libertad (gl)**	**Sumas de Cuadrados (SC)**	**Cuadrados Medios (CM)**	**F**
Bloques	r-1	$SC(Bloques)$	$\frac{SC(Bloques)}{gl(Bloques)}$	
A	p-1	$SC(A)$	$\frac{SC(A)}{gl(A)}$	$\frac{CM(A)}{E_a}$
Error (a)	(r-1)(p-1)	$SC(Error(a))$	$\frac{SC(Error(a))}{gl(Error(a))}$	
Total Unidades	pr-1	SC(Total Unid.)		
B	q-1	$SC(B)$	$\frac{SC(B)}{gl(B)}$	$\frac{CM(B)}{E_b}$
AB	(p-1)(q-1)	$SC(AB)$	$\frac{SC(AB)}{gl(AB)}$	$\frac{CM(AB)}{E_b}$
Error(b)	p(q-1)(r-1)	$SC(Error(b))$	$\frac{SC(Error(b))}{gl(Error(b))}$	
Total Subunidades	pqr-1	$SC(Total\ Subunid.)$		

Hipótesis:

Para el Modelo I (Efectos fijos) las hipótesis son, en términos de los efectos de los niveles de los factores las siguientes:

Para el efecto principal de *A*: H_0: $\alpha_i = 0 \;\forall\, i$

H_1: $\alpha_i \neq 0$ para al menos algún i

Para el efecto principal de *B*: H_0: $\beta_i = 0 \;\forall\, k$

H_1: $\beta_i \neq 0$ para al menos algún k

Para el efecto de la interacción *AB*: H_0: $(\alpha\beta)_{ik} = 0 \;\forall\, i, k$

H_1: $(\alpha\beta)_{ik} \neq 0$ para al menos algún i, k

Estadístico de Prueba:

Para el efecto principal de *A*: $\mathbf{F} = \dfrac{CM(A)}{E_a} \sim F_{(\mathrm{gl}(A),\ \mathrm{gl(Error(a))})}$

Para el efecto principal de *B*: $\mathbf{F} = \dfrac{CM(B)}{E_b} \sim F_{(\mathrm{gl}(B),\ \mathrm{gl(Error(b))})}$

Para el efecto principal de *AB*: $\mathbf{F} = \dfrac{CM(AB)}{E_b} \sim F_{(\mathrm{gl}(AB),\ \mathrm{gl(Error(b))})}$

Regla de Decisión:

Las hipótesis nulas se rechazan con un nivel de significación α si el **F** resulta mayor que el valor de tabla $\mathbf{F}_{(1-\alpha)}$ con los grados de libertad correspondientes a cada caso.

Al igual que en el análisis de un experimento factorial, se debe primero evaluar la hipótesis correspondiente a la interacción. De no existir interacción, se procedería a evaluar los efectos principales de los factores, en caso contrario, sería necesario evaluar los efectos simples.

Ejemplo (Cont.): A continuación se presenta el análisis de varianza y la prueba de hipótesis correspondientes para el ejemplo tratado en esta sección:

$$SC(Total\ subunidades) = (111^2 + 130^2 + ... + 99^2) - \frac{5180^2}{(3)(4)(4)} = 38303.7$$

$$SC(Total\ unidades) = (\frac{572^2 + 533^2 + ... + 341^2}{4}) - \frac{5180^2}{(3)(4)(4)} = 17361.2$$

$$SC(Bloques) = \frac{1624^2 + 1287^2 + 1178^2 + 1091^2}{12} - \frac{5180^2}{(3)(4)(4)} = 13634.2$$

$$SC(Comb.\ AB) = \frac{308^2 + 400^2 + ... + 516^2}{4} - \frac{5180^2}{(3)(4)(4)} = 17756.2$$

$$SC(A) = \frac{1655^2 + 1800^2 + 1725^2}{16} - \frac{5180^2}{(3)(4)(4)} = 657.3$$

$$SC(B) = \frac{973^2 + 1230^2 + 1400^2 + 1577^2}{12} - \frac{5180^2}{(3)(4)(4)} = 16538.2$$

$$SC(AB) = 17756.2 - 657.3 - 16538.2 = 560.7$$

$$SC(Error(a)) = 17361.2 - 657.3 - 13634.2 = 3069.7$$

$$SC(Error(b)) = 38303.7 - 17361.2 - 16538.2 - 560.7 = 3843.6$$

Cuadro ANOVA

Fuentes de Variación	Grados de Libertad (gl)	Sumas de Cuadrados (SC)	Cuadrados Medios (CM)	F
Bloques	3	13634.2	4544.7	
A	2	657.3	328.6	0.6423
Error (a)	6	3069.7	511.6	
Total Unidades	11	17361.2		
B	3	16538.2	5512.7	38.66
AB	6	560.7	93.5	0.6557
Error(b)	27	3843.6	142.6	
Total Subunidades	47	38303.7		

Hipótesis:

Para el Modelo I (Efectos fijos) las hipótesis son, en términos de los efectos de los niveles de los factores las siguientes:

Para el efecto principal de *A*: H_0: $\alpha_i = 0\ \forall i$
H_1: $\alpha_i \neq 0$ para al menos algún i

Para el efecto principal de *B*: H_0: $\beta_i = 0\ \forall k$
H_1: $\beta_i \neq 0$ para al menos algún k

Para el efecto de la interacción *AB*: H_0: $(\alpha\beta)_{ik} = 0 \;\; \forall\, i, k$
H_1: $(\alpha\beta)_{ik} \neq 0$ para al menos algún *i*, *k*

Para la interacción el estadístico de prueba es $F = 0.6557$ y el valor de la tabla, con un nivel de significación del 5% es de $F_{(0.95,6,27)} = 2.46$. Dado que el estadístico de prueba resulta menor que el valor de la tabla se acepta H_0 y se concluye que no existe suficiente evidencia estadística para aceptar que exista interacción entre la variedad de cebada y el nivel de abonamiento. Al aceptar que no existe interacción entre los dos factores se procede a evaluar los efectos principales. Para el factor *A* (variedad), el $F = 0.6423$ es menor que el valor de la tabla $F_{(0.95,2,6)} = 5.14$; para el factor *B* (nivel de abonamiento), el $F = 38.66$ es mayor que el valor de la tabla $F_{(0.95,3,27)} = 2.96$. Luego, se concluye que:

- No existe suficiente evidencia estadística con un nivel de significación del 5% para aceptar que con al menos una de las variedades de cebada se obtengan rendimientos diferentes.
- Existe suficiente evidencia estadística con un nivel de significación del 5% para aceptar que con al menos uno de los niveles de abonamiento se obtiene un rendimiento diferente.

En este diseño, se debe calcular un coeficiente de variación para parcelas y otros para subparcelas:

$$cv(parcelas) = \frac{\sqrt{E_a/q}}{\overline{Y}_{\bullet\bullet\bullet}} \qquad\qquad cv(subparcelas) = \frac{\sqrt{E_a}}{\overline{Y}_{\bullet\bullet\bullet}}$$

Con los datos del ejemplo se tiene:

$$cv(parcelas) = \frac{\sqrt{142.6}}{107.9} = 10.48\% \qquad\qquad cv(subparcelas) = \frac{\sqrt{142.6}}{107.9} = 11.07\%$$

4.1.3 Pruebas de comparación de medias

Para comparar las medias de los niveles *i* y *j* de factor sobre todos los niveles del otro (efectos principales) se deben utilizar las siguientes fórmulas para las desviaciones estándar:

Prueba	Factor *A* (Parcelas)	Factor *B* (Subparcelas)
***t* y DLS**	$S_d = \sqrt{\dfrac{2E_a}{qr}}$	$S_d = \sqrt{\dfrac{2E_b}{pr}}$
Tukey	$S_d = \sqrt{\dfrac{2E_a}{qr}}$	$S_d = \sqrt{\dfrac{2E_b}{pr}}$

4.1.4 Pruebas de comparación de medias de efectos simples

Para compara las medias de los niveles *k* y *l* de un factor en un nivel del otro utilice las siguientes fórmulas para las desviaciones estándar:

Prueba	Factor A en b_i	Factor B en a_i
t y DLS	$S_d = \sqrt{\dfrac{2[(q-1)E_b + E_a]}{qr}}$	$S_d = \sqrt{\dfrac{2E_b}{r}}$
Tukey		$S_d = \sqrt{\dfrac{E_b}{r}}$

Al compara dos medias del factor *A* en un nivel del factor B, se están comparando tanto parcelas como subparcelas, por lo que es necesario utilizar un promedio ponderado de E_a y E_b para el cálculo de la desviación estándar como se puede ver en el cuadro presentado arriba. Las ponderaciones son (q-1) y l para E_b y E_a respectivamente, las cuales suman *q*, cantidad que aparece en el divisor. Para estas comparaciones, el valor *t* calculado no sigue una distribución *t* de Student, y por lo tanto se deberá utilizar la siguiente aproximación para el valor tabular:

$$t' = \frac{(q-1)E_b t_b + E_a t_a}{(q-1)E_b + E_a}$$

donde los valores t_a y t_b son los valores de la tabla *t* Student con los grados de libertad de E_a y E_b respectivamente.

4.1.5 Ejercicios

1) La siguiente información corresponde a un experimento en tabaco realizado con un diseño de parcelas divididas en DBCA con 3 bloques, donde los factores están dados por:

   A (en unidades). Tipo riego con 3 niveles (a_1, a_2 y a_3).
   B (en subunidades): Tipo de fertilizante con 2 niveles (b_1 y b_2).
   Los resultados del experimento, en Kg. por parcela, se dan a continuación:

	Riego	b_1	b_2
Bloque I	a_1	159	301
	a_2	220	409
	a_3	303	144

	Riego	b_1	b_2
Bloque II	a_1	207	209
	a_2	109	186
	a_3	281	153

	Riego	b_1	b_2
Bloque III	a_1	333	419
	a_2	198	254
	a_3	253	228

   a) Presente el modelo aditivo lineal e interprete sus componentes en términos del problema.
   b) Realice el ANOVA y presente los coeficientes de variabilidad.
   c) Utilice la prueba t para comprar las medias de los niveles del factor fertilizante en cada uno de los sistemas de riego.

2) Considere un experimento para comparar el efecto de tres diferentes planes de manejo en el campo para ser cultivado con cuatro diferentes variedades de trigo. Seis parcelas fueron aleatoriamente asignadas a los planes de manejo (Facto A). Entonces, cada parcela es dividida en cuatro subparcelas y las cuatro variedades (Factor B) son aleatoriamente asignadas a ellas (en forma independiente dentro de cada parcela). A continuación se presentan los resultados obtenidos en Kg./subparcela.

Plan de Manejo	Parcela	Variedad I	II	III	IV
Sin labrar	1	178	154	119	145
	2	164	154	107	139
Sin cultivar en verano	1	141	130	81	116
	2	129	112	73	98
Cultivado en verano	1	151	144	113	132
	2	197	176	137	150

a) Presente el modelo aditivo lineal e interprete sus componentes en términos del problema.
b) Realice el ANOVA y presente los coeficientes de variación.
c) Realice la prueba de Tukey para comparar las distintas variedades.

3) Se estudió el comportamiento de 4 épocas de aplicación (A) en parcelas y 3 dosis de Nitrógeno (B) en subparcelas. El experimento se llevó a cabo en un DBCA con 3 repeticiones, 12 parcelas y 36 subparcelas. Los resultados del experimento en TM/Ha de arroz se presentan a continuación:

Dosis d Nitrógeno (Subparcelas): 0 Kg/Ha (b_1), 50 Kg/Ha (b_2), 100 Kg/Ha (b_3)

Toda la siembra (a_1)

	Bloques			
	I	**II**	**III**	**Total**
b_1	6.1	8.1	7.8	22.0
b_2	3.8	7.2	6.0	17.0
b_3	4.0	3.1	4.6	11.7
Total	13.9	18.4	18.4	50.7

Macollo y Floración (a_3)

	Bloques			
	I	**II**	**III**	**Total**
b_1	5.1	7.8	5.9	18.8
b_2	5.8	7.1	7.7	20.6
b_3	4.1	5.0	4.5	13.6
Total	15.0	19.9	18.1	53.0

Toda la siembra (a_2)

	Bloques			
	I	**II**	**III**	**Total**
b_1	6.1	6.8	6.0	18.9
b_2	4.2	6.2	4.4	14.8
b_3	4.1	5.2	4.5	13.8
Total	14.4	18.2	14.9	47.5

Siembra Macollo y Floración (a_4)

	Bloques			
	I	**II**	**III**	**Total**
b_1	4.8	6.2	5.2	16.2
b_2	5.4	6.1	6.8	18.3
b_3	4.6	5.74	5.5	15.5
Total	14.8	17.7	17.5	50

a) Presente el modelo aditivo lineal e interprete sus componentes en términos del problema.
b) Realice el ANOVA y presente los coeficientes de variación.
c) Realice la prueba de Tukey para B(a_1).

4) Un fabricante de papel está interesado en el efecto de tres diferentes métodos para la preparación de la pulpa y cuatro temperaturas de cocción de la pulpa en la resistencia a la tensión del papel resultante. El equipo que es usado en el método de la preparación de la pulpa trabaja con grandes cantidades de pulpa. El equipo que es usado para la cocción de la pulpa puede trabajar con pequeñas cantidades. En un

día, un lote de pulpa es producido por uno de los tres métodos bajo estudio. El método es aleatorizado entre los 9 días disponibles para el experimento. En cada día, el lote es dividido en cuatro sub-lotes y cada sub-lotes es cocido en cada una de las cuatro temperaturas en (^{0}F). Los resultados obtenidos para la resistencia a la tensión del papel son los siguientes:

Método	1	2	3	1	2	3	1	2	3
Día	5	1	8	7	6	3	9	4	2
Temperatura									
200	30	34	29	28	31	31	31	35	32
225	35	41	31	32	36	35	37	40	39
250	32	38	33	35	42	32	36	39	39
275	36	42	31	41	40	35	40	44	40

a) Presente el modelo aditivo lineal e interprete sus componentes en términos del problema.
b) Realice el ANOVA y presente los coeficientes de variación.
c) Realice la prueba de Tukey para comparar las distintas temperaturas.

4.2 Diseños Jerárquicos

Hemos visto como en los diseños factoriales que cada uno de los niveles de un factor presenta correspondencia con los niveles de otros factores. Sin embargo, en ciertas investigaciones se toman los datos de una forma diferente como en zoología. En estas investigaciones los diferentes niveles del factor B pueden ser muy diferentes dentro de cada nivel del factor A.

Tomando muestras en diferentes grupos y de diferente proceder, el factor *A* puede ser especies y el factor *B* proceder, estas no están relacionadas factorialmente y no pueden ser tratadas como se hace en los experimentos factoriales.

En cierto sentido, el caso de 1 factor, que ya hemos discutido es un caso especial de estos diseños jerárquicos o anidados, ya que las mismas muestras no son medidas en cada nivel del factor. El factor y las muestras no están relacionadas factorialmente, sino jerárquicamente.

El modelo jerárquico puede extenderse a cualquier número de factores sin grandes complicaciones en el análisis.

(Sigarroa, A. 1985)

4.2.1 Representación de los datos

Factor	Especies	Localidades	Subestaciones	Fechas	Especimenes
					i
				a	ii
			1		iii
		A		b	
				c	
N			2		
			3		
I	**I**		4		
		B	5		
V			6		
			7		
E		C	8		
L			9		
		D			
	II	E			
		F			
		G			
	III	H			
		I			

Los factores pueden describirse como:

1) Especies.
2) Localidades dentro de especies.
3) Subestaciones dentro de localidades.
4) Días dentro de subestaciones.
5) Especimenes dentro de días.

Ahora bien, cuales 2 factores adyacentes pueden formar un modelo lineal de un solo factor con réplicas. Tomando solamente especimenes dentro de días y días dentro de subestaciones, los especimenes constituyen observaciones repetidas en cada nivel del factor día. Moviéndonos hacia arriba en la jerarquía: días dentro de subestaciones son observaciones repetidas en cada nivel del factor subestaciones. Este proceso puede repetirse hasta que se alcance el tope de la jerarquía, donde el último análisis de 1 factor es el de localidades dentro de especies, como observaciones repetidas en cada nivel del factor especie. Hay 4 comparaciones de factores simples, cada una de ellas contenida dentro de la inmediata superior, en el modelo jerárquico y todas ellas pueden combinarse en análisis simples.

Los análisis de estos diseños se denominan análisis de varianza anidado, debido a la clasificación subordinada entre los factores. El diseño también se denomina análisis de varianza jerárquico. ***(Sigarroa, A. 1985)***

4.2.2 Modelos de ANOVA

El nivel subordinado en un ANOVA jerárquico, es siempre un Modelo II. El nivel más alto de clasificación puede ser Modelo I ó Modelo II. Si es un Modelo II, podemos hablar entonces de un Modelo II puro. Si el nivel superior es Modelo I, tendremos entonces un Modelo Mixto.

Hay 2 clases de aplicaciones generales del ANOVA jerárquico. La primera de ellas no puede servir para asegurar la magnitud del error en los distintos estadios de un experimento o proceso. ***(Sigarroa, A. 1985)***

4.2.3 Modelo Aditivo Lineal

Para un ANOVA jerárquico con 2 niveles (Modelo II) el modelo aditivo lineal será:

$$Y_{ijk} = \mu + A_i + B_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

donde:

Y_{ijk} : es el valor de la k-ésima observación dentro del j-ésimo subgrupo del i-ésimo grupo.

μ : efecto de la media general.

A_i : es la contribución aleatoria del efecto del i-ésimo grupo.

B_{ij} : es la contribución aleatoria del j-ésimo subgrupo dentro del i-ésimo grupo.

ε_{ijk} : efecto de la k-ésima observación dentro del j-ésimo subgrupo del i-ésimo grupo.

De igual forma, debemos asumir que A_i, B_{ij} y ε_{ijk} están normalmente distribuidos con media cero y componentes de varianza; σ^2_A, $\sigma^2_{B\in A}$ y σ^2_ε respectivamente. Usamos el símbolo $\sigma^2_{B\in A}$, en lugar de σ^2_B para denotar que la σ^2 es del nivel *B* dentro del nivel *A*.

Cuando el Modelo es Mixto, (es decir, el nivel superior tiene un efecto fijo de tratamientos) descomponemos la observación como:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + B_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

Siendo esta expresión igual a la anterior, con la diferencia de que denotamos por α_i un efecto fijo a diferencia de A_i en el modelo anterior que representaba un efecto aleatorio.

(Sigarroa, A. 1985)

4.2.4 Calculo de la ANOVA

Definiciones:

a: número de muestras del factor *A*.
b: número de muestras del factor *B*.
c: número de elementos en cada muestra.
$\overline{Y}$: media de todos los elementos del factor *A*.
$\overline{Y}_i$: media del i-ésimo elemento del factor A
$\overline{Y}_{ij}$: media de la j-ésima muestra en el i-ésimo elemento del factor *A*.

Presentamos las fórmulas con que calculamos la Suma de Cuadrados y Cuadrados Medios.

$$SC(grupos) = bc\sum_i(\overline{y}_i - \overline{y})^2 \qquad SC(sub.g.) = c\sum_i\sum_j(\overline{y}_{ij} - \overline{y}_i)^2$$

$$SC(D) = \sum_i\sum_j\sum_k(Y_{ijk} - \overline{Y}_{ij})^2 \qquad SC(Total) = \sum_i\sum_j\sum_k(Y_{ijk} - \overline{Y})^2$$

$$CM(grupos) = \sigma_D^2 + c\sigma_{B\in A}^2 + bc\sigma_A^2 \qquad CM(sub.\ g.) = \sigma_D^2 + c\sigma_{B\in A}^2$$

$$CM(D) = \sigma_D^2$$

La tabla de análisis de varianza (Cuadro ANOVA) es el siguiente:

Fuentes de Variación	**Suma de Cuadrados (SC)**	**Grados de Libertad (gl)**	**Cuadrados Medios (CM)**	**F**
Entre grupos	$SC(grupos)$	a-1	$CM(grupos)$	$\frac{CM(grupos)}{CM(sub.g.)}$
Entre subgrupo dentro de grupos	$SC(sub.g.)$	a(b-1)	$CM(sub.\ g.)$	$\frac{CM(sub.g.)}{CM(D)}$
Dentro de subgrupos (D)	$SC(D)$	ab(c-1)	$CM(D)$	
Total	$SC(Total)$	(abc- 1)		

El modelo de los CM. Esperados o esperanza matemática de los Cuadrados Medios es tal que el test F para cualquier factor es la relación de cualesquiera dos cuadrados medios adyacentes en la tabla. Así, una prueba del efecto de grupos sería **F**. Si la prueba

F es menor que la unidad que se refleja en el estimado negativo de la componente de varianza $\hat{\sigma}^2_{B\in A}$.

Los estimados de los componentes de varianza para cualquier factor que sea aleatorio, pueden ser obtenidos sustrayendo el denominador del numerador en el test F correspondiente y dividiendo esta diferencia por el multiplicador del componente de varianza (su coeficiente).

1) Dentro de subgrupos.

$$\hat{\sigma}^2_D = CM_{(D)}$$

2) Entre subgrupos dentro de grupos.

$$\hat{\sigma}^2_{B\in A} = \frac{CM_{B\in A} - CM_{(D)}}{c}$$

3) Entre grupos.

$$\hat{\sigma}^2_A = \frac{CM_A - CM_{B\in A}}{cb}$$

Añadimos que la varianza nunca puede ser negativa, en caso de que el test **F** será No Solución. Luego en comparaciones de los estimados podemos encontrar donde puede estar la variabilidad.

4.2.5 Ejemplo para el procedimiento estadístico y conclusiones

En un experimento, se tomaron los datos originales de la mosca Drosophila persimilis en 3 localidades. Al tomar los especimenes directamente de la naturaleza, no se le realizaron las mediciones, sino que se colectaron y se les permitió obtener propagaciones en condiciones de laboratorio. Se tomaron entonces varias muestras de la progenie de cada localidad y se efectuaron las mediciones que consistieron en el conteo del número total de cerdas en el cuarto y quinto estermites del adulto. Los datos experimentales se expresan en la siguiente tabla.

