

UNIVERSIDAD CENTRAL `` MARTA ABREU `` DE LAS VILLAS
FACULTAD DE MATEMÁTICA, FÍSICA Y COMPUTACIÓN



“PROPUESTA METODOLÓGICA PARA EL TRATAMIENTO DE LAS
TRANSFORMADAS DE LAPLACE, Z Y FOURIER.”

Autor: Javier Alonso del Rio

Tutores: Ing. Aniel López Pérez,

Consultante: M. Sc. María Milena Rodríguez Fernández

``Santa Clara, 2017``

``Año 59 de la Revolución``

Resumen

El tratamiento de las transformadas Laplace, Z y Fourier presentado parte de la utilidad que estas poseen para resolver problemas prácticos de la ciencia y la técnica, como por ejemplo, problemas de electrotecnia, de la física-matemática, computacionales, y otros. Por ello se propone fundamentar la necesidad de un enfoque integrado de estas transformadas para su mejor comprensión y aplicación por estudiantes de carreras de ciencias e ingenierías, lo cual requiere de un enfoque metodológico que tome en cuenta los diferentes aspectos a dominar por los estudiantes. Ello constituye el centro de la propuesta metodológica que se expone en el presente trabajo que se construye a partir del análisis de una valiosa monografía presentada por un colectivo de autores de la facultad de Matemática, Física y Computación.

Abstract

The treatment of the Laplace, Z and Fourier transforms presented part of the usefulness they have to solve practical problems of science and technique, such as problems of electrical engineering, physics-mathematics, computational, and others. Therefore, it is proposed to base the need for an integrated approach to these transformations for better understanding and application by students of science and engineering careers, which requires a methodological approach that takes into account the different aspects to be mastered by students. This is the center of the methodological proposal that is exposed in the present work that is constructed from the analysis of a valuable Monograph presented by a Collective of authors of the faculty of Mathematics, Physics and Computation.

Introducción	Pág. 5
Desarrollo	Pág. 9
1. Análisis Bibliográfico	Pág. 9
2. Metodología para el tratamiento con las transformadas de Laplace, Z y Fourier en la disciplina Teoría de Funciones de Variable Compleja	Pág. 12
3. Valoración de las monografías	Pág. 15
Conclusiones	Pág. 20
Recomendaciones	Pág. 21
Bibliografía	Pág. 22

Introducción

Las transformadas, en general, son usadas para simplificar las soluciones de algunos problemas matemáticos; por ejemplo problemas de multiplicación y división. El objetivo de usar una transformación es crear un nuevo dominio en el cual sea más cómodo manipular el problema a investigar. Una vez obtenidos los resultados en el nuevo dominio, puede ser transformado inversamente para dar los resultados deseados en el dominio original (James, 1993).

Haciendo uso de las variables complejas se pueden encontrar un conjunto de transformadas que pueden simplificar el cálculo de ecuaciones diferenciales y en diferencias finitas; de este tipo tenemos a la transformada de Laplace y Fourier, cuyos casos son transformadas integrales y la transformada Z; que se expresa en una serie de potencias de Laurent, permitiendo la manipulación de las ecuaciones en diferencias finitas mediante su transformación al campo complejo.

La transformada de Laplace, nombrada así en honor a Pierre S. Laplace, fue introducida, según reportan algunos historiadores, por Euler en su trabajo titulado *De constructione aequationum*, publicado en 1744; por esta razón es también atribuida a Euler. Sin embargo, que según Bäumer y Neubrander (1994), la definición actual de la transformada de Laplace se debe al desarrollo que ha tenido debido a las contribuciones de otros matemáticos como: Lagrange, Fourier, Cauchy, Riemann, Picard, Bateman y Widder; aun así fue nombrada de Laplace por ser el primero en definirla (Brea, 2014).

Laplace en trabajos realizados entre 1782 y 1812 acudió muchas veces a la ayuda de los imaginarios en la integración de funciones. En estos trabajos llegó a desarrollar un método para resolver ecuaciones lineales en diferencias y diferenciales, conocido bajo la denominación de transformada de Laplace. Esta transformación ejercía un cambio en la variable de integración, donde integraba según direcciones diferentes a las del eje real.

A mediados del siglo XVIII, surge con D'Alembert el problema de las oscilaciones de las cuerdas de un violín, lo que dio paso al surgimiento de las series de Fourier. Estas fueron una contribución de Jean Baptiste Joseph Fourier, en sus estudios acerca del problema del flujo de calor presentado a la *Académie des Sciences* en 1811, publicado en *Théories analytique de la chaleur* en 1822. Fourier hizo un intento serio de demostrar que cualquier función diferenciable puede ser expandida en una serie trigonométrica (González, 1997).

Luego, la transformada de Fourier surge como resultado del análisis de las series de Fourier cuando estas se extienden a funciones no periódicas. Dado que, las versiones discretas de la transformada de Fourier proporciona principalmente métodos avanzados para el análisis de señales discretas, que son ampliamente usados en campos como la teoría de las comunicaciones y el procesamiento de imágenes y voz (James, 1993); a las funciones a las cuales se les aplica esta transformada se les conoce como señales y a la transformada espectro de la señal.

La principal motivación para el estudio de esta transformada radica en las buenas propiedades algebraicas que posee cuando se aplica a las derivadas sucesivas, o al trasladar señales. Sin embargo, debido a las restricciones en su condición de existencia hay muchas señales a las cuales no se le pueden calcular esta transformada, de aquí que luego sea introducido en el análisis de señales a las transformadas Z .

La teoría de la transformada Z fue introducida por Witold Hurewicz en 1947 para calcular la transformada de señales o secuencias. Gran parte de la teoría la desarrollaron John R. Ragazzini, L. A. Zadeh, E. I. Jury, R. E. Kalman, J. E. Bertram, B. Friedland y G. F. Franklin (1952) quienes conformaban el grupo de investigación “*Sampleddata Control Group*” de la Universidad de Columbia, que denominó a esta como transformada Z debido a la variable compleja z . Sin embargo, el matemático soviético Tsytkin (1950) la llamó transformada discreta de Laplace, mientras Barker (1952) en Inglaterra también desarrolló la teoría de forma independiente. La transformada Z ha tenido una gran importancia en el análisis de fenómenos discretos, así como en el análisis de señales y sistemas en el dominio discreto (Sánchez, 2007).

Entre los modelos matemáticos más comunes en los que se empleó y aun se emplea esta transformada es en el estudio de procesamiento de señales digitales, como son el análisis y proyecto de Circuitos Digitales, los Sistemas de Radar o Telecomunicaciones y especialmente los Sistemas de Control de Procesos por computadoras.

En las ingenierías, las transformadas son también herramientas muy usadas, debido al creciente interés actual de sistemas discretos en estas especialidades, pues muchos procesos dinámicos se presentan en sistemas de tiempo discretos. Generalmente estos sistemas son modelados matemáticamente mediante ecuaciones en diferencias finitas, para las cuales la transformada Z constituye la herramienta principal para su solución.

Debido a las numerosas aplicaciones en áreas de las ciencias e ingenierías como la física, procesamiento de señales (eléctricas), teoría de las probabilidades, la óptica, propagación de ondas, etc. A continuación, se hará un tratamiento metodológico a las transformadas mencionadas anteriormente por ser consideradas las más notables en el análisis de funciones de variable compleja.

Para ello se tiene como antecedente la monografía del colectivo de autores, sobre las transformadas Laplace, Z y Fourier, donde se hace una definición de las mismas, se muestran sus propiedades más notables, se presentan sus aplicaciones para la resolución de problemas y los métodos para realizarlos.

El objetivo general del trabajo es fundamentar un tratamiento metodológico de las transformadas Laplace, Z y Fourier, para su aplicación en una asignatura optativa en la disciplina “Teoría de funciones de variable compleja”. Se tiene la expectativa de que este tratamiento metodológico facilite la asimilación de los contenidos referidos a esta materia por los estudiantes de las especialidades que lo requieran.

Para su realización se emplearon un conjunto de métodos y procedimientos que se describen a continuación.

Se combinaron métodos de nivel teórico como los de análisis-síntesis para el estudio de las fuentes de información utilizadas que permitan establecer regularidades y tendencias para el tratamiento de las transformadas Laplace, Z y Fourier. El método inducción-deducción, para extraer inferencias por acumulación de datos o por la aplicación de principios ya establecidos en cuanto a la utilidad de las transformadas en la resolución de problemas de la ciencia y la técnica. En cuanto al método histórico-lógico su uso estuvo orientado a analizar el origen y la evolución histórica de las transformadas de Laplace, Z y Fourier mostrando los momentos que constituyen puntos nodales en su devenir.

Para la revisión bibliográfica de un grupo significativo de documentos relacionados con el tema, el cual incluye libros, materiales impresos y sitios de Internet fue utilizado el análisis documental como método que permite captar la información que resulta pertinente a los objetivos de la investigación.

El trabajo consta de tres partes fundamentales, en primer lugar, la fundamentación del trabajo mediante el análisis a la bibliografía consultada, donde se hace una crítica a

diversos trabajos que analizan a las transformadas, notando así la importancia de conformar una asignatura para perfeccionar su sistema de enseñanza.

Una segunda parte donde se realiza el análisis metodológico para el tratamiento de las transformadas. Para ello se parte de los métodos utilizados para el tratamiento del cálculo de las transformadas, se sitúan ejemplos y se plantea el tratamiento metodológico para la enseñanza de las transformadas.

Una última parte donde se realiza una valoración sobre cómo realizar una monografía para luego hacer un análisis de la monografía de transformadas que se desea sugerir como referencia para el estudio de las transformadas en la asignatura optativa que se propone.

Desarrollo

Con el objetivo de unificar el estudio de las transformadas de Laplace, Z y Fourier, resulta útil destacar las relaciones que existen entre estas. Esta relación se basa en primer lugar, en las aplicaciones que tienen en común; la mayoría de los casos, estas son empleadas en problemas que implican la resolución de una ecuación diferencial. Estas transformadas comparten propiedades como la linealidad y el producto convolución que las hacen herramientas atractivas del cálculo operacional.

Análisis Bibliográfico

La motivación de la propuesta también se debe al interés en los sistemas lineales por cumplir con el principio de superposición como propiedad inherente de las señales que los modifican. Es importante de esta forma la edición de un medio que auxilie de forma unificada el estudio de las transformadas. En el análisis de la bibliografía relacionada con el tema, se puede notar como en los textos básicos tanto de las carreras de ingenierías, como la propia licenciatura en matemática, la motivación de los autores está más enfocada al estudio de aplicación de las transformadas a problemas de la ciencia y la técnica, como sistemas y modelos lineales que al estudio didáctico de las transformadas de Laplace, Z y Fourier, dejando de lado la unificadora relación que comparten.

En primer lugar como ejemplo de este comportamiento enfocado en las aplicaciones de las transformadas a problemas de la ciencia y la técnica podemos encontrar la tesis doctoral *“Búsqueda de estructuras de reguladores de sistemas de control discreto que minimice los efectos debido a la utilización de aritmética de precisión finita”* del autor Jesús F. Sánchez (2007), donde se pueden encontrar materias relacionadas con la transformada Z desde un punto de vista de la resolución de sistemas de control discreto. Otra de las aplicaciones las expone Emilio Soria (2003) en su libro *“Tratamiento Digital de Señales”* donde aborda problemas de procesamiento digital de señales y sistemas adaptativos. En el procesamiento de señales se hace uso frecuente, en primer lugar, de la transformada discreta de Fourier y luego para generalizar las respuestas de las señales se emplea la transformada Z. A partir de la resolución de problemas relacionados con sistemas discretos invariantes en el tiempo se describen aplicaciones de estas transformadas en la ingeniería eléctrica y la ingeniería de las telecomunicaciones. También sobre señales digitales, se puede encontrar el libro didáctico de José P. Alvarado (2011) titulado *“Procesamiento Digital de Señales”*. Este escrito tiene como objetivo ser

una guía para estudiantes de las ingenierías que cursan asignaturas relacionadas con el título del libro, en el cual este presenta las principales definiciones de la materia y ejercitación donde se puede notar el uso de las transformadas.

Algunos autores como: Genaro González y Juan Sacerdoti presentan publicaciones que están más enfocadas al tratamiento de una de estas en particular sin hacer notar la relación que existe entre ellas. Con alto contenido matemático que entorpece la asimilación del contenido, además la variedad en el uso de notaciones dificulta la utilización de sus diferentes bibliografías. Materiales como “*Series de Fourier, transformada de Fourier y aplicaciones*” de G. González (1997) hacen un estudio de las series de Fourier y la transformada de Fourier en el círculo unitario. El artículo estudia los fundamentos teóricos de mayor relevancia de las series y transformadas de Fourier, desde el punto de vista estrictamente matemático. Por otro lado J. Sacerdoti (2003) con “*Transformada Z*” presenta a la transformada Z y sus principales propiedades que demuestran su potencial frente a una amplia gama de aplicaciones a las ingenierías.

Acerca de la transformada de Laplace, centrados en la teoría a nivel científico, podemos encontrar a Manuel Pargada (s-f), que trabaja primeramente, con esta desde el punto de vista de las transformaciones lineales integrales, definiendo estas y luego introduciendo a la transformada de Laplace y sus propiedades fundamentales que la hace una útil herramienta para enfrentar problemas de valor inicial en ecuaciones diferenciales.

Otro tipo de comportamiento que se puede encontrar en varias de las bibliografías básicas relacionadas con el estudio de la Variable Compleja, es el alto nivel científico que hace más compleja su comprensión. También se encuentra el libro “*Curso de Matemáticas Superiores para ingenieros 2*” de M. Krasnov (1990), que presenta en los capítulos XXVI y XXVII, luego del análisis de las funciones de variable compleja, la teoría de las transformadas de Fourier y Laplace respectivamente. Luego de definir las propiedades, teoremas y tablas de cálculo, al finalizar cada capítulo, presenta un grupo de ejercicios con las soluciones para su ejercitación.

Glyn James (1993), en la segunda edición de su libro “*Matemáticas avanzadas para ingeniería*”, plantea un análisis intensivo a las funciones de variable compleja y su aplicación directa con las ingenierías. Fundamenta algunas de las principales propiedades de estas y realiza un análisis sobre series complejas y la teoría de los residuos. Dividido en tres capítulos, se trabajan a las transformadas de Laplace, Z y Fourier y las ventajas

que estas poseen para resolver problemas que aparecen mayormente en las investigaciones de circuitos eléctricos y vibraciones mecánicas. A pesar de ser un libro excelente para reforzar el estudio de las transformadas y muchos otros aspectos relacionados con el análisis de funciones con variable compleja, este está fuertemente vinculado con las ingenierías y a la aplicación de las transformadas a estas.

Como parte de la bibliografía encontrada en línea, se puede señalar el trabajo de Ebert Brea (2014) "*Calculo Operacional*", que provee a los estudiantes de una visión unificada de las transformadas de Laplace, Z y Fourier, haciendo un estudio de las transformadas integrales. En este artículo se presentan en un inicio definiciones sobre Teoría de Distribución donde se muestra un resumen sobre la teoría general de las funciones generalizadas y se introduce la definición de distribución delta de Dirac. Presenta además un tratamiento de funciones y del operador convolución donde muestra su definición operativa y algunas propiedades importantes. Con respecto al tratamiento de funciones, establece definiciones sobre el operador convolución en distintos tipos de funciones como las definidas, tanto en un dominio continuo, como discreto y métodos de cálculo. Por último, presenta a las transformadas de Laplace, Z y Fourier con un enfoque didáctico, con el objetivo de facilitar el estudio. Además se muestran detalles sobre la relación interna que existe entre estas transformadas. Luego, a partir de algunos ejemplos de aplicaciones, se exponen métodos para calcular transformadas. En fin, el autor nos presenta un libro sobre el cálculo operacional desde un punto de vista fuertemente pedagógico que, sin lugar a dudas, facilita la comprensión de las transformadas.

Metodología para el tratamiento de las transformadas de Laplace, Z y Fourier en la disciplina Teoría de Funciones de Variable Compleja

En la siguiente sección se presentan los procedimientos metodológicos para el tratamiento práctico (PMP) de las transformadas. Que está asociado directamente con la ejercitación que se pretende proponer.

Por procedimiento metodológico se entiende lo que es necesario exponer para que el estudiante pueda tener una clara comprensión acerca de las transformadas de Laplace, Z y Fourier. Para ello es necesario auxiliarse de conocimientos que provienen de la didáctica y la pedagogía. Para hacer posible la comunicación de los contenidos a estudiantes que nunca deben hacer un uso íntegro de las transformadas pues solo se les imparte considerando necesidades concretas y no el enfoque integrado presente como propósito de la monografía que se presenta como solución a una demanda proveniente del sistema de educación cubana y que impacta de manera directa en la formación de estudiantes de matemática e ingenierías, cuando es la monografía sirve como texto requerido para una asignatura que se propone como optativa en el plan de estudio para el Ministerio de Educación Superior. Lo cual supone una solución práctica para el tratamiento parcial de estos contenidos de manera auxiliados en los textos ya expuestos

Metodología para el tratamiento de las transformadas de Laplace, Z y Fourier

Objetivos:

- 1) Dominar los aspectos teóricos que deben ser ejercitados.
- 2) Especificar las habilidades a lograr por aspectos teóricos.
- 3) Seleccionar la ejercitación resuelta.
- 4) Seleccionar la ejercitación propuesta.
- 5) Evaluar el cumplimiento y/o asimilación de los objetivos propuestos y de las habilidades desarrolladas por los estudiantes.

Dominar los aspectos teóricos que deben ser ejercitados

Como aspectos teóricos a considerar para la ejercitación en torno a las transformadas es necesario colocar su definición en sentido directo e inverso y sus propiedades, por ello forman parte los procedimientos siguientes:

- Definición las transformadas directas e inversas de Laplace, Z y Fourier.

- Demostración de las propiedades y teoremas de uso más frecuente asociadas a las transformadas directas e inversas de Laplace, Z y Fourier mediante sus definiciones.

Especificación de las habilidades a lograr

Los procedimientos metodológicos orientados a especificar las habilidades que deben ser alcanzadas por los estudiantes se relacionan con el cálculo de las transformadas de modo directo e inverso, cuando su uso resulta conveniente, identificar la que debe ser utilizada y la inferencia que se corresponde con respecto a la problemática planteada. Por tanto se estima que son procedimientos metodológicos los que siguen:

- Memorización de las expresiones que definen a cada transformada directa e inversa de Laplace, Z y Fourier, según sea el caso.
- Análisis de las condiciones para la existencia y unicidad de las transformadas directa e inversa de Laplace, Z y Fourier, según sea el caso.
- Cálculo de las transformadas directas e inversas de Laplace, Z y Fourier, según sea el caso.
- Identificación de la transformada a utilizar según las características de las funciones o de las señales que intervienen en el problema a resolver.
- Aplicación de las propiedades y teoremas a la resolución de problemas que se ajusten a la definición de cada transformada.
- Validación de los resultados obtenidos al resolver el problema determinado utilizando las transformadas aplicadas.

Selección de la ejercitación resuelta

Se proponen una ejercitación resuelta que pretenda ser empleada para el aseguramiento de los niveles cognitivos adquiridos por los estudiantes, por ejemplo, ejercicios sobre cálculo directo de transformadas, y transformadas inversas; aplicación de las transformadas en la resolución de problemas técnicos para incentivar la motivación sobre los contenidos que se están recibiendo.

Los ejercicios deben estar enfocados a la ejercitación relacionada con el uso de las definiciones, evaluando de esta manera la asimilación de las distintas propiedades y habilidades de cálculo de las transformadas.

Selección de la ejercitación propuesta

El objetivo de los ejercicios propuestos está basado en la ejercitación de los conocimientos adquiridos en clase, la evaluación de ellos provee a los educadores de información sobre los niveles alcanzados por los estudiantes. La selección de ellos, al igual que la selección de la ejercitación resuelta, está fundamentada a partir de las habilidades que se quieran lograr en los estudiantes; sin embargo, esta selección puede variar dependiendo de las especialidades a las que se les imparte la asignatura.

5) Evaluación del cumplimiento y/o asimilación de los objetivos propuestos y de las habilidades desarrolladas por los estudiantes.

La forma de evaluación debe ser intencionada por el profesor en dependencia de diversos factores: el tiempo disponible para la evaluación, la cantidad de estudiantes a evaluar, la complejidad de los ejercicios seleccionados para el tiempo de evaluación y los recursos disponibles para la evaluación. Es responsabilidad del profesor estructurar la forma de evaluación de forma tal que garantice el cumplimiento de los objetivos y la adquisición de las habilidades de los estudiantes.

Valoración de la monografía

Con el objetivo de una mejor asimilación de los aspectos teóricos que se pretenden impartir, se hace necesario un texto que describa a las transformadas con un enfoque más didáctico e integrador que el presente en buena parte de la bibliografía disponible sobre el tema, como ha sido señalado en el análisis bibliográfico. En esta sección se hará un análisis de la *Monografía sobre las Transformadas de Laplace, Z y Fourier* de un Colectivo de autores; se parte de conceptos y métodos para la elaboración de una monografía a considerar para una visión más amplia del análisis señalado.

En primer lugar, sería necesario tener claridad del significado de monografía, o sea ¿qué es una monografía? Se le puede considerar como un trabajo escrito o un documento basado en el estudio minucioso de un tema específico, el cual se describe y comunica. Propone el examen intensivo y exhaustivo en todos sus aspectos de una materia, con la función de informar, (Torres, 2013). Este autor es tomado como referente principal de los contenidos que se exponen a continuación sobre una monografía.

Dependiendo del contenido o el objetivo del autor se pueden definir también varios tipos de monografías, como:

- *La monografía de compilación*, donde el autor analiza lo expuesto por otros autores sobre el tema, y expone diversos puntos de vista, luego de haber hecho una exhaustiva revisión de su visión personal sobre el tema.
- *Monografía de investigación*, donde se aborda un tema nuevo o poco explorado donde, para la investigación, se debe conocer lo que se ha escrito sobre ese tema hasta ese momento y luego aportar una visión novedosa.
- *Monografía de análisis de experiencias*, cuyo uso más frecuente es en materia que impliquen prácticas o durante el ejercicio profesional. En esta se analizan experiencias, se sacan conclusiones, se comparan y se aporta una nueva visión personal.

Una vez definido el tipo de monografía a tratar es preciso analizar algunas características invariantes que deben poseer, por ejemplo:

- Un solo tema, que sea exhaustivo; no se exige originalidad a no ser en caso de una tesis.
- El trabajo escrito debe ser sistemático y completo.

- Tener un tema específico o particular de una ciencia, con un tratamiento íntegro y profundo.
- Rigor en el uso del método científico.
- Hacer una contribución importante, original y personal, a la ciencia.

Luego, teniendo en cuenta que el texto cumpla con las características anteriores, se pueden definir los principales pasos a tener en cuenta para una correcta elaboración:

1. La elección del tema: la primera condición es elegir un tema que sea delimitable, o sea cuanto más delimitado sea un objeto de estudio, más concretas serán las cuestiones que se presenten a resolver. El tema también debe ser realista, interesante y el autor debe dominar la metodología propia del tema.
2. Hacer un plan de trabajo: este plan debe servir de guía para la elaboración del trabajo, de modo que es importante que se tenga en cuenta desde los primeros momentos en el que se comienza a trabajar. Un plan bien diseñado y seguido con cuidado, hace que el trabajo rinda mucho más y permite trabajar con mayor rapidez evitando desviaciones que impiden perder el punto de vista principal.
3. La estructura del trabajo que estamos considerando, debería consistir en un análisis actual de la temática; por lo que su estructura debería ser adecuada al tema o al método. En principio, algo dividido en tres partes formales, con una introducción, que debe conseguir captar la atención del lector, indicar la tesis y delinear la organización del trabajo; el cuerpo debe presentar los capítulos o partes que a su vez, estarán divididos en secciones o subsecciones, si es necesario, en los cuales lo más importante sea el análisis actual, que es distinto de la información histórica o de fondo; por último, la conclusión o parte final, es un resumen de los puntos principales e indicación de la importancia de los hallazgos o conclusiones parciales.

La monografía sobre *Transformadas* objeto de análisis en cuestión, hace una recopilación de las principales definiciones, propiedades y aplicaciones de las transformadas Laplace, Z y Fourier proporcionándole un enfoque más didáctico a estas.

El tema propuesto por la monografía es concreto y abarca todo el contenido que se pretende presentar, dado que el objetivo de esta es exponer a las transformadas y, mediante aplicaciones de diversas disciplinas, hacer comprender a los estudiantes un diferente enfoque matemático en el tratamiento de problemas en sus especialidades.

Primeramente la monografía comienza con un análisis de la transformada de Laplace, definiéndola y planteando sus condiciones de suficiencia para su existencia. Luego de plantear algunas de sus propiedades como la linealidad y el desplazamiento en s , introduce a la función Gamma, prestando una especial atención al tratamiento de las integrales impropias y estableciendo a partir de la función Gamma y la transformada de Laplace un novedoso método para la evaluación de integrales impropias. Además, se muestra una función definida por tramos, en términos de la función paso unitario. En el análisis de la transformada de Laplace descrito en la monografía se proponen varios métodos para calcularla, incluyendo tablas, para luego, a partir de ejemplos prácticos, destacar las útiles aplicaciones de esta.

En la siguiente sección nos presenta un tratamiento de la transformada Z comenzando con la definición de la función muestreada de una función continua; donde luego se define la función delta de Dirac, como una forma de representar una función muestreada que, esta puede considerarse como señal concentrada en un instante de tiempo. Luego, a partir de la definición de la transformada de Laplace a esta función muestreada, se define a la transformada Z, sus principales propiedades, sus condiciones de existencia y al tipo de funciones a las cuales se les pueden aplicar; además de la relación entre la transformada Z y los desarrollos en series de Laurent para así determinar el radio o región de convergencia.

Algunos ejemplos son propuestos para presentar el cálculo de la transformada Z en algunas funciones o sucesiones, como la mencionada función paso unitario, la sucesión geométrica, una sucesión exponencial y la transformada Z de la función Delta de Kronecker como una variante de la propia función delta de Dirac. Posteriormente se muestran y definen las propiedades, estas seguidas de ejemplos para mejorar la comprensión, para luego mostrar la tabla de las principales funciones y sus respectivas transformada Z.

En la descripción de la transformada Z inversa son presentados varios métodos para poder calcular estas, como: las descomposiciones en fracciones simples y parciales, entre otros. Estos métodos son bien detallados a partir de ejemplos ilustrativos, pues el cálculo de la transformada inversa presenta mayor dificultad en la resolución de problemas, debido a que en muchos de los casos estos métodos no son generales y haya que recurrir métodos poderosos de análisis matemático.

En la monografía se introducen algunas aplicaciones de la transformada Z a sistemas discretos, usuales en la modelación de problemas sobre circuitos eléctricos y procesamiento de señales digitales; entre estos podemos ver: al homólogo de las ecuaciones diferenciales en funciones continuas, para funciones discretas, o sea, la resolución de ecuaciones en diferencias finitas; además la resolución de la función sistema a partir de la función transferencial así como, métodos para calcular la función sistema, como: la descomposición de la función sistema en subsistemas de menor complejidad, la realización en cascada de la función de sistema, la realización en paralelo de la función sistema.

En cada caso, primeramente se definen algunos aspectos particulares, como por ejemplo, en la resolución de ecuaciones de diferencias finitas, se presentan a este tipo de ecuaciones y en el caso de las funciones sistemas se introducen las definiciones de estos y la definición de la función transferencial, de esta forma se da paso a las metodologías correspondientes para desarrollar los problemas y se presentan ejemplos diversos en cada caso. Luego antes de culminar con más ejemplos, se hace mención de la función red y su relación con la función sistema.

Como último contenido teórico en el texto, se define la transformada de Fourier continua, esta, en su forma integral y su forma compleja; una vez definida se presentan las condiciones para que una función sea Fourier transformable, donde esta condición se conoce como las condiciones de Dirichlet. Las definiciones posteriores están vinculadas al estudio de frecuencias, donde la transformada de Fourier es el espectro de la señal o frecuencia. Las propiedades como la linealidad, los desplazamientos, tanto en el tiempo, como en el espectro de la función; la derivación y la integración, y la simetría o dualidad; dan paso a la tabla de las principales frecuencias, señales o funciones.

Como una aplicación de las transformadas, es presentada la función transferencial, donde la transformada de Fourier de una función se emplea ampliamente en los sistemas de comunicación y es el análisis del sistema de procesamiento digital de señales. Tras varios ejemplos se hace notar como la respuesta de frecuencia o la transformada de Fourier es una función compleja y en varias aplicaciones prácticas es útil obtener información acerca del comportamiento de su magnitud y fase.

La monografía se concluye con la presentación de una ejercitación resuelta de la transformada Z; ejercicios tanto, sobre el cálculo explícito de esta, como de su inversa y

de algunas aplicaciones a problemas definidos en la parte teórica. Para así, concluir con una ejercitación propuesta, alguna de la que fue presentada en el trabajo.

De esta forma culmina el análisis de monografía propuesta, cuya elaboración está basada siguiendo los primeros cuatro pasos para el tratamiento metodológico de las transformadas de Laplace, Z y Fourier. La monografía es un medio que permite su utilización como material de apoyo para el desarrollo de los temas de una asignatura optativa que se incluya dentro de la disciplina “Teoría de funciones de variable compleja”.

Conclusiones

Las transformadas de Laplace, Z y Fourier poseen por sus propiedades una gran utilidad para resolver problemas prácticos de la ciencia y la técnica como por ejemplo, problemas de electrotecnia, de la física-matemática, computacionales, y otros.

Sin embargo, existe la necesidad de un enfoque integrado de estas transformadas para su mejor comprensión y aplicación por estudiantes de carreras de ciencias e ingenierías lo cual requiere de un enfoque metodológico que tome en cuenta los diferentes aspectos a dominar por los estudiantes.

Al respecto constituye un valioso antecedente la presentación de la monografía presentada por un colectivo de autores de la facultad de Matemática, Física y Computación. Desde este antecedente es posible la fundamentación de una propuesta metodológica que muestre el uso integrado de herramientas que faciliten la comprensión de las definiciones y conceptos relacionados con esta materia, sus principales propiedades matemáticas y su aplicabilidad a distintas disciplinas dentro de las ciencias matemáticas y técnicas.

Recomendaciones

1. Profundizar en las alternativas de integración de contenido en el tratamiento de las transformada Laplace, Z y Fourier para su uso con fines docentes en carreras de ingenierías y licenciatura en matemática.
2. Implementar experimentalmente el tratamiento integrado de las transformadas Laplace, Z y Fourier en una asignatura optativa de la disciplina “Teoría de funciones de variable compleja” y validar sus resultados.
3. Continuar el estudio sobre el tratamiento integrado de las transformadas Laplace, Z y Fourier para su posible implementación en carreras universitarias.

Bibliografía

1. Abreu, H., (2004) *Manual de monografía, dissertação e tese*. AVERCAMP Editora, São Paulo.
2. Alvarado, J., (2011) *Procesamiento digital de señales*. Notas de Clase. Escuela de Ingeniería Electrónica. Cartago, Costa Rica.
3. Barbará, J., (2012) *Propuesta metodológica para el tratamiento de operadores de la Mecánica Cuántica desde la óptica del Análisis Funcional*. Tesis de Diploma. Universidad Central “Marta Abreu” de las Villas. Santa Clara, Cuba.
4. Bobadilla, J.; Gómez, P. y J. Bernal, (s-f) *La transformada de Fourier. Una visión Pedagógica*. Madrid, España.
5. Brea, E., (2014) *Cálculo Operacional*. Caracas, Venezuela.
https://www.researchgate.net/publication/265165226_Calculo_Operacional?enrichI_d=rgreq-35fa1f6a4377ff602515ca26faba02b5-XXX&enrichSource=Y292ZXJQYWdlOzI2NTE2NTIyNjBUzoxMzU5NTkyODI3MjA3NjhAMTQwOTQyNjYyNzAzNQ%3D%3D&el=1_x_2&esc=publicationCoverPdf.
6. Colectivo de Autores, (s-f) *Transformadas de Laplace, Z y Fourier*. Universidad Central “Marta Abreu” de las Villas. Santa Clara, Cuba.
7. Departamento de Arquitectura y Tecnología de Computadores, (2007) *Procesado digital de imagen y sonido*, Universidad del País Vasco. España
8. González, G., (1997), *Series de Fourier, transformada de Fourier y aplicaciones*.
<https://www.emis.de/journals/DM/v5/art6.pdf> [bajado 10-04-2017].
9. James, G., et al., (1993), *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. Segunda edición. Prentice Hall. México.
10. Kolmogoroff, A.N., Fomin, S.V., (1972) *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*, Editorial Mir. Moscú, URSS
11. Krasnov, M., et al., (1990) *Curso de matemáticas superiores para ingenieros 2*. Editorial Félix Varela. Ciudad de la Habana, Cuba.
12. La Cruz, W., (2015) *Introducción al cálculo operacional*. Conferencia. Universidad Central de Venezuela. Caracas, Venezuela.
13. Pargada, M., (s-f) *Transformada de Laplace*.
http://www4.tecnun.es/asignaturas/metmat/Texto/En_web/Transformada_de_Laplace/Transformada_de_Laplace_1.pdf [bajado el 04-04-2017]

14. Pinkus, A., Zafrany, S., (1997) *Fourier series and Integral Transforms*, Cambridge University Press. UK
15. Ríbnikov, K., (s-f) *Historia de las matemáticas*. Editorial Mir Moscú.
16. Sacerdoti, J., (2003) *Transformada Z*. Faculta de Ingeniería, Departamento de Matemática, Universidad de Buenos Aires.
17. Sacerdoti, J., (2005), *Transformada de Laplace*. Faculta de Ingeniería, Departamento de Matemática, Universidad de Buenos Aires.
18. Sánchez, J., (2007) *Búsqueda de estructuras de reguladores de sistemas de control discretos que minimicen los efectos debidos a la utilización de aritmética de precisión finita*. Tesis doctoral. Universidad de Alcalá.
19. Sánchez, O., (s-f) *Transformada Z*. Dirección de Investigación y Postgrado, Universidad Nacional Politécnica “Antonio José de Sucre” Barquisimeto, Venezuela. www.monografias.com [bajado 28-04-2017].
20. Soria, E. y Martínez, M., (2003) *Tratamiento Digital de Señales*. Pearson Educación. México. <https://books.google.com.cu/books?isbn=8420535591> [bajado 19-06-2017].
21. Tirado, S., (2012) *Transformada de Laplace y Transformada Z*. Departamento de Electricidad, Caracas Venezuela. www.monografias.com [bajado 28-04-2017].
22. Torres, S., (2013), *Pautas para hacer una monografía*. Universidad Nacional de la Matanza. Buenos Aires, Argentina.