

Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas

Facultad de Ingeniería Eléctrica

Departamento de Automática y Sistemas Computacionales



TRABAJO DE DIPLOMA

Regla de la Doble Relación para el ajuste de controladores para Accionamientos Eléctricos de Corriente Directa

Autor: Manuel Rodríguez Ibarra

Tutor: Dr. José Rafael Abreu García

Santa Clara

Año 2016

"Año 58 de la Revolución"

Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas

Facultad de Ingeniería Eléctrica

Departamento de Automática y Sistemas Computacionales



TRABAJO DE DIPLOMA

Regla de la Doble Relación para el ajuste de controladores para Accionamientos Eléctricos de Corriente Directa

Autor: Manuel Rodríguez Ibarra

mribarra@uclv.cu

Tutor: Dr. José Rafael Abreu García

Departamento de Automática y Sistemas Computacionales

FIE UCLV

abreu@uclv.edu.cu

Santa Clara

Año 2016

"Año 58 de la Revolución"



Hago constar que el presente trabajo de diploma fue realizado en la Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas como parte de la culminación de estudios de la especialidad de Ingeniería en Automática, autorizando a que el mismo sea utilizado por la Institución, para los fines que estime conveniente, tanto de forma parcial como total y que además no podrá ser presentado en eventos, ni publicados sin autorización de la Universidad.

Firma del Autor

Los abajo firmantes certificamos que el presente trabajo ha sido realizado según acuerdo de la dirección de nuestro centro y el mismo cumple con los requisitos que debe tener un trabajo de esta envergadura referido a la temática señalada.

Firma del Autor

Firma del Jefe de Departamento
donde se defiende el trabajo

Firma del Responsable de
Información Científico-Técnica

PENSAMIENTO

“No basta con adquirir la ciencia, es necesario también usarla”

Marco Tulio Cicerón

DEDICATORIA

A mis padres por estar siempre dispuestos a brindarme su apoyo, a mis amigos por creer y confiar en mí, en especial a Osmany Alejandro y a su madre Elsa por ayudarme en todo. A mi familia en general por haberme dado buenos consejos y haberme guiado para dar lo mejor de mí. En fin, dedico este trabajo a todos los que de una forma u otra han influido de manera positiva en mi formación profesional para lograr esta meta.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, a mi profesor y tutor Dr. José Rafael Abreu García por haberme enseñado y guiado por el camino correcto, exigiendo siempre lo mejor de mí. Agradezco a todos los profesores de la carrera y a todo el que puso en mí un granito de conocimiento y desarrollo como estudiante. A todos mis compañeros y amigos del aula por haber compartido todos los momentos difíciles y agradables durante toda la carrera.

TAREA TÉCNICA

1. Estudio bibliográfico sobre métodos de ajustes de controladores de accionamientos eléctricos.
2. Análisis de control de velocidad de accionamientos eléctricos de corriente directa con acciones P y PI.
3. Características de los ajustes basados en la Regla de la Doble Relación.
4. Aplicación de la Regla de la Doble Relación al control de velocidad.
5. Comparación con otros métodos de ajuste de controladores para accionamientos eléctricos.
6. Confección del Informe de los resultados obtenidos.

Firma del Autor

Firma del Tutor

RESUMEN

Los accionamientos eléctricos son una necesidad vital para el desarrollo, prácticamente no existe algún dispositivo en que, de una u otra manera, no se necesario el empleo de motores eléctricos. Un aspecto de suma importancia en el control de los motores eléctricos es el diseño de su controlador, para lo cual se han desarrollado múltiples procedimientos.

En este trabajo se analizan diferentes métodos de ajuste de controladores partiendo de los desarrollados empíricamente, pasando por los basados en la reducción del modelo de la planta y su respuesta, hasta los más modernos; entre los que resalta el método de la Regla de la Doble Relación.

Los accionamientos eléctricos poseen características diferentes de otros tipos de objetos de control, por lo que los métodos de diseño aplicables a estos últimos no son todo lo idóneo para los primeros. En los accionamientos eléctricos se requiere que la respuesta sea lo más rápida posible y evitar oscilaciones que provoquen desgastes innecesarios.

La regla de la Doble Relación, aplicada a accionamientos eléctricos ofrece respuestas mucho más rápidas que otros métodos, incrementando el ancho de banda.

Mediante simulación y con datos reales, se comprueban las mejoras obtenidas en la respuesta de los motores en el control de la velocidad: el tiempo de establecimiento, mínimo sobreimpulso alcanzado, entre otros aspectos.

TABLA DE CONTENIDOS

PENSAMIENTO	i
DEDICATORIA	ii
AGRADECIMIENTOS	iii
TAREA TÉCNICA	iv
RESUMEN	v
INTRODUCCIÓN	1
Organización del informe	2
CAPÍTULO 1. Caracterización de los lazos de control utilizados en accionamientos con máquinas de corriente directa.	4
1.1 Dinámica de máquinas de corriente directa	4
1.2 Controlador de corriente	7
1.3 Control proporcional	9
1.3.1 Controlador proporcional sin fricción en la planta	9
1.3.2 Controlador proporcional con fricción en la planta	15
1.4 Control Proporcional – Integral	19
1.4.1 Control Proporcional – Integral con fricción en la planta	19
1.4.2 Controlador Proporcional – Integral con ganancia proporcional en la retroalimentación	24
CAPÍTULO 2. Método de la Doble Relación para el ajuste de los parámetros del controlador	30
2.1 Ajustes empíricos de controladores	30
2.2 Métodos de sintonización de controladores	31
2.3 Regla de la Doble Relación.....	36

2.3.1	Características de la Regla de la Doble Relación	36
2.3.2	Aplicación de la Regla de la Doble Relación en un sistema de segundo orden.....	39
2.3.3	Aplicación de la Regla de la Doble Relación en un sistema de tercer orden .	40
2.3.4	Regla de la Doble Relación en controlador Proporcional de velocidad sin fricción.....	41
2.3.5	Regla de la Doble Relación en controlador Proporcional de velocidad con fricción.....	43
2.3.6	Regla de la Doble Relación en controlador Proporcional – Integral de velocidad sin fricción.....	44
2.3.7	Regla de la Doble Relación en controlador Proporcional – Integral de velocidad con fricción.....	48
2.3.8	Regla de la Doble Relación en controlador Proporcional – Integral de velocidad con ganancia proporcional en retroalimentación.	50
CAPÍTULO 3. Caso de estudio, aplicación de los resultados.....		52
3.1	Motor caso estudio	52
3.2	Sintonía de controladores	53
3.2.1	Sintonización del controlador Proporcional – Integral de velocidad con ganancia proporcional en lazo directo.	54
3.2.2	Sintonización del controlador Proporcional – Integral de velocidad con ganancia proporcional en retroalimentación.....	58
3.3	Respuesta del sistema controlado ante disturbio.....	64
3.4	Efecto del ruido en la Regla de la Doble Relación	65
3.5	Conclusiones del capítulo	66
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES		67
Conclusiones		67

Recomendaciones	68
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	69
ANEXOS	71
Anexo I Programa para calcular el amortiguamiento para sistemas hasta orden 16. ...	71
Anexo II Controlador PI con K_p en lazo directo.....	72
Anexo III Controlador PI con K_p en retroalimentación	74

INTRODUCCIÓN

El desarrollo de modernas tecnologías de control conjuntamente con los avances de la electrónica ha permitido la aparición de nuevas posibilidades de utilización de accionamientos eléctricos. Uno de los aspectos más complejos de los accionamientos eléctricos es sin lugar a dudas su control en lazo cerrado. La utilización de controladores requiere de la determinación de los ajustes de sus parámetros con el fin de lograr la operación deseada.

Existen diversos métodos de sintonizar los controladores con características particulares de acuerdo al tipo de operación deseada, en el caso específico de los accionamientos de corriente directa se han utilizados métodos basados en la respuesta de frecuencia y en el lugar geométrico de las raíces. En la actualidad se comienza a utilizar el método de la Regla de la Doble Relación que presenta ventajas en la determinación de la sintonía de los parámetros, motivo por el cual se propone realizar un estudio de sus características, ventajas y desventajas en la aplicación específica a accionamientos de corriente directa.

Hasta la fecha los ajustes de los parámetros de los controladores se han realizado mediante métodos convencionales, requiriendo en muchas oportunidades acciones de corte y prueba. El método de la Regla de la Doble Relación presenta ventajas con respecto a otros métodos, ya que con su aplicación se puede obtener de manera directa los parámetros de operación.

El problema consiste en que no existe referencia de comparación alguna entre el método de la Regla de la Doble Relación con otros métodos de sintonía para el ajuste de controladores en accionamientos eléctricos de corriente directa, por lo cual es necesario comprobar si el método de la Regla de la Doble Relación es superior a otros métodos para la sintonía de controladores destinados al control de accionamientos eléctricos.

Para el presente trabajo se propone como objetivo general:

Comparar el método de la Regla de la Doble Relación con otros métodos de sintonía para el ajuste de controladores en accionamientos eléctricos de corriente directa.

Se proponen como objetivos específicos:

1. Analizar las acciones de control más adecuadas para los lazos de control de velocidad en accionamientos eléctricos.
2. Estudiar los métodos más utilizados para la sintonización de los parámetros de los controladores de lazos de control de accionamientos eléctricos.
3. Utilizar la Regla de la Doble Relación para el ajuste de controladores de velocidad en accionamientos eléctricos, comprobando mediante la simulación sus ventajas y desventajas con relación a otros métodos de ajuste de los parámetros de los controladores.

Con este proyecto se pretende contribuir al desarrollo de los métodos de diseño de controladores para los accionamientos eléctricos. La implantación de los resultados posibilitará a los especialistas lograr un ajuste más adecuado de los parámetros de los controladores destinados a accionamientos eléctricos. Además, se dispondrá de una justificación evaluada técnicamente sobre las posibles ventajas de la utilización del método propuesto.

Los resultados de la investigación poseen una aplicación práctica y teórica de gran trascendencia para todos los especialistas, investigadores y diseñadores de controladores para accionamientos eléctricos. El problema planteado requiere de pocos recursos ya que se pretende analizar las ventajas y desventajas del método mediante la simulación, disponiéndose de los medios computacionales necesarios.

Organización del informe

El informe de la investigación se estructurará, en resumen, introducción, capitulario, conclusiones, referencias bibliográficas y/o bibliografía y anexos.

En la introducción se dejará definida la importancia, actualidad y necesidad del tema que se aborda y se dejarán explícitos los elementos del diseño teórico.

Capitulario

CAPÍTULO I: Se dedicará a la caracterización de los lazos de control utilizados en accionamientos eléctricos.

CAPÍTULO II: Se utilizará para analizar las características de método de la Regla de la Doble Relación para el diseño de controladores.

CAPÍTULO III: Se dedicará a la comparación del método propuesto con otros métodos, obteniendo las conclusiones acerca de sus ventajas y desventajas.

CAPÍTULO 1. Caracterización de los lazos de control utilizados en accionamientos con máquinas de corriente directa.

Para controlar máquinas eléctricas se utilizan diferentes estructuras de control que dependen del tipo de máquina, los requerimientos operacionales y las fuentes energéticas disponibles.

Las estructuras señaladas generalmente son de lazo cerrado y se pueden controlar parámetros tales como posición, velocidad y momento, entre otros.

En este capítulo se abordará el análisis referido al error en estado estable, velocidad de respuesta, ancho de banda, entre otros parámetros.

1.1 Dinámica de máquinas de corriente directa

En las máquinas eléctricas rotatorias, dos fenómenos electromagnéticos toman lugar simultáneamente:

Generación de la fem: Cuando el devanado rota en el seno de un campo magnético, se induce una fuerza electromotriz, la cual es descrita por $e_b = K_b * \omega_r$, donde K_b es una constante y ω_r es la velocidad angular del rotor. (Nam 2010)

Generación de momento: Cuando un conductor, por el cual circula una corriente eléctrica, está colocado en el seno de un campo magnético, se desarrolla sobre él una fuerza, la cual produce un momento electromagnético descrito por $T_e = K_T * i_a$, donde K_T es una constante y i_a es la corriente de armadura. (Nam 2010)

La Fig 1.1 muestra el circuito equivalente de un motor CD.

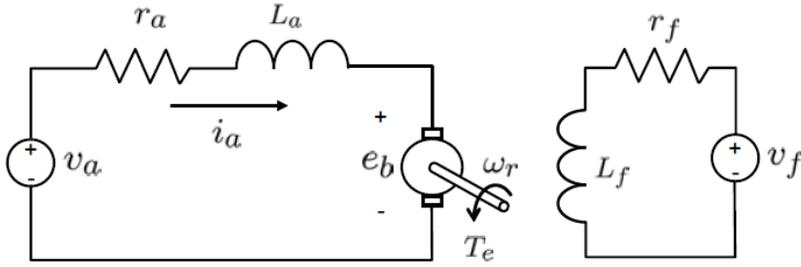


Figura 1.1. Circuito equivalente de un motor de corriente directa.

A partir de la figura anterior se puede plantear:

$$V_a = R_a * i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_b \quad (1.1)$$

$$E = e_b = K_b * \omega_r \quad (1.2)$$

$$T_{em} = T_e = K_t * i_a \quad (1.3)$$

Donde:

V_a : Voltaje de armadura [V]

R_a : Resistencia de armadura [Ω]

L_a : Inductancia de armadura [H]

E : Fem electromagnética [V]

T_{em} : Momento electromagnético [N.m]

Transformando y Despejando la ecuación (1.1):

$$V_a(s) - E(s) = R_a * i_a(s) + L_a s * i_a(s)$$

$$i_a(s) = \frac{V_a(s) - E(s)}{R_a + L_a s} \quad (1.4)$$

Sustituyendo la ecuación (1.2) en la ecuación (1.4):

$$i_a(s) = \frac{V_a(s) - K_b * \omega_r(s)}{R_a + L_a s}$$

Por otra parte, las dinámicas de las partes mecánicas son descritas por:

$$J \frac{d\omega_r}{dt} + B\omega_r + T_L = T_{em}$$

Donde:

J: Inercia de las partes rotatorias [Kg.m²]

B: Coeficiente de fricción [Kg.m]

T_L: Momento de la carga [N.m]

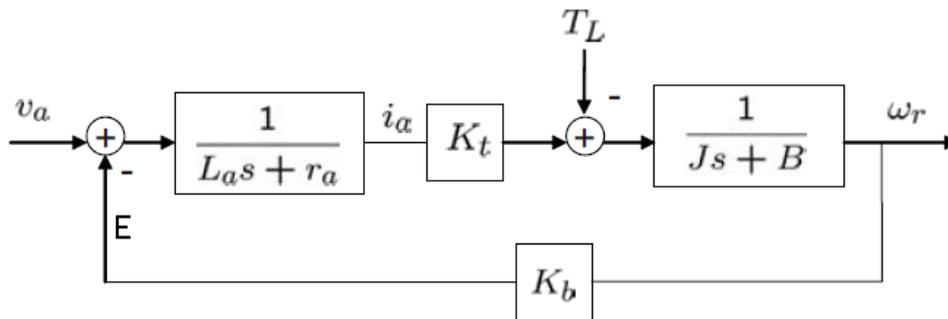
T_{em}: Momento electromagnético [N.m]

Transformando y despejando:

$$Js\omega_r(s) + B\omega_r(s) = T_{em}(s) - T_L(s)$$

$$\omega_r(s) = \frac{T_{em}(s) - T_L(s)}{Js + B}$$

A partir de las ecuaciones planteadas anteriormente se puede conformar la representación de la función transferencial del motor:



Los controladores de motores de corriente directa normalmente consisten en dos lazos de control: un lazo de control de corriente y uno de velocidad (Fig. 1.2). Generalmente ambos controladores utilizan un controlador proporcional integral (PI). El lazo de control de corriente se encuentra dentro del lazo de control de velocidad, esto es llamado estructura de control en cascada.

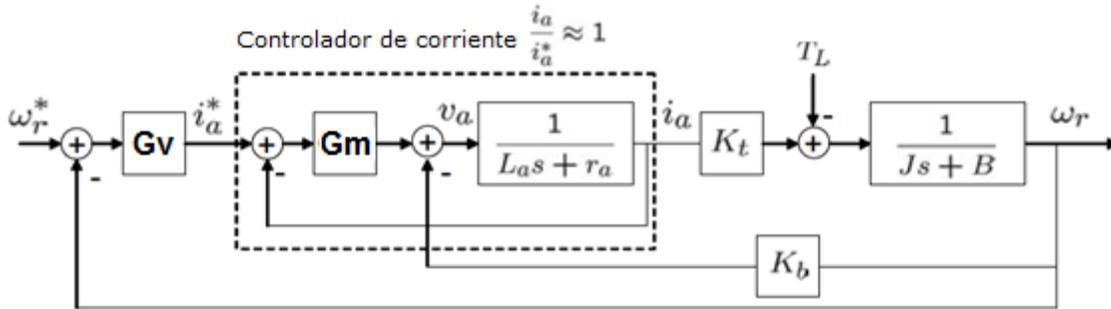
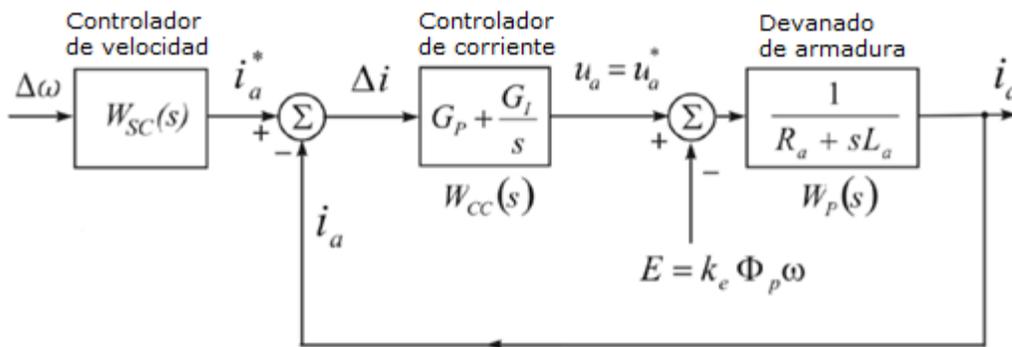


Figura 1.2. Diagrama en bloques del control de corriente y velocidad de un motor CD.

1.2 Controlador de corriente

El diagrama de bloques simplificado del controlador de corriente de armadura está dado por la siguiente figura:



La corriente de referencia i_a^* es obtenida del controlador de velocidad $W_{sc}(s)$. En la práctica el controlador que más se utiliza es de acción proporcional e integral con sus respectivas ganancias denotadas por G_p y G_i . En la estructura de control manejada, el amplificador de potencia alimenta el devanado de armadura con el voltaje determinado por el controlador de corriente. El amplificador se considera ideal, propiciando que el voltaje $u_a(t)$ sea igual al de referencia $u_a^*(t)$ sin retardo. La relación de cambio de la fuerza electromotriz E está determinada por la velocidad del rotor ω . Las dinámicas de velocidades son lentas comparado con los fenómenos transitorios dentro del lazo de corriente, por consiguiente, la fuerza electromotriz E será tratada como un disturbio externo que varía lentamente afectando al lazo de corriente.

Las funciones transferenciales del devanado de armadura $W_p(s)$ y del controlador de corriente $W_{cc}(s)$ están dados por la ecuación (1.5), así como la función transferencial de lazo cerrado $W_{ss}(s)$ en la ecuación (1.6).

$$W_p(s) = \frac{i_a(s)}{u_a(s) - E(s)} = \frac{1}{R_a + sL_a}, \quad W_{cc}(s) = \frac{sG_p + G_I}{s} \quad (1.5)$$

$$W_{SS}(S) = \left. \frac{i_a(s)}{i_a^*(s)} \right|_{E=0} = \frac{W_p W_{cc}}{1 + W_p W_{cc}} = \frac{1 + s \frac{G_p}{G_I}}{1 + s \frac{R_a + G_p}{G_I} + s^2 \frac{L_a}{G_I}} \quad (1.6)$$

La función transferencial de lazo cerrado tiene un cero real y dos polos, estos pueden ser reales o complejos conjugados dependiendo de las ganancias G_p y G_I . Los polos complejos conjugados contribuyen a un sobreimpulso en la respuesta al paso y puede resultar en la corriente de armadura valores instantáneos que excedan el nivel requerido. La corriente de armadura circula por los transistores de potencia y tiristores en los convertidores de potencia, y son sensitivos a sobrecargas instantáneas de corrientes, por ello sería mejor evitar sobreimpulsos en la corriente de armadura. Es decir, las ganancias G_p y G_I deben ser tales que los polos de lazo cerrado sean reales.

Tradicionalmente en controladores de CD es común aplicar la relación $G_p/G_I = L_a/R_a$. De esta manera la constante de tiempo del devanado de armadura $\tau_a = L_a/R_a$, será igual a $\tau_{cc} = G_p/G_I$. Si se analiza $W_{cc}(s)$ en la ecuación (1.5), el valor τ_{cc} es la constante de tiempo correspondiente al cero real $Z_{cc} = -G_p/G_I$.

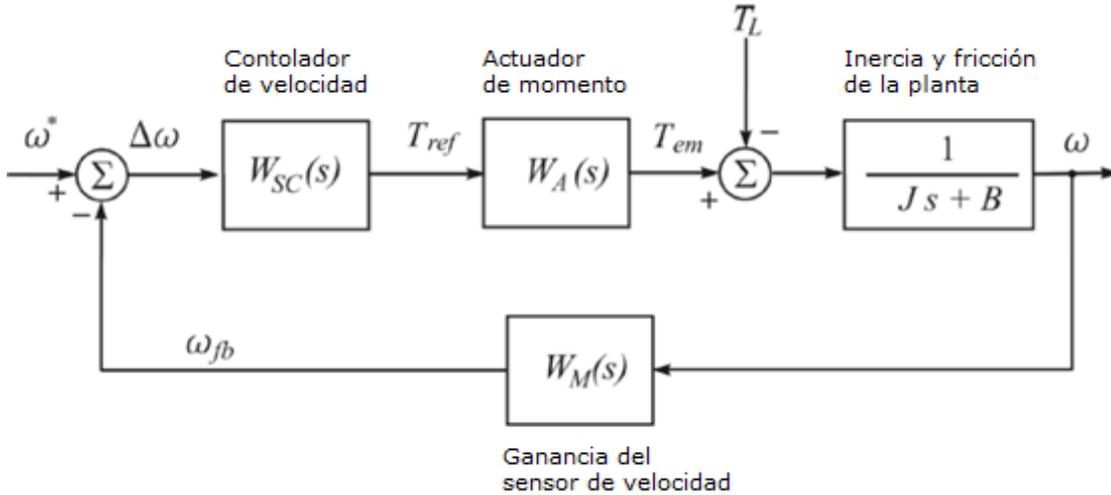
Reestructurando la ecuación (1.5) quedaría:

$$W_p(s) = \frac{1}{R_a + sL_a} = \frac{\frac{1}{R_a}}{1 + s \frac{L_a}{R_a}}, \quad W_{cc}(s) = \frac{1 + s \frac{G_p}{G_I}}{\frac{s}{G_I}}$$

El cero $Z_{cc} = -G_p/G_I$ cancela el polo $P_p = -L_a/R_a$ al multiplicar $W_p * W_{cc}$ por lo que la ecuación (1.6) quedaría:

$$W_A(S) = W_{SS}(S) = \frac{W_p W_{cc}}{1 + W_p W_{cc}} = \frac{G_I}{sR_a} = \frac{1}{1 + s \frac{R_a}{G_I}} = \frac{1}{1 + s\tau_A}$$

A partir de las modificaciones surgidas en las ecuaciones (1.5) y (1.6), el lazo de control de corriente se ha reducido a una función transferencial de primer orden con retardo. Por consiguiente, el diagrama en bloques reducido correspondiente al lazo de control de velocidad es:



La función del momento T_{em} es hacer que la velocidad actual ω siga la referencia ω^* en presencia de variaciones de la carga. Por lo tanto, el momento generado deberá compensar los cambios en la carga T_L , suprimiendo los efectos de fricción y otros fenómenos secundarios.

En implementaciones prácticas, T_{ref} es la entrada al actuador de momento, representado por el bloque $W_a(s)$. Con vistas de facilitar la tarea del control de velocidad, es deseado usar actuadores donde el momento real T_{em} siga la referencia T_{ref} fielmente y sin retardos, por consiguiente, la función transferencial del actuador de momento ideal es $W_a(s) = 1$ o $W_a(s) = K_M = cte$.

1.3 Control proporcional

1.3.1 Controlador proporcional sin fricción en la planta

Si se considera la planta con un coeficiente de fricción despreciable, la relación de cambio del controlador de velocidad está dado por:

$$J \frac{d\omega_r}{dt} = T_{em} - T_L$$

Siempre que el momento T_{em} sea mayor que el de la carga T_L , la velocidad ω se incrementará. Mientras T_L sea constante o varíe muy poco, la razón de cambio $d\omega/dt$ será proporcional al momento electromagnético T_{em} . El controlador de velocidad deberá asegurar que ω real siga la referencia ω^* . Por consiguiente, una decisión sencilla de diseño es generar el momento de referencia en proporción al error de velocidad detectado, $T_{ref} = K_P (\omega^* - \omega) = K_P \Delta\omega$. Es de esperar que un error positivo $\omega^* - \omega$, donde $T_{em} = T_{ref}$, produce una razón de cambio positiva $d\omega/dt$, lo cual, a su vez, conduce la velocidad real ω hacia la referencia ω^* y reduce el error $\Delta\omega$. De forma similar ocurre cuando el error $\Delta\omega$ es negativo. Por lo tanto, $T_{ref} = K_P \Delta\omega$ es considerada de acción proporcional.

La Fig. 1.3 muestra el sistema de control proporcional de velocidad, teniendo en cuenta una medición ideal de velocidad ($\omega_{fb} = \omega$), un actuador de momento de respuesta instantánea ($T_{em} = T_{ref}$) y una planta sin fricción ($B=0$).

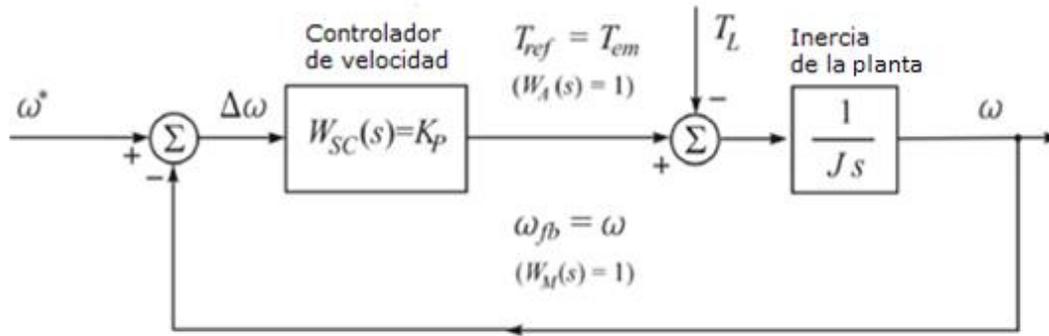


Figura 1.3. Diagrama en bloques del controlador Proporcional de velocidad sin fricción en la planta.

Para el sistema mostrado anteriormente, el momento T_{em} es proporcional al error de velocidad.

$$W_{SC}(s) = \frac{T_{ref}(s)}{\Delta\omega(s)} = K_P$$

Además, se cumple que:

$$W_P(s) = \frac{\omega(s)}{T_{em}(s) - T_L(s)} = \frac{1}{Js}$$

Haciendo un análisis sin perturbaciones:

La función transferencial en lazo abierto del sistema es:

$$W_S(s) = W_{SC}(s) * W_P(s)$$

La función transferencial de lazo cerrado es:

$$W_{SS}(S) = \left. \frac{\omega(s)}{\omega^*(s)} \right|_{(\omega_{fb}=0, T_L=0)} = \frac{W_{SC}(s)*W_P(s)}{1+W_{SC}(s)*W_P(s)} = \frac{K_P*\frac{1}{s}}{1+K_P*\frac{1}{s}}$$

$$W_{SS}(S) = \frac{K_P}{Js+K_P} = \frac{1}{\frac{J}{K_P}s+1} = \frac{1}{\tau s+1}, \quad \tau = \frac{J}{K_P} \quad (1.7)$$

El error de velocidad es:

$$\Delta\omega(s) = \omega_{ref}(s) - \omega(s) \quad (1.8)$$

Donde

$$\omega(s) = W_{SS}(S) * \omega_{ref}(s) \quad (1.9)$$

Sustituyendo la ecuación (1.9) en la ecuación (1.8):

$$\Delta\omega(s) = [1 - W_{SS}(S)] * \omega_{ref}(s) \quad (1.10)$$

Sustituyendo la ecuación (1.7) en la ecuación (1.10) y despejando:

$$\Delta\omega(s) = \frac{\tau s}{\tau s+1} * \omega_{ref}(s) \quad (1.11)$$

El error de velocidad en estado estable es:

$$\Delta\omega(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s * \Delta\omega(s) \quad (1.12)$$

Sustituyendo la ecuación (1.11) en la ecuación (1.12):

$$\Delta\omega(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s * \frac{\tau s}{\tau s+1} * \omega_{ref}(s) \quad (1.13)$$

Ante una entrada paso de magnitud A_1 por referencia

$$\omega_{ref}(s) = \frac{A_1}{s} \quad (1.14)$$

Sustituyendo la ecuación (1.14) en la ecuación (1.13):

$$\Delta\omega(\infty) = 0 \quad (0 \text{ error de velocidad ante entrada paso por referencia})$$

Ante una entrada rampa de magnitud A_2 por referencia

$$\omega_{ref}(s) = \frac{A_2}{s^2} \quad (1.15)$$

Sustituyendo la ecuación (1.15) en la ecuación (1.13):

$$\Delta\omega(\infty) = \tau * A_2 = \frac{J}{K_P} A_2 \quad (\text{error de velocidad ante entrada rampa por referencia})$$

El error $\Delta\omega$ ante entrada rampa por referencia es proporcional a la inercia de la planta e inversamente a la ganancia K_P . Un incremento de K_P podría reducir el error de seguimiento. Sin embargo, el rango de ganancia aplicable está limitado debido a la condición de estabilidad del sistema. Es decir, el error de seguimiento no puede ser completamente eliminado. Por lo tanto, para lograr un seguimiento libre de errores, la estructura del controlador de velocidad $W_{sc}(s)$ debe ser cambiado.

Ancho de banda

Existen varias definiciones en la práctica sobre la frecuencia ω_{BW} . La interpretación más común del ancho de banda es definida como la frecuencia a la cual la amplitud de la respuesta de frecuencia expresada en decibeles es igual a -3db o 0.707 en amplitud.

$$|W_{SS}(\omega_{BW})| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|W_{SS}(j\omega_{BW})| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \left| \frac{1}{\tau j\omega_{BW} + 1} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(\tau\omega_{BW})^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros:

$$\frac{1}{(\tau\omega_{BW})^2 + 1} = \frac{1}{2}, \quad \tau^2\omega_{BW}^2 + 1 = 2$$

De aquí:

$$\omega_{BW}^2 = \frac{1}{\tau^2}, \quad \omega_{BW} = \frac{1}{\tau} = \frac{K_P}{J}$$

La ganancia proporcional del controlador tiene un impacto directo sobre el ancho de banda ($\omega_{BW} = K_P/J$). Aparentemente el ancho de banda del sistema no está limitado, pues la ganancia puede ser arbitrariamente seleccionada. En la práctica el rango de ganancia aplicable está

siempre limitado. Un cierto nivel de componentes parásitos existe en la señal de retroalimentación ω_{fb} y por ende en el error de velocidad $\Delta\omega$. Referido al ruido, las señales parásitas usualmente tienen una amplitud mucho menor que ω_{fb} . Incluso cuando se multiplica por una ganancia moderada de K_P , la contribución del ruido al momento de referencia T_{ref} es insignificante en muchos casos. Sin embargo, valores extremadamente altos de ganancia podrían resultar en un ruido significativo contenido en las señales T_{ref} y T_{em} , dificultando la capacidad del sistema de seguir la entrada de referencia; además de afectar la integridad del motor eléctrico y los amplificadores de potencia asociados. Por estas razones, la ganancia K_P y el ancho de banda de lazo cerrado están sujetos a límites.

Efecto de la perturbación:

La función transferencial en lazo abierto del sistema es:

$$W_S(s) = -W_P(s)$$

La función transferencial de lazo cerrado es:

$$W_{SS}(S) = \frac{\omega(s)}{T_L(s)} \Big|_{(\omega^*=0)} = -\frac{W_P(s)}{1+W_{SC}(s)*W_P(s)} = -\frac{\frac{1}{Js}}{1+K_P*\frac{1}{Js}}$$

$$W_{SS}(S) = -\frac{1}{Js+K_P} = -\frac{1}{K_P} * \frac{1}{\frac{J}{K_P}s+1} = -\frac{1}{K_P} * \frac{1}{\tau s+1}, \quad \tau = \frac{J}{K_P} \quad (1.16)$$

El error de velocidad es:

$$\Delta\omega(s) = -\omega(s) \quad (1.17)$$

Donde:

$$\omega(s) = W_{SS}(S) * T_L(s) \quad (1.18)$$

Sustituyendo la ecuación (1.18) en la ecuación (1.17):

$$\Delta\omega(s) = -W_{SS}(S) * T_L(s) \quad (1.19)$$

Sustituyendo la ecuación (1.16) en la ecuación (1.19) y despejando:

$$\Delta\omega(s) = \frac{1}{K_P} * \frac{1}{\tau s+1} * T_L(s) \quad (1.20)$$

El **error de velocidad en estado estable** es:

$$\Delta\omega(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s * \Delta\omega(s) \quad (1.21)$$

Sustituyendo la ecuación (1.20) en la ecuación (1.21):

$$\Delta\omega(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s * \frac{1}{K_P} * \frac{1}{\tau s + 1} * T_L(s) \quad (1.22)$$

Ante una entrada paso de magnitud A_1 por la carga

$$T_L(s) = \frac{A_1}{s} \quad (1.23)$$

Sustituyendo la ecuación (1.23) en la ecuación (1.22):

$$\Delta\omega(\infty) = \frac{A_1}{K_P} \quad (\text{error de velocidad ante entrada paso por la carga})$$

No se consigue cero error de velocidad en estado estable. Es decir, en presencia de carga la velocidad actual distará de la velocidad de referencia. La desviación de la velocidad es inversamente proporcional a K_P . A medida que aumenta el valor de K_P el error de velocidad en estado estable disminuye, pero como hemos mencionado anteriormente está sujeto a límites, por lo que no podrá ser incrementado lo suficiente para lograr que el error de velocidad sea despreciable. Esto se debe a que no hay efecto integral en la planta.

Ancho de banda

Realizando un procedimiento similar a lo anterior:

$$|W_{SS}(\omega_{BW})| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{K_P} \left| \frac{1}{\tau j \omega_{BW} + 1} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{K_P^2} \frac{1}{\sqrt{(\tau \omega_{BW})^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$K_P^2 \tau^2 \omega_{BW}^2 + 1 = 2$$

De aquí:

$$\omega_{BW}^2 = \frac{1}{\tau^2 K_P^2}, \quad \omega_{BW} = \frac{1}{\tau K_P} = \frac{1}{J}$$

En esta ocasión la ganancia proporcional del controlador no tiene ningún impacto sobre el ancho de banda ($\omega_{BW} = 1/J$). En cambio, la inercia de la planta influye de manera inversa sobre este. Un incremento de J conllevaría a una disminución del ancho de banda y, por consiguiente, el sistema se hace más lento.

1.3.2 Controlador proporcional con fricción en la planta

Como es conocido, el momento de la carga $T_L(t)$ representa un disturbio externo para el sistema. Resulta de interés investigar los efectos que puedan tener la fricción contenida en la planta en el desempeño del controlador proporcional de velocidad. Siendo así, el coeficiente de fricción B se encuentra presente en la dinámica del sistema mostrado en la Fig. 1.4.

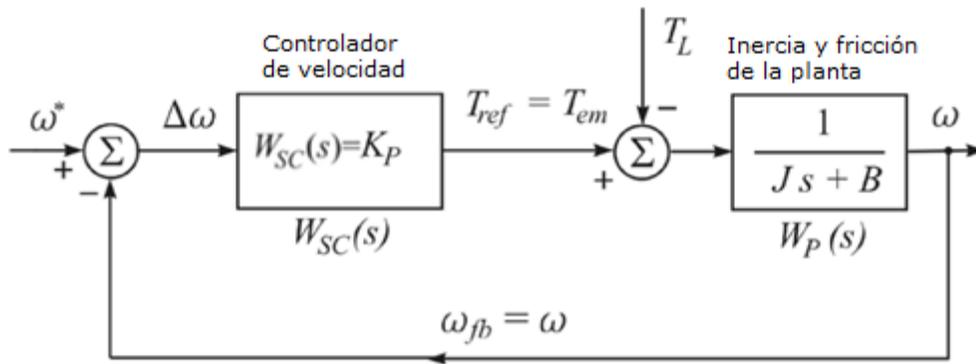


Figura 1.4. Diagrama en bloques del controlador Proporcional de velocidad con fricción en la planta.

$$W_P(s) = \frac{\omega(s)}{T_{em}(s) - T_L(s)} = \frac{1}{Js + B}, \quad W_{SC}(s) = K_P$$

Considerando solo la entrada de referencia:

La función transferencial en lazo abierto del sistema es:

$$W_S(s) = W_{SC}(s) * W_P(s)$$

La función transferencial de lazo cerrado es:

$$W_{SS}(S) = \left. \frac{\omega(s)}{\omega^*(s)} \right|_{(\omega_{fb}=0, T_L=0)} = \frac{W_{SC}(s) * W_P(s)}{1 + W_{SC}(s) * W_P(s)} = \frac{K_P * \frac{1}{Js+B}}{1 + K_P * \frac{1}{Js+B}}$$

$$W_{SS}(S) = \frac{K_P}{Js+B+K_P} = \frac{K_P}{K_P+B} \frac{1}{\frac{J}{K_P+B} s + 1} = K_1 \frac{1}{\tau s + 1}$$

$$K_1 = \frac{K_P}{K_P+B} < 1, \quad \tau = \frac{J}{K_P+B}$$

El **error de velocidad** es:

$$\Delta\omega(s) = \omega_{ref}(s) - \omega(s)$$

Realizando un procedimiento similar a lo anterior:

$$\Delta\omega(s) = [1 - W_{SS}(s)] * \omega_{ref}(s)$$

Teniendo en cuenta la incorporación de B en la función transferencial de lazo cerrado $W_{SS}(s)$, entonces:

$$\Delta\omega(s) = \frac{Js+B}{Js+B+K_P} * \omega_{ref}(s) \quad (1.24)$$

El **error de velocidad en estado estable** es:

$$\Delta\omega(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s * \Delta\omega(s) \quad (1.25)$$

Sustituyendo la ecuación (1.24) en la ecuación (1.25):

$$\Delta\omega(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s * \frac{Js+B}{Js+B+K_P} * \omega_{ref}(s) \quad (1.26)$$

Ante una entrada paso de magnitud A_1 por referencia

$$\omega_{ref}(s) = \frac{A_1}{s} \quad (1.27)$$

Sustituyendo la ecuación (1.27) en la ecuación (1.26):

$$\Delta\omega(\infty) = \frac{B}{B+K_P} A_1 \quad (\text{error de velocidad ante entrada paso por referencia})$$

Debido a la presencia de fricción, el error de velocidad en estado estable toma un valor diferente de cero, directamente proporcional a la magnitud del escalón de entrada A_1 y al coeficiente B e inversamente proporcional a la ganancia K_P .

Ancho de banda

$$|W_{SS}(\omega_{BW})| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|W_{SS}(j\omega_{BW})| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$K_1 \frac{1}{\sqrt{(\tau\omega_{BW})^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros:

$$\frac{K_1^2}{(\tau\omega_{BW})^2+1} = \frac{1}{2}, \quad \tau^2\omega_{BW}^2 + 1 = 2K_1^2$$

De aquí:

$$\omega_{BW}^2 = \frac{2K_1^2-1}{\tau^2}, \quad \omega_{BW} = \frac{1}{\tau}\sqrt{2K_1^2-1} = \frac{K_P}{J}\sqrt{2K_1^2-1}$$

Donde:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < K_1 = \frac{K_P}{K_P+B} < 1$$

El ancho de banda del sistema con fricción en la planta es menor que el que no presenta fricción. Esto hace que el sistema sea más lento. Es lógico que en presencia de fricción la velocidad de respuesta disminuye.

Considerando solo la perturbación:

La función transferencial en lazo abierto del sistema es:

$$W_S(s) = -W_P(s)$$

La función transferencial de lazo cerrado es:

$$W_{SS}(S) = \frac{\omega(s)}{T_L(s)} \Big|_{(\omega^*=0)} = -\frac{W_P(s)}{1+W_{SC}(s)*W_P(s)} = -\frac{\frac{1}{Js+B}}{1+K_P*\frac{1}{Js+B}}$$

$$W_{SS}(S) = -\frac{1}{Js+B+K_P} = -\frac{1}{B+K_P} * \frac{1}{\frac{J}{B+K_P}s+1} = -K_1 * \frac{1}{\tau s+1}$$

$$K_1 = \frac{1}{K_P+B} < 1, \quad \tau = \frac{J}{B+K_P}$$

El error de velocidad es:

$$\Delta\omega(s) = -\omega(s)$$

Donde:

$$\omega(s) = W_{SS}(S) * T_L(s)$$

Realizando un procedimiento similar a lo anterior:

$$\Delta\omega(s) = K_1 * \frac{1}{\tau s + 1} * T_L(s)$$

El **error de velocidad en estado estable** es:

$$\Delta\omega(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s * \Delta\omega(s)$$

$$\Delta\omega(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s * K_1 * \frac{1}{\tau s + 1} * T_L(s) \quad (1.28)$$

Ante una entrada paso de magnitud A_1 por la carga

$$T_L(s) = \frac{A_1}{s} \quad (1.29)$$

Sustituyendo la ecuación (1.29) en la ecuación (1.28):

$$\Delta\omega(\infty) = K_1 * A_1 = \frac{1}{K_P + B} A_1 \quad (\text{error de velocidad ante entrada paso por la carga})$$

Anteriormente se llegó a la conclusión de que sin fricción el error de velocidad no se anulaba analizando el sistema por la entrada perturbadora. Era de esperar que con fricción tampoco se lograra.

Ancho de banda

El ancho de banda resulta el mismo que se obtuvo en el análisis por la entrada de referencia, solamente varía el valor de K_1 .

$$\omega_{BW} = \frac{1}{\tau} \sqrt{2K_1^2 - 1} = \frac{K_P}{J} \sqrt{2K_1^2 - 1}$$

Donde:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < K_1 = \frac{1}{K_P + B} < 1$$

El sistema que presenta fricción en la planta, ya sea ante el efecto o no de las perturbaciones, tiene un ancho de banda menor y, por consiguiente, es más lento.

La Tabla 1.1 resume todo el análisis realizado anteriormente respecto al controlador proporcional de velocidad:

Tabla 1.1. Controlador P para una planta con y sin fricción.

Controlador P		FTLC (W_{SS})	Error de velocidad $\Delta\omega(\infty)$	Ancho de banda ($ W_{SS}(\omega_{BW}) $)
Sin fricción (B=0)	Por referencia	$W_{SS}(S) = \frac{1}{\tau s + 1}$ $\tau = \frac{J}{K_P}$	$\Delta\omega(\infty) = 0$ (paso) $\Delta\omega(\infty) = \frac{J}{K_P} A_2$ (rampa)	$\omega_{BW} = \frac{K_P}{J}$
	Por perturb.	$W_{SS}(S) = -\frac{1}{K_P} * \frac{1}{\tau s + 1}$ $\tau = \frac{J}{K_P}$	$\Delta\omega(\infty) = \frac{A_1}{K_P}$ (paso)	$\omega_{BW} = \frac{1}{J}$
Con fricción (B≠0)	Por referencia	$W_{SS}(S) = K_1 \frac{1}{\tau s + 1}$ $K_1 = \frac{K_P}{K_P + B} < 1$ $\tau = \frac{J}{K_P + B}$	$\Delta\omega(\infty) = \frac{B}{B + K_P} A_1$ (paso)	$\omega_{BW} = \frac{K_P}{J} \sqrt{2K_1^2 - 1}$ $\frac{1}{\sqrt{2}} < K_1 = \frac{K_P}{K_P + B} < 1$
	Por perturb.	$W_{SS}(S) = -K_1 * \frac{1}{\tau s + 1}$ $K_1 = \frac{1}{K_P + B} < 1$ $\tau = \frac{J}{B + K_P}$	$\Delta\omega(\infty) = \frac{1}{K_P + B} A_1$ (paso)	$\omega_{BW} = \frac{K_P}{J} \sqrt{2K_1^2 - 1}$ $\frac{1}{\sqrt{2}} < K_1 = \frac{1}{K_P + B} < 1$

1.4 Control Proporcional – Integral

1.4.1 Control Proporcional – Integral con fricción en la planta

Anteriormente se ha demostrado que el controlador de velocidad con acción proporcional solamente no puede suprimir el error de velocidad $\Delta\omega = \omega^* - \omega$, en casos donde está presente el momento de la carga T_L o cuando el coeficiente de fricción B asume un valor diferente de cero (B≠0). A partir de este análisis se puede decir que la eliminación de tal error requiere

un controlador, en este caso añadiendo una acción de control integral. La Fig. 1.5 representa el sistema de control de velocidad, el cual consta de un controlador PI, además se considera ideal la medición de velocidad del sistema ($\omega_{fb} = \omega$), el actuador de momento con respuesta instantánea ($T_{em} = T_{ref}$) y la planta con inercia J y fricción B.

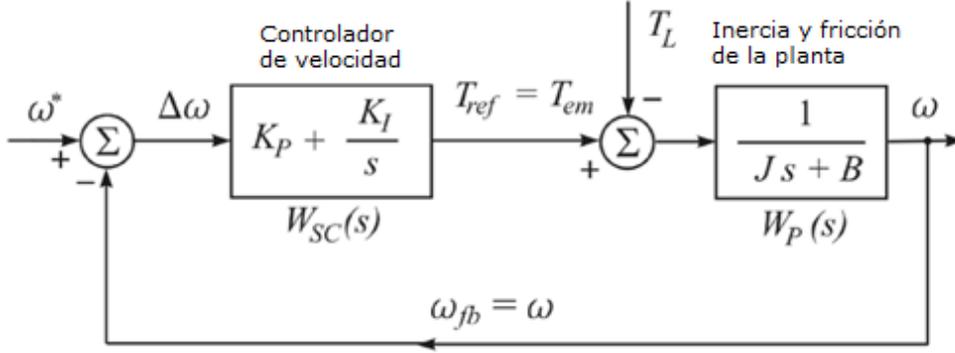


Figura 1.5. Diagrama en bloques del controlador Proporcional-Integral de velocidad con fricción en la planta.

Haciendo el análisis por la entrada de referencia:

$$W_P(s) = \left. \frac{\omega(s)}{T_{em}(s)} \right|_{(T_L=0)} = \frac{1}{Js+B}$$

$$W_{SC}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{sK_P+K_I}{s}$$

$$W_{SS}(S) = \left. \frac{\omega(s)}{\omega^*(s)} \right|_{(\omega_{fb}=0, T_L=0)} = \frac{W_{SC}(s)*W_P(s)}{1+W_{SC}(s)*W_P(s)}$$

$$W_{SS}(S) = \frac{\frac{sK_P+K_I}{s} * \frac{1}{Js+B}}{1 + \frac{sK_P+K_I}{s} * \frac{1}{Js+B}} = \frac{sK_P+K_I}{s^2J+s(K_P+B)+K_I} = \frac{\frac{K_P}{J}s + \frac{K_I}{J}}{s^2 + \frac{K_P+B}{J}s + \frac{K_I}{J}}$$

$$W_{SS}(S) = \frac{a_1s+a_2}{s^2+sb_1+b_2}, \quad a_1 = \frac{K_P}{J}, \quad a_2 = \frac{K_I}{J}, \quad b_1 = \frac{K_P+B}{J}, \quad b_2 = \frac{K_I}{J}$$

La FTLC $W_{SS}(S)$ es un sistema de segundo orden que presenta un cero real $s = -K_I/K_P$, además:

$$W_n = \sqrt{b_2} = \sqrt{\frac{K_I}{J}} \quad (\text{frecuencia natural de oscilación})$$

También se tiene que:

$$2\varphi W_n = b_1 = \frac{K_P+B}{J}, \quad \varphi = \frac{K_P+B}{2JW_n} \quad (\text{coeficiente de amortiguamiento})$$

Es decir, con el valor deseado W_n se ajusta K_I y una vez ajustada esta, con el valor deseado de φ se ajusta K_P , ya que B y J no son parámetros ajustables.

El error de velocidad es:

$$\Delta\omega(s) = \omega_{ref}(s) - \omega(s)$$

Realizando un procedimiento similar a lo anterior:

$$\Delta\omega(s) = [1 - W_{SS}(s)] * \omega_{ref}(s) \quad (1.30)$$

Sustituyendo la FTLC $W_{ss}(s)$ en la ecuación (1.30):

$$\Delta\omega(s) = \left[1 - \frac{sK_P+K_I}{s^2J+s(K_P+B)+K_I}\right] * \omega_{ref}(s)$$

$$\Delta\omega(s) = \left[\frac{s^2J+sB}{s^2J+s(K_P+B)+K_I}\right] * \omega_{ref}(s)$$

$$\Delta\omega(s) = \left[\frac{s^2+\frac{B}{J}s}{s^2+\frac{K_P+B}{J}s+\frac{K_I}{J}}\right] * \omega_{ref}(s)$$

El error de velocidad en estado estable es:

$$\Delta\omega(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s * \Delta\omega(s)$$

Sustituyendo $\Delta\omega(s)$ en la ecuación anterior:

$$\Delta\omega(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s * \left[\frac{s^2+\frac{B}{J}s}{s^2+\frac{K_P+B}{J}s+\frac{K_I}{J}}\right] * \omega_{ref}(s) \quad (1.31)$$

Ante una entrada paso de magnitud A_1 por referencia

$$\omega_{ref}(s) = \frac{A_1}{s} \quad (1.32)$$

Sustituyendo la ecuación (1.32) en la ecuación (1.31):

$$\Delta\omega(\infty) = 0 \quad (\text{Cero error de velocidad ante entrada paso por referencia})$$

Ante una entrada rampa de magnitud A_2 por referencia

$$\omega_{ref}(s) = \frac{A_2}{s^2} \quad (1.33)$$

Sustituyendo la ecuación (1.33) en la ecuación (1.31):

$$\Delta\omega(\infty) = \frac{B}{\frac{J}{K_I}} A_2 = \frac{B}{K_I} A_2 \quad (\text{error de velocidad en estado estable ante entrada rampa por referencia})$$

Ante una entrada paso por la entrada de referencia, el controlador PI logra que la velocidad actual siga la velocidad de referencia, no siendo así ante una entrada tipo rampa. En este caso el error es directamente proporcional al efecto que produce la fricción de la planta, mientras la ganancia integral influye de manera inversa. Es decir, se puede aumentar K_I de manera tal que propicie una disminución considerable del error de velocidad en estado estable $\Delta\omega(\infty)$.

Ancho de banda

$$|W_{SS}(\omega_{BW})| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left| \frac{\frac{K_P}{J}s + \frac{K_I}{J}}{s^2 + \frac{K_{P+B}}{J}s + \frac{K_I}{J}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \left| \frac{\frac{K_P}{J}j\omega + \frac{K_I}{J}}{(j\omega)^2 + \frac{K_{P+B}}{J}j\omega + \frac{K_I}{J}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{(\frac{K_P}{J})^2\omega^2 + (\frac{K_I}{J})^2}}{\sqrt{(\frac{K_I}{J} - \omega^2)^2 + (\frac{K_{P+B}}{J})^2\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{(K_P)^2\omega^2 + K_I^2}{(K_I - J\omega^2)^2 + (K_{P+B})^2\omega^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Considerando solo la perturbación:

La función transferencial en lazo abierto del sistema es:

$$W_S(s) = -W_P(s)$$

La función transferencial de lazo cerrado es:

$$W_{SS}(S) = \frac{\omega(s)}{T_L(s)} \Big|_{(\omega^*=0)} = - \frac{W_P(s)}{1+W_{SC}(s)*W_P(s)} = - \frac{\frac{1}{Js+B}}{1+\frac{sK_P+K_I}{s}*\frac{1}{Js+B}}$$

$$W_{SS}(S) = - \frac{s}{s^2J+s(K_P+B)+K_I} = - \frac{\frac{s}{J}}{s^2+\frac{K_P+B}{J}s+\frac{K_I}{J}}$$

$$W_{SS}(S) = -\frac{a_1 s}{s^2 + s b_1 + b_2}, \quad a_1 = \frac{1}{J}, \quad b_1 = \frac{K_P + B}{J}, \quad b_2 = \frac{K_I}{J}$$

El **error de velocidad** es:

$$\Delta\omega(s) = -\omega(s)$$

Donde:

$$\omega(s) = W_{SS}(S) * T_L(s)$$

Realizando un procedimiento similar a lo anterior:

$$\Delta\omega(s) = \frac{\frac{s}{J}}{s^2 + \frac{K_P + B}{J}s + \frac{K_I}{J}} * T_L(s)$$

El **error de velocidad en estado estable** es:

$$\Delta\omega(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s * \Delta\omega(s)$$

$$\Delta\omega(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s * \frac{\frac{s}{J}}{s^2 + \frac{K_P + B}{J}s + \frac{K_I}{J}} * T_L(s) \quad (1.34)$$

Ante una entrada paso de magnitud A_1 por la carga

$$T_L(s) = \frac{A_1}{s} \quad (1.35)$$

Sustituyendo la ecuación (1.35) en la ecuación (1.34):

$$\Delta\omega(\infty) = 0 \quad (\text{cero error de velocidad ante entrada paso por la carga})$$

Con el empleo del controlador PI se ha logrado que la velocidad actual siga la de referencia ante una entrada tipo paso por la carga. Esto no se había logrado con el controlador proporcional de velocidad.

Ante una entrada rampa de magnitud A_2 por referencia

$$\omega_{ref}(s) = \frac{A_2}{s^2} \quad (1.36)$$

Sustituyendo la ecuación (1.36) en la ecuación (1.34):

$\Delta\omega(\infty) = \frac{1}{\frac{K_I}{J}} A_2 = \frac{1}{K_I} A_2$ (error de velocidad en estado estable ante entrada rampa por referencia)

Ante entrada rampa por disturbio no se logra suprimir el error de velocidad, resultado similar al que se alcanzó en el análisis de esta misma entrada por referencia.

Ancho de banda

$$|W_{SS}(\omega_{BW})| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

La ecuación característica de la función transferencial de lazo cerrado ya sea por referencia o por disturbio es la misma. La diferencia consiste en el numerador. Por lo mismo:

$$\left| \frac{\frac{s}{J}}{s^2 + \frac{K_P+B}{J}s + \frac{K_I}{J}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \left| \frac{\frac{j\omega}{J}}{(j\omega)^2 + \frac{K_P+B}{J}j\omega + \frac{K_I}{J}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{\omega}{J}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{K_I}{J} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{K_P+B}{J}\right)^2 \omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\omega}{(K_I - J\omega^2)^2 + (K_P+B)^2 \omega^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

1.4.2 Controlador Proporcional – Integral con ganancia proporcional en la retroalimentación

La Fig. 1.6 muestra otra estructura posible a utilizar, la cual se realiza colocando la acción proporcional en retroalimentación.

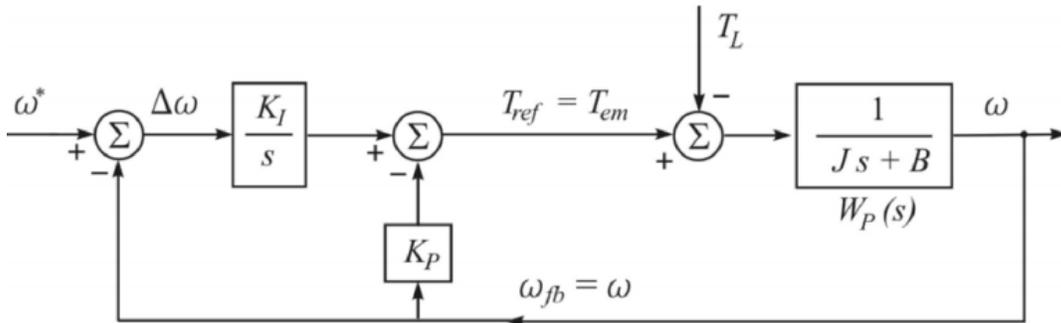


Figura 1.6. Diagrama en bloques del controlador Proporcional-Integral de velocidad con ganancia proporcional en realimentación.

Considerando solo la entrada de referencia:

Para hallar la función transferencial de lazo cerrado, primero se resuelve el lazo interno como sigue:

$$W_I(S) = \left. \frac{\omega(s)}{T_{ref}(s)} \right|_{(T_L=0)} = \frac{W_P(s)}{1+W_P(s)*K_P} = \frac{\frac{1}{Js+B}}{1+\frac{1}{Js+B}*K_P}$$

$$W_I(S) = \frac{1}{Js+K_P+B}$$

Luego la función transferencial de lazo cerrado es:

$$W_{SS}(S) = \left. \frac{\omega(s)}{\omega^*(s)} \right|_{(\omega_{fb}=0, T_L=0)} = \frac{\frac{K_I}{s} * \frac{1}{Js+K_P+B}}{1+\frac{K_I}{s} * \frac{1}{Js+K_P+B}}$$

$$W_{SS}(S) = \frac{K_I}{s^2J+s(K_P+B)+K_I} = \frac{\frac{K_I}{J}}{s^2+\frac{K_P+B}{J}s+\frac{K_I}{J}}$$

$$W_{SS}(S) = \frac{K_I}{s^2J+s(K_P+B)+K_I} = \frac{\frac{K_I}{J}}{s^2+\frac{K_P+B}{J}s+\frac{K_I}{J}}$$

$$W_{SS}(S) = \frac{a_1}{s^2+sb_1+b_2}, \quad a_1 = \frac{K_P}{J}, \quad b_1 = \frac{K_P+B}{J}, \quad b_2 = \frac{K_I}{J}$$

Cuando se coloca la ganancia integral en la parte directa del lazo de control y se ubica la ganancia proporcional en la retroalimentación, la función transferencial de lazo cerrado es alterada en su numerador y se suprime el cero de lazo cerrado. Esto provoca una disminución del ancho de banda del sistema por lo que este se hace más lento. También disminuye el sobreimpulso ante entrada paso. En cambio, el denominador y por ende los polos de lazo cerrado, se mantienen sin cambios.

Como la ecuación característica de la función de transferencia de lazo cerrado se mantiene igual, la frecuencia natural de oscilación y el coeficiente de amortiguamiento son los mismos:

$$W_n = \sqrt{b_2} = \sqrt{\frac{K_I}{J}} \quad (\text{frecuencia natural de oscilación})$$

$$\varphi = \frac{K_P+B}{2JW_n} \quad (\text{coeficiente de amortiguamiento})$$

El **error de velocidad** es:

$$\Delta\omega(s) = \omega_{ref}(s) - \omega(s)$$

Realizando un procedimiento similar a lo anterior:

$$\Delta\omega(s) = [1 - W_{SS}(s)] * \omega_{ref}(s) \quad (1.37)$$

Sustituyendo la FTLC $W_{ss}(s)$ en la ecuación (1.37):

$$\Delta\omega(s) = \left[1 - \frac{K_I}{s^2J + s(K_P + B) + K_I}\right] * \omega_{ref}(s)$$

$$\Delta\omega(s) = \left[\frac{s^2J + s(K_P + B)}{s^2J + s(K_P + B) + K_I}\right] * \omega_{ref}(s)$$

$$\Delta\omega(s) = \left[\frac{s^2 + \frac{K_P + B}{J}s}{s^2 + \frac{K_P + B}{J}s + \frac{K_I}{J}}\right] * \omega_{ref}(s)$$

El **error de velocidad en estado estable** es:

$$\Delta\omega(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s * \Delta\omega(s)$$

Sustituyendo $\Delta\omega(s)$ en la ecuación anterior:

$$\Delta\omega(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s * \left[\frac{s^2 + \frac{K_P + B}{J}s}{s^2 + \frac{K_P + B}{J}s + \frac{K_I}{J}}\right] * \omega_{ref}(s) \quad (1.38)$$

Ante una entrada paso de magnitud A_1 por referencia

$$\omega_{ref}(s) = \frac{A_1}{s} \quad (1.39)$$

Sustituyendo la ecuación (1.39) en la ecuación (1.38):

$$\Delta\omega(\infty) = 0 \quad (0 \text{ error de velocidad ante entrada paso por referencia})$$

Ante una entrada rampa de magnitud A_2 por referencia

$$\omega_{ref}(s) = \frac{A_2}{s^2} \quad (1.40)$$

Sustituyendo la ecuación (1.40) en la ecuación (1.38):

$$\Delta\omega(\infty) = \frac{\frac{K_{P+B}}{J}}{\frac{K_I}{J}} A_2 = \frac{K_{P+B}}{K_I} A_2$$
 (error de velocidad en estado estable ante entrada rampa por referencia)

Ante una entrada rampa por referencia, el controlador PI con ganancia proporcional en la retroalimentación tampoco logra que la velocidad actual siga la velocidad de referencia.

Ancho de banda

$$|W_{SS}(\omega_{BW})| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left| \frac{\frac{K_I}{J}}{s^2 + \frac{K_{P+B}}{J}s + \frac{K_I}{J}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \left| \frac{\frac{K_I}{J}}{(j\omega)^2 + \frac{K_{P+B}}{J}j\omega + \frac{K_I}{J}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{K_I}{J}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{K_I}{J} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{K_{P+B}}{J}\right)^2 \omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{K_I}{(K_I - J\omega^2)^2 + (K_{P+B})^2 \omega^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Realizando una comparación del ancho de banda con la ganancia proporcional en la retroalimentación respecto a colocarla en el lazo directo (sin el efecto de perturbaciones), este resulta menor, pues la amplitud del sistema decae a 3db a una frecuencia menor. La causa de este resultado se debe a la no existencia de ceros en el numerador de la función transferencial de lazo cerrado, y, por consiguiente, el módulo de la amplitud es menor. Es por ello que con la ganancia K_P en realimentación la amplitud del sistema en lazo cerrado toma el valor de 3db a una frecuencia menor que si se coloca en el lazo directo.

Teniendo en cuenta solo la perturbación:

La función transferencial en lazo abierto del sistema es:

$$W_S(s) = -W_P(s)$$

Resolviendo el lazo interno:

La función transferencial de lazo cerrado es:

$$W_I(S) = -\frac{W_P(s)}{1+W_P(s)*K_P} = -\frac{\frac{1}{Js+B}}{1+\frac{1}{Js+B}*K_P} = -\frac{1}{Js+K_P+B}$$

Luego, la función transferencial de lazo cerrado es:

$$W_{SS}(S) = \frac{\omega(s)}{T_L(s)} \Big|_{(\omega^*=0)} = - \frac{W_I(s)}{1+W_{SC}(s)*W_I(s)} = - \frac{\frac{1}{Js+K_P+B}}{1+\frac{1}{Js+K_P+B}*\frac{K_I}{s}}$$

$$W_{SS}(S) = - \frac{s}{s^2J+s(K_P+B)+K_I} = - \frac{\frac{s}{J}}{s^2+\frac{K_P+B}{J}s+\frac{K_I}{J}}$$

$$W_{SS}(S) = - \frac{a_1s}{s^2+sb_1+b_2}, \quad a_1 = \frac{1}{J}, \quad b_1 = \frac{K_P+B}{J}, \quad b_2 = \frac{K_I}{J}$$

La FTLC por disturbio es la misma que la calculada en la arquitectura PI con ganancia proporcional en el lazo directo, por lo que el error de velocidad en estado estable y el ancho de banda son los mismos.

El error de velocidad en estado estable es:

$$\Delta\omega(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s * \frac{\frac{s}{J}}{s^2+\frac{K_P+B}{J}s+\frac{K_I}{J}} * T_L(s)$$

$$\Delta\omega(\infty) = 0 \quad (0 \text{ error de velocidad ante entrada paso por la carga})$$

$$\Delta\omega(\infty) = \frac{\frac{1}{J}}{\frac{K_I}{J}} A_2 = \frac{1}{K_I} A_2 \quad (\text{error de velocidad en estado estable ante entrada rampa de magnitud } A_2 \text{ por referencia})$$

Ancho de banda

$$\frac{\omega}{(K_I - J\omega^2)^2 + (K_P+B)^2\omega^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

El ancho de banda del sistema en ambas configuraciones del controlador PI (K_P en lazo directo y en retroalimentación) es el mismo.

La Tabla 1.2 muestra los resultados obtenidos anteriormente respecto al controlador PI con la ganancia proporcional en lazo directo y retroalimentación.

Tabla 1.2. Controlador PI con ganancia proporcional en lazo directo y en retroalimentación.

Controlador PI		FTLC (W_{SS})	Error de velocidad $\Delta\omega(\infty)$	Ancho de banda ($ W_{SS}(\omega) $)
K _P Lazo directo	Por referencia	$W_{SS}(S) = \frac{\frac{K_P}{J} s + \frac{K_I}{J}}{s^2 + \frac{K_P+B}{J} s + \frac{K_I}{J}}$	$\Delta\omega(\infty) = 0$ (paso) $\Delta\omega(\infty) = \frac{B}{K_I} A_2$ (rampa)	$\frac{(K_P)^2 \omega^2 + K_I^2}{(K_I - J\omega^2)^2 + (K_P+B)^2 \omega^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
	Por perturb.	$W_{SS}(S) = -\frac{\frac{s}{J}}{s^2 + \frac{K_P+B}{J} s + \frac{K_I}{J}}$	$\Delta\omega(\infty) = 0$ (paso) $\Delta\omega(\infty) = \frac{1}{K_I} A_2$ (rampa)	$\frac{\omega}{(K_I - J\omega^2)^2 + (K_P+B)^2 \omega^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
K _P Retro alimen tación	Por referencia	$W_{SS}(S) = \frac{\frac{K_I}{J}}{s^2 + \frac{K_P+B}{J} s + \frac{K_I}{J}}$	$\Delta\omega(\infty) = 0$ (paso) $\Delta\omega(\infty) = \frac{K_P+B}{K_I} A_2$ (rampa)	$\frac{K_I}{(K_I - J\omega^2)^2 + (K_P+B)^2 \omega^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
	Por perturb.	$W_{SS}(S) = -\frac{\frac{s}{J}}{s^2 + \frac{K_P+B}{J} s + \frac{K_I}{J}}$	$\Delta\omega(\infty) = 0$ (paso) $\Delta\omega(\infty) = \frac{1}{K_I} A_2$ (rampa)	$\frac{\omega}{(K_I - J\omega^2)^2 + (K_P+B)^2 \omega^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

En ambos casos (K_P directo o en la retroalimentación):

$$W_n = \sqrt{b_2} = \sqrt{\frac{K_I}{J}} \quad (\text{frecuencia natural de oscilación})$$

$$\varphi = \frac{K_P+B}{2JW_n} \quad (\text{coeficiente de amortiguamiento})$$

La configuración del controlador Proporcional – Integral de velocidad con la ganancia proporcional en retroalimentación elimina el cero existente cuando la ganancia proporcional se ubica en el paso directo, lo cual propicia una disminución del ancho de banda, sin embargo, proporciona menor sobreimpulso en la respuesta del sistema ante cambios en la referencia.

CAPÍTULO 2. Método de la Doble Relación para el ajuste de los parámetros del controlador.

Para hacer un uso eficiente de los controladores se requiere seleccionar los parámetros adecuados de acuerdo a las especificaciones de operación, tanto en estado estable como transitorio. La selección inadecuada de estos parámetros puede conllevar a respuestas no deseadas e incluso a inestabilidad.

La selección de los parámetros se puede hacer utilizando métodos empíricos o mediante el uso de modelos del proceso.

En este capítulo se abordarán algunos de los métodos de sintonía de controladores dentro de los cuales se hará un análisis detallado del Método de la Regla de la Doble Relación.

2.1 Ajustes empíricos de controladores

En las primeras aplicaciones de control PID, el ajuste se basaba únicamente en la propia experiencia del usuario o en métodos analíticos. En 1942, Ziegler y Nichols propusieron técnicas empíricas que tuvieron buena aceptación, y que han servido de base a métodos más recientes (Ziegler 1942).

Los métodos empíricos o experimentales de ajuste de parámetros están especialmente orientados al mundo industrial, donde existen grandes dificultades para obtener una descripción analítica de los procesos. Estos métodos constan fundamentalmente de dos pasos:

1. Estimación de ciertas características de la dinámica del proceso a controlar. La estimación se puede efectuar en lazo abierto o en lazo cerrado, como se describe más adelante.

2. Cálculo de los parámetros del controlador. Para ello se aplican las fórmulas de sintonía, que son relaciones empíricas entre los parámetros del controlador elegido y las características del proceso estimadas en el paso anterior.

2.2 Métodos de sintonización de controladores

El desarrollo de los métodos de sintonización ha sido extenso desde que Ziegler y Nichols propusieron su procedimiento en 1942 (Alfaro 2002). Algunos de los métodos de sintonización más empleados para los controladores PID que operan como reguladores y utilizan un modelo del proceso son:

- Ziegler y Nichols
- Cohen y Coon
- López
- Kaya y Sheib
- Sung
- Lugar Geométrico de las Raíces
- Oscilaciones Sostenidas
- $\frac{1}{4}$ de Razón de Decrecimiento

1) Método de Ziegler y Nichols

El primer procedimiento sistematizado para el cálculo de los parámetros de un controlador PID fue desarrollado por Ziegler y Nichols (Ziegler 1942). El criterio de desempeño que seleccionaron fue el de un decrecimiento de $\frac{1}{4}$, o sea que el error decae en la cuarta parte de un periodo de oscilación.

Las ecuaciones fueron determinadas de forma empírica a partir de pruebas realizadas en el laboratorio con diferentes procesos, y están basadas en un modelo PORT identificado por el método de la tangente, para un funcionamiento del lazo de control como regulador con un controlador PID-Ideal.

En cuanto al tipo de controlador, si bien la gran mayoría de los autores indican que este método es para la sintonización de controladores ideales, otros, entre los que destaca Corripio (Corripio 2001), afirman que este método es para los controladores que interactúan.

2) Método de Cohen y Coon

En el desarrollo de su método de sintonización Ziegler y Nichols no consideraron que el proceso fuera auto regulado. Cohen y Coon introdujeron entonces un índice de auto regulación definido como $\mu = tm/\tau$ y plantearon nuevas ecuaciones de sintonización (Cohen 1953). Estas se basan en el mejor modelo PORT que se pueda obtener para lazos de control que funcionan como regulador, con el criterio de desempeño de decaimiento de $1/4$ con sobrepaso mínimo, y con mínima área bajo la curva de respuesta, y un controlador PID-Ideal.

3) Método de López, Miller, Smith y Muril

El primer método basado en criterios integrales que presentó ecuaciones para el cálculo de los parámetros del controlador fue desarrollado por López y es conocido como el método de López (López 1967).

Los criterios de desempeño utilizados por López fueron: Integral del error absoluto (IAE), Integral del error absoluto por el tiempo (ITAE) e Integral del error cuadrático (ISE).

La optimización de los criterios de desempeño integrales de López está basada en el mejor modelo PORT que se pueda obtener, para lazos de control que funcionan como reguladores con un controlador PID-Ideal.

4) Método de Kaya y Sheib

Mientras López desarrolló el método de sintonización para un controlador PID-Ideal, Kaya y Sheib realizaron lo mismo para controladores que denominaron PID-Clásico (PID-Serie), PID No Interactuante (una variación del PID-Paralelo) y PID-Industrial (Kaya 1988).

El procedimiento de sintonización está basado en el mejor modelo PORT que se pueda obtener para lazos de control que funcionan como reguladores. El criterio de desempeño corresponde a la minimización de alguno de los criterios integrales y el controlador a uno de los indicados anteriormente.

5) Método de Sung, O, Lee, Lee y Yi

Los métodos de sintonización de controladores que optimizan los criterios integrales, vistos anteriormente, se basan en un modelo de primer orden más tiempo muerto. Sung por su parte, basó su procedimiento de sintonización en un modelo PORT para un proceso identificado

mediante la realización de una prueba con realimentación por relé, seguida por una con control P (Sung 1996).

El procedimiento está basado en el mejor modelo PORT que se pueda obtener para lazos de control que funcionan como reguladores. El criterio de desempeño corresponde a la minimización de la ITAE y el controlador un PID-Ideal. El ajuste de las ecuaciones la realizaron para $0,05 \leq t_m/\tau \leq 2,0$.

6) Método del Lugar Geométrico de las Raíces

Un método sencillo para encontrar las raíces de la ecuación característica, que se usa ampliamente en la ingeniería de control, fue diseñado por W. R. Evans (Ogata 1998). Este método se denomina método del Lugar Geométrico de las Raíces, y en él se grafican las raíces de la ecuación característica para todos los valores de un parámetro del sistema.

Mediante el método del Lugar Geométrico de las Raíces, el diseñador puede predecir los efectos que tiene en la ubicación de los polos en lazo cerrado, variar el valor de la ganancia o agregar polos y/o ceros en lazo abierto.

Este método resulta muy útil dado que indica la forma en la que deben modificarse los polos y ceros en lazo abierto para que la respuesta cumpla las especificaciones de desempeño del sistema.

7) Método de Oscilaciones Sostenidas

Al igual que sucedió con los procedimientos de sintonización basados en la curva de reacción del proceso, el primer procedimiento de sintonización basado en una prueba de lazo cerrado fue propuesto por Ziegler y Nichols, quienes presentaron ambos procedimientos en la misma publicación.

Utilizando un controlador puramente proporcional y mediante un proceso iterativo, el procedimiento requiere aumentar paulatinamente la ganancia del mismo hasta lograr que el sistema entre en una oscilación sostenida ante un cambio del escalón en el valor deseado. La ganancia en este punto es la ganancia última K_{cu} y el periodo de la oscilación, el periodo último T_u .

Para el ajuste proporcional seleccionaron, como se indicó, el decaimiento de 1/4 como un compromiso entre el error permanente y el decaimiento, y encontraron que la ganancia

proporcional para un controlador P debería ser la mitad de la ganancia última. La Tabla 2.1 muestra las fórmulas para el ajuste de los diferentes controladores.

Tabla 2.1. Fórmulas para el ajuste de controladores basadas en la ganancia última y en el período de oscilación.

<i>Tipo de controlador</i>		<i>Ganancia proporcional</i> K_C	<i>Tiempo de integración</i> τ_I	<i>Tiempo de derivación</i> τ_D
Proporcional	P	$K_{cu} / 2$	—	—
Proporcional-integral	PI	$K_{cu} / 2.2$	$T_u / 1.2$	—
Proporcional-integral-derivativo	PID	$K_{cu} / 1.7$	$T_u / 2$	$T_u / 8$

Variaciones del método de Ziegler y Nichols (Oscilaciones Sostenidas)

No solo por ser el primero sino porque se emplea todavía en su forma original o en alguna de sus variantes, los métodos de sintonización desarrollados por Ziegler y Nichols se han convertido en el patrón en el que, por años, se han establecido las comparaciones entre muchos de los métodos de sintonización de controladores.

Por ejemplo, Shinsky (Shinsky 1979) ajusta las constantes de las ecuaciones de sintonización de Ziegler y Nichols para minimizar el criterio IAE; Chidambara (Chidambara 1970) utiliza un procedimiento iterativo basado en las mismas ecuaciones de Ziegler y Nichols, pero evitando tener que llevar el sistema al límite de la estabilidad; mientras que Aström (Aström 1992) lo adapta para la sintonización de controladores PI y PID de dos grados de libertad.

8) Método de ¼ de Razón de Decrecimiento

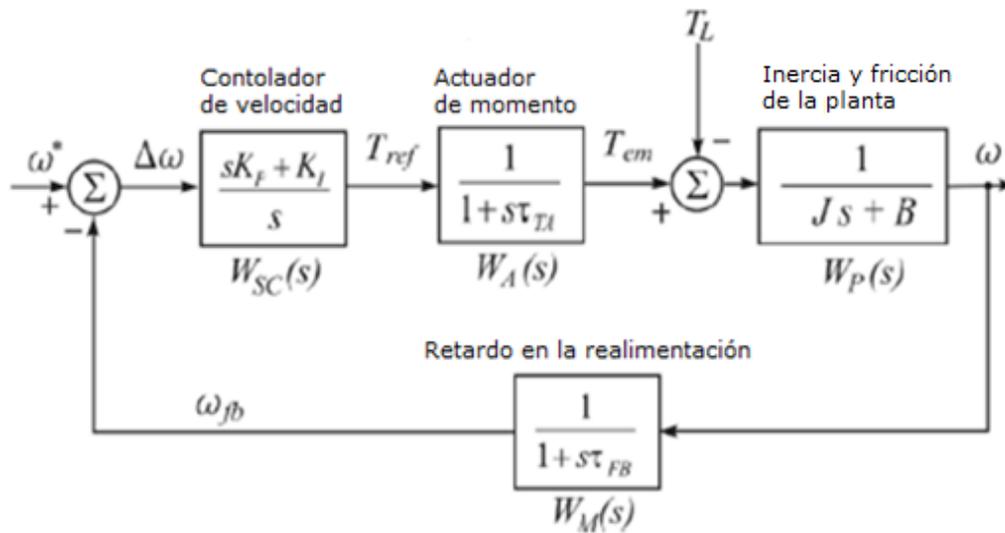
Este método es similar al método de Oscilaciones Sostenidas propuesto por Ziegler Nichols, la diferencia radica en aumentar paulatinamente la ganancia proporcional del sistema hasta lograr que el mismo oscile de manera tal que exista una razón aproximadamente de ¼ entre una oscilación y otra (Fig. 2.1).

2.3 Regla de la Doble Relación

2.3.1 Características de la Regla de la Doble Relación

En las secciones anteriores se realizaron algunas consideraciones para el análisis de los controladores P y PI en sus diferentes configuraciones. Por ejemplo, el uso de actuadores donde el momento $T_{em} = T_{ref}$, con el objetivo de facilitar el control de velocidad.

Retomando el diagrama general del sistema de control de velocidad de motores CD, donde el momento generado es modelado como un sistema de primer orden con retardo, se tiene el diagrama en bloques siguiente:



$$W_S(S) = W_{SC}(s) * W_A(s) * W_P(s) * W_M(s)$$

$$W_{SS}(S) = \frac{W_{SC}(s) * W_A(s) * W_P(s)}{1 + W_{SC}(s) * W_A(s) * W_P(s) * W_M(s)}$$

La ecuación característica de la función transferencial de lazo cerrado $W_{SS}(s)$ es:

$$f(s) = 1 + W_{SC}(s) * W_A(s) * W_P(s) * W_M(s)$$

$$f(s) = 1 + \frac{sK_P + K_I}{s} * \frac{1}{1 + s\tau_{TA}} * \frac{1}{Js + B} * \frac{1}{1 + s\tau_{FB}}$$

$$f(s) = (s + s^2\tau_{TA})(Js + B)(1 + s\tau_{FB}) + sK_P + K_I$$

$$f(s) = (s + \tau_{TA}s^2)(Js + J\tau_{FB}s^2 + B + B\tau_{FB}s) + sK_P + K_I$$

$$f(s) = (Js^2 + J\tau_{FB}s^3 + Bs + B\tau_{FB}s^2 + J\tau_{TA}s^3 + J\tau_{TA}\tau_{FB}s^4 + B\tau_{TA}s^2 + B\tau_{TA}\tau_{FB}s^3) + sK_P + K_I$$

$$f(s) = J\tau_{TA}\tau_{FB}s^4 + (J\tau_{FB} + J\tau_{TA} + B\tau_{TA}\tau_{FB})s^3 + [B(\tau_{TA} + \tau_{FB}) + J]s^2 + (B + K_P)s + K_I$$

Dividiendo $f(s)$ por $J\tau_{TA}\tau_{FB}$:

$$f(s) = s^4 + \frac{J(\tau_{FB} + \tau_{TA}) + B\tau_{TA}\tau_{FB}}{J\tau_{TA}\tau_{FB}}s^3 + \frac{B(\tau_{TA} + \tau_{FB}) + J}{J\tau_{TA}\tau_{FB}}s^2 + \frac{B + K_P}{J\tau_{TA}\tau_{FB}}s + \frac{K_I}{J\tau_{TA}\tau_{FB}}$$

Si se considera que el sistema de medición de realimentación es suficientemente rápido, la constante de tiempo $\tau_{FB}=0$ y el sistema se reduce a uno de tercer orden. La ecuación característica resultante sería:

$$f(s) = J\tau_{TA}s^3 + (B\tau_{TA} + J)s^2 + (B + K_P)s + K_I$$

Dividiendo $f(s)$ por $J\tau_{TA}$:

$$f(s) = s^3 + \frac{B\tau_{TA} + J}{J\tau_{TA}}s^2 + \frac{B + K_P}{J\tau_{TA}}s + \frac{K_I}{J\tau_{TA}} \quad (2.1)$$

En el sistema de tercer orden, ecuación (2.1), hay tres polos de lazo cerrado y solo dos parámetros ajustables (K_P y K_I).

En actualidad existen trabajos en los cuales los controladores utilizados en sistemas de control de velocidad se han sintonizado por un método de diseño llamado Regla de la Doble Relación. Esta regla está enfocada en la extensión del rango de frecuencias donde la amplitud de la función transferencial de lazo cerrado permanece $|W_{SS}(j\omega)| \approx 1$. Como consecuencia, la frecuencia de ancho de banda ω_{BW} es incrementada. La respuesta correspondiente al paso es rápida e incluye suficiente amortiguamiento.

La función de lazo cerrado puede ser expresada como sigue:

$$W_{SS}(S) = \frac{\text{salida}(s)}{\text{entrada}(s)} = \frac{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ms^m}{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ns^n} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i s^i}{\sum_{i=0}^n b_i s^i} = \frac{\text{num}(s)}{f(s)}$$

Donde $f(s)$ es la ecuación característica del sistema y sus ceros (polos de la función de transferencia de lazo cerrado) determinan las características de la respuesta a la entrada tipo paso.

La función transferencial de lazo cerrado idealmente debe ser $|W_{ss}(s)| = 1$. Con $|W_{ss}(j\omega)| = 1+j0$, el sistema seguirá la entrada sin errores de amplitud y fase. Por eso, es deseable tener la característica de amplitud $A(\omega) = |W_{ss}(j\omega)| = a_0/b_0 = 1$ y la característica de fase $\varphi(\omega) = \arg(W_{ss}(j\omega)) = 0$. Los coeficientes de la ecuación característica $b_0 \dots b_n$ y los coeficientes del numerador $a_0 \dots a_m$ contribuyen a cambios en amplitud y fase de la función transferencial de lazo cerrado. Por consiguiente, el caso ideal $|W_{ss}(j\omega)| = 1+j0$ será difícilmente esperado, en particular en altas frecuencias.

La Fig. 2.2 muestra un esbozo común de la característica de amplitud en escala logarítmica.

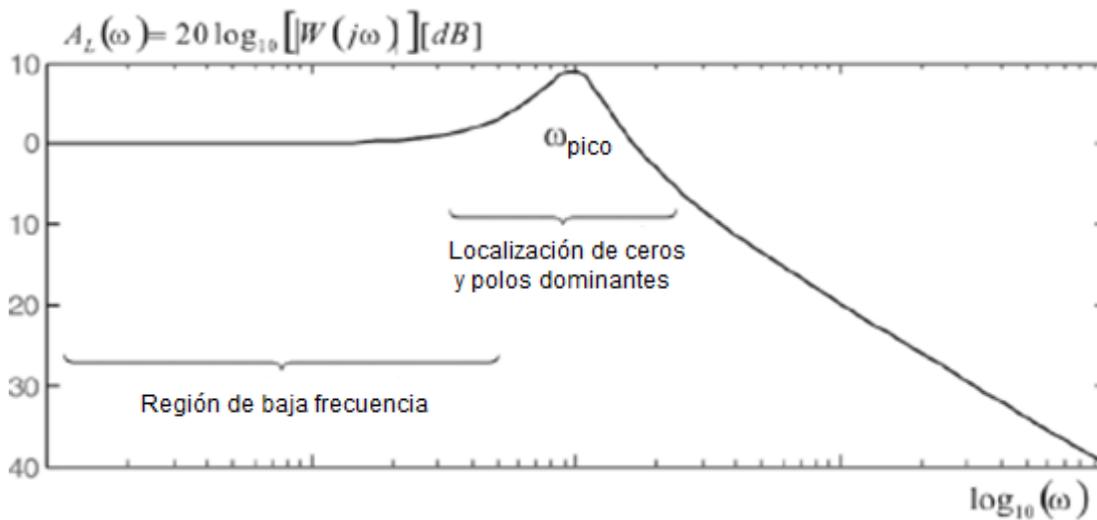


Figura 2.2. Característica de amplitud de lazo cerrado en escala logarítmica.

En la mitad del gráfico se puede observar un pico, encontrado en sistemas con polos complejos conjugados. A medida que la frecuencia aumenta, la amplitud $A(\omega)$ se reduce hasta cero. Esto refleja el hecho de que, en lazo cerrado, el número de polos n exceden al número de ceros m . Por lo tanto, en altas frecuencias, la característica de amplitud puede ser aproximada por $A(\omega) = K/\omega^{n-m}$.

La regla de la doble relación consiste en ajustar las ganancias de realimentación para obtener la ecuación característica $f(s)$ con los coeficientes $b_0 \dots b_n$ que satisfagan la ecuación (Slobodan 2007):

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} \leq d \frac{b_k}{b_{k-1}}, \quad d \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad b_k^2 \geq d * b_{k-1} b_{k+1}$$

Los mejores resultados que se han alcanzado en la aplicación de esta regla es considerando $d = 2$, con lo cual se alcanza el mayor ancho de banda del sistema (Schaedel 1997).

$$b_k^2 = 2b_{k-1}b_{k+1} \quad (2.2)$$

2.3.2 Aplicación de la Regla de la Doble Relación en un sistema de segundo orden

$$W_{SS}(s) = \frac{a_0}{b_0 + b_1s + b_2s^2}$$

$$W_{SS}(j\omega) = \frac{a_0}{b_0 + b_1(j\omega) + b_2(j\omega)^2} = \frac{a_0}{b_0 + b_1(j\omega) - b_2\omega^2}$$

$$W_{SS}(j\omega) = \frac{a_0}{(b_0 - b_2\omega^2) + jb_1\omega}$$

Luego:

$$|W_{SS}(j\omega)|^2 = \frac{a_0^2}{(b_0 - b_2\omega^2)^2 + (b_1\omega)^2} \quad (2.3)$$

Aplicando la regla, ecuación (2.2):

$$b_1^2 = 2b_0b_2 \quad (2.4)$$

Sustituyendo la ecuación (2.4) en la ecuación (2.3):

$$|W_{SS}(j\omega)|^2 = \frac{a_0^2}{(b_0 - b_2\omega^2)^2 + 2b_0b_2\omega^2}$$

$$|W_{SS}(j\omega)|^2 = \frac{a_0^2}{b_0^2 - 2b_0b_2\omega^2 + b_2^2\omega^4 + 2b_0b_2\omega^2} = \frac{a_0^2}{b_0^2 + b_2^2\omega^4}$$

El rango de frecuencias, en el cual la característica de amplitud es plana $|W_{SS}(j\omega)| \approx 1$ se extiende hacia la frecuencia de esquina $\omega = (b_0/b_2)^{0.5}$.

Por otra parte:

$$W_{SS}(s) = \frac{\frac{a_0}{b_2}}{s^2 + \frac{b_1}{b_2}s + \frac{b_0}{b_2}} = \frac{\frac{a_0}{b_2}}{s^2 + \frac{\sqrt{2b_0b_2}}{b_2}s + \frac{b_0}{b_2}}$$

Donde:

$$2\varphi\omega_n = \frac{\sqrt{2b_0b_2}}{b_2} = \sqrt{\frac{2b_0b_2}{b_2^2}} = \sqrt{\frac{2b_0}{b_2}} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{b_0}{b_2}} = \sqrt{2} \omega_n$$

Por lo que:

$$\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$$

Para cualquier sistema de segundo orden independientemente de los coeficientes de la ecuación característica $f(s)$, el control del sistema es óptimo.

2.3.3 Aplicación de la Regla de la Doble Relación en un sistema de tercer orden

$$f(s) = b_0 + b_1s + b_2s^2 + b_3s^3$$

$$W_{SS}(s) = \frac{a_0}{b_0 + b_1s + b_2s^2 + b_3s^3}$$

$$W_{SS}(j\omega) = \frac{a_0}{b_0 + b_1(j\omega) + b_2(j\omega)^2 + b_3(j\omega)^3} = \frac{a_0}{b_0 + b_1(j\omega) - b_2\omega^2 - jb_3\omega^3}$$

$$W_{SS}(j\omega) = \frac{a_0}{(b_0 - b_2\omega^2) + j\omega(b_1 - b_3\omega^2)}$$

Luego:

$$|W_{SS}(j\omega)|^2 = \frac{a_0^2}{(b_0 - b_2\omega^2)^2 + \omega^2(b_1 - b_3\omega^2)^2} \quad (2.5)$$

Aplicando la regla:

$$b_1^2 = 2b_0b_2 \quad (2.6)$$

$$b_2^2 = 2b_1b_3 \quad (2.7)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.6) y (2.7) en la ecuación (2.5):

$$|W_{SS}(j\omega)|^2 = \frac{a_0^2}{(b_0 - \sqrt{2b_1b_3}\omega^2)^2 + \omega^2(\sqrt{2b_0b_2} - b_3\omega^2)^2}$$

Desarrollando:

$$|W_{SS}(j\omega)|^2 = \frac{a_0^2}{b_0^2 - 2b_0\sqrt{2b_1b_3}\omega^4 + 2b_1b_3\omega^4 + 2b_0b_2\omega^2 - 2b_3\omega^4\sqrt{2b_0b_2} + b_3^2\omega^6}$$

Como:

$$\sqrt{2b_1b_3} = b_2^2$$

$$\sqrt{2b_0b_2} = b_1^2$$

$$|W_{SS}(j\omega)|^2 = \frac{a_0^2}{b_0^2 - 2b_0b_2^2\omega^4 + 2b_1b_3\omega^4 + 2b_0b_2\omega^2 - 2b_1b_3\omega^4 + b_3^2\omega^6}$$

Suprimiendo términos semejantes:

$$|W_{SS}(j\omega)|^2 = \frac{a_0^2}{b_0^2 + b_3^2 \omega^6}$$

Siendo la frecuencia de esquina $\omega = (b_0/b_3)^{1/3}$.

La Tabla 2.3 muestra la relación de un análisis realizado para sistemas de segundo, tercer y cuarto orden, así como las raíces de la ecuación característica $f(s)$ y sus correspondientes factores de amortiguamiento.

Tabla 2.3. Factor de amortiguamiento y raíces para sistemas de segundo, tercero y cuarto orden.

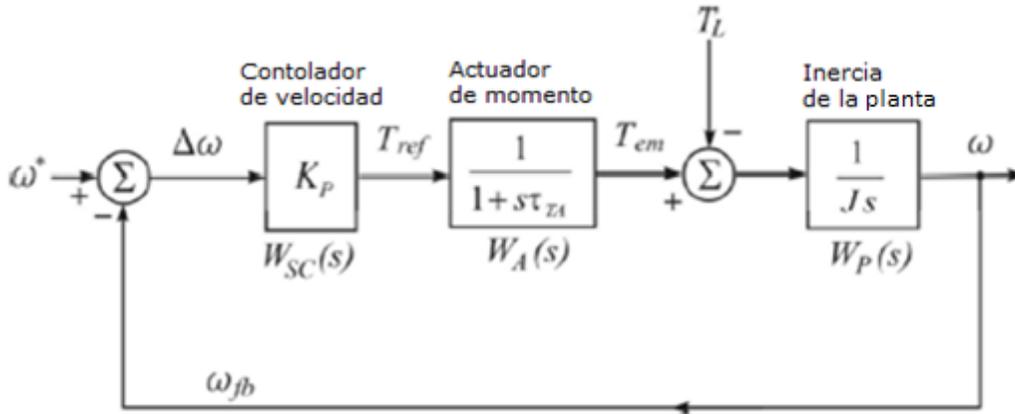
orden	$n=2$	$n=3$	$n=4$
raíces	$s_{1/2} = -\frac{\omega_n}{\sqrt{2}} \pm j \frac{\omega_n}{\sqrt{2}}$	$s_{1/2} = -\frac{\omega_n}{2} \pm j \frac{\omega_n}{2} \sqrt{3}$ $s_3 = -\omega_n$	$s_{1/2} = -\frac{\omega_n}{\sqrt{2}} \pm j \frac{\omega_n}{\sqrt{2}}$ $s_{3/4} = -\frac{\omega_n}{\sqrt{2}} \pm j \frac{\omega_n}{\sqrt{2}}$
φ	$\varphi = 0.707$	$\varphi = 0.5$	$\varphi = 0.707$

El factor de amortiguamiento de los polos de lazo cerrado se encuentra entre 0.5 y 0.707. Si se aplica esta regla a sistemas de orden n , donde $5 \leq n \leq 16$, φ oscila entre 0.64 y 0.66. (Ver Anexo I.)

La aplicación de la regla de la doble relación utilizando $b_k^2 = 2b_{k-1} * b_{k+1}$ como regla de diseño asegura una buena respuesta amortiguada con una razonable robustez a cambios en los parámetros de la planta.

2.3.4 Regla de la Doble Relación en controlador Proporcional de velocidad sin fricción

La regla de la doble relación es aplicada en controladores de velocidad CD. El siguiente diagrama muestra el control de velocidad a partir de un controlador proporcional. El actuador de momento es modelado como un sistema de primer orden con retardo. Se considera que la fricción de la planta es despreciable y que $\omega_{fb} = \omega$.



$$W_{SC}(s) = K_P, \quad W_P(s) = \frac{1}{Js}, \quad W_A(s) = \frac{1}{1+s\tau_{TA}}$$

$$W_{SS}(S) = \frac{W_{SC}(s) \cdot W_A(s) \cdot W_P(s)}{1 + W_{SC}(s) \cdot W_A(s) \cdot W_P(s)}$$

$$W_{SS}(S) = \frac{K_P \cdot \frac{1}{1+s\tau_{TA}} \cdot \frac{1}{Js}}{1 + K_P \cdot \frac{1}{1+s\tau_{TA}} \cdot \frac{1}{Js}} = \frac{K_P}{(1+s\tau_{TA})Js + K_P}$$

$$W_{SS}(S) = \frac{K_P}{J\tau_{TA}s^2 + Js + K_P}$$

Donde:

$$b_0 = K_P, \quad b_1 = J, \quad b_2 = J\tau_{TA}$$

Aplicando la regla:

$$b_1^2 = 2b_0b_2 \implies J^2 = J\tau_{TA}K_P \implies K_P = \frac{J}{2\tau_{TA}}$$

Según lo anterior, replanteando la función transferencial de lazo cerrado:

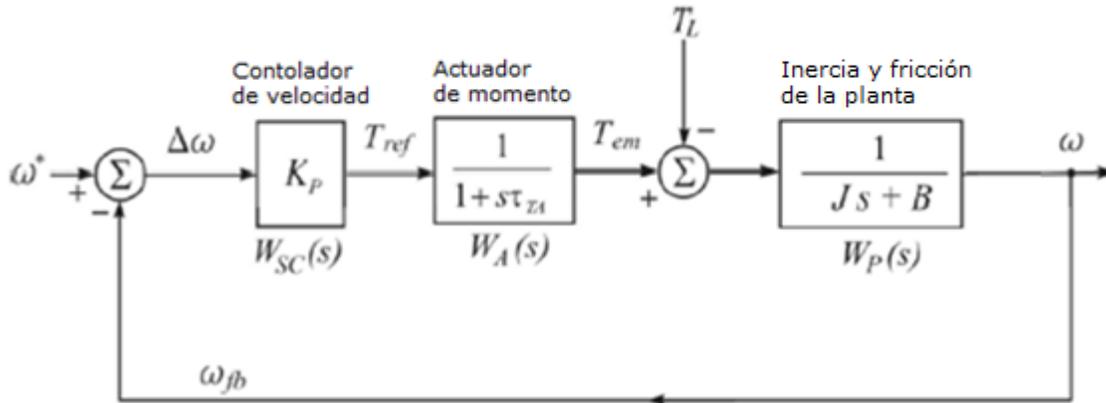
$$W_{SS}(S) = \frac{1}{\frac{J\tau_{TA}s^2 + J}{K_P}s + 1} = \frac{1}{2\tau_{TA}^2s^2 + 2\tau_{TA}s + 1} = \frac{\frac{1}{2\tau_{TA}^2}}{s^2 + \frac{1}{\tau_{TA}}s + \frac{1}{2\tau_{TA}^2}}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{2\tau_{TA}^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\tau_{TA}} = \frac{0.707}{\tau_{TA}}$$

$$2\varphi\omega_n = \frac{1}{\tau_{TA}} \implies 2\varphi \frac{1}{\sqrt{2}\tau_{TA}} = \frac{1}{\tau_{TA}} \implies \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$$

2.3.5 Regla de la Doble Relación en controlador Proporcional de velocidad con fricción

El diagrama en bloques siguiente muestra un controlador P para un sistema con fricción en la planta.



$$W_{SC}(s) = K_P, \quad W_P(s) = \frac{1}{Js+B}, \quad W_A(s) = \frac{1}{1+s\tau_{TA}}$$

$$W_{SS}(S) = \frac{W_{SC}(s) \cdot W_A(s) \cdot W_P(s)}{1 + W_{SC}(s) \cdot W_A(s) \cdot W_P(s)}$$

$$W_{SS}(S) = \frac{K_P \cdot \frac{1}{1+s\tau_{TA}} \cdot \frac{1}{Js+B}}{1 + K_P \cdot \frac{1}{1+s\tau_{TA}} \cdot \frac{1}{Js+B}} = \frac{K_P}{(1+s\tau_{TA})(Js+B) + K_P}$$

$$W_{SS}(S) = \frac{K_P}{J\tau_{TA}s^2 + (J+B\tau_{TA})s + B + K_P}$$

Donde:

$$b_0 = B + K_P, \quad b_1 = J + B\tau_{TA}, \quad b_2 = J\tau_{TA}$$

Aplicando la regla:

$$b_1^2 = 2b_0b_2$$

$$(J + B\tau_{TA})^2 = 2J\tau_{TA}(B + K_P)$$

$$J^2 + 2JB\tau_{TA} + B^2\tau_{TA}^2 = 2JB\tau_{TA} + 2J\tau_{TA}K_P$$

Eliminando términos semejantes:

$$J^2 + B^2\tau_{TA}^2 = 2J\tau_{TA}K_P \implies K_P = \frac{J^2 + B^2\tau_{TA}^2}{2J\tau_{TA}}$$

La ganancia K_P solo depende de la inercia de la planta, la fricción y la constante de tiempo del actuador de momento.

Según lo anterior, replanteando la función transferencial de lazo cerrado:

$$W_{SS}(S) = \frac{\frac{K_P}{J\tau_{TA}}}{s^2 + \frac{J+B\tau_{TA}}{J\tau_{TA}}s + \frac{B+K_P}{J\tau_{TA}}}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{B+K_P}{J\tau_{TA}}} = \sqrt{\frac{B + \frac{J^2 + B^2\tau_{TA}^2}{2J\tau_{TA}}}{J\tau_{TA}}} = \sqrt{\frac{2BJ\tau_{TA} + J^2 + B^2\tau_{TA}^2}{2J^2\tau_{TA}^2}}$$

$$\omega_n = \frac{\sqrt{2BJ\tau_{TA} + J^2 + B^2\tau_{TA}^2}}{J\tau_{TA}\sqrt{2}} = \frac{0.707\sqrt{2BJ\tau_{TA} + J^2 + B^2\tau_{TA}^2}}{\tau_{TA}J}$$

$$2\varphi\omega_n = \frac{J+B\tau_{TA}}{J\tau_{TA}} \implies 2\varphi \frac{0.707\sqrt{2BJ\tau_{TA} + J^2 + B^2\tau_{TA}^2}}{\tau_{TA}J} = \frac{J+B\tau_{TA}}{J\tau_{TA}}$$

$$\varphi = 0.707 \frac{J+B\tau_{TA}}{\sqrt{2BJ\tau_{TA} + J^2 + B^2\tau_{TA}^2}}$$

Realizando un análisis real de los valores de J y B, tomados de un motor tipo 080 de la serie ME45 (Tercesa): $J=0.00032 \text{ Kg.m}^2$ y $B=0.000032 \text{ Kg.m}$. Considerando $\tau_{TA}=1\text{ms}$:

$$\frac{\sqrt{2BJ\tau_{TA} + J^2 + B^2\tau_{TA}^2}}{J} = 1.0001 \approx 1$$

$$\frac{J+B\tau_{TA}}{\sqrt{2BJ\tau_{TA} + J^2 + B^2\tau_{TA}^2}} = 1$$

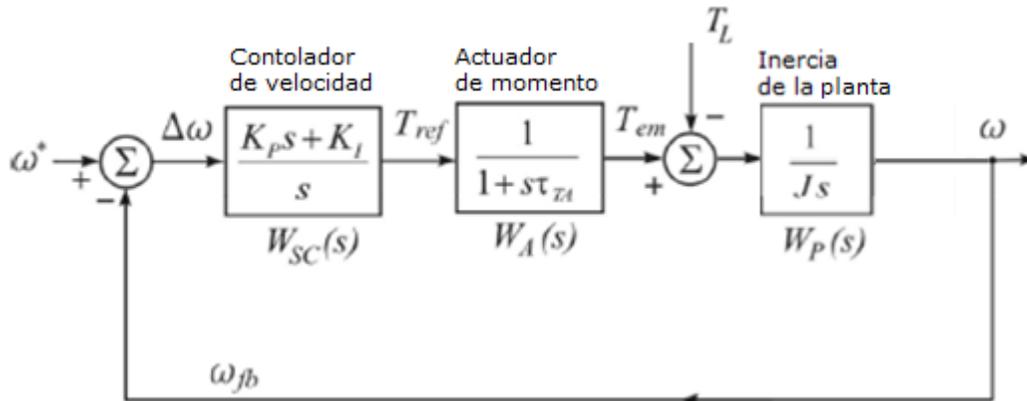
Según lo anterior, las ecuaciones de φ y ω_n se pueden escribir:

$$\omega_n = \frac{0.707}{\tau_{TA}}$$

$$\varphi = 0.707$$

2.3.6 Regla de la Doble Relación en controlador Proporcional – Integral de velocidad sin fricción

En el diagrama en bloques siguiente se muestra un controlador PI para una planta con fricción despreciable.



$$W_{SC}(s) = \frac{K_P s + K_I}{s}, \quad W_P(s) = \frac{1}{Js}, \quad W_A(s) = \frac{1}{1 + s\tau_{TA}}$$

$$W_S(s) = W_{SC}(s) * W_A(s) * W_P(s)$$

$$W_S(s) = \frac{K_P s + K_I}{s} * \frac{1}{1 + s\tau_{TA}} * \frac{1}{Js} = \frac{K_I(\frac{K_P}{K_I}s + 1)}{s} * \frac{1}{1 + s\tau_{TA}} * \frac{1}{Js}$$

Reestructurando la ecuación anterior:

$$W_S(s) = \frac{K_I}{s} * \frac{1 + s\tau_{SC}}{1 + s\tau_{TA}} * \frac{1}{Js}, \quad \tau_{SC} = \frac{K_P}{K_I}$$

$$W_{SS}(s) = \frac{W_{SC}(s) * W_A(s) * W_P(s)}{1 + W_{SC}(s) * W_A(s) * W_P(s)}$$

$$W_{SS}(s) = \frac{\frac{K_P s + K_I}{s} * \frac{1}{1 + s\tau_{TA}} * \frac{1}{Js}}{1 + \frac{K_P s + K_I}{s} * \frac{1}{1 + s\tau_{TA}} * \frac{1}{Js}}$$

$$W_{SS}(s) = \frac{K_P s + K_I}{J\tau_{TA}s^3 + Js^2 + K_P s + K_I}$$

$$W_{SS}(s) = \frac{\frac{K_P}{K_I}s + 1}{\frac{J\tau_{TA}}{K_I}s^3 + \frac{J}{K_I}s^2 + \frac{K_P}{K_I}s + 1}$$

Donde:

$$b_0 = 1, \quad b_1 = \frac{K_P}{K_I}, \quad b_2 = \frac{J}{K_I}, \quad b_3 = \frac{J\tau_{TA}}{K_I}$$

Aplicando la regla:

$$b_1^2 = 2b_0b_2$$

$$\left(\frac{K_P}{K_I}\right)^2 = 2 \frac{J}{K_I} \implies K_I = \frac{K_P^2}{2J}$$

Aplicando la regla:

$$b_2^2 = 2b_1b_3$$

$$\left(\frac{J}{K_I}\right)^2 = 2 \frac{K_P}{K_I} \frac{J\tau_{TA}}{K_I} \implies K_P = \frac{J}{2\tau_{TA}}$$

Sustituyendo la ganancia proporcional K_P en la ecuación de la ganancia integral K_I :

$$K_I = \frac{J}{8\tau_{TA}^2}$$

Por consiguiente:

$$\tau_{SC} = \frac{K_P}{K_I} = 4\tau_{TA}$$

Las ganancias proporcionales e integrales del controlador solo dependen de la constante de tiempo del actuador de momento (τ_{TA}). Los valores de estas ganancias son comúnmente referidos como la configuración óptima del controlador PI sin fricción en la planta.

Sustituyendo K_I y τ_{SC} en la función transferencial de lazo abierto $W_S(s)$:

$$W_S(s) = \frac{1}{8} * \frac{1}{(\tau_{TA}s)^2} * \frac{1+4\tau_{TA}s}{1+\tau_{TA}s}$$

La función transferencial $W_S(s)$ presenta tres polos de lazo abierto, dos de ellos sobre el origen ($p_1=p_2=0$), mientras el tercer polo $p_3 = -1/\tau_{TA}$. Además, tiene un cero ubicado en $z_1 = -1/(4\tau_{TA})$. La Fig. 2.3 muestra la característica de amplitud $|W_S(j\omega)|$ de la función transferencial de lazo abierto.

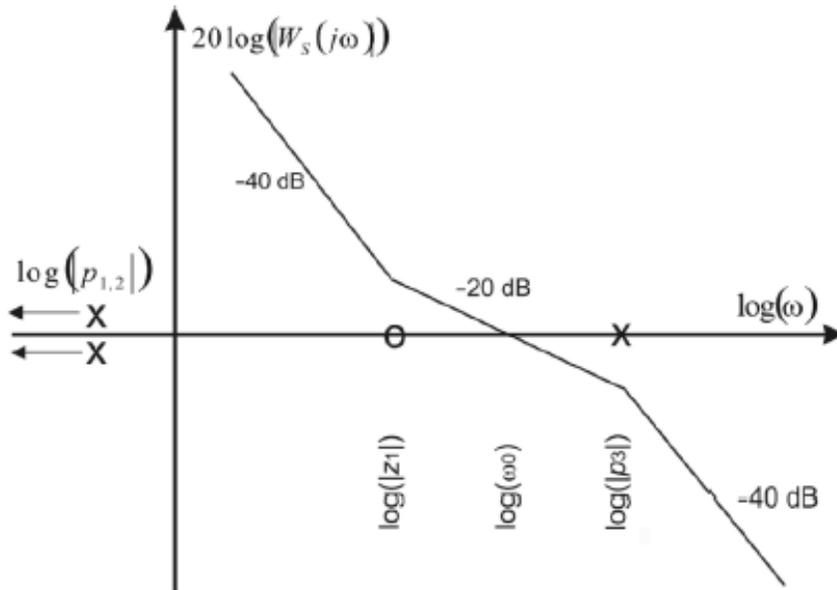


Figura 2.3. Característica de amplitud de la función transferencial de lazo abierto $W_S(s)$ en escala logarítmica.

Próximo al origen la atenuación es a razón de 40 dB por década, pasando el cero z_1 , la pendiente se reduce a -20 dB. En la frecuencia $\omega_0=1/ (2 \tau_{TA})$, la amplitud es reducida a 1 (0 dB). Debido a la colocación simétrica de z_1 , ω_0 y p_3 , el ajuste de los parámetros de las ganancias K_P y K_I es conocido como óptimo simétrico.

Luego, la función transferencial de lazo cerrado obtenida con K_p^{opt} y K_I^{opt} es:

$$W_{SS}^{opt}(S) = \frac{4\tau_{TA}S+1}{8\tau_{TA}^3s^3+8\tau_{TA}^2s^2+4\tau_{TA}S+1}$$

La Fig. 2.4 muestra ubicación del cero y los tres polos de lazo cerrado en el plano s obtenida a partir de las ganancias óptimas de realimentación K_p^{opt} y K_I^{opt} .

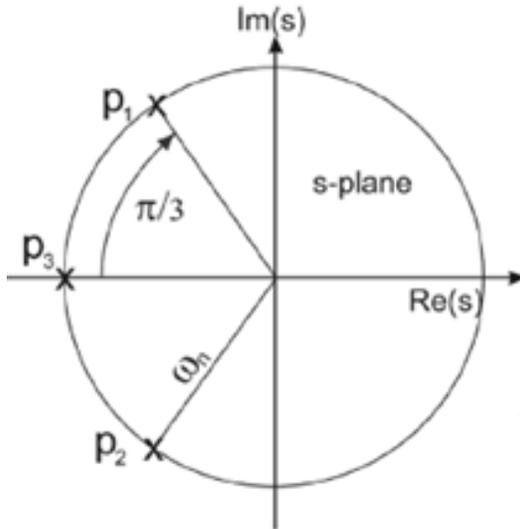


Figura 2.4. Localización de los polos de lazo cerrado en el plano s.

$$p_{1/2} = -\frac{1}{4\tau_{TA}} \pm j\frac{\sqrt{3}}{4\tau_{TA}}, \quad p_3 = -\frac{1}{2\tau_{TA}}$$

Teniendo en cuenta que:

$$p_{1/2} = -\varphi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\varphi^2}$$

$$\varphi\omega_n = \frac{1}{4\tau_{TA}} \implies \omega_n = \frac{1}{4\varphi\tau_{TA}} \quad (2.8)$$

$$\omega_n\sqrt{1-\varphi^2} = \frac{\sqrt{3}}{4\tau_{TA}} \quad (2.9)$$

Sustituyendo ecuación (2.8) en la ecuación (2.9):

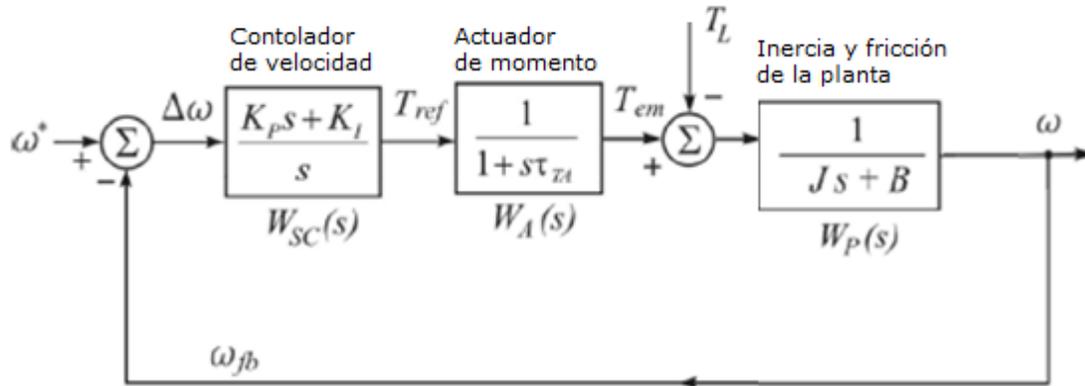
$$\frac{1}{4\varphi\tau_{TA}}\sqrt{1-\varphi^2} = \frac{\sqrt{3}}{4\tau_{TA}} \implies \varphi = \frac{1}{2} = 0.5 \quad (2.10)$$

Sustituyendo ecuación (2.10) en la ecuación (2.8):

$$\omega_n = \frac{1}{2\tau_{TA}}$$

2.3.7 Regla de la Doble Relación en controlador Proporcional – Integral de velocidad con fricción

Para el sistema mostrado a continuación, la fricción en la planta es considerada diferente de cero ($B \neq 0$).



$$W_{SC}(s) = \frac{K_P s + K_I}{s}, \quad W_P(s) = \frac{1}{Js + B}, \quad W_A(s) = \frac{1}{1 + s\tau_{TA}}$$

$$W_S(s) = W_{SC}(s) * W_A(s) * W_P(s)$$

$$W_S(s) = \frac{K_P s + K_I}{s} * \frac{1}{1 + s\tau_{TA}} * \frac{1}{Js + B} = \frac{K_P s + K_I}{J\tau_{TA}s^3 + (J + B\tau_{TA})s^2 + Bs}$$

$$W_{SS}(s) = \frac{W_S(s)}{1 + W_S(s)} = \frac{\frac{K_P s + K_I}{J\tau_{TA}s^3 + (J + B\tau_{TA})s^2 + Bs}}{1 + \frac{K_P s + K_I}{J\tau_{TA}s^3 + (J + B\tau_{TA})s^2 + Bs}} = \frac{K_P s + K_I}{J\tau_{TA}s^3 + (J + B\tau_{TA})s^2 + (B + K_P)s + K_I}$$

$$W_{SS}(s) = \frac{\frac{K_P}{K_I}s + 1}{\frac{J\tau_{TA}}{K_I}s^3 + \frac{(J + B\tau_{TA})}{K_I}s^2 + \frac{(B + K_P)}{K_I}s + 1}$$

Donde:

$$b_0 = 1, \quad b_1 = \frac{B + K_P}{K_I}, \quad b_2 = \frac{J + B\tau_{TA}}{K_I}, \quad b_3 = \frac{J\tau_{TA}}{K_I}$$

Aplicando la regla:

$$b_1^2 = 2b_0b_2$$

$$\left(\frac{B + K_P}{K_I}\right)^2 = 2\left(\frac{J + B\tau_{TA}}{K_I}\right) \implies K_I = \frac{(B + K_P)^2}{2(J + B\tau_{TA})}$$

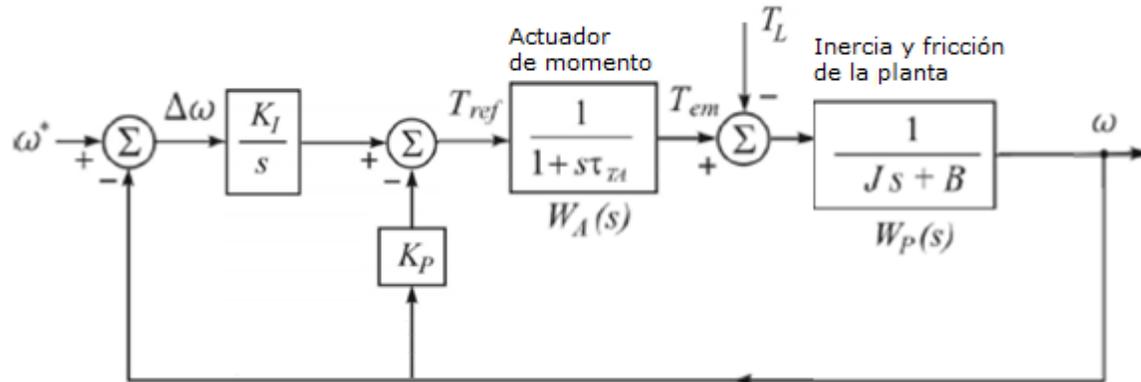
Aplicando la regla:

$$b_2^2 = 2b_1b_3$$

$$\left(\frac{J + B\tau_{TA}}{K_I}\right)^2 = 2\frac{B + K_P}{K_I} * \frac{J\tau_{TA}}{K_I} \implies K_P = \frac{J^2 + B^2\tau_{TA}^2}{2J\tau_{TA}}$$

2.3.8 Regla de la Doble Relación en controlador Proporcional – Integral de velocidad con ganancia proporcional en retroalimentación.

En la siguiente configuración la ganancia proporcional del controlador se encuentra ubicada en la retroalimentación. Además, la planta es considerada con fricción ($B \neq 0$).



El resultado de la función transferencial de lazo cerrado en esta configuración es similar a la anterior, solo que se suprime el cero del numerador (Tabla 1.2).

$$W_{SS}(S) = \frac{1}{\frac{J\tau_{TA}}{K_I}S^3 + \frac{(J+B\tau_{TA})}{K_I}S^2 + \frac{(B+K_P)}{K_I}S + 1}$$

Debido a que la ecuación característica es la misma, los parámetros de las ganancias proporcionales e integrales según el método de la Regla de la Doble Relación serán los mismos.

$$K_P = \frac{J^2 + B^2\tau_{TA}^2}{2J\tau_{TA}} \quad K_I = \frac{(B+K_P)^2}{2(J+B\tau_{TA})}$$

La Tabla 2.4 resume las ganancias proporcionales e integrales de los controladores P y PI una vez aplicada la Regla de la Doble Relación.

Tabla 2.4. Ganancias Proporcionales e Integrales de los controladores P y PI aplicando la Regla de la Doble Relación.

	Tipo de controladores				
	P		PI		
	Sin fricción (B=0)	Con fricción (B≠0)	Sin fricción (B=0)	Con fricción (B≠0)	
				Kp lazo directo	Kp retroalimentación
Ganancias	$K_P = \frac{J}{2\tau_{TA}}$	$K_P = \frac{J^2+B^2\tau_{TA}^2}{2J\tau_{TA}}$	$K_P = \frac{J}{2\tau_{TA}}$ $K_I = \frac{J}{8\tau_{TA}^2}$	$K_P = \frac{J^2+B^2\tau_{TA}^2}{2J\tau_{TA}}$ $K_I = \frac{(B+K_P)^2}{2(J+B\tau_{TA})}$	$K_P = \frac{J^2+B^2\tau_{TA}^2}{2J\tau_{TA}}$ $K_I = \frac{(B+K_P)^2}{2(J+B\tau_{TA})}$

En el caso del controlador Proporcional se obtiene un coeficiente de amortiguamiento de 0.707, lo mismo ocurre en el controlador Proporcional – Integral sin fricción.

CAPÍTULO 3. Caso de estudio, aplicación de los resultados

Una vez concluido el estudio de las diferentes características teóricas de la regla de la doble relación para la determinación de los parámetros de los controladores es necesario aplicar los resultados a un caso estudio, para compararlos con los diferentes métodos estudiados.

Este capítulo se dedicará a realizar las comparaciones señaladas, analizando diferentes parámetros de la respuesta del sistema en lazo cerrado a partir de los ajustes obtenidos por los diferentes métodos estudiados.

3.1 Motor caso estudio

Para el caso estudio se ha seleccionado un motor tipo 080 con excitación independiente, de la serie ME45 (Tercesa) cuyos datos son los siguientes:

Voltaje nominal (V_n) = 24 [V]

Velocidad nominal (n) = 3000 [rpm]

Momento nominal (C_n) = 0.25 [Nm]

Potencia nominal (P_u) = 75 [W]

Constante de torque (K_c) = 0.065 [N.m/A]

Inercia (J) = 0.00032 [Kg.m²]

Resistencia térmica (R_{term}) = 2.6 [°C/W]

Resistencia nominal (R_m) = 0.48 [Ω]

Inductancia (L) = 1.20 [mH]

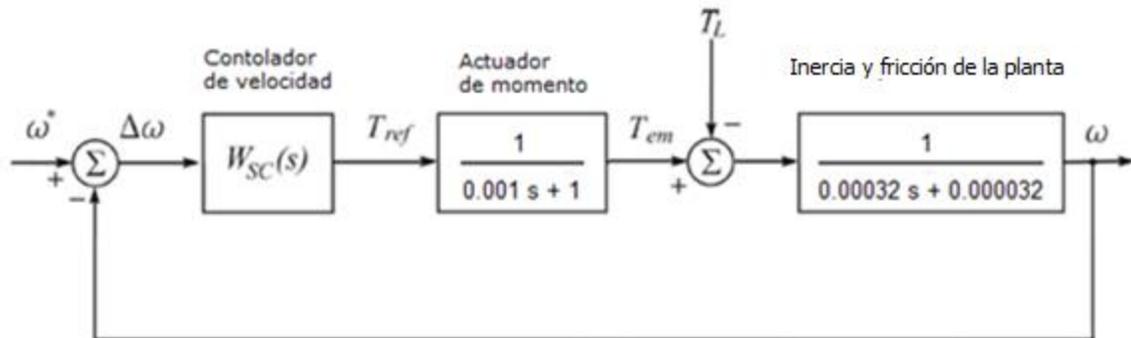
Peso (P) = 2 [Kg]

Coefficiente de fricción (B) = 0.000032 [Kg.m]

Además, se ha seleccionado una constante de tiempo del actuador:

$(\tau_{TA}) = 0.001$ [s]

Según los datos anteriores el diagrama de control de velocidad del motor es el siguiente:

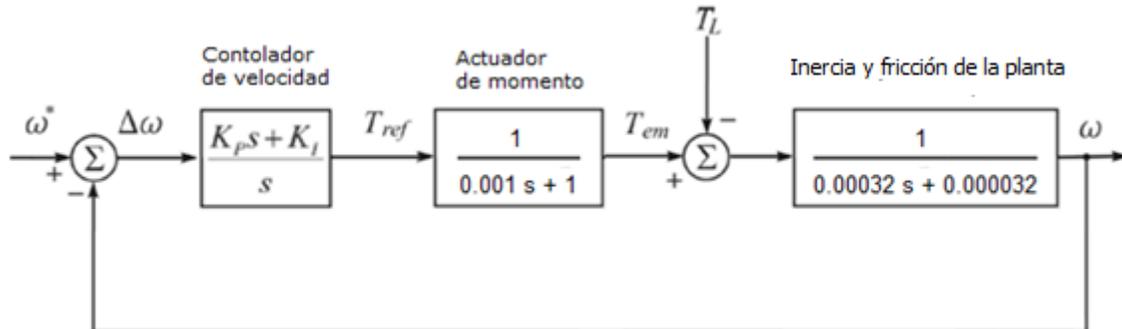


3.2 Sintonía de controladores

Para poder aplicar los métodos de sintonía de lazo abierto: Ziegler y Nichols, Cohen y Coon, López, Kaya y Sheib, Sung, se requiere obtener un sistema que mantenga oscilaciones sostenidas o que la curva de respuesta sea similar a la de un sistema de primer orden con retardo, lo que requeriría transformar a un sistema equivalente (PORT). Por lo anterior, debido a las características del sistema en cuestión, no es posible sintonizar un controlador con acción proporcional solamente.

Se procederá a sintonizar un controlador Proporcional – Integral utilizando los métodos basados en el lugar geométrico de las raíces (LGR), oscilaciones sostenidas, $1/4$ de razón de decrecimiento y la regla de la doble relación.

3.2.1 Sintonización del controlador Proporcional – Integral de velocidad con ganancia proporcional en lazo directo.



I. Método del Lugar Geométrico de las raíces

La sintonía del controlador Proporcional – Integral consiste básicamente en añadir al sistema un cero ubicado en $s = -K_i/K_p$ y un integrador puro (un polo en el origen), o sea, el controlador tendría la siguiente forma:

$$C = K_p \frac{s + \frac{K_i}{K_p}}{s}$$

Por otra parte, el sistema en lazo abierto posee dos polos ubicados en $s = -1000$ y $s = -0.1$.

Basado en el método del Lugar Geométrico de las Raíces (LGR), a partir de la herramienta sisotool del Matlab, se ha colocado el cero de forma tal que el lugar geométrico del sistema en lazo abierto sea modificado adecuadamente. Una correcta ubicación del cero resultó $s = -150$. A partir de esta modificación se ha seleccionado la ganancia proporcional que da lugar a un coeficiente de amortiguamiento $\phi = 0.7$ mediante el comando sgrid.

De aquí se obtuvo:

$$K_p = 0.1$$

Luego a través de la relación de las ganancias proporcionales e integrales:

$$\frac{K_i}{K_p} = 150 \quad \Longrightarrow \quad K_i = 15$$

La Fig. 3.1 muestra la respuesta al paso del sistema con el controlador diseñado anteriormente.

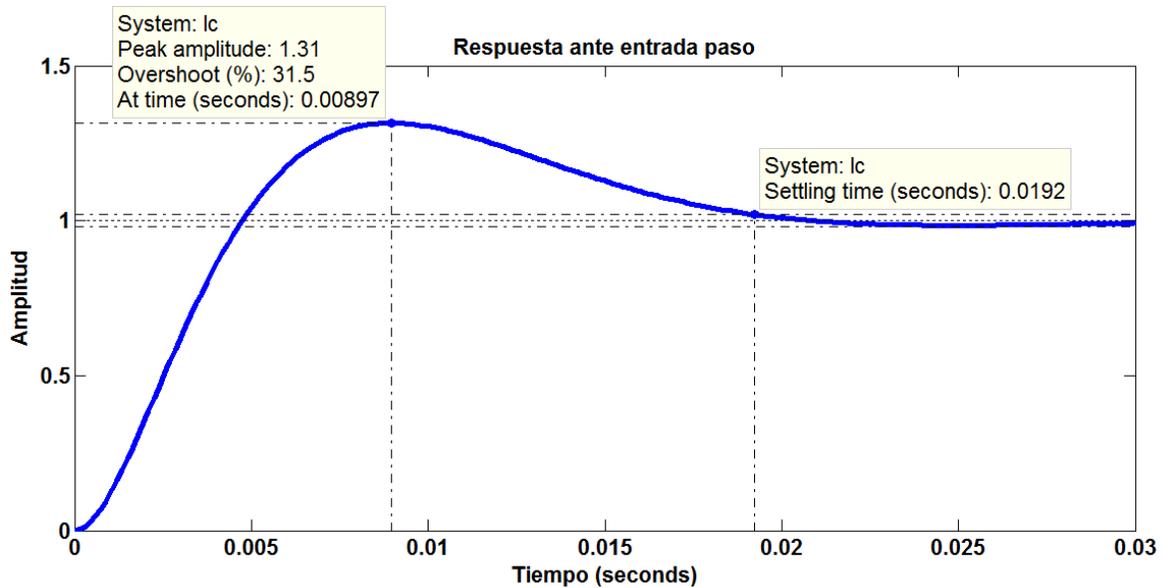


Figura 3.1. Respuesta ante entrada paso por referencia para un controlador PI sintonizado a partir del LGR.

La figura anterior arroja los siguientes resultados:

$M_p = 31.5 \%$, $T_s = 0.0192$ segundos.

Resulta inesperado observar un sobreimpulso del 31.5 % cuando los ajustes del controlador se han realizado para un coeficiente de amortiguamiento de 0.7. Esto se debe a la presencia del cero que se ha ubicado, que en lazo cerrado contribuye a un incremento de la sobrecresta del sistema.

El ancho de banda correspondiente a dicho sistema es $BW \approx 542$ rad/s (Ver Fig. 1 del Anexo II).

II. Método de Zieguel Nichols basado en oscilaciones sostenidas

Este método está basado en la ganancia última y su correspondiente período de oscilación, es decir, se basa en encontrar la ganancia y el período que permiten obtener una respuesta del sistema críticamente amortiguada.

Haciendo uso del MatLab se calcula la ganancia para la cual el sistema posee oscilaciones sostenidas (Ver Fig. 2 del Anexo II). A partir de la Tabla 2.1 expuesta en secciones anteriores, se prosigue a calcular los parámetros del controlador PI, obteniéndose como resultado:

$$K_p = 0.01 \quad K_I = 0.0159$$

La Fig. 3.2 muestra la respuesta del sistema con el controlador PI ante una entrada paso, reflejando un sobre impulso $M_p = 3.46\%$, un tiempo de establecimiento $T_s = 0.613$ segundos y un ancho de banda de $BW \approx 33.9$ rad/s (Ver Fig. 3 del Anexo II).

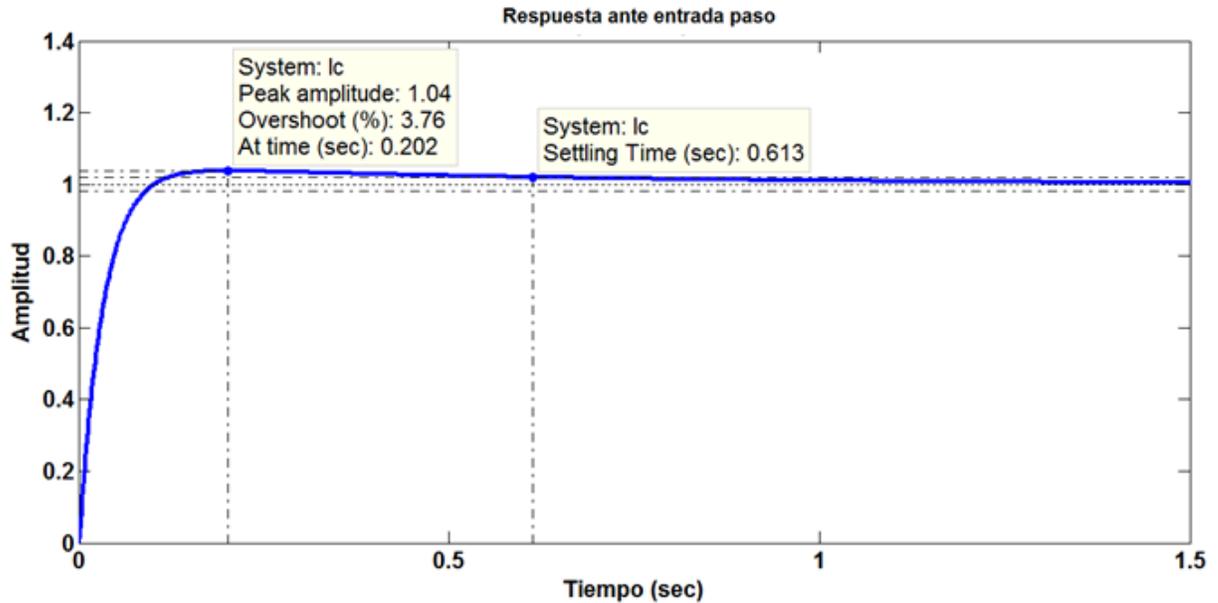


Figura 3.2. Respuesta transitoria ante una entrada paso con un controlador PI sintonizado a partir de oscilaciones sostenidas.

III. Método de 1/4 de razón de decrecimiento

Este método está basado en obtener la ganancia mediante la cual la razón de decrecimiento del sistema sea $1/4$ de la anterior. A partir de esta ganancia se ajusta el tipo de controlador según la Tabla 2.2.

Para una ganancia $K_{1/4} = 1$ y $T_{1/4} = 0.0037$ segundos, el sistema presenta un decrecimiento en su amplitud de un 25%. Luego al aplicar las fórmulas anteriores para la sintonía de un controlador PI:

$$K_p = 0.9, \quad K_I = 241.9$$

La Fig. 3.3 muestra la respuesta ante entrada paso del sistema sintonizado con el controlador anterior.

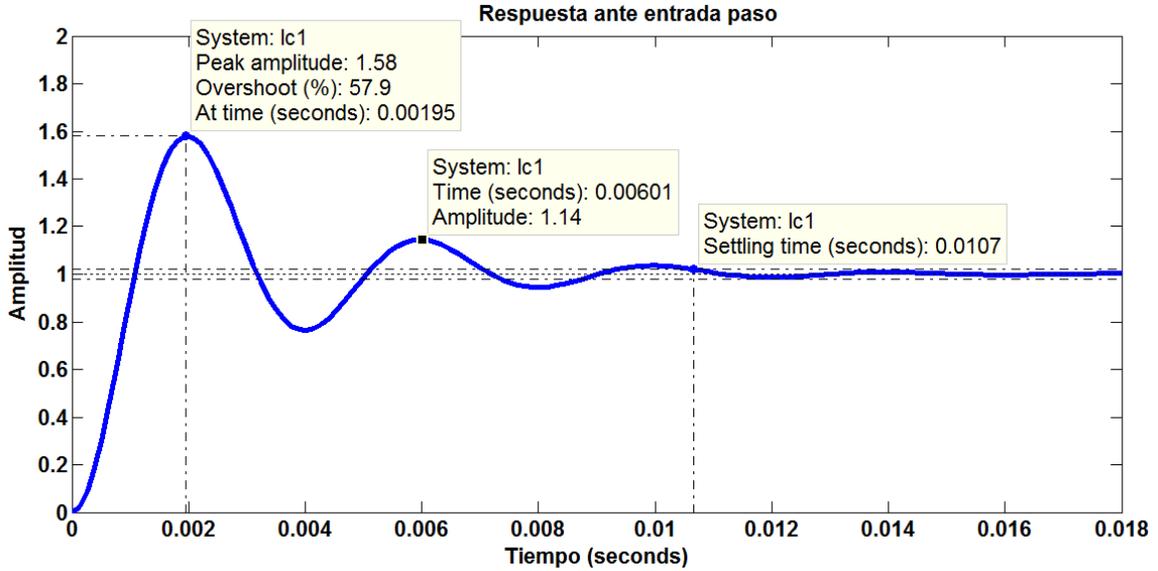


Figura 3.3. Respuesta transitoria ante una entrada paso con un controlador PI sintonizado a partir de $\frac{1}{4}$ de razón de decrecimiento.

Como se puede apreciar el sistema posee decrecimientos de aproximadamente un 25% entre una oscilación y la siguiente. También presenta un sobreimpulso $M_p = 57.9\%$ y $T_s = 0.0107$ segundos.

El ancho de banda del sistema es $BW \approx 2490$ rad/s. (Ver Fig. 4 del Anexo II)

IV. Método de la Regla de la Doble Relación

Según la Tabla 2.4 propuesta en secciones anteriores se puede calcular el valor de la ganancia proporcional e integral del controlador PI para un sistema con fricción en la planta.

$$K_P = \frac{J^2 + B^2 \tau_{TA}^2}{2J\tau_{TA}} = 0.16 \quad K_I = \frac{(B + K_P)^2}{2(J + B\tau_{TA})} = 40$$

Donde:

$$J = 0.00032 \text{ [Kg.m}^2\text{]}$$

$$B = 0.000032 \text{ [Kg.m]}$$

$$\tau_{TA} = 0.001 \text{ [s]}$$

La Fig. 3.4 muestra la respuesta transitoria ante una entrada paso.

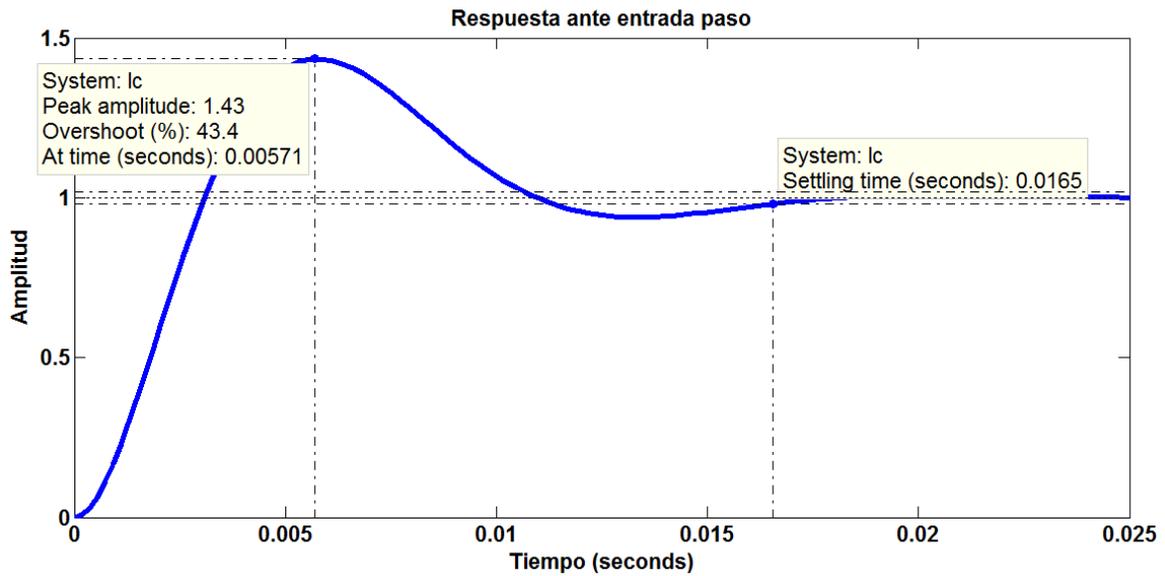
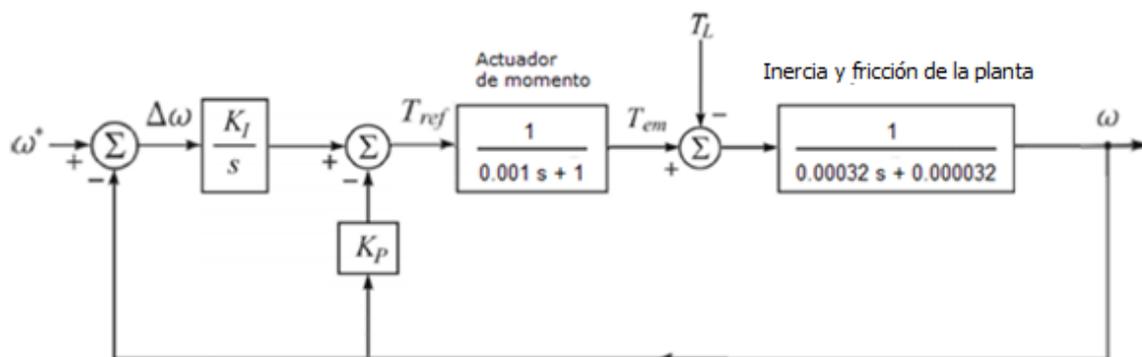


Figura 3.4. Respuesta transitoria ante una entrada paso con un controlador PI aplicando la regla de la doble relación.

Como se puede apreciar la respuesta presenta un $M_p = 43.4\%$, y un tiempo de establecimiento $T_s = 0.0165$ segundos. El ancho de banda es $BW \approx 849$ rad/s (Ver Fig. 5 del Anexo II).

3.2.2 Sintonización del controlador Proporcional – Integral de velocidad con ganancia proporcional en retroalimentación.

Según los datos del motor caso estudio y la configuración propuesta, el diagrama en bloques es el siguiente:



I. Método del Lugar Geométrico de las raíces

Puesto que el controlador PI fue sintonizado anteriormente en su configuración directa, sólo se tiene que ubicar su ganancia proporcional en el lazo de retroalimentación como se muestra a continuación.

La Fig. 3.5 muestra la respuesta ante entrada paso del esquema anterior

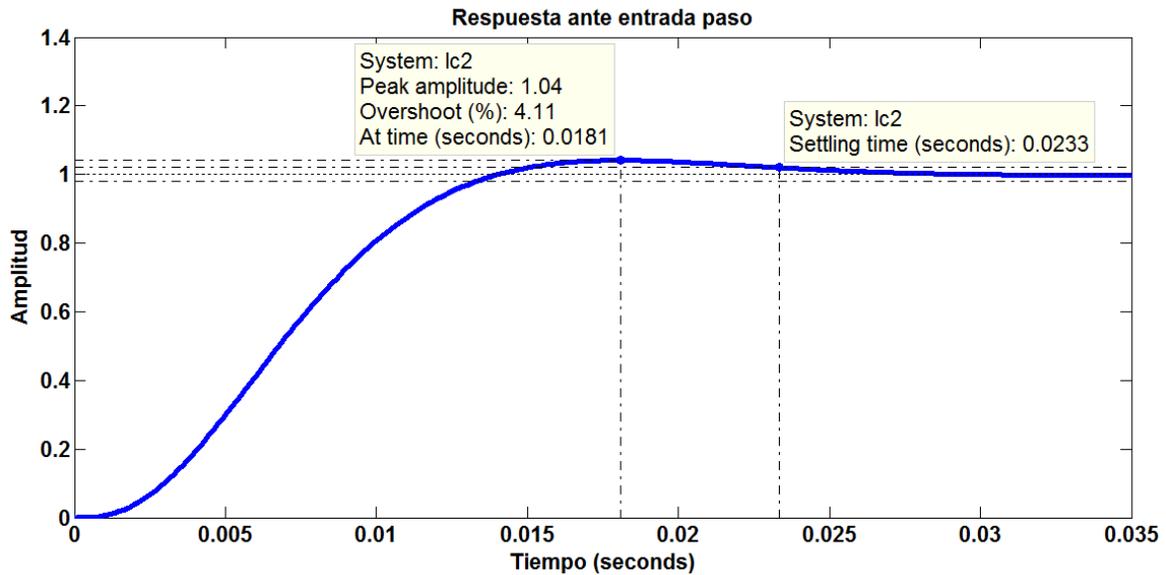


Figura 3.5. Respuesta transitoria ante una entrada paso con un controlador PI sintonizado a partir del LGR.

Como se puede apreciar, el sobreimpulso del sistema disminuyó en relación a la configuración directa del controlador PI, pues se elimina el cero que presentaba en lazo cerrado y por consiguiente el M_p disminuyó hasta 4.11%. Esto proporciona que el sistema sea más lento $T_s = 0.0233$ segundos. Además, disminuyó el ancho de banda $BW \approx 255$ rad/s. (Ver Fig. 1 del Anexo III).

II. Método de Zieguel Nichols basado en oscilaciones sostenidas

Este método no arrojó buenos resultados para la configuración del PI con K_p en retroalimentación. Las ganancias proporcionales e integrales obtenidas para la configuración directa fueron:

$$K_p = 0.01 \quad K_I = 0.0159$$

La respuesta del sistema ante entrada paso resultó un sistema de primer orden por lo que no se considera este método eficiente para este caso (Ver Fig. 2 del Anexo III).

III. Método de $\frac{1}{4}$ de razón de decrecimiento

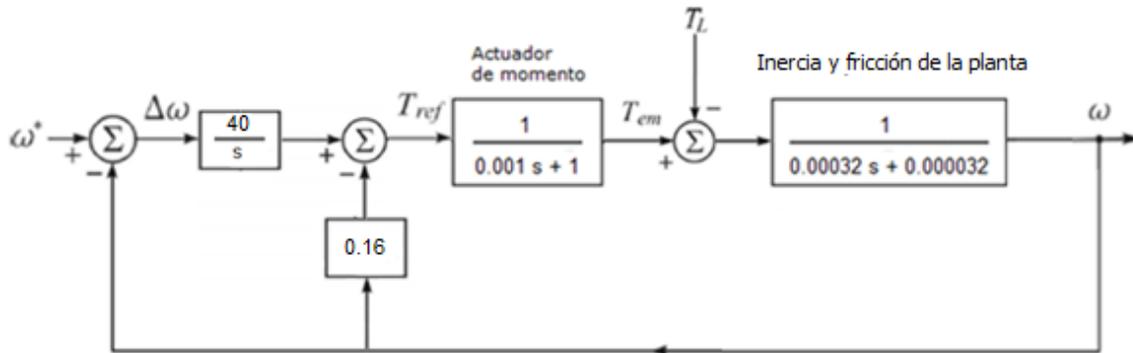
Al igual que el método anterior, este método no logró buenos resultados para la configuración presente, tomando los mismos valores obtenidos en el ajuste del PI en su configuración directa, los cuales fueron:

$$K_p = 0.9, \quad K_I = 241.9$$

La respuesta de este sistema con la ganancia proporcional en retroalimentación no fue buena, por lo que este método resulta ineficiente en este caso (Ver Fig. 3 del Anexo III).

IV. Método de la Regla de la Doble Relación

Al ubicar la ganancia proporcional obtenida al aplicar el método de la Regla de la Doble Relación en el paso de retroalimentación, el sistema quedaría como se muestra a continuación:



La Fig. 3.6 muestra la respuesta transitoria ante una entrada paso para un sistema controlado por un controlador PI con K_P en retroalimentación con los valores de ganancias anteriores.

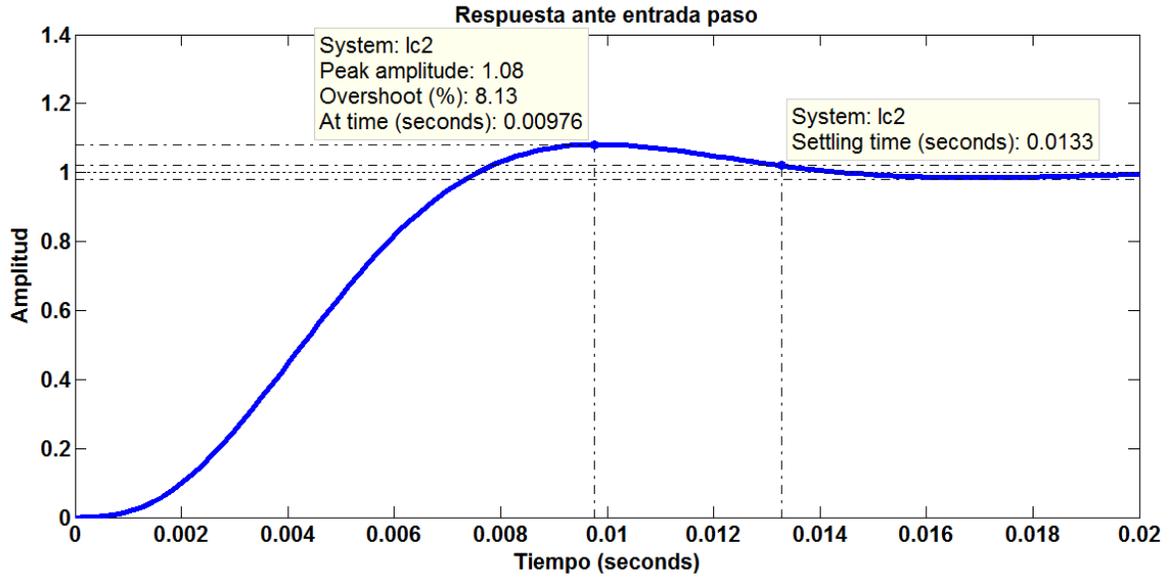


Figura 3.6. Respuesta transitoria ante una entrada paso con un controlador PI sintonizado a partir de la regla de la doble relación.

Como se puede apreciar la respuesta del sistema se hizo más rápida en comparación con la que se obtuvo del LGR, con un $T_s = 0.0133$ segundos. Además, se logró aumentar el ancho de banda considerablemente $BW \approx 499$ rad/s (Ver Fig. 4 del Anexo III), siendo aproximadamente el doble del obtenido para el controlador sintonizado mediante el LGR para esta configuración.

A continuación, la Tabla 3.1 resume los parámetros obtenidos de la respuesta transitoria ante entrada paso para las configuraciones del PI.

Tabla 3.1. Parámetros en estado transitorio para las configuraciones del controlador PI sintonizado a partir de diferentes métodos.

Métodos	PI con K_p en lazo directo	PI con K_p en retroalimentación
Oscilaciones Sostenidas	$M_p = 3.76\%$ $T_s = 0.613 \text{ seg}$ $BW = 33.9 \text{ rad/s}$	Respuesta no deseada
$\frac{1}{4}$ de Razón de Decrecimiento	$M_p = 57.9\%$ $T_s = 0.0107 \text{ seg}$ $BW = 2490 \text{ rad/s}$	Respuesta no deseada
LGR	$M_p = 31.5\%$ $T_s = 0.0192 \text{ seg}$ $BW = 542 \text{ rad/s}$	$M_p = 4.11\%$ $T_s = 0.0233 \text{ seg}$ $BW = 255 \text{ rad/s}$
Regla de la Doble Relación	$M_p = 43.4\%$ $T_s = 0.0165 \text{ seg}$ $BW = 849 \text{ rad/s}$	$M_p = 8.13\%$ $T_s = 0.0133 \text{ seg}$ $BW = 499 \text{ rad/s}$

Realizando un análisis de la tabla anterior se aprecia que al colocar el efecto proporcional en el paso de retroalimentación el ancho de banda resulta menor, lo que hace más lento el sistema, sin embargo, el sobreimpulso en la respuesta del sistema disminuye considerablemente, lo cual evita picos indeseados en la velocidad del motor. Las Figuras 3.7 y 3.8 reflejan una comparación de la respuesta del sistema a partir de los métodos de sintonía LGR y Doble Relación.

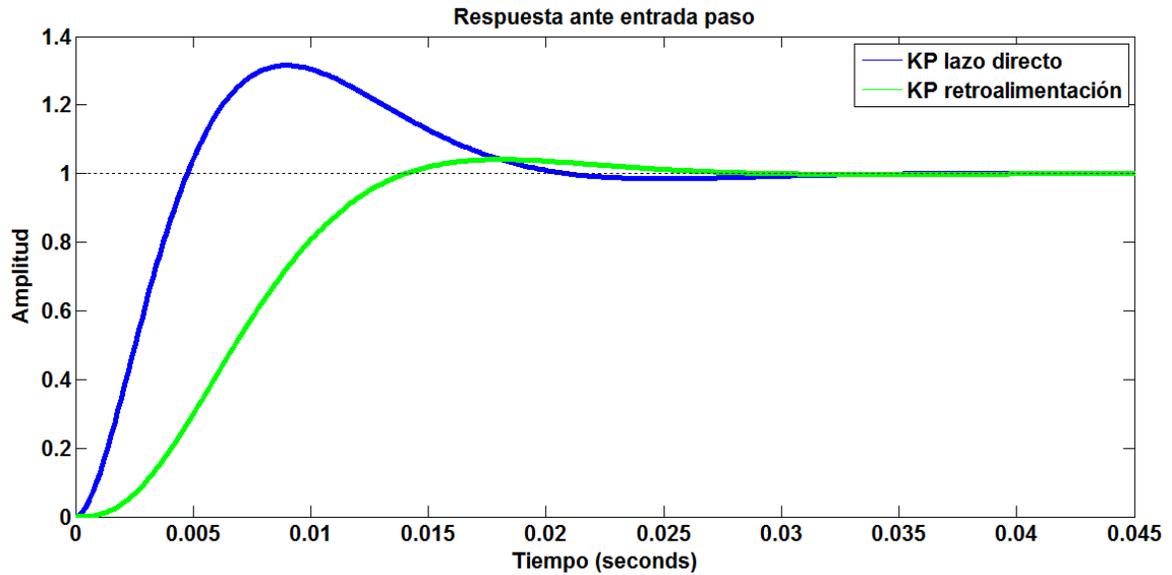


Figura 3.7. Respuesta del sistema con controlador PI sintonizado a partir del método del LGR.

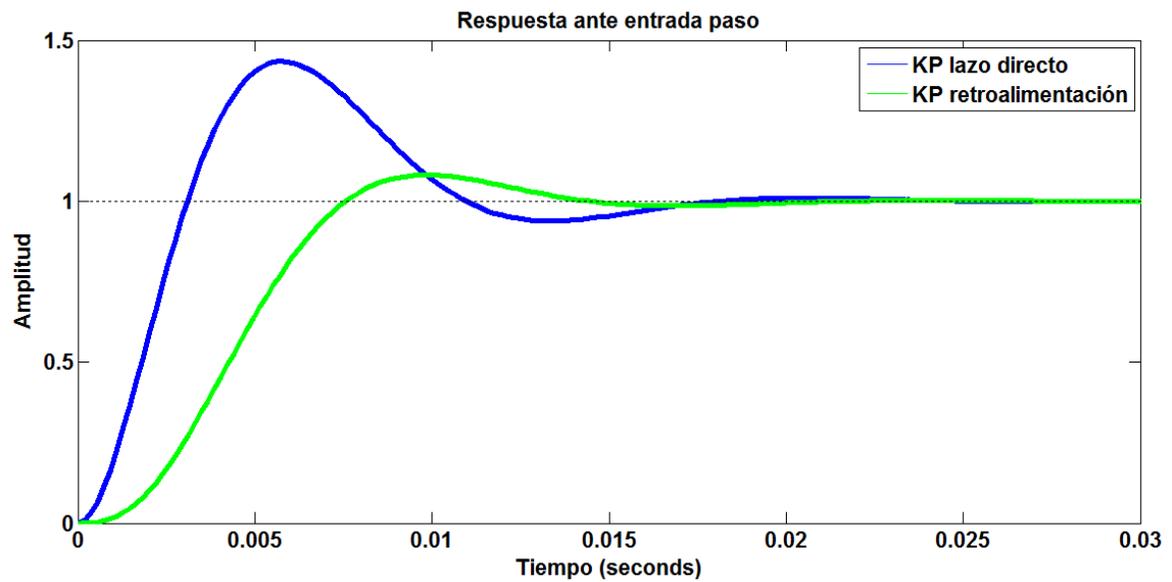


Figura 3.8. Respuesta del sistema con controlador PI sintonizado a partir del método de la Regla de la Doble Relación.

3.3 Respuesta del sistema controlado ante disturbio

Luego de haber obtenido la respuesta del sistema controlado por un controlador PI de velocidad ante entrada paso por la entrada de referencia, es necesario ver cómo responde el sistema controlado en presencia de variaciones en la carga (disturbio).

Para ello se tendrán en cuenta los métodos de sintonía a través del LGR y la Regla de la Doble Relación, puesto que ambos métodos arrojaron respuestas deseadas en las dos configuraciones del controlador PI.

Configuración PI con K_p en lazo directo

La Fig. 3.9 muestra la respuesta ante disturbio del sistema controlado a partir de ambos métodos para la presente configuración aplicando un disturbio del 20% del momento nominal del motor.

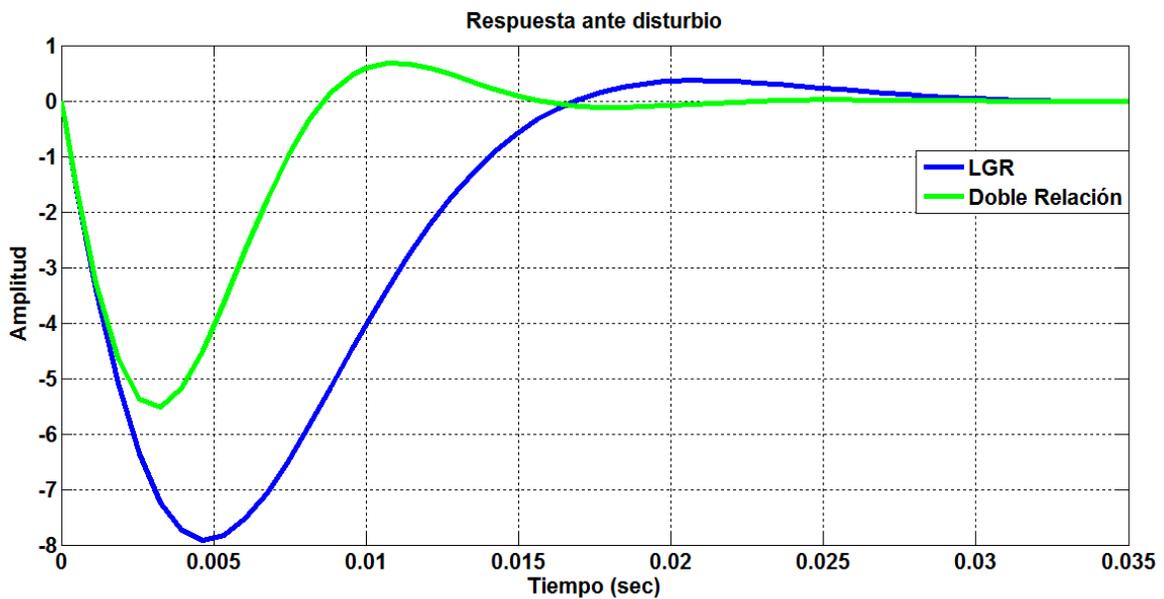


Figura 3.9. Respuesta ante disturbio con un controlador PI con K_p en lazo directo.

Como se puede apreciar el sistema responde rápidamente ante variaciones en la carga en ambos métodos de sintonización. Se nota que en el caso de la Doble Relación la velocidad del motor se establece más rápidamente respecto al LGR. Además, la variación transitoria de la velocidad es menor en el caso de la Doble Relación.

Configuración PI con K_p en retroalimentación

La Figura 3.10 muestra la respuesta ante disturbio del sistema controlado a partir de los métodos LGR y Doble Relación para la presente configuración, aplicando un disturbio del 20% del momento nominal del motor.

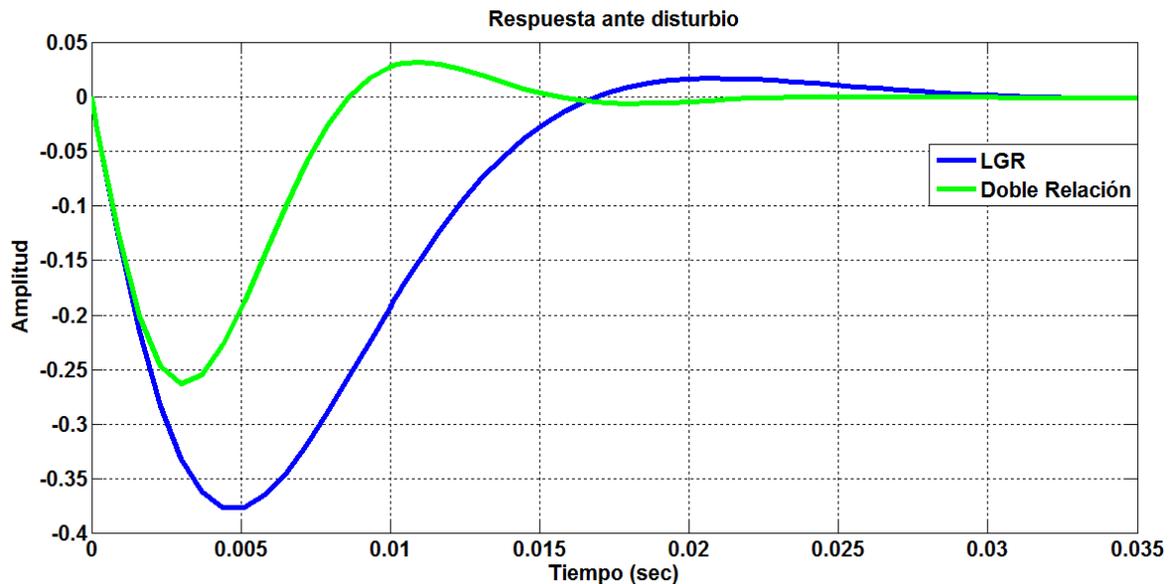


Figura 3.10. Respuesta ante disturbio con un controlador PI con K_p en retroalimentación.

Como se puede apreciar, en esta configuración (K_p en retroalimentación) se obtuvieron resultados similares a la configuración directa del PI; es decir, para ambos métodos de sintonía la velocidad del motor se estabiliza rápidamente en presencia de variaciones en la carga, siendo más rápido en el caso de la Doble Relación.

Nótese que, colocando la ganancia proporcional en el paso de retroalimentación, las variaciones transitorias de la velocidad son menores que cuando se mantiene K_p en el lazo directo.

3.4 Efecto del ruido en la Regla de la Doble Relación

En secciones anteriores se ha referido sobre la importancia que presenta el método de la Regla de la Doble Relación, como por ejemplo aumentar el ancho de banda del sistema en lazo cerrado y por consiguiente aumentar su velocidad de respuesta.

Uno de los efectos negativos que puede traer consigo un aumento del ancho de banda del sistema es que sea más propenso al ruido.

Las principales fuentes de ruido en estos sistemas son los sensores, principalmente si son tacogeneradores o la presencia de otros motores. En caso de que se presenten afectaciones de ruido se pueden incluir filtros para eliminar su presencia

3.5 Conclusiones del capítulo

Para el motor caso de estudio, los métodos de Oscilaciones Sostenidas y $\frac{1}{4}$ de Razón de Decrecimiento para la sintonía del controlador Proporcional-Integral de velocidad no ofrecieron respuestas deseadas en la configuración con la ganancia proporcional en el paso de retroalimentación, no siendo así para los métodos del Lugar Geométrico de las Raíces y Doble Relación.

La sintonía del controlador PI con ganancia proporcional en el paso directo y en la retroalimentación aplicando el método de la Regla de la Doble Relación, ofreció respuestas con tiempos de asentamiento menores respecto al método del LGR, sin embargo, el sobreimpulso resultó ligeramente superior.

Comparando la respuesta con diferentes estructuras para un mismo método de selección de los parámetros, el sobreimpulso resultó menor ubicando la ganancia proporcional en el paso de retroalimentación.

Ante disturbio los ajustes obtenidos por el método de la Regla de la Doble Relación resultaron mejores, al mostrar una respuesta con menos variación transitoria y menor tiempo de recuperación. Para un mismo método de selección de los parámetros, al cambiar la estructura, se lograron en ambos casos mejores resultados con la relocalización del efecto proporcional en la retroalimentación.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Conclusiones

- 1 La configuración del controlador Proporcional – Integral con la ganancia proporcional en retroalimentación propicia menor sobreimpulso en la respuesta del sistema ante cambios en la referencia y menores variaciones de la salida ante disturbios, ya que elimina el cero existente cuando la ganancia proporcional se ubica en el paso directo.
- 2 La aplicación de la regla de la doble relación para el cálculo de los ajustes de controladores, ofrece respuestas ante cambios de velocidad del motor a entrada tipo escalón con coeficientes de amortiguamiento que varían entre 0.5 y 0.707, con lo que es posible obtener las conocidas respuestas Óptimas u Óptimas Simétricas.
- 3 El método de la Regla de la Doble Relación trae como ventajas la obtención directa de los parámetros de los controladores, el aumento del ancho de banda del sistema, y por ende que sea más rápido; además de asegurar una buena respuesta amortiguada con una razonable robustez a cambios en los parámetros de la planta. Como desventaja, hace que el sistema sea más propenso a los efectos de ruidos, lo que puede ser minimizado con la utilización de filtros en los sensores.

Recomendaciones

- 1 Analizar variantes de aplicar la regla de la doble relación utilizando las relaciones:

$$b_k^2 \geq d * b_{k-1} b_{k+1}, d \neq 2.$$

- 2 Investigar acerca de la presencia de ruido en diferentes componentes de lazos de control de accionamientos eléctricos.
- 3 Diseñar filtros para suprimir los efectos del ruido en el sistema en caso de ser necesario.
- 4 Aplicar del método de la Regla de la Doble Relación a los lazos de control de posición en los accionamientos eléctricos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alfaro, V. M. (2002). Métodos de sintonización de controladores PID que operan como reguladores. San José, Costa Rica. *Ingeniería* 12 (1,2): 21-36.

Aström, K. J. C. C. H., P. Person y W.K. Ho (1992). Towards intelligent PID Control, *Automatic (UK)*. Vol. 28 N° 1: pág. 1 – 9.

Cohen, G. H. y G. A. C. (1953). Theoretical Considerations of retarded Control. *ASME Transactions (EUA)*. Vol. 75: pág. 827– 834.

Corripio, A. B. (2001). *Tuning of Industrial Control Systems*. ISA – Research Triangle Park, NC, EUA, The Instrumentation, Systems and Automation Society.

Chidambara, M. R. (1970). Chemical Process Control – A new technique for adaptive tuning controller, *International Journal of Control (UK)*. Vol. 12 N° 6: pág. 1057 – 1074.

Kaya, A. y. T. J. S. (1988). Tuning of PID Controllers of Different Structures, *Control Engineering (EUA)*: pág. 62 – 65.

López, A. M., J.A. Miller, C.L. Smith y P.W. Murril (1967). Tuning Controllers with Error-Integral Criteria. *Instrumentation Technology (EUA)*.

Lotufo, F. A. (2012). *Controle Linear*. Brazil, UNESP. Capítulo 8: 159.

Nam, K. H. (2010). *AC Motor Control and Electric Vehicle Applications*. Boca Raton, FL, CRC Press, Taylor & Francis Group.

Ogata, K. (1998). *Ingeniería de control moderna*. Naucalpan de Juárez, Edo. de México, PRENTICE-HALL HISPANOAMERICANA, S.A. Tercera edición: 317.

Schaedel, P. D.-I. H. M. (1997). A NEW METHOD OF DIRECT PID CONTROLLER DESIGN BASED ON THE PRINCIPLE OF CASCADED DAMPING RATIOS. Köln, Federal Republic of Germany, Department of Information Technology: European Control Conference, Brussels, Belgium, 1-4.

Shinskey, F. G. (1979). Process Control Systems. Segunda Edición. New York, NY, EUA, McGraw-Hill Book Co.

Slobodan, N. V. (2007). Digital Control of Electrical Drives.

Sung, S. W., J. O, I.B. Lee, J. Lee y S.H. Yy (1996). Automatic Tuning of PID Controller using Second-Order plus Time delay Model. Japón, Journal of Chemical Engineering of Japan. Vol. 29 N° 6: pág. 990 – 999.

Tercesa, S. L. Motor-Serie ME45, Sertec Transmisiones.

Ziegler, J. B. y. N. B. N. (1942). Optimum Settings for Automatic Controls. ASME Transactions (EUA). Vol. 64: pág. 759-768.

ANEXOS

Anexo I Programa para calcular el amortiguamiento para sistemas hasta orden 16.

```
n=input ('Introduzca el orden del sistema (2=<orden<=47) \n');
b0=input ('Introduzca el valor de término independiente \n');
p=n;
lambda = 5;
F = poissrnd (lambda,1, n+1);
F(n+1)=b0;
F(n)=sqrt(2*F(n+1) *F(n-1));
n=n-2;
while (n ~= 0)
F(n)=((F(n+1)) ^2)/(2*F(n+2));
n=n-1;
end
[Wn, Z] =damp(F);
fprintf ('El sistema es: \n ')
F
if (p==3)
fprintf ('El factor de amortiguamiento del sistema es: %6.4f \n ', Z (p))
else
fprintf ('El factor de amortiguamiento del sistema es: %6.4f \n ', Z (1))
end
```

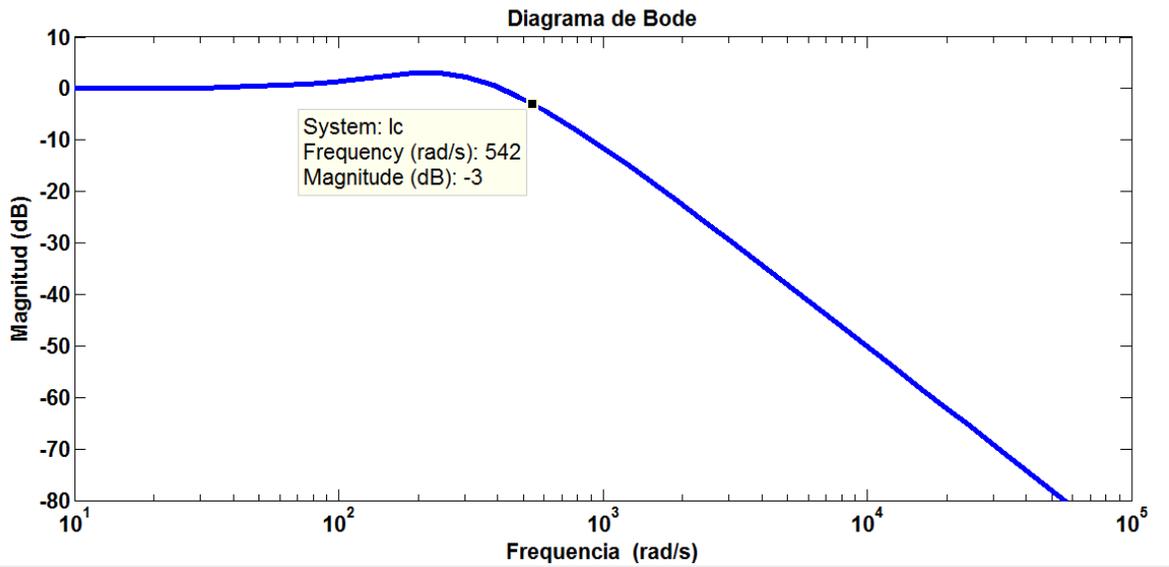
Anexo II Controlador PI con K_p en lazo directo

Figura 1. Diagrama de Bode de magnitud para un controlador PI sintonizado a partir del LGR.

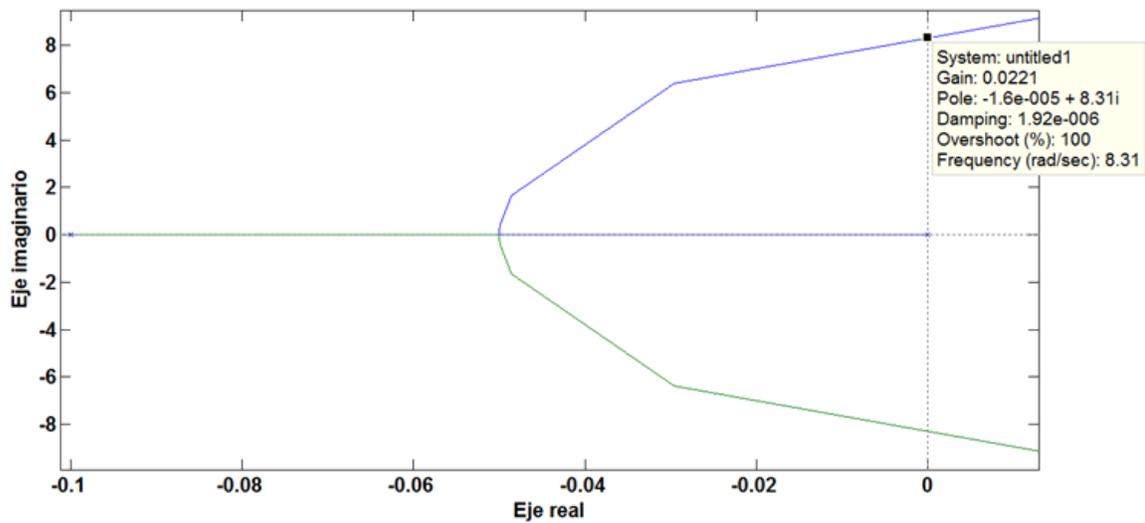


Figura 2. Lugar geométrico de las raíces para el ajuste del controlador PI.

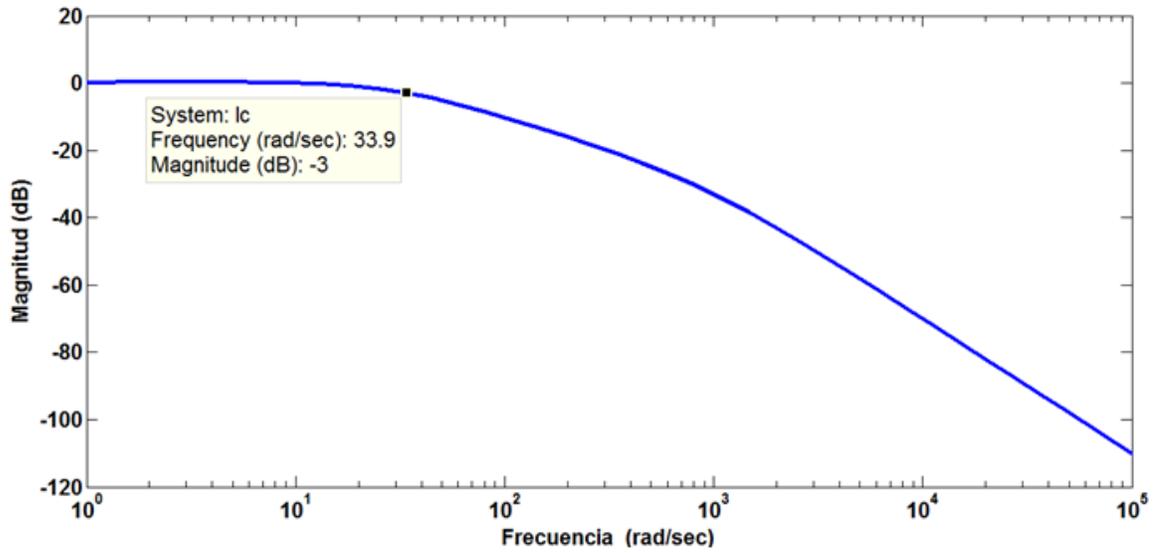


Figura 3. Diagrama de Bode de amplitud para un controlador PI sintonizado a partir de oscilaciones sostenidas.

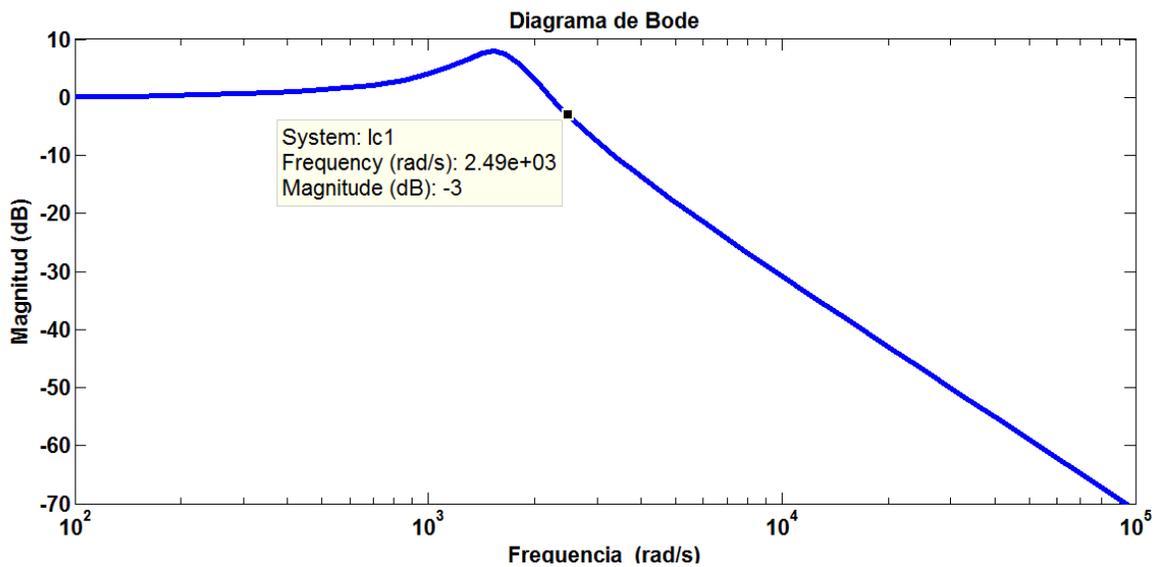


Figura 4. Diagrama de Bode de amplitud para un controlador PI sintonizado a partir de $\frac{1}{4}$ de razón de decrecimiento.

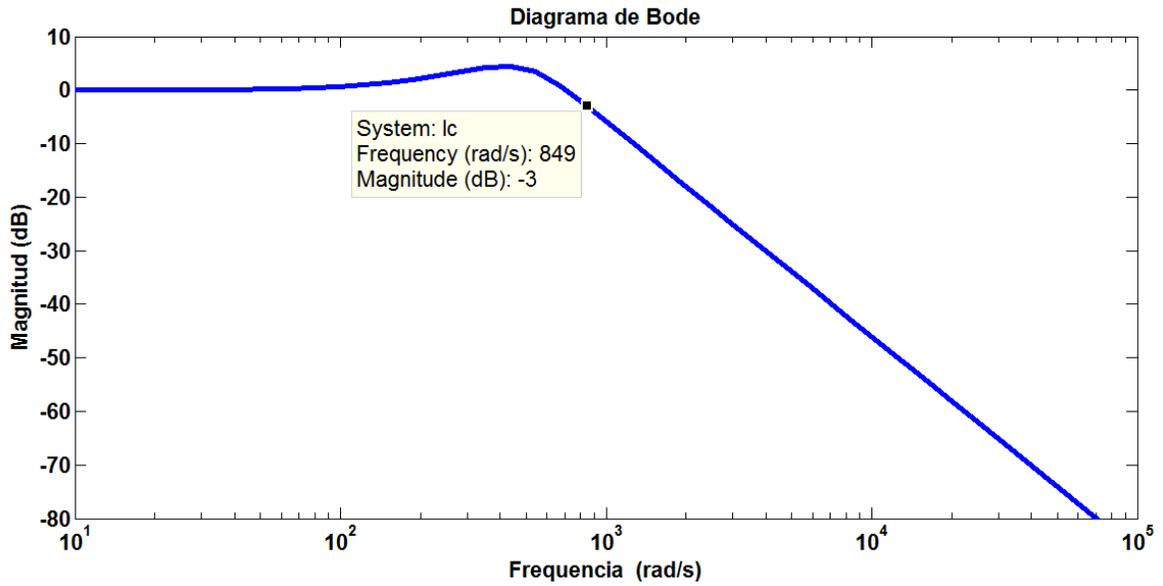


Figura 5. Diagrama de Bode de