	Localidades (a= 3)											
	I				**II**				**III**			
	1	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**
Mediciones (n= 5)	27	24	28	29	35	33	32	32	41	41	37	45
	31	28	31	25	33	33	36	35	34	40	42	38
	30	29	31	28	33	31	33	31	40	43	36	31
	30	31	28	27	35	33	33	34	41	37	41	36
	27	29	33	30	38	37	33	33	42	41	37	43
Suma de Subgrupos	145	143	151	139	174	167	167	165	198	202	193	193
Suma de grupos	578				673				786			

1. Comenzaremos calculando el Gran total (G)

$$G = \sum^{a}\sum^{b}\sum^{c} Y = 578 + 673 + 786 = 2037$$

2. Entonces se calcula el factor de corrección (F.C.)

$$F.C. = \frac{G^2}{N} = \frac{\left(\sum^{a}\sum^{b}\sum^{c} Y\right)^2}{a \cdot b \cdot c} =$$

$$= \frac{(2037)^2}{5 \cdot 4 \cdot 3} = 69156.15$$

3. Calculemos la Suma de Cuadrados Total (SC_T)

$$SC_T = \sum^{a}\sum^{b}\sum^{c} Y^2 - F.C. =$$

$$= (27)^2 + ... + (43)^2 - 69156.15 = 1450.85$$

4. Calculemos la Suma de Cuadrados de grupos (localidades)

$$SC_{Loc(A)} = \frac{\sum^{a}\left(\sum^{b}\sum^{c} Y\right)^2}{c \cdot b} - F.C. =$$

$$= \frac{(578)^2 + ... + (786)^2}{20} - 69156.15 = 1084.30$$

5. Calculamos la SC subgrupos dentro de grupos (muestras dentro localidades).

$$SC_{B \in A} = \frac{\sum^{a}\sum^{b}\left(\sum^{c} Y\right)^2}{c} - \frac{\sum^{a}\left(\sum^{b}\sum^{c} Y\right)^2}{c \cdot b}$$

$$= \frac{(145)^2 + ... + (193)^2}{5} - 70240.45$$

$$= 70276.20 - 70240.45 = 35.75$$

6. Calculamos la $SC_{subgrupos}$ ($SC_{Especímenes}$), que constituye la SC_{Error}.

$$SC_{esp(C \in B)} = \sum^{a}\sum^{b}\sum^{c} Y^2 - \frac{\sum^{a}\sum^{b}\left(\sum^{c} Y\right)^2}{c}$$

$$= 70607.00 - 70276.20 = 330.80$$

7. Colocamos los resultados en la tabla de ANOVA (Fórmulas).

Fuente de Variación	**G.L.**	**S.C.**	**C.M.**	**F**	**E(CM)**
Entre grupos	$a-1$	4	$\frac{4}{a-1}$	$\frac{CM_{grup}}{CM_{subg.}}$	$\sigma_{\varepsilon}^2 + c\sigma_{B \in A}^2 + c \cdot b\sigma_A^2$
Entre subgrupos dentro de grupos	$a(b-1)$	5	$\frac{5}{a(b-1)}$	$\frac{CM_{subg.}}{CM_{error}}$	$\sigma_{\varepsilon}^2 + c\sigma_{B \in A}^2$
Dentro de subgrupos	$ab(c-1)$	6	$\frac{6}{ab(c-1)}$		σ_{ε}^2

8. Ahora colocaremos los valores obtenidos en la tabla anterior (que propone las fórmulas de cálculo)

Fuente de Variación	**G.L.**	**S.C.**	**C.M.**	**F**	
Entre Localidades	2	1084.30	542.15	136.56	**
Entre muestras dentro de localidades	9	37.75	3.97	<1	N.S.
Dentro de muestras (especímenes)	48	330.80	6.89		
Total	59	1450.85			

** $\rho < 0.01$

Dentro de las componentes de los Cuadrados Medios esperados E(CM) mostrados en el ANOVA se presentan fórmulas generales y podemos entonces hacer los estimados de las componentes de varianza.

1. Dentro de subgrupos (especimenes):

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} = CM_{\varepsilon} = 6.89$$

2. Entre subgrupos dentro de grupos (muestras dentro de localidades):

$$\hat{\sigma}_{B\in A}^{2} = \frac{CM_{B\in A} - CM_{\varepsilon}}{c}$$
$$= \frac{3.97 - 6.89}{5} = -0.58 \quad \rightarrow (0)$$

3. Entre grupos (entre localidades):

$$\hat{\sigma}_{A}^{2} = \frac{CM_{A} - CM_{B\in A}}{c \cdot b}$$
$$= \frac{542.15 - 3.97}{20} = 26.91$$

Como que generalmente nos interesan solo las magnitudes relativas de las componentes de varianza, estos pueden expresarse como porcentajes de las varianzas.

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} + \hat{\sigma}_{B\in A}^{2} + \hat{\sigma}_{A}^{2}$$
$$= 6.89 + 0 + 26.91 = 33.80$$

de donde:

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} \text{ representa } \frac{6.89}{33.80} \cdot 100 = 20.38\%$$

$$\hat{\sigma}_{B\in A}^{2} \text{ representa } \frac{0}{33.80} \cdot 100 = 0\%$$

$$\hat{\sigma}_{A}^{2} \text{ representa } \frac{26.91}{33.80} \cdot 100 = 79.62\%$$

Conclusiones generales:

Como muestra el ANOVA, existe un efecto marcado de la localidad, mientras que no hay efecto de muestras dentro de localidades puesto que la ***F*** es menor que la unidad y se refleja en el estimado negativo de la componente de varianza $\hat{\sigma}_{B\in A}^{2}$.

Por definición, la varianza no puede ser negativa, pero, por supuesto, un estimado de varianza puede ser y frecuentemente es negativo, especialmente cuando la verdadera varianza es cercana a cero.

El estimado de $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}$ es mucho menor que $\hat{\sigma}_{A}^{2}$ y de esta forma la mayor parte de la variabilidad es debida a diferencias entre las localidades.

En base a estos resultados puede concluirse que las localidades analizadas son genéticamente diferentes y de esta forma estamos en presencia de diferentes razas geográficas.
(Sigarroa, A. 1985)

4.2.6 Ejercicio

1. En un experimento se tomaron 2 mediciones independientes de las alas izquierdas de 4 moscas (Aedes instrudens) criados en 3 viales diferentes. Cada vial incluía 4 moscas y los datos se presentan en la siguiente tabla expresados en unidades micrométricas.

	Vial 1				Vial 2				Vial 3			
Mediciones	58.5	77.8	84.0	70.1	69.8	56.0	50.7	63.8	56.6	77.8	69.9	62.1
	59.5	80.9	83.6	68.3	69.8	54.5	49.3	65.8	57.5	79.2	69.2	64.5
Suma de subgrupos	118.0	158.7	167.6	138.4	139.6	110.5	100.0	129.6	114.1	157.0	139.1	126.6
Suma de grupos	582.7				479.7				536.8			

Desarrolle el ANOVA jerárquico, estime los componentes de varianza (Modelo II) y concluya sus resultados.

- **Regresión lineal simple y múltiple.**
- **Análisis de Covarianza.**

5.1 Regresión lineal simple y múltiple

Frecuentemente medimos 2 o más variables en cada individuo y como consecuencia nos gustaría ser capaces de expresar de una forma más precisa la naturaleza de las relaciones entre esas variables. Esto nos lleva a los aspectos de regresión y correlación. En la regresión estimamos la relación de una variable con otra expresando una de ellas en términos de una función lineal (o más compleja) de la otra. En los análisis de correlación, que se confunden algunas veces con la regresión, estimamos el grado en que 2 variables varía simultáneamente.

Las variables involucradas en la regresión y la correlación son continuas o son tratadas como si ellas lo fueran. Si las variables son cualitativas (atributos) entonces los métodos de regresión y correlación no pueden ser utilizados.

5.1.1 Regresión Lineal Simple

El análisis de regresión lineal simple trata el problema de predecir o estimar una variable, llamada respuesta, a partir de otra variable llamada previctoria o explicativa. A la primera se le conoce también como variable dependiente y se representa generalmente con la letra *Y*, mientras que a la segunda se le conoce como variable independiente y se le representa con la letra *X*.

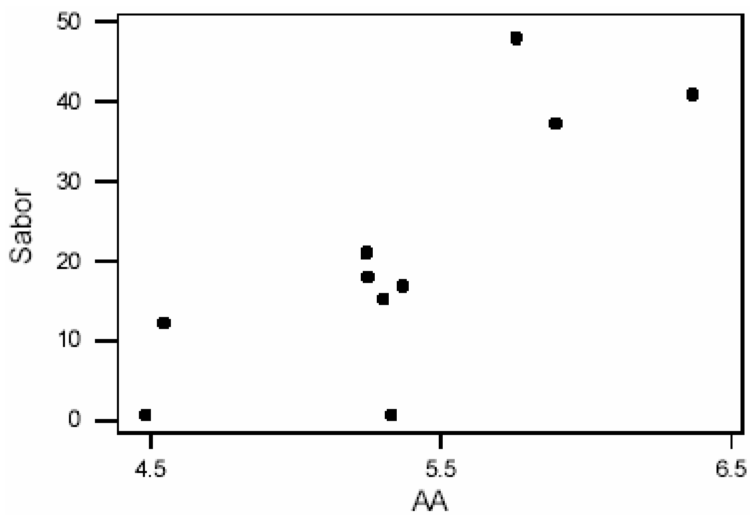
Ejemplo 1: Conforme los quesos maduran, ocurren varios procesos químicos que determinan el sabor del producto final. En un estudio en queso cheddar, 10 muestras de queso fueron analizadas en su composición química. Además, una medida subjetiva del sabor fue obtenida combinando los escores asignados por varios sujetos que probaron el queso. Los datos se dan a continuación:

Muestra	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Sabor	12.3	47.9	37.3	21	0.7	40.9	18	15.2	16.8	0.7
AA	4.543	5.759	5.892	5.242	4.477	6.365	5.247	5.298	5.366	5.328
H_2S	3.135	7.496	8.726	4.174	2.996	9.588	6.174	5.22	3.664	3.912
AL	0.86	1.81	1.29	1.58	1.06	1.74	1.63	1.33	1.31	1.25

Las variables son:
Sabor: Puntaje de sabor sujetivo, obtenido combinando los puntajes de varios sujetos.

AA: Logaritmo natural de la concentración de ácido acético.
H_2S: Logaritmo natural de la concentración de sulfuro de hidrógeno.
AL: Concentración de ácido láctico.

El objetivo de este estudio es evaluar el efecto de las variables AA, H_2S y AL (variables independientes o predictoras) en el sabor del queso (variable dependiente o respuesta). A continuación se presenta un gráfico de dispersión entre las variables Sabor y AA:

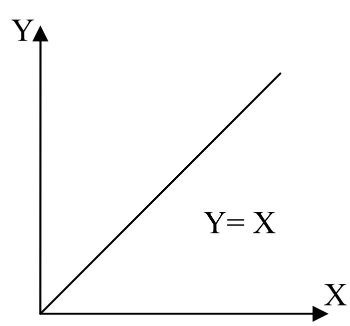


En este caso la variable respuesta "*Y*" sería el sabor y la variable predoctora "*X*" la concentración de ácido acético. El gráfico muestra una aparente relación de dependencia entre ambas variables en el sentido de que mayor concentración de ácido mayor será la calificación del sabor.

Muchos aspectos científicos tienen que ver con la relación entre pares de variables en las que se plantea la relación causa- efecto.

Una función es una relación que nos permite predecir que valores de una variable (*Y*) corresponden a determinados valores de otra variable (*X*). Tal relación, escrita generalmente como $Y = F(X)$ nos es familiar, sin embargo, revisemos brevemente las funciones como una introducción apropiada para la regresión.

El tipo más simple de regresión sigue la ecuación $Y = X$ que se ilustra en la figura.



En esta función denotaremos (Y) como la VARIABLE DEPENDIENTE, mientras que (X) se denomina VARIABLE INDEPENDIENTE. La magnitud de Y depende de la magnitud de X y puede, por consiguiente, ser predicha a partir de la variable independiente.

Puede notarse que la ecuación $Y= a+ bX$ es la ecuación lineal más general. En $Y= bX$ asumimos que $a= 0$, y en $Y= X$ $b= 1$ y $a= 0$.

$\frac{dY}{dX} = b$ nos plantea que la derivada de la función es igual a la pendiente de la recta. Aquí b es el coeficiente de regresión y la función se denomina ecuación de regresión, que nos permite relacionar la dependencia de las medias de la variable Y como una función de la variable X, mediante alguna ecuación matemática. Cuando queremos recalcar que el coeficiente de regresión es de la variable Y sobre la variable X escribimos $b_{Y \bullet X}$. Si deseamos hallar la regresión de X en Y, el símbolo apropiado para el coeficiente es $b_{X \bullet Y}$.

	X	***Y***			**E(*Y*/*X*)**
	X_1	Y_{11}	...	Y_{1n}	$\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_{1i}}{n}$
	...	...	...	...	...
	X_b	Y_{m1}	...	Y_{mn}	$\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_{mi}}{n}$
Total	$\sum_{i=1}^{b} X_i$	$\sum_{i=1}^{n} Y_{i1}$	...	$\sum_{i=1}^{n} Y_{in}$	

Usos

- El estudio de la causa.
  Si deseamos conocer si la variación en la variable Y es provocada por cambios en la variable X, manipulamos X en un experimento y vemos si podemos obtener una regresión significativa de Y en X. La idea acerca de la causa es compleja y filosófica y no tratamos aquí aspectos. No debe confundirse la variación concomitante en la causa, las variables pueden variar juntas, entonces esta covariación puede ser accidental o ambas pueden ser funciones de una causa común que las afecta. Cuando manipulamos una variable y encontramos que tales manipulaciones afectan una segunda variable, esta variación de la variable independiente X, es la causa de la variación de la variable dependiente Y (¡no la causa de la variable!)
- La descripción de leyes científicas y las predicciones.

Es una segunda área general de aplicación del análisis de regresión. La descripción matemática de relaciones entre variables en la naturaleza y los análisis de regresión nos permiten estimar relaciones funcionales entre variables, una de las cuales está sujeta a error. Estas relaciones funcionales no siempre tienen un significado interpretable.

(Sigarroa, A. 1985)

5.1.2 Modelo Estadístico

El modelo poblacional de regresión lineal simple es el siguiente:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i \quad i = 1, \ldots, n$$

donde α es el estimador de a y β el estimador de b.

Los parámetros del modelo son estimados por el método de Mínimos Cuadrados. Este método permite obtener los valores estimados de α y β de modo que la suma de los errores al cuadrado sea mínima; es decir, de lo que se trata es de calcular a y b de modo que se minimice la siguiente expresión:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - a - bX_i)^2$$

La aplicación de este método da los siguientes resultados para la estimación de los parámetros:

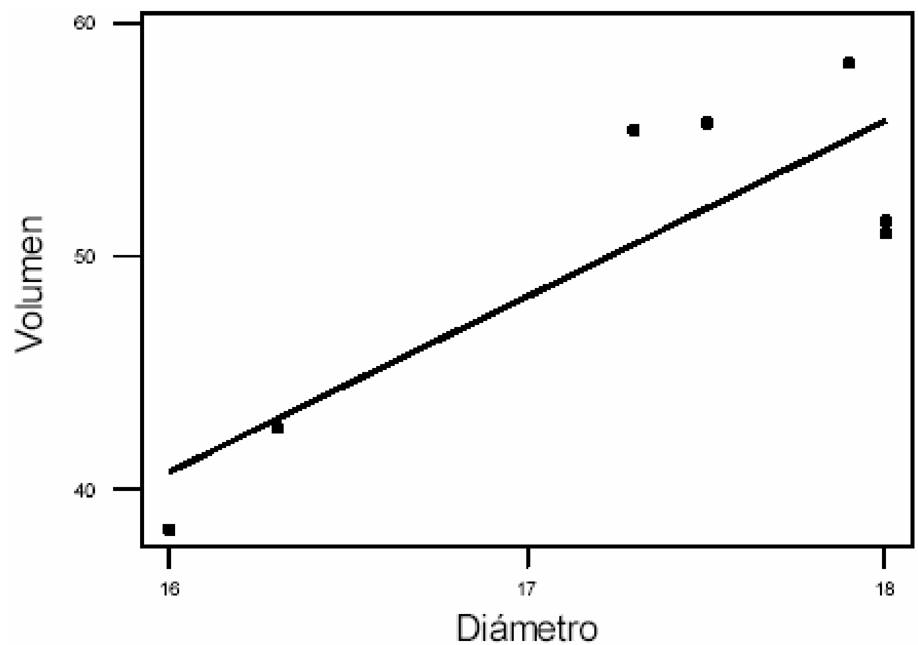
$$\hat{\beta} = b = \frac{SP(XY)}{SC(X)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\overline{XY})^2}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2}$$

$$\hat{\alpha} = a = \overline{Y} - b\overline{X}$$

La interpretación de estos valores, es clara. El intercepto α es el valor estimado de la variable Y cuando la variable X es cero y la pendiente b es el cambio estimado en Y por cambio unitario en X. Sin embargo, la interpretación de a tendrá sentido solo en el caso en que un valor de X= 0 sea posible y además, cuando valores cercanos a X= 0 hallan sido utilizados en la estimación. Para ilustrar estas ideas vea el siguiente caso.

En el gráfico que se presenta a continuación se observa la relación entre las variables diámetro y el volumen para una muestra de 7 árboles con diámetros de entre 16 y 18 pulgadas.

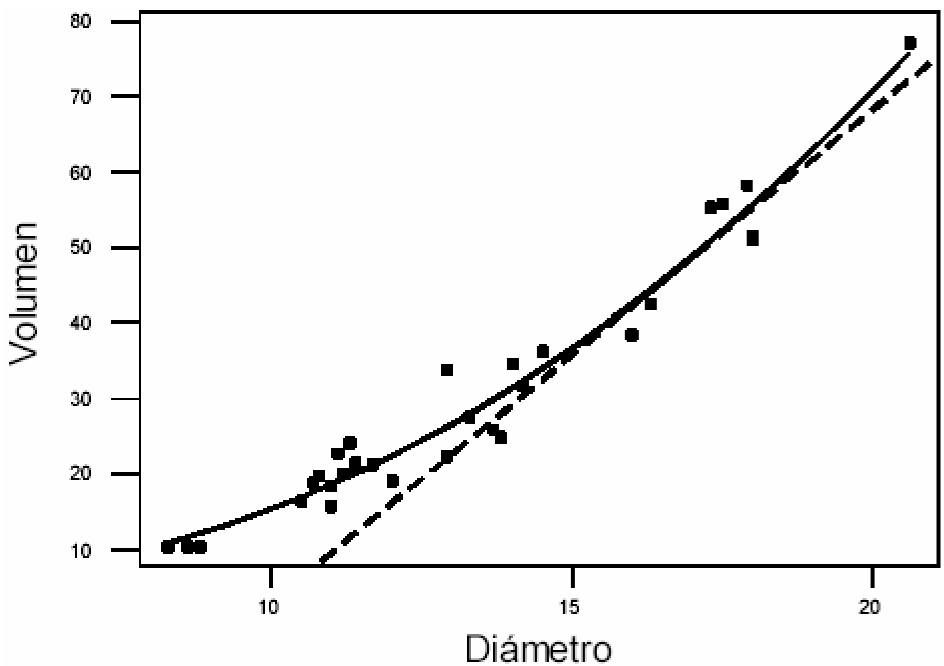


La ecuación de regresión estimada en este caso es:

$$Volumen = -79.27 + 7.5Diámetro$$

El intercepto estimado es -79.27, lo cual indicaría que a un diámetro de cero el volumen estimado es de -79.27 pies cúbicos. Obviamente esto no tiene ningún sentido ya que un diámetro de cero es imposible (no habría árbol).

Aun suponiendo que un diámetro de cero fuera posible, la interpretación del valor estimado de Y cuando X= 0 no sería válida ya que para la construcción del modelo se emplearon datos de diámetros comprendidos entre 16 y 18 pulgadas. Para llevar la discusión a un plano más realista suponga que se desea estimar, a partir del modelo anterior, el volumen de un árbol con un diámetro de 10 pulgadas. A continuación se presenta un diagrama de dispersión con la muestra completa de 31 árboles cuyos diámetros van desde 8.3 hasta 20.4.



La curva sólida muestra la relación entre ambas variedades para los datos de los 31 árboles y la línea punteada corresponde a la ecuación estimada con los 7 árboles iniciales. Como se puede apreciar, la línea recta es bastante buena para describir la relación entre el diámetro y el volumen para árboles con diámetros de entre 16 y 18 pulgadas, pero su ajuste ya no es tan bueno conforme los valores de *X* se alejan de dicho rango. El modelo lineal simple podría ser aceptable para estimar el volumen de un árbol con un diámetro de 15 ó inclusive 14 pulgadas pero definitivamente no para uno de 10.

Ejemplo 1 (Cont.): Se va a estimar el modelo de regresión que considera a la variable AA como variable predictora. Quedan como ejercicios los análisis de los casos de las variables H_2S y AL.

$$\overline{Y} = 21.08 \qquad \overline{X} = 5.3517$$

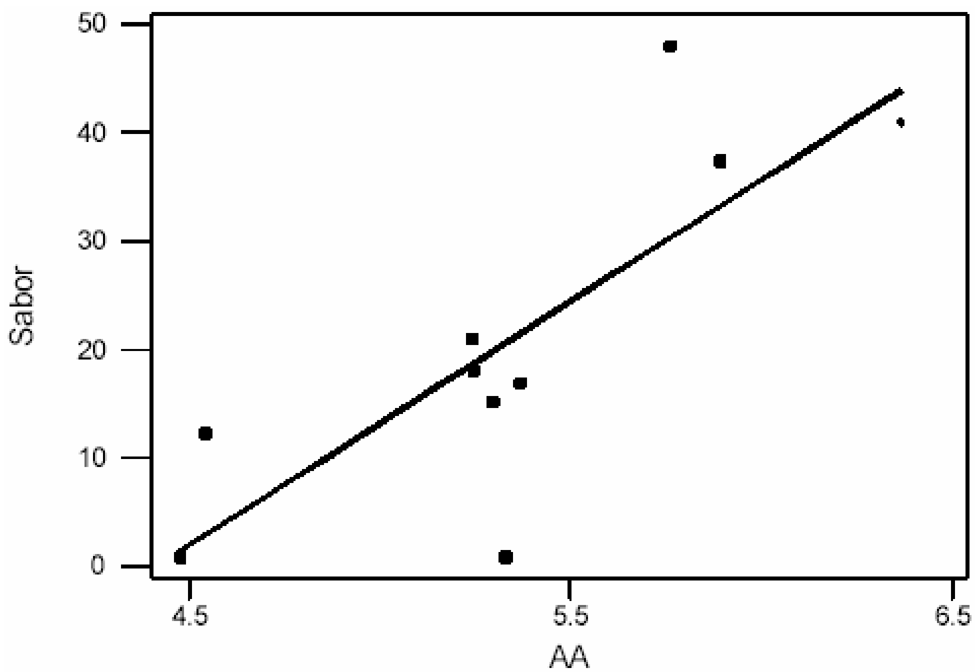
$$\sum X_t^2 = 289.34 \qquad \sum Y_t^2 = 6789.06 \qquad \sum X_t Y_t = 1193.91$$

$$b = \frac{1193.91 - 10(21.08)(5.3517)}{289.34 - 10(5.3517)^2} = 22.44$$

$$a = 21.08 - 22.44(5.3517) = -99.03$$

El modelo estimado es:

$$\widehat{Y} = -99.03 + 22.44X$$



En este caso el intercepto, -99.03, correspondería al puntaje estimado del sabor de un queso cuando el logaritmo natural de la concentración de ácido acético es igual a cero. Dado que en la estimación de este modelo se utilizaron valores de AA de 4.477 hasta 6.365, esta interpretación no tiene validez. La pendiente en cambio, 22.44, es siempre interpretable y en este caso indica que por cada incremento unitario en el logaritmo natural de la concentración de ácido acético, se estima un incremento en el puntaje del sabor de 22.44 puntos.

5.1.3 Análisis de Varianza

El análisis de varianza permite evaluar si el modelo es o no significativo (si *X* explica o no a *Y*).

Hipótesis:

H_0: β= 0
H_1: β≠ 0

Cuadro de Análisis de Varianza (Cuadro ANOVA):

Las hipótesis anteriores son evaluadas a través del análisis de la varianza de *Y*. Dado el modelo $Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$, la varianza de *Y* es explicada por la regresión (βX_i) y por error (ε_i). El término α no participa del análisis ya que es una constante.

El cuadro de análisis de varianza es el siguiente:

Fuente de Variación	Gl	SC	CM	F
Regresión	1	bSP(XY)	$\frac{SC(\operatorname{Re}g)}{gl(\operatorname{Re}g)}$	$\frac{CM(\operatorname{Re}g)}{CM(Error)}$
Error	n-2	SC(Y)-bSP(XY)	$\frac{SC(Error)}{gl(Error)}$	
Total	n-1	SC(Y)		

Estadístico de Prueba:

$$\mathbf{F}= \frac{CM(\operatorname{Re}g)}{CM(Error)} \sim F_{(1,\ n-2)}$$

Reglas de Decisión:

La hipótesis nula se rechaza con un nivel de significación α si el **F** resulta mayor que el valor de la tabla $F_{(1-a,\ n-2)}$.

Ejemplo 1 (Cont.): Para el caso de las variables *Y*= sabor y *X*= AA, se tiene lo siguiente:

H_0: β= 0
H_1: β≠ 0

O dicho literalmente:
H_0: El sabor del queso no depende de la concentración de ácido acético.
H_1: El sabor del queso sí depende de la concentración de ácido acético.

Cuadro ANOVA:

F. V.	Gl	SC	CM	F
Regresión	1	1476	1476	13.58
Error	8	869	109	
Total	9	2345		

El valor de tabla para un nivel de significación del 5% es $F_{(0.95,1,8)} = 5.318$. Como el valor calculado es mayor al valor de tabla se rechaza H_0. En conclusión, existe suficiente evidencia estadística para aceptar que el sabor del queso depende de la concentración de ácido acético a través de un modelo lineal.

5.1.4 Coeficiente de Correlación y de Determinación

El coeficiente de determinación mide el porcentaje de la variabilidad de la respuesta que es explicado por la variable predictora. Su valor va de 0 a 1 y se calcula mediante la siguiente expresión:

$$r^2 = \frac{SC(\mathrm{Re}\,gresión)}{SC(Total)}$$

El coeficiente de correlación es una medida de la asociación existe entre dos variables cuantitativas. Este coeficiente toma valores desde -1 hasta 1. Para interpretar un coeficiente de correlación tenga en cuenta lo siguiente:

- Un valor de -1 significa una perfecta correlación negativa, es decir, todos los puntos caen sobre una línea con pendiente negativa.
- Un valor de 0 significa no correlación.
- Un valor de 1 significa una perfecta correlación positiva, es decir, todos los puntos caen sobre una línea con pendiente positiva.

El coeficiente de correlación es la raíz cuadrada del coeficiente de determinación con el signo de *b* (pendiente estimada).

Ejemplo 1 (Cont.): Para el ejemplo tratado en esta sección se tiene:

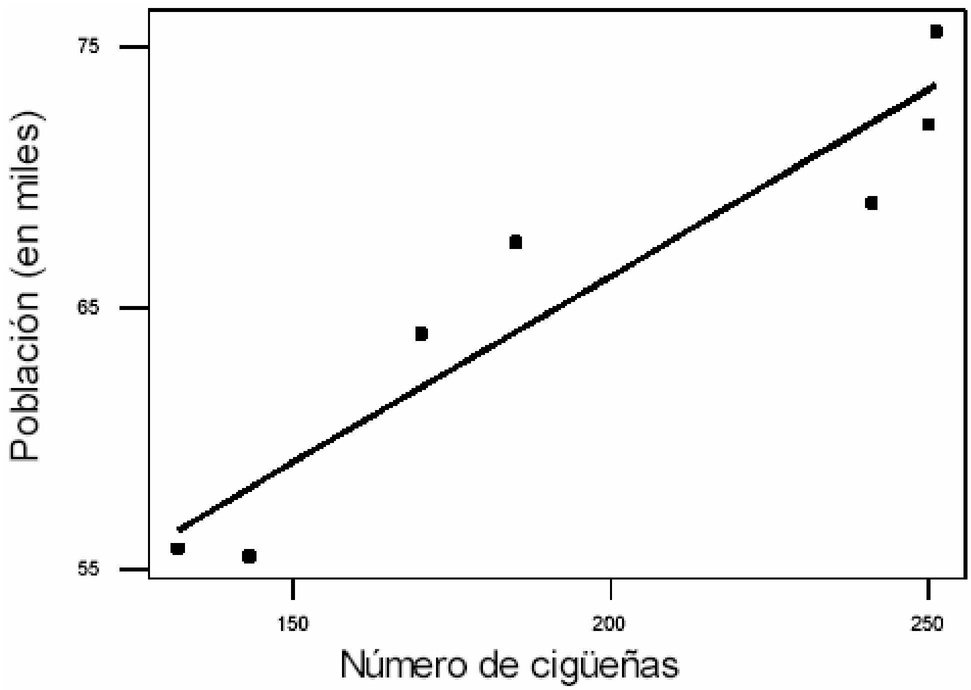
$$r^2 = \frac{1476}{2345} = 0.63$$

El 63% de la variabilidad del sabor es explicado por la concentración de ácido acético.

$$r = \sqrt{0.63} = 0.79$$

0.79 indica una elevada correlación positiva.

Es preciso tener en cuenta que asociación estadística no implica la existencia de una relación casual. Por ejemplo, el siguiente gráfico muestra la relación entre las variables *X*: Número de cigüeñas y *Y*: Número de habitantes (en miles) de la ciudad de Oldenburg entre los años 1930 y 1936.



Note que el ajuste es bastante bueno.

5.1.5 Predicción

El objetivo principal del análisis de regresión es construir una modelo permita predecir el valor de Y cuando la variable X toma un valor determinado. Una vez que se ha determinado la validez del modelo de regresión lineal simple, la ecuación de pronóstico estará dada por:

$$\hat{Y}_i = \alpha + \beta X_i$$

El valor de $\hat{Y}$ puede interpretarse de dos maneras; como el valor individual predicho de Y para un valor dado de X, y como la media estimada de Y para un valor dado de X. Tanto el pronóstico como la estimación pueden tomar la forma de un intervalo, y al igual que en el caso puntual, el intervalo puede tomar dos formas (aunque aquí no solo la interpretación será diferente, sino también el cálculo); un intervalo de predicción para el valor individual de Y dado un valor de X, y un intervalo de confianza para el valor medio de Y dado un valor X.

Por ejemplo, si se ha construido un modelo para predecir la precipitación anual en función de ciertos factores observables en el año anterior, uno podría estar más interesado en predecir la precipitación del próximo año y evaluar cuánto podría esta variar (intervalo de predicción) que en estimar la precipitación media en años posteriores a años con las características del actual. Por otro lado, si se está estudiando la relación entre el volumen de madera y el diámetro del árbol, uno estaría más interesado (por cuestiones de manejo forestal) en el volumen medio de madera de un conjunto de árboles para determinado diámetro que en el volumen de madera de un árbol en particular con dicho diámetro. De hecho, el valor de pronóstico tendrá mayor variabilidad que la media estimada.

El intervalo de predicción de 100(1- α)% para un valor de *Y* dado *X* está dado por:

$$IP(Y|X) = \hat{Y}|X \pm t_{(1-\alpha/2, n-2)} \sqrt{CME\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(X-\overline{X})^2}{\sum (X-\overline{X})^2}\right]}$$

El intervalo de confianza de 100(1- α)% para la media de *Y* dado *X* está dado por:

$$IC(\mu_{Y|X}) = \hat{Y}|X \pm t_{(1-\alpha/2, n-2)} \sqrt{CME\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(X-\overline{X})^2}{\sum (X-\overline{X})^2}\right]}$$

Ejemplo 1 (Cont.): Para el ejemplo tratado en esta sección, se estimará puntualmente y por intervalo el sabor de un queso en el que la variable AA es igual a 6.

La estimación puntual está dada por:

$$\hat{Y} = -99.03 + 22.44(6) = 35.63$$

Este valor es el puntaje de sabor estimado para un queso en el que AA= 6. Por otro lado, no todos los quesos con AA= 6 tendrán el mismo sabor, pero el puntaje promedio estimado de estos será también igual a 35.61.

El intervalo de predicción del 95% para el valor individual está dado por:

$$IP(Y|X) = \hat{Y}|X \pm t_{(0.975, n-2)} \sqrt{CME\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(X-\overline{X})^2}{\sum (X-\overline{X})^2}\right]}$$

$$= 35.63 \pm 2.306 \sqrt{108.7\left[1 + \frac{1}{10} + \frac{(6-5.352)^2}{2.93}\right]}$$

$$= 35.63 \pm 26.81$$
$$= [8.82; 62.44]$$

El intervalo de confianza del 95% para la media de *Y* es:

$$IC(\mu_{Y|X}) = \hat{Y}\Big|X \pm t_{(0.975,n-2)}\sqrt{CME\left[1+\frac{1}{n}+\frac{(X-\overline{X})^2}{\sum(X-\overline{X})^2}\right]}$$

$$= 35.63 \pm 2.306\sqrt{108.7\left[1+\frac{1}{10}+\frac{(6-5.352)^2}{2.93}\right]}$$

$$= 35.63 \pm 11.86$$

$$= [23.77;47.49]$$

5.1.6 Ejercicios

En cada uno de los siguientes casos efectúe lo siguiente:

- Estime la línea de regresión lineal simple.
- Interprete los coeficientes de regresión (pendiente e intercepto).
- Efectúe el análisis de varianza.
- Calcule e interprete el coeficiente de determinación y el de correlación.
- Calcule el intervalo de predicción y de confianza para el valor individual y valor medio de *Y* dado un valor de *X* (escogido por conveniencia).

1) Se efectuó un experimento para evaluar el efecto del zinc en el peso de cacatúas. En el experimento, a 7 grupos de cacatúas adultas se les dio diferentes dosis de zinc y sus pérdidas de peso tras la primera semana fueron registradas. Los datos de los pesos medios por grupo al final de la semana están expresados como porcentajes sobre los pesos iniciales.

Ingesta de zinc	0	2	4	8	12	16	30
Peso Medio %	100	92	95	90	98	85	67

2) Se desea investigar la relación entre el porcentaje de niños que han sido inmunizados contra la difteria, tos ferina y tétano (DPT) y la mortalidad infantil (tasa de mortalidad por cada 1000 niños menores de 5 años). Los datos (información para el 1999) correspondientes a una muestra aleatoria de 20 países son:

Nación	Inmunización	Mortalidad	Nación	Inmunización	Mortalidad
Bolivia	40	165	**Italia**	85	11
Brasil	54	85	**Japón**	83	6
Canadá	85	9	**México**	65	51
China	95	43	**Polonia**	98	18
Egipto	81	94	**Senegal**	47	189
Etiopía	26	226	**Turquía**	74	90
Finlandia	90	7	**Reino Unido**	75	10
Francia	95	9	**USA**	97	12
Grecia	83	12	**URSS**	79	35
India	83	145	**Yugoslavia**	91	27

3) Los grillos hacen sus chirridos rozando rápidamente una de sus alas sobre la otra. Mientras más rápido ellos mueven sus alas, mas fuerte es el chirrido que ellos producen. Los científicos han notado que los grillos mueven sus alas más rápido cuando hace calor que cuando hace frío. Por lo tanto, escuchando el tono de los chirridos, es posible estableces la temperatura del aire. A continuación se presentan registros del tono (en vibraciones por segundo) de los chirridos de grillos en 15 diferentes temperaturas:

Vibraciones por segundo	20	16	20	18	17	16	15	17	15	16	15	17	16	17	14
Temperatura	89	72	93	84	81	75	70	82	69	83	80	83	81	84	76

4) Se desea investigar el efecto de la temperatura sobre el ritmo cardiaco de una especie de lagarto. Los lagartos fueron colocados en un recinto cerrado de modo la temperatura dentro del recinto pudo ser controlada. Los resultados obtenidos son los siguientes:

Temperatura (^{0}C)	22	22	24	24	26	26	28	28	30	30
Latidos/minuto	20.8	22.3	24.1	25.6	25.7	27.2	27.3	28.8	29.4	31.9

Temperatura (^{0}C)	32	32	34	34	36	36	38	38	40	40
Latidos/minuto	32.4	33.8	32.8	34.1	32.4	37.9	38.0	36.5	39.0	41.0

5) Se realiza un estudio para establecer una ecuación mediante la cual se pueda utilizar la concentración de estrona en saliva (X) para predecir la concentración del esteroide en plasma libre (Y). Se extrajeron los siguientes datos de 14 varones sanos:

X	1	7	8	9	9	11	13	14	14	16	17	18	20	23
Y	30	25	31	27	39	38	43	49	55	48	51	64	63	68

5.1.7 Regresión lineal múltiple

Se trata de predecir el valor de una variable respuesta (***y***) como función lineal de una familia de ***m*** variables explicativas ($x_1, x_2, ..., x_m$), a partir de una muestra de tamaño ***n*** cuyas observaciones se ordenan matricialmente:

$$
\begin{aligned}
&((y_1, x_{11}, x_{12}, ..., x_{1m}),\\
&(y_2, x_{21}, x_{22}, ..., x_{2m}),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&(y_n, x_{n1}, x_{n2}, ..., x_{nm}))
\end{aligned}
$$

siendo y_i la ***i***-ésima variable respuesta y $x_{i,j}$ la ***j***-ésima variable explicativa asociada a la observación ***i***.

Así las cosas, se trata de ajustar los datos a un modelo de la forma

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + ... + \beta_m x_{im} + e_i$$

bajo las siguientes hipótesis:

1. Los residuos e_i son normales de media 0 y varianza común desconocida σ^2; además, estos residuos son independientes.
2. El número de variables explicativas (***m***) es menor que el de observaciones (***n***); esta hipótesis se conoce con el nombre de *rango completo*.
3. No existen relaciones lineales exactas entre las variables explicativas.

El estimador del vector paramétrico es

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ : \\ \hat{\beta}_m \end{pmatrix} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

siendo

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ : \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & .... & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & .... & x_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & .... & x_{nm} \end{pmatrix}$$

habiéndose indicado la transposición matricial mediante el superíndice ***T***.

El estimador insesgado de la varianza σ^2, conocido con el nombre de *varianza residual*, tiene por expresión

$$S_R^2 = \frac{1}{n-m-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - ..... - \hat{\beta}_m x_{im})^2$$

El *coeficiente de determinación* corregido, definido como

$$R^2 = 100\left(1 - \frac{S_R^2}{S_y^2}\right)$$

siendo

$$S_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$$

mide el ajuste del modelo, se interpreta como el porcentaje de variación de la variable respuesta explicada por el modelo; así, cuanto más se acerque $\mathbf{R^2}$ a 100, con más confianza se podrá considerar el modelo lineal como válido.

El contraste de regresión es imperativo a la hora de diagnosticar y validar el modelo que se está ajustando; consiste en decidir si realmente la variable respuesta $\boldsymbol{y}$ es función lineal de las explicativas $\boldsymbol{x_1, x_2, ..., x_m}$. Formalmente, el contraste se plantea en los siguientes términos:

H_0: "no existe dependencia lineal: $\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_m = 0$

frente a la alternativa:

H_1: "sí existe alguna dependencia lineal: $\beta_j \neq 0$.

El estadístico de contraste es

$$A = \frac{n-1}{m}\frac{S_y^2}{S_R^2} - \frac{n-m-1}{m}$$

que se distribuye como una $\boldsymbol{F_{m,n-m-1}}$ de Snedecor. El contraste se realiza con un nivel de significación del 5%.

5.2 Análisis de Covarianza

El análisis de covarianza se relaciona con 2 o más variables donde no se ha ejercido un control exacto sobre las variables medibles denominadas independientes. En él se combinan los conceptos del análisis de varianza para un diseño experimental y para regresión. El análisis de covarianza es utilizado en casos en los que la variable respuesta de un diseño experimental esté relacionada con una o más variables concomitantes. Trataremos el caso de la covarianza lineal con una sola variable concomitante y se presentará el análisis para el Diseño de Bloques Completamente al Azar. El estudiante sin embargo, no tendrá ningún problema en llevar esta técnica a un Diseño Completamente al Azar.

(Sigarroa, A. 1985)

Usos

El análisis de covarianza presenta los siguientes usos:

a) Ayuda a la interpretación de los datos, especialmente con respecto a la naturaleza de los efectos de los tratamientos.
   Cualquier procedimiento estadístico sirve para la interpretación de los datos. De esta forma, este uso, incluye los restantes usos del análisis de covarianza. No obstante, este uso, intenta ser el más específico, en que el análisis de covarianza casi siempre ayuda al investigador a la comprensión de los principios, subrayando los resultados de una investigación. Debe tenerse conocimiento de que ciertos tratamientos producen efectos reales, tanto en las variables dependientes como en las independientes: en este caso, el análisis de covarianza permite ayudar determinando la forma mediante la cual esto surgió.

b) Permite dividir la covarianza total, o a la suma de los productos cruzados en partes componentes.
   Al igual que en un ANOVA se subdividen las sumas de cuadrados, en un ANCOVA se subdividen las sumas de productos.
   Una covarianza de un experimento replicado, se divide, cuando se desea determinar la relación entre dos o más variables, cuando estas no están influidas por otras fuentes de variación.
c) Hace un control sobre el error e incrementa la precisión.
d) Permite ajustar las medias de los tratamientos de la variable dependiente para diferencias en grupos de valores de las variables independientes correspondientes.
   Los usos c) y d) de la covarianza siempre aparecen juntos. La varianza de una media de tratamiento es $\frac{\sigma^2}{n}$. Por consiguiente, para disminuir esta varianza solo tenemos 2 vías. Cuando la covarianza es usada como un método de control del error, es decir, como control de σ^2 esto es un reconocimiento del hecho de que la variación observada en la variable dependiente *Y*, es atribuible parcialmente a la variación en la variable independiente *X*. Esto implica que la variación entre las $\bar{y}$ de tratamientos, está afectada por la variación entre las $\bar{x}$ de tratamientos y que

para ser comparables, las $\bar{y}$ de tratamientos deberán ajustarse, para hacerlas los mejores estimados que podrían haber sido, si todas las $\bar{x}$ de tratamientos hubieran sido las mismas.
De forma similar, si el objetivo principal de la covarianza es ajustar las $\bar{y}$ de tratamiento se hace necesaria una regresión que permita un ajuste correspondiente al error.

e) Permite estimar los datos perdidos.
Las fórmulas para estimar datos perdidos que hemos visto en los diferentes diseños experimentales que hemos tratado, dan como resultado una Suma de Cuadrados residual mínima. Sin embargo, la suma de cuadrados de tratamiento está sesgada positivamente. El uso de la covarianza para estimar los valores de los datos perdidos da como resultado una Suma de Cuadrados residual mínima y además una Suma de Cuadrados de tratamientos insesgada. El procedimiento de la covarianza es fácil de llevar a cabo, aunque más difícil de describir que los procedimientos previos, los cuales sólo requieren de la aplicación de una fórmula.

(Sigarroa, A. 1985)

5.2.1 Modelo Aditivo Lineal

Los modelos lineales aditivos para cualquiera de los diseños experimentales, resultan los mismos que para el análisis de varianza, más un término adicional para la variable independiente o concomitante.

En el modelo de clasificación simple (Diseño completamente aleatorizado) el modelo típico de análisis de varianza para el valor Y_{ij} (valor o rendimiento observado en el *j*-ésima observación, *i*-ésima clase) es, como hemos visto

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \qquad (1)$$

donde:

Y_{ij} es el valor o rendimiento observado en el *i*-ésimo tratamiento, *j*-ésimo bloque.
μ es el efecto de la media general.
τ_i es el efecto del *i*-ésimo tratamiento.
ε_{ij} es el efecto del error experimental en el *i*-ésimo tratamiento, *j*-ésimo bloque, o residuos.

Supongamos ahora que en cada unidad experimental, hemos medido otra variable X_{ij} que está linealmente relacionada con Y_{ij}. El modelo quedaría expresado como:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta(X_{ij} - \overline{X}_{\bullet\bullet}) + \varepsilon_{ij} \qquad (2)$$

donde:

β es el coeficiente de regresión lineal de *Y* sobre *X*.

Este es el modelo típico para el análisis de covarianza, si *Y* y *X* están estrechamente relacionadas, podemos esperar que este modelo se ajuste a los valores Y_{ij} mucho mejor que el modelo originadle análisis de varianza. Es decir, los residuos ε_{ij}, son menores en (2) que en (1).

En este modelo se extiende fácilmente a situaciones más complejas. En un modelo de clasificación simple (Diseño de Bloques Completos al Azar) con una observación por casilla, modelo es el siguiente:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \gamma_j + \beta(X_{ij} - \overline{X}_{\bullet\bullet}) + \varepsilon_{ij} \qquad (3)$$

i= 1,…, *t* *j*= 1,….,*b*

donde:

γ_j es el efecto del j-ésimo bloque.
X_{ij} es el valor de la variable independiente en el i-ésimo tratamiento, j-ésimo bloque.
$\overline{X}_{\bullet\bullet}$ es la media de la variable independiente.
β es el coeficiente de regresión lineal de *Y* sobre *X*.
t es el número de tratamientos.
b es el número de bloques.

Ejemplo 1: Se desarrolló un experimento cuyo objetivo era determinar si la exposición en agua calentada artificialmente afectada el crecimiento de las ostras. Cinco bolsas con diez ostras cada una fueron aleatoriamente asignadas a cinco temperaturas (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5); cada bolsa constituía una unidad experimental. Se utilizaron cinco estantes, cada uno calentado a una de las cinco temperaturas. Las otras fueron limpiadas y pesadas al comienzo y al final del experimento un mes después. El experimento se repitió cuatro veces para lo cual fueron necesarios 4 meses. Cada repetición constituye un bloque. Los pesos iniciales y finales se presentan en la siguiente tabla:

Bloq.	T_1		T_2		T_3		T_4		T_5		Total	
	X	**Y**	**X**	**Y**	**X**	**Y**	**X**	**Y**	**X**	**Y**	**X**	**Y**
I	20.4	24.6	27.2	32.6	26.8	31.7	22.4	29.1	21.8	27.0	118.6	145.0
II	19.6	23.4	32.0	36.6	26.5	30.7	23.2	28.9	24.3	30.5	125.6	150.1
III	25.1	30.3	33.0	37.7	26.8	30.4	28.6	35.2	30.3	36.4	143.8	170.0
IV	18.1	21.8	26.8	31.0	28.6	33.8	24.4	30.2	29.3	35.0	127.2	151.8
Total	83.2	100.1	119.0	137.9	108.7	126.6	98.6	123.4	105.7	128.9	515.2	616.9

El modelo aditivo lineal es el siguiente:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \gamma_j + \beta(X_{ij} - \overline{X}_{\bullet\bullet}) + \varepsilon_{ij}$$
$$i = 1,\ldots, t \qquad j = 1,\ldots,b$$

donde:

Y_{ij} es el peso final de una bolsa de ostras tratada con la *i*-ésima temperatura (tratamiento), en el *j*-ésimo mes (bloque).

μ es el efecto de la media general de los pesos.

τ_i es el efecto de la *i*-ésima temperatura del agua.

γ_j es el efecto del j-ésimo mes.

β es el coeficiente de regresión lineal de *Y*, el peso final de las ostras, sobre *X*, el peso inicial.

X_{ij} es el peso de una bolsa de ostras tratada con la *i*-ésima temperatura, en el *j*-ésimo mes.

$\overline{X}_{\bullet\bullet}$ es el peso inicial de las bolsas de ostras.

ε_{ij} es el efecto del error experimental la *i*-ésima temperatura de agua, en el *j*-ésimo mes.

$t = 5$ (Número de tratamientos).

$b = 4$ (Número de bloques).

Resulta interesante escribir la expresión (3) en las siguientes formas:

$$Y_{ij} - \beta(X_{ij} - \overline{X}_{\bullet\bullet}) = \mu + \tau_i + \gamma_j + \varepsilon_{ij} \tag{4}$$

$$Y_{ij} - \tau_i - \gamma_j = \mu + \beta(X_{ij} - \overline{X}_{\bullet\bullet}) + \varepsilon_{ij} \tag{5}$$

La forma en que se ha descrito la ecuación (4) nos permite analizar aspectos concernientes al diseño experimental.

En la ecuación (5) nos basamos en el uso de la regresión. Deseamos medir la regresión de *Y* en *X* son la interferencia de los efectos de tratamientos y bloques.

Pueden escribirse modelos lineales para un Diseño en Cuadrado Latino, experimentos factoriales (casos en que la Suma de Cuadrados de tratamientos es subdividido) y además cuando existe más de una variable independiente, pero ellos no serán discutidos en el presente texto.

5.2.4 Suposiciones del Modelo Estadístico

Además de los supuestos del diseño al cual le aplicaremos el análisis de la covarianza de las variables, se deben cumplir los siguientes:

1. Los valores de *X* son fijos, medidos sin error, y no son afectados por los tratamientos.
2. Las variables *X* y *Y* deben tener varianzas homogéneas entre los tratamientos.
3. La regresión de *Y* sobre *X* debe ser lineal.

(Sigarroa, A. 1985)

5.2.5 Análisis de Covarianza

<u>Cuadro ANCOVA</u>

Fuente de Var.	Gl	SC_X SP_{XY} SC_Y	SC aj.	Gl aj.	CM aj.
Bloques	b- 1	B_{XX} B_{XY} B_{YY}			
Trat.	t- 1	T_{XX} T_{XY} T_{YY}			
Error	(t- 1)(b-1)	E_{XX} E_{XY} E_{YY}	$SC_E = E_{YY} - \frac{E_{XY}^2}{E_{XX}}$	(t-1)(b-1)-1	$\frac{SC_E}{(t-1)(b-1)-1}$
Trat. + Error	b(t -1)	S_{XX} S_{XY} S_{YY}	$SC_{T+E} = S_{YY} - \frac{S_{XY}^2}{S_{XX}}$		
Sumas de los cuadrados, grados de libertad y cuadrados medios para evaluar diferencias entre medias ajustadas de tratamientos			$SC_{T+E} - SC_E$	t- 1	$\frac{SC_{T+E} - SC_E}{t-1}$

Los pasos para la construcción del cuadrado ANCOVA son los siguientes:

1. Calcular los grados de libertad (Columna gl).
2. Calcular las sumas de cuadrados totales en X, Y y la suma de productos total:

$$SC(X) = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{b} X_{ij}^2 - TC_X \qquad SP(XY) = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{b} X_{ij}Y_{ij} - TC_{XY}$$

$$SC(Y) = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{b} Y_{ij}^2 - TC_Y$$

donde:

$$TC_X = \frac{X_{\bullet\bullet}^2}{tb} \qquad TC_{XY} = \frac{X_{\bullet\bullet}Y_{\bullet\bullet}}{tb} \qquad TC_Y = \frac{Y_{\bullet\bullet}^2}{tb}$$

3. Calcular las sumas de cuadrados en X, Y y la suma de productos para cada una de las fuentes de variación (Columnas SC_X, SP_{XY}, SC_Y):
   Para bloques:

$$B_{XX} = \sum_{j=1}^{b} \frac{X_{\bullet j}^2}{t} - TC_X \qquad B_{XY} = \sum_{j=1}^{b} \frac{X_{\bullet j}Y_{\bullet j}}{t} - TC_{XY} \qquad B_{YY} = \sum_{j=1}^{b} \frac{Y_{\bullet j}^2}{t} - Tc_Y$$

   Para tratamientos:

$$T_{XX} = \sum_{i=1}^{t} \frac{X_{i\bullet}^2}{b} - TC_X \qquad T_{XY} = \sum_{i=1}^{t} \frac{X_{i\bullet}Y_{i\bullet}}{b} - TC_{XY} \qquad T_{YY} = \sum_{i=1}^{t} \frac{Y_{i\bullet}^2}{b} - TC_Y$$

   Para el Error (Por diferencia):

$$E_{XX} = SC(X) - B_{XX} - T_{XX} \qquad E_{XY} = SP(XY) - B_{XY} - T_{XY}$$

$$E_{YY} = SC(Y) - B_{YY} - T_{yy}$$

4. Calcular las Sumas de Cuadrados y productos para Tratamientos + Error.

$$S_{XX} = T_{XX} - E_{XX} \qquad S_{XY} = T_{XY} - E_{XY} \qquad S_{YY} = T_{YY} - E_{YY}$$

5. Calcular las sumas de cuadrados ajustados (Columna SC aj.):

$$SC_E = E_{YY} - \frac{E_{XY}^2}{E_{XX}} \qquad SC_{T+E} = S_{YY} - \frac{S_{XY}^2}{S_{XX}}$$

6. Calcular la suma de cuadrados ajustada para evaluar diferencias entre las medias ajustadas de los tratamientos:

$$SC_{T+E} - SC_E$$

7. Calcular los grados de libertad ajustados (Columna gl aj.).
8. Calculas los cuadrados medios ajustados (Columna CM aj.)

Ejemplo 1 (Cont.): A continuación se presentan los cálculos para la construcción del cuadro ANCOVA para el ejemplo tratado en esta sección:

$$SC(X) = (20.4^2 + 19.6^2 + ... + 29.3^2) - \frac{515.2^2}{(5)(4)} = 309.79$$

$$SP(XY) = ((20.4)(24.6) + (19.6)(23.4) + ... + (29.3)(35.0)) - \frac{(515.2)(616.9)}{(5)(4)} = 325.67$$

$$SC(Y) = (24.6^2 + 23.4^2 + ... + 35.0^2) - \frac{616.9^2}{(5)(4)} = 358.67$$

$$B_{XX} = \frac{(118.6^2 + 125.6^2 + ... + 127.2^2)}{5} - \frac{515.2^2}{(5)(4)} = 68.37$$

$$B_{XY} = \frac{((118.6)(145.0) + (125.6)(150.1) + ... + (127.2)(151.8))}{5} - \frac{(515.2)(616.9)}{(5)(4)} = 69.56$$

$$B_{YY} = \frac{(145.0^2 + 150.1^2 + ... + 151.8^2)}{5} - \frac{616.9^2}{(5)(4)} = 71.37$$

$$T_{XX} = \frac{(83.2^2 + 119.0^2 + ... + 105.7^2)}{4} - \frac{515.2^2}{(5)(4)} = 176.79$$

$$T_{XY} = \frac{((83.2)(100.1) + (119.0)(137.9) + ... + (105.7)(128.9))}{4} - \frac{(515.2)(616.9)}{(5)(4)} = 181.61$$

$$T_{YY} = \frac{(100.1^2 + 137.9^2 + ... + 128.9^2)}{4} - \frac{616.9^2}{(5)(4)} = 198.41$$

$$E_{XX} = 309.79 - 68.37 - 176.79 = 64.63$$
$$E_{XY} = 325.67 - 69.56 - 181.61 = 74.50$$

$$E_{YY} = 358.67 - 71.37 - 198.41 = 88.89$$

Con estos resultados, el cuadro ANCOVA es el siguiente:

Cuadro **ANCOVA**

Fuente de Variación	Gl	SC_X	SP_{XY}	SC_Y	SC aj.	Gl aj.	CM aj.
Bloques	3	68.37	69.56	71.37			
Trat.	4	176.79	181.61	198.41			
Error	12	64.63	74.50	88.89	3.0175	11	0.2743
Trat. + Error	16	241.42	256.11	287.30	15.6146		
Sumas de los cuadrados, grados de libertad y cuadrados medios para evaluar diferencias entre medias ajustadas de tratamientos					12.5971	4	3.1493

5.2.5.1 Prueba de Hipótesis para el Coeficiente de Regresión

El primer paso en un análisis de covarianza es evaluar la significación del coeficiente de regresión. Si el coeficiente de regresión resulta significativo, entonces se justifica el uso de la variable concomitante X en el modelo y por lo tanto, los efectos de los tratamientos deberán evaluarse con los datos corregidos por la regresión. De no resultar significativo este coeficiente, los efectos de los tratamientos serían evaluados a partir de un Análisis de Varianza sin considerar el efecto de la variable concomitante X.

El procedimiento de prueba de hipótesis para el coeficiente de regresión es el siguiente:

Hipótesis:

H_0: $\beta = 0$
H_1: $\beta \neq 0$

Estadístico de Prueba:

$$F = \frac{\frac{E_{XY}^2}{E_{XX}}}{CME\ \ aj.} \sim F_{(1, gl(Error\ \ aj.))}$$

Regla de Decisión:

La hipótesis nula se rechaza con un nivel de significación α si el F_c resulta mayor que el valor de tabla $F_{(1-\alpha, 1, gl(Error\ aj.))}$

Ejemplo 1 (Cont.):

H_0: $\beta = 0$
H_1: $\beta \neq 0$

Estas hipótesis son equivalentes a:

H_0: El peso final de las ostras no depende linealmente del peso inicial.
H_1: El peso final de las ostras sí depende linealmente del peso inicial.

$$F = \frac{\frac{74.50^2}{64.63}}{0.2743} = 313.05 \sim F_{(1,1)}$$

El valor de tabla para un nivel de significación del 5% es $F_{(0.95,1,11)} = 4.84$. Como el valor calculado es mayor que el valor de tabla se rechaza H_0 y se concluye que existe suficiente evidencia estadística para aceptar que el peso final de las ostras depende linealmente del peso inicial.

5.2.5.2 Prueba de Hipótesis para los efectos de los tratamientos

En el caso que la regresión resulte significativa, las hipótesis para los tratamientos se plantearán en términos de los efectos (medias) de los tratamientos ajustados por la regresión.

Hipótesis:

H_0: $\mu_{i\ aj.} = \mu_{aj.}\ \forall i$
H_1: $\mu_{i\ aj.} \neq \mu_{aj.}$ Para al menos algún i.

Estadístico de Prueba:

$$F = \frac{CM\ (Trat\ \ aj.)}{CME\ \ aj.} \sim F_{(gl(Trat.\ aj.), gl(Error\ aj.))}$$

Regla de Decisión:

La hipótesis nula se rechaza con un nivel de significación α si el F resulta mayor que el valor de tabla $F_{(1-\alpha, gl\ (Trat.\ aj.), gl\ (Error\ aj.))}$

Ejemplo 1 (Cont.):

H_0: $\mu_{i\ aj.} = \mu_{aj.}$ $\forall\ i$
H_1: $\mu_{i\ aj.} \neq \mu_{aj.}$ Para al menos algún i.

o linealmente:

H_0: Las cinco temperaturas son igualmente efectivas en el crecimiento de las ostras.
H_1: Con al menos una de las temperaturas se obtienen resultados diferentes en el crecimiento de ostras.

$$F = \frac{3.1493}{0.2743} = 11.48 \sim F_{(4,11)}$$

El valor de tabla para un nivel de significación del 5% es $F_{(0.95, 4, 11)} = 3.36$. Como el valor calculado es mayor que el valor de tabla se rechaza H_0 y se concluye que existe suficiente evidencia estadística para aceptar que con al menos una temperatura se obtiene un peso final diferente para las ostras.

5.2.6 Pruebas de Comparación de Medias de Tratamientos

Para aplicar las pruebas de comparación de medias de tratamientos se debe trabajar con las medias de los tratamientos ajustadas por la regresión. Para efectuar el ajuste, se debe calcular primero el coeficiente de regresión estimado, el cual es dado por:

$$\hat{\beta} = \frac{E_{XY}}{E_{XX}}$$

Las medias de los tratamientos ajustadas por la regresión están dadas por:

$$\overline{Y}_{i\bullet\ aj.} = \overline{Y}_{i\bullet} - \hat{\beta}(\overline{X}_{i\bullet} - \overline{X}_{\bullet\bullet})$$

Las desviaciones estándar para las pruebas son:

1) Prueba t y DLS $$S_d = \sqrt{CME\ aj.\left[\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_j} + \frac{(\overline{X}_{i\bullet} - \overline{X}_{j\bullet})^2}{E_{XX}}\right]}$$

2) Tukey $$S_d = \sqrt{\frac{CME\ aj.}{2}\left[\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_j} + \frac{(\overline{X}_{i\bullet} - \overline{X}_{j\bullet})^2}{E_{XX}}\right]}$$

3) Dunnett $$S_d = \sqrt{CME\ aj.\left[\frac{1}{r_T} + \frac{1}{r_i} + \frac{(\overline{X}_{T\bullet} - \overline{X}_{i\bullet})^2}{E_{XX}}\right]}$$

Estas fórmulas se aplican si el diseño es un DCA con r_i y r_j repeticiones para el par de tratamientos que se estén comparando (r_T es número de repeticiones para el tratamiento testigo). En el caso de un DBCA, que es el diseño que se está tratando en esta sección, el número de repeticiones para cada tratamiento es igual a b, por lo que en las fórmulas anteriores $r_i = r_j = r_T = b$ y $\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_j} = \frac{2}{b}$.

Ejemplo 1 (Cont.): Efectúe la prueba de Tukey.

Las hipótesis son las siguientes:

H_0: $\mu_{i\ aj.} = \mu_{aj.}$ $\forall\ ij = 1, 2, ..., 5$, con $i \neq j$
H_1: $\mu_{i\ aj.} \neq \mu_{aj.}$

El coeficiente de regresión estimado es:

$$\hat{\beta} = \frac{E_{XY}}{E_{XX}} = \frac{74.50}{64.63} = 1.1527$$

Las medias de las variables X y Y sin ajuntar para cada tratamiento son:

$$\overline{X}_{1\bullet} = 20.8 \quad \overline{X}_{2\bullet} = 29.75 \quad \overline{X}_{3\bullet} = 27.175 \quad \overline{X}_{4\bullet} = 24.65 \quad \overline{X}_{5\bullet} = 26.425 \quad \overline{X}_{\bullet\bullet} = 25.76$$

$$\overline{Y}_{1\bullet} = 25.025 \quad \overline{Y}_{2\bullet} = 34.475 \quad \overline{Y}_{3\bullet} = 31.65 \quad \overline{Y}_{4\bullet} = 30.85 \quad \overline{Y}_{5\bullet} = 32.225$$

Las medias de Y ajustadas para cada tratamiento según la fórmula $\overline{Y}_{i\bullet\ aj.} = \overline{Y}_{i\bullet} - \hat{\beta}(\overline{X}_{i\bullet} - \overline{X}_{\bullet\bullet})$ son:

$$\overline{Y}_{1\bullet\ aj.} = 30.74 \quad \overline{Y}_{2\bullet\ aj.} = 29.88 \quad \overline{Y}_{3\bullet\ aj.} = 30.02 \quad \overline{Y}_{4\bullet\ aj.} = 32.13 \quad \overline{Y}_{5\bullet\ aj.} = 31.46$$

El valor de tabla con α= 5%, p= 5 tratamientos y 11 grados de libertad para el error ajustado es AES(T)= 4.57. La amplitud límite significativa de Tukey está dada por la siguiente fórmula:

$$ALS(T) = AES(T) = \sqrt{\frac{CME\ aj.}{2}\left[\frac{2}{b} + \frac{(\overline{X}_{i\bullet} - \overline{X}_{j\bullet})^2}{E_{XX}}\right]}$$

donde b= 4, CME $_{aj.}$= 0.2743 y E_{xx}= 64.63.

A continuación se presentan los resultados para las 10 comparaciones:

Tratamientos Comparados	$\lvert \overline{Y}_{i\bullet\ aj.} - \overline{Y}_{j\bullet\ aj.} \rvert$	S_d	ALS(T)	Significancia
1 y 2	0.867	0.488	2.232	n.s.
1 y 3	0.724	0.393	1.798	n.s.
1 y 4	1.387	0.316	1.445	n.s.
1 y 5	0.716	0.368	1.684	n.s.
2 y 3	0.143	0.287	1.314	n.s.
2 y 4	2.254	0.352	1.608	*
2 y 5	1.583	0.303	1.386	*
3 y 4	2.111	0.287	1.310	*
3 y 5	1.440	0.264	1.207	*
4 y 5	0.671	0.274	1.254	n.s.

$\mathbf{T_2}$	$\mathbf{T_3}$	$\mathbf{T_1}$	$\mathbf{T_5}$	$\mathbf{T_4}$
29.88	30.02	**30.74**	31.46	32.13

5.2.7 Ejercicios

1) En una estación experimental se realizó un experimento en el que se evaluó el efecto del tiempo de cosecha sobre el rendimiento de grano de maíz. Se diseño un experimento con cuatro tratamientos usando una distribución de bloques completos al azar. Los tratamientos fueron 30, 35, 40 y 45 días después de ocurrida la polinización (para el tiempo de cosecha). El número de plantas por parcela útil fue de 52. La variedad usada fue "V1" y el cultivo se efectuó con riego. Los valores se presentan en el siguiente tabla:

Rendimiento de grano seco (Kg./parcela útil) y N^0 de plantas de maíz
Cosechadas a diferentes fechas de la polinización.
X: N^0 de plantas Y: Producciones de grano seco (Kg./parcela)

Días de tratamiento	Bloques							
	I		II		III		IV	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
30	41	4.08	24	2.78	31	2.79	46	4.24
35	40	4.26	36	4.23	44	5.60	48	6.36
40	37	4.72	32	4.92	38	4.50	41	5.62
45	32	4.00	38	4.53	40	4.83	40	4.30

a) Presente el Modelo Aditivo Lineal y defina cada uno de sus componentes en términos del problema.
b) Presente el cuadro ANCOVA y realice las pruebas correspondientes.
c) Realice la prueba de Tukey.

2) La siguiente información corresponde a pesos iniciales (*X*) y ganancias de peso (*Y*) en Kg. de lechones en un ensayo comparativo de 6 raciones en 5 corrales (bloques).

Corral		Raciones					
		1	2	3	4	5	6
1	**X**	17	22	18	22	22	22
	Y	4.32	4.51	3.86	4.54	4.13	4.42
2	**X**	16	15	17	15	17	13
	Y	3.72	4.30	4.51	4.19	3.86	3.43
3	**X**	19	16	21	19	19	15
	Y	4.23	4.23	3.82	4.24	4.04	3.46
4	**X**	22	21	18	21	19	23
	Y	4.79	4.94	4.02	4.39	4.31	4.70
5	**X**	20	15	18	17	18	14
	Y	4.73	4.00	4.17	4.39	3.97	3.89

a) Presente el Modelo Aditivo Lineal y defina cada uno de sus componentes en términos del problema.
b) Presente el cuadro ANCOVA y realice las pruebas correspondientes.
c) Encuentre las medias de los tratamientos ajustados.

Conclusiones.

- El material aquí expuesto sirve de apoyo a la docencia para la asignatura optativa Diseño Estadístico de Experimentos que se imparte en las carreras de Lic. En Matemáticas y Lic. en Química.

- En el trabajo se desarrollan los aspectos teóricos relativos a los diseños siguientes:

  - Diseño Completamente al Azar.
  - Diseño de Bloques Completamente al Azar.
  - Diseño Cuadrado Latino.
  - Diseño de Bloques Incompletos.
  - Diseño factoriales.
  - Diseño 2^k.
  - Diseño de Parcelas Divididas.
  - Diseño jerárquicos.
  - Regresión lineal simple y múltiple.
  - Análisis de Covarianza.

- Se elaboró un folleto que consta de 35 ejercicios propuestos que permiten el trabajo independiente de los estudiantes.

Recomendaciones.

- Que se disponga de este material en sus dos formas (soporte magnético y texto editado) a entera disposición de los estudiantes que cursan la asignatura.

- Que se continúe enriqueciendo con otros diseños y ejercicios que siempre serán útiles para el desarrollo intelectual y profesional de los estudiantes.

Bibliografía.

- Miller, I, Freud, J.E y Johnson, R.A. (2004). *Probabilidad y Estadística para ingenieros.* Ciudad de México. México. Prentice-Hall Hispanoamericana.
- Sigarroa, A. (1985). *Biometría y diseño experimental.* La Habana. Cuba. Pueblo y Educación.
- http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/ciencias/2000352/docs/contenido.html. Bajado (27 Feb 2006)
- http://tarwi.lamolina.edu.pe/%7Euchr/factoriales.htm. Bajado (30 Ene 2006)
- http://www.udc.es/dep/mate/estadistica2/estadistica_2.htm. Bajado (27 Mar 2006)
- http://www.itchihuahua.edu.mx/academic/industrial/ingcalidad/index.html. Bajado (24 May 2006)
- http://www.telefonica.net/web2/biomates/regr/regr_multilin/regr_multilin.htm. Bajado (5 Jun 2006)
- http://tarwi.lamolina.edu.pe/~jporras/DCA.doc
- http://tarwi.lamolina.edu.pe/~jporras/DBCA.doc
- http://tarwi.lamolina.edu.pe/~jporras/DCL.doc
- http://tarwi.lamolina.edu.pe/~reyzaguirre/Mei1%20-%20Cap%202.pdf. Bajado (27 Mar 2006)
- http://tarwi.lamolina.edu.pe/~reyzaguirre/Mei1%20-%20Cap%203.pdf. Bajado (27 Mar 2006)
- http://tarwi.lamolina.edu.pe/~reyzaguirre/Mei1%20-%20Cap%204.pdf. Bajado (27 Mar 2006)
- http://tarwi.lamolina.edu.pe/~reyzaguirre/Mei1%20-%20Cap%205.pdf. Bajado (27 Mar 2006)
- http://tarwi.lamolina.edu.pe/~reyzaguirre/Mei1%20-%20Cap%206.pdf. Bajado (27 Mar 2006)
- http://tarwi.lamolina.edu.pe/~reyzaguirre/Mei1%20-%20Cap%207.pdf. Bajado (27 Mar 2006)
- http://tarwi.lamolina.edu.pe/~reyzaguirre/Mei1%20-%20Cap%208.pdf. Bajado (27 Mar 2006)
- http://tarwi.lamolina.edu.pe/~reyzaguirre/Mei1%20-%20Cap%209.pdf. Bajado (27 Mar 2006)
- http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/ciencias/2000352/lecciones_html/unidad2/leccion1/leccion-03-01-02.html. Bajado (13 May 2006)
- http://halweb.uc3m.es/esp/Personal/personas/jmmarin/esp/Disenno/tema3DE.pdf.