

UNIVERSIDAD CENTRAL "MARTA ABREU" DE LAS VILLAS
FACULTAD DE MATEMÁTICA, FÍSICA Y COMPUTACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**SOLUCIÓN DE PROBLEMAS PARA ECUACIONES EN DERIVADAS
PARCIALES DE TIPO PARABÓLICO E HIPERBÓLICO CON CONDICIONES
DE CONTORNO DADAS POR SEMIEJES**

Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Matemáticas

Autora: MSc. Yanelis Estrada Hernández
Tutor: Dr. Lorgio Félix Batard Martínez

Santa Clara
2014



UNIVERSIDAD CENTRAL "MARTA ABREU" DE LAS VILLAS
VERITATE SOLA NOBIS IMPONETUR VIRILISTOGA. 1948

Facultad de Matemática, Física y Computación
Departamento de Matemática

**TÍTULO: SOLUCIÓN DE PROBLEMAS PARA ECUACIONES EN DERIVADAS
PARCIALES DE TIPO PARABÓLICO E HIPERBÓLICO CON CONDICIONES DE
CONTORNO DADAS POR SEMIEJES**

Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Matemáticas

Autora: MSc. Yanelis Estrada Hernández
Tutor: Dr. Lorgio Félix Batard Martínez

Santa Clara
2014

CON SU ENTRAÑABLE TRANSPARENCIA



***“No se puede abrir un libro de ciencia
sin que salten en montón,
ilustraciones preciosas de los hechos del espíritu”***

José Martí

AGRADECIMIENTOS

A:

Mi Tutor, por ayudarme a crecer entre las ciencias, por su incondicional apoyo y dedicación, por ser el mejor de los buenos, por ser Lorgio Batard, esa persona que admiro, sigo y respeto incondicionalmente.

Mi mamá, por ser mi madre, por darme ese gran regalo: la oportunidad de existir.

Darel Ferrer García por haberme enseñado a levantarme con estilo cuando caigo, por enseñarme a vivir.

Los que ya no están, por haber estado algún día ofreciéndome infinitos momentos.

Mis profesores, por educarme y formarme.

Mi familia, por apoyarme, por estar siempre a mi lado.

Mis amigos, porque sin ustedes, sin sus compañías, sin sus risas y sus llantos, sin sus manos, no hubiese tenido la fuerza para levantarme y seguir adelante.

La Revolución, que me ha permitido estudiar e investigar en un campo de la ciencia.

Ustedes todos, porque de una forma u otra, me han ayudado a ser mejor cada día.

DEDICATORIA

“A la vida que me ha dado tanto”

SÍNTESIS

En la presente investigación se abordan problemas de tipo parabólico e hiperbólico con condiciones de contorno con un alto grado de complejidad, que son reducidos, mediante el operador de Fourier, a un problema de contorno de Riemann con solución conocida, lo que completa los resultados del grupo de ecuaciones diferenciales de la Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas, que había resuelto el referido problema para ecuaciones diferenciales parciales de tipo elíptico. A partir de la solución del problema de Riemann se obtiene la solución en cuadraturas de los problemas parabólicos e hiperbólicos inicialmente planteados, para diferentes valores del índice del problema de Riemann, utilizando una técnica no registrada en la amplia bibliografía revisada.

Con los resultados obtenidos en la tesis es posible resolver problemas de la Física-Matemática que sean de interés para ingenieros y especialistas de diferentes dominios de las ciencias técnicas, sin la necesidad del dominio total de la teoría expuesta.

TABLA DE CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN..... Pág.1

**CAPÍTULO I: EL PROBLEMA DE RIEMANN: RESEÑA HISTÓRICA, ALGUNAS
DEFINICIONES Y RESULTADOS AUXILIARES..... Pág.6**

1.1 Reseña histórica del Problema de Riemann..... Pág.7

1.1.1 Introducción Pág.7

**1.1.2 Solución del problema de Riemann en un contorno
cerrado Pág.11**

**1.1.3 Resultados cuando el contorno es el eje real cerrado
..... Pág.17**

1.1.4 Casos singulares..... Pág.19

**1.1.5 Algunos de los resultados más recientes sobre el
problema de Riemann..... Pág.20**

**1.1.6 Resultados del grupo de ecuaciones diferenciales de
la Universidad central “Marta Abreu” de Las Villas ... Pág.22**

1.2 Resultados auxiliares Pág.23

1.2.1 Clases de funciones..... Pág.25

1.2.2 Problema de Riemann en las clases de funciones en las que se busca la solución de los problemas de contorno de esta investigación	Pág.27
1.2.3 Problema de Salto	Pág.28
1.2.4 Teorema generalizado de Liouville.....	Pág.29
1.2.5 Teorema de prolongación analítica	Pág.30
1.2.6 Relación entre la integral de tipo Cauchy y de tipo Fourier.....	Pág.30
CAPÍTULO II: SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE TIPO PARABÓLICO CON CONDICIONES DE CONTORNO DIFERENTES POR SEMIEJES	Pág.31
2.1 Planteamiento del problema no homogéneo.....	Pág.33
2.2 Reducción a un problema de Riemann	Pág.34
2.3 Condiciones de solubilidad del Problema de Riemann obtenido a partir del problema de contorno parabólico...	Pág.38
2.4 Cálculo del índice del coeficiente del problema de Riemann	Pág.43
2.4.1 Casos de índice cero	Pág.43
2.4.2 Casos de índice uno	Pág.44
2.4.3 Caso de índice dos.....	Pág.44
2.4.4 Casos de índice menos uno.....	Pág.44
2.4.5 Casos de índice menos dos	Pág.44

2.5 Solución del problema de Riemann para los casos de índice cero.....	Pág.45
2.6 Solución del Problema de Riemann para los casos de índice positivos.....	Pág.51
2.6.1 Casos de índice uno	Pág.51
2.6.2 Caso de índice dos.....	Pág.54
2.7 Solución del Problema de Riemann para los casos de índice negativo.....	Pág.56
2.7.1 Solución de los casos de índice menos uno	Pág.56
2.7.2 Solución del problema de Riemann para el caso de índice menos dos.....	Pág.59
CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO	Pág.60
 CAPÍTULO III: SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE CONTORNO DE TIPO HIPERBÓLICO CON CONDICIONES DE CONTORNO DIFERENTES POR SEMIEJES.....	
3.1 Planteamiento del problema no homogéneo.....	Pág.63
3.2 Reducción a un problema de Riemann	Pág.64
3.3 Condiciones de solubilidad del problema de Riemann obtenido a partir del problema de contorno hiperbólico .	Pág.69

3.4 Solución de problemas hiperbólicos con diferentes condiciones de contorno	Pág.76
CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO	Pág.95
CONCLUSIONES.....	Pág.96
RECOMENDACIONES	Pág.98
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	Pág.99
BIBLIOGRAFÍA.....	Pág.104
ANEXO.....	Pág.107

INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones de la Física–Matemática constituyen una herramienta fundamental en la investigación de muchos especialistas en diferentes ramas de la ciencia. A través de la resolución de las mismas se puede obtener información de cómo evoluciona un sistema físico determinado y de esta manera se facilita su estudio. Dentro de las ecuaciones de la Física–Matemática las ecuaciones diferenciales parciales lineales asumen un papel muy importante, ellas se agrupan en tres grandes grupos: elípticas, hiperbólicas y parabólicas. De manera general las ecuaciones elípticas modelan múltiples procesos estacionarios y no estacionarios, las hiperbólicas modelan procesos oscilatorios y las ecuaciones de tipo parabólicas rigen procesos de transferencia de calor y difusión, entre otros.

En esta investigación se parte de las siguientes **preguntas científicas**:

1. ¿Cómo resolver en forma analítica problemas de tipo parabólico e hiperbólico, cuando las condiciones de contorno están dadas por semiejes, para lo cual falla la teoría clásica?
2. ¿Cómo determinar clases de funciones suficientemente buenas para resolver el problema anterior?
3. ¿Cómo aplicar la teoría sobre la solución del problema de Riemann con el auxilio de la transformada de Fourier a los problemas de tipo parabólico e hiperbólico?

4. ¿Cómo ofrecer los resultados de una manera funcional, de modo que sean útiles a los profesionales que utilizan este tipo de modelo?

Por todo lo dicho anteriormente, el **problema científico**, se puede enunciar del siguiente modo: ¿Cómo encontrar la solución analítica de problemas parabólicos e hiperbólicos con condiciones de contorno dadas por semiejes con un notable nivel de complejidad, mediante la reducción a un problema de Riemann? En el **marco teórico** de esta investigación se argumenta que los fundamentos científicos de esta investigación vienen dados por los resultados obtenidos en la segunda mitad del siglo XX sobre los problemas de contorno de la teoría de funciones analíticas, así como por los resultados obtenidos por el grupo de Ecuaciones Diferenciales de la Facultad de Matemática, Física y Computación, tanto en el estudio de la estabilidad y la solución del problema de Riemann, como en la definición de las clases de funciones suficientemente buenas para la aplicación de la transformada de Fourier. Además, el referido grupo resolvió el problema del tipo anterior en el caso elíptico, reduciendo el problema de contorno original a un problema de contorno de la teoría de funciones analíticas (Problema de Riemann), con el auxilio de la transformada de Fourier. En la presente investigación se realiza el estudio de los casos parabólico e hiperbólico utilizando una técnica similar.

El **campo de acción** son las Ecuaciones Diferenciales Parciales y el **objeto** los problemas de contorno de la Física–Matemática.

El **objetivo** de esta investigación consiste en la solución de problemas parabólico e hiperbólico con condiciones de contorno de un alto nivel de complejidad, por reducción a un problema de Riemann, utilizando la transformada de Fourier.

La **novedad científica** del presente trabajo consiste en que mejora en gran medida el tratamiento de las ecuaciones de la Física–Matemática con condiciones de contorno que se expresan en regiones infinitas, con valores diferentes en semiejes, pues al fallar la teoría clásica se deben buscar otros recursos teóricos para encontrar la solución analítica.

En la bibliografía consultada no existen técnicas similares a las que se utilizan en el presente trabajo, el cual está avalado por un grupo de investigaciones anteriores, publicadas por el grupo de Ecuaciones Diferenciales de la Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas.

Se garantiza en la presente investigación que las soluciones encontradas son únicas, aunque a veces se deben establecer condiciones adicionales para asegurar dicha unicidad.

También constituye una novedad científica la solución analítica de problemas de contorno parabólicos e hiperbólicos con un alto nivel de complejidad, que generalmente se resuelven por métodos aproximados.

Al presentarse los resultados en cuadraturas, específicamente en integrales complejas, se ofrece una herramienta fundamental a los especialistas de diferentes campos que se enfrenten a modelos de tipo parabólico e hiperbólico con un alto nivel de complejidad, pues no se requiere que conozcan en detalle la teoría utilizada.

También con la presente tesis se posibilita la creación de un software que facilite la solución directa de problemas del tipo antes señalado, a partir de la forma en que se presentan los resultados obtenidos.

La aplicación de los métodos utilizados están limitados a modelos de la Física-Matemática y la Tecnología que utilicen las ecuaciones diferenciales parciales con coeficientes constantes, y en las cuales una de las variables al menos se desplace en un eje infinito. No obstante los resultados obtenidos se pueden generalizar a otros tipos de regiones, incluso acotadas, trabajando con transformaciones conformes [ver páginas 72-79 de [\[1\]](#), páginas 183-186 de [\[3\]](#) y [Anexo \(A₃\)](#)].

La Tesis está distribuida de la siguiente manera:

En el Capítulo I se expone una reseña histórica del problema de Riemann, se establecen definiciones y resultados auxiliares así como clases de funciones que son de suma relevancia para el estudio realizado. En el Capítulo II se hace el planteamiento del problema de tipo parabólico, consistente en encontrar la solución a un problema de contorno de tipo parabólico con condiciones de fronteras muy generales, dadas por semiejes. La misma se buscará en una cierta clase de funciones de amplia aplicación práctica. Se usa la técnica de Cherski [ver [\[4\]](#) y [Anexo \(A₁\)](#)], para reducir este problema a un problema de contorno de Riemann cuya solución es conocida, para ello se utiliza el operador de Fourier y finalmente se encuentra una ecuación funcional que constituye un problema de Riemann. Además se estudian las condiciones de solubilidad del problema de Riemann mediante condiciones necesarias y suficientes para que el coeficiente y

el término independiente de dicho problema estén en las clases de funciones adecuadas [ver páginas 72-79 de [\[1\]](#), páginas 181-188 de [\[2\]](#) y [Anexo \(A2\)](#)]. Es interesante el estudio realizado sobre el valor del índice y los diferentes valores de acuerdo a los coeficientes del problema. Luego se determina la solución del problema en cuadraturas y se establecen condiciones para que el problema esté correctamente planteado. Todo esto se recoge en una serie de teoremas que resumen los resultados obtenidos.

Luego en el Capítulo III se plantea el problema de tipo hiperbólico, consistente en encontrar la solución a un problema de contorno de tipo hiperbólico con condiciones de fronteras muy generales, dadas por semiejes. En este capítulo se utiliza el mismo algoritmo que en el Capítulo II, y se llega igualmente a una serie de teoremas que resumen los resultados alcanzados.

**CAPÍTULO I: EL PROBLEMA DE RIEMANN: RESEÑA HISTÓRICA, ALGUNAS
DEFINICIONES Y RESULTADOS AUXILIARES**

CAPÍTULO I: EL PROBLEMA DE RIEMANN: RESEÑA HISTÓRICA, ALGUNAS DEFINICIONES Y RESULTADOS AUXILIARES

En el presente capítulo se expone una reseña histórica del problema de Riemann con el objetivo de dar a conocer los principales resultados alcanzados en el tema por diferentes especialistas, y se incluye también una serie de definiciones y resultados auxiliares que serán utilizados posteriormente, las cuales constituyen, por tanto, una referencia obligada en el desarrollo del trabajo. Se hace hincapié, por ejemplo, en las definiciones de Integral de Fourier y Clases de Hölder, las que, junto a otras clases definidas con anterioridad, contribuyen el basamento teórico de este trabajo. También se aborda el importante concepto de índice.

1.1 Reseña histórica del Problema de Riemann

1.1.1 Introducción

Con este epígrafe no se pretende abarcar todo lo relacionado al problema de Riemann, sino incluir sólo aquellos resultados principales que han sido imprescindibles para el desarrollo de esta investigación, así como algunos resultados que por su importancia no pueden dejar de mencionarse.

El grupo de investigación de ecuaciones diferenciales de la Facultad de Matemática, Física y Computación de la Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas ha trabajado en la solución de problemas abiertos de las ecuaciones en

derivadas parciales mediante su reducción a problemas de contorno de la teoría de funciones analíticas, utilizando para ello la transformada de Fourier. Por esta razón se ha dedicado especial atención a los resultados en los que el coeficiente y el término independiente del problema de contorno de Riemann pertenecen a clases relacionadas con los espacios L_p y cuando las condiciones de contorno están dadas por semiejes.

El problema de Riemann se dio a conocer por primera vez a mediados del siglo XIX en la obra de Bernhard Riemann sobre ecuaciones diferenciales con coeficientes algebraicos, de la siguiente manera [ver 5]: Dado un contorno, L , con determinadas condiciones, que divide el plano complejo en un dominio interior D^+ y un dominio exterior D^- , y dos funciones complejas G y g definidas sobre L , que satisfacen ciertas condiciones. Se denomina problema de contorno de Riemann [problema de Riemann-Hilbert, problema de Hilbert, problema de Hilbert-Priválov, problema de Riemann-Priválov, problema de conjugación lineal], al problema consistente en encontrar dos funciones $\Phi^+(z)$ analítica en el dominio D^+ , y $\Phi^-(z)$ analítica en el dominio D^- incluido $z = \infty$, que satisfagan sobre L la condición

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(z) \text{ (problema homogéneo)} \quad \text{(i)}$$

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(z) + g(t) \text{ (problema no homogéneo)} \quad \text{(ii)}$$

Las funciones G y g se denominan coeficiente y término independiente del problema respectivamente.

Si se considera L cerrado y simple y $G(t)$ como una función seccionalmente constante, el problema (i), (ii) se reduce a un caso particular del problema

planteado por Riemann. Los problemas (i), (ii) se conocen también con el nombre de “Problema de Riemann”, nombre que se utilizará en esta investigación [ver [6](#)], página 147].

En el epígrafe 19 de [5](#) se expresa que: “Riemann no se esforzó para resolver el problema planteado por él mismo”.

El problema fue resuelto por primera vez por Hilbert, para el caso homogéneo, en 1905 [ver [7](#)], considerando a L como un contorno analítico y a G como una función con derivada segunda continua sobre L [ver [6](#)] página 147]. Según [6](#)], en el epígrafe 19, Hilbert redujo el problema a una ecuación integral de Fredholm. E. Picard [ver [8](#)] consideró el caso general del problema y obtuvo dos ecuaciones integrales, una de ellas de Fredholm de segundo grado y la otra, una ecuación singular, pero no investigó estas ecuaciones [ver nota al final de la página 148 de [6](#)].

I. I. Privalov [ver [9](#)] consideró el caso en que $G(t)$ y $g(t)$ son funciones integrables según Lebesgue y que además se cumple que $0 < m < |G(t)| < M$, donde m y M son constantes [ver nota al final de la página 160 de [6](#)].

Con respecto a estos dos últimos autores se plantea en el epígrafe 19 de [5](#) lo siguiente: “Los autores que consideraban más tarde el caso general del problema de contorno (Picard y Privalov), seguían el mismo camino de reducción del problema a una ecuación integral, aprovechando a título del aparato matemático las integrales de tipo de Cauchy”.

En el artículo [10](#) de I. Plemelj se considera el caso en que en $G(t)$ es uniforme, lo que corresponde al caso de índice cero (aunque Plemelj no introdujo el

concepto de índice) y muestra que en este caso puede obtenerse explícitamente la solución del problema homogéneo mediante integrales de tipo Cauchy.

T. Carleman [ver [11]], antes que, Privalov resolvió el problema general para un caso particular. Al respecto se plantea en [5] lo siguiente “Al resolver la ecuación integral singular con núcleo de Cauchy, Carleman soluciona, entre otras cosas, el problema de Riemann no homogéneo con coeficientes constantes $G(t)$ para el caso en que el contorno está representado por un segmento del eje real”.

Con respecto a los métodos empleados por Carleman y Plemelj en el epígrafe 19 de [5] se dice lo siguiente “Los métodos de solución empleados por Plemelj y Carleman, son de hecho los mismos que se exponen en el presente capítulo, pero su aplicación está limitada por unos casos muy particulares, donde los rasgos característicos del problema no se ponen de manifiesto y no se utiliza, ante todo, el concepto de índice el cual, como es conocido, es un aspecto fundamental, tanto para el propio problema de Riemann, como para sus generalizaciones”. También Carleman trabajó en el problema de Riemann con desplazamiento.

Se señala en el epígrafe 19 de [5] lo siguiente: “Debe mencionarse también la obra de Wiener y Hopf, dedicada a la resolución de las ecuaciones integrales de tipo convolución. Esta obra nunca se menciona en relación con el problema de Riemann con la diferencia de que la correlación entre las funciones analíticas se define no en el contorno, si no en los puntos del plano entero (una banda limitada con dos rectas paralelas al eje OX). El método de resolución difiere del método

de resolución del problema de Riemann solo en detalles insignificantes. El concepto de índice aquí también está ausente”.

1.1.2 Solución del problema de Riemann en un contorno cerrado

El primero que dio solución completa al problema de contorno de Riemann fue F.D. Gajov [ver [12](#)]. Gajov en [5](#) resuelve el problema para el caso en que L es un contorno cerrado suave y las funciones G y g son de la clase de Hölder en L , donde la definición de la clase de Hölder sobre este contorno L [ver página 20 de [5](#)] es:

Sea L una curva suave y sea $\varphi(t)$ una función de los puntos de dicha curva. Suele decirse que la función $\varphi(t)$ satisface en la curva la condición de Hölder, si para dos puntos cualesquiera de esta curva se verifica

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| < A|t_2 - t_1|^\lambda$$

donde A y λ son números positivos y se denominan constante y exponente de Hölder respectivamente, donde $0 < \lambda \leq 1$.

Primeramente resuelve un problema de Riemann particular, el llamado problema de salto, el cual corresponde al problema no homogéneo con $G(t) = 1$ sobre L . Este problema se plantea como sigue: “Hállese la función analítica a trozos $\Phi(z)$, ($\Phi(z) = \Phi^+(z)$ cuando $z \in D^+$, $\Phi(z) = \Phi^-(z)$ cuando $z \in D^-$), que se anula en el infinito y experimenta un salto $\varphi(t)$ al pasar a través del contorno L , es decir una función que satisfaga la condición:

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t).”$$

Se analiza en el epígrafe 14 de [5](#) que la función:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau$$

es solución de este problema y que esta solución es única y se enuncia el resultado en la siguiente forma.

“La función arbitraria $\varphi(t)$, definida en un contorno cerrado, que satisface la condición de Hölder, se puede representar de manera única como la diferencia entre las funciones $\Phi^+(t)$ y $\Phi^-(t)$, con la condición adicional $\Phi^-(\infty) = 0$, se ve con facilidad que la solución del problema se dará mediante la fórmula

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau + \text{constante} ”$$

Este resultado se utiliza en la obtención de una función auxiliar, llamada “función canónica $X(z)$ ”, la cual se utiliza en la factorización del coeficiente $G(t)$ de manera que quede: $G(t) = \frac{X^+(t)}{X^-(t)}$.

Para esto, se considera en el epígrafe 14.3 de [\[13\]](#), el problema de Riemann homogéneo, y se denota por κ al índice de $G(t)$. Para el caso particular de $\kappa = 0$ se busca la solución particular del problema **(i)** en la clase de funciones que no se anulan en el contorno. El método que se utiliza es el de aplicar logaritmos a la condición de contorno **(i)** para resolver entonces el problema de salto

$$\ln\Phi^+(t) - \ln\Phi^-(t) = \ln G(t).$$

Utilizando las fórmulas de Sojotski se obtiene que las soluciones del problema de contorno homogéneo, que satisfacen la condición $\Phi^-(\infty) = 1$, son las funciones

$$\Phi^+(z) = e^{\Gamma^+(z)}, \quad \Phi^-(z) = e^{\Gamma^-(z)},$$

$$\text{donde } \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z} d\tau$$

Si se prescinde de la condición adicional $\Phi^-(\infty) = 1$ la solución está dada por

$$\Phi^+(z) = Ae^{\Gamma^+(z)}, \quad \Phi^-(z) = Ae^{\Gamma^-(z)},$$

donde A es una constante arbitraria.

Es evidente que, al ser $\Gamma^-(\infty) = 0$, A es el valor de $\Phi^-(z)$ en el infinito.

En la página 112 de [5] se enuncia el siguiente resultado: “La función arbitraria $G(t) \neq 0$, dada en el contorno L , que satisface la condición de Hölder y tiene índice cero, puede ser representada como la razón de las funciones $\Phi^+(t)$ y $\Phi^-(t)$, las cuales son valores de contorno de las funciones que son analíticas en D^+ y D^- y no tienen ceros en estos dominios. Dichas funciones se definen salvo un factor constante arbitrario y se dan mediante las fórmulas

$$\Phi^+(z) = Ae^{\Gamma^+(z)}, \quad \Phi^-(z) = Ae^{\Gamma^-(z)}.”$$

Para pasar al caso general, se busca una función analítica a trozos que satisfaga la condición de contorno homogénea y tenga orden igual a cero en todo el plano, excepto en un punto singular, donde su orden sea igual al índice del problema.

Este punto es arbitrario pero se toma en este caso el punto del infinito. La definición de función canónica dada en [5] en la página 112 es la siguiente:

“Llamaremos función canónica $X(z)$ a la función que satisface la condición de contorno **(i)** y es analítica a trozos en todos los puntos del plano, a excepción de un punto infinitamente alejado, donde su orden es igual al índice del problema”

La construcción de la función canónica se realiza escribiendo la condición de contorno **(i)** en la forma: $\Phi^+(t) = t^\alpha t^{-\alpha} G(t) \Phi^-(t)$

y tomando la factorización de la función $t^{-\kappa}G(t)$, de índice nulo como $t^{-\kappa}G(t) =$

$\frac{e^{\Gamma^+(z)}}{e^{\Gamma^-(z)}}$, con $\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln[t^{-\kappa}G(\tau)]}{\tau-z} d\tau$, de donde se obtiene que la función canónica

$X(z)$ está dada por

$$X^+(z) = e^{\Gamma^+(z)}, X^-(z) = z^{-\kappa} e^{\Gamma^-(z)} \quad \text{(iii)}$$

y $G(t)$ puede ser expresado por $G(t) = \frac{X^+(z)}{X^-(z)}$.

Debe notarse que cuando $\kappa \geq 0$, la función canónica admite en el infinito un cero de orden κ y representa una de las soluciones particulares del problema de contorno homogéneo. Si $\kappa < 0$, la función canónica tiene en el infinito un polo de orden κ y no es ya solución, pero se utiliza como función auxiliar para resolver este problema.

Es posible ahora resolver el problema homogéneo, escribiendo la condición (i) en la forma:

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}$$

y utilizando el principio de prolongación analítica (**ver la definición en el epígrafe 1.2.4 de este capítulo**) y el teorema de Liouville generalizado (**ver la definición en el epígrafe 1.2.3 de este capítulo**) es posible obtener la solución general analizando el orden en el infinito de $\frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}$. En la página 114 de [5] se enuncia el

siguiente teorema: Si el índice κ del problema de contorno de Riemann no es negativo, el problema homogéneo (i) tiene $\kappa + 1$ soluciones linealmente independientes:

$$\Phi_k^+(z) = z^k e^{\Gamma^+(z)}, \Phi_k^-(z) = z^{k-\kappa} e^{\Gamma^-(z)} \quad (k = 0, 1, \dots, \kappa).$$

La solución general contiene $\kappa + 1$ constantes arbitrarias y se determinan mediante las fórmulas:

$$\Phi^+(z) = P_\kappa(z)e^{\Gamma^+(z)}, \quad \Phi^-(z) = z^{-\kappa}P_\kappa(z)e^{\Gamma^-(z)},$$

cuando el índice es negativo el problema solamente admite la solución trivial.

Para resolver el problema no homogéneo con condición de contorno **(ii)**, se

escribe esta en la forma:
$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} + \frac{g(t)}{X^+(t)}$$

Debido a que la función $g(t)$ satisface la condición de Hölder, es posible resolver el problema de salto:

$$\frac{g(t)}{X^+(t)} = \psi^+(t) - \psi^-(t),$$

el valor de $\psi(z)$ será:

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z},$$

y la condición de contorno tomará la forma:

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \psi^+(t) = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} - \psi^-(t).$$

Mediante un análisis similar al que se hizo en el problema homogéneo, basado en el orden en el infinito de la expresión anterior, se demuestra el siguiente teorema:

Cuando $\kappa \geq 0$, el problema de Riemann no homogéneo es soluble con cualquier término independiente y su solución general se expresa mediante la fórmula

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + X(z) P_\kappa(z) \tag{iv}$$

donde la función canónica $X(z)$ se determina de **(iii)** y $P_\kappa(z)$ es un polinomio de grado κ de coeficientes complejos arbitrarios. Si $\kappa = -1$, el problema no

homogéneo es también soluble y tiene una solución única. En el caso de que $\kappa < -1$, no homogéneo no es generalmente soluble. Para que sea soluble es necesario y suficiente que el término independiente del problema satisfaga $-\kappa - 1$ condiciones:

$$\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} t^{k-1} d\tau = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, -\kappa - 1)$$

Si estas últimas se cumplen, la única solución del problema se expresa mediante la fórmula **(iv)**, donde se debe poner $P_\kappa(z) = 0$, [ver página 118 de [5](#)].

Debe notarse que si la solución tiene la condición adicional de que sea cero en el infinito, entonces, en lugar de un polinomio de grado κ debe tomarse un polinomio de grado $\kappa - 1$ y para que el problema sea resoluble en el caso de índice negativo debe considerarse $c_{-\kappa} = 0$.

Luego la solución estará dada por:

$$\Phi(z) = X(z)[\psi(z) + P_{\kappa-1}(z)] \quad \text{para } \kappa \geq 0 \quad \text{(v)}$$

(si $\kappa = 0$ $P_{\kappa-1}(z) = 0$). Si $\kappa < 0$ la solución deberá expresarse también por **(v)** si se cumplen además las $-\kappa$ condiciones de solubilidad siguientes:

$$\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} t^{k-1} d\tau = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, -\kappa)$$

Sobre este resultado en la página 117 de [5](#) se expresa: “De este modo, el teorema de solubilidad de un problema no homogéneo adquiere una forma más simétrica. Cuando $\kappa \geq 0$, la solución general del problema no homogéneo depende linealmente de κ constantes arbitrarias. Cuando $\kappa < 0$, el número de

condiciones de solubilidad es igual a $-\kappa$. Observemos que aquí el problema no homogéneo, para $\kappa = 0$ es incondicionalmente soluble y la solución es única”.

También se ha estudiado el problema de Riemann donde el coeficiente y el término independiente pertenecen a los espacios L_p , $p > 1$

En el artículo [\[13\]](#), B. V. Jvedelidze hace una exposición completa de sus investigaciones sobre el problema de contorno de Riemann cuando G satisface la condición de Hölder y $G \in L_p$, extendiéndolo a dominios múltiplemente conexos y luego Gajov y Chivin lo extendieron al semiplano.

1.1.3 Resultados cuando el contorno es el eje real cerrado

Cuando el contorno L es el eje real, D^+ y D^- son los semiplanos superior e inferior respectivamente. El problema consiste en encontrar dos funciones $\Phi^+(z)$ y $\Phi^-(z)$, analíticas en D^+ y D^- respectivamente con valores límites en la frontera que satisfacen la condición de contorno

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

En el caso en que G y g pertenezcan a una clase de Hölder sobre \mathbb{R} , es decir, sea f una función $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow K$, se dice que f pertenece a la clase de Hölder, si existen constantes A y λ , $A > 0$, y $\lambda \in (0,1]$ para las cuales se verifica:

1. $|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \leq A|x_2 - x_1|^\lambda \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
2. $\exists N > 0$: si $|x_1| > N, |x_2| > N$ se cumple que:

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \leq A \left| \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right|^\lambda \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Las constantes A y λ se denominan respectivamente coeficiente e índice de Hölder. La clase de las funciones que satisfacen la condición de Hölder para un mismo índice λ se denotan por $H_\lambda(\mathbb{R})$. En este trabajo se denota por K a los conjuntos numéricos \mathbb{R} ó \mathbb{C} .

La solución de este problema está desarrollada en el punto 14.7 del libro [5]. La única diferencia con el caso de un contorno finito, está en que cuando el contorno es el eje real cerrado, el infinito y el origen de coordenadas pertenecen al propio contorno y, por esta razón, es necesario cambiar la función auxiliar que se utilizó cuando L era finito, y que tenía sobre L un índice unitario, por otra función que sobre la recta ampliada tenga también índice unitario. La función que usualmente se toma es la definida por: $f(t) = \frac{t-i}{t+i}$, en este caso, si el índice de $G(t)$ es igual a κ , el índice de $G(t)$ es cero y su logaritmo en \mathbb{R} es una función uniforme.

La función canónica que se construye ahora está dada por:

$$X^+(z) = e^{\Gamma^+(z)}, X^-(z) = \left[\frac{z-i}{z+i} \right]^{-\kappa} e^{\Gamma^-(z)},$$

$$\text{donde } \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \left[\left(-\frac{t-i}{t+i} \right)^{-\kappa} G(t) \right] \frac{dt}{t-z}$$

En este caso el punto $-i$ es un punto excepcional para la función canónica. Se escribe la condición de contorno en la forma $\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} = \frac{g(t)}{X^+(t)}$, utilizando los valores límites de la función $X^\pm(z)$. Es fácil ver que la función $\frac{g(t)}{X^+(t)}$ es de la clase de Hölder sobre $\bar{\mathbb{R}}$.

1.1.4 Casos singulares

En la teoría del problema de contorno de Riemann, se conocen como casos singulares, aquellos en que

- a) El contorno L , sobre el que se da la condición de frontera, es una curva abierta.
- b) El coeficiente en algunos puntos del contorno presenta discontinuidad de un determinado tipo.
- c) El coeficiente tiene carácter de una función meromorfa, es decir, sobre el contorno tiene ceros o “polos” de orden entero.

Todos estos casos singulares se investigaron por F. D. Gajov, H. I. Musjelishbili y D. A. Kbecelaba mediante métodos de extraordinaria originalidad. Como aspecto interesante se puede señalar, a partir de los diferentes resultados, que los casos que tienen ceros y polos en el coeficiente son un poco diferentes ya que, incluso, no se extiende el teorema fundamental de F. D. Gajov sobre el número de soluciones linealmente independientes. En el capítulo I del trabajo [\[14\]](#) se da un método único de solución del problema de Riemann, que incluye los casos especiales fundamentales. El problema se considera en esta investigación con un planteamiento un poco más general, que tiene relación con cierta ampliación de la clase de soluciones admisibles en calidad de funciones holomorfas por pedazos. Información sobre la solución de los casos a) y b), pueden verse en los epígrafes 42 y 43 del libro [\[5\]](#) y los epígrafes 111 de [\[15\]](#). No se desarrollarán

estos casos, por no ser de interés en los resultados que son expuestos posteriormente.

Se pasará a dar información más detallada sobre el caso c). En el artículo [16] y en el epígrafe 15 de [5] se estudia el caso en que L es una curva cerrada y la condición de contorno tiene la forma

$$\Phi^+(t) = \frac{\prod_{k=1}^{\mu} (t - \alpha_k)^{m_k}}{\prod_{j=1}^{\nu} (t - \beta_j)^{p_j}} G_1(t) \Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L \quad (\text{vi})$$

donde $\alpha_k, k = \overline{1, \mu}, \beta_j, j = \overline{1, \nu}$, son ciertos puntos del contorno y m_k y p_j son números enteros positivos, $G_1(t)$ es una función que satisface la condición de Hölder y no se anula; $g(t)$ puede tener “polos” solamente en los puntos β_j y sus órdenes no superan a p_j . A las funciones $G_1(t)$ y $\prod_{j=1}^{\nu} (t - \beta_j)^{p_j}$ se les exige que sean derivables en los puntos α_k, β_j , un número suficiente de veces, que se determina, a través de la solución del problema; además $\prod_{j=1}^{\nu} (t - \beta_j)^{p_j} g(t)$ es de la clase de Hölder.

De forma similar está resuelto el problema de Riemann con singularidades en el caso del eje real, como se puede apreciar en el epígrafe 15 del libro de [5].

1.1.5 Algunos de los resultados más recientes sobre el problema de Riemann

En los últimos años se ha continuado trabajando en diferentes temas relacionados con lo visto anteriormente. Haciendo una extensa revisión bibliográfica se procede a citar algunos de los trabajos realizados, los que muestran resultados de alcance mundial:

En [\[VIII\]](#) se resuelven ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden utilizando la transformada de Fourier, así mismo en [\[XIV\]](#) se resuelve un problema de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden con condiciones iniciales, suponiendo que estas condiciones iniciales ya son las soluciones del problema de Riemann. En el artículo [\[IX\]](#) se trabaja con sistemas hiperbólicos llevados a un problema de Riemann. Pelloni en [\[XXXIV\]](#) modela problemas de ecuaciones diferenciales parciales de segundo y tercer orden, lineales y no lineales y luego utilizando la transformada de Fourier lo lleva a un problema de Riemann en las clases de Hölder. En todos estos artículos se trabaja en contornos cerrados. Se pudiera mencionar un trabajo muy interesante de Alexander Its y Shepelsky, referenciado en [\[XVII\]](#), donde se resuelven problemas de contorno de ecuaciones diferenciales parciales no lineales con condiciones de contorno específicas, llamadas condiciones de Robin. Vale mencionar también los trabajos realizados por Elizabeth Its y Alexander Its, [\[ver \[XV\], \[XVIII\] y \[XVIII\]\]](#), los cuales trabajan en las aplicaciones del problema de Riemann en diferentes campos. En el artículo [\[XIX\]](#) estos autores estudian el problema de Riemann en dos dimensiones, luego en el artículo [\[XXII\]](#) llevan una ecuación de primer orden en derivadas parciales a un problema de Riemann, suponiendo también que las condiciones de contorno son exactamente la solución del problema de Riemann transformada. En el artículo [\[XX\]](#) se trabaja de forma muy similar al anterior para ecuaciones en derivadas parciales de primer orden. En el libro [\[IV\]](#) se trabaja el problema de Riemann homogéneo de forma matricial y se exponen una serie de definiciones en las clases L_p . También dentro de los trabajos estudiados se

encuentra un libro de un colectivo de autores que resumen todas las teorías relacionadas con el problema de Riemann y las clases de funciones, estos conceptos se pueden ver en [\[XXI\]](#). Son muchas las investigaciones que se han realizado sobre el problema de Riemann en otras variantes, se pudieran enunciar algunas de ellas referenciadas en [\[XXVI\]](#), [\[XXIII\]](#) y [\[VII\]](#).

1.1.6 Resultados del grupo de ecuaciones diferenciales de la

Universidad central “Marta Abreu” de Las Villas

El grupo de Ecuaciones Diferenciales de la Facultad de Matemática, Física y Computación de la Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas ha estado trabajando desde finales del siglo pasado en el problema de Riemann. Se pudieran enunciar diferentes resultados que inspiraron esta investigación: el Dr. Otilio Mederos trabajó en el problema de Riemann con desplazamiento [\[ver \[17\]\]](#), el Dr. Ricardo Grau ofreció la solución de ecuaciones diferenciales con coeficientes seccionalmente constantes con el auxilio del problema de Riemann [\[ver \[18\]\]](#), el Dr. Lorgio Batard realizó un estudio de la estabilidad y solución del Problema de Riemann en las clases L_2^λ [\[ver \[1\], \[2\] y \[3\]\]](#), luego define las nuevas clases de Funciones Generalizadas, [\[ver \[19\] y Anexo \(A6\)\]](#), además encuentra la solución del problema de Riemann en las nuevas clases de Funciones Generalizadas antes definidas por él, [\[ver \[20\]\]](#), también determina la clase de problemas de contorno en ecuaciones diferenciales parciales que se reducen a un problema de Riemann utilizando la técnica de Cherski [\[ver \[4\] y Anexo \(A1\)\]](#) y las condiciones que debe cumplir para que el problema esté bien planteado y

poderlo reducir a un problema de Riemann [ver páginas 72-79 de [1], páginas 181-188 de [2] y Anexo1 (A₂)].

Luego a partir de todos estos resultados los doctores Lorgio Batard y Otilio Mederos obtuvieron la solución al problema elíptico con condiciones de contorno diferentes por semiejes en las clases L_2^λ , trabajo que fue publicado en la Revista Ciencia Matemática [ver [21]]. Más adelante se realiza una investigación por la autora de la presente tesis y el Dr. Lorgio Batard, donde se obtiene la solución de un problema de contorno de tipo parabólico con condiciones dadas por semiejes, [ver tesis presentada en opción al título científico de Máster en Matemática Aplicada, [22], estos resultados también pueden ser vistos en [23], [24], [25], [26]] y la solución de un problema de contorno de tipo hiperbólico [ver [27]] con condiciones dadas también por semiejes, ambos en la clase L_2^λ , los cuales se recogen en cuatro publicaciones de la Revista Ciencia Matemática, [ver [28], [29], [30] y [31]].

1.2 Resultados auxiliares

Antes de comenzar se expondrá la definición de integral de Fourier que se utiliza en el presente trabajo:

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, si existe la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt} dt$ se denomina entonces transformada de Fourier al operador $F(x) = Vf(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt} dt$ y transformada inversa al operador $f(t) = V^{-1}F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{ixt} dx$ [ver [32]], página 453].

A continuación se recordarán algunas propiedades de la transformada de Fourier de interés para esta investigación:

a) Si $f(t) \in L_2(\mathbb{R}) \Rightarrow Vf(t) = F(x) \in L_2(\mathbb{R})$ por lo tanto se puede decir que en $L_2(\mathbb{R})$ está definida tanto la transformada como la antitransformada de Fourier.

b) Fórmulas para resolver ecuaciones en derivadas parciales: $f \in L_1, L_2, L_2^\lambda, \dots$ y $F \in L_1, L_2, L_2^\lambda, \dots$

$$\text{b.1) } V \left[\frac{\partial^q}{\partial y^q} f(x, y) \right] = \frac{d^q}{dy^q} F(x, y) \quad q \in \mathbb{N}$$

$$\text{b.2) } V \left[\frac{\partial^q}{\partial x^q} f(x, y) \right] = (-ix)^q F(x, y) \quad q \in \mathbb{N}$$

También para el desarrollo de esta investigación es imprescindible el concepto de índice. Se define el índice **[ver 9]** de una función compleja continua $m(t) = m_1(t) + im_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$ en el contorno L , el incremento de su argumento dividido por 2π , siendo L un contorno cerrado suave, donde $m(t)$ está dada sobre este contorno y no se reduce a cero, de la forma siguiente:

$$\text{Índice } m(t) = \frac{1}{2\pi} [\arg m(t)]_L = \frac{1}{2\pi i} [\ln m(t)]_L = \frac{1}{2\pi i} \oint_L d[\ln m(t)]$$

Las integrales anteriores deben entenderse en el sentido de Stieltjes si $m(t)$ no es diferenciable y es de variación acotada. Del teorema del resto logarítmico (Principio del argumento) se tiene que si $m(t)$ es el valor de contorno de una función analítica en el semiplano superior (inferior), con excepción quizás de un número finito de polos en este semiplano, entonces se cumple la siguiente igualdad:

$$\text{Ind } m(t) = N - P \quad (\text{Ind } m(t) = P - N)$$

Donde $\text{Ind } m(t)$ denota el índice de $m(t)$ y por N , P se denota el número de ceros y polos en el semiplano superior e inferior respectivamente considerando cada cero y polo tantas veces como su orden de multiplicidad.

1.2.1 Clases de funciones

A partir de la definición de la clase de Hölder sobre \mathbb{R} planteada en 1.1.3, se cumple que $D_A(\mathbb{R}) \subset H_1(\mathbb{R}) \subset H_{\lambda_2}(\mathbb{R}) \subset H_{\lambda_1}(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$, para $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$, donde por $D_A(\mathbb{R})$ se entiende la clase de las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con derivadas acotadas sobre \mathbb{R} que cumplen,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

Se verifica fácilmente que para $\lambda \in (0,1]$ la clase $H_\lambda(\mathbb{R})$ con la suma y el producto por un escalar usuales de funciones es un álgebra asociativa.

Se dice que $f(t) \in L_1(\mathbb{R})$ si $f(t): \mathbb{R} \rightarrow K$ es absolutamente integrable, es decir, se cumple que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty$

Se dice que $f: \mathbb{R} \rightarrow K$ es un elemento de $L_2(\mathbb{R})$ si $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty$. Una de las

propiedades interesantes de la clase $L_2(\mathbb{R})$, es que el producto de una función de $L_2(\mathbb{R})$ por una función acotada es de $L_2(\mathbb{R})$, la cual es una demostración evidente. El espacio $L_2^+(\mathbb{R})$ es el espacio de funciones F^+ de $L_2(\mathbb{R})$ que son prolongables analíticamente al semiplano superior $y > 0$ y cumplen con:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F^+(x+iy)|^2 dx < cte \text{ la misma } \forall y > 0.$$

También $L_2^-(\mathbb{R})$ es el espacio de funciones F^- de $L_2(\mathbb{R})$ que son prolongables analíticamente al semiplano inferior $y < 0$ y cumplen con:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F^-(x+iy)|^2 dx < cte \text{ la misma } \forall y < 0.$$

La clase de las funciones $f \in L_2(\mathbb{R})$ tales que $f \equiv 0$ si $x < 0$ ($x > 0$) se denotan por $L_{2+}(\mathbb{R})$ ($L_{2-}(\mathbb{R})$).

Se cumple el siguiente teorema [ver [\[21\]](#)]:

Para que la función $f_+(x)$ sea elemento de $L_{2+}(\mathbb{R})$ es necesario y suficiente que su transformada $F^+(t) = V\{f_+(x)\}$ sea elemento de $L_2^+(\mathbb{R})$.

Para que la función $f_-(x)$ sea elemento de $L_{2-}(\mathbb{R})$ es necesario y suficiente que su transformada $F^-(t) = V\{f_-(x)\}$ sea elemento de $L_2^-(\mathbb{R})$.

La clase de las funciones $L_2^\lambda(\mathbb{R})$ se define por $L_2^\lambda(\mathbb{R}) = L_2(\mathbb{R}) \cap H_\lambda(\mathbb{R})$.

La clase de las funciones $L_2(\mathbb{R})$ que pertenece a una de las funciones de Hölder se denotan por el símbolo $\{0\}$, o sea, $\{0\} = \bigcup_{\lambda \in (0,1]} H_\lambda(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$.

Los espacios $\{0\}_\lambda$ son aquellos de las funciones que tienen su transformada en $L_2^\lambda(\mathbb{R})$, o sea $V\{f(x)\}$ es elemento de $L_2^\lambda(\mathbb{R})$, si $f \in \{0\}_\lambda$.

La clase de las funciones $f \in \{0\}_\lambda$ tales que $f \equiv 0$ si $x < 0$ ($x > 0$) se denotan por $L_{2+}^\lambda(\mathbb{R})$ ($L_{2-}^\lambda(\mathbb{R})$).

La clase de las funciones $F^\pm \in L_2^\lambda(\mathbb{R})$ que son prolongables analíticamente al semiplano superior (inferior) y que satisfacen que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F^+(x + iy)|^2 dx < M, \text{ si } y > 0 \quad \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |F^-(x + iy)|^2 dx < M, \text{ si } y < 0 \right),$$

donde M es independiente de y , se denota por $L_2^{\lambda+}(\mathbb{R})(L_2^{\lambda-}(\mathbb{R}))$.

La clase de las funciones f que no se anulan sobre \mathbb{R} y tales que $f(\pm\infty) = 1$ y $(f - 1)$ es elemento de $L_2^{\lambda+}(\mathbb{R})(L_2^{\lambda-}(\mathbb{R}))$ se denotan por $L_2^{\lambda+}(\mathbb{R} + 1)(L_2^{\lambda-}(\mathbb{R} + 1))$.

Se conoce el siguiente teorema: Una condición necesaria y suficiente para que la función f pertenezca a $L_2^{\lambda+}(\mathbb{R})(L_2^{\lambda-}(\mathbb{R}))$ es que su transformada de Fourier F pertenezca a $L_2^{\lambda+}(\mathbb{R})(L_2^{\lambda-}(\mathbb{R}))$.

1.2.2 Problema de Riemann en las clases de funciones en las que se busca la solución de los problemas de contorno de esta investigación

El problema de contorno de Riemann consiste en encontrar las funciones $F^+(x)$ y $F^-(x)$ prolongables analíticas al semiplano superior e inferior respectivamente y que satisfacen la condición:

$$F^+(x) = D(x)F^-(x) + H(x)$$

sobre el eje real. Donde $D(x)$ y $H(x)$ son el coeficiente y el término independiente del problema de Riemann, respectivamente. Como se ha expresado hasta ahora, en el caso de esta investigación para obtener la solución del problema de Riemann en la clase $L_2^{\lambda\pm}(\overline{\mathbb{R}})(L_2^\pm(\mathbb{R}))$, se requiere que $D(x)$ pertenezca a la clase $L_2^\lambda(\overline{\mathbb{R}} + 1)$ y el término independiente pertenezca a

$L_2^\lambda(\overline{\mathbb{R}})(L_2(\mathbb{R}))$; siendo $L_2^\lambda(\overline{\mathbb{R}} + 1)$ la clase de las funciones f que satisfacen las condiciones siguientes:

- i. f no tiene ni ceros, ni polos sobre \mathbb{R} .
- ii. $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.
- iii. $(f - 1) \in L_2^\lambda(\overline{\mathbb{R}})$

clases ya definidas anteriormente.

1.2.3 Problema de Salto

En el desarrollo de esta investigación es necesario resolver un problema de salto en las clases de funciones en las cuales se encuentran la solución, el cual es un caso particular del problema de Riemann donde se cumple que $D(x)=1$, y consiste en encontrar dos funciones $F^+(x)$ y $F^-(x)$ que pertenecen a las clases $L_2^{\lambda+}(\overline{\mathbb{R}})(L_2^+(\overline{\mathbb{R}}))$ y $L_2^{\lambda-}(\overline{\mathbb{R}})(L_2^-(\overline{\mathbb{R}}))$, respectivamente, a partir de la ecuación:

$$F^+(x) - F^-(x) = H(x)$$

lo que significa que hay un salto cuando llega al eje x y ese salto es la función $H(x) \in L_2^\lambda(\overline{\mathbb{R}})(L_2(\mathbb{R}))$, la solución a este problema se obtiene en las clases de funciones deseadas.

Utilizando el operador de proyección se encuentra la solución a este problema, esto es, $F^\pm(x) = \pm P^\pm(H(x))$

donde el referido operador de proyección P^\pm , como es conocido, se define de la siguiente manera:

$$P^\pm: L_2^\lambda(\overline{\mathbb{R}})(L_2(\mathbb{R})) \rightarrow L_2^{\lambda\pm}(\overline{\mathbb{R}})(L_2^\pm(\mathbb{R}))$$

$$H(x) \rightarrow P^\pm(H(x)) = (V o T^\pm o V^{-1})H(x)$$

$$T^\pm: \{0\}_\lambda(L_2(\mathbb{R})) \rightarrow L_{2\pm}^\lambda(\overline{\mathbb{R}}) \left(L_{2\pm}^\lambda(\mathbb{R}) \right)$$

$$h(x) \rightarrow T^\pm(h(x)) = h_\pm(x)$$

$$h_\pm(x) \rightarrow \frac{1}{2}(\text{sign } t \pm 1)h(t)$$

obsérvese que si $H(x) \in L_2^\lambda(\mathbb{R})$, entonces $P^\pm(H(x))$ es una función continua que se anula en $\pm\infty$ por ser un elemento de $L_{2\pm}^\lambda(\overline{\mathbb{R}})$.

1.2.4 Teorema generalizado de Liouville

Sea la función $f(z)$ analítica en todo el plano complejo, a excepción de los puntos $a_0 = \infty$, a_k ($k = 1, 2, \dots, n$), donde ella tiene polos, con la particularidad de que las partes principales de los desarrollos de la función $f(z)$ en el entorno de los puntos tiene la forma

$$G(z) = c_1^0 z + c_2^0 z^2 + \dots + c_{m_0}^0 z^{m_0} \text{ en el punto } a_0$$

$$G_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) = \frac{c_1^k}{z-a_k} + \frac{c_2^k}{(z-a_k)^2} + \dots + \frac{c_{m_k}^k}{(z-a_k)^{m_k}} \text{ en los puntos } a_k$$

en este caso $f(z)$ es una función racional y puede representarse por la fórmula

$$f(z) = c + G_0(z) + \sum_{k=1}^n G_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right), \text{ donde } c \text{ es una constante.}$$

En particular, si la única singularidad de la función $f(z)$ es un polo de orden m en el punto infinitamente alejado, entonces $f(z)$ es un polinomio de grado m , es decir, $f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_m z^m$, [ver [5](#)], página 104 y 105].

1.2.5 Teorema de prolongación analítica

Sean los dominios Ω_1 y Ω_2 , los cuales tiene en común al dominio Δ . Supongamos que $f_1(z)$ es regular en Ω_1 y continua en $\overline{\Omega_1}$ y $f_2(z)$ es regular en Ω_2 y continua en $\overline{\Omega_2}$.

Definición: Si las funciones $f_1(z)$ y $f_2(z)$ son idénticamente iguales en Δ , se dice que $f_2(z)$ es la prolongación analítica de $f_1(z)$ en Ω_2 a través del dominio Δ y viceversa, como se muestra en la **Figura 1**, [Ver [33](#)], página 243].

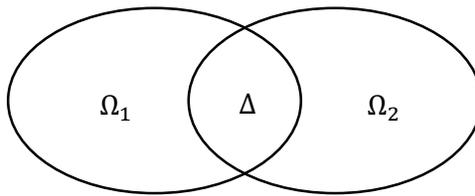


Figura 1

1.2.6 Relación entre la integral de tipo Cauchy y de tipo Fourier

Sea L un contorno suave, cerrado o abierto, dispuesto íntegramente en la parte finita del plano; τ es una coordenada compleja de sus puntos y $\varphi(\tau)$, una función continua de los puntos del contorno. En este caso se llama integral tipo Cauchy a:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau \text{ [ver [5](#)], página 16]$$

Se cumple que:

- Si z es un número complejo e $imz > 0$, entonces $\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\tau)}{\tau - z} d\tau =$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) e^{itz} dt$$

- Si z es un número complejo e $imz < 0$, entonces $\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\tau)}{\tau - z} d\tau =$

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 f(t) e^{itz} dt.$$

**CAPÍTULO II: SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE TIPO PARABÓLICO CON
CONDICIONES DE CONTORNO DIFERENTES POR SEMIEJES**

CAPÍTULO II: SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE TIPO PARABÓLICO CON CONDICIONES DE CONTORNO DIFERENTES POR SEMIEJES

En este Capítulo se hace el planteamiento del problema en cuestión, consistente en encontrar la solución a una ecuación en derivadas parciales de tipo parabólico con condiciones de contorno muy generales, definidas por semiejes. La misma se buscará en una cierta clase de funciones de amplia aplicación práctica. Con el apoyo del operador de Fourier se reduce el problema original a un problema de contorno de Riemann que se resuelve mediante la técnica de Cherski. Los resultados obtenidos se pueden generalizar a otros tipos de regiones, incluso acotadas, trabajando con transformaciones conformes.

Luego se estudian las condiciones de solubilidad del problema de Riemann mediante condiciones necesarias y suficientes para que el coeficiente y el término independiente de dicho problema estén en las clases de funciones adecuadas. Es interesante el estudio realizado sobre el valor del índice y los diferentes valores de acuerdo a los coeficientes del problema. Por último se determina la solución de los problemas en cuadraturas para diferentes valores de índice del coeficiente del problema de Riemann. Todo esto se recoge en una serie de teoremas que resumen los resultados obtenidos.

2.1 Planteamiento del problema no homogéneo

En este epígrafe se procederá a realizar el planteamiento del problema no homogéneo de tipo parabólico con condiciones de contorno dadas por semiejes, el cual consiste en encontrar una función $u(x, y)$ que satisfaga la ecuación en derivadas parciales, las condiciones de contorno y que pertenezca a la clase S , donde:

$$S = \{u \in F(\Omega): u_{xx} \in L_{2x}(\mathbb{R}), u_y \in L_{2x}(\mathbb{R}), u \in L_{2x}(\mathbb{R}), 0 < y < +\infty\}$$

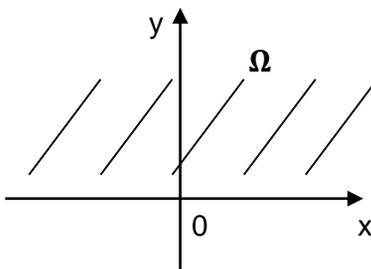
siendo $F(\Omega)$ es la clase de funciones que están definidas sobre el semiplano Ω y $L_{2x}(\mathbb{R})$ es la clase $L_2(\mathbb{R})$ con respecto a la variable x . Por lo tanto se tiene que:

Dada la ecuación diferencial parcial de tipo parabólico

$$u_{xx}(x, y) + ku_y(x, y) = g(x, y), k \neq 0 \quad (2.1.1)$$

en la región

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 < y < +\infty\} \quad (2.1.2)$$



y las condiciones de contorno

$$\beta_{00}u(x, 0^+) + \beta_{10}u_x(x, 0^+) + \beta_{01}u_y(x, 0^+) = g_{11}(x), x < 0 \quad (2.1.3)$$

$$\gamma_{00}u(x, 0^+) + \gamma_{10}u_x(x, 0^+) + \gamma_{01}u_y(x, 0^+) = g_{12}(x), x > 0 \quad (2.1.4)$$

donde β_{ij} y γ_{ij} ; $i = \overline{0,1}$; $j = \overline{0,1}$ son números reales y

$$g(x, y) \in L_{2x}(\mathbb{R}), g_{11}(x) \in L_{2x}(-\infty, 0) \text{ y } g_{12}(x) \in L_{2x}(0, +\infty)$$

y además se desea encontrar condiciones sobre los elementos conocidos de **(2.1.1)**, **(2.1.3)** y **(2.1.4)** para que la ecuación **(2.1.1)** tenga solución única en la región **(2.1.2)**, que satisfagan las condiciones **(2.1.3)**- **(2.1.4)**.

El problema está bien planteado y se puede llevar a un problema de Riemann porque el número de condiciones de contorno (2) es igual al orden de la ecuación diferencial con respecto a y (1), por el número de regiones (1), más uno [ver páginas 77-79 de [\[1\]](#) y páginas 186-188 [\[2\]](#) y [Anexo \(A₂\)](#)].

Nota: Trabajando en el semiplano superior, no se pierde generalidad, pues utilizando transformaciones conformes es posibles transformar una gran variedad de regiones, incluso acotadas al problema aquí estudiado, ejemplo de ello [ver páginas 72-79 de [\[1\]](#) y páginas 183-186 de [\[3\]](#) y [Anexo \(A₃\)](#)]

2.2 Reducción a un problema de Riemann

A continuación se aplica la técnica de Cherski [ver [\[4\]](#) y [Anexo \(A₁\)](#)] para reducir el problema planteado en 2.1 a un problema de Riemann para el semiplano:

2.2.1 Aplicación de la transformada de Fourier a la ecuación (2.1.1)

Realizando esta operación se obtiene la ecuación diferencial ordinaria

$$k \frac{dU(x, y)}{dy} - x^2 U(x, y) = G(x, y) \tag{2.2.1}$$

para encontrar la solución de la ecuación diferencial ordinaria paramétrica **(2.2.1)**, donde en este caso el parámetro es la variable x , se utiliza la raíz de la ecuación característica:

$$kz - x^2 = 0$$

la cual tiene la forma $z(x) = \frac{x^2}{k}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, luego la solución general de **(2.2.1)** es:

$$U(x, y) = C(x)e^{z(x)y} + V(x, y) \quad (2.2.2)$$

donde $V(x, y)$ es una solución particular de **(2.2.2)** que viene dada por:

$$V(x, y) = e^{\frac{x^2}{k}y} \int G(x, y) e^{-\frac{x^2}{k}y} dy \quad (2.2.3)$$

En el caso de que el problema de contorno sea no homogéneo aparece la función $V[g(x, y)]$ para la cual tiene que cumplirse como condición suficiente que sea integrable con respecto a y , es decir $V[g(x, y)] = G(x, y)$ sea integrable con respecto a y , además, $C(x)$ es una función arbitraria que hay que determinar.

2.2.2 Adaptación de las condiciones de contorno (2.1.3) y (2.1.4) para la aplicación de la Transformada de Fourier

Con ese objetivo se introducen las funciones f_+ y f_-

$$f_+(x) = \begin{cases} \text{función desconocida de } L_{2x^+}(\mathbb{R}), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

y

$$f_-(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ \text{función desconocida de } L_{2x^-}(\mathbb{R}), & x \leq 0 \end{cases}$$

Estas funciones permiten escribir **(2.1.3)** y **(2.1.4)** en la forma

$$\beta_{00}u(x, 0^+) + \beta_{10}u_x(x, 0^+) + \beta_{01} \frac{du}{dy}(x, 0^+) = g_{11^-}(x) + f_+(x), |x| < +\infty \quad (2.2.4)$$

$$\gamma_{00}u(x,0^+) + \gamma_{10}u_x(x,0^+) + \gamma_{01} \frac{du}{dy}(x,0^+) = g_{12+}(x) + f_-(x), |x| < +\infty \quad (2.2.5)$$

donde:

$$g_{11-}(x) = \begin{cases} g_{11}(x), & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases} \quad y \quad g_{12+}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ g_{12}(x), & x > 0 \end{cases}$$

2.2.3 Aplicación de la Transformada de Fourier a las nuevas condiciones de contorno

Realizando esta operación en (2.2.4) y (2.2.5) se obtiene:

$$\beta_{00}U(x,0^+) - ix\beta_{10}U(x,0^+) + \beta_{01} \frac{dU}{dy}(x,0^+) = G_{11}^-(x) + F^+(x) \quad (2.2.6)$$

$$\gamma_{00}U(x,0^+) - ix\gamma_{10}U(x,0^+) + \gamma_{01} \frac{dU}{dy}(x,0^+) = G_{12}^+(x) + F^-(x) \quad (2.2.7)$$

De acuerdo a la definición de f_+ y f_- las funciones $F^+(x)$ y $F^-(x)$ se pueden considerar [ver 4] como los valores límites de las funciones $F^+(z)$ y $F^-(z)$, analíticas en el semiplano superior e inferior respectivamente, que satisfacen las condiciones:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F^+(x+iy)|^2 dx < M, \text{ si } y > 0 \quad y \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |F^-(x+iy)|^2 dx < M, \text{ si } y < 0$$

respectivamente, donde M es el mismo para todas las y .

2.2.4 Obtención de una ecuación funcional en la cual las únicas funciones desconocidas son $F^+(x)$ y $F^-(x)$

A partir de (2.2.1) se obtiene fácilmente

$$\frac{dU}{dy}(x, y) = z(x)C(x)e^{z(x)y} + \frac{dV}{dy}(x, y) \quad (2.2.8)$$

Sustituyendo **(2.2.2)** y **(2.2.8)** en **(2.2.6)** y **(2.2.7)**, y efectuando las operaciones necesarias se obtiene el sistema:

$$P_1(x)C(x) - F^+(x) = H_1(x) \quad (2.2.9)$$

$$P_2(x)C(x) - F^-(x) = H_2(x) \quad (2.2.10)$$

donde:

$$P_1(x) = \beta_{00} - ix\beta_{10} + \frac{x^2}{k}\beta_{01} \quad \text{y} \quad P_2(x) = \gamma_{00} - ix\gamma_{10} + \frac{x^2}{k}\gamma_{01}$$

$$H_1(x) = G_{11}^-(x) - (\beta_{00} - ix\beta_{10})V(x,0^+) - \beta_{01} \frac{dV}{dy}(x,0^+)$$

$$H_2(x) = G_{12}^+(x) - (\gamma_{00} - ix\gamma_{10})V(x,0^+) - \gamma_{01} \frac{dV}{dy}(x,0^+)$$

y a partir de **(2.2.3)** se tiene:

$$V(x,0^+) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \int G(x,y) e^{-\frac{x^2}{k}y} dy.$$

Si $V(x,0^+)$, $xV(x,0^+)$ y $\frac{dV(x,0^+)}{dy}$ pertenecen a $L_{2x}(\mathbb{R})$, es evidente que $H_1(x)$ y

$H_2(x)$ pertenecen a $L_{2x}(\mathbb{R})$. De **(2.2.9)** se obtiene:

$$C(x) = \frac{F^+(x)}{P_1(x)} + \frac{H_1(x)}{P_1(x)} \quad (2.2.11)$$

sustituyendo **(2.2.11)** en **(2.2.10)** se obtiene el problema de Riemann

$$F^+(x) = D(x)F^-(x) + H(x) \quad (2.2.12)$$

$$\text{donde } D(x) = \frac{P_1(x)}{P_2(x)} \quad \text{y} \quad H(x) = \frac{P_1(x)}{P_2(x)} H_2(x) - H_1(x).$$

2.3 Condiciones de solubilidad del Problema de Riemann obtenido a partir del problema de contorno parabólico

En este epígrafe se determinan condiciones necesarias y suficientes sobre los coeficientes de (2.1.1), (2.1.3) y (2.1.4), para que el coeficiente y el término independiente de (2.2.12) satisfagan las condiciones correspondientes al problema de Riemann.

Se conoce del subepígrafe 1.2.2 del capítulo I que, para obtener la solución de (2.2.12) en la clase $L_{2x}^{\lambda\pm}(\overline{\mathbb{R}})(L_{2x}^{\pm}(\mathbb{R}))$, se requiere que $D(x)$ pertenezca a la clase $L_{2x}^{\lambda}(\overline{\mathbb{R}} + 1)$ y el término independiente pertenezca a $L_{2x}^{\lambda}(\overline{\mathbb{R}})(L_{2x}(\mathbb{R}))$; siendo $L_{2x}^{\lambda}(\overline{\mathbb{R}} + 1)$ la clase de las funciones f que satisfacen las condiciones siguientes:

- i. f no tiene ni ceros, ni polos sobre \mathbb{R}
- ii. $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 1$
- iii. $(f - 1) \in L_{2x}^{\lambda}(\overline{\mathbb{R}})$

donde $L_{2x}^{\lambda\pm}(\overline{\mathbb{R}})$, $L_{2x}^{\pm}(\mathbb{R})$ y $L_{2x}(\mathbb{R})$ son las clases de funciones $L_2^{\lambda\pm}(\overline{\mathbb{R}})$, $L_2^{\pm}(\mathbb{R})$ y $L_2(\mathbb{R})$ con respecto a la variable x .

Nota: Se utilizará esta notación durante todo el trabajo.

2.3.1 Determinación de las condiciones para que $D(x)$ satisfaga la condición i

Se tiene que: $D(x) = \frac{P_1(x)}{P_2(x)}$, luego, se puede escribir:

$$D(x) = \frac{\beta_{01}x^2 - ik\beta_{10}x + k\beta_{00}}{\gamma_{01}x^2 - ik\gamma_{10}x + k\gamma_{00}} \quad (2.3.1)$$

si se separa la parte real y la parte imaginaria en el numerador de (2.3.1) e igualamos a cero, se obtiene el sistema:

$$\beta_{01}x^2 + k\beta_{00} = 0 \quad (2.3.2)$$

$$k\beta_{10}x = 0 \quad (2.3.3)$$

Como $k \neq 0$, el sistema (2.3.2), (2.3.3) tiene evidentemente raíces reales solamente en las siguientes variantes:

1. $\beta_{00} = 0$, hay raíz en $x = 0$,
2. $\beta_{01} \neq 0, \beta_{10} = 0, \frac{k\beta_{00}}{\beta_{01}} < 0$; hay dos raíces reales del tipo $x = \pm \sqrt{-\frac{k\beta_{00}}{\beta_{01}}}$.

Se cumple entonces el siguiente Teorema:

Teorema 1: El numerador (denominador) de $D(x)$ no tiene ni ceros (ni polos) para $x \in \mathbb{R}$, si y solo si se cumple una de las condiciones siguientes:

1. $\beta_{00}\beta_{10} \neq 0$ ($\gamma_{00}\gamma_{10} \neq 0$)
2. $\beta_{10} = 0, k\beta_{00}\beta_{01} > 0$ ($\gamma_{10} = 0, k\gamma_{00}\gamma_{01} > 0$)

2.3.2 Determinación de las condiciones para que $D(x)$ satisfaga la condición

ii

$$\text{Como } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} D(x) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\beta_{01}x^2 - ik\beta_{10}x + k\beta_{00}}{\gamma_{01}x^2 - ik\gamma_{10}x + k\gamma_{00}} \quad (2.3.4)$$

se tiene trivialmente el siguiente Teorema:

Teorema 2: El límite del segundo miembro de (2.3.4) existe y es distinto de cero si y solo si se cumple una de las condiciones siguientes:

a) $\beta_{01}\gamma_{01} \neq 0$, en este caso el límite indicado en **(2.3.4)** es $l = \frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}}$.

b) $\beta_{01} = \gamma_{01} = 0, \beta_{10}\gamma_{10} \neq 0$, en este caso el límite indicado en **(2.3.4)** es

$$l = \frac{\beta_{10}}{\gamma_{10}}$$

c) $\beta_{01} = \gamma_{01} = \beta_{10} = \gamma_{10} = 0, \beta_{00}\gamma_{00} \neq 0$, en este caso el límite indicado en **(2.3.4)**

es $l = \frac{\beta_{00}}{\gamma_{00}}$.

La demostración de este Teorema es trivial.

Si $l \neq 1$, entonces multiplicando **(2.2.12)** por $\frac{1}{l}$ se obtiene:

$$\frac{F^+(x)}{l} = \frac{D(x)}{l} F^-(x) + \frac{H(x)}{l}$$

considerando entonces las funciones:

$$F_1^+(x) = \frac{F^+(x)}{l}, F_1^-(x) = F^-(x) \text{ y } D_1(x) = \frac{D(x)}{l} \tag{2.3.5}$$

se obtiene la ecuación funcional:

$$F_1^+(x) = D_1(x)F_1^-(x) + \frac{H(x)}{l} \tag{2.2.12'}$$

para la cual se cumple $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} D_1(x) = 1$. Luego de **(2.3.5)** y **(2.2.12')** se obtendría la

solución del problema original.

2.3.3 Determinación de las condiciones para que $D(x)$ satisfaga la condición iii

Se cumple que $D_A(\mathbb{R}) \subset H_1(\mathbb{R}) \subset H_{\lambda_2}(\mathbb{R}) \subset H_{\lambda_1}(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$, para $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$, donde por $D_A(\mathbb{R})$ se entiende la clase de las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con derivadas acotadas sobre \mathbb{R} que cumplen: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x)$

Teorema 3: Si se cumple simultáneamente una de las condiciones del **Teorema 1** y una de las condiciones del **Teorema 2**, entonces $(D(x) - 1) \in L_{2x}^\lambda(\overline{\mathbb{R}})$.

Demostración:

Se probará primeramente que $(D(x) - 1) \in H_\lambda(\overline{\mathbb{R}})$. Como $D_A(\mathbb{R}) \subset H_\lambda(\overline{\mathbb{R}})$, basta probar que

$(D(x) - 1) \in D_A(\overline{\mathbb{R}})$. Si se cumple simultáneamente una de las condiciones del Teorema 1 y una de las condiciones del Teorema 2, se puede asegurar que

$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} D(x) = l$, y $l \neq 0$. Si $l \neq 1$ se considera **(2.2.12')** en lugar de **(2.2.12)**, luego no se pierde generalidad cuando se considera que $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} D(x) = 1$. Si se cumple

simultáneamente una de las condiciones del **Teorema 1** y una de las condiciones del **Teorema 2**, es fácil probar que $[D(x) - 1]'$ es una función acotada sobre \mathbb{R} y además:

$$[D(x) - 1]' = \frac{P_1(x)P_2'(x) - P_1'(x)P_2(x)}{[P_2(x)]^2}$$

luego $[D(x) - 1] \in D_A(\overline{\mathbb{R}})$. Por último, como $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} D(x) = l$ los coeficientes de

mayor grado de $P_1(x)$ y $P_2(x)$ son iguales y consecuentemente $|D(x) - 1| = o\left(\frac{1}{|x|}\right)$

en una vecindad del infinito, y como $D(x)$ es derivable se tiene que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |D(x) - 1|^2 dx < +\infty. \text{ Por tanto, queda probado que } (D(x) - 1) \in L_{2x}^\lambda(\overline{\mathbb{R}}).$$

2.3.4 Determinación de las condiciones para que el término independiente de (2.2.12) sea elemento de $L_{2x}(\mathbb{R})$.

Teorema 4: Si se cumple simultáneamente una de las condiciones del **Teorema 1** y una de las condiciones del **Teorema 2**, y además, $V(x, y)$, ${}_xV(x, 0^+)$, y

$\frac{dV(x, 0^+)}{dy}$ pertenecen a $L_{2x}(\mathbb{R})$, entonces el término independiente de **(2.2.12)**

pertenece a $L_{2x}(\mathbb{R})$.

Demostración:

Se tiene que el término independiente de **(2.2.12)** tiene la forma:

$$H(x) = \frac{P_1(x)}{P_2(x)} H_2(x) - H_1(x)$$

De acuerdo a las condiciones impuestas es evidente que $H_1(x)$ y $H_2(x)$ son

elementos de $L_{2x}(\mathbb{R})$; y $\frac{P_1(x)}{P_2(x)}$ es una función acotada sobre \mathbb{R} . De aquí se tiene

obviamente que $H(x) \in L_{2x}(\mathbb{R})$. Si el problema original es homogéneo ($g(x, y) \equiv 0$)

) el **Teorema 4** quedaría en la siguiente forma:

Corolario del Teorema 4: Si se cumple simultáneamente una de las condiciones del **Teorema 1** y una de las condiciones del **Teorema 2**, entonces el término independiente de (2.2.12) pertenece a $L_{2x}(\mathbb{R})$.

2.4 Cálculo del índice del coeficiente del problema de Riemann

El análisis está dado a los casos en que se cumplen simultáneamente una de las condiciones del **Teorema 1** y una de las condiciones del **Teorema 2**.

Recordemos que se cumple $\text{Índice}D(x) = N - P (P - N)$, para el semiplano superior (inferior), donde N y P , son la cantidad de ceros y polos incluyendo

multiplicidades, en este caso $D(x) = \frac{\beta_{01}x^2 - ik\beta_{10}x + k\beta_{00}}{\gamma_{01}x^2 - ik\gamma_{10}x + k\gamma_{00}}$, lo cual es un cociente

de polinomios, como las raíces de $P_1(x)$ y $P_2(x)$ vienen dadas respectivamente por las expresiones:

$$\frac{k\beta_{10}i \pm \sqrt{-k^2\beta_{10}^2 - 4k\beta_{01}\beta_{00}}}{2\beta_{01}} \quad \text{y} \quad \frac{k\gamma_{10}i \pm \sqrt{-k^2\gamma_{10}^2 - 4k\gamma_{01}\gamma_{00}}}{2\gamma_{01}}$$

se tienen los siguientes casos de índices:

2.4.1 Casos de índice cero

2.4.1-a) $\beta_{10} \neq 0, k\beta_{01}\beta_{00} > 0, \gamma_{10} \neq 0$ y $k\gamma_{01}\gamma_{00} > 0$

2.4.1-b) $\beta_{10} \neq 0, k\beta_{01}\beta_{00} < 0, \gamma_{10} \neq 0, k\gamma_{01}\gamma_{00} < 0$ y $\beta_{10}\beta_{01}\gamma_{10}\gamma_{01} < 0$

2.4.1-c) $\beta_{01} = \gamma_{01} = 0, \beta_{10}\beta_{00} < 0$ y $\gamma_{10}\gamma_{00} < 0$

2.4.1-d) $\beta_{01} = \gamma_{01} = 0, \beta_{10}\beta_{00} > 0$ y $\gamma_{10}\gamma_{00} > 0$

2.4.1-e) $\beta_{10} = 0, k\beta_{01}\beta_{00} > 0, \gamma_{10} \neq 0$ y $k\gamma_{01}\gamma_{00} > 0$

$$\mathbf{2.4.1-f)} \beta_{10} \neq 0, k\beta_{01}\beta_{00} > 0, \gamma_{10} = 0 \text{ y } k\gamma_{01}\gamma_{00} > 0$$

$$\mathbf{2.4.1-g)} \beta_{10} = \gamma_{10} = 0, k\beta_{01}\beta_{00} > 0 \text{ y } k\gamma_{01}\gamma_{00} > 0$$

$$\mathbf{2.4.1-h)} \beta_{01} = \beta_{10} = \gamma_{01} = \gamma_{10} = 0 \text{ y } \beta_{00}\gamma_{00} \neq 0$$

2.4.2 Casos de índice uno

$$\mathbf{2.4.2-a)} \beta_{01} = \gamma_{01} = 0, \beta_{10}\beta_{00} < 0 \text{ y } \gamma_{10}\gamma_{00} > 0$$

$$\mathbf{2.4.2-b)} \beta_{10} = 0, k\beta_{01}\beta_{00} > 0, k\gamma_{01}\gamma_{00} < 0 \text{ y } k\gamma_{01}\gamma_{10} < 0$$

$$\mathbf{2.4.2-c)} k\beta_{01}\beta_{00} < 0, k\beta_{01}\beta_{10} > 0, \gamma_{10} = 0 \text{ y } k\gamma_{01}\gamma_{00} > 0$$

$$\mathbf{2.4.2-d)} \beta_{10} \neq 0, k\beta_{01}\beta_{00} > 0, k\gamma_{01}\gamma_{00} < 0 \text{ y } k\gamma_{10}\gamma_{01} < 0$$

$$\mathbf{2.4.2-e)} \gamma_{10} \neq 0, k\beta_{01}\beta_{00} < 0, k\beta_{10}\beta_{01} > 0 \text{ y } k\gamma_{01}\gamma_{00} > 0$$

2.4.3 Caso de índice dos

$$\mathbf{2.4.3-a)} k\beta_{01}\beta_{00} < 0, k\beta_{01}\beta_{10} > 0, k\gamma_{01}\gamma_{00} < 0 \text{ y } k\gamma_{01}\gamma_{10} < 0$$

2.4.4 Casos de índice menos uno

$$\mathbf{2.4.4-a)} \beta_{01} = \gamma_{01} = 0, \beta_{10}\beta_{00} > 0 \text{ y } \gamma_{10}\gamma_{00} < 0$$

$$\mathbf{2.4.4-b)} k\beta_{01}\beta_{00} < 0, k\beta_{01}\beta_{10} < 0, \gamma_{10} = 0 \text{ y } k\gamma_{01}\gamma_{00} > 0$$

$$\mathbf{2.4.4-c)} \beta_{10} = 0, k\beta_{01}\beta_{00} > 0, k\gamma_{01}\gamma_{00} < 0, \text{ y } k\gamma_{01}\gamma_{10} > 0$$

$$\mathbf{2.4.4-d)} \beta_{10} \neq 0, k\beta_{01}\beta_{00} > 0, k\gamma_{01}\gamma_{00} < 0 \text{ y } k\gamma_{10}\gamma_{01} > 0$$

$$\mathbf{2.4.4-e)} \gamma_{10} \neq 0, k\beta_{01}\beta_{00} < 0, k\beta_{10}\beta_{01} < 0 \text{ y } k\gamma_{01}\gamma_{00} > 0$$

2.4.5 Casos de índice menos dos

$$\mathbf{2.4.5-a)} k\beta_{01}\beta_{00} < 0, k\beta_{10}\beta_{01} < 0, k\gamma_{01}\gamma_{00} < 0, \text{ y } k\gamma_{10}\gamma_{01} > 0$$

2.5 Solución del problema de Riemann para los casos de índice cero

Se buscará la solución del problema de Riemann **(2.2.12)** para los casos de índice cero establecidos en el capítulo anterior, donde $D(x)$ cumple simultáneamente una de las condiciones del **Teorema 1** y una de las condiciones del **Teorema 2**.

2.5.1 Solución de los casos 2.4.1-a), 2.4.1-e), 2.4.1-f) y 2.4.1-g)

Para estos casos el problema de contorno a resolver queda de la siguiente manera:

$$u_{xx}(x, y) + ku_y(x, y) = g(x, y), k \neq 0$$

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 < y < +\infty\}$$

$$\beta_{00}u(x, 0^+) + \beta_{01}u_y(x, 0^+) = g_{11}(x), \quad x < 0$$

$$\gamma_{00}u(x, 0^+) + \gamma_{01}u_y(x, 0^+) = g_{12}(x), \quad x > 0$$

donde $g(x, y) \in L_{2x}(\mathbb{R})$, $g_{11}(x) \in L_{2x}(-\infty, 0)$ y $g_{12}(x) \in L_{2x}(0, +\infty)$.

Para estos casos el problema de Riemann toma la forma:

$$F^+(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)(x-bi)}{\gamma_{01}(x-ci)(x-di)} F^-(x) + \frac{\beta_{01}(x-ai)(x-bi)}{\gamma_{01}(x-ci)(x-di)} H_2(x) - H_1(x) \quad (2.5.1)$$

donde $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$ y $d < 0$, $a = -b$ y $c = -d$

La expresión **(2.5.1)** se puede escribir en la forma:

$$\frac{(x-di)}{(x-bi)} F^+(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)} F^-(x) + \frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)} H_2(x) - \frac{(x-di)}{(x-bi)} H_1(x) \quad (2.5.2)$$

pues se está buscando funciones que sean prolongables analíticas al semiplano superior e inferior, respectivamente, haciendo:

$$F_1^+(x) = \frac{(x-di)}{(x-bi)} F^+(x), \quad F_1^-(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)} F^-(x) \quad \text{y}$$

$$H_3(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)} H_2(x) - \frac{(x-di)}{(x-bi)} H_1(x); \quad \text{donde:}$$

$$H_1(x) = G_{11}^-(x) - (\beta_{00} - ix\beta_{10})V(x,0^+) - \beta_{01} \frac{dV}{dy}(x,0^+)$$

$$H_2(x) = G_{12}^+(x) - (\gamma_{00} - ix\gamma_{10})V(x,0^+) - \gamma_{01} \frac{dV}{dy}(x,0^+)$$

queda el problema de salto: $F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_3(x)$

(2.5.3)

Teorema 5: Si $k < 0$ y $V(x, y)$, $xV(x,0^+)$, y $\frac{dV(x,0^+)}{dy}$ pertenecen a $L_{2x}(\mathbb{R})$,

entonces el problema de contorno para estos casos tienen solución única en la clase \mathcal{S} dada por $u(x, y) = V^{-1}[U(x, y)]$.

Donde $U(x, y)$ está dada por las fórmulas (2.2.2), (2.2.11) y

$$F^+(x) = \frac{x-bi}{x-di} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_3(t) e^{ixt} dt \quad (2.5.4)$$

siendo $h_3 = V^{-1}[H_3]$

Demostración del Teorema 5:

La solución del problema de salto (2.5.3) según la definición dada de operador proyección en el capítulo I, subepígrafe 1.2.3 es:

$$P^\pm(H_3(x)) = (VoT^\pm oV^{-1})H_3(x) = VoT^\pm(h_3) = V(h_{3\pm})$$

$$\text{donde } V(h_{3+}(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_3(t) e^{ixt} dt = F_1^+(x) \quad (2.5.5)$$

$$\text{y } V(h_{3-}(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_3(t) e^{ixt} dt = F_1^-(x), \text{ siendo } h_3 = V^{-1}[H_3].$$

luego de la sustitución de (2.5.5) en (2.5.1) se obtiene la expresión (2.5.4). Por otra parte de (2.5.4) y (2.2.11) se tiene:

$$U(x, y) = \frac{F^+(x) + H_1(x)}{(x - ai)(x - bi)} e^{\frac{x^2}{k}y} + V(x, y) \quad (2.5.6)$$

Justificación de los pasos:

Como se desea encontrar la solución $u(x, y)$ en la clase

$$S = \{u \in F(\Omega): u_{xx} \in L_{2x}(\mathbb{R}), u_y \in L_{2x}(\mathbb{R}), u \in L_{2x}(\mathbb{R}), 0 < y < +\infty\}$$

hay que demostrar que cada uno de los pasos realizados para encontrar $U(x, y)$ son tales que se pueda garantizar su antitransformada que sería $u(x, y) = V^{-1}[U(x, y)]$, la solución de este problema de contorno, por lo tanto se debe garantizar en primer lugar que $U(x, y) \in L_{2x}(\mathbb{R})$. Trabajando en (2.5.6), se sabe

que $F^+(x) \in L_{2x}^+(\mathbb{R})$, pues es la antitransformada de $f_+(x) = \begin{cases} \text{función desconocida de } L_{2x^+}(\mathbb{R}), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, $H_1(x) \in L_{2x}^-(\mathbb{R})$, ya que tiene la

forma:

$$H_1(x) = G_{11}^-(x) - (\beta_{00} - ix\beta_{10})V(x, 0^+) - \beta_{01} \frac{dV}{dy}(x, 0^+)$$

siendo, $g_{11}(x) \in L_{2x}(-\infty, 0)$, por suposición; donde $g_{11-}(x) = \begin{cases} g_{11}(x), & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$

y utilizando el Teorema 5, ya se puede garantizar que $H_1(x) \in L_{2x}^-(\mathbb{R})$, como la exponencial está acotada para $k < 0$, con $0 < y < +\infty$, además el producto de una

función de $L_{2x}(\mathbb{R})$ por una acotada es de $L_{2x}(\mathbb{R})$, entonces $U(x, y) \in L_{2x}(\mathbb{R})$ y esto implica que $u(x, y) \in L_{2x}(\mathbb{R})$.

Para demostrar que $u_{xx} \in L_{2x}(\mathbb{R})$, es muy sencillo pues ya se tiene que $U(x, y) \in L_{2x}(\mathbb{R})$ y como $u_{xx}(x, y) = V[-x^2 U(x, y)]$ y $x^2 U(x, y) \in L_{2x}(\mathbb{R})$ entonces $u_{xx} \in L_{2x}(\mathbb{R})$ y por último quedaría demostrar que $u_y(x, y) \in L_{2x}$, esto es; como $\frac{dU(x, y)}{dy} \in L_{2x}(\mathbb{R})$ pues $U(x, y) \in L_{2x}(\mathbb{R})$, entonces se cumple; pues $u_y(x, y) = V\left[\frac{dU(x, y)}{dy}\right]$.

Por lo tanto se encuentra la solución en la clase S y tiene la forma:

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F^+(t) + H_1(t)}{(t - ai)(t - bi)} e^{\frac{t^2}{k}y} e^{-ixt} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} V(t, y) e^{-ixt} dt$$

donde finalmente la solución del problema de contorno para los casos **2.4.1-a)**, **2.4.1-e)**, **2.4.1-f)** y **2.4.1-g)** es:

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F^+(t) + H_1(t)}{(t - ai)(t - bi)} e^{\frac{t^2}{k}y - ixt} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} V(t, y) e^{-ixt} dt$$

Para el caso homogéneo, es decir para $V(x, y) \equiv 0$ se tiene el siguiente teorema similar al **Teorema 5**:

Corolario del Teorema 5: Si $k < 0$, entonces el problema de contorno para estos casos tiene solución única en la clase S dada por $u(x, y) = V^{-1}[U(x, y)]$, es decir:

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F^+(t) + H_1(t)}{(t - ai)(t - bi)} e^{\frac{t^2}{k}y} e^{-ixt} dt$$

2.5.2 Solución del caso 2.4.1-b)

En este caso hay dos posibilidades:

2.5.2-a) Todas las raíces de $P_1(x)$ y $P_2(x)$ están en el semiplano superior (esto ocurre cuando $k < 0$, si se cumple además, $\beta_{10}\beta_{01} < 0$ y $\gamma_{10}\gamma_{01} < 0$)

2.5.2-b) Todas las raíces de $P_1(x)$ y $P_2(x)$ están en el semiplano inferior (esto ocurre cuando $k < 0$, si se cumple además, $\beta_{10}\beta_{01} > 0$ y $\gamma_{10}\gamma_{01} > 0$)

Solución del subcaso 2.5.2-a): La expresión (2.2.12) toma la forma

$$F^+(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)(x-bi)}{\gamma_{01}(x-ci)(x-di)} F^-(x) + \frac{\beta_{01}(x-ai)(x-bi)}{\gamma_{01}(x-ci)(x-di)} H_2(x) - H_1(x)$$

pero ahora a, b, c y d son números complejos con parte imaginaria mayor que cero si $4|k\beta_{01}\beta_{00}| > k^2\beta_{10}^2$ y $4|k\gamma_{01}\gamma_{00}| > k^2\gamma_{10}^2$, o números imaginarios sobre el eje imaginario positivo si $4|k\beta_{01}\beta_{00}| < k^2\beta_{10}^2$ y $4|k\gamma_{01}\gamma_{00}| < k^2\gamma_{10}^2$. (También se puede obtener un caso mixto). Haciendo:

$$F_1^+(x) = F^+(x) \tag{2.5.7}$$

$$F_1^-(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)(x-bi)}{\gamma_{01}(x-ci)(x-di)} F^-(x) \text{ y}$$

$$H_4(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)(x-bi)}{\gamma_{01}(x-ci)(x-di)} H_2(x) - \frac{(x-ai)(x-di)}{(x-ci)(x-bi)} H_1(x)$$

queda el problema de salto: $F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_4(x)$. Luego por un análisis similar al realizado en la demostración del **Teorema 5 y Corolario del Teorema 5**, resulta evidente un teorema con enunciado similar al anterior pero con H_4 en

lugar de H_3 y $F^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_4(t) e^{ixt} dt$ donde $h_4 = V^{-1}[H_4]$, luego de **(2.2.2)** y

(2.2.11) se obtiene: $U(x, y) = \frac{F^+(x) + H_1(x)}{(x - ai)(x - bi)} e^{\frac{x^2}{k}y} + V(x, y)$, para el caso no

homogéneo y $U(x, y) = \frac{F^+(x) + H_1(x)}{(x - ai)(x - bi)} e^{\frac{x^2}{k}y}$, para el caso homogéneo, siendo

$u(x, y) = V^{-1}[U(x, y)]$.

Nota: La solución del **subcaso 2.5.2-b)** aparece en el [Anexo \(A4.1\)](#), por poseer una técnica similar de solución que el caso anterior.

2.5.3 Solución de los casos 2.4.1-c) y 2.4.1-d)

En estos casos el problema de Riemann **(2.2.12)** adopta la forma

$$F^+(x) = \frac{\beta_{01}(x - ai)}{\gamma_{01}(x - ci)} F^-(x) + \frac{\beta_{01}(x - ai)}{\gamma_{01}(x - ci)} H_2(x) - H_1(x) \quad (2.5.8)$$

para el caso **2.4.1-c)**

$$\frac{(x - ci)}{(x - ai)} F^+(x) = \frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}} F^-(x) + \frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}} H_2(x) - \frac{(x - ci)}{(x - ai)} H_1(x) \quad (2.5.9)$$

para el caso **2.4.1-d)**, de **(2.5.8)** y **(2.5.9)** se llega a los problemas de salto:

$$F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_6(x) \quad (2.5.10)$$

$$F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_7(x) \quad (2.5.11)$$

donde $F_1^+(x) = F^+(x)$, $F_1^-(x) = \frac{\beta_{01}(x - ai)}{\gamma_{01}(x - ci)} F^-(x)$ y

$$H_6(x) = \frac{\beta_{01}(x - ai)}{\gamma_{01}(x - ci)} H_2(x) - H_1(x) \text{ en el caso } (2.5.10) \text{ y}$$

$$F_1^+(x) = \frac{(x-ci)}{(x-ai)} F^+(x), \quad F_1^-(x) = \frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}} F^-(x) \text{ y}$$

$$H_7(x) = \frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}} H_2(x) - \frac{(x-ci)}{(x-ai)} H_1(x) \text{ en el caso (2.5.11).}$$

Luego de forma evidente se cumple un teorema con enunciado y demostración

similar al Teorema 5 con H_6 en lugar de H_3 y $F^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_6(t) e^{ixt} dt$ en el

caso **2.4.1-c**); y H_7 en lugar de H_3 , siendo $F^+(x) = \frac{(x-ai)}{(x-ci)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_7(t) e^{ixt} dt$ en el

caso **2.4.1-d**). Luego de **(2.2.2)** y **(2.2.11)** se obtiene

$$U(x, y) = \frac{F^+(x) + H_1(x)}{(x-ai)} e^{\frac{x^2}{k}y} + V(x, y).$$

El caso **2.4.1-h**) no se considera por carecer de importancia práctica.

2.6 Solución del Problema de Riemann para los casos de índice positivos

En el presente epígrafe se buscará la solución del problema de Riemann **(2.2.12)**

de acuerdo a los casos de índice positivos estudiados en el capítulo anterior,

donde $D(x)$ cumple simultáneamente una de las condiciones del **Teorema 1** y

una de las condiciones del **Teorema 2**.

2.6.1 Casos de índice uno

2.6.1.1 Solución del caso 2.4.2-a)

En este caso la expresión **(2.2.12)** toma la forma:

$$F^+(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)} F^-(x) + \frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)} H_2(x) - H_1(x), \text{ pero ahora } a > 0 \text{ y } c < 0;$$

de donde despejando se obtiene:

$$\frac{(x-ci)}{(x-ai)} F^+(x) = \frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}} F^-(x) + \frac{\beta_{01}(x-ci)}{\gamma_{01}(x-ai)} H_2(x) - H_1(x)$$

y se llega al problema de salto:

$$\frac{(x-ci)}{(x-ai)} F^+(x) - \frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}} F^-(x) = H_8(x) \quad (2.6.1)$$

donde $H_8(x) = \frac{\beta_{01}(x-ci)}{\gamma_{01}(x-ai)} H_2(x) - H_1(x)$, que es de $L_{2x}(\mathbb{R})$ si $k < 0$ y $V(x, y)$,

$xV(x, 0^+)$ y $\frac{dV(x, 0^+)}{dy}$ pertenecen a $L_{2x}(\mathbb{R})$. Luego aplicando el operador

Proyección a $H_8(x)$ queda:

$$H_8(x) = \psi^+(x) - \psi^-(x) \quad (2.6.2)$$

donde: $\psi^\pm(x) = P^\pm(H_8(x))$, o sea; $\psi^\pm(x) = VoT^\pm oV^{-1}(H_8(x))$, siendo

$$\psi^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_8(t) e^{ixt} dt \quad \text{y} \quad \psi^-(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 h_8(t) e^{ixt} dt$$

en cuyo caso $h_8(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_8(t) e^{ixt} dt$. Luego sustituyendo (2.6.2) en (2.6.1)

queda: $\frac{(x-ci)}{(x-ai)} F^+(x) - \psi^+(x) = \frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}} F^-(x) - \psi^-(x)$ y aplicando el teorema de

prolongación analítica y el teorema generalizado de Liouville se tiene:

$$\frac{(x-ci)}{(x-ai)} F^+(x) - \psi^+(x) = \frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}} F^-(x) - \psi^-(x) = \frac{c_1}{x-ai}, \text{ siendo } c_1 \text{ una constante}$$

arbitraria. Luego $\frac{(x-ci)}{(x-ai)} F^+(x) - \psi^+(x) = \frac{c_1}{x-ai}$,

$$F^+(x) = \frac{(x-ai)}{(x-ci)} \psi^+(x) + \frac{c_1}{x-ci} \quad (2.6.3)$$

y $F^-(x) = \frac{\gamma_{01}}{\beta_{01}} \psi^-(x) + \frac{\gamma_{01}}{\beta_{01}} \frac{c_1}{x-ai}$. Al tener $F^+(x)$ dado por la expresión (2.6.3)

entonces $U(x, y)$ queda determinado por las expresiones (2.2.2) y (2.2.11),

siendo:

$$F^+(x) = \frac{(x-ai)}{(x-ci)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_8(t) e^{ixt} dt + \frac{c_1}{x-ci} \quad (2.6.4)$$

y se puede enunciar el siguiente teorema:

Teorema 6: Si $k < 0$ y $V(x, y)$, $xV(x, 0^+)$ y $\frac{dV(x, 0^+)}{dy}$ pertenecen a $L_{2x}(\mathbb{R})$,

entonces el problema (2.1.1) – (2.1.4) para el caso 2.4.2-a) tiene solución única que depende de una constante arbitraria c_1 en la clase (2.1.5) y viene dada por las expresiones (2.2.2) y (2.6.4).

Demostración:

Como de (2.2.2) y (2.6.4), se tiene $U(x, y) = C(x)e^{z(x)y} + V(x, y)$, $z(x) = \frac{x^2}{k}$,

entonces $U(x, y) = \frac{F^+(x) + H_1(x)}{P_1(x)} e^{\frac{x^2}{k}y} + V(x, y)$; es decir,

$$U(x, y) = \frac{F^+(x) + H_1(x)}{x-ai} e^{\frac{x^2}{k}y} + V(x, y) \quad (2.6.5)$$

se conoce que $F^+(x)$ depende de una constante arbitraria, por lo tanto $U(x, y)$ también depende de una constante arbitraria por ser V un operador lineal.

Además en (2.6.5) $F^+ \in L_{2x}^+(\mathbb{R})$, $H_1(x) \in L_{2x}^-(\mathbb{R})$, luego $U(x, y)$, $x^2U(x, y)$ y

$\frac{dU(x, y)}{dy}$ pertenecen a $L_{2x}(\mathbb{R})$, para todo $y : 0 < y < +\infty$, esto implica que $u(x, y)$

pertenece a la clase (2.1.5). Para el caso homogéneo queda el siguiente resultado:

Corolario del Teorema 6: Si $k < 0$, entonces el problema (2.1.1) – (2.1.4) para el caso 2.4.2-a) tiene solución única que depende de una constante arbitraria c_1 en la clase (2.1.5) y viene dada por $u(x, y) = V^{-1}[U(x, y)]$, donde $U(x, y)$ se define por las expresiones (2.2.2), (2.2.11) y (2.6.4).

Nota: La solución de los casos 2.4.2-c) y 2.4.2-e), por tener una forma similar de solución que el anterior se incluye en el [Anexo \(A4.2\)](#), al igual que los casos 2.4.2-b) y 2.4.2-d), los que se incluyen en el [Anexo \(A4.3\)](#).

2.6.2 Caso de índice dos

2.6.2.1 Solución del caso 2.4.3-a)

En este caso la expresión (2.2.12) toma la forma

$$F^+(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)^2}{\gamma_{01}(x-ci)^2} F^-(x) + \frac{\beta_{01}(x-ai)^2}{\gamma_{01}(x-ci)^2} H_2(x) - H_1(x)$$

pero ahora $a > 0$ y $c < 0$.

$$\frac{(x-ci)^2}{(x-ai)^2} F^+(x) = \frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}} F^-(x) + \frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}} H_2(x) - \frac{(x-ci)^2}{(x-ai)^2} H_1(x)$$

Tomando la misma idea de demostración de los casos de índice uno pero ahora el orden del polo es dos, se obtiene:

$$\frac{(x-ci)^2}{(x-ai)^2} F^+(x) - \psi^+(x) = \frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}} F^-(x) - \psi^-(x)$$

aplicando el teorema de prolongación analítica y el teorema generalizado de Liouville se tiene

$$\frac{(x-ci)^2}{(x-ai)^2} F^+(x) - \psi^+(x) = \frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}} F^-(x) - \psi^-(x) = \frac{c_1}{x-ai} + \frac{c_2 x}{(x-ai)^2}, \quad c_1 \quad \text{y} \quad c_2 \quad \text{son}$$

constantes arbitrarias.

$$\text{Luego } F^+(x) = \frac{(x-ai)^2}{(x-ci)^2} \psi^+(x) + \frac{c_1}{x-ci} + \frac{c_2 x}{(x-ci)^2} \quad (2.6.6)$$

Al tener $F^+(x)$ dado por la expresión (2.6.6) entonces $U(x, y)$ queda determinado por las expresiones (2.2.2) y (2.2.11), siendo

$$F^+(x) = \frac{(x-ai)^2}{(x-ci)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_{11}(t) e^{ixt} dt + \frac{c_1}{(x-ci)} + \frac{c_2 x}{(x-ci)^2} \quad (2.6.7)$$

$$\text{y } h_{11} = V^{-1}[H_{11}(x)] = V^{-1}\left[\frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}} H_2(x) - \frac{(x-ci)^2}{(x-ai)^2} H_1(x)\right]$$

se puede enunciar el siguiente teorema con enunciado y demostración similar al

Teorema 6:

Teorema 7: Si $k < 0$ y $V(x, y)$, ${}_x V(x, 0^+)$ y $\frac{dV(x, 0^+)}{dy}$ pertenecen a $L_{2x}(\mathbb{R})$,

entonces el problema (2.1.1) – (2.1.4) para el caso de índice dos tiene solución única que depende de dos constantes arbitrarias c_1 y c_2 en la clase (2.1.5) y viene dada por las expresiones (2.2.2), (2.2.11) y (2.6.7)

Para el caso homogéneo queda el siguiente teorema:

Corolario del Teorema 7: Si $k < 0$, entonces el problema (2.1.1) – (2.1.4) para el caso 2.4.3-a) tiene solución única que depende de dos constante arbitraria c_1 y c_2 en la clase (2.1.5) y viene dada por $u(x, y) = V^{-1}[U(x, y)]$, donde $U(x, y)$ se define por las expresiones (2.2.2), (2.2.11) y (2.6.7)

2.7 Solución del Problema de Riemann para los casos de índice negativo

En el presente epígrafe se buscará la solución del Problema de Riemann **(2.2.12)** de acuerdo a los casos de índices negativos estudiados en el capítulo anterior, donde $D(x)$ cumple simultáneamente una de las condiciones del **Teorema 1** y una de las condiciones del **Teorema 2**.

2.7.1 Solución de los casos de índice menos uno

2.7.1.1 Solución del caso 2.4.4-a)

En este caso la expresión **(2.2.12)** toma la forma:

$$F^+(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)} F^-(x) + \frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)} H_2(x) - H_1(x)$$

pero ahora $a < 0$ y $c > 0$. Haciendo: $F_1^+(x) = F^+(x)$,

$$F_1^-(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)} F^-(x) \text{ y } H_{12}(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)} H_2(x) - H_1(x)$$

queda el problema de salto:

$$F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_{12}(x) \tag{2.7.1}$$

se puede enunciar entonces el siguiente teorema:

Teorema 8: Si $k < 0$ y $V(x, y)$, $xV(x, 0^+)$, y $\frac{dV(x, 0^+)}{dy}$ pertenecen a $L_{2x}(\mathbb{R})$,

entonces el problema **(2.1.1) – (2.1.4)** para el caso **2.4.4-a)** tiene solución única en la clase **(2.1.5)** dada por $u(x, y) = V^{-1}[U(x, y)]$.

Donde $U(x, y)$ está dada por las fórmulas **(2.2.2)**, **(2.2.11)** y

$$F^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_{12}(t) e^{ixt} dt \tag{2.7.2}$$

siendo $h_{12}(x) = V^{-1}[H_{12}(x)]$; si se cumple la condición adicional

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_{12}(\tau)}{\tau - ai} d\tau = 0 \quad (2.7.3)$$

La primera parte de la demostración es evidente por las técnicas de trabajo mostradas anteriormente, luego, sólo se demostrará la necesidad de la expresión **(2.7.3)**. En efecto, como la solución del problema de Riemann se expresa por **(2.7.2)** y

$$F^-(x) = -\frac{\gamma_{01}}{\beta_{01}} \frac{(x-ci)}{(x-ai)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 h_{12}(t) e^{ixt} dt,$$

se tiene que $F^-(x)$ tiene un polo de orden uno en $x = ai$, por lo tanto, se requiere, para que el problema de salto **(2.7.1)** tenga solución única, que $\int_{-\infty}^0 h_{12}(t) e^{ixt} dt$ tenga un cero de igual orden en dicho punto. Como por la relación entre las Integrales de tipo Cauchy y de Fourier se tiene:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_{12}(\tau)}{\tau - ai} d\tau = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 h_{12}(t) e^{izt} dt$$

si $\text{Im} z < 0$, entonces, desarrollando la primera de las integrales anteriores en serie de potencias de $(z - ai)$ e igualando a cero el coeficiente del término de grado cero del desarrollo, se obtiene **(2.7.3)** con lo cual se elimina el polo de $F^-(x)$. En el caso homogéneo queda:

Corolario del Teorema 8: Si $k < 0$ entonces el problema **(2.1.1) – (2.1.4)** para el caso **2.4.4-a)** tiene solución única en la clase **(2.1.5)** dada por $u(x, y) = V^{-1}[U(x, y)]$.

2.7.1.2 Solución de los casos 2.4.4-b) y 2.4.4-e)

En estos casos la expresión (2.2.12) toma la forma:

$$F^+(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)(x-bi)}{\gamma_{01}(x-ci)(x-di)} F^-(x) + \frac{\beta_{01}(x-ai)(x-bi)}{\gamma_{01}(x-ci)(x-di)} H_2(x) - H_1(x) \quad (2.7.4)$$

donde $a < 0$, $b < 0$ si $4|k\beta_{01}\beta_{00}| < k^2\beta_{10}^2$; e $\text{Im} a < 0$, $\text{Im} b < 0$ si $4|k\beta_{01}\beta_{00}| > k^2\beta_{10}^2$

Además $c > 0$, $d < 0$ y $c = -d$ en el caso 2.4.4-b). En estos casos la expresión (2.7.4) se puede escribir de la forma:

$$\frac{(x-di)}{(x-bi)} F^+(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)} F^-(x) + \frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)} H_2(x) - \frac{(x-di)}{(x-bi)} H_1(x),$$

$$\text{haciendo: } F_1^+(x) = \frac{(x-di)}{(x-bi)} F^+(x), \quad F_1^-(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)} F^-(x) \quad \text{y}$$

$$H_{13}(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)} H_2(x) - \frac{(x-di)}{(x-bi)} H_1(x), \text{ queda el problema de salto:}$$

$$F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_{13}(x) \quad (2.7.5)$$

Luego por un análisis similar al anterior, se tiene para estos casos, de manera evidente, un teorema similar al Teorema 8, pero con $H_{13}(x)$ en lugar de $H_{12}(x)$

$$\text{y } F^+(x) = \frac{(x-bi)}{(x-ai)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_{13}(t) e^{ixt} dt, \text{ siendo } h_{13}(x) = V^{-1}[H_{13}(x)]; \text{ si se cumple}$$

la condición adicional: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_{13}(\tau)}{\tau-ai} d\tau = 0$. Luego de (2.2.2), (2.2.11) se obtiene

que:

$$U(x, y) = \frac{F^+(x) + H_1(x)}{(x-ai)(x-bi)} e^{\frac{x^2}{k}y} + V(x, y)$$

Nota: La solución de los casos 2.4.4-c) y 2.4.4-d) se incluyen en el [Anexo \(A4.4\)](#)

por tener técnicas similares de solución.

2.7.2 Solución del problema de Riemann para el caso de índice menos dos.

2.7.2.1 Solución del caso 2.4.5-a)

En este caso el problema (2.2.12) toma la forma:

$$F^+(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)(x-bi)}{\gamma_{01}(x-ci)(x-di)} F^-(x) + \frac{\beta_{01}(x-ai)(x-bi)}{\gamma_{01}(x-ci)(x-di)} H_2(x) - H_1(x),$$

donde $a < 0$, $b < 0$ si $4|k\beta_{01}\beta_{00}| < k^2\beta_{10}^2$; e $\text{Im} a < 0$, $\text{Im} b < 0$ si $4|k\beta_{01}\beta_{00}| > k^2\beta_{10}^2$,
 además $c > 0$, $d > 0$ si $4|k\gamma_{01}\gamma_{00}| < k^2\gamma_{10}^2$; e $\text{Im} c > 0$, $\text{Im} d > 0$ si $4|k\gamma_{01}\gamma_{00}| > k^2\gamma_{10}^2$.

Luego queda de nuevo un problema de salto de la forma:

$$F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_{15}(x), \text{ donde: } F_1^+(x) = F^+(x), \quad F_1^-(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)(x-bi)}{\gamma_{01}(x-ci)(x-di)} F^-(x)$$

y $H_{15}(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)(x-bi)}{\gamma_{01}(x-ci)(x-di)} H_2(x) - H_1(x)$, (con $b < 0$ ó $\text{Im} b < 0$), pero ahora al

obtener la solución del problema se obtiene $F^-(x)$ con polos de orden uno en

$x = ai$ y $x = bi$. Luego se puede enunciar un teorema similar al **Teorema 8**

sustituyendo $H_{15}(x)$ por $H_{12}(x)$ (con $b < 0$ ó $\text{Im} b < 0$) y agregando a la condición

(2.7.3) la condición adicional: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_{15}(\tau)}{\tau-bi} d\tau = 0$.

CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

Se ha encontrado la solución en cuadraturas de un problema parabólico con condiciones de contorno diferentes por semiejes, tanto para una ecuación homogénea como para una no homogénea. La técnica utilizada consiste en reducir el problema original con el auxilio de la transformada de Fourier a un problema de Riemann con solución conocida, y luego se encuentra la solución del problema original en cuadraturas con el auxilio de la transformada inversa. La solución analítica se obtiene para diferentes valores del índice del coeficiente del problema de Riemann obtenido.

Los resultados encontrados constituyen inobjetablemente un aporte teórico a la teoría de los Problemas de Contorno de las Ecuaciones Diferenciales Parciales, pues en la bibliografía consultada no existen en la actualidad técnicas analíticas que aborden problemas de esta naturaleza, donde las condiciones de contorno difieren en diferentes partes del eje.

**CAPÍTULO III: SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE CONTORNO DE TIPO
HIPERBÓLICO CON CONDICIONES DE CONTORNO DIFERENTES POR
SEMIEJES**

CAPÍTULO III: SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE CONTORNO DE TIPO HIPERBÓLICO CON CONDICIONES DE CONTORNO DIFERENTES POR SEMIEJES

En el presente capítulo se hace el planteamiento del problema en cuestión, consistente en encontrar la solución a una ecuación en derivadas parciales de tipo hiperbólico con condiciones de contorno muy generales, definidas por semiejes. La misma se buscará en una cierta clase de funciones de amplia aplicación práctica. Con el apoyo del operador de Fourier se reduce el problema original a un problema de contorno de Riemann que se resuelve mediante la técnica de Cherski. Los resultados obtenidos se pueden generalizar a otros tipos de regiones, incluso acotadas, trabajando con transformaciones conformes.

Luego se estudian las condiciones de solubilidad del problema de Riemann mediante condiciones necesarias y suficientes para que el coeficiente y el término independiente de dicho problema estén en las clases de funciones adecuadas. Es interesante el estudio realizado sobre el valor del índice y los diferentes valores de acuerdo a los coeficientes del problema. Por último se determina la solución de los problemas en cuadraturas para diferentes valores de índice del coeficiente del problema de Riemann. Todo esto se recoge en una serie de teoremas que resumen los resultados obtenidos.

3.1 Planteamiento del problema no homogéneo

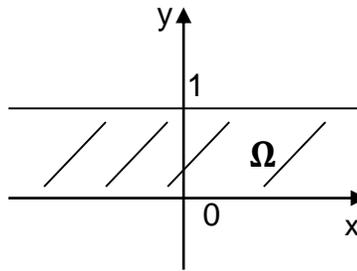
En este epígrafe se procederá a realizar el planteamiento del problema de contorno general de tipo hiperbólico con condiciones de contorno dadas por semiejes:

Dada la ecuación diferencial parcial de tipo hiperbólico

$$u_{xx}(x, y) - u_{yy}(x, y) + a_0 u(x, y) = g(x, y), a_0 \neq 0 \quad (3.1.1)$$

en la banda

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 < y < +1\} \quad (3.1.2)$$



y las condiciones de contorno

$$\alpha_0 u(x, 1^-) + \alpha_1 u_y(x, 1^-) + \alpha_2 u_x(x, 1^-) = g_{10}(x) \quad (3.1.3)$$

$$\beta_0 u(x, 0^+) + \beta_1 u_y(x, 0^+) + \beta_2 u_x(x, 0^+) = g_{11}(x), x < 0 \quad (3.1.4)$$

$$\gamma_0 u(x, 0^+) + \gamma_1 u_y(x, 0^+) + \gamma_2 u_x(x, 0^+) = g_{12}(x), x > 0 \quad (3.1.5)$$

donde α_i, β_i y $\gamma_i; i=0,1,2$ son números reales y

$$g(x, y) \in L_{2x}(\mathbb{R}), g_{10}(x) \in L_{2x}(\mathbb{R}), g_{11}(x) \in L_{2x}(-\infty, 0) \text{ y } g_{12}(x) \in L_{2x}(0, +\infty)$$

Se desea encontrar condiciones sobre los elementos conocidos de (3.1.1), (3.1.3)-(3.1.5) para que la ecuación (3.1.1) tenga solución única en la región

(3.1.2), que satisfagan las condiciones (3.1.3)- (3.1.5) y que pertenezcan a la clase.

$$S = \{u \in F(\Omega): u_{xx} \in L_{2x}(\mathbb{R}), u_{yy} \in L_{2x}(\mathbb{R}), u \in L_{2x}(\mathbb{R}), 0 < y < +1\} \quad (3.1.6)$$

donde $F(\Omega)$ es la clase de funciones que están definidas sobre la banda infinita Ω y $L_{2x}(\mathbb{R})$ es la clase $L_2(\mathbb{R})$ con respecto a la variable x .

Nota: Como se dijo anteriormente, resolviendo este problema para la banda infinita, no se pierde generalidad, pues utilizando transformaciones conformes es posible transformar una gran variedad de regiones, incluso acotadas, a la región estudiada aquí, ejemplo de ello [ver páginas 72-79 de [1], páginas 183-186 de [3] y Anexo (A3)]. Además tampoco se pierde generalidad al tomar uno como cota superior de la banda, esto solo se hace para facilitar el desarrollo matemático.

El problema está bien planteado porque el número de condiciones de contorno (3) es igual al orden de la ecuación diferencial con respecto a y (2), por el número de regiones (1), más uno [ver páginas 77-79 de [1] y páginas 186-188 [2] y Anexo 1 (A2)].

3.2 Reducción a un problema de Riemann

A continuación se aplica la técnica de Cherski para reducir el problema planteado en 3.1 a un problema de Riemann para la banda.

3.2.1 Aplicación de la transformada de Fourier a la ecuación (3.1.1)

Realizando esta operación se obtiene la ecuación diferencial ordinaria:

$$-\frac{d^2U(x, y)}{dy^2} + (a_0 - x^2)U(x, y) = G(x, y) \quad (3.2.1)$$

para encontrar la solución de la ecuación diferencial ordinaria (3.2.1) se utiliza la ecuación característica

$$-z^2 + (a_0 - x^2) = 0 \quad (3.2.2)$$

y se encuentran las raíces, las cuales tienen la forma:

$$z_{1,2}(x) = \pm \sqrt{(a_0 - x^2)}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (3.2.3)$$

luego la solución general de (3.2.1) es:

$$U(x, y) = C_1(x)e^{-\sqrt{(a_0-x^2)}y} + C_2(x)e^{\sqrt{(a_0-x^2)}y} + V(x, y) \quad (3.2.4)$$

donde

$$V(x, y) = -\frac{1}{2}e^{-\sqrt{a_0-x^2}y} \int \frac{G(x,y)}{\sqrt{a_0-x^2}} e^{\sqrt{a_0-x^2}y} dy + \frac{1}{2}e^{\sqrt{a_0-x^2}y} \int \frac{G(x,y)}{\sqrt{a_0-x^2}} e^{-\sqrt{a_0-x^2}y} dy$$

es una solución particular de (3.2.4); $C_1(x)$ y $C_2(x)$ son funciones arbitrarias que se deben determinar.

3.2.2 Adaptación de las condiciones de contorno (3.1.4) y (3.1.5) para la aplicación de la transformada de Fourier

Con ese objetivo se introducen las funciones f_+ y f_- :

$$f_+(x) = \begin{cases} \text{función desconocida de } L_{2x^+}(\mathbb{R}), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$f_-(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ \text{función desconocida de } L_{2x^-}(\mathbb{R}), & x \leq 0 \end{cases}$$

estas funciones permiten escribir (3.1.4) y (3.1.5) en la forma

$$\beta_0 u(x, 0^+) + \beta_1 u_y(x, 0^+) + \beta_2 u_x(x, 0^+) = g_{11^-}(x) + f_+(x), \quad |x| < +\infty \quad (3.2.5)$$

$$\gamma_0 u(x, 0^+) + \gamma_1 u_y(x, 0^+) + \gamma_2 u_x(x, 0^+) = g_{12^+}(x) + f_-(x), \quad |x| < +\infty \quad (3.2.6)$$

donde

$$g_{11-}(x) = \begin{cases} g_{11}(x), & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad g_{12+}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ g_{12}(x), & x > 0 \end{cases}$$

3.2.3 Aplicación de la transformada de Fourier a las nuevas condiciones de contorno y a la condición (3.1.3)

Realizando esta operación en (3.1.3), (3.2.5) y (3.2.6) se obtiene:

$$\alpha_0 U(x, 1^-) + \alpha_1 \frac{dU}{dy}(x, 1^-) - ix\alpha_2 U(x, 1^-) = G_{10}(x) \quad (3.2.7)$$

$$\beta_0 U(x, 0^+) + \beta_1 \frac{dU}{dy}(x, 0^+) - ix\beta_2 u_x(x, 0^+) = G_{11}^-(x) + F^+(x), \quad |x| < \infty \quad (3.2.8)$$

$$\gamma_0 U(x, 0^+) + \gamma_1 \frac{dU}{dy}(x, 0^+) - ix\gamma_2 u_x(x, 0^+) = G_{12}^+(x) + F^-(x), \quad |x| > \infty \quad (3.2.9)$$

De acuerdo a la definición de f_+ y f_- las funciones $F^+(x)$ y $F^-(x)$ se pueden considerar [ver 41] como los valores límites de las funciones $F^+(z)$ y $F^-(z)$, analíticas en el semiplano superior e inferior respectivamente, que satisfacen las condiciones:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F^+(x+iy)|^2 dx < M, \text{ si } y > 0 \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |F^-(x+iy)|^2 dx < M, \text{ si } y < 0$$

respectivamente, donde M es el mismo para todas las y .

3.2.4 Obtención de una ecuación funcional en la cual las únicas funciones desconocidas son $F^+(x)$ y $F^-(x)$

A partir de (3.2.1) se obtiene fácilmente

$$\frac{dU}{dy}(x, y) = -C_1(x)\sqrt{(a_0-x^2)}e^{-\sqrt{(a_0-x^2)}y} + C_2(x)\sqrt{(a_0-x^2)}e^{\sqrt{(a_0-x^2)}y} + \frac{dV}{dy}(x, y) \quad (3.2.10)$$

Sustituyendo (3.2.4) y (3.2.10) en (3.2.7) y (3.2.7), y efectuando las operaciones necesarias se obtienen las expresiones de $C_1(x)$ y $C_2(x)$:

$$C_1(x) = \begin{vmatrix} H_2(x) + F^+(x) & P_2(x) \\ H_1(x) & e^{\sqrt{a_0-x^2}} P_1(x) \end{vmatrix} \frac{1}{\Delta(x)} \quad (3.2.11)$$

$$C_2(x) = \begin{vmatrix} H_1(x) & e^{-\sqrt{a_0-x^2}} \overline{P}_1(x) \\ H_2(x) + F^+(x) & \overline{P}_2(x) \end{vmatrix} \frac{1}{\Delta(x)} \quad (3.2.12)$$

donde

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{a_0-x^2}} P_1(x) & e^{-\sqrt{a_0-x^2}} \overline{P}_1(x) \\ P_2(x) & \overline{P}_2(x) \end{vmatrix}, \quad P_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \sqrt{a_0-x^2} - ix\alpha_2,$$

$$\overline{P}_1(x) = \alpha_0 - \alpha_1 \sqrt{a_0-x^2} - ix\alpha_2, \quad P_2(x) = \beta_0 + \beta_1 \sqrt{a_0-x^2} - ix\beta_2$$

$$\overline{P}_2(x) = \beta_0 - \beta_1 \sqrt{a_0-x^2} - ix\beta_2 \text{ y}$$

$$H_1(x) = G_{10}(x) - \alpha_0 V(x, 1^-) - \alpha_1 \frac{dV}{dy}(x, 1^-) + ix\alpha_2 V(x, 1^-)$$

$$H_2(x) = G_{11}^-(x) - \beta_0 V(x, 0^+) - \beta_1 \frac{dV}{dy}(x, 0^+) + ix\beta_2 V(x, 0^+)$$

se obtiene a partir de la solución particular de (3.2.4) que:

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} V(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{2} \int \frac{G(x, y)}{\sqrt{a_0-x^2}} e^{\sqrt{a_0-x^2}y} dy + \frac{1}{2} \int \frac{G(x, y)}{\sqrt{a_0-x^2}} e^{-\sqrt{a_0-x^2}y} dy \right]$$

Si $V(x, 1^-), xV(x, 1^-), \frac{dV}{dy}(x, 1^-), V(x, 0^+), xV(x, 0^+)$ y $\frac{dV}{dy}(x, 0^+)$, pertenecen a $L_{2x}(\mathbb{R})$,

es evidente que $H_1(x)$ y $H_2(x)$ pertenecen a $L_{2x}(\mathbb{R})$.

Luego sustituyendo (3.2.4), (3.2.10), (3.2.11) y (3.2.12) en (3.2.9) se obtiene una expresión en función de $F^+(x)$ y $F^-(x)$, dada de la siguiente forma:

$$F^+(x) = D(x)F^-(x) + H(x) \quad (3.2.13)$$

el cual es el problema de Riemann correspondiente al caso hiperbólico, en cuyo

caso: $D(x) = \frac{\Delta(x)}{\Delta_1(x)}$, es el coeficiente del problema Riemann y el término

$$\text{independiente es: } H(x) = \frac{\Delta_2(x)}{\Delta_1(x)}H_1(x) - H_2(x) + \frac{\Delta(x)}{\Delta_1(x)}H_3(x) \quad (3.2.14)$$

siendo $H_3(x) = G_{12}^+(x) - \gamma_0 V(x, 0^+) - \gamma_1 \frac{dV}{dy}(x, 0^+) + ix\gamma_2 V(x, 0^+)$, si

$V(x, 0^+)$, $xV(x, 0^+)$ y $\frac{dV}{dy}(x, 0^+)$ pertenecen a $L_{2x}(\mathbb{R})$, es evidente que $H_3(x)$

pertenece a $L_{2x}(\mathbb{R})$. $\Delta_1(x)$ viene dada por la expresión:

$$\Delta_1(x) = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{a_0-x^2}} P_1(x) & e^{-\sqrt{a_0-x^2}} P_3(x) \\ \overline{P}_1(x) & \overline{P}_3(x) \end{vmatrix}$$

donde $P_3(x) = \gamma_0 + \gamma_1 \sqrt{a_0 - x^2} - ix\gamma_2$ y $\overline{P}_3(x) = \gamma_0 - \gamma_1 \sqrt{a_0 - x^2} - ix\gamma_2$, además el

término $\Delta_2(x)$ viene dado por: $\Delta_2(x) = 2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}$, lo cual implica que:

$$H(x) = \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)}H_1(x) - H_2(x) + \frac{\Delta(x)}{\Delta_1(x)}H_3(x). \text{ Si se desarrolla } D(x) = \frac{\Delta(x)}{\Delta_1(x)},$$

queda:

$$D(x) = \frac{e^{2\sqrt{a_0-x^2}} [A(a_0 - x^2) + B\sqrt{a_0 - x^2} + Cx^2 + D + ix(E\sqrt{a_0 - x^2} + F)] - e^{2\sqrt{a_0-x^2}} [A_1(a_0 - x^2) + B_1\sqrt{a_0 - x^2} + C_1x^2 + D_1 + ix(E_1\sqrt{a_0 - x^2} + F_1)] -$$

$$\frac{-A(a_0 - x^2) + B\sqrt{a_0 - x^2} - Cx^2 - D - ix(-E\sqrt{a_0 - x^2} + F)}{-A_1(a_0 - x^2) + B_1\sqrt{a_0 - x^2} - C_1x^2 - D_1 - ix(-E_1\sqrt{a_0 - x^2} + F_1)}$$

donde:

$$\begin{aligned} A &= \alpha_1\beta_1 & A_1 &= \alpha_1\gamma_1 \\ B &= -\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 & B_1 &= -\alpha_0\gamma_1 + \alpha_1\gamma_0 \\ C &= -\alpha_2\beta_2 & C_1 &= -\alpha_2\gamma_2 \\ D &= \alpha_0\beta_0 & D_1 &= \alpha_0\gamma_0 \\ E &= \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 & E_1 &= \alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2 \\ F &= -\alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0 & F_1 &= -\alpha_0\gamma_2 - \alpha_2\gamma_0 \end{aligned}$$

3.3 Condiciones de solubilidad del problema de Riemann obtenido a partir del problema de contorno hiperbólico

En este epígrafe se determinan condiciones necesarias y suficientes sobre los coeficientes de (3.1.3), (3.1.4) y (3.1.5), para que el coeficiente y el término independiente de (3.2.13) satisfagan las condiciones correspondientes al problema de Riemann.

Se conoce del subepígrafe 1.2.2 del capítulo I que, para obtener la solución de (3.2.13) en la clase $L_{2x}^{\lambda\pm}(\overline{\mathbb{R}})(L_{2x}^{\pm}(\mathbb{R}))$, se requiere que $D(x)$ pertenezca a la clase $L_{2x}^{\lambda}(\overline{\mathbb{R}} + 1)$ y el término independiente pertenezca a $L_{2x}^{\lambda}(\overline{\mathbb{R}})(L_{2x}(\mathbb{R}))$, siendo $L_{2x}^{\lambda}(\overline{\mathbb{R}} + 1)$ la clase de las funciones f que satisfacen las condiciones siguientes:

- i. f no tiene ni ceros, ni polos sobre \mathbb{R} .
- ii. $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.
- iii. $(f - 1) \in L_{2x}^{\lambda}(\overline{\mathbb{R}})$

También se requiere según [1], que supongamos $a_0 \leq 0$ para que el índice del problema de Riemann tenga una expresión análoga en toda la región.

3.3.1 Determinación de las condiciones para que $D(x)$ satisfaga la condición i

Para que $D(x)$ pertenezca a la clase $L_{2x}^\lambda(\mathbb{R} + 1)$ tiene que cumplirse en primer lugar que $D(x)$ no tenga ni ceros ni polos sobre \mathbb{R} , lo cual se recoge en el siguiente Teorema:

Teorema 1: La expresión de $D(x)$, no tiene ni ceros ni polos para $x \in \mathbb{R}$ si se cumplen las condiciones:

$$\begin{aligned} B^2 - 4(A - C)(Ca_0 + D) < 0, A \neq C \text{ y } E \neq 0 \\ B_1^2 - 4(A_1 - C_1)(C_1a_0 + D_1) < 0, A_1 \neq C_1 \text{ y } E_1 \neq 0 \end{aligned}$$

Demostración del Teorema 1:

Para demostrar este teorema primero se trabajará con la parte real del coeficiente del problema de Riemann que no acompaña a la parte que tiene exponencial en el numerador, sea:

$$\sqrt{a_0 - x^2} = y \Rightarrow a_0 - x^2 = y^2 \quad (3.3.1)$$

como la parte real que no acompaña al exponencial tiene la forma:

$$-A(a_0 - x^2) + B\sqrt{a_0 - x^2} - Cx^2 - D \quad (3.3.2)$$

sustituyendo (3.3.1) en (3.3.2), se obtiene:

$$-Ay^2 + By + Cy^2 - Ca_0 - D = 0 \quad (3.3.3)$$

pues $x^2 = a_0 - y^2$, e igualando a cero para poder encontrar las posibles raíces reales que pudieran anular la expresión (3.3.3). Trabajando algebraicamente en (3.3.3), se obtiene la ecuación algebraica de segundo orden y las dos raíces respectivamente, es decir

$$(A - C)y^2 - By + (Ca_0 + D) = 0 \Rightarrow y = y_{1,2} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4(A - C)(Ca_0 + D)}}{2(A - C)}, \text{ con } A \neq C$$

por lo tanto si se cumple que:

$$B^2 - 4(A - C)(Ca_0 + D) < 0 \quad (3.3.4)$$

no existen ceros, es decir, raíces reales, solo serían raíces complejas conjugadas en el caso que $B \neq 0$ o raíces imaginarias conjugadas si $B = 0$. En este último caso la relación $B^2 - 4(A - C)(Ca_0 + D) < 0$ se convertiría en $4(A - C)(Ca_0 + D) > 0$ el cual sería un caso particular de (3.3.4). Luego si se cumple (3.3.4) y $A \neq C$ quedan las raíces complejas conjugadas en el caso $B \neq 0$ o imaginarias conjugadas si $B = 0$, siendo

$$y = y_{1,2} = \frac{B}{A-C} \pm i \frac{\sqrt{4(A-C)(Ca_0+D)-B^2}}{A-C}.$$

Luego como $x^2 = a_0 - y^2$ e $y \in \mathbb{C} \Rightarrow x^2 \in \mathbb{C} \Rightarrow x \in \mathbb{C}$ por lo tanto la ecuación

(3.3.2) no tiene raíces reales, cumpliéndose que $B^2 - 4(A - C)(Ca_0 + D) < 0$ con $A \neq C$.

Se trabajará ahora con la parte imaginaria del numerador que tiene la forma:

$$-ix(-E\sqrt{a_0 - x^2} + F) \quad (3.3.5)$$

igualando (3.3.5) a cero queda la expresión:

$$-ix(-E\sqrt{a_0 - x^2} + F) = 0 \Rightarrow x(-E\sqrt{a_0 - x^2} + F) = 0 \quad (3.3.6)$$

la cual tiene como raíces $x_1 = 0$ y $x_{2,3} = \pm \sqrt{a_0 - \frac{F^2}{E^2}}$, como $a_0 \leq 0$ y $\frac{F^2}{E^2} > 0$, esto

implica que la relación $a_0 - \frac{F^2}{E^2} < 0$, por lo tanto $x_{2,3}$ serían raíces imaginarias

conjugadas y entonces la única raíz posible es $x_1 = 0$, cumpliéndose que:

$$E \neq 0 \quad (3.3.7)$$

Capítulo III: Solución de un problema de contorno de tipo hiperbólico con condiciones de contorno diferentes por semiejes

Se verá ahora la parte real del coeficiente del problema de Riemann que acompaña a la exponencial en el numerador, la cual tiene la forma:

$$e^{2\sqrt{a_0-x^2}}(A(a_0-x^2) + B\sqrt{a_0-x^2} + Cx^2 + D) \quad (3.3.8)$$

haciendo igual que en la expresión (3.3.2), $\sqrt{a_0-x^2} = y \Rightarrow a_0-x^2 = y^2 \Rightarrow x^2 = a_0-y^2$, queda la relación:

$$(A-C)y^2 + By + (Ca_0 + D) = 0 \Rightarrow y = y_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4(A-C)(Ca_0 + D)}}{2(A-C)}$$

luego con la misma condición (3.3.4) y $A \neq C$, la expresión anterior no tiene raíces reales.

Se analizará ahora la parte imaginaria del numerador que tiene la forma:

$$ix(E\sqrt{a_0-x^2} + F) = 0 \Rightarrow x(E\sqrt{a_0-x^2} + F) = 0 \quad (3.3.9)$$

lo cual implica que $x_{2,3} = \pm \sqrt{a_0 - \frac{F^2}{E^2}}$ y sucede lo mismo la única raíz posible es

$x_1 = 0$, con $E \neq 0$.

Luego, trasladando las mismas condiciones al denominador del coeficiente del problema de Riemann correspondiente a este problema, se obtiene un resultado parcial: Los coeficientes de la exponencial y lo que no está afectado por la exponencial en el numerador y denominador respectivamente del coeficiente del problema de Riemann, no se anulan simultáneamente si se cumple que:

$$\begin{aligned} B^2 - 4(A-C)(Ca_0 + D) < 0, A \neq C \text{ y } E \neq 0 \\ B_1^2 - 4(A_1 - C_1)(C_1a_0 + D_1) < 0, A_1 \neq C_1 \text{ y } E_1 \neq 0 \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Solo falta ver si con la condición (3.3.10) sea posible que las ecuaciones:

$$\begin{aligned} e^{2\sqrt{a_0-x^2}}[A(a_0-x^2) + B\sqrt{a_0-x^2} + Cx^2 + D + ix(E\sqrt{a_0-x^2} + F)] - \\ -A(a_0-x^2) + B\sqrt{a_0-x^2} - Cx^2 - D - ix(-E\sqrt{a_0-x^2} + F) = 0 \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

y

$$e^{2\sqrt{a_0-x^2}} [A_1(a_0 - x^2) + B_1\sqrt{a_0 - x^2} + C_1x^2 + D_1 + ix(E_1\sqrt{a_0 - x^2} + F_1)] - (3.3.12) \\ -A_1(a_0 - x^2) + B_1\sqrt{a_0 - x^2} - C_1x^2 - D_1 - ix(-E_1\sqrt{a_0 - x^2} + F_1) = 0$$

tengan ceros reales. Se trabajará primero en la ecuación (3.3.11), despejando se obtiene:

$$e^{2\sqrt{a_0-x^2}} = \frac{-[-A(a_0 - x^2) + B\sqrt{a_0 - x^2} - Cx^2 - D - ix(-E\sqrt{a_0 - x^2} + F)]}{[A(a_0 - x^2) + B\sqrt{a_0 - x^2} + Cx^2 + D + ix(E\sqrt{a_0 - x^2} + F)]} \\ \Rightarrow 2\sqrt{a_0 - x^2} = \ln \frac{-[-A(a_0-x^2)+B\sqrt{a_0-x^2}-Cx^2-D-ix(-E\sqrt{a_0-x^2}+F)]}{[A(a_0-x^2)+B\sqrt{a_0-x^2}+Cx^2+D+ix(E\sqrt{a_0-x^2}+F)]} \quad (3.3.13)$$

Las expresiones del numerador y denominador de la fracción que interviene en la ecuación (3.3.13) son números complejos, de igual manera la división de dos números complejos es un número complejo y el logaritmo de un número complejo es un número complejo, por lo tanto el miembro derecho de la ecuación (3.3.13) es un número complejo. En el caso del miembro izquierdo de (3.3.13), el elemento $a_0 \leq 0$ y $x^2 \geq 0$, esto implica que $2\sqrt{a_0 - x^2}$ es un número imaginario puro. Pero por las condiciones impuestas en (3.3.10), el numerador ni el denominador de (3.3.13) se anulan, y constituyen un número complejo con parte real e imaginaria $\forall x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, como el miembro derecho siempre es un número complejo y el izquierdo un número imaginario puro $\forall x \in \mathbb{R}$, entonces la igualdad (3.3.13) no puede ocurrir nunca para ningún $x \in \mathbb{R}$ y por tanto las ecuaciones (3.3.11) y (3.3.12) no tienen soluciones reales (se realiza el mismo procedimiento para la ecuación (3.3.12)).

3.3.2 Determinación de las condiciones para $D(x)$ que satisfaga la condición ii.

Teorema 2: Si se cumplen las condiciones del **Teorema 1**, entonces

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} D(x) = 1.$$

Demostración del Teorema 2:

Con las condiciones impuestas en el **Teorema 1**, y teniendo en cuenta que

$e^{2\sqrt{a_0-x^2}}$ es un número complejo con módulo uno ($a_0 - x^2 < 0$), $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$\text{cuando } |x| \rightarrow +\infty: \lim_{|x| \rightarrow +\infty} D(x) = \frac{C-A-E}{C_1-A_1-E_1} \quad (3.3.14)$$

entonces si $\frac{C-A-E}{C_1-A_1-E_1} = k$; $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$, multiplicando el coeficiente del

problema de Riemann por $\frac{1}{k}$ queda $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} D(x) = 1$.

3.3.3 Determinación de condiciones para que $D(x)$ se satisfaga la condición iii.

Teorema 3: Si se cumplen las condiciones del **Teorema 1** y **Teorema 2** entonces

$$(D(x) - 1) \in L_2^\lambda.$$

Demostración del Teorema 3:

Es conocido que $D_A(\overline{\mathbb{R}}) \subset H_1(\mathbb{R}) \subset H_{\lambda_2}(\mathbb{R}) \subset H_{\lambda_1}(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$ para $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$,

donde por $D_A(\mathbb{R})$ se entiende las clases de funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con derivadas

acotadas sobre \mathbb{R} que cumplan: $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{|x| \rightarrow -\infty} f(x)$

Como $L_2^\lambda = L_2(\mathbb{R}) \cap H_\lambda(\mathbb{R})$, se probará primero que $(D(x) - 1) \in H_\lambda(\mathbb{R})$, para lo cual basta con probar que $(D(x) - 1) \in D_A(\overline{\mathbb{R}})$. Por las condiciones impuestas

$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} D(x) = 1$ (en caso de que el límite sea $k \neq 1$ se multiplica por $\frac{1}{k}$ como se

señaló antes), y es fácil probar que $(D(x) - 1)'$ es una función acotada sobre \mathbb{R} ,

lo cual implica que $(D(x) - 1) \in D_A(\overline{\mathbb{R}})$ y, por tanto, $(D(x) - 1) \in H_\lambda(\mathbb{R})$. Falta solamente probar que $(D(x) - 1) \in L_{2x}(\mathbb{R})$. En efecto, como $|D(x) - 1| = o\left(\frac{1}{|x|}\right)$ y $D(x)$ es continua en \mathbb{R} por ser derivable por las condiciones de la hipótesis, se tiene que: $\int_{-\infty}^{+\infty} |D(x) - 1|^2 dx < +\infty$, luego $(D(x) - 1) \in L_{2x}^\lambda$ y el teorema queda probado.

3.3.4 Determinación de las condiciones para que el término independiente de (3.2.13) sea elemento de $L_{2x}(\mathbb{R})$.

Teorema 4: Si se cumplen las condiciones del **Teorema 1** y suponiendo que

$V(x, 1^-)$, $\frac{dV}{dy}(x, 1^-)$, $V(x, 0^+)$ y $\frac{dV}{dy}(x, 0^+)$ pertenezcan a $L_{2x}(\mathbb{R})$ entonces se cumple

que $H(x) \in L_{2x}(\mathbb{R})$.

Demostración del Teorema 4

El término independiente de (3.2.13) tiene la forma:

$$H(x) = \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)}H_1(x) - H_2(x) + \frac{\Delta(x)}{\Delta_1(x)}H_3(x)$$

donde

$$H_1(x) = G_{10}(x) - \alpha_0V(x, 1^-) - \alpha_1\frac{dV}{dy}(x, 1^-) + ix\alpha_2V(x, 1^-)$$

$$H_2(x) = G_{11}^-(x) - \beta_0V(x, 0^+) - \beta_1\frac{dV}{dy}(x, 0^+) + ix\beta_2V(x, 0^+)$$

$$H_3(x) = G_{12}^+(x) - \gamma_0V(x, 0^+) - \gamma_1\frac{dV}{dy}(x, 0^+) + ix\gamma_2V(x, 0^+)$$

Por las condiciones impuestas $G_{10}(x)$, $G_{11}^-(x)$ y $G_{12}^+(x)$, pertenecen a $L_{2x}(\mathbb{R})$ y

$$\frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)}, \frac{\Delta(x)}{\Delta_1(x)} \text{ son funciones acotadas sobre } \mathbb{R}.$$

Si el problema original es homogéneo ($g(x, y) \equiv 0$) el **Teorema 4** quedaría en la siguiente forma: **Corolario del Teorema 4:** Si se cumplen las condiciones del **Teorema 1** entonces se cumple que: $H(x) \in L_{2x}(\mathbb{R})$.

3.4 Solución de problemas hiperbólicos con diferentes condiciones de contorno

A continuación se dará solución a problemas hiperbólicos para diferentes casos del índice del problema de Riemann.

3.4.1 Caso donde se cumple que $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = \alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = 0$ (Solamente $A \neq 0$ y $A_1 \neq 0$)

El problema de contorno correspondiente es:

$$u_{xx}(x, y) - u_{yy}(x, y) + a_0 u(x, y) = 0, a_0 \neq 0$$

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 < y < +1\}$$

$$\alpha_1 u_y(x, 1^-) = g_{10}(x)$$

$$\beta_1 u_y(x, 0^+) = g_{11}(x), x < 0$$

$$\gamma_1 u_y(x, 0^+) = g_{12}(x), x > 0$$

además el coeficiente del problema de Riemann queda de la forma: $D(x) = \frac{\beta_1}{\gamma_1}$,

el cual es un caso de índice cero, donde el coeficiente del problema de Riemann

es una constante, esto implica que no hay raíces ni en el numerador ni en el denominador, por lo que el problema de Riemann correspondiente sería:

$$F^+(x) = \frac{\beta_1}{\gamma_1} F^-(x) - H_2(x) + \frac{\beta_1}{\gamma_1} H_3(x)$$

pues $\Delta_2(x) = 2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2} = 0$, haciendo:

$$F_1^+(x) = F^+(x), \quad F_1^-(x) = \frac{\beta_1}{\gamma_1} F^-(x) \quad y \quad H_4(x) = -H_2(x) + \frac{\beta_1}{\gamma_1} H_3(x) = \beta_1 G_{12}^+ - G_{11}^-,$$

queda el problema de salto: $F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_4(x)$. **(3.4.1)**

Luego se puede enunciar el siguiente teorema:

Teorema 5: Si $a_0 < 0$ y $V(x, y)$, $xV(x, 0^+)$, y $\frac{dV(x, 0^+)}{dy}$ pertenecen a $L_{2x}(\mathbb{R})$,

entonces el problema para este caso tiene solución única en la clase S dada por

$$u(x, y) = V^{-1}[U(x, y)].$$

Donde $U(x, y) = C_1(x)e^{-\sqrt{(a_0-x^2)}y} + C_2(x)e^{\sqrt{(a_0-x^2)}y} + V(x, y)$ y

$$F^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_4(t)e^{itx} dt, \quad \text{siendo } h_4 = V^{-1}[H_4] = V^{-1}[\beta_1 G_{12}^+ - G_{11}^-],$$

$$C_1(x) = \begin{vmatrix} H_2(x) + F^+(x) & P_2(x) \\ H_1(x) & e^{\sqrt{a_0-x^2}} P_1(x) \end{vmatrix} \frac{1}{\Delta(x)} \quad y \quad C_2(x) = \begin{vmatrix} H_1(x) & e^{-\sqrt{a_0-x^2}} \overline{P}_1(x) \\ H_2(x) + F^+(x) & \overline{P}_2(x) \end{vmatrix} \frac{1}{\Delta(x)}$$

Demostración del Teorema 5:

La solución del problema de salto **(3.4.1)** según la definición dada de operador proyección en el epígrafe 1.2.3 del capítulo I es:

$P^\pm(H_4(x)) = (VoT^\pm oV^{-1})H_4(x) = VoT^\pm(h_4) = V(h_{4\pm})$, donde

$$V(h_{4+}(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_4(t)e^{ixt} dt = F_1^+(x) \quad \text{y} \quad V(h_{4-}(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_4(t)e^{ixt} dt = F_1^-(x)$$

siendo $h_4 = V^{-1}[H_4]$. Luego se tiene que:

$$U(x, y) = C_1(x)e^{-\sqrt{(a_0-x^2)}y} + C_2(x)e^{\sqrt{(a_0-x^2)}y} + V(x, y) \quad (3.4.2)$$

donde

$$C_1(x) = \begin{vmatrix} H_2(x) + F^+(x) & P_2(x) \\ H_1(x) & e^{\sqrt{a_0-x^2}} P_1(x) \end{vmatrix} \frac{1}{\Delta(x)} \quad \text{y} \quad C_2(x) = \begin{vmatrix} H_1(x) & e^{-\sqrt{a_0-x^2}} \overline{P_1}(x) \\ H_2(x) + F^+(x) & \overline{P_2}(x) \end{vmatrix} \frac{1}{\Delta(x)}$$

Justificación de los pasos

En (3.4.2) $F^+(x) \in L_{2x}^+(\mathbb{R})$, $H_1(x) \in L_{2x}(\mathbb{R})$, $H_2(x) \in L_{2x}^-(\mathbb{R})$ y $P_1(x)$, $P_2(x)$, $\overline{P_1}(x)$,

$\overline{P_2}(x)$ y $\Delta(x)$ son polinomios. Luego $U(x, y)$, $(a_0 - x^2)U(x, y)$ y $-\frac{d^2 U(x, y)}{dy^2}$

pertenecen a $L_{2x}(\mathbb{R})$ para todo y , $0 < y < +1$, por lo tanto $u(x, y)$ pertenece a la

clase (3.1.6), siendo $u(x, y) = V^{-1}[U(x, y)]$ finalmente la solución a este problema

3.4.1. Para el caso homogéneo, es decir, para $V(x, y) \equiv 0$ se tiene el siguiente

teorema: **Corolario del Teorema 5:** Si $a_0 < 0$, entonces el problema de contorno

para este caso tiene solución única en la clase \mathcal{S} dada por $u(x, y) = V^{-1}[U(x, y)]$.

3.4.2 Caso donde se cumple que $\alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = 0$ y $\frac{\alpha_0}{\alpha_1} = \frac{\beta_0}{\beta_1} = \frac{\gamma_0}{\gamma_1}$ (Solamente

$A \neq 0, A_1 \neq 0, D \neq 0$ y $D_1 \neq 0$)

Esto implicaría que $C = C_1 = B = B_1 = E = E_1 = F = F_1 = 0$, $B = B_1$, lo cual lleva,

trabajando algebraicamente, a una relación de proporcionalidad entre los

Capítulo III: Solución de un problema de contorno de tipo hiperbólico con condiciones de contorno diferentes por semiejes

coeficientes: $\frac{\alpha_0}{\alpha_1} = \frac{\beta_0}{\beta_1} = \frac{\gamma_0}{\gamma_1}$. Por ejemplo, un problema podría ser que todos los

coeficientes fuesen uno. Por lo que el problema de contorno se reduce a:

$$u_{xx}(x, y) - u_{yy}(x, y) + a_0 u(x, y) = 0, a_0 \neq 0$$

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 < y < +1\}$$

$$\alpha_0 u(x, 1^-) + \alpha_1 u_y(x, 1^-) = g_{10}(x)$$

$$\beta_0 u(x, 0^+) + \beta_1 u_y(x, 0^+) = g_{11}(x), x < 0$$

$$\gamma_0 u(x, 0^+) + \gamma_1 u_y(x, 0^+) = g_{12}(x), x > 0$$

además el coeficiente del problema de Riemann queda de la forma:

$$D(x) = \frac{-\alpha_1 \beta_1 (a_0 - x^2) + \alpha_0 \beta_0}{-\alpha_1 \gamma_1 (a_0 - x^2) + \alpha_0 \gamma_0},$$

las raíces del numerador tienen la forma: $x = x_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{Aa_0 + D}{A}}$; $\frac{D}{A} < -a_0$, las

cuales son raíces imaginarias conjugadas. Las raíces del denominador tienen la

forma: $x = x_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{A_1 a_0 + D_1}{A_1}}$; $\frac{D_1}{A_1} < -a_0$, las cuales son raíces imaginarias

conjugadas. Por lo tanto, como por definición $IndD(x) = N - P$, esto implica que

el índice es cero y el problema de Riemann queda de la forma:

$$F^+(x) = \frac{(x - ai)(x - bi)}{(x - ci)(x - di)} F^-(x) + \frac{2\beta_1 \gamma_0 \sqrt{a_0 - x^2}}{(e^{2\sqrt{a_0 - x^2}} - 1) \alpha_1 \gamma_1 (a_0 - x^2) + \alpha_0 \gamma_0} H_1(x) - H_2(x) \\ + \frac{(x - ai)(x - bi)}{(x - ci)(x - di)} H_3(x)$$

donde $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$ y $d < 0$.

Como se buscan funciones $F^+(x)$ y $F^-(x)$ prolongables analíticas al semiplano superior e inferior, entonces se transforma la ecuación anterior en:

$$\frac{(x-di)}{(x-bi)}F^+(x) = \frac{(x-ai)}{(x-ci)}F^-(x) +$$

$$+ \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{(e^{2\sqrt{a_0-x^2}}-1)\alpha_1\gamma_1(a_0-x^2)+\alpha_0\gamma_0} \frac{(x-di)}{(x-bi)}H_1(x) - \frac{(x-di)}{(x-bi)}H_2(x) + \frac{(x-ai)}{(x-ci)}H_3(x),$$

haciendo: $F_1^+(x) = \frac{(x-di)}{(x-bi)}F^+(x)$, $F_1^-(x) = \frac{(x-ai)}{(x-ci)}F^-(x)$ y

$$H_5(x) = \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{(e^{2\sqrt{a_0-x^2}}-1)\alpha_1\gamma_1(a_0-x^2)+\alpha_0\gamma_0} \frac{(x-di)}{(x-bi)}H_1(x) - \frac{(x-di)}{(x-bi)}H_2(x) + \frac{(x-ai)}{(x-ci)}H_3(x)$$

queda el problema de salto:

$$F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_5(x), \tag{3.4.3}$$

luego se puede enunciar el siguiente teorema:

Teorema 6: Si $a_0 < 0$ y $V(x, y)$, $xV(x, 0^+)$, y $\frac{dV(x, 0^+)}{dy}$ pertenecen a $L_{2x}(\mathbb{R})$,

entonces el problema de contorno para este caso tiene solución única en la clase

(3.1.6) dada por $u(x, y) = V^{-1}[U(x, y)]$.

Donde: $U(x, y) = C_1(x)e^{-\sqrt{(a_0-x^2)}y} + C_2(x)e^{\sqrt{(a_0-x^2)}y} + V(x, y)$

y $F^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(x-bi)}{(x-di)} \int_0^{+\infty} h_5(t)e^{ixt} dt$, siendo $h_5(x) = V^{-1}[H_5(x)]$.

Para el caso homogéneo, es decir para $V(x, y) \equiv 0$ se tiene el siguiente teorema:

Corolario del Teorema 6: Si $a_0 < 0$, entonces el problema para el caso **3.4.2**

tiene solución única en la clase **(3.1.6)** dada por $u(x, y) = V^{-1}[U(x, y)]$.

3.4.3 Caso donde se cumple que $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 0$ (Solamente $C \neq 0, C_1 \neq 0, D \neq 0, D_1 \neq 0, F \neq 0$ y $F_1 \neq 0$)

Por lo que el problema de contorno se reduce a:

$$u_{xx}(x, y) - u_{yy}(x, y) + a_0 u(x, y) = 0, a_0 \neq 0$$

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 < y < +1\}$$

$$\alpha_0 u(x, 1^-) + \alpha_2 u_x(x, 1^-) = g_{10}(x)$$

$$\beta_0 u(x, 0^+) + \beta_2 u_x(x, 0^+) = g_{11}(x), x < 0$$

$$\gamma_0 u(x, 0^+) + \gamma_2 u_x(x, 0^+) = g_{12}(x), x > 0$$

además el coeficiente del problema de Riemann queda de la forma:

$$D(x) = \frac{[Cx^2 + D + ixF]}{[C_1x^2 + D_1 + ixF_1]}$$

por lo tanto las raíces del numerador (denominador) serían:

$$x_{1,2} = \frac{-iF \pm \sqrt{-F^2 - 4DC}}{2C} \quad (x_{1,2} = \frac{-iF_1 \pm \sqrt{-F_1^2 - 4D_1C_1}}{2C_1})$$

Tanto el numerador como el denominador de $D(x)$ son polinomios de segundo grado. La solución del problema de Riemann depende del índice del coeficiente $D(x)$ y para este caso solo se tienen los siguientes casos: **Casos de índice cero, Casos de índice positivos: uno y dos** y **Casos de índice negativo: menos uno y menos dos.**

Se cumple que $\Delta_2(x) = 0$.

3.4.3.1 Casos de índice cero

3.4.3.1-a) Caso donde se cumple que $F = 0 (F_1 = 0) \Rightarrow -\frac{\alpha_0}{\alpha_2} = \frac{\beta_0}{\beta_2} = \frac{\gamma_0}{\gamma_2}$,

las raíces quedarían de la forma:

$$x_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{-4DC}}{2C} = \pm \alpha_2 \beta_0 i \quad (x_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{-4D_1 C_1}}{2C_1} = \pm \alpha_2 \gamma_0 i), \quad |4DC| \geq 0$$

las cuales son raíces imaginarias conjugadas, dos ceros y dos polos: un cero y un polo en el semiplano superior y un cero y un polo en el semiplano inferior. El coeficiente del problema de Riemann queda de la forma:

$$D(x) = \frac{Cx^2 + D}{C_1 x^2 + D_1}$$

por lo que el problema de Riemann queda de la siguiente manera:

$$F^+(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} F^-(x) - H_2(x) + \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} H_3(x),$$

donde $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$ y $d < 0$. Se tiene que:

$$\frac{(x-di)}{(x-bi)} F^+(x) = \frac{(x-ai)}{(x-ci)} F^-(x) - \frac{(x-di)}{(x-bi)} H_2(x) + \frac{(x-ai)}{(x-ci)} H_3(x), \text{ haciendo:}$$

$$F_1^+(x) = \frac{(x-di)}{(x-bi)} F^+(x), \quad F_1^-(x) = \frac{(x-ai)}{(x-ci)} F^-(x) \text{ y}$$

$$H_6(x) = -\frac{(x-di)}{(x-bi)} H_2(x) + \frac{(x-ai)}{(x-ci)} H_3(x), \text{ queda el problema de salto:}$$

$F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_6(x)$, luego se puede enunciar el siguiente teorema:

Teorema 7: Si $a_0 < 0$ y $V(x, y)$, $xV(x, 0^+)$, y $\frac{dV(x, 0^+)}{dy}$ pertenecen a $L_{2x}(\mathbb{R})$,

entonces el problema de contorno para este caso tiene solución única en la clase

(3.1.6) dada por $u(x, y) = V^{-1}[U(x, y)]$.

Donde: $U(x, y) = C_1(x)e^{-\sqrt{(a_0-x^2)}y} + C_2(x)e^{\sqrt{(a_0-x^2)}y} + V(x, y)$

y $F^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(x-bi)}{(x-di)} \int_0^{+\infty} h_6(t)e^{ixt} dt$, siendo $h_6 = V^{-1}[H_6] = V^{-1}[-H_2(x) + \frac{(x-ai)}{(x-ci)}H_3(x)]$

Para el caso homogéneo, es decir para $V(x, y) \equiv 0$ se tiene el siguiente teorema:

Corolario del Teorema 7: Si $a_0 < 0$, entonces el problema para el caso **3.4.3.1-a)**

tiene solución única en la clase **(3.1.6)** dada por $u(x, y) = V^{-1}[U(x, y)]$.

3.4.3.1-b) Caso donde se cumple que $D = 0 (D_1 = 0) \Rightarrow \alpha_0 = 0$ ó $\beta_0 = \gamma_0 = 0$

Las raíces quedarían de la forma:

$$x_{1,2} = \frac{-iF \pm \sqrt{-F^2}}{2C} = \begin{cases} 0 \\ \frac{iF}{C} \end{cases} \quad (x_{1,2} = \frac{-iF_1 \pm \sqrt{-F_1^2}}{2C_1} = \begin{cases} 0 \\ -\frac{iF_1}{C_1} \end{cases}), \text{ las cuales son raíces}$$

imaginarias y la raíz cero que aparece cuando se restan los términos del numerador en las expresiones de las raíces. El coeficiente del problema de

Riemann queda de la forma: $D(x) = \frac{Cx^2 + ixF}{C_1x^2 + ixF_1}$. Esto conduce a los siguientes

subcasos:

3.4.3.1-b.1) Caso donde se cumple que $sgF \neq sgC$ ($sgF_1 \neq sgC_1$)

Las raíces $x = -\frac{iF}{C}$ ($x = -\frac{iF_1}{C_1}$) son imaginarias en el semiplano superior, por lo

que el problema de Riemann queda de la siguiente manera:

$$F^+(x) = \frac{(x-ai)}{(x-bi)} F^-(x) - H_2(x) + \frac{(x-ai)}{(x-bi)} H_3(x)$$

donde $a > 0$ y $b > 0$, haciendo: $F_1^+(x) = F^+(x)$, $F_1^-(x) = \frac{(x-ai)}{(x-bi)} F^-(x)$ y

$$H_7(x) = -H_2(x) + \frac{(x-ai)}{(x-bi)} H_3(x), \text{ queda el problema de salto:}$$

$$F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_7(x) .$$

Luego podemos enunciar teoremas similares a los **Teorema 7** y **Corolario del Teorema 7** con h_7 y H_7 en lugar de h_6 y H_6 .

Nota: El caso **3.4.3.1-b.2)** se incluye en el [Anexo \(A5.1\)](#) por tener técnicas similares de solución al caso **3.4.3.1-b.1).**

Nota: Los casos del **3.4.3.1-c) - 3.4.3.1-o)** se incluye en el [Anexo \(A5.2-A5.15\)](#) por tener técnicas similares de solución.

3.4.3.2 Casos de índice uno

3.4.3.2-a) Caso donde se cumple que

$$sgC \neq sgD, sgF \neq sgC, |ADC| > F^2 (sgC_1 = sgD_1, sgF_1 = sgC_1, \sqrt{-F_1^2 - 4D_1C_1} > F_1) .$$

Teniendo dos ceros complejos y un polo imaginario en el semiplano superior y un polo imaginario en el semiplano inferior, donde:

$$Re a > 0, Re a = -Re b, Im a = Im b > 0 \text{ y } c > 0, d < 0 .$$

Por lo que el problema de Riemann queda de la siguiente manera:

$$F^+(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-ci)(x-di)} F^-(x) - H_2(x) + \frac{(x-a)(x-b)}{(x-ci)(x-di)} H_3(x)$$

de donde se obtiene la expresión:

$$\frac{(x-di)}{(x-b)} F^+(x) = \frac{(x-a)}{(x-ci)} F^-(x) - \frac{(x-di)}{(x-b)} H_2(x) + \frac{(x-a)}{(x-ci)} H_3(x)$$

y se llega al problema de salto:

$$\frac{(x-di)}{(x-b)} F^+(x) = \frac{(x-a)}{(x-ci)} F^-(x) + H_{15}(x) \quad (3.4.4)$$

donde:

$$H_{15}(x) = -\frac{(x-di)}{(x-b)} H_2(x) + \frac{(x-a)}{(x-ci)} H_3(x) \text{ que es de } L_{2x}(\mathbb{R}) \text{ si } a_0 < 0 \text{ y } V(x, y),$$

$xV(x, 0^+)$, y $\frac{dV(x, 0^+)}{dy}$ pertenecen a $L_{2x}(\mathbb{R})$. Luego aplicando el

operador proyección a $H_{15}(x)$ se obtiene:

$$H_{15}(x) = \psi^+(x) - \psi^-(x) \quad (3.4.5)$$

donde $\psi^\pm(x) = P^\pm(H_{15}(x))$, o sea $\psi^\pm(x) = (V o T^\pm o V^{-1})H_{15}(x)$, lo cual implica que:

$$\psi^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_{15}(t) e^{ixt} dt \text{ y } \psi^-(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 h_{15}(t) e^{ixt} dt, \text{ siendo}$$

$$h_{15}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_{15}(t) e^{ixt} dt.$$

Luego sustituyendo (3.4.5) en (3.4.4) se obtiene:

$$\frac{(x-di)}{(x-b)} F^+(x) - \psi^+(x) = \frac{(x-a)}{(x-ci)} F^-(x) - \psi^-(x).$$

Aplicando el teorema de prolongación analítica y el teorema generalizado de Liouville se tiene que

$$\frac{(x-di)}{(x-b)} F^+(x) - \psi^+(x) = \frac{(x-a)}{(x-ci)} F^-(x) - \psi^-(x) = \frac{c_1}{x-b}, \quad c_1 \text{ es una constante}$$

arbitraria. Luego $\frac{(x-di)}{(x-b)} F^+(x) - \psi^+(x) = \frac{c_1}{x-b}$, siendo:

$$F^+(x) = \frac{(x-b)}{(x-di)} \psi^+(x) + \frac{c_1}{x-di} \quad (3.4.6)$$

$$\text{y } F^-(x) = \frac{(x-ci)}{(x-a)} \psi^-(x) = \frac{c_1}{(x-a)(x-b)}.$$

Al tener $F^+(x)$ dado por la expresión (3.4.6) entonces $U(x, y)$ queda determinado,

$$\text{siendo: } F^+(x) = \frac{(x-b)}{(x-di)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_{15}(t) e^{ixt} dt + \frac{c_1}{x-di} \text{ y se puede enunciar el siguiente}$$

teorema:

Teorema 8: Si $a_0 < 0$ y $V(x, y)$, ${}_x V(x, 0^+)$, y $\frac{dV(x, 0^+)}{dy}$ pertenecen a $L_{2x}(\mathbb{R})$,

entonces el problema correspondiente para el caso **3.4.3.2-1-a)** tiene solución

única que depende de una constante arbitraria c_1 en la clase (3.1.6) y viene dada

por las expresiones (3.2.4) y (3.4.6). **(Demostración similar al Teorema 6 del caso parabólico).**

Si la ecuación del problema original es homogénea, es decir si $V(x, y) \equiv 0$

se puede enunciar el siguiente teorema: **Corolario del Teorema 8:** Si $a_0 < 0$,

entonces el problema correspondiente para el caso **3.4.3.2-1-a)** tiene

solución única en la clase **(3.1.6)** dada por $u(x, y) = V^{-1}[U(x, y)]$.

Nota: Los casos del **3.4.3.2-b) - Caso 3.4.3.2-g)** se incluyen en el [Anexo \(A5.16- A5.21\)](#) por tener técnicas similares de solución.

3.4.3.3 Casos de índice dos

3.4.3.3-a) Caso donde se cumple que

$$sgC \neq sgD, sgF \neq sgC, |4DC| > F^2 \quad (sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 = sgC_1, |4D_1C_1| > F_1^2)$$

Teniendo dos ceros complejos en el semiplano superior y dos polos complejos en el semiplano inferior. Donde:

$$Re a > 0, Re a = -Re b, Im a = Im b > 0, Re c > 0, Re c = -Re d, Im c = Im d < 0$$

El problema de Riemann para este caso quedaría de la siguiente manera:

$$F^+(x) = \frac{(x-a)^2}{(x-b)^2} F^-(x) - H_2(x) + \frac{(x-a)^2}{(x-b)^2} H_3(x)$$

de donde despejando, se obtiene:

$$\frac{(x-b)^2}{(x-a)^2} F^+(x) = F^-(x) + H_{19}(x)$$

siendo:

$$H_{19}(x) = -\frac{(x-b)^2}{(x-a)^2} H_2(x) + \frac{(x-b)^2}{(x-a)^2} H_3(x)$$

Tomando la misma idea de demostración de los casos de índice uno pero ahora el orden del polo es dos, se obtiene:

$$\frac{(x-b)^2}{(x-a)^2} F^+(x) - \psi^+(x) = F^-(x) - \psi^-(x)$$

Aplicando el teorema de prolongación analítica y el teorema generalizado de Liouville se tiene que:

$$\frac{(x-b)^2}{(x-a)^2} F^+(x) - \psi^+(x) = F^-(x) - \psi^-(x) = \frac{c_1}{x-a} + \frac{c_2 x}{(x-a)^2}, \text{ donde } c_1 \text{ y } c_2 \text{ son}$$

constantes arbitrarias.

$$\text{Luego } F^+(x) = \frac{(x-a)^2}{(x-b)^2} \psi^+(x) + \frac{c_1}{x-b} + \frac{c_2 x}{(x-b)^2} \quad (3.4.7)$$

Al tener $F^+(x)$ dado por la expresión (3.4.7) entonces $U(x, y)$ queda determinado por las expresiones (3.2.4) y (3.4.7) siendo

$$F^+(x) = \frac{(x-a)^2}{(x-b)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_{19}(t) e^{ixt} dt + \frac{c_1}{x-b} + \frac{c_2 x}{(x-b)^2} \quad (3.4.8)$$

entonces se puede enunciar el siguiente teorema con enunciado y demostración similar al **Teorema 8**:

Teorema 9: Si $a_0 < 0$ y $V(x, y)$, $xV(x, 0^+)$, $\frac{dV(x, 0^+)}{dy}$ pertenecen a $L_{2x}(\mathbb{R})$,

entonces el problema para este caso tiene solución única que depende de dos constante arbitraria c_1 y c_2 en la clase (3.1.6) y viene dada por las expresiones (3.2.4) y (3.4.8).

Para el caso homogéneo queda el siguiente teorema: **Corolario del Teorema 9:**

Si $a_0 < 0$, entonces el problema para este caso tiene solución única que depende de dos constante arbitraria c_1 y c_2 en la clase (3.1.6) y viene dada por

$u(x, y) = V^{-1}[U(x, y)]$, donde $U(x, y)$ se define por las expresiones (3.2.4) y (3.4.8).

Nota: Los casos del 3.4.3.3-b) - 3.4.3.3-d) se resuelven de la misma manera que el caso 3.4.3.3-a) y se encuentran en el [Anexo \(A5.22- A5.24\)](#).

3.4.3.4 Casos de índice menos uno

3.4.3.4-a) Caso donde se cumple que

$$\begin{aligned} &sgC \neq sgD, sgF = sgC, |4DC| < F^2, \sqrt{-F - 4DC} < F \\ &(sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 \neq sgC_1, |4D_1C_1| < F_1^2, \sqrt{-F_1 - 4D_1C_1} > F_1^2 \end{aligned}$$

Teniendo un polo imaginario puro en el semiplano superior, dos ceros y un polo imaginarios puros en el semiplano inferior.

Siendo $a < 0, b < 0, c > 0$ y $d < 0$.

En este caso el problema de Riemann queda de la siguiente manera:

$$F^+(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)} F^-(x) - H_2(x) + \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)} H_3(x)$$

despejando queda:
$$\frac{(x-d)}{(x-b)} F^+(x) = \frac{(x-a)}{(x-c)} F^-(x) - \frac{(x-d)}{(x-b)} H_2(x) + \frac{(x-a)}{(x-c)} H_3(x)$$

haciendo:

$$F_1^+(x) = \frac{(x-d)}{(x-b)} F^+(x) \quad F_1^-(x) = \frac{(x-a)}{(x-c)} F^-(x)$$

y
$$H_{20}(x) = -\frac{(x-d)}{(x-b)} H_2(x) + \frac{(x-a)}{(x-c)} H_3(x)$$

queda el problema de salto:

$$F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_{20}(x) \tag{3.4.9}$$

y se puede enunciar entonces el siguiente teorema:

Teorema 10: Si $a_0 < 0$ y $V(x, y)$, $xV(x, 0^+)$, y $\frac{dV(x, 0^+)}{dy}$ pertenecen a $L_{2x}(\mathbb{R})$, entonces el problema para este caso tiene solución única en la clase (3.1.6) dada por $u(x, y) = V^{-1}[U(x, y)]$. Donde $U(x, y)$ está dada por las fórmulas (3.2.4) y

$$F^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(x-b)}{(x-d)} \int_0^{+\infty} h_{20}(t) e^{ixt} dt \quad (3.4.10)$$

siendo $h_{20} = V^{-1}[H_{20}]$; si se cumple la condición adicional

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_{20}(\tau)}{\tau - a} d\tau = 0 \quad (3.4.11)$$

La primera parte de la demostración es evidente por las técnicas de trabajo mostradas anteriormente, luego, sólo se demostrará la necesidad de la expresión (3.4.11). En efecto, como la solución del problema de Riemann se expresa por

(3.4.10) y se tiene que: $F^-(x) = -\frac{x-c}{x-a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 h_{20}(t) e^{ixt} dt$, tiene un polo de orden

uno en $x = a$, por lo tanto, se requiere, para que el problema de salto (3.4.9)

tenga solución única, que $\int_{-\infty}^0 h_{20}(t) e^{ixt} dt$ tenga un cero de igual orden en dicho punto. Como por la relación entre las Integrales de tipo Cauchy y de Fourier se

tiene que: $\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_{20}(\tau)}{\tau - a} d\tau = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 h_{20}(\tau) e^{iz\tau} d\tau$,

si $\text{Im} z < 0$, entonces, desarrollando la primera de las integrales anteriores en serie de potencias de $(z-a)$ e igualando a cero el coeficiente del término de

grado cero del desarrollo, se obtiene (3.4.11) con lo cual se elimina el polo de $F^-(x)$.

En el caso homogéneo queda:

Corolario del Teorema 10: Si $a_0 < 0$, entonces el problema para este caso tiene solución única en la clase (3.1.6) dada por $u(x, y) = V^{-1}[U(x, y)]$.

Nota: El caso 3.4.3.4-b) se incluye en el [Anexo \(A5.25\)](#) por resolverse de la misma manera que el caso 3.4.3.4-a).

Nota: El caso 3.4.3.4-c) se incluye en el [Anexo \(A5.26\)](#) por resolverse por técnicas similares.

Nota: Los casos 3.4.3.4-d) y 3.4.3.4-e) se resuelven de la misma manera que el caso 3.4.3.4-c) y se encuentran en el [Anexo \(A5.27 y A5.28\)](#), respectivamente.

3.4.3.5: Casos de índice menos dos

3.4.3.5-a) Caso donde se cumple que

$$sgC \neq sgD, sgF = sgC, |4DC| > F^2 \quad (sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 \neq sgC_1, |4D_1C_1| > F_1^2)$$

Teniendo dos polos complejos en el semiplano superior y dos ceros complejos en el semiplano inferior, siendo:

$$Re a > 0, Re a = -Re b, Im a = Im b < 0 \quad y \quad Re c > 0, Re c = -Re d, Im c = Im d > 0$$

En este caso el problema de Riemann queda de la siguiente manera:

$$F^+(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)} F^-(x) - H_2(x) + \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)} H_3(x), \text{ donde haciendo:}$$

$$F_1^+(x) = F^+(x), \quad F_1^-(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)} F^-(x) \quad y \quad H_{22}(x) = -H_2(x) + \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)} H_3(x)$$

queda un problema de salto de la forma:

$$F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_{22}(x)$$

pero ahora al obtener la solución del problema se obtiene que $F^-(x)$ tiene polos de orden uno en $x = a$ y $x = b$. Luego se puede enunciar un teorema similar al

Teorema 11 y al Corolario del **Teorema 11** con las condiciones $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_{22}(\tau)}{\tau - a} d\tau = 0$ y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_{22}(\tau)}{\tau - b} d\tau = 0$$

Nota: Los casos del **3.4.3.5-b) - 3.4.3.5-f)** se resuelven de la misma manera que el caso **3.4.3.5-a)** y se encuentran en el [Anexo \(A5.29 -A5.33\)](#).

3.4.4 Caso donde se cumple que $\frac{\alpha_0}{\beta_0} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$ **y** $\frac{\alpha_0}{\gamma_0} = \frac{\alpha_1}{\gamma_1} = \frac{\alpha_2}{\gamma_2}$ **(Solamente cuando** $B = 0, B_1 = 0, E = 0, E_1 = 0, A \neq 0, A_1 \neq 0, C \neq 0, C_1 \neq 0, D \neq 0, D_1 \neq 0, F \neq 0$ **y** $F_1 \neq 0$ **)**

Por lo que el problema de contorno se reduce a:

$$u_{xx}(x, y) - u_{yy}(x, y) + a_0 u(x, y) = 0, a_0 \neq 0$$

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 < y < +1\}$$

$$\alpha_0 u(x, 1^-) + \alpha_1 u_y(x, 1^-) + \alpha_2 u_x(x, 1^-) = g_{10}(x)$$

$$\beta_0 u(x, 0^+) + \beta_1 u_y(x, 0^+) + \beta_2 u_x(x, 0^+) = g_{11}(x), x < 0$$

$$\gamma_0 u(x, 0^+) + \gamma_1 u_y(x, 0^+) + \gamma_2 u_x(x, 0^+) = g_{12}(x), x > 0$$

Además el coeficiente del problema de Riemann, después de hacer las transformaciones algebraicas correspondientes, queda de la forma:

$$D(x) = \frac{(C - A)x^2 + ixF + (Aa_0 + D + F)}{(C_1 - A_1)x^2 + ixF_1 + (A_1a_0 + D_1 + F_1)}$$

Nota: La solución de este problema con todos los casos de diferentes índices y los teoremas correspondientes por su amplitud se incluyen en al [Anexo \(A5.34\)](#) de la presente tesis.

3.4.5 Caso donde se cumple que $\alpha_1 = \beta_0 = \beta_2 = \gamma_0 = \gamma_2 = 0$ (Solamente $B \neq 0$ y $E \neq 0$)

Por lo que el problema de contorno se reduce a:

$$u_{xx}(x, y) - u_{yy}(x, y) + a_0 u(x, y) = 0, a_0 \neq 0$$

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 < y < +1\}$$

$$\alpha_0 u(x, 1^-) + \alpha_2 u_x(x, 1^-) = g_{10}(x)$$

$$\beta_1 u_y(x, 0^+) = g_{11}(x), x < 0$$

$$\gamma_1 u_y(x, 0^+) = g_{12}(x), x > 0$$

El coeficiente del problema de Riemann queda de la forma:

$$D(x) = \frac{[B\sqrt{(a_0 - x^2)} + ixE\sqrt{(a_0 - x^2)}]}{[B_1\sqrt{(a_0 - x^2)} + ixE_1\sqrt{(a_0 - x^2)}]}$$

Nota: La solución de este problema con todos los casos de diferentes índices y los teoremas correspondientes se incluyen en al [Anexo \(A5.35\)](#) de la presente tesis.

3.4.6 Caso donde se cumple que

$$B = 0 \text{ y } E = 0 (B_1 = 0 \text{ y } E_1 = 0) \Rightarrow \frac{\alpha_0}{\alpha_1} = \frac{\beta_0}{\beta_1} = \frac{\gamma_0}{\gamma_1} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right) \Rightarrow D(x) = \frac{\beta_1}{\gamma_1}$$

Nota: La solución de este problema con todos los casos de diferentes índices y los teoremas correspondientes se incluyen en al [Anexo \(A5.36\)](#) de la presente tesis.

3.4.7 Caso donde se cumple que $D \neq 0$ y $D_1 \neq 0$ con todos los demás coeficientes iguales a cero.

El problema de contorno queda de la siguiente manera:

$$u_{xx}(x, y) - u_{yy}(x, y) + a_0 u(x, y) = 0, a_0 \neq 0$$

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 < y < +1\}$$

$$\alpha_0 u(x, 1^-) = g_{10}(x)$$

$$\beta_0 u(x, 0^+) = g_{11}(x), x < 0$$

$$\gamma_0 u(x, 0^+) = g_{12}(x), x > 0$$

donde el coeficiente del problema de Riemann queda de la forma:

$$D(x) = \frac{D}{D_1} = \frac{\beta_0}{\gamma_0}$$

Nota: La solución de este problema con todos los casos de diferentes índices y los teoremas correspondientes se incluyen en al [Anexo \(A5.37\)](#) de la presente tesis.

CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

Se ha encontrado la solución en cuadraturas para problemas de tipo hiperbólico con condiciones de contorno diferentes en cada semieje, tanto para una ecuación homogénea como para una no homogénea. Es interesante notar que, en forma similar al caso parabólico, la técnica utilizada consiste en reducir el problema original con el auxilio de la transformada de Fourier a un problema de Riemann con solución conocida, y luego utilizar la transformada inversa de Fourier para encontrar la solución del problema original. Se ofrece la solución analítica para diferentes tipos de índices del coeficiente del problema de Riemann.

Como se señaló en el caso parabólico, los resultados obtenidos constituyen inobjetablemente un aporte teórico a la teoría de los problemas de contorno de las ecuaciones diferenciales parciales, pues no existen técnicas analíticas similares en la bibliografía consultada que aborden problemas de esta naturaleza, en los que las condiciones de contorno difieren en diferentes partes del eje.

CONCLUSIONES

A partir de las condiciones impuestas en cada caso estudiado, se ha encontrado la solución en cuadraturas de problemas con condiciones de contorno con un notable nivel de complejidad de tipo parabólico e hiperbólico, tanto para ecuaciones homogéneas, como para no homogéneas. Es interesante la técnica utilizada consistente en reducir el problema original a un problema de Riemann con el auxilio de la transformada de Fourier.

La solución de dicho problema en las clases $L_2^\lambda(\mathbb{R})$ ya había sido estudiada para el problema de tipo elíptico, por el grupo de Ecuaciones Diferenciales de la Facultad de Matemática, Física y Computación, de la Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas, el cual corresponde a una publicación en la Revista Ciencias Matemáticas [ver [\[21\]](#)].

Los resultados obtenidos constituyen un aporte teórico a la teoría de los problemas de contorno de las Ecuaciones Diferenciales Parciales, pues en la bibliografía consultada hasta el momento no existen técnicas analíticas similares a las presentadas en esta investigación.

La solución obtenida mediante cuadraturas permite que los profesionales que utilizan modelos parabólicos e hiperbólicos puedan encontrar la solución con relativa facilidad, sobre todo si cuentan con la ayuda de un paquete matemático

adecuado, sin que sea necesario que posean un dominio profundo de la teoría antes expuesta.

La presente tesis ofrece la posibilidad de continuar esta investigación en dos direcciones. Una de ellas sería resolver los problemas parabólicos, elípticos e hiperbólicos en las nuevas clases de funciones generalizadas definidas por el grupo de Ecuaciones Diferenciales de la Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas [ver [\[19\]](#) y [Anexo \(A6\)](#)], lo que ampliaría considerablemente las opciones de aplicación de esta nueva teoría. La otra dirección posible es la elaboración de un software especializado, para la solución de estos problemas de la Física–Matemática con condiciones de contorno con un notable nivel de complejidad.

RECOMENDACIONES

A partir de las nuevas clases de funciones generalizadas definidas por el grupo de Ecuaciones Diferenciales de la Facultad de Matemática, Física y Computación, de la Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas, es recomendable que se continúe el estudio de los casos parabólicos, elípticos e hiperbólicos en dichas clases, lo que ampliaría enormemente las posibilidades de aplicación de la teoría elaborada.

Se sugiere comunicar los resultados obtenidos a especialistas de diferentes ramas de la ciencia y la técnica, que trabajen con modelos que utilizan las ecuaciones diferenciales parciales, de manera que puedan contar con una nueva herramienta matemática para la solución de problemas de alta complejidad. La elaboración de un software adecuado potenciaría esta acción.

También es importante continuar trabajando en la línea de las aplicaciones, de manera que se amplíe el impacto de los resultados obtenidos en la presente tesis con la solución de variados problemas de la ciencia y la técnica.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Batard, L. F., "Las Ecuaciones Diferenciales y el Problema De Riemann Con Parámetro Pequeño". Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas, 1990.
2. Mederos, O. B. Y Batard, L. F., "Reducción De Una Clase De Problemas De Contorno En Ecuaciones En Derivadas Parciales Con Parámetro Pequeño Al Problema De Riemann". Revista Ciencias Matemáticas XI, no. 3 (1990).
3. Mederos, O. B. Y Batard, L. F., "El Problema De Riemann Con Parámetro Pequeño en el Espacio", Revista Ciencias Matemáticas XI, no. 3 (1990).
4. Gajov, F.D. Y Cherski, Y.I., "Ecuaciones de Tipo Convolución". Moscú: Ciencia, 1978.
5. Gájov, F. D., "Problemas De Contorno". Moscú: Mir 1980.
6. Musjlishvili, N. I., "Algunos Problemas Fundamentales De La Teoría Matemática De La Elasticidad". Moscú: Mir 1966.
7. Hilbert, D., "Grundzuge Einer Allgenieinen Theorie Der Linearen Integralgleichungen". Berlin: Leipzig, 1912.
8. Picard, E., "Leçons Sur Quelques Types Simples D'équation Aux Dérivées Partielles, Avec Des Applications À La Physique Mathématique". Paris, 1928.
9. Fuchs and Shabat. "Functions of a Complex Variable and Some of Their Application", Vol. I. Paris, 1964.
10. Plemelj, I., "Ein Ergänzungsatz Monatsh", Vol. XIX: Math and Phys, 1908.
11. Carleman, T., "Sur La Resolution De Certaines Équations Integrales". Vol. 16: Arkiv for mat, astr. fys., 1922.

12. Gájov, F. D., "Sobre El Problema De Contorno De Riemann": Matem. sb, 1937.
13. Jvedelidze, B. V., "Problemas De Frontera Discontinuos Lineales De La Teoría De Funciones, Ecuaciones Integrales Singulares Y Algunas De Sus Aplicaciones". Tr. Tbil. matem. in-ta AN Gruz XIII, (1956): 3-153.
14. A., Chikin L., "Casos Especiales Del Problema De Contorno De Riemann Y Ecuaciones Integrales Singulares". Uch.zap. Kazansk. In-ta 113 10, (1952): 57-105.
15. Musjelishvili, N. I., "Ecuaciones Integrales Singulares". Moscú: Mir 1968.
16. Gajov, F. D., "Problemas De Contorno De La Teoría De Funciones Analíticas Y Las Ecuaciones Integrales Singulares", Disertación para el grado de Doctor, 1941.
17. Mederos, O. B. Y Alonso, O., "Solución De Problemas De Haseman Con Desplazamiento Excepto En Dos Puntos". Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas, Informe final de Investigación, 1987
18. Grau, R., "Ecuaciones Diferenciales De La Teoría De La Elasticidad Con Coeficientes Seccionalmente Constantes", 18. Tesis de Doctorado, Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas, 1986.
19. Batard, L. F. Y Artílez W., "Nuevas Clases De Funciones Generalizadas". Revista Ciencias Matemáticas IXX, no. 1 (2001): 12-18.
20. Batard, L. F. Y Artílez W., "El Problema De Riemann En Las Nuevas Clases De Funciones Generalizadas". Revista Ciencias Matemáticas IXX no. 1 (2001): 19-26.

21. Mederos, O. B. Y Batard, L. F., "Solución De Un Problema De Contorno Complejo Para Las Ecuaciones De Tipo Elíptico". Revista Ciencias Matemáticas 23, (único 2005-2006).
22. Estrada Hernández, Y., "Solución De Un Problema De Contorno Complejo Para Ecuaciones De Tipo Parabólico", Maestría en Matemática Aplicada, Tutor: Batard Martínez, L.F. 2008.
23. Batard Martínez, L. Y Estrada Hernández, Y., "Solución De Un Problema De Contorno Complejo Para Ecuaciones De Tipo Parabólico", Memorias del XI Congreso Nacional de Matemática y Computación, COMPUMAT, Sociedad Cubana de Matemática-Computación. Ciudad de La Habana, Cuba, 2009.
24. Batard Martínez, L. Y Estrada Hernández, Y., "Solución De Un Problema De Contorno De Tipo Parabólico". Memorias de la Jornada Científica Juvenil, ICIMAF. Ciudad de La Habana, Cuba, 2011.
25. Batard Martínez, L. Y Estrada Hernández, Y., "Solución De Un Problema De Contorno Modelado Como Ecuaciones En Derivadas Parciales De Tipo Parabólico Con Condiciones De Contorno De Gran Complejidad", Memorias de la IV Escuela Brasileña de Ecuaciones Diferenciales, 112. Joao Pessoa, Brasil: Cuaderno Resumen, 2011.
26. Batard Martínez, L. Y Estrada Hernández, Y., "Solución De Un Problema De Contorno Modelado Como Ecuaciones En Derivadas Parciales De Tipo Parabólico Con Condiciones De Contorno De Gran Complejidad". V Jornada de Ecuaciones en Derivadas Parciales. San Carlos, Brasil, 2012.

27. Batard Martínez, L. Y Estrada Hernández, Y., "Solución De Un Problema De Contorno Complejo Para Ecuaciones De Tipo Hiperbólico", Memorias del XII Congreso Nacional de Matemática y Computación, COMPUMAT, Sociedad Cubana de Matemática Computación. Santa Clara, Cuba, 2011.
28. Batard Martínez, L. Y Estrada Hernández, Y., "Solución De Un Problema De Contorno De Gran Complejidad Para Ecuaciones En Derivadas Parciales De Tipo Parabólico: Caso Índice Cero". Revista Ciencias Matemáticas (Aceptado para su publicación), (2012).
29. Batard Martínez, L. Y Estrada Hernández, Y., "Solución De Un Problema De Contorno De Gran Complejidad Para Ecuaciones En Derivadas Parciales De Tipo Parabólico: Caso Índices Diferentes De Cero". Revista Ciencias Matemáticas (Aceptado para su publicación), (2012).
30. Batard Martínez, L. F. Y Estrada Hernández, Y., "Solución De Un Problema De Contorno De Gran Complejidad Para Ecuaciones En Derivadas Parciales De Tipo Hiperbólico: Caso Índice Cero". Revista Ciencias Matemáticas (Aceptado para su publicación), (2014).
31. Batard Martínez, L. F. Y Estrada Hernández, Y. "Solución De Un Problema De Contorno De Gran Complejidad Para Ecuaciones En Derivadas Parciales De Tipo Hiperbólico: Caso Índices Positivos Y Negativos". Revista Ciencias Matemáticas, (2014).
32. Kolmogorov, A. N. Y Fomin, S.V., "Elementos De La Teoría De Funciones Y Del Análisis Funcional". Moscú: Mir, 1975.

33. Fernández, J. L. Y de la Torre, G., "Análisis Matemático". La Habana: Félix Varela, 2003.

BIBLIOGRAFÍA

- I. Abreu, R. (1999). *Algunas generalizaciones del problema de contorno de Riemann con coeficientes continuos en espacios de Hölder*. Informe de Tesis, Universidad de Oriente, Santiago de Cuba.
- II. Batard, L. F. (1985). *Solución de ecuaciones diferenciales e integrodiferenciales con parámetros*. Santa Clara: Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas.
- III. Carroll, R. W. (1969). *Abstract methods in partial differential equations*. New York: Harper / Row.
- IV. Clancey, K., & Gohberg, I. (1981). Factorization of matrix functions and singular integral operators. *Operator Theory: Advances and Applications*, 3. Obtenido de http://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.bams/1183551425
- V. Colton, D. (1976). *Partial Differential Equations in the Complex Domain*. Pitman.
- VI. Courant, R. (1962). *Methods of Mathematical Physics*. Wiley.
- VII. Deift, P., & Zhou, X. (1993). A Steepest Descent Method for Oscillatory Riemann–Hilbert Problems. *Ann. of Math.*, 137(2), 295–368.
- VIII. Fokas, A. S. (2008). *A Unified Approach to Boundary Value Problems*. University of Cambridge: Siam.
- IX. Francois, D. (2000). Partial Riemann problem, boundary conditions, and gas dynamics. *Nova Science Publishers*, 16-77.
- X. Gajov, F. D. (1949). *Problemas de contorno de funciones analíticas y ecuaciones integrales singulares* (Vol. XIV). Moscú: Izv. Kazansk. fiz-matem. ob-va.
- XI. Gajov, F. D., & Chersky, Y. I. (1978). *Ecuaciones de tipo Convulsión*. Moscú: Ciencia.
- XII. Godounov, S. (1973). *Equations de la physique mathematique*. Moscú: Mir.
- XIII. Hernández Sampier, R. (2004). *Metodología de la investigación* (Vols. I,II). La Habana: Félix Varela.
- XIV. Huazhou, C., & Tao, P. (2011). Two-Dimension Riemann Initial-Boundary Value Problem of Scalar Conservation Laws with Curved Boundary. Department of Mathematics, Shanghai University, China: Julio Rossi.

- XV. Its, A. (2003). *The Riemann-Hilbert Problem and Integrable Systems*. AMS, 50(11). Obtenido de sitio: <http://www.ams.org/notices/200311/fea-its.pdf>
- XVI. Its, A., & Shepelsky, D. (2012). *Initial boundary value problem for the focusing NLS equation with Robin boundary condition: half-line approach*. Indiana, University-Purdue University Indianapolis.
- XVII. Its, E. (2007). *Riemann-Hilbert Approach to the Elastodynamic Equation in a quarter space, Part I*. National Science Foundation, Indianapolis. doi:MSS-9313578
- XVIII. Its, E. (2011). *Riemann-Hilbert Approach to Scattering Problems in Elastic Media*. Indiana, University-Purdue University Indianapolis, Cambridge.
- XIX. Ivanov, V. V. (1958). *Algunas propiedades de las integrales singulares de tipo Cauchy y sus aplicaciones* (Vol. 121). Moscú: DAN SSSR.
- XX. Jiequan, L., & otros. (2009). *Two-dimensional Riemann Problems: from scalar conservation laws to compressible euler equations*. Beijing, China: Acta Mathematica Scientia.
- XXI. Jvedelidze, B. V. (1958). *Observaciones referentes a mi trabajo "Problemas de frontera lineales"* (Vol. XXI). Moscú: AN Gruz, SSR.
- XXII. Kamvissis, S. (2003). *Semiclassical Soliton Ensembles for the Focusing Nonlinear Schrödinger Equation*. Princeton: Annals of Mathematics.
- XXIII. Kamvissis, S., & Rakhmanov, E. A. (2005). *Existence and Regularity for an Energy Maximization Problem in Two Dimensions* (Vol. 46). J.Math.Phys. doi:083505
- XXIV. Kamvissis, S., & Teschl, G. (2012). *Long-time asymptotics of the periodic Toda lattice under short-range perturbations* (Vol. 53). J.Math.Phys. doi:073706
- XXV. Kevorkian, J. (1990). *Partial differential equations : analytical solution techniques*. Wadsworth: Pacific Grove, Calif. doi:0-534-12216-7
- XXVI. Kilian, M. (1994). *On The Riemann-Hilbert –Problem*. TU Berlin: Diplomarbeit. Obtenido de http://www-v158.rz.uni-mannheim.de/mitarbeiter/kilian/my_private_homepage/mathesis.pdf
- XXVII. Kiseliiov, A. (1984). *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*. Moscú: Mir.
- XXVIII. Lax, P. D., & Levermore, C. D. (1983). *The Zero Dispersion Limit for the KdV Equation I-III* (Vol. 36). Communications on Pure and Applied Mathematics. Obtenido de

- <http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:vphgEGT44hoJ:www.mat.univie.ac.at/~gerald/ftp/articles/TodaStab.tex+&cd=1&hl=es&ct=clnk&gl=cu>
- XXIX. Lions, J. (1972). Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applications. *Springer*.
- XXX. Logomasino, E. (2004). *Ecuaciones Diferenciales Elementales*. La Habana: Félix Varela. doi:959-258-683-7
- XXXI. Manakov, S. (1974). Nonlinear Fraunhofer diffraction. *Sov. Phys. JETP*(38), 693–696.
- XXXII. Mederos, O. B. (1990). *Solución de los problemas de cuasi-salto de dos problemas de Haseman para el semiplano*.
- XXXIII. Mederos, O. B., & otros. (1987). *Ecuaciones diferenciales ordinarias*. Ciudad de La Habana: Pueblo y Educación.
- XXXIV. Pelloni, B. (2011). Boundary value problems and integrability: a Riemann-Hilbert approach. *Wam*.
- XXXV. Petrovski, I. G. (1971). *Lecciones de teoría de las ecuaciones integrales* (3ra ed.). Moscú: Mir.
- XXXVI. Piskunov, N. (1980). *Cálculo diferencial e integral*. Moscú: Mir.
- XXXVII. Tamayo, F. (1984). *Métodos numéricos en ecuaciones diferenciales y ajustes de curvas*. La Habana: Pueblo y Educación.
- XXXVIII. Taylor, M. E. (1996). *Partial differential equations I : basic theory*. New York: Springer Verlag.
- XXXIX. Tijonov, A. N., & Samarsky, A. A. (1980). *Ecuaciones de la Física-Matemática*. Moscú: Mir.
- XL. Treves, F. (1975). Basic Linear Partial Differential Equations. *Academic Press*.
- XLI. Zemlyanova, A. (2010). *Applications of Riemann-Hilbert Problems in Supercavitation*. Baton Rouge, Louisiana state University: Department of Mathematics. Obtenido de <http://www.mathphys.org/AZschool/material/AZ10-zemlyanova.pdf>

ANEXO

ANEXO

A₁ Teorema de Cherski

[ver [4](#)]

Sean X y Y espacios vectoriales y

$$k: X \rightarrow Y$$

$$\tilde{k}: X \rightarrow Y$$

son operadores lineales. Entonces si:

1. La ecuación $\tilde{k}\tilde{f} = \tilde{g}$ tiene solución única \tilde{f} .
2. $g - \tilde{g} \in Y_0$, donde Y_0 es un subespacio lineal de Y , $Y_0 \subset Y$.
3. El operador $k - \tilde{k}$ está definido en X y toma valores en Y_0 .
4. En Y_0 está definido el operador inverso \tilde{k}^{-1} que toma valores en el subespacio de Banach X_0 , $X_0 \subset X$.
5. El operador $\tilde{k}^{-1}(k - \tilde{k})$ está acotado en X_0 y tiene norma $\|\tilde{k}^{-1}(k - \tilde{k})\| < 1$.

Entonces la ecuación $kf = g$ tiene solución única:

$$f = \tilde{f} + [I + \tilde{k}^{-1}(k - \tilde{k})]^{-1} \tilde{k}^{-1}(g - k\tilde{f})$$

donde I es el operador idéntico; y se cumple además que:

- a) $f - \tilde{f} \in X_0$
- b) $k\tilde{f} - g \in Y_0$
- c) $\|f - \tilde{f}\|_{X_0} \leq \frac{\|\tilde{k}^{-1}(g - k\tilde{f})\|_{X_0}}{1 - \|\tilde{k}^{-1}(k - \tilde{k})\|_{X_0}}$

A₂ Reducción de Problemas de contorno en ecuaciones diferenciales parciales al problema de Riemann

([ver páginas 72-79 de [\[15\]](#) y páginas 181-188 de [\[16\]](#)])

En este trabajo se describe una clase de problemas de contorno de ecuaciones diferenciales parciales que se reducen a un problema de contorno de Riemann-Hilbert. Se dedica además, una parte importante del epígrafe a la descripción del método de reducción.

Se considera la ecuación:

$$\sum_{p=0}^A \sum_{q=0}^B a_{pq}(y) \frac{\partial^{p+q} u(x,y)}{\partial x^p \partial y^q} = g(x,y), \quad -\infty < x < +\infty \quad \mathbf{1}$$

En el cual se requiere que los coeficientes $a_{pq}(y)$ no dependan de x , la región en la cual está definida esta ecuación puede tener por frontera una de las tres variantes siguientes:

1ro. Solo rectas $y = y_s, s = \overline{1, n}$; y en este caso las condiciones de contorno deben ser de la forma:

$$\sum_{p=0}^P \sum_{q=0}^Q \left[\alpha_{pqrs} \frac{\partial^{p+q} u(x, y_s)}{\partial x^p \partial y^q} + \beta_{pqrs} \frac{\partial^{p+q} u(x, y_s)}{\partial x^p \partial y^q} \right] = g_{rs}(x), \quad -\infty < x < +\infty$$

$$\forall s = \overline{1, n}, s \neq j, 1 \leq j \leq n, r = \overline{1, m_s}, \quad \mathbf{2}$$

$$\sum_{p=0}^P \sum_{q=0}^Q \left[\alpha_{pq1j} \frac{\partial^{p+q} u(x, y_{j+0})}{\partial x^p \partial y^q} + \beta_{pq1j} \frac{\partial^{p+q} u(x, y_{j-0})}{\partial x^p \partial y^q} \right] = g_{1j}(x), \quad x < 0 \quad \mathbf{3}$$

$$\sum_{p=0}^P \sum_{q=0}^Q \left[\gamma_{pq2j} \frac{\partial^{p+q} u(x, y_{j+0})}{\partial x^p \partial y^q} + \delta_{pq2j} \frac{\partial^{p+q} u(x, y_{j-0})}{\partial x^p \partial y^q} \right] = g_{2j}(x), \quad x > 0 \quad \mathbf{4}$$

2do. Cómo máximo dos semirrectas $y = y_j, x < 0 (x > 0)$ e $y = y_k, x > 0 (x < 0)$; $1 \leq j, k \leq n, j \neq k$; y el resto, rectas $y = y_s, s = \overline{1, n}, s \neq j, s \neq k$

entonces las condiciones de contorno sobre las semirrectas tienen que ser de la forma:

$$\sum_{p=0}^P \sum_{q=0}^Q \left[\alpha_{pq1j} \frac{\partial^{p+q} u(x, y_{j+0})}{\partial x^p \partial y^q} + \beta_{pq1j} \frac{\partial^{p+q} u(x, y_{j-0})}{\partial x^p \partial y^q} \right] = g_{1j}(x), x < 0 (x > 0) \quad \mathbf{5}$$

$$\sum_{p=0}^P \sum_{q=0}^Q \left[\gamma_{pq1j} \frac{\partial^{p+q} u(x, y_{j+0})}{\partial x^p \partial y^q} + \delta_{pq1j} \frac{\partial^{p+q} u(x, y_{j-0})}{\partial x^p \partial y^q} \right] = g_{1j}(x), x > 0 (x < 0) \quad \mathbf{6}$$

y en las rectas $y = y_s, s \neq j, s \neq k$ las condiciones de contorno deben de ser de la forma **2**.

Se supondrá por comodidad en todo lo que sigue que $y_1 < y_2$.

A continuación se describirá el método de reducción que se debe a Cherski **[ver 4]** y **Anexo (A1)**, el cual consta de los pasos siguientes:

a) Aplicación de la trasformada de Fourier a **1**, donde se obtiene la ecuación diferencial siguiente:

$$\sum_{p=0}^A \sum_{q=0}^B a_{pq}(y) (-ix)^p \frac{d^q}{dy^q} U(x, y) = G(x, y) \quad \mathbf{7}$$

en el cual, y es el parámetro.

b) Escritura de la solución de **7** en una forma determinada.

Por ser la ecuación lineal, la solución general para cada banda determinada por las rectas $y = y_s, s = \overline{1, n}$, y para los semiplanos $y < y_1, y > y_n$ se puede asegurar que es de la forma:

$$U(x, y) = \sum_{k=0}^B C_{ks}(x) U_{ks}(x, y) + U_s^*(x, y) \quad \mathbf{8}$$

$$y_s < y < y_s + 1, y_{n+1} = +\infty, y_0 = -\infty \quad s = \overline{0, n}$$

Donde $U_s^*(x, y)$ es una solución particular de la ecuación no homogénea y las $U_{ks}(x, y)$, $k = \overline{1, B}$, $s = \overline{0, n}$ son soluciones particulares de la ecuación homogénea en cada banda o semi-plano. Las $C_{ks}(x)$, $k = \overline{1, B}$, $s = \overline{0, n}$ son funciones desconocidas. Obsérvese que el número de estas incógnitas es el producto nB del número n de regiones en que ha quedado dividido el plano, por el grado B de la ecuación 4.1.7.

c) Introducción de funciones desconocidas

Con el objetivo de poder aplicar la transformada de Fourier a las condiciones **3** y **4** en la primera variante y a las condiciones **5** y **6** en las dos variantes restantes, se introducen las funciones desconocidas f_+ y f_- , tales que

$$f_+(x) = \begin{cases} \text{función desconocida de } L_2(0, +\infty), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad \mathbf{9}$$

$$f_-(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ \text{función desconocida de } L_2(-\infty, 0), & x \leq 0 \end{cases} \quad \mathbf{10}$$

Las condiciones **3** y **4** toman entonces la forma:

$$\sum_{p=0}^P \sum_{q=0}^Q \left[\alpha_{pq1j} \frac{\partial^{p+q} u(x, y_{j+0})}{\partial x^p \partial y^q} + \beta_{pq1j} \frac{\partial^{p+q} u(x, y_{j-0})}{\partial x^p \partial y^q} \right] = g_{1j-}(x) + f_+(x) \quad \mathbf{11}$$

$$\sum_{p=0}^P \sum_{q=0}^Q \left[\gamma_{pq2j} \frac{\partial^{p+q} u(x, y_{j+0})}{\partial x^p \partial y^q} + \delta_{pq2j} \frac{\partial^{p+q} u(x, y_{j-0})}{\partial x^p \partial y^q} \right] = g_{2j+}(x) + f_-(x) \quad \mathbf{12}$$

$$-\infty < x < \infty \quad s = \overline{1, n}$$

donde

$$g_{1j-}(x) = \begin{cases} g_{1j}(x), & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad g_{2j+}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ g_{2j}(x), & x > 0 \end{cases}$$

Se supondrá en todo lo que sigue que $g_{1j}(x)$ y $g_{2j}(x)$ pertenecen a $L_2(-\infty, 0) \cup L_2(0, +\infty)$ respectivamente. De igual forma se procede en las dos variantes correspondientes a las condiciones **5** y **6**.

- d) Aplicación de la transformada de Fourier a las nuevas condiciones de contorno.

Se considerará solo la primera variante en este y en los pasos que siguen.

Aplicando transformada de Fourier a las condiciones **2**, **11** y **12** se tiene:

$$\sum_{p=0}^P \sum_{q=0}^Q \left[\alpha_{pqrj} (-ix)^p \frac{d^q}{dy^q} U(x, y_s + 0) + \beta_{pqrj} (-ix)^p \frac{d^q}{dy^q} U(x, y_s - 0) \right] = G_{rj}(x)$$

para $s \neq j$, $1 \leq j \leq n$, $r = \overline{1, m_s}$ **13**

$$\sum_{p=0}^P \sum_{q=0}^Q \left[\alpha_{pq1j} (-ix)^p \frac{d^q}{dy^q} U(x, y_j + 0) + \beta_{pq1j} (-ix)^p \frac{d^q}{dy^q} U(x, y_j - 0) \right] = G_{1j}^-(x) +$$

$$F^+(x),$$
 14

$$\sum_{p=0}^P \sum_{q=0}^Q \left[\gamma_{pq2j} (-ix)^p \frac{d^q}{dy^q} U(x, y_s + 0) + \delta_{pq2j} (-ix)^p \frac{d^q}{dy^q} U(x, y_s - 0) \right] = G_{2j}^+(x) +$$

$$F^-(x)$$
 15

De acuerdo a las condiciones **9** y **10** las funciones $F^+(x)$ y $F^-(x)$ se pueden considerar como los valores límites de las funciones $F^+(z)$ y $F^-(z)$, analíticas en el semiplano superior e inferior respectivamente, que satisfacen las condiciones:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F^+(x + iy)|^2 dx < M, \text{ si } y > 0$$

y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F^-(x + iy)|^2 dx < M, \text{ si } y < 0$$

respectivamente, donde M es el mismo para todas las y .

- e) Obtención de una ecuación funcional en la cual las únicas funciones desconocidas son $F^+(x)$ y $F^-(x)$

A partir de la fórmula **8** se expresan las funciones

$$\frac{d^q}{dy^q} U(x, y_s + 0) \text{ y } \frac{d^q}{dy^q} U(x, y_s - 0) \quad \mathbf{16}$$

en términos de funciones conocidas y de las funciones incógnitas $C_{rs}(x)$.

Sustituyendo las funciones **16** en **13**, **14** y **15** por las expresiones encontradas para las mismas se obtienen $m_1 + \dots + m_{j-1} + m_{j+1} + \dots + m_n + 2$ ecuaciones.

En general, en la práctica, a la solución de un problema de tipo planteado es necesario imponerle condiciones adicionales, como por ejemplo, la acotación en una o varias bandas (o semiplanos). La imposición a la solución de esas condiciones obliga a considerar que algunas de las $C_{rs}(x)$ sean nulas. Supongamos que se imponen H condiciones adicionales.

Para que el problema esté correctamente planteado el número de condiciones $m_1 + \dots + m_{j-1} + m_{j+1} + \dots + m_n + 2 + H$ debe ser igual al número de incógnitas (grado de la ecuación diferencial con respecto a y por el número de subregiones) más uno. En este caso trivialmente podremos obtener una ecuación funcional en la cual las únicas incógnitas sean $F^+(x)$ y $F^-(x)$

En efecto, resolviendo el sistema de ecuaciones que se forma con las $m_1 + \dots + m_{j-1} + m_{j+1} + \dots + m_n + 1$ ecuaciones, resultado de sustituir **16** en **13**, **14** y de considerar las H condiciones adicionales, se obtienen las incógnitas $C_{rs}(x)$ en términos de $F^\pm(x)$.

Sustituyendo luego las expresiones **16** en **15** se obtiene el problema de Riemann-Hilbert:

$$F^+(x) = A(x)F^-(x) + H(x) \tag{17}$$

La ecuación **17** corresponde a la condición de contorno del problema de Riemann-Hilbert para el semiplano. Donde $A(x)$, $H(x)$ son funciones conocidas, coeficiente y término independiente del problema de Riemann-Hilbert respectivamente. Obteniendo la solución de este problema, es posible encontrar las funciones $C_{rs}(x)$ a partir de sus expresiones en términos de $F^\pm(x)$.

Para que el proceso formal antes descrito permita encontrar la solución del problema **1-4** debe encontrarse la solución de **17** en una clase tal que garantice la existencia de la antitransformada de $U(x, y)$ y además permita justificar todos los pasos formales efectuados de la reducción de **1-4** a **17**.

Para que se cumplan estos requerimientos sobre la solución de **17**, basta que la misma garantice que se cumplan las condiciones siguientes:

$$(-ix)^p \frac{d^q}{dy^q} U(x, y) \in L_2(\mathbb{R}), \quad |x| < +\infty, q = \overline{0, B}$$

$$\frac{d^q}{dy^q} U(x, y) \in L_2(\mathbb{R}), \quad |x| < +\infty, q = \overline{0, B}$$

La solución del problema de Riemann-Hilbert para el semiplano se encontró en clases de funciones suficientemente buenas con respecto a los requerimientos del método de reducción [ver epígrafe 3 de [\[20\]](#)] y se llega a la siguiente conclusión en la página 78 de [\[15\]](#) y en la página 187 de [\[16\]](#): se resuelve un problema de contorno de ecuaciones diferenciales parciales de orden $p + q$.

A₃ Problema de distribución de temperatura en la lúnula.

(ver [15], páginas 79-82 y [16], páginas 194-196)

Mediante el siguiente ejemplo se pretende significar que las técnicas utilizadas no se limitan a las regiones descritas, pues es posible en muchos casos transformar la región inicial a una que posea las características señaladas antes.

Por ejemplo, supongamos que se desea encontrar la distribución estacionaria $u(x, y)$ de la temperatura en una lúnula como la señalada en la **Figura 2**

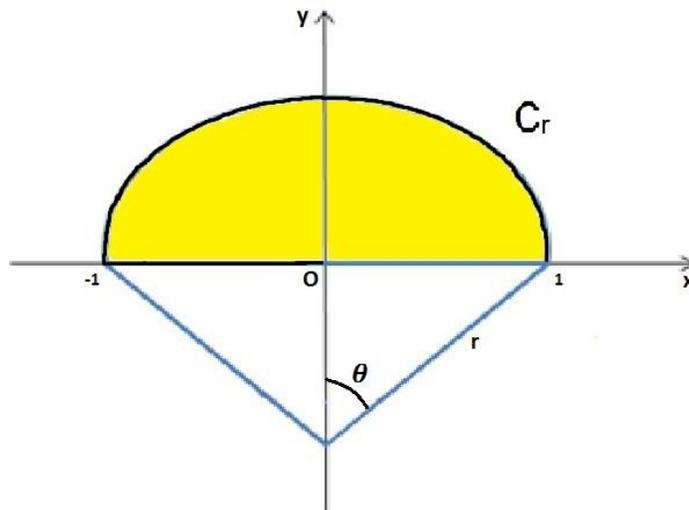


Figura 2

Se denota por C_r a la parte de la circunferencia de radio r con centro en O que pasa por los puntos $(-1,0)$ y $(1,0)$. Se supone que hay una pequeña transferencia de calor por C_r y por el segmento $\{(x, y): y = 0, -1 < x < 0\}$ y que en la parte restante de su frontera se conoce la temperatura y que la misma está dada por la función $g(x, y)$.

Como es conocido, el planteamiento matemático de este problema consiste en encontrar la solución de la ecuación

$$\Delta u = 0 \tag{18}$$

en la región sombreada de la **Figura 2** y que satisface las condiciones de contorno siguientes:

$$u(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < 1 \tag{19}$$

$$u_y(x, 0) = h(x) \quad -1 < x < 0 \dots\dots\dots \tag{20}$$

$$\frac{du(x,y)}{dn(x,y)} = 0, \quad (x, y) \in C_r, |x| < 1 \tag{21}$$

donde $n(x, y)$ es la normal del arco C_r y $h(x)$ es una función conocida.

La región en que debe encontrarse la solución del problema **18-21**, no corresponde al tipo de regiones que se exigen para aplicar el método descrito en **A2 de este Anexo**, que posteriormente en el capítulo II y III, se aplicará a problemas de tipo parabólico e hiperbólico, ya que como se conoce la ecuación $\Delta u = 0$, es de tipo elíptico, problema de contorno ya resuelto [ver [311](#)].

Se ha escogido este ejemplo porque cuando esto ocurre, se puede tratar de encontrar una transformación que convierta la región original en una región del tipo deseado y el problema original en uno del tipo al que se le pueda aplicar el método descrito.

En este ejemplo mediante el cambio de variables:

$$x = \frac{sh\alpha}{ch\alpha + cos\beta}, \quad y = \frac{sen\beta}{ch\alpha + cos\beta} \tag{22}$$

se transforma la lúnula de la **Figura 2** en la banda de la **Figura 3**

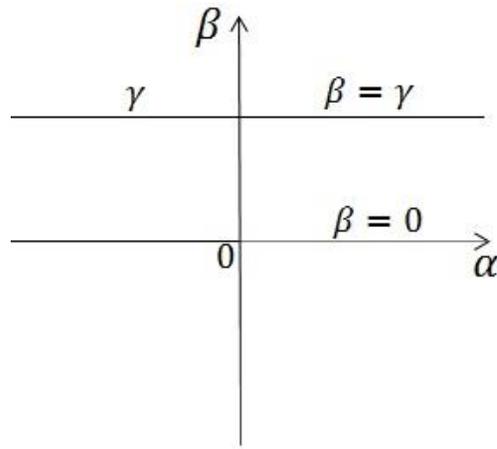


Figura 3

En efecto, trivialmente el segmento $\{(x, y): |x| \leq 1, y = 0\}$ se transforma por **22** en el eje α del plano $\alpha\beta$ y teniendo en cuenta que la ecuación de la parte C_r que limita a la lúnula en coordenadas cartesianas es: $x^2 + (y + \cot\gamma)^2 = r^2$, $y > 0$, $|x| < 1$, no resulta difícil probar que C_r se transforma en la recta $\beta = \gamma$ del plano $\alpha\beta$, mediante **22**. Además la ecuación **18** se transforma por el cambio de variables **22** en:

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = 0 \tag{23}$$

las condiciones de contorno en el nuevo sistema de coordenadas toman la forma:

$$u(\alpha, 0) = g_1(\alpha), \alpha > 0$$

$$u_\beta(\alpha, 0) = h_1(\alpha), \alpha < 0$$

$$\frac{du}{d\beta}(\alpha, \beta) = 0, -\infty < \alpha < +\infty$$

donde $g_1(\alpha) = g(x)$, $h_1(\alpha) = \frac{h(x)}{c\hbar\alpha+1}$ y $x = \frac{sh\alpha}{ch\alpha+1}$. Este nuevo problema está

correctamente planteado pues se tienen tres condiciones de contorno, que es igual al número de regiones por el orden de la ecuación con respecto a y , más

uno $3 = 1 * 2 + 1$), por lo cual se le puede aplicar el método descrito en A_3 y llevarlo a un problema de Riemann.

A4: CAPÍTULO II: SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE TIPO PARABÓLICO CON CONDICIONES DE CONTORNO DIFERENTES POR SEMIEJES

A4.1: Solución del subcaso 2.5.2-b): La expresión (2.2.12) toma la forma:

$$F^+(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)(x-bi)}{\gamma_{01}(x-ci)(x-di)} F^-(x) + \frac{\beta_{01}(x-ai)(x-bi)}{\gamma_{01}(x-ci)(x-di)} H_2(x) - H_1(x)$$

pero ahora a, b, c y d son números complejos con parte imaginaria menor que cero si $4|k\beta_{01}\beta_{00}| > k^2\beta_{10}^2$ y $4|k\gamma_{01}\gamma_{00}| > k^2\gamma_{10}^2$, o números imaginarios sobre el eje imaginario negativo si $4|k\beta_{01}\beta_{00}| < k^2\beta_{10}^2$ y $4|k\gamma_{01}\gamma_{00}| < k^2\gamma_{10}^2$. (También se puede obtener un caso mixto), y nos queda:

$$\frac{(x-ci)(x-di)}{(x-ai)(x-bi)} F^+(x) = \frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}} F^-(x) + \frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}} H_2(x) - \frac{(x-ci)(x-di)}{(x-ai)(x-bi)} H_1(x)$$

haciendo: $F_1^+ = \frac{(x-ci)(x-di)}{(x-ai)(x-bi)} F^+(x)$, $F_1^- = \frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}} F^-(x)$

y $H_5(x) = \frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}} H_2(x) - \frac{(x-ci)(x-di)}{(x-ai)(x-bi)} H_1(x)$

queda el problema de Salto: $F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_5(x)$. Por un análisis similar al realizado en la demostración del **Teorema 5** y **Corolario del Teorema 5**, resulta evidente un teorema con enunciado similar al anterior pero con H_5 en lugar de

H_3 y $F^+(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_5(t)e^{ixt} dt$, donde $h_4 = V^{-1}[H_4]$. Luego de

(2.2.2) y (2.2.11) se obtiene que: $U(x, y) = \frac{F^+(x) + H_1(x)}{(x-ai)(x-bi)} e^{\frac{x^2}{k}y} + V(x, y)$

A4.2: 2.6.1.2 Solución de los casos 2.4.2-c) y 2.4.2-e)

En estos casos la expresión (2.2.12) adopta la forma:

$$F^+(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)(x-bi)}{\gamma_{01}(x-ci)(x-di)} F^-(x) + \frac{\beta_{01}(x-ai)(x-bi)}{\gamma_{01}(x-ci)(x-di)} H_2(x) - H_1(x),$$

donde $a > 0$, $b > 0$ si $4|k\beta_{01}\beta_{00}| < k^2\beta_{10}^2$; e $\text{Im}a > 0$, $\text{Im}b > 0$ si $4|k\beta_{01}\beta_{00}| > k^2\beta_{10}^2$,

además $c > 0$, $d < 0$ y $c = -d$ en el caso 2.4.2-e) queda el problema de salto:

$$\frac{(x-di)}{(x-bi)} F^+(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)} F^-(x) + \frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)} H_2(x) - \frac{(x-di)}{(x-bi)} H_1(x)$$

siendo $H_9(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)} H_2(x) - \frac{(x-di)}{(x-bi)} H_1(x)$, queda aplicando la misma

idea del caso 2.6.2.1: $\frac{(x-di)}{(x-bi)} F^+(x) - \psi^+(x) = \frac{c_2}{x-bi}$, donde c_2 es una

constante arbitraria y

$$\psi^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_9(t)e^{ixt} dt, \text{ donde } h_9(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_9(t)e^{ixt} dt,$$

$$F^+(x) = \frac{(x-bi)}{(x-di)} \psi^+(x) + \frac{c_2}{x-di}$$

y entonces $U(x, y)$ queda determinado por las expresiones (2.2.2) y (2.2.11),

siendo: $F^+(x) = \frac{(x-bi)}{(x-di)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_9(t)e^{ixt} dt + \frac{c_2}{x-di}$

A4.3: 2.6.1.3 Solución de los casos 2.4.2-b) y 2.4.2-d)

En estos casos la expresión (2.2.12) adopta la forma:

$$F^+(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)(x-bi)}{\gamma_{01}(x-ci)(x-di)} F^-(x) + \frac{\beta_{01}(x-ai)(x-bi)}{\gamma_{01}(x-ci)(x-di)} H_2(x) - H_1(x)$$

donde $a < 0$, $b > 0$ ($a = -b$ en el caso 2.4.2-b), $c < 0$, $d < 0$ si $4|k\gamma_{01}\gamma_{00}| < k^2\gamma_{10}^2$; e

$\text{Im}c < 0$, $\text{Im}d < 0$ si $4|k\gamma_{01}\gamma_{00}| > k^2\gamma_{10}^2$. Se tiene que:

$$\frac{(x-ci)(x-di)}{(x-ai)(x-bi)} F^+(x) = \frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}} F^-(x) + \frac{\beta_{01}(x-ai)(x-bi)}{\gamma_{01}(x-ci)(x-di)} H_2(x) - H_1(x)$$

el cual es un problema de salto donde

$$H_{10}(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)} H_2(x) - \frac{(x-di)}{(x-bi)} H_1(x)$$

queda aplicando el mismo procedimiento del caso anterior:

$$\frac{(x-ci)(x-di)}{(x-ai)(x-bi)} F^+(x) - \psi^+(x) = \frac{c_3}{x-bi} \text{ donde } c_3 \text{ es una constante arbitraria y}$$

$$\psi^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_{10}(t) e^{ixt} dt, \text{ siendo } h_{10}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_{10}(t) e^{ixt} dt \text{ y}$$

$$F^+(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} \psi^+(x) + \frac{c_3(x-ci)}{(x-ai)(x-di)} \text{ y entonces } U(x, y) \text{ queda}$$

determinado por las expresiones (2.2.2) y (2.2.11), siendo:

$$F^+(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_{10}(t) e^{ixt} dt + \frac{c_3(x-ci)}{(x-ai)(x-di)}$$

Por un análisis similar al realizado en la demostración del **Teorema 7** y **Corolario**

del Teorema 7, resulta evidente un teorema con enunciado similar al anterior

$$\text{pero con } H_{10} \text{ en lugar de } H_{11} \text{ y } F^+(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} \psi^+(x) + \frac{c_3(x-ci)}{(x-ai)(x-di)}.$$

A4.4: 2.7.1.3 Solución de los casos 2.4.4-c) y 2.4.4-d)

En estos casos la expresión **(2.2.12)** adopta la forma:

$$F^+(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)(x-bi)}{\gamma_{01}(x-ci)(x-di)} F^-(x) + \frac{\beta_{01}(x-ai)(x-bi)}{\gamma_{01}(x-ci)(x-di)} H_2(x) - H_1(x),$$

donde $a < 0$, $b > 0$ ($a = -b$ en el caso **2.4.4-c)**, $c > 0$ y $d > 0$ si $4|k\gamma_{01}\gamma_{00}| < k^2\gamma_{10}^2$; e

$\text{Im}c > 0$, $\text{Im}d > 0$ si $4|k\gamma_{01}\gamma_{00}| > k^2\gamma_{10}^2$. Haciendo: $F_1^+(x) = F^+(x)$,

$$F_1^-(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)(x-bi)}{\gamma_{01}(x-ci)(x-di)} F^-(x)$$

$$\text{y } H_{14}(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)(x-bi)}{\gamma_{01}(x-ci)(x-di)} H_2(x) - H_1(x)$$

queda el Problema de Salto:

$$F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_{14}(x) \tag{2.7.6}$$

Luego es posible enunciar un teorema similar al **Teorema 8** pero situando $H_{14}(x)$

en lugar de $H_{12}(x)$ y $F^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_{14}(t)e^{ixt} dt$ siendo $h_{14}(x) = V^{-1}[H_{14}(x)]$; si

se cumple la condición adicional: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_{14}(\tau)}{\tau-ai} d\tau = 0$, Luego de **(2.2.2)**, **(2.2.11)** se

$$\text{obtiene: } U(x, y) = \frac{F^+(x) + H_1(x)}{(x-ai)(x-bi)} e^{\frac{x^2}{k}y} + V(x, y)$$

A5: CAPÍTULO III: SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE CONTORNO DE TIPO HIPERBÓLICO CON CONDICIONES DE CONTORNO DIFERENTES POR SEMIEJES

A5,1: 3.4.3.1-b.2) Caso donde se cumple que $sgF = sgC$ ($sgF = sgC$)

Las raíces $x = -\frac{iF}{C}$ ($x = -\frac{iF_1}{C_1}$) son imaginarias en el semiplano inferior. Por lo que

el problema de Riemann-Hilbert queda de la siguiente manera:

$$F^+(x) = \frac{(x-ai)}{(x-bi)} F^-(x) - H_2(x) + \frac{(x-ai)}{(x-bi)} H_3(x)$$

donde $a < 0$ y $b < 0$. Transformando la ecuación anterior se tiene:

$$\frac{(x-bi)}{(x-ai)} F^+(x) = F^-(x) - \frac{(x-bi)}{(x-ai)} H_2(x) + H_3(x)$$

haciendo: $F_1^+(x) = \frac{(x-bi)}{(x-ai)} F^+(x)$, $F_1^-(x) = F^-(x)$ y $H_8(x) = -\frac{(x-bi)}{(x-ai)} H_2(x) + H_3(x)$

queda el problema de salto:

$$F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_8(x).$$

Luego se pueden enunciar teoremas similares a los **Teorema 7** y **Corolario del**

Teorema 7 con h_8 y H_8 en lugar de h_7 y H_7 .

A5,2:3.4.3.1-c) Caso donde se cumple que

$$sgC \neq sgD, sgF \neq sgC, |4DC| > F^2 (sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 \neq sgC_1, |4D_1C_1| > F_1^2).$$

Teniendo dos ceros y dos polos en el semiplano superior complejos, donde

$$Re a > 0, Re a = -Re b, Re c > 0, Re c = -Re d \text{ y } Im a = Im b > 0, Im c = Im d > 0.$$

Por lo que el problema de Riemann-Hilbert queda de la siguiente manera:

$$F^+(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} F^-(x) - H_2(x) + \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} H_3(x)$$

haciendo: $F_1^+(x) = F^+(x)$, $F_1^-(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)}$

y $H_9(x) = -H_2(x) + \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} H_3(x)$, por lo tanto queda el problema de salto:

$$F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_9(x).$$

Luego podemos enunciar teoremas similares a los **Teorema 7** y **Corolario del Teorema 7** con h_9 y H_9 en lugar de h_7 y H_7 .

A5,3: 3.4.3.1-d) Caso donde se cumple que

$$sgC \neq sgD, sgF \neq sgC, |4DC| < F^2, \sqrt{-F^2 - 4DC} < F (sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 \neq sgC_1, |4D_1C_1| < F_1^2, \sqrt{-F_1^2 - 4D_1C_1} < F_1)$$

, teniendo dos ceros y dos polos imaginarios puros en el semiplano superior,

donde $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ y $d > 0$. Este caso se resuelve de la misma manera que el **3.4.3.1-c)**.

A5,4:3.4.3.1-e) Caso donde se cumple que

$$sgC \neq sgD, sgF \neq sgC, |4DC| < F^2, \sqrt{-F^2 - 4DC} > F (sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 \neq sgC_1, |4D_1C_1| < F_1^2, \sqrt{-F_1^2 - 4D_1C_1} > F_1)$$

Teniendo un cero y un polo en el semiplano superior y un cero y un polo en el semiplano inferior imaginarios puros, donde $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$ y $d < 0$.

Por lo que el problema de Riemann-Hilbert queda de la siguiente manera:

$$F^+(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} F^-(x) - H_2(x) + \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} H_3(x)$$

de donde se obtiene despejando:

$$\frac{(x-di)}{(x-bi)} F^+(x) = \frac{(x-ai)}{(x-ci)} F^-(x) - \frac{(x-di)}{(x-bi)} H_2(x) + \frac{(x-ai)}{(x-ci)} H_3(x)$$

haciendo: $F_1^+(x) = \frac{(x-di)}{(x-bi)} F^+(x)$, $F_1^-(x) = \frac{(x-ai)}{(x-ci)} F^-(x)$ y

$$H_{10}(x) = -\frac{(x-di)}{(x-bi)} H_2(x) + \frac{(x-ai)}{(x-ci)} H_3(x), \text{ queda el problema de salto:}$$

$$F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_{10}(x).$$

Luego se pueden enunciar teoremas similares a los **Teorema 7** y **Corolario del**

Teorema 7 con h_{10} y H_{10} en lugar de h_7 y H_7 .

A5.5: 3.4.3.1-f) Caso donde se cumple que

$$sgC \neq sgD, sgF = sgC, |4DC| > F^2 (sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 = sgC_1, |4D_1C_1| > F_1^2)$$

Teniendo dos ceros complejos y dos polos complejos en el semiplano inferior,

donde $Re a > 0, Re a = -Re b$, $Re c > 0, Re c = -Re d$ y $Im a = Im b < 0, Im c = Im d < 0$.

Por lo que el problema de Riemann-Hilbert queda de la siguiente manera:

$$F^+(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)} F^-(x) - H_2(x) + \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)} H_3(x)$$

de la ecuación anterior se obtiene transformándola:

$$\frac{(x-c)(x-d)}{(x-a)(x-b)} F^+(x) = F^-(x) - \frac{(x-c)(x-d)}{(x-a)(x-b)} H_2(x) + H_3(x),$$

haciendo: $F_1^+(x) = \frac{(x-c)(x-d)}{(x-a)(x-b)} F^+(x)$, $F_1^-(x) = F^-(x)$ y

$$H_{11}(x) = -\frac{(x-c)(x-d)}{(x-a)(x-b)} H_2(x) + H_3(x), \text{ queda el problema de salto:}$$

$$F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_{11}(x)$$

Luego se pueden enunciar teoremas similares a los **Teorema 7** y **Corolario del Teorema 7** con h_{11} y H_{11} en lugar de h_7 y H_7 .

A5,6: 3.4.3.1-g) Caso donde se cumple que

$$sgC \neq sgD, sgF = sgC, |4DC| < F^2, \sqrt{-F^2 - 4DC} > F$$

$$(sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 = sgC_1, |4D_1C_1| < F_1^2, \sqrt{-F_1^2 - 4D_1C_1} > F_1)$$

Teniendo raíces imaginarias puras, un cero y un polo en el semiplano superior y un cero y un polo en el semiplano inferior, ($a > 0, b < 0, a = -b, c > 0$ y $d < 0, c = -d$)

Por lo que el problema de Riemann-Hilbert queda de la siguiente manera:

$$F^+(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} F^-(x) - H_2(x) + \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} H_3(x)$$

donde ($a > 0, b < 0, a = -b, c > 0$ y $d < 0, c = -d$). Se tiene de la ecuación anterior

transformándola la siguiente relación:

$$\frac{(x-di)}{(x-bi)} F^+(x) = \frac{(x-ai)}{(x-ci)} F^-(x) - \frac{(x-di)}{(x-bi)} H_2(x) + \frac{(x-ai)}{(x-ci)} H_3(x)$$

$$\text{haciendo: } F_1^+(x) = \frac{(x-di)}{(x-bi)} F^+, \quad F_1^-(x) = \frac{(x-ai)}{(x-ci)} F^- \text{ y}$$

$$H_{12}(x) = -\frac{(x-di)}{(x-bi)} H_2(x) + \frac{(x-ai)}{(x-ci)} H_3(x), \text{ queda el problema de salto:}$$

$$F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_{12}(x)$$

Luego se pueden enunciar teoremas similares a los **Teorema 7** y **Corolario del Teorema 7** con h_{12} y H_{12} en lugar de h_7 y H_7 .

A_{5,7}:3.4.3.1-h) Caso donde se cumple que

$$sgC \neq sgD, sgF = sgC, |4DC| < F^2, \sqrt{-F^2 - 4DC} < F$$

$$(sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 = sgC_1, |4D_1C_1| < F_1^2, \sqrt{-F_1^2 - 4D_1C_1} < F_1)$$

Teniendo raíces imaginarias puras, un cero y un polo en el semiplano superior y un cero y un polo en el semiplano inferior ($a > 0, b < 0, a = -b, c > 0$ y $d < 0, c = -d$)

A_{5,8}:3.4.3.1-i) Caso donde se cumple que

$$sgC \neq sgD, sgF \neq sgC, |4DC| < F^2, \sqrt{-F^2 - 4DC} > F$$

$$(sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 \neq sgC_1, |4D_1C_1| < F_1^2, \sqrt{-F_1^2 - 4D_1C_1} > F_1)$$

Teniendo raíces imaginarias puras, un cero y un polo en el semiplano superior y un cero y un polo en el semiplano inferior ($a > 0, b < 0, a = -b, c > 0$ y $d < 0, c = -d$)

A_{5,9}:3.4.3.1-j) Caso donde se cumple que

$$sgC = sgD, sgF = sgC, \sqrt{-F^2 - 4DC} > F$$

$$(sgC_1 = sgD_1, sgF_1 = sgC_1, \sqrt{-F_1^2 - 4D_1C_1} > F_1)$$

Teniendo raíces imaginarias puras, un cero y un polo en el semiplano superior y un cero y un polo en el semiplano inferior ($a > 0, b < 0, a = -b, c > 0$ y $d < 0, c = -d$)

A_{5,10}:3.4.3.1-k) Caso donde se cumple que

$$sgC = sgD, sgF \neq sgC, \sqrt{-F^2 - 4DC} > F$$

$$(sgC_1 = sgD_1, sgF_1 \neq sgC_1, \sqrt{-F_1^2 - 4D_1C_1} > F_1)$$

Teniendo raíces imaginarias puras, un cero y un polo en el semiplano superior y un cero y un polo en el semiplano inferior ($a > 0, b < 0, a = -b, c > 0$ y $d < 0, c = -d$)

A5,11:3.4.3.1-l) Caso donde se cumple que

$$sgC = sgD, sgF = sgC, \sqrt{-F^2 - 4DC} < F$$

$$(sgC_1 = sgD_1, sgF_1 = sgC_1, \sqrt{-F_1^2 - 4D_1C_1} < F_1)$$

Teniendo raíces imaginarias puras, un cero y un polo en el semiplano superior y un cero y un polo en el semiplano inferior ($a > 0, b < 0, a = -b, c > 0$ y $d < 0, c = -d$)

A5,12:3.4.3.1-m) Caso donde se cumple que

$$sgC = sgD, sgF = sgC, \sqrt{-F^2 - 4DC} > F$$

$$(sgC_1 = sgD_1, sgF_1 = sgC_1, \sqrt{-F_1^2 - 4D_1C_1} > F_1)$$

Teniendo raíces imaginarias puras, un cero y un polo en el semiplano superior y un cero y un polo en el semiplano inferior ($a > 0, b < 0, a = -b, c > 0$ y $d < 0, c = -d$),

A5,13:3.4.3.1-n) Caso donde se cumple que

$$sgC = sgD, sgF \neq sgC, \sqrt{-F_1 - 4DC} > F$$

$$(sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 = sgC_1, |4D_1C_1| < F_1^2, \sqrt{-F_1^2 - 4D_1C_1} > F_1)$$

Teniendo un cero y un polo en el semiplano superior imaginarios puros y un cero y un polo en el semiplano inferior imaginarios puros

$$(a > 0, b < 0, a = -b, c > 0 \text{ y } d < 0, c = -d)$$

Nota: Todos estos casos se resuelven de la misma manera que el **3.4.3.1-g**).

A5,14:3.4.3.1-ñ) Caso donde se cumple que

$$sgC \neq sgD, sgF \neq sgC, |4DC| > F^2 \quad (sgC_1 = sgD_1, sgF_1 \neq sgC_1, \sqrt{-F_1^2 - 4D_1C_1} < F_1)$$

Teniendo raíces complejas en el numerador e imaginarias puras en el denominador, dos ceros y dos polos en el semiplano superior, donde

$$Re a > 0, Re a = -Re b, Im a = Im b > 0, c > 0, d > 0$$

Por lo que el problema de Riemann-Hilbert queda de la siguiente manera:

$$F^+(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-ci)(x-di)} F^-(x) - H_2(x) + \frac{(x-a)(x-b)}{(x-ci)(x-di)} H_3(x)$$

haciendo: $F_1^+(x) = F^+(x)$, $F_1^-(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-ci)(x-di)} F^-(x)$ y

$$H_{13}(x) = -H_2(x) + \frac{(x-a)(x-b)}{(x-ci)(x-di)} H_3(x), \text{ queda el problema de salto:}$$

$$F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_{13}(x).$$

Luego se puede enunciar teoremas similares a los **Teorema 7** y **Corolario del Teorema 7** con h_{13} y H_{13} en lugar de h_7 y H_7 .

A5,15:3.4.3.1-o) Caso donde se cumple que

$$sgC = sgD, sgF = sgC, \sqrt{-F^2 - 4DC} < F \text{ (} sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 = sgC_1, |4D_1C_1| > F_1^2 \text{)}$$

Teniendo dos ceros en el semiplano inferior imaginarios y dos polos en el semiplano inferior complejos, donde $a < 0, b < 0$ y $Re c > 0, Re c = -Re d, Im c = Im d < 0$.

Por lo que el problema de Riemann-Hilbert queda de la siguiente manera:

$$F^+(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-c)(x-d)} F^-(x) - H_2(x) + \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-c)(x-d)} H_3(x)$$

transformando la ecuación anterior se obtiene:

$$\frac{(x-c)(x-d)}{(x-ai)(x-bi)} F^+(x) = F^-(x) - \frac{(x-c)(x-d)}{(x-ai)(x-bi)} H_2(x) + H_3(x)$$

haciendo: $F_1^+(x) = \frac{(x-c)(x-d)}{(x-ai)(x-bi)} F^+(x)$, $F_1^-(x) = F^-(x)$ y

$$H_{14}(x) = -\frac{(x-c)(x-d)}{(x-ai)(x-bi)} H_2(x) + H_3(x), \text{ queda el problema de salto:}$$

$$F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_{14}(x)$$

Luego se pueden enunciar teoremas similares a los **Teorema 7** y **Corolario del Teorema 7** con h_{14} y H_{14} en lugar de h_7 y H_7 .

A_{5,16}:3.4.3.2-b) Caso donde se cumple que

$$sgC \neq sgD, sgF \neq sgC, |4DC| > F^2 \quad (sgC_1 = sgD_1, sgF_1 \neq sgC_1, \sqrt{-F_1^2 - 4D_1C_1} > F_1)$$

Teniendo dos ceros complejos y un polo imaginario en el semiplano superior y un polo imaginario en el semiplano inferior, donde $Re a > 0, Re a = -Re b, Im a = Im b > 0$
 $c > 0, d < 0$.

Nota: Este caso se resuelve de la misma manera que el **3.4.3.2-a**).

A_{5,17}:3.4.3.2-c) Caso donde se cumple que

$$sgC = sgD, sgF \neq sgC, \sqrt{-F^2 - 4DC} > F \quad (sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 = sgC_1, |4D_1C_1| > F_1^2)$$

Teniendo un cero imaginario puro en el semiplano superior y un cero imaginario puro y dos polos complejos en el semiplano inferior, donde $a > 0, b < 0$
 y $Re c > 0, Re c = -Re d, Im c = Im d < 0$.

Por lo que el problema de Riemann-Hilbert queda de la siguiente manera:

$$F^+(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-c)(x-d)} F^-(x) - H_2(x) + \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-c)(x-d)} H_3(x)$$

teniendo que:

$$\frac{(x-c)(x-d)}{(x-ai)(x-bi)} F^+(x) = F^-(x) - \frac{(x-c)(x-d)}{(x-ai)(x-bi)} H_2(x) + H_3(x)$$

de donde se llega al problema de salto:

$$\frac{(x-c)(x-d)}{(x-ai)(x-bi)} F^+(x) = F^-(x) + H_{16}(x), \text{ siendo } H_{16}(x) = -\frac{(x-c)(x-d)}{(x-ai)(x-bi)} H_2(x) + H_3(x).$$

Utilizando una teoría similar al caso anterior se obtiene

$$\frac{(x-c)(x-d)}{(x-ai)(x-bi)} F^+(x) - \psi^+(x) = F^-(x) - \psi^-(x) = \frac{c_1}{(x-ai)} \text{ de donde}$$

$$F^+(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-c)(x-d)} \psi^+(x) + \frac{(x-bi)}{(x-c)(x-d)} c_1,$$

$$\text{siendo: } F^+(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-c)(x-d)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_{16}(t) e^{ixt} dt + \frac{(x-bi)}{(x-c)(x-d)} c_1$$

Luego se puede enunciar teoremas similares a los **Teorema 8** y **Corolario del**

Teorema 8 con h_{16} y H_{16} en lugar de h_{15} y H_{15} .

A5,18: 3.4.3.2-d) Caso donde se cumple que

$$sgC = sgD, sgF = sgC, \sqrt{-F^2 - 4DC} > F \text{ (} sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 = sgC_1, |4D_1C_1| > F_1^2 \text{)}$$

Teniendo un cero imaginario puro en el semiplano superior y un cero imaginario

puro y dos polos complejos en el semiplano inferior, donde $a > 0, b < 0$

y $Re c > 0, Re c = -Re d, Im c = Im d < 0$.

Nota: Este caso se resuelve de la misma manera que el anterior.

A5,19: 3.4.3.2-e) Caso donde se cumple que

$$sgC \neq sgD, sgF \neq sgC, |4DC| < F^2, \sqrt{-F^2 - 4DC} < F \text{ (} sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 \neq sgC_1, |4D_1C_1| < F_1^2, \sqrt{-F_1^2 - 4D_1C_1} > F_1 \text{)}$$

Teniendo dos ceros y un polo imaginarios puros en el semiplano superior y un

polo en el semiplano inferior imaginario puro, $a > 0, b > 0$ y $c > 0, d < 0$

Por lo que el problema de Riemann-Hilbert queda de la siguiente manera:

$$F^+(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} F^-(x) - H_2(x) + \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} H_3(x),$$

llegando al problema de salto:

$$F^+(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} F^-(x) + H_{17}(x),$$

siendo: $H_{17}(x) = -H_2(x) + \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} H_3(x),$

donde utilizando una teoría similar al caso anterior se obtiene:

$$F^+(x) - \psi^+(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} F^-(x) - \psi^-(x) = \frac{c_1}{(x-di)}, \text{ lo cual implica que:}$$

$$F^+(x) = \psi^+(x) + \frac{c_1}{(x-di)} \text{ y } F^-(x) = \frac{(x-ci)(x-di)}{(x-ai)(x-bi)} \psi^-(x) + \frac{(x-ci)}{(x-ai)(x-bi)} c_1$$

de donde: $F^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_{17}(t) e^{ixt} dt + \frac{c_1}{(x-di)}$

Luego se pueden enunciar teoremas similares a los **Teorema 8** y **Corolario del**

Teorema 8 con h_{17} y H_{17} en lugar de h_{15} y H_{15} .

A5,20: 3.4.3.2-f) Caso donde se cumple que

$$sgC \neq sgD, sgF = sgC, |4DC| < F^2, \sqrt{-F^2 - 4DC} > F \text{ (} sgC_1 = sgD_1, sgF_1 = sgC_1, \sqrt{-F_1^2 - 4D_1C_1} < F_1 \text{)}$$

Teniendo un cero imaginario puro en el semiplano superior y un cero y dos polos imaginarios puros en el semiplano inferior.

Por lo que el problema de Riemann-Hilbert queda de la siguiente manera:

$$F^+(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} F^-(x) - H_2(x) + \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} H_3(x),$$

donde $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$ y $d < 0$,

transformando la expresión anterior se obtiene:

$$\frac{(x-ci)(x-di)}{(x-bi)(x-ai)} F^+(x) = F^-(x) - \frac{(x-ci)(x-di)}{(x-bi)(x-ai)} H_2(x) + H_3(x),$$

de donde se llega al problema de salto:

$$\frac{(x-ci)(x-di)}{(x-bi)(x-ai)} F^+(x) = F^-(x) + H_{18}(x), \text{ siendo } H_{18}(x) = -\frac{(x-ci)(x-di)}{(x-bi)(x-ai)} H_2(x) + H_3(x)$$

$$\text{y } F^+(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} \psi^+(x) + \frac{(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} c_1$$

quedando determinado $U(x, y)$ **(3.2.4)**, con:

$$F^+(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_{18}(t) e^{ixt} dt + \frac{(x-bi)c_2}{(x-ci)(x-di)}$$

Luego se pueden enunciar teoremas similares a los **Teorema 8** y **Corolario del**

Teorema 8 con h_{18} y H_{18} en lugar de h_{15} y H_{15} .

A5,21: 3.4.3.2-g) Caso donde se cumple que

$$sgC = sgD, sgF = sgC, \sqrt{-F_1 - 4DC} > F \quad (sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 = sgC_1, |4D_1C_1| < F_1^2, \sqrt{-F_1^2 - 4D_1C_1} < F_1)$$

Teniendo un cero imaginario puro en el semiplano superior y un cero y dos polos imaginarios puros en el semiplano inferior.

Nota: Este caso se resuelve de la misma manera que el anterior.

A5,22: 3.4.3.3-b) Caso donde se cumple que

$$sgC \neq sgD, sgF \neq sgC, |4DC| > F^2 \quad (sgC_1 = sgD_1, sgF_1 = sgC_1, \sqrt{-F_1^2 - 4D_1C_1} < F_1)$$

Teniendo dos ceros complejos en el semiplano superior y dos polos imaginarios puros en el semiplano inferior.

$$Re a > 0, Re a = -Re b, Im a = Im b > 0 \text{ y } c < 0, d > 0$$

A5,23: 3.4.3.3-c) Caso donde se cumple que

$$sgC \neq sgD, sgF \neq sgC, |4DC| < F^2, \sqrt{-F_1 - 4DC} < F$$

$$(sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 = sgC_1, |4D_1C_1| < F_1^2, \sqrt{-F_1^2 - 4D_1C_1} < F_1)$$

Teniendo dos ceros en el semiplano superior imaginarios puros y dos polos en el semiplano inferior imaginarios puros.

$$a > 0, b > 0, c < 0 \text{ y } d > 0$$

A5,24: 3.4.3.3-d) Caso donde se cumple que

$$sgC = sgD, sgF \neq sgC, \sqrt{-F_1 - 4DC} < F \text{ (} sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 = sgC_1, |4D_1C_1| < F_1^2, \sqrt{-F_1^2 - 4D_1C_1} < F_1)$$

Teniendo dos ceros en el semiplano superior imaginarios puros y dos polos en el semiplano inferior imaginarios puros.

$$a > 0, b > 0, c < 0 \text{ y } d > 0$$

Nota: Estos casos se resuelven de la misma manera que el caso **3.4.3.3-a)**.

A5,25: 3.4.3.4-b) Caso donde se cumple que

$$sgC \neq sgD, sgF = sgC, |4DC| > F^2 \text{ (} sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 \neq sgC_1, |4D_1C_1| < F_1^2, \sqrt{-F_1 - 4D_1C_1} > F_1^2)$$

Teniendo un polo imaginario en el semiplano superior y dos ceros complejos y un polo imaginario en el semiplano inferior.

$$\text{Siendo: } \operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re} a = -\operatorname{Re} b, \operatorname{Im} a = \operatorname{Im} b < 0 \text{ y } c > 0, d < 0$$

Nota: Este caso se resuelve de la misma manera que el anterior.

A5,26: 3.4.3.4-c) Caso donde se cumple que

$$sgC \neq sgD, sgF = sgC, |4DC| < F^2, \sqrt{-F_1 - 4DC} > F$$

$$(sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 \neq sgC_1, |4D_1C_1| > F_1^2)$$

Teniendo un cero imaginario puro y dos polos complejos en el semiplano superior y un cero en el semiplano inferior imaginario puro.

Siendo: $a > 0, b < 0$ y $\operatorname{Re} c > 0, \operatorname{Re} c = -\operatorname{Re} d, \operatorname{Im} c = \operatorname{Im} d > 0$.

En este caso el problema de Riemann-Hilbert queda de la siguiente manera:

$$F^+(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)} F^-(x) - H_2(x) + \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)} H_3(x)$$

de donde se obtiene:
$$\frac{(x-d)}{(x-b)} F^+(x) = \frac{(x-a)}{(x-c)} F^-(x) - \frac{(x-d)}{(x-b)} H_2(x) + \frac{(x-a)}{(x-c)} H_3(x),$$

haciendo el cambio:
$$F_1^+(x) = \frac{(x-d)}{(x-b)} F^+(x) \quad F_1^-(x) = \frac{(x-a)}{(x-c)} F^-(x) \quad y$$

$$H_{21}(x) = -\frac{(x-d)}{(x-b)} H_2(x) + \frac{(x-a)}{(x-c)} H_3(x)$$

lleva al problema de salto: $F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_{21}(x)$ **(3.4.12)**

luego se puede enunciar el siguiente teorema:

Teorema 11: Si $a_0 < 0$ y $V(x, y), xV(x, 0^+), y \frac{dV(x, 0^+)}{dy}$ pertenecen a $L_2(\mathbb{R})$,

entonces el problema para este caso tiene solución única en la clase **(3.1.6)** dada

por $u(x, y) = V^{-1}[U(x, y)]$. Donde $U(x, y)$ está dada por las fórmulas **(3.2.4)** y

$$F^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(x-b)}{(x-d)} \int_0^{+\infty} h_{21}(t) e^{ixt} dt$$
 (3.4.13)

siendo $h_{20} = V^{-1}[H_{20}]$; si se cumple la condición adicional:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_{21}(\tau)}{\tau - d} d\tau = 0$$
 (3.4.14)

La primera parte de la demostración es evidente por las técnicas de trabajo mostradas anteriormente, luego, sólo nos ocuparemos de la necesidad de la expresión (3.4.14). En efecto, como la solución del problema de Riemann-Hilbert

se expresa por (3.4.13) y se tiene que:
$$F^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(x-b)}{(x-d)} \int_0^{+\infty} h_{21}(t)e^{ixt} dt$$
, expresión

que tiene un polo de orden uno en $x=d$, por lo tanto, se requiere, para que el

problema de salto (3.4.12) tenga solución única, que $\int_0^{+\infty} h_{20}(t)e^{ixt} dt$ tenga un cero

de igual orden en dicho punto. Como por la relación entre las Integrales de tipo

Cauchy y de Fourier se tiene:
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_{21}(\tau)}{\tau-d} d\tau = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_{21}(\tau)e^{izt} dt$$
, si $\text{Im } z < 0$,

entonces, desarrollando la primera de las integrales anteriores en serie de

potencias de $(z-d)$ e igualando a cero el coeficiente del término de grado cero

del desarrollo, se obtiene (3.4.14) con lo cual se elimina el polo de $F^+(x)$. En el

caso homogéneo se tiene:

Corolario del Teorema 11: Si $a_0 < 0$ entonces el problema para este caso tiene

solución única en la clase (3.1.6) dada por $u(x, y) = V^{-1}[U(x, y)]$.

A_{5,27}: 3.4.3.4-d) Caso donde se cumple que

$$sgC \neq sgD, sgF \neq sgC, |4DC| < F^2, \sqrt{-F^2 - 4DC} > F (sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 \neq sgC_1, |4D_1C_1| < F_1^2, \sqrt{-F_1^2 - 4D_1C_1} < F_1)$$

Teniendo un cero y dos polos imaginarios puros en el semiplano superior y cero

imaginario puro en el semiplano inferior, siendo $a > 0, b < 0, c > 0$ y $d > 0$

A5,28: 3.4.3.4-e) Caso donde se cumple que

$$sgC \neq sgD, sgF = sgC, |4DC| < F^2, \sqrt{-F-4DC} > F \quad (sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 \neq sgC_1, |4D_1C_1| < F_1^2, \sqrt{-F_1-4D_1C_1} < F_1^2$$

Teniendo dos polos imaginarios puros en el semiplano superior y un cero imaginario puro en el semiplano superior y un cero imaginario puro en el semiplano inferior, siendo $a > 0, b < 0, c > 0$ y $d > 0$

A5,29: 3.4.3.5-b) Caso donde se cumple que

$$sgC \neq sgD, sgF = sgC, |4DC| < F^2, \sqrt{-F_1-4DC} < F \quad (sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 \neq sgC_1, |4D_1C_1| > F_1^2$$

Teniendo dos polos complejos en el semiplano superior y dos ceros imaginarios puros en el semiplano inferior $a < 0, b < 0$ y $Re c > 0, Re c = -Re d, Im c = Im d > 0$

A5,30: 3.4.3.5-c) Caso donde se cumple que

$$sgC \neq sgD, sgF = sgC, |4DC| > F^2 \quad (sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 \neq sgC_1, |4D_1C_1| < F_1^2, \sqrt{-F_1^2-4D_1C_1} < F_1$$

Teniendo dos polos imaginarios en el semiplano superior y dos ceros complejos en el semiplano inferior $Re a > 0, Re a = -Re b, Im a = Im b < 0$ y $c > 0, d > 0$

A5,31: 3.4.3.5-d) Caso donde se cumple que

$$sgC \neq sgD, sgF = sgC, |4DC| < F^2 \quad (sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 \neq sgC_1, |4D_1C_1| < F_1^2$$

Teniendo dos polos en el semiplano superior imaginarios puros y dos ceros en el semiplano inferior imaginarios puros $a < 0, b < 0$ y $c > 0, d > 0$.

A5,32: 3.4.3.5-e) Caso donde se cumple que

$$sgC \neq sgD, sgF = sgC, |4DC| < F^2, \sqrt{-F-4DC} < F \quad (sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 \neq sgC_1, |4D_1C_1| < F_1^2, \sqrt{-F_1-4D_1C_1} < F_1^2$$

Teniendo dos polos en el semiplano superior imaginarios puros y dos ceros en el semiplano inferior imaginarios puros. $a < 0, b < 0$ y $c > 0, d > 0$.

A5,33: 3.4.3.5-f) Caso donde se cumple que

$$sgC = sgD, sgF = sgC, \sqrt{-F_1 - 4DC} < F \quad (sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 \neq sgC_1, |4D_1C_1| < F_1^2)$$

Teniendo dos ceros en el semiplano inferior imaginarios puros y dos polos en el semiplano superior imaginarios puros $a < 0, b < 0, c > 0, d > 0$.

Nota: Estos casos se resuelven de la misma manera que el caso **3.4.3.5-c**).

A5,34 :Caso 3.4.4: Se cumple que $\frac{\alpha_0}{\beta_0} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$ y $\frac{\alpha_0}{\gamma_0} = \frac{\alpha_1}{\gamma_1} = \frac{\alpha_2}{\gamma_2}$ (Solamente

cuando $B = 0, B_1 = 0, E = 0, E_1 = 0, A \neq 0, A_1 \neq 0, C \neq 0, C_1 \neq 0, D \neq 0, D_1 \neq 0, F \neq 0$ y $F_1 \neq 0$)

Las raíces del coeficiente del problema de Riemann quedarían de la forma:

$$x_{1,2} = \frac{-iF \pm \sqrt{-F^2 - 4(C-A)(Aa_0 + D + F)}}{2(C-A)} \quad (x_{1,2} = \frac{-iF_1 \pm \sqrt{-F_1^2 - 4(C_1 - A_1)(A_1a_0 + D_1 + F_1)}}{2(C_1 - A_1)})$$

Tanto el numerador como el denominador de $D(x)$ son polinomios de segundo grado. La solución del problema de Riemann depende del índice del coeficiente $D(x)$ y para este problema solo se tienen los siguientes casos: **Casos de índice cero, Casos de índice positivos: uno y dos y Casos de índice negativo: menos uno y menos dos.**

Caso 3.4.4.1: Casos de índice cero

Caso 3.4.4.1-a) $F = 0 (F_1 = 0) \Rightarrow -\frac{\alpha_0}{\alpha_2} = \frac{\beta_0}{\beta_2} = \frac{\gamma_0}{\gamma_2}$

las raíces toman de la forma:

$$x_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{-4(C-A)(Aa_0 + D)}}{2(C-A)} \quad (x_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{-4(C_1 - A_1)(A_1a_0 + D_1)}}{2(C_1 - A_1)}), |(C-A)(Aa_0 + D)| \geq 0$$

las cuales son raíces imaginarias conjugadas, dos ceros y dos polos: un cero y un polo en el semiplano superior y un cero y un polo en el semiplano inferior. El coeficiente del problema de Riemann queda de la forma:

$$D(x) = \frac{(C - A)x^2 + Aa_0 + D}{(C_1 - A_1)x^2 + A_1a_0 + D_1}$$

por lo que el problema de Riemann queda de la siguiente manera:

$$F^+(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} F^-(x) + \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} H_1(x) - H_2(x) + \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} H_3(x),$$

$$\text{donde } \Delta_1(x) = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{a_0-x^2}} P_1(x) & e^{-\sqrt{a_0-x^2}} P_3(x) \\ \overline{P}_1(x) & \overline{P}_3(x) \end{vmatrix}, \text{ siendo: } P_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\alpha_2,$$

$$\overline{P}_1(x) = \alpha_0 - \alpha_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\alpha_2, \quad P_3(x) = \gamma_0 + \gamma_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\gamma_2 \text{ y}$$

$$\overline{P}_3(x) = \gamma_0 - \gamma_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\gamma_2, \text{ con donde } a > 0, b < 0, c > 0 \text{ y } d < 0.$$

Del problema de Riemann correspondiente se tiene:

$$\frac{(x-di)}{(x-bi)} F^+(x) = \frac{(x-ai)}{(x-ci)} F^-(x) + \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} \frac{(x-di)}{(x-bi)} H_1(x) - \frac{(x-di)}{(x-bi)} H_2(x) + \frac{(x-ai)}{(x-ci)} H_3(x),$$

$$\text{donde haciendo: } F_1^+(x) = \frac{(x-di)}{(x-bi)} F^+(x), \quad F_1^-(x) = \frac{(x-ai)}{(x-ci)} F^-(x) \text{ y } H_{23}(x) =$$

$$\frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} \frac{(x-di)}{(x-bi)} H_1(x) - \frac{(x-di)}{(x-bi)} H_2(x) + \frac{(x-ai)}{(x-ci)} H_3(x)$$

$$\text{queda el problema de salto: } F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_{23}(x)$$

Luego se pueden enunciar teoremas similares a los **Teoremas 7** y **Corolario del**

Teorema 7 con h_{23} y H_{23} en lugar de h_6 y H_6 .

Caso 3.4.4.1-b) $D = 0(D_1 = 0) \Rightarrow \alpha_0 = 0 \text{ ó } \beta_0 = \gamma_0 = 0$

las raíces quedarían de la forma:

$$x_{1,2} = \frac{-iF \pm \sqrt{-F^2 - 4(C-A)(Aa_0 + F)}}{2(C-A)} \quad (x_{1,2} = \frac{-iF_1 \pm \sqrt{-F_1^2 - 4(C_1 - A_1)(A_1a_0 + F_1)}}{2(C_1 - A_1)})$$

las cuales son raíces imaginarias si $|(C-A)(Aa_0 + F)| > 0$ y el coeficiente del problema de Riemann queda de la forma:

$$D(x) = \frac{(C-A)x^2 + ixF + (Aa_0 + F)}{(C_1 - A_1)x^2 + ixF_1 + (A_1a_0 + F_1)}$$

Esto conduce a los siguientes subcasos, que se resuelven de igual manera:

Caso 3.4.4.1-b.1)

$\sqrt{-F^2 - 4(C-A)(Aa_0 + F)} > F(\sqrt{-F_1^2 - 4(C_1 - A_1)(A_1a_0 + F_1)} > F_1), \text{sg}F = \text{sg}(C-A)(\text{sg}F_1 = \text{sg}(C_1 - A_1))$
 , teniendo raíces imaginarias: un polo y un cero en el semiplano superior y un polo y un cero en el semiplano inferior.

Caso 3.4.4.1-b.2)

$\sqrt{-F^2 - 4(C-A)(Aa_0 + F)} > F(\sqrt{-F_1^2 - 4(C_1 - A_1)(A_1a_0 + F_1)} > F_1), \text{sg}F \neq \text{sg}(C-A)(\text{sg}F_1 = \text{sg}(C_1 - A_1))$
 , teniendo raíces imaginarias: un polo y un cero en el semiplano superior y un polo y un cero en el semiplano inferior.

Caso 3.4.4.1-b.3)

$\sqrt{-F^2 - 4(C-A)(Aa_0 + F)} > F(\sqrt{-F_1^2 - 4(C_1 - A_1)(A_1a_0 + F_1)} > F_1), \text{sg}F = \text{sg}(C-A)(\text{sg}F_1 \neq \text{sg}(C_1 - A_1))$
 , teniendo raíces imaginarias: un polo y un cero en el semiplano superior y un polo y un cero en el semiplano inferior.

Caso 3.4.4.1-b.4)

$\sqrt{-F^2 - 4(C-A)(Aa_0 + F)} > F(\sqrt{-F_1^2 - 4(C_1 - A_1)(A_1a_0 + F_1)} > F_1)$, $sgF \neq sg(C-A)(sgF_1 \neq sg(C_1 - A_1))$,
 , teniendo: raíces imaginarias un polo y un cero en el semiplano superior y un polo
 y un cero en el semiplano inferior.

El problema de Riemann queda de la siguiente manera:

$$F^+(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} F^-(x) + \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} H_1(x) - H_2(x) + \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} H_3(x).$$

Donde $\Delta_1(x) = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{a_0-x^2}} P_1(x) & e^{-\sqrt{a_0-x^2}} P_3(x) \\ \overline{P_1}(x) & \overline{P_3}(x) \end{vmatrix}$, siendo $P_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\alpha_2$,

$$\overline{P_1}(x) = \alpha_0 - \alpha_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\alpha_2, P_3(x) = \gamma_0 + \gamma_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\gamma_2 \text{ y}$$

$$\overline{P_3}(x) = \gamma_0 - \gamma_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\gamma_2; \text{ donde } a > 0, b < 0, c > 0 \text{ y } d < 0$$

Despejando en el problema de Riemann se tiene:

$$\frac{(x-di)}{(x-bi)} F^+(x) = \frac{(x-ai)}{(x-ci)} F^-(x) + \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} \frac{(x-di)}{(x-bi)} H_1(x) - \frac{(x-di)}{(x-bi)} H_2(x) + \frac{(x-ai)}{(x-ci)} H_3(x),$$

donde si se cumple que $\gamma_0 = 0$ la expresión que multiplica a $H_1(x)$ se hace cero,

haciendo: $F_1^+(x) = \frac{(x-di)}{(x-bi)} F^+(x)$, $F_1^-(x) = \frac{(x-ai)}{(x-ci)} F^-(x)$ y $H_{24}(x) =$

$$\frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} \frac{(x-di)}{(x-bi)} H_1(x) - \frac{(x-di)}{(x-bi)} H_2(x) + \frac{(x-ai)}{(x-ci)} H_3(x); \text{ queda el problema de salto:}$$

$$F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_{24}(x)$$

Luego se pueden enunciar teoremas similares a los **Teoremas 7** y **Corolario del**

Teorema 7 con h_{24} y H_{24} en lugar de h_6 y H_6 .

Caso 3.4.4.1-b.5)

$\sqrt{-F^2 - 4(C-A)(Aa_0 + F)} < F < \sqrt{-F_1^2 - 4(C_1 - A_1)(A_1a_0 + F_1)} < F_1$, $sgF = sg(C-A)(sgF_1 = sg(C_1 - A_1))$,
 , teniendo raíces imaginarias: dos ceros y dos polos en el semiplano inferior, el

problema de Riemann queda de la siguiente manera:

$$F^+(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} F^-(x) + \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} H_1(x) - H_2(x) +$$

$$\frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} H_3(x), \text{ donde } \Delta_1(x) = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{a_0-x^2}} P_1(x) & e^{-\sqrt{a_0-x^2}} P_3(x) \\ \overline{P}_1(x) & \overline{P}_3(x) \end{vmatrix}, \text{ siendo}$$

$$P_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\alpha_2, \quad \overline{P}_1(x) = \alpha_0 - \alpha_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\alpha_2,$$

$$P_3(x) = \gamma_0 + \gamma_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\gamma_2 \text{ y } \overline{P}_3(x) = \gamma_0 - \gamma_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\gamma_2; \text{ con } a < 0, b < 0,$$

$c < 0$ y $d < 0$.

Del problema de Riemann se tiene que:

$$\frac{(x-ci)(x-di)}{(x-ai)(x-bi)} F^+(x) = F^-(x) + \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} \frac{(x-ci)(x-di)}{(x-ai)(x-bi)} H_1(x) - \frac{(x-ci)(x-di)}{(x-ai)(x-bi)} H_2(x) + H_3(x)$$

$$\text{haciendo: } F_1^+(x) = \frac{(x-ci)(x-di)}{(x-ai)(x-bi)} F^+(x), \quad F_1^-(x) = F^-(x) \text{ y}$$

$$H_{25}(x) \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} \frac{(x-ci)(x-di)}{(x-ai)(x-bi)} H_1(x) - \frac{(x-ci)(x-di)}{(x-ai)(x-bi)} H_2(x) + H_3(x), \text{ queda el problema}$$

$$\text{de salto } F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_{25}(x)$$

Luego se pueden enunciar teoremas similares a los **Teoremas 7** y **Corolario del**

Teorema 7 con h_{25} y H_{25} en lugar de h_6 y H_6 .

Caso 3.4.4.1-b.6)

$\sqrt{-F^2 - 4(C-A)(Aa_0 + F)} < F < \sqrt{-F_1^2 - 4(C_1 - A_1)(A_1a_0 + F_1)} < F_1$, $sgF \neq sg(C-A)$ ($sgF_1 \neq sg(C_1 - A_1)$) , teniendo raíces imaginarias: dos ceros y dos polos en el semiplano superior, de

donde el problema de Riemann queda de la siguiente manera:

$$F^+(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} F^-(x) + \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} H_1(x) - H_2(x) +$$

$$\frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} H_3(x),$$

siendo $\Delta_1(x) = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{a_0-x^2}} P_1(x) & e^{-\sqrt{a_0-x^2}} P_3(x) \\ \overline{P_1}(x) & \overline{P_3}(x) \end{vmatrix}$, $P_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\alpha_2$,

$$\overline{P_1}(x) = \alpha_0 - \alpha_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\alpha_2, P_3(x) = \gamma_0 + \gamma_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\gamma_2 \text{ y}$$

$$\overline{P_3}(x) = \gamma_0 - \gamma_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\gamma_2; \text{ donde } a > 0, b > 0, c > 0 \text{ y } d > 0.$$

Haciendo en el problema de Riemann correspondiente el cambio: $F_1^+(x) = F^+(x)$,

$$F_1^-(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} F^-(x) \text{ y } H_{26}(x) = \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} H_1(x) - H_2(x) +$$

$$\frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} H_3(x); \text{ queda el problema de salto: } F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_{26}(x)$$

Luego se pueden enunciar teoremas similares a los **Teoremas 7** y **Corolario del**

Teorema 7 con h_{26} y H_{26} en lugar de h_6 y H_6 .

Caso 3.4.4.1-b.7)

Si se cumple que además $Aa_0 + D = 0$ siendo $|(C-A)(Aa_0 + D)| > 0$, el coeficiente

del problema de Riemann queda de la forma: $D(x) = \frac{(C-A)x^2 + ixF}{(C_1 - A_1)x^2 + ixF_1}$, donde

las raíces serían de la forma:

$$x_{1,2} = \frac{-iF \pm \sqrt{-F^2}}{2(C-A)} = \begin{cases} 0 \\ -\frac{iF}{C-A} \end{cases} \quad (x_{1,2} = \frac{-iF_1 \pm \sqrt{-F_1^2}}{2(C_1-A_1)} = \begin{cases} 0 \\ -\frac{iF_1}{C_1-A_1} \end{cases})$$

las cuales son raíces imaginarias y la raíz cero en el caso en el cual se restan los términos del numerador

Caso 3.4.4.1-b.7-a) $sgF \neq sg(C-A)$ ($sgF_1 \neq sg(C_1-A_1)$)

Se cumple que las raíces $x = -\frac{iF}{C-A}$ ($x = -\frac{iF_1}{C_1-A_1}$) son imaginarias en el semiplano superior, por lo que el problema de Riemann queda de la siguiente manera:

$$F^+(x) = \frac{(x-ai)}{(x-bi)} F^-(x) + \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} H_1(x) - H_2(x) + \frac{(x-ai)}{(x-bi)} H_3(x), \text{ donde}$$

$$\Delta_1(x) = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{a_0-x^2}} P_1(x) & e^{-\sqrt{a_0-x^2}} P_3(x) \\ \overline{P_1}(x) & \overline{P_3}(x) \end{vmatrix}, \text{ siendo } P_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\alpha_2,$$

$$\overline{P_1}(x) = \alpha_0 - \alpha_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\alpha_2, \quad P_3(x) = \gamma_0 + \gamma_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\gamma_2 \text{ y}$$

$$\overline{P_3}(x) = \gamma_0 - \gamma_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\gamma_2; \text{ donde } a > 0 \text{ y } b > 0$$

Haciendo en el problema de Riemann correspondiente el cambio: $F_1^+(x) = F^+(x)$,

$$F_1^-(x) = \frac{(x-ai)}{(x-bi)} F^-(x) \text{ y } H_{27}(x) = \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} H_1(x) - H_2(x) + \frac{(x-ai)}{(x-bi)} H_3(x); \text{ queda el}$$

$$\text{problema de salto: } F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_{27}(x)$$

Luego se pueden enunciar teoremas similares a los **Teoremas 7** y **Corolario del**

Teorema 7 con h_{27} y H_{27} en lugar de h_6 y H_6 .

Caso 3.4.4.1-b.7-b) $sgF = sg(C - A)$ ($sgF_1 = sg(C_1 - A_1)$)

Se cumple que las raíces $x = -\frac{iF}{C-A}$ ($x = -\frac{iF_1}{C_1-A_1}$) son imaginarias en el

semiplano inferior, donde el problema de Riemann queda de la siguiente manera:

$$F^+(x) = \frac{(x-ai)}{(x-bi)} F^-(x) + \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} H_1(x) - H_2(x) + \frac{(x-ai)}{(x-bi)} H_3(x), \text{ donde}$$

$$\Delta_1(x) = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{a_0-x^2}} P_1(x) & e^{-\sqrt{a_0-x^2}} P_3(x) \\ \overline{P_1}(x) & \overline{P_3}(x) \end{vmatrix}, \text{ siendo } P_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\alpha_2,$$

$$\overline{P_1}(x) = \alpha_0 - \alpha_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\alpha_2, \quad P_3(x) = \gamma_0 + \gamma_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\gamma_2 \text{ y}$$

$$\overline{P_3}(x) = \gamma_0 - \gamma_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\gamma_2; \text{ donde } a < 0 \text{ y } b < 0$$

Despejando en el problema de Riemann correspondiente se tiene:

$$\frac{(x-bi)}{(x-ai)} F^+(x) = F^-(x) + \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} \frac{(x-bi)}{(x-ai)} H_1(x) - \frac{(x-bi)}{(x-ai)} H_2(x) + H_3(x),$$

$$\text{donde haciendo: } F_1^+(x) = \frac{(x-bi)}{(x-ai)} F^+(x), \quad F_1^-(x) = F^-(x) \text{ y } H_{28}(x) =$$

$$\frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} \frac{(x-bi)}{(x-ai)} H_1(x) - \frac{(x-bi)}{(x-ai)} H_2(x) + H_3(x); \text{ queda el problema de Salto:}$$

$$F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_{28}(x)$$

Luego se pueden enunciar teoremas similares a los **Teoremas 7** y **Corolario del**

Teorema 7 con h_{28} y H_{28} en lugar de h_7 y H_7 .

Los siguientes casos se resuelven de la misma manera:

Caso 3.4.4.1-c)

$$sg(C - A) \neq sg(Aa_0 + D + F), \quad sgF \neq sg(C - A), \quad |4(Aa_0 + D + F)(C - A)| > F^2$$

$$(sg(C_1 - A_1) \neq sg(A_1 a_0 + D_1 + F_1), sg F_1 \neq sg(C_1 - A_1), |4(A_1 a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)| > F_1^2)$$

Teniendo dos ceros y dos polos en el semiplano superior complejo, donde:

$$Re a > 0, Re a = -Re b, Re c > 0, Re c = -Re d \text{ y } Im a = Im b > 0, Im c = Im d > 0.$$

Caso 3.4.4.1-d)

$$sg(C - A) \neq sg(Aa_0 + D + F), sg F \neq sg(C - A), |4(Aa_0 + D + F)(C - A)| < F^2, \sqrt{-F^2 - 4(Aa_0 + D + F)(C - A)} < F$$

$$(sg(C_1 - A_1) \neq sg(A_1 a_0 + D_1 + F_1), sg F_1 \neq sg(C_1 - A_1), |4(A_1 a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)| < F_1^2), \sqrt{-F_1^2 - 4(A_1 a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)} < F_1$$

Teniendo dos ceros y dos polos imaginarios puros en el semiplano superior,

donde $a > 0, b > 0, c > 0 \text{ y } d > 0$.

El problema de Riemann queda de la siguiente manera:

$$F^+(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} F^-(x) + \frac{2\beta_1 \gamma_0 \sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} H_1(x) - H_2(x) +$$

$$\frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} H_3(x), \text{ donde } \Delta_1(x) = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{a_0-x^2}} P_1(x) & e^{-\sqrt{a_0-x^2}} P_3(x) \\ \overline{P_1}(x) & \overline{P_3}(x) \end{vmatrix}, \text{ siendo:}$$

$$P_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \sqrt{a_0 - x^2} - ix\alpha_2, \overline{P_1}(x) = \alpha_0 - \alpha_1 \sqrt{a_0 - x^2} - ix\alpha_2 \text{ y}$$

$$P_3(x) = \gamma_0 + \gamma_1 \sqrt{a_0 - x^2} - ix\gamma_2 \text{ y } \overline{P_3}(x) = \gamma_0 - \gamma_1 \sqrt{a_0 - x^2} - ix\gamma_2$$

Haciendo el siguiente cambio de variable en el problema de Riemann

$$\text{correspondiente: } F_1^+(x) = F^+(x), F_1^-(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} \text{ y } H_{29}(x) =$$

$$\frac{2\beta_1 \gamma_0 \sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} H_1(x) - H_2(x) + \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} H_3(x); \text{ queda el problema de salto:}$$

$$F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_{29}(x)$$

Luego se pueden enunciar teoremas similares a los **Teoremas 7** y **Corolario del Teorema 7** con h_{29} y H_{29} en lugar de h_7 y H_7 .

Caso 3.4.4.1-e)

$$sg(C - A) \neq sg(Aa_0 + D + F), sgF \neq sg(C - A), |4(Aa_0 + D + F)(C - A)| < F^2, \sqrt{-F^2 - 4(Aa_0 + D + F)(C - A)} > F$$

$$(sg(C_1 - A_1) \neq sg(A_1a_0 + D_1 + F_1), sgF_1 \neq sg(C_1 - A_1), |4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)| < F_1^2, \sqrt{-F_1^2 - 4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)} > F_1$$

Teniendo un cero y un polo en el semiplano superior y un cero y un polo en el semiplano inferior imaginarios puros, siendo $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$ y $d < 0$; por lo que el problema de Riemann queda de la siguiente manera:

$$F^+(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} F^-(x) + \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} H_1(x) - H_2(x) +$$

$$\frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} H_3(x), \text{ donde } \Delta_1(x) = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{a_0-x^2}} P_1(x) & e^{-\sqrt{a_0-x^2}} P_3(x) \\ \overline{P_1}(x) & \overline{P_3}(x) \end{vmatrix}, \text{ siendo}$$

$$P_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\alpha_2, \overline{P_1}(x) = \alpha_0 - \alpha_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\alpha_2,$$

$$P_3(x) = \gamma_0 + \gamma_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\gamma_2 \text{ y } \overline{P_3}(x) = \gamma_0 - \gamma_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\gamma_2.$$

Del problema de Riemann correspondiente se tiene:

$$\frac{(x-di)}{(x-bi)} F^+(x) = \frac{(x-ai)}{(x-ci)} F^-(x) + \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} \frac{(x-di)}{(x-bi)} H_1(x) - \frac{(x-di)}{(x-bi)} H_2(x) +$$

$$\frac{(x-ai)}{(x-ci)} H_3(x), \text{ en donde haciendo: } F_1^+(x) = \frac{(x-di)}{(x-bi)} F^+(x), F_1^-(x) = \frac{(x-ai)}{(x-ci)} F^-(x) \text{ y}$$

$$H_{30}(x) = \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} \frac{(x-di)}{(x-bi)} H_1(x) - \frac{(x-di)}{(x-bi)} H_2(x) + \frac{(x-ai)}{(x-ci)} H_3(x); \text{ queda el problema}$$

$$\text{de salto: } F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_{30}(x)$$

Luego se pueden enunciar teoremas similares a los **Teoremas 7** y **Corolario del Teorema 7** con h_{30} y H_{30} en lugar de h_7 y H_7 .

Caso 3.4.4.1-f)

$$sg(C - A) \neq sg(Aa_0 + D + F), sgF = sg(C - A), |4(Aa_0 + D + F)(C - A)| > F^2$$

$$(sg(C_1 - A_1) \neq sg(A_1a_0 + D_1 + F_1), sgF_1 = sg(C_1 - A_1), |4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)| > F_1^2)$$

Teniendo dos ceros complejos y dos polos complejos en el semiplano inferior,

donde $Re a > 0, Re a = -Re b, Re c > 0, Re c = -Re d$ y $Im a = Im b < 0, Im c = Im d < 0$;

por lo que el problema de Riemann queda de la siguiente manera:

$$F^+(x) = \frac{(x - a)(x - b)}{(x - c)(x - d)} F^-(x) + \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0 - x^2}}{\Delta_1(x)} H_1(x) - H_2(x) + \frac{(x - a)(x - b)}{(x - c)(x - d)} H_3(x)$$

$$\text{Donde } \Delta_1(x) = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{a_0 - x^2}} P_1(x) & e^{-\sqrt{a_0 - x^2}} P_3(x) \\ \overline{P_1}(x) & \overline{P_3}(x) \end{vmatrix}; \text{ siendo } P_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1\sqrt{a_0 - x^2} - ix\alpha_2,$$

$$\overline{P_1}(x) = \alpha_0 - \alpha_1\sqrt{a_0 - x^2} - ix\alpha_2, P_3(x) = \gamma_0 + \gamma_1\sqrt{a_0 - x^2} - ix\gamma_2 \text{ y}$$

$$\overline{P_3}(x) = \gamma_0 - \gamma_1\sqrt{a_0 - x^2} - ix\gamma_2.$$

Del problema de Riemann correspondiente a este caso se tiene:

$$\frac{(x - c)(x - d)}{(x - a)(x - b)} F^+(x) = F^-(x) + \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0 - x^2}}{\Delta_1(x)} \frac{(x - c)(x - d)}{(x - a)(x - b)} H_1(x) - \frac{(x - c)(x - d)}{(x - a)(x - b)} H_2(x) + H_3(x)$$

$$\text{Haciendo: } F_1^+(x) = \frac{(x - c)(x - d)}{(x - a)(x - b)} F^+(x), F_1^-(x) = F^-(x) \text{ y } H_{31}(x) =$$

$$\frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0 - x^2}}{\Delta_1(x)} \frac{(x - c)(x - d)}{(x - a)(x - b)} H_1(x) - \frac{(x - c)(x - d)}{(x - a)(x - b)} H_2(x) + H_3(x); \text{ queda el problema de salto:}$$

$$F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_{31}(x)$$

Luego se pueden enunciar teoremas similares a los **Teoremas 7** y **Corolario del Teorema 7** con h_{31} y H_{31} en lugar de h_7 y H_7 .

Los siguientes casos se resuelven de la misma manera:

Caso 3.4.4.1-g)

$$sg(C - A) \neq sg(Aa_0 + D + F), sgF = sg(C - A), |4(Aa_0 + D + F)(C - A)| < F^2, \sqrt{-F^2 - 4(Aa_0 + D + F)(C - A)} > F$$

$$(sg(C_1 - A_1) \neq sg(A_1a_0 + D_1 + F_1), sgF_1 = sg(C_1 - A_1), |4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)| < F_1^2, \sqrt{-F_1^2 - 4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)} > F_1$$

Teniendo raíces imaginarias puras, un cero y un polo en el semiplano superior y

un cero y un polo en el semiplano inferior, ($a > 0, b < 0, a = -b, c > 0$ y $d < 0, c = -d$)

Caso 3.4.4.1-h)

$$sg(C - A) \neq sg(Aa_0 + D + F), sgF = sg(C - A), |4(Aa_0 + D + F)(C - A)| < F^2, \sqrt{-F^2 - 4(Aa_0 + D + F)(C - A)} < F$$

$$(sg(C_1 - A_1) \neq sg(A_1a_0 + D_1 + F_1), sgF_1 = sg(C_1 - A_1), |4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)| < F_1^2, \sqrt{-F_1^2 - 4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)} < F_1$$

Teniendo raíces imaginarias puras, un cero y un polo en el semiplano superior y

un cero y un polo en el semiplano inferior ($a > 0, b < 0, a = -b, c > 0$ y $d < 0, c = -d$)

Caso 3.4.4.1-i)

$$sg(C - A) \neq sg(Aa_0 + D + F), sgF \neq sg(C - A), |4(Aa_0 + D + F)(C - A)| < F^2, \sqrt{-F^2 - 4(Aa_0 + D + F)(C - A)} > F$$

$$(sg(C_1 - A_1) \neq sg(A_1a_0 + D_1 + F_1), sgF_1 \neq sg(C_1 - A_1), |4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)| < F_1^2, \sqrt{-F_1^2 - 4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)} > F_1$$

Teniendo raíces imaginarias puras, un cero y un polo en el semiplano superior y

un cero y un polo en el semiplano inferior ($a > 0, b < 0, a = -b, c > 0$ y $d < 0, c = -d$)

Caso 3.4.4.1-j)

$$sg(C - A) = sg(Aa_0 + D + F), sgF = sg(C - A), \sqrt{-F^2 - 4(Aa_0 + D + F)(C - A)} > F$$

$$(sg(C_1 - A_1) = sg(A_1a_0 + D_1 + F_1), sgF_1 = sg(C_1 - A_1), \sqrt{-F_1^2 - 4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)} > F_1$$

Teniendo raíces imaginarias puras, un cero y un polo en el semiplano superior y un cero y un polo en el semiplano inferior ($a > 0, b < 0, a = -b, c > 0$ y $d < 0, c = -d$)

Caso 3.4.4.1-k)

$$sg(C - A) = sg(Aa_0 + D + F), sgF \neq sg(C - A), \sqrt{-F^2 - 4(Aa_0 + D + F)(C - A)} > F$$

$$(sg(C_1 - A_1) = sg(A_1a_0 + D_1 + F_1), sgF_1 \neq sg(C_1 - A_1), \sqrt{-F_1^2 - 4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)} > F_1)$$

Teniendo raíces imaginarias puras, un cero y un polo en el semiplano superior y un cero y un polo en el semiplano inferior ($a > 0, b < 0, a = -b, c > 0$ y $d < 0, c = -d$)

Caso 3.4.4.1-l)

$$sg(C - A) = sg(Aa_0 + D + F), sgF = sg(C - A), \sqrt{-F^2 - 4(Aa_0 + D + F)(C - A)} < F$$

$$(sg(C_1 - A_1) = sg(A_1a_0 + D_1 + F_1), sgF_1 = sg(C_1 - A_1), \sqrt{-F_1^2 - 4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)} < F_1)$$

Teniendo raíces imaginarias puras, un cero y un polo en el semiplano superior y un cero y un polo en el semiplano inferior ($a > 0, b < 0, a = -b, c > 0$ y $d < 0, c = -d$)

Caso 3.4.4.1-m)

$$sg(C - A) = sg(Aa_0 + D + F), sgF = sg(C - A), \sqrt{-F^2 - 4(Aa_0 + D + F)(C - A)} > F$$

$$(sg(C_1 - A_1) = sg(A_1a_0 + D_1 + F_1), sgF_1 = sg(C_1 - A_1), \sqrt{-F_1^2 - 4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)} > F_1)$$

Teniendo raíces imaginarias puras, un cero y un polo en el semiplano superior y un cero y un polo en el semiplano inferior ($a > 0, b < 0, a = -b, c > 0$ y $d < 0, c = -d$)

Caso 3.4.4.1-n)

$$sg(C - A) = sg(Aa_0 + D + F), sgF \neq sg(C - A), \sqrt{-F^2 - 4(Aa_0 + D + F)(C - A)} > F$$

$$(sg(C_1 - A_1) \neq sg(A_1a_0 + D_1 + F_1), sgF_1 = sg(C_1 - A_1), |4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)| < F_1^2), \sqrt{-F_1^2 - 4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)} > F_1)$$

Teniendo un cero y un polo en el semiplano superior imaginarios puros y un cero y un polo en el semiplano inferior imaginarios puros ($a > 0, b < 0, a = -b, c > 0$ y $d < 0, c = -d$) .

Por lo que el problema de Riemann queda de la siguiente manera:

$$F^+(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} F^-(x) + \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} H_1(x) - H_2(x) +$$

$$\frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} H_3(x),$$

$$\text{donde } \Delta_1(x) = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{a_0-x^2}} P_1(x) & e^{-\sqrt{a_0-x^2}} P_3(x) \\ \overline{P_1}(x) & \overline{P_3}(x) \end{vmatrix}, \text{ siendo } P_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\alpha_2,$$

$$\overline{P_1}(x) = \alpha_0 - \alpha_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\alpha_2, P_3(x) = \gamma_0 + \gamma_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\gamma_2 \text{ y}$$

$$\overline{P_3}(x) = \gamma_0 - \gamma_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\gamma_2; \text{ donde } (a > 0, b < 0, a = -b, c > 0 \text{ y } d < 0, c = -d).$$

Del problema de Riemann se tiene:

$$\frac{(x-di)}{(x-bi)} F^+(x) = \frac{(x-ai)}{(x-ci)} F^-(x) + \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} \frac{(x-di)}{(x-bi)} H_1(x) - \frac{(x-di)}{(x-bi)} H_2(x) + \frac{(x-ai)}{(x-ci)} H_3(x)$$

$$\text{Haciendo: } F_1^+(x) = \frac{(x-di)}{(x-bi)} F^+, F_1^-(x) = \frac{(x-ai)}{(x-ci)} F^- \text{ y } H_{32}(x) =$$

$$\frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} \frac{(x-di)}{(x-bi)} H_1(x) - \frac{(x-di)}{(x-bi)} H_2(x) + \frac{(x-ai)}{(x-ci)} H_3(x), \text{ queda el problema de salto:}$$

$$F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_{32}(x)$$

Luego se pueden enunciar teoremas similares a los **Teoremas 7** y **Corolario del**

Teorema 7 con h_{32} y H_{32} en lugar de h_7 y H_7 .

Caso 3.4.4.1-ñ)

$$sg(C-A) \neq sg(Aa_0 + D + F), sgF \neq sg(C-A), |4(Aa_0 + D + F)(C-A)| > F^2$$

$$(sg(C_1 - A_1) = sg(A_1a_0 + D_1 + F_1), sgF_1 \neq sg(C_1 - A_1), \sqrt{-F_1^2 - 4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)} < F_1$$

Teniendo raíces complejas en el numerador e imaginarias puras en el

denominador, dos ceros y dos polos en el semiplano superior, donde

$$\operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re} a = -\operatorname{Re} b, \operatorname{Im} a = \operatorname{Im} b > 0, c > 0, d > 0.$$

Por lo que el problema de Riemann queda de la siguiente manera:

$$F^+(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-ci)(x-di)} F^-(x) + \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} H_1(x) - H_2(x) + \frac{(x-a)(x-b)}{(x-ci)(x-di)} H_3(x), \text{ donde}$$

$$\Delta_1(x) = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{a_0-x^2}} P_1(x) & e^{-\sqrt{a_0-x^2}} P_3(x) \\ \overline{P_1}(x) & \overline{P_3}(x) \end{vmatrix}; \text{ siendo } P_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\alpha_2,$$

$$\overline{P_1}(x) = \alpha_0 - \alpha_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\alpha_2 \text{ y } P_3(x) = \gamma_0 + \gamma_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\gamma_2$$

$$\overline{P_3}(x) = \gamma_0 - \gamma_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\gamma_2.$$

Haciendo el siguiente cambio de variable en el problema de Riemann:

$$F_1^+(x) = F^+(x), F_1^-(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-ci)(x-di)} F^-(x) \text{ y } H_{33}(x) = \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} H_1(x) -$$

$$H_2(x) + \frac{(x-a)(x-b)}{(x-ci)(x-di)} H_3(x); \text{ queda el problema de salto: } F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_{33}(x)$$

Luego se pueden enunciar teoremas similares a los **Teoremas 7** y **Corolario del**

Teorema 7 con h_{33} y H_{33} en lugar de h_7 y H_7 .

Caso 3.4.4.1-o)

$$\operatorname{sg}(C-A) = \operatorname{sg}(Aa_0 + D + F), \operatorname{sg}F = \operatorname{sg}(C-A), \sqrt{-F^2 - 4(Aa_0 + D + F)(C-A)} < F$$

$$(\operatorname{sg}(C_1 - A_1) \neq \operatorname{sg}(A_1a_0 + D_1 + F_1), \operatorname{sg}F_1 = \operatorname{sg}(C_1 - A_1), |4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)| > F_1^2$$

Teniendo dos ceros en el semiplano inferior imaginarios y dos polos en el

semiplano inferior complejos, donde $a < 0, b < 0$ y $\operatorname{Re} c > 0, \operatorname{Re} c = -\operatorname{Re} d, \operatorname{Im} c = \operatorname{Im} d < 0$;

por lo que el problema de Riemann queda de la siguiente manera:

$$F^+(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-c)(x-d)} F^-(x) + \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} H_1(x) - H_2(x) + \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-c)(x-d)} H_3(x), \text{ donde}$$

$$\Delta_1(x) = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{a_0-x^2}} P_1(x) & e^{-\sqrt{a_0-x^2}} P_3(x) \\ \overline{P}_1(x) & \overline{P}_3(x) \end{vmatrix}, \text{ siendo } P_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\alpha_2,$$

$$\overline{P}_1(x) = \alpha_0 - \alpha_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\alpha_2, P_3(x) = \gamma_0 + \gamma_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\gamma_2 \text{ y}$$

$$\overline{P}_3(x) = \gamma_0 - \gamma_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\gamma_2.$$

Del problema de Riemann correspondiente se tiene que:

$$\frac{(x-c)(x-d)}{(x-ai)(x-bi)} F^+(x) = F^-(x) + \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} \frac{(x-c)(x-d)}{(x-ai)(x-bi)} H_1(x) - \frac{(x-c)(x-d)}{(x-ai)(x-bi)} H_2(x) + H_3(x),$$

donde haciendo:

$$F_1^+(x) = \frac{(x-c)(x-d)}{(x-ai)(x-bi)} F^+(x), F_1^-(x) = F^-(x) \text{ y}$$

$$H_{34}(x) = \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} \frac{(x-c)(x-d)}{(x-ai)(x-bi)} H_1(x) - \frac{(x-c)(x-d)}{(x-ai)(x-bi)} H_2(x) + H_3(x); \text{ queda el}$$

problema de salto: $F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_{34}(x)$

Luego se pueden enunciar teoremas similares a los **Teoremas 7** y **Corolario del**

Teorema 7 con h_{34} y H_{34} en lugar de h_7 y H_7 .

Caso 3.4.4.2: Casos de índice positivos

Caso 3.4.4.2-1: Casos de índice uno

Los siguientes casos se resuelven con la misma técnica:

Caso 3.4.4.2-1-a)

$$sg(C-A) \neq sg(Aa_0 + D + F), sgF \neq sg(C-A), |4(Aa_0 + D + F)(C-A)| > F^2$$

$$(sg(C_1 - A_1) = sg(A_1a_0 + D_1 + F_1), sgF_1 = sg(C_1 - A_1), \sqrt{-F_1^2 - 4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)} > F_1$$

Teniendo dos ceros complejos y un polo imaginario en el semiplano superior y un

polo imaginario en el semiplano inferior, donde $\operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re} a = -\operatorname{Re} b, \operatorname{Im} a = \operatorname{Im} b > 0,$
 $c > 0, d < 0.$

Caso 3.4.4.2-1-b)

$$\operatorname{sg}(C - A) \neq \operatorname{sg}(Aa_0 + D + F), \operatorname{sg}F \neq \operatorname{sg}(C - A), |4(Aa_0 + D + F)(C - A)| > F^2$$

$$(\operatorname{sg}(C_1 - A_1) = \operatorname{sg}(A_1a_0 + D_1 + F_1), \operatorname{sg}F_1 \neq \operatorname{sg}(C_1 - A_1), \sqrt{-F_1^2 - 4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)} > F_1$$

Teniendo dos ceros complejos y un polo imaginario en el semiplano superior y un

polo imaginario en el semiplano inferior, donde $\operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re} a = -\operatorname{Re} b, \operatorname{Im} a = \operatorname{Im} b > 0,$
 $c > 0, d < 0.$

Por lo que el problema de Riemann queda de la siguiente manera:

$$F^+(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-ci)(x-di)} F^-(x) + \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} H_1(x) - H_2(x) + \frac{(x-a)(x-b)}{(x-ci)(x-di)} H_3(x), \text{ donde}$$

$$\Delta_1(x) = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{a_0-x^2}} P_1(x) & e^{-\sqrt{a_0-x^2}} P_3(x) \\ \overline{P_1}(x) & \overline{P_3}(x) \end{vmatrix}, \text{ siendo } P_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\alpha_2,$$

$$\overline{P_1}(x) = \alpha_0 - \alpha_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\alpha_2, P_3(x) = \gamma_0 + \gamma_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\gamma_2 \text{ y}$$

$$\overline{P_3}(x) = \gamma_0 - \gamma_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\gamma_2$$

Del problema de Riemann correspondiente se tiene:

$$\frac{(x-di)}{(x-b)} F^+(x) = \frac{(x-a)}{(x-ci)} F^-(x) + \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} \frac{(x-di)}{(x-b)} H_1(x) - \frac{(x-di)}{(x-b)} H_2(x) + \frac{(x-a)}{(x-ci)} H_3(x),$$

llegando al problema de salto:

$$\frac{(x-di)}{(x-b)} F^+(x) = \frac{(x-a)}{(x-ci)} F^-(x) + H_{35}(x) \tag{3.4.15}$$

donde:

$$H_{35}(x) = \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} \frac{(x-di)}{(x-b)} H_1(x) - \frac{(x-di)}{(x-b)} H_2(x) + \frac{(x-a)}{(x-ci)} H_3(x) \text{ que es de } L_{2x}(\mathbb{R})$$

si $a_0 < 0$ y $V(x, y)$, $xV(x, 0^+)$, y $\frac{dV(x, 0^+)}{dy}$ pertenecen a $L_{2x}(\mathfrak{R})$. Luego aplicando el

operador proyección a $H_{35}(x)$ queda

$$H_{35}(x) = \psi^+(x) - \psi^-(x) \tag{3.4.16}$$

donde: $\psi^\pm(x) = P^\pm(H_{35}(x))$, o sea; $\psi^\pm(x) = (VoT^\pm oV^{-1})H_{35}(x)$, de donde

$$\psi^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_{35}(t)e^{ixt} dt \text{ y } \psi^-(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 h_{35}(t)e^{ixt} dt, \text{ siendo}$$

$$h_{34}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_{35}(t)e^{ixt} dt,$$

luego sustituyendo (3.4.16) en (3.4.15) queda:

$$\frac{(x-di)}{(x-b)} F^+(x) - \psi^+(x) = \frac{(x-a)}{(x-ci)} F^-(x) - \psi^-(x), \text{ donde aplicando el teorema de}$$

prolongación Analítica y el Teorema Generalizado de Liouville se tiene:

$$\frac{(x-di)}{(x-b)} F^+(x) - \psi^+(x) = \frac{(x-a)}{(x-ci)} F^-(x) - \psi^-(x) = \frac{c_1}{x-b}, \text{ donde } c_1 \text{ es una constante}$$

arbitraria. Luego $\frac{(x-di)}{(x-b)} F^+(x) - \psi^+(x) = \frac{c_1}{x-b}$

$$F^+(x) = \frac{(x-b)}{(x-di)} \psi^+(x) + \frac{c_1}{x-di} \tag{3.4.17}$$

$$\text{y } F^-(x) = \frac{(x-ci)}{(x-a)} \psi^-(x) = \frac{c_1}{(x-a)(x-b)}.$$

Al tener $F^+(x)$ dado por la expresión **(3.4.17)** entonces $U(x, y)$ queda determinado, siendo

$$F^+(x) = \frac{(x-b)}{(x-di)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_{35}(t) e^{itx} dt + \frac{c_1}{x-di} \quad (3.4.18)$$

y se puede enunciar el siguiente teorema:

Teorema 8: Si $a_0 < 0$ y $V(x, y)$, $xV(x, 0^+)$, y $\frac{dV(x, 0^+)}{dy}$ pertenecen a $L_{2x}(\mathbb{R})$,

entonces el problema de contorno para el caso **3.4.4.2-1-a)** y **3.4.4.2-1-b)** tiene solución única que depende de una constante arbitraria c_1 en la clase **(3.1.6)** y viene dada por las expresiones **(3.2.4)** y **(3.4.18)**. **(Demostración similar al Teorema 6 del caso parabólico)**

Si la ecuación del problema original es homogénea, es decir si $V(x, y) \equiv 0$ se puede enunciar el siguiente teorema: **Corolario del Teorema 8:** Si $a_0 < 0$,

entonces el problema de contorno para los casos **3.4.4.2-1-a)** y **3.4.4.2-1-b)** tiene solución única en la clase **(3.1.6)** dada por $u(x, y) = V^{-1}[U(x, y)]$.

Los siguientes casos se resuelven con la misma técnica:

Caso 3.4.4.2-1-c)

$$sg(C - A) = sg(Aa_0 + D + F), sgF \neq sg(C - A), \sqrt{-F^2 - 4(Aa_0 + D + F)(C - A)} > F$$

$$(sg(C_1 - A_1) \neq sg(A_1a_0 + D_1 + F_1), sgF_1 = sg(C_1 - A_1), |4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)| > F_1^2)$$

Teniendo un cero imaginario puro en el semiplano superior y un cero imaginario puro y dos polos complejos en el semiplano inferior, donde $a > 0, b < 0$ y

$$Re c > 0, Re c = -Re d, Im c = Im d < 0$$

Caso 3.4.4.2-1-d)

$$sg(C - A) = sg(Aa_0 + D + F), sgF = sg(C - A), \sqrt{-F^2 - 4(Aa_0 + D + F)(C - A)} > F$$

$$(sg(C_1 - A_1) \neq sg(A_1a_0 + D_1 + F_1), sgF_1 = sg(C_1 - A_1), |4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)| > F_1^2)$$

Teniendo un cero imaginario puro en el semiplano superior y un cero imaginario

puro y dos polos complejos en el semiplano inferior, donde $a > 0, b < 0$ y

$$Re c > 0, Re c = -Re d, Im c = Im d < 0.$$

Por lo que el problema de Riemann queda de la siguiente manera:

$$F^+(x) = \frac{(x - ai)(x - bi)}{(x - c)(x - d)} F^-(x) + \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0 - x^2}}{\Delta_1(x)} H_1(x) - H_2(x) + \frac{(x - ai)(x - bi)}{(x - c)(x - d)} H_3(x)$$

$$\text{donde } \Delta_1(x) = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{a_0 - x^2}} P_1(x) & e^{-\sqrt{a_0 - x^2}} P_3(x) \\ \overline{P_1}(x) & \overline{P_3}(x) \end{vmatrix}, \text{ siendo } P_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1\sqrt{a_0 - x^2} - ix\alpha_2,$$

$$\overline{P_1}(x) = \alpha_0 - \alpha_1\sqrt{a_0 - x^2} - ix\alpha_2, P_3(x) = \gamma_0 + \gamma_1\sqrt{a_0 - x^2} - ix\gamma_2 \text{ y}$$

$$\overline{P_3}(x) = \gamma_0 - \gamma_1\sqrt{a_0 - x^2} - ix\gamma_2.$$

Del problema de Riemann correspondiente se tiene:

$$\frac{(x-c)(x-d)}{(x-ai)(x-bi)} F^+(x) = F^-(x) + \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0 - x^2}}{\Delta_1(x)} \frac{(x-c)(x-d)}{(x-ai)(x-bi)} H_1(x) - \frac{(x-c)(x-d)}{(x-ai)(x-bi)} H_2(x) + H_3(x),$$

$$\text{llegando al problema de salto: } \frac{(x-c)(x-d)}{(x-ai)(x-bi)} F^+(x) = F^-(x) + H_{36}(x), \text{ donde:}$$

$$H_{36}(x) = \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0 - x^2}}{\Delta_1(x)} \frac{(x-c)(x-d)}{(x-ai)(x-bi)} H_1(x) - \frac{(x-c)(x-d)}{(x-ai)(x-bi)} H_2(x) + H_3(x),$$

utilizando una teoría similar al caso anterior se obtiene:

$$\frac{(x-c)(x-d)}{(x-ai)(x-bi)} F^+(x) - \psi^+(x) = F^-(x) - \psi^-(x) = \frac{c_1}{(x-ai)} \text{ de donde:}$$

$$F^+(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-c)(x-d)} \psi^+(x) + \frac{(x-bi)}{(x-c)(x-d)} c_1$$

$$\text{siendo: } F^+(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-c)(x-d)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_{36}(t) e^{ixt} dt + \frac{(x-bi)}{(x-c)(x-d)} c_1$$

Luego se pueden enunciar teoremas similares a los **Teoremas 8** y **Corolario del**

Teorema 8 con h_{36} y H_{36} en lugar de h_{35} y H_{35} .

Los siguientes casos se resuelven de la misma manera:

Caso 3.4.4.2-1-e)

$$sg(C-A) \neq sg(Aa_0 + D + F), sgF \neq sg(C-A), |4(Aa_0 + D + F)(C-A)| < F^2, \sqrt{-F^2 - 4(Aa_0 + D + F)(C-A)} < F$$

$$\cdot (sg(C_1 - A_1) \neq sg(A_1a_0 + D_1 + F_1), sgF_1 \neq sg(C_1 - A_1), |4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)| < F_1^2, \sqrt{-F_1^2 - 4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)} > F_1 \cdot$$

Teniendo dos ceros y un polo imaginarios puros en el semiplano superior y un

polo en el semiplano inferior imaginario puro, $a > 0, b > 0$ y $c > 0, d < 0$.

Caso 3.4.4.2-1-f)

$$\sqrt{-F^2 - 4(C-A)(Aa_0 + F)} < F(\sqrt{-F_1^2 - 4(C_1 - A_1)(A_1a_0 + F_1)} > F_1), sgF \neq sg(C-A)(sgF_1 = sg(C_1 - A_1)) \cdot$$

Teniendo raíces imaginarias: dos ceros y un polo en el semiplano superior y un polo

en el semiplano inferior, $a > 0, b > 0$ y $c > 0, d < 0$

Caso 3.4.4.2-1-g)

$$\sqrt{-F^2 - 4(C-A)(Aa_0 + F)} < F(\sqrt{-F_1^2 - 4(C_1 - A_1)(A_1a_0 + F_1)} > F_1), sgF \neq sg(C-A)(sgF_1 \neq sg(C_1 - A_1)) \cdot$$

Teniendo raíces imaginarias: dos ceros y un polo en el semiplano superior y un polo

en el semiplano inferior, $a > 0, b > 0$ y $c > 0, d < 0$

Caso 3.4.4.2-1-h)

$$\sqrt{-F^2 - 4(C-A)(Aa_0 + F)} < F(\sqrt{-F_1^2 - 4(C_1 - A_1)(A_1a_0 + F_1)} > F_1), \text{sg}F = \text{sg}(C-A)(\text{sg}F_1 = \text{sg}(C_1 - A_1)) \cdot$$

Teniendo raíces imaginarias: dos ceros y un polo en el semiplano superior y un polo en el semiplano inferior, $a > 0, b > 0$ y $c > 0, d < 0$.

Por lo que el problema de Riemann queda de la siguiente manera:

$$F^+(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} F^-(x) + \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} H_1(x) - H_2(x) + \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} H_3(x), \text{ donde}$$

$$\Delta_1(x) = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{a_0-x^2}} P_1(x) & e^{-\sqrt{a_0-x^2}} P_3(x) \\ \overline{P_1}(x) & \overline{P_3}(x) \end{vmatrix}; \text{ siendo } P_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\alpha_2,$$

$$\overline{P_1}(x) = \alpha_0 - \alpha_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\alpha_2, P_3(x) = \gamma_0 + \gamma_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\gamma_2 \text{ y}$$

$$\overline{P_3}(x) = \gamma_0 - \gamma_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\gamma_2.$$

Del problema de Riemann correspondiente a este caso se llega al problema de

$$\text{salto: } F^+(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} F^-(x) + H_{37}(x); \text{ siendo: } H_{37} = (x) \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} H_1(x) -$$

$$H_2(x) + \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} H_3(x). \text{ Utilizando una teoría similar al caso anterior se obtiene:}$$

$$F^+(x) - \psi^+(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} F^-(x) - \psi^-(x) = \frac{c_1}{(x-di)}, \text{ de donde:}$$

$$F^+(x) = \psi^+(x) + \frac{c_1}{(x-di)} \text{ y } F^-(x) = \frac{(x-ci)(x-di)}{(x-ai)(x-bi)} \psi^-(x) + \frac{(x-ci)}{(x-ai)(x-bi)} c_1, \text{ siendo}$$

$$F^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_{37}(t) e^{ixt} dt + \frac{c_1}{(x-di)}.$$

Luego se pueden enunciar teoremas similares a los **Teoremas 8** y **Corolario del**

Teorema 8 con h_{37} y H_{37} en lugar de h_{35} y H_{35} .

Los siguientes casos se resuelven con la misma técnica:

Caso 3.4.4.2-1-i)

$$sg(C - A) \neq sg(Aa_0 + D + F), sgF = sg(C - A), |4(Aa_0 + D + F)(C - A)| < F^2, \sqrt{-F^2 - 4(Aa_0 + D + F)(C - A)} > F$$

$$(sg(C_1 - A_1) = sg(A_1a_0 + D_1 + F_1), sgF_1 = sg(C_1 - A_1), \sqrt{-F_1^2 - 4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)} < F_1)$$

Teniendo un cero imaginario puro en el semiplano superior y un cero y dos polos imaginarios puros en el semiplano inferior.

Caso 3.4.4.2-1-j)

$$sg(C - A) = sg(Aa_0 + D + F), sgF = sg(C - A), \sqrt{-F^2 - 4(Aa_0 + D + F)(C - A)} > F$$

$$(sg(C_1 - A_1) \neq sg(A_1a_0 + D_1 + F_1), sgF_1 = sg(C_1 - A_1), |4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)| < F_1^2, \sqrt{-F_1^2 - 4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)} < F_1)$$

Teniendo un cero imaginario puro en el semiplano superior y un cero y dos polos imaginarios puros en el semiplano inferior.

Caso 3.4.4.2-1-k)

$$\sqrt{-F^2 - 4(C - A)(Aa_0 + F)} > F(\sqrt{-F_1^2 - 4(C_1 - A_1)(A_1a_0 + F_1)} < F_1), sgF = sg(C - A)(sgF_1 = sg(C_1 - A_1))$$

Teniendo raíces imaginarias: un cero en el semiplano superior y un cero dos polos en el semiplano inferior.

Caso 3.4.4.2-1-l)

$$\sqrt{-F^2 - 4(C - A)(Aa_0 + F)} > F(\sqrt{-F_1^2 - 4(C_1 - A_1)(A_1a_0 + F_1)} < F_1), sgF \neq sg(C - A)(sgF_1 = sg(C_1 - A_1))$$

Teniendo raíces imaginarias: un cero en el semiplano superior y un cero dos polos en el semiplano inferior.

Por lo que el problema de Riemann queda de la siguiente manera:

$$F^+(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} F^-(x) + \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} H_1(x) - H_2(x) +$$

$$\frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} H_3(x), \quad \text{donde} \quad \Delta_1(x) = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{a_0-x^2}} P_1(x) & e^{-\sqrt{a_0-x^2}} P_3(x) \\ \overline{P_1}(x) & \overline{P_3}(x) \end{vmatrix}, \quad \text{siendo}$$

$$P_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\alpha_2,$$

$$\overline{P_1}(x) = \alpha_0 - \alpha_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\alpha_2, P_3(x) = \gamma_0 + \gamma_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\gamma_2 \text{ y}$$

$$\overline{P_3}(x) = \gamma_0 - \gamma_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\gamma_2; \text{ donde } a > 0, b < 0, c < 0 \text{ y } d < 0$$

Del problema de Riemann correspondiente a este caso se tiene:

$$\frac{(x-ci)(x-di)}{(x-ai)(x-bi)} F^+(x) = F^-(x) + \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} \frac{(x-ci)(x-di)}{(x-ai)(x-bi)} H_1(x) - \frac{(x-ci)(x-di)}{(x-ai)(x-bi)} H_2(x) + H_3(x),$$

se llega al problema de salto: $\frac{(x-ci)(x-di)}{(x-bi)(x-ai)} F^+(x) = F^-(x) + H_{38}(x)$; donde

$$H_{38}(x) = \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} \frac{(x-ci)(x-di)}{(x-ai)(x-bi)} H_1(x) - \frac{(x-ci)(x-di)}{(x-ai)(x-bi)} H_2(x) + H_3(x) \text{ y}$$

$$F^+(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} \psi^+(x) + \frac{(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} c_1.$$

Al tener $F^+(x)$ dado por la expresión:

$$F^+(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_{38}(t) e^{ixt} dt + \frac{(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} c_1$$

entonces $U(x, y)$ queda determinado.

Luego se pueden enunciar teoremas similares a los **Teoremas 8** y **Corolario del**

Teorema 8 con h_{38} y H_{38} en lugar de h_{35} y H_{35} .

Los siguientes casos se resuelven por la misma técnica:

Caso 3.4.4.2-2: Casos de índice dos

Caso 3.4.4.2-2-a)

$$sg(C - A) \neq sg(Aa_0 + D + F), sgF \neq sg(C - A), |4(Aa_0 + D + F)(C - A)| > F^2$$

$$\cdot (sg(C_1 - A_1) \neq sg(A_1a_0 + D_1 + F_1), sgF_1 = sg(C_1 - A_1), |4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)| > F_1^2) .$$

Teniendo dos ceros complejos en el semiplano superior y dos polos complejos en el semiplano inferior. $Re a > 0, Re a = -Re b, Im a = Im b > 0$ y

$$Re c > 0, Re c = -Re d, Im c = Im d < 0$$

Caso 3.4.4.2-2-b)

$$sg(C - A) \neq sg(Aa_0 + D + F), sgF \neq sg(C - A), |4(Aa_0 + D + F)(C - A)| > F^2$$

$$(sg(C_1 - A_1) = sg(A_1a_0 + D_1 + F_1), sgF_1 = sg(C_1 - A_1), \sqrt{-F_1^2 - 4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)} < F_1$$

Teniendo dos ceros complejos en el semiplano superior y dos polos imaginarios puros en el semiplano inferior. $Re a > 0, Re a = -Re b, Im a = Im b > 0$ y $c < 0, d > 0$.

Caso 3.4.4.2-2-c)

$$sg(C - A) \neq sg(Aa_0 + D + F), sgF \neq sg(C - A), |4(Aa_0 + D + F)(C - A)| < F^2, \sqrt{-F^2 - 4(Aa_0 + D + F)(C - A)} < F$$

$$(sg(C_1 - A_1) \neq sg(A_1a_0 + D_1 + F_1), sgF_1 = sg(C_1 - A_1), |4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)| < F_1^2), \sqrt{-F_1^2 - 4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)} < F_1$$

Teniendo dos ceros en el semiplano superior imaginarios puros y dos polos en el semiplano inferior imaginarios puros. $a > 0, b > 0, c < 0$ y $d > 0$

Caso 3.4.4.2-2-d)

$$sg(C - A) = sg(Aa_0 + D + F), sgF \neq sg(C - A), \sqrt{-F^2 - 4(Aa_0 + D + F)(C - A)} < F$$

$$(sg(C_1 - A_1) \neq sg(A_1a_0 + D_1 + F_1), sgF_1 = sg(C_1 - A_1), |4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)| < F_1^2), \sqrt{-F_1^2 - 4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)} < F_1$$

Teniendo dos ceros en el semiplano superior imaginarios puros y dos polos en el semiplano inferior imaginarios puros. $a > 0, b > 0, c < 0$ y $d > 0$.

El problema de Riemann para estos casos quedaría de la siguiente manera:

$$F^+(x) = \frac{(x-a)^2}{(x-b)^2} F^-(x) + \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} H_1(x) - H_2(x) + \frac{(x-a)^2}{(x-b)^2} H_3(x), \text{ donde}$$

$$\Delta_1(x) = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{a_0-x^2}} P_1(x) & e^{-\sqrt{a_0-x^2}} P_3(x) \\ \overline{P_1}(x) & \overline{P_3}(x) \end{vmatrix}, \text{ siendo: } P_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\alpha_2,$$

$$\overline{P_1}(x) = \alpha_0 - \alpha_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\alpha_2, P_3(x) = \gamma_0 + \gamma_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\gamma_2 \text{ y}$$

$$\overline{P_3}(x) = \gamma_0 - \gamma_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\gamma_2.$$

Donde despejando en el problema de Riemann correspondiente a este caso queda:

$$\frac{(x-b)^2}{(x-a)^2} F^+(x) = F^-(x) + \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} \frac{(x-b)^2}{(x-a)^2} H_1(x) - \frac{(x-b)^2}{(x-a)^2} H_2(x) + H_3(x),$$

$$\text{siendo } H_{39}(x) = \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} \frac{(x-b)^2}{(x-a)^2} H_1(x) - \frac{(x-b)^2}{(x-a)^2} H_2(x) + H_3(x). \text{ Tomando la misma}$$

idea de demostración de los casos de índice uno pero ahora el orden del polo es dos, se obtiene:

$$\frac{(x-b)^2}{(x-a)^2} F^+(x) - \psi^+(x) = F^-(x) - \psi^-(x), \text{ aplicando el teorema de prolongación}$$

analítica y el teorema generalizado de Liouville se tiene que:

$$\frac{(x-b)^2}{(x-a)^2} F^+(x) - \psi^+(x) = F^-(x) - \psi^-(x) = \frac{c_1}{x-a} + \frac{c_2 x}{(x-a)^2}, \quad \text{donde } c_1 \text{ y } c_2 \text{ son}$$

constantes arbitrarias. Luego

$$F^+(x) = \frac{(x-a)^2}{(x-b)^2} \psi^+(x) + \frac{c_1}{x-b} + \frac{c_2 x}{(x-b)^2} \quad (3.4.19)$$

Al tener $F^+(x)$ dado por la expresión (3.4.19) entonces $U(x, y)$ queda determinado por las expresiones (3.2.4) y (3.4.19) siendo:

$$F^+(x) = \frac{(x-a)^2}{(x-b)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_{39}(t) e^{ixt} dt + \frac{c_1}{x-b} + \frac{c_2 x}{(x-b)^2} \quad (3.4.20)$$

Por lo tanto se puede enunciar el siguiente teorema con enunciado y demostración similar al **Teorema 8** y **Corolario del Teorema 8**:

Teorema 9: Si $a_0 < 0$ y $V(x, y)$, $xV(x, 0^+)$, y $\frac{dV(x, 0^+)}{dy}$ pertenecen a $L_{2x}(\mathbb{R})$,

entonces el problema de contorno para el caso de índice dos tiene solución única que depende de dos constantes arbitrarias c_1 y c_2 en la clase (3.1.6) y viene dada por las expresiones (3.2.4) y (3.4.20).

Corolario del Teorema 9: Si $a_0 < 0$, entonces el problema de contorno para los casos de índices dos tiene solución única que depende de dos constante arbitraria c_1 y c_2 en la clase (3.1.6) y viene dada por $u(x, y) = V^{-1}[U(x, y)]$, donde $U(x, y)$ se define por las expresiones (3.2.4) y (3.4.20).

Caso 3.4.4.3: Casos de índice negativos

Caso 3.4.4.3-1: Casos de índice menos uno

Estos casos se resuelven de la misma manera:

Caso 3.4.4.3-1-a)

$$sg(C - A) \neq sg(Aa_0 + D + F), sgF = sg(C - A), |4(Aa_0 + D + F)(C - A)| < F^2, \sqrt{-F^2 - 4(Aa_0 + D + F)(C - A)} < F$$

$$(sg(C_1 - A_1) \neq sg(A_1a_0 + D_1 + F_1), sgF_1 \neq sg(C_1 - A_1), |4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)| < F_1^2), \sqrt{-F_1^2 - 4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)} > F_1$$

Teniendo un polo imaginario puro en el semiplano superior, dos ceros y un polo

imaginarios puros en el semiplano inferior. $a < 0, b < 0, c > 0$ y $d < 0$

Caso 3.4.4.3-1-b)

$$sg(C - A) \neq sg(Aa_0 + D + F), sgF = sg(C - A), |4(Aa_0 + D + F)(C - A)| > F^2$$

$$(sg(C_1 - A_1) \neq sg(A_1a_0 + D_1 + F_1), sgF_1 \neq sg(C_1 - A_1), |4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)| < F_1^2), \sqrt{-F_1^2 - 4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)} > F_1$$

Teniendo un polo imaginario en el semiplano superior y dos ceros complejos y un

polo imaginario en el semiplano inferior. $Re a > 0, Re a = -Re b, Im a = Im b < 0$

$$c > 0, d < 0$$

Caso 3.4.4.3-1-c)

$$\sqrt{-F^2 - 4(C - A)(Aa_0 + F)} < F(\sqrt{-F_1^2 - 4(C_1 - A_1)(A_1a_0 + F_1)} > F_1), sgF = sg(C - A)(sgF_1 \neq sg(C_1 - A_1)),$$

Teniendo raíces imaginarias un polo en el semiplano superior y dos ceros y un

polo en el semiplano inferior, $a < 0, b < 0, c > 0$ y $d < 0$.

En estos casos el problema de Riemann queda de la siguiente manera:

$$F^+(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)} F^-(x) + \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} H_1(x) - H_2(x) + \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)} H_3(x), \text{ donde}$$

$$\Delta_1(x) = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{a_0-x^2}} P_1(x) & e^{-\sqrt{a_0-x^2}} P_3(x) \\ \overline{P}_1(x) & \overline{P}_3(x) \end{vmatrix}; \text{ siendo } P_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\alpha_2,$$

$$\overline{P}_1(x) = \alpha_0 - \alpha_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\alpha_2, \quad P_3(x) = \gamma_0 + \gamma_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\gamma_2 \text{ y}$$

$$\overline{P}_3(x) = \gamma_0 - \gamma_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\gamma_2.$$

Del problema de Riemann correspondiente para estos casos se tiene que:

$$\frac{(x-d)}{(x-b)} F^+(x) = \frac{(x-a)}{(x-c)} F^-(x) + \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} \frac{(x-d)}{(x-b)} H_1(x) - H_2(x) + \frac{(x-a)}{(x-c)} H_3(x),$$

haciendo:

$$F_1^+(x) = \frac{(x-d)}{(x-b)} F^+(x), \quad F_1^-(x) = \frac{(x-a)}{(x-c)} F^-(x) \text{ y } H_{40}(x) = \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} \frac{(x-d)}{(x-b)} H_1(x) -$$

$$H_2(x) + \frac{(x-a)}{(x-c)} H_3(x); \text{ queda el problema de salto:}$$

$$F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_{40}(x) \tag{3.4.21}$$

De donde se puede enunciar entonces el siguiente teorema:

Teorema 10: Si $a_0 < 0$ y $V(x, y)$, $xV(x, 0^+)$, y $\frac{dV(x, 0^+)}{dy}$ pertenecen a $L_{2x}(\mathbb{R})$,

entonces el problema de contorno para estos casos tiene solución única en la

clase **(3.1.6)** dada por $u(x, y) = V^{-1}[U(x, y)]$. Donde $U(x, y)$ está dada por las

fórmulas **(3.2.4)** y

$$F^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(x-b)}{(x-d)} \int_0^{+\infty} h_{40}(t) e^{ixt} dt \tag{3.4.22}$$

siendo $h_{40}(x) = V^{-1}[H_{40}(x)]$; si se cumple la condición adicional:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_{40}(\tau)}{\tau - a} d\tau = 0 \quad (3.4.23)$$

La primera parte de la demostración es evidente por las técnicas de trabajo mostradas anteriormente, luego, sólo se demostrará la necesidad de la expresión (3.4.23). En efecto, como la solución del problema de Riemann se expresa por (3.4.22) y se tiene que:

$$F^-(x) = -\frac{(x-c)}{(x-a)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 h_{40}(t)e^{ixt} dt, \text{ tiene un polo de orden uno en } x = a, \text{ por lo}$$

tanto, se requiere, para que el problema de salto (3.4.21) tenga solución única,

que $\int_{-\infty}^0 h_{40}(t)e^{ixt} dt$ tenga un cero de igual orden en dicho punto. Como por la relación

entre las integrales de tipo Cauchy y de Fourier se tiene:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_{40}(\tau)}{\tau - a} d\tau = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_{40}(t)e^{izt} dt, \text{ si } \text{Im } z < 0, \text{ entonces, desarrollando la}$$

primera de las integrales anteriores en serie de potencias de $(z - a)$ e igualando a

cero el coeficiente del término de grado cero del desarrollo, se obtiene (3.4.23)

con lo cual se elimina el polo de $F^-(x)$.

En el caso homogéneo queda: **Corolario del Teorema 10:** Si $a_0 < 0$ entonces el problema de contorno para estos casos tiene solución única en la clase (3.1.6)

dada por $u(x, y) = V^{-1}[U(x, y)]$.

Los siguientes casos se resuelven por las mismas técnicas:

Caso 3.4.4.3-1-d)

$$sg(C - A) \neq sg(Aa_0 + D + F), sgF = sg(C - A), |4(Aa_0 + D + F)(C - A)| < F^2, \sqrt{-F^2 - 4(Aa_0 + D + F)(C - A)} > F$$

$$(sg(C_1 - A_1) \neq sg(A_1a_0 + D_1 + F_1), sgF_1 \neq sg(C_1 - A_1), |4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)| > F_1^2)$$

Teniendo un cero imaginario puro y dos polos complejos en el semiplano superior

y un cero en el semiplano inferior imaginario puro. $a > 0, b < 0$ y

$$Re c > 0, Re c = -Re d, Im c = Im d > 0$$

Caso 3.4.4.3-1-e)

$$sg(C - A) \neq sg(Aa_0 + D + F), sgF \neq sg(C - A), |4(Aa_0 + D + F)(C - A)| < F^2, \sqrt{-F^2 - 4(Aa_0 + D + F)(C - A)} > F$$

$$(sg(C_1 - A_1) \neq sg(A_1a_0 + D_1 + F_1), sgF_1 \neq sg(C_1 - A_1), |4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)| < F_1^2, \sqrt{-F_1^2 - 4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)} < F_1$$

Teniendo un cero y dos polos imaginarios puros en el semiplano superior y y cero

imaginario puro en el semiplano inferior, $a > 0, b < 0, c > 0$ y $d > 0$

Caso 3.4.4.3-1-f)

$$sg(C - A) \neq sg(Aa_0 + D + F), sgF = sg(C - A), |4(Aa_0 + D + F)(C - A)| < F^2, \sqrt{-F^2 - 4(Aa_0 + D + F)(C - A)} > F$$

$$(sg(C_1 - A_1) \neq sg(A_1a_0 + D_1 + F_1), sgF_1 \neq sg(C_1 - A_1), |4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)| < F_1^2, \sqrt{-F_1^2 - 4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)} < F_1$$

Teniendo dos polos imaginarios puros en el semiplano superior y un cero

imaginario puro en el semiplano superior y un cero imaginario puro en el

semiplano inferior, $a > 0, b < 0, c > 0$ y $d > 0$

Caso 3.4.4.3-1-g)

$$\sqrt{-F^2 - 4(C - A)(Aa_0 + F)} > F(\sqrt{-F_1^2 - 4(C_1 - A_1)(A_1a_0 + F_1)} < F_1), sgF = sg(C - A)(sgF_1 \neq sg(C_1 - A_1))$$

Teniendo raíces imaginarias: un cero y dos polos en el semiplano superior y un

cero en el semiplano inferior, $a > 0, b < 0, c > 0$ y $d > 0$

Caso 3.4.4.3-1-h)

$$\sqrt{-F^2 - 4(C-A)(Aa_0 + F)} > F(\sqrt{-F_1^2 - 4(C_1 - A_1)(A_1a_0 + F_1)} < F_1), \text{sg} F \neq \text{sg}(C-A) (\text{sg} F_1 \neq \text{sg}(C_1 - A_1))$$

Teniendo raíces imaginarias: un cero y dos polos en el semiplano superior y un

cero en el semiplano inferior, $a > 0, b < 0, c > 0$ y $d > 0$.

En estos casos el problema de Riemann queda de la siguiente manera:

$$F^+(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)} F^-(x) + \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} H_1(x) - H_2(x) + \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)} H_3(x),$$

donde $\Delta_1(x) = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{a_0-x^2}} P_1(x) & e^{-\sqrt{a_0-x^2}} P_3(x) \\ \overline{P_1}(x) & \overline{P_3}(x) \end{vmatrix}$; siendo $P_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\alpha_2$,

$$\overline{P_1}(x) = \alpha_0 - \alpha_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\alpha_2, \quad P_3(x) = \gamma_0 + \gamma_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\gamma_2 \text{ y}$$

$$\overline{P_3}(x) = \gamma_0 - \gamma_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\gamma_2.$$

De donde despejando del problema de Riemann queda la expresión:

$$\frac{(x-d)}{(x-b)} F^+(x) = \frac{(x-a)}{(x-c)} F^-(x) + \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} \frac{(x-d)}{(x-b)} H_1(x) - H_2(x) + \frac{(x-a)}{(x-c)} H_3(x),$$

haciendo $F_1^+(x) = \frac{(x-d)}{(x-b)} F^+(x)$, $F_1^-(x) = \frac{(x-a)}{(x-c)} F^-(x)$ y

$$H_{41}(x) = \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} \frac{(x-d)}{(x-b)} H_1(x) - H_2(x) + \frac{(x-a)}{(x-c)} H_3(x). \text{ Donde queda el problema}$$

de salto:

$$F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_{41}(x) \tag{3.4.24}$$

Se puede enunciar entonces el siguiente teorema:

Teorema 11: Si $a_0 < 0$ y $V(x, y)$, $xV(x, 0^+)$, y $\frac{dV(x, 0^+)}{dy}$ pertenecen a $L_{2x}(\mathbb{R})$,

entonces el problema de contorno para estos casos tiene solución única en la clase (3.1.6) dada por $u(x, y) = V^{-1}[U(x, y)]$. Donde $U(x, y)$ está dada por las fórmulas (3.2.4) y

$$F^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(x-b)}{(x-d)} \int_0^{+\infty} h_{41}(t) e^{it} dt \quad (3.4.25)$$

siendo $h_{41}(x) = V^{-1}[H_{41}(x)]$; si se cumple la condición adicional

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_{41}(\tau)}{\tau - d} d\tau = 0 \quad (3.4.26)$$

Demostración similar al Teorema 10.

En el caso homogéneo queda: **Corolario del Teorema 11:** Si $a_0 < 0$ entonces el problema de contorno para estos casos tiene solución única en la clase (3.1.6) dada por $u(x, y) = V^{-1}[U(x, y)]$.

Caso 3.4.4.3-2: Casos de índice menos dos

Los siguientes casos se resuelven de la misma manera:

Caso 3.4.4.3-2-a)

$$sg(C - A) \neq sg(Aa_0 + D + F), sgF = sg(C - A), |4(Aa_0 + D + F)(C - A)| > F^2$$

$$(sg(C_1 - A_1) \neq sg(A_1 a_0 + D_1 + F_1), sgF_1 \neq sg(C_1 - A_1), |4(A_1 a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)| > F_1^2)$$

Teniendo dos polos complejos en el semiplano superior y dos ceros complejos

en el semiplano inferior $Re a > 0, Re a = -Re b, Im a = Im b < 0$ y $Re c > 0, Re c = -Re d, Im c = Im d > 0$

Caso 3.4.4.3-2-b)

$$sg(C - A) \neq sg(Aa_0 + D + F), sgF = sg(C - A), |4(Aa_0 + D + F)(C - A)| < F^2, \sqrt{-F^2 - 4(Aa_0 + D + F)(C - A)} < F$$

$$(sg(C_1 - A_1) \neq sg(A_1a_0 + D_1 + F_1), sgF_1 \neq sg(C_1 - A_1), |4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)| > F_1^2)$$

Teniendo dos polos complejos en el semiplano superior y dos ceros imaginarios puros en el semiplano inferior. $a < 0, b < 0$ y $Re\ c > 0, Re\ c = -Re\ d, Im\ c = Im\ d > 0$

Caso 3.4.4.3-2-c)

$$sg(C - A) \neq sg(Aa_0 + D + F), sgF = sg(C - A), |4(Aa_0 + D + F)(C - A)| > F^2$$

$$(sg(C_1 - A_1) \neq sg(A_1a_0 + D_1 + F_1), sgF_1 \neq sg(C_1 - A_1), |4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)| < F_1^2), \sqrt{-F_1^2 - 4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)} < F_1$$

Teniendo dos polos imaginarios en el semiplano superior y dos ceros complejos en el semiplano inferior. $Re\ a > 0, Re\ a = -Re\ b, Im\ a = Im\ b < 0$ y $c > 0, d > 0$

Caso 3.4.4.3-2-d)

$$sg(C - A) \neq sg(Aa_0 + D + F), sgF = sg(C - A), |4(Aa_0 + D + F)(C - A)| < F^2$$

$$(sg(C_1 - A_1) \neq sg(A_1a_0 + D_1 + F_1), sgF_1 \neq sg(C_1 - A_1), |4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)| < F_1^2)$$

Teniendo dos polos en el semiplano superior imaginarios puros y dos ceros en el semiplano inferior imaginarios puros. $a < 0, b < 0$ y $c > 0, d > 0$.

Caso 3.4.4.3-2-e)

$$sg(C - A) \neq sg(Aa_0 + D + F), sgF = sg(C - A), |4(Aa_0 + D + F)(C - A)| < F^2, \sqrt{-F^2 - 4(Aa_0 + D + F)(C - A)} < F$$

$$(sg(C_1 - A_1) \neq sg(A_1a_0 + D_1 + F_1), sgF_1 \neq sg(C_1 - A_1), |4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)| < F_1^2), \sqrt{-F_1^2 - 4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)} < F_1$$

Teniendo dos polos en el semiplano superior imaginarios puros y dos ceros en el semiplano inferior imaginarios puros. $a < 0, b < 0$ y $c > 0, d > 0$.

Caso 3.4.4.3-2-f)

$$sg(C - A) = sg(Aa_0 + D + F), sgF = sg(C - A), \sqrt{-F^2 - 4(Aa_0 + D + F)(C - A)} < F$$

$$(sg(C_1 - A_1) \neq sg(A_1a_0 + D_1 + F_1), sgF_1 \neq sg(C_1 - A_1), |4(A_1a_0 + D_1 + F_1)(C_1 - A_1)| < F_1^2)$$

Teniendo dos ceros en el semiplano inferior imaginarios puros y dos polos en el semiplano superior imaginarios puros. $a < 0, b < 0$ y $c > 0, d > 0$.

En estos casos el problema de Riemann queda de la siguiente manera:

$$F^+(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)} F^-(x) + \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} H_1(x) - H_2(x) + \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)} H_3(x),$$

$$\text{donde } \Delta_1(x) = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{a_0-x^2}} P_1(x) & e^{-\sqrt{a_0-x^2}} P_3(x) \\ \overline{P_1(x)} & \overline{P_3(x)} \end{vmatrix}; \text{ siendo } P_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\alpha_2,$$

$$\overline{P_1(x)} = \alpha_0 - \alpha_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\alpha_2, P_3(x) = \gamma_0 + \gamma_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\gamma_2 \text{ y}$$

$$\overline{P_3(x)} = \gamma_0 - \gamma_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\gamma_2.$$

Donde haciendo el siguiente cambio de variables en el problema de Riemann

$$\text{correspondiente: } F_1^+(x) = F^+(x), F_1^-(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)} F^-(x) \text{ y } H_{42}(x) =$$

$$\frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} H_1(x) - H_2(x) + \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)} H_3(x); \text{ queda un problema de salto de la}$$

$$\text{forma: } F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_{42}(x),$$

pero ahora al obtener la solución del problema se obtiene $F^-(x)$ con polos de

orden uno en $x = a$ y $x = b$. Luego se puede enunciar un teorema similar al

Teorema 11 y Corolario del Teorema 11 con las condiciones:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_{42}(\tau)}{\tau - a} d\tau = 0 \text{ y } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_{42}(\tau)}{\tau - b} d\tau = 0.$$

A5.35: Caso 3.4.4: $\alpha_1 = \beta_0 = \beta_2 = \gamma_0 = \gamma_2 = 0$ (Solamente $B \neq 0$ y $E \neq 0$)

Sea $D(x) = \frac{[B\sqrt{(a_0-x^2)}+ixE\sqrt{(a_0-x^2)}]}{[B_1\sqrt{(a_0-x^2)}+ixE_1\sqrt{(a_0-x^2)}]}$, haciendo $w = \sqrt{a_0 - x^2}$; queda la

ecuación $Bw + ixEw = 0$ que tiene raíz en: $x = -\frac{B}{iE} = -\frac{Bi}{i^2E} = \frac{Bi}{E}$

$$(x = -\frac{B_1}{iE_1} = -\frac{B_1i}{i^2E_1} = \frac{B_1i}{E_1}).$$

Este es un caso de índice cero si $\frac{B}{E} > 0$ y $\frac{B_1}{E_1} > 0$ ó $\frac{B}{E} < 0$ y $\frac{B_1}{E_1} < 0$, un caso de

índice uno si $\frac{B}{E} > 0$ y $\frac{B_1}{E_1} < 0$ y un caso de índice menos uno si $\frac{B}{E} < 0$ y $\frac{B_1}{E_1} > 0$

Caso 3.4.4.1 Caso índice cero

El Problema de Riemann quedaría de la forma:

$$F^+(x) = \frac{(x-ai)}{(x-bi)} F^-(x) - H_2(x) + \frac{(x-ai)}{(x-bi)} H_3(x),$$

donde $\Delta_2(x) = 0$ y $a > 0, b > 0$ si $\frac{B}{E} > 0$ y $\frac{B_1}{E_1} > 0$ y $a < 0, b < 0$ si $\frac{B}{E} < 0$ y $\frac{B_1}{E_1} < 0$ y

tenemos que si:

$$F_1^+(x) = F^+(x), F_1^-(x) = \frac{(x-ai)}{(x-bi)} F^-(x) \text{ y } H_{43}(x) = -H_2(x) + \frac{(x-ai)}{(x-bi)} H_3(x),$$

queda el Problema de Salto: $F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_{43}(x)$. Luego podemos enunciar el

siguiente teorema:

Teorema 12: Si $a_0 < 0$ y $V(x, y)$, $xV(x, 0^+)$, y $\frac{dV(x, 0^+)}{dy}$ pertenecen a $L_{2x}(\mathbb{R})$,

entonces el problema de contorno para este caso tiene solución única en la clase

(3.1.6) dada por $u(x, y) = V^{-1}[U(x, y)]$.

Donde $U(x, y) = C_1(x)e^{-\sqrt{(a_0-x^2)}y} + C_2(x)e^{\sqrt{(a_0-x^2)}y} + V(x, y)$ y

$$F^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_{43}(t)e^{ixt} dt, \text{ siendo } h_{43} = V^{-1}[H_{43}]$$

Para el caso Homogéneo, es decir para $V(x, y) \equiv 0$ se tiene el siguiente teorema:

Corolario del Teorema 12: Si $a_0 < 0$, entonces el problema de contorno para el

caso **3.4.5.1** tiene solución única en la clase **(3.1.6)** dada por

$$u(x, y) = V^{-1}[U(x, y)].$$

Caso 3.4.4.2 Caso índice uno

El problema de Riemann quedaría de la forma

$$F^+(x) = \frac{(x-ai)}{(x-bi)} F^-(x) - H_2(x) + \frac{(x-ai)}{(x-bi)} H_3(x), \text{ pues } \Delta_2(x) = 0 \text{ y } a > 0, b < 0,$$

donde se tiene que si: $F_1^+(x) = F^+(x)$, $F_1^-(x) = \frac{(x-ai)}{(x-bi)} F^-(x)$

y $H_{44}(x) = -H_2(x) + \frac{(x-ai)}{(x-bi)} H_3(x)$, queda el problema de salto:

$$F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_{44}(x).$$

donde hay un polo en $x-bi$ de $F^-(x)$ ó en $x-ai$ de $F^+(x)$ si pasamos el coeficiente del problema de Riemann para el otro miembro). Luego aplicando el operador proyección a $H_{44}(x)$ queda:

$$H_{44}(x) = \psi^+(x) - \psi^-(x) \quad (3.4.27)$$

donde: $\psi^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_{44}(t)e^{ixt} dt$ y $\psi^-(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 h_{44}(t)e^{ixt} dt$,

siendo $h_{44}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_{44}(t)e^{ixt} dt$. Luego queda que:

$$F^+(x) - \psi^+(x) = \frac{(x - ai)}{(x - bi)} F^-(x) - \psi^-(x)$$

Aplicando el teorema de prolongación analítica y el teorema generalizado de

Liouville se tiene que: $F^+(x) - \psi^+(x) = \frac{(x - ai)}{(x - bi)} F^-(x) - \psi^-(x) = \frac{c_1}{x - bi}$, siendo c_1 es

una constante arbitraria. Luego $\frac{(x - ai)}{(x - bi)} F^-(x) - \psi^-(x) = \frac{c_1}{x - bi}$,

$$F^+(x) = \psi^+(x) + \frac{c_1}{x - bi} \quad (3.4.28)$$

y $F^-(x) = \frac{(x - bi)}{(x - ai)} \psi^-(x) + \frac{c_1}{(x - ai)}$

Al tener $F^+(x)$ dado por la expresión (3.4.28) entonces $U(x, y)$ queda determinado, siendo: $F^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_{44}(t)e^{ixt} dt + \frac{c_1}{x - bi}$, y se puede enunciar el siguiente teorema:

Teorema 13: Si $a_0 < 0$ y $V(x, y)$, $xV(x, 0^+)$, y $\frac{dV(x, 0^+)}{dy}$ pertenecen a $L_{2x}(\mathbb{R})$,

entonces el problema de contorno para el caso 3.4.5.1 tiene solución única que depende de una constante arbitraria c_1 en la clase (3.1.6) y viene dada por las expresiones (3.2.4) y (3.4.28). **(Demostración similar al Teorema 6 del caso parabólico)**

Para el caso Homogéneo, es decir para $V(x, y) \equiv 0$ se tiene el siguiente teorema:

Corolario del Teorema 13: Si $a_0 < 0$, entonces el problema de contorno para el caso **3.4.5.2** tiene solución única en la clase **(3.1.6)** dada por $u(x, y) = V^{-1}[U(x, y)]$

Caso 3.4.4.3 Caso índice menos uno

El Problema de Riemann quedaría de la forma

$$F^+(x) = \frac{(x-ai)}{(x-bi)} F^-(x) - H_2(x) + \frac{(x-ai)}{(x-bi)} H_3(x)$$

Pues $\Delta_2(x) = 0$ y $a < 0, b > 0$.

Donde se tiene que si: $F_1^+(x) = F^+(x)$, $F_1^-(x) = \frac{(x-ai)}{(x-bi)} F^-(x)$ y $H_{45}(x) = -H_2(x) +$

$$\frac{(x-ai)}{(x-bi)} H_3(x)$$

queda el Problema de Salto: $F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_{45}(x)$ **(3.4.29)**

y se puede enunciar el siguiente teorema:

Teorema 14: Si $a_0 < 0$ y $V(x, y), xV(x, 0^+)$, y $\frac{dV(x, 0^+)}{dy}$ pertenecen a $L_{2x}(\mathbb{R})$,

entonces el problema de contorno para el caso **3.4.5.3** tiene solución única en la clase **(3.1.6)** dada por $u(x, y) = V^{-1}[U(x, y)]$. Donde $U(x, y)$ está dada por las fórmulas **(3.2.4)** y

$$F^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_{45}(t) e^{ixt} dt$$
 (3.4.30)

siendo $h_{45} = V^{-1}[H_{45}]$; si se cumple la condición adicional

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_{45}(\tau)}{\tau-ai} d\tau = 0$$
 (3.4.31)

La primera parte de la demostración es evidente por las técnicas de trabajo mostradas anteriormente, luego, sólo demostraremos la necesidad de la expresión **(3.4.31)**.

En efecto, como la solución del problema de Riemann se expresa por **(3.4.30)** y se tiene que:

$$F^-(x) = -\frac{x-bi}{x-ai} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 h_{45}(t) e^{ixt} dt, \text{ tiene un polo de orden uno en } x = ai,$$

por lo tanto, se requiere, para que el problema de salto **(3.4.30)** tenga solución única, que $\int_{-\infty}^0 h_{45}(t) e^{ixt} dt$ tenga un cero de igual orden en dicho punto. Como por la relación entre las Integrales de tipo Cauchy y de Fourier se tiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_{45}(\tau)}{\tau-ai} d\tau \equiv -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 h_{45}(t) e^{izt} dt, \text{ si } \text{Im } z < 0, \text{ entonces, desarrollando}$$

la primera de las integrales anteriores en serie de potencias de $(z - ai)$ e igualando a cero el coeficiente del término de grado cero del desarrollo, se obtiene **(3.4.31)** con lo cual se elimina el polo de $F^-(x)$.

Para el caso Homogéneo, es decir para $V(x, y) \equiv 0$ se tiene el siguiente teorema:

Corolario del Teorema 14: Si $a_0 < 0$, entonces el problema de contorno para el caso **3.4.5.3** tiene solución única en la clase **(3.1.6)** dada por $u(x, y) = V^{-1}[U(x, y)]$

A_{5,36}: Caso 3.4.5

$$B = 0 \text{ y } E = 0 (B_1 = 0 \text{ y } E_1 = 0) \Rightarrow \frac{\alpha_0}{\alpha_1} = \frac{\beta_0}{\beta_1} = \frac{\gamma_0}{\gamma_1} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right) \Rightarrow D(x) = \frac{\beta_1}{\gamma_1}$$

Esto es un caso de índice cero y el problema de Riemann quedaría de la forma:

$$F^+(x) = \frac{\beta_1}{\gamma_1} F^-(x) - \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{a_0-x^2+(\alpha_0-\alpha_2)^2} H_1(x) - H_2(x) + \frac{\beta_1}{\gamma_1} H_3(x)$$

donde si: $F_1^+(x) = F^+(x)$, $F_1^-(x) = \frac{\beta_1}{\gamma_1} F^-(x)$ y $H_{46}(x) = -\frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{a_0-x^2+(\alpha_0-\alpha_2)^2} H_1(x) -$

$H_2(x) + \frac{\beta_1}{\gamma_1} H_3(x)$ queda el problema de salto: $F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_{46}(x)$.

Luego se puede enunciar el siguiente teorema:

Teorema 15: Si $a_0 < 0$ y $V(x, y)$, $xV(x, 0^+)$, y $\frac{dV(x, 0^+)}{dy}$ pertenecen a $L_{2x}(\mathbb{R})$,

entonces el problema de contorno para este caso tiene solución única en la clase

(3.1.6) dada por $u(x, y) = V^{-1}[U(x, y)]$.

Donde

$$U(x, y) = C_1(x)e^{-\sqrt{(a_0-x^2)}y} + C_2(x)e^{\sqrt{(a_0-x^2)}y} + V(x, y)$$

y

$$F^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_{46}(t)e^{ixt} dt, \text{ siendo } h_{46} = V^{-1}[H_{46}].$$

Para el caso homogéneo, es decir para $V(x, y) \equiv 0$ se tiene el siguiente teorema:

Corolario del Teorema 15: Si $a_0 < 0$, entonces el problema de contorno para el caso **3.4.6** tiene solución única en la clase **(3.1.6)** dada por $u(x, y) = V^{-1}[U(x, y)]$.

A5.37: Caso 3.4.6 $D \neq 0$ y $D_1 \neq 0$ con todos los demás coeficientes iguales a cero.

Como $D(x) = \frac{D}{D_1} = \frac{\beta_0}{\gamma_0}$, es un caso de índice cero. En este caso como el coeficiente del problema de Riemann es una constante esto implica que no hay raíces ni en el numerador ni en el denominador por lo que el problema de Riemann correspondiente sería:

$$F^+(x) = \frac{\beta_0}{\gamma_0} F^-(x) - \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\alpha_0\gamma_0(e^{\sqrt{a_0-x^2}} - e^{-\sqrt{a_0-x^2}})} H_1(x) - H_2(x) + \frac{\beta_0}{\gamma_0} H_3(x)$$

haciendo: $F_1^+(x) = F^+(x)$, $F_1^-(x) = \frac{\beta_0}{\gamma_0} F^-(x)$ y $H_{47}(x) =$

$$- \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\alpha_0\gamma_0(e^{\sqrt{a_0-x^2}} - e^{-\sqrt{a_0-x^2}})} H_1(x) - H_2(x) + \frac{\beta_0}{\gamma_0} H_3(x), \text{ queda el Problema de Salto:}$$

$$F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_{47}(x).$$

Luego se pueden enunciar teoremas similares a los Teoremas 5 y Corolario del Teorema 5 con $h_{47}(x)$ y $H_{47}(x)$ en lugar de $h_4(x)$ y $H_4(x)$.

A6: Nuevas clases de Funciones Generalizadas

Las nuevas clases de funciones generalizadas definidas por el por el grupo de Ecuaciones Diferenciales de la Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas, amplía el campo de funciones aplicables para los problemas de la Física-Matemática.

En el artículo [\[19\]](#) se exponen una serie de definiciones, que se darán a continuación:

Definición # 1: Espacio de funciones fundamentales

Sea L una curva seccionalmente suave en el plano complejo y sea E un subespacio vectorial del conjunto de todas las funciones medibles de L en \mathbb{C} . Se desea formar un espacio más amplio que E . Se denominará al espacio K , espacio de funciones fundamentales con relación a E si es un subespacio lineal normado de funciones medibles con las propiedades siguientes:

- $\forall \varphi \in K$ y $\forall \Psi \in E$ \exists la integral,

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x)\varphi(x)dx$

que se denotará por (Ψ, φ) ,

- K es lo suficientemente amplio para que si

$$\Psi_1 \text{ y } \Psi_2 \in E \text{ y } (\Psi_1, \varphi) = (\Psi_2, \varphi)$$

$$\forall \varphi(x) \in K \text{ esto implique que } \Psi_1 = \Psi_2.$$

Definición # 2: (Función generalizada)

Se llama función generalizada sobre el espacio fundamental, a toda función lineal

$f: K \rightarrow \mathbb{C}$ acotada en el sentido siguiente:

$$|(f(x), \varphi(x))| \leq c|\varphi(x)|, \quad c \in \mathbb{R}^+$$

donde $|\varphi(x)|$ es la norma definida en K y la constante c es la misma para todas las $\varphi(x)$. Al conjunto de todas las funciones generalizadas $f(x)$ se le llama espacio de funciones generalizadas.

Definición # 3

Se considerará al espacio denotado por $L_2\{-m, -n\}$ y definido como:

$$L_2\{-m, -n\} = \{\varphi(x): \left(\frac{d}{dx} + 1\right)^n \{(x+i)^m \varphi(x)\} \in L_2(\mathbb{R})\}$$

donde m y n son números enteros no negativos. La norma en este espacio se puede definir como:

$$|\varphi_{m,n}| = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \left(\frac{d}{dx} + 1\right)^n \{(x+i)^m \varphi(x)\} \right|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

Puede verificarse que el espacio $L_2\{-m, -n\}$ cumple con las condiciones de un espacio fundamental. Con el símbolo $L_2\{m, n\}$ se designa el espacio K de las funciones generalizadas correspondientes a $L_2\{-m, -n\}$.

Considerando un conjunto de pares de valores enteros desde $(0,0)$ hasta (m,n) se tiene así un conjunto de espacios fundamentales, donde el más amplio es $L_2\{-0, -0\} = L_2(\mathbb{R})$ y el más estrecho de todos $L_2\{-m, -n\}$, por otra parte en el conjunto de espacios de funciones generalizadas el más amplio es $L_2\{m, n\}$ y el más estrecho es $L_2\{0,0\} = L_2(\mathbb{R})$.

Por todo lo expuesto anteriormente, se puede decir que las clases de funciones $L_2(\mathbb{R})$ son un caso particular de las nuevas clases de funciones generalizadas.

Luego en el artículo [\[20\]](#), se resuelve el problema de Riemann en estas clases, por ello es importante como línea futura resolver los problemas de contorno dados por semiejes de tipo, parabólicos, hiperbólicos y elípticos en estas nuevas clases; pues se ampliaría de gran manera el número de aplicaciones en la Física-Matemática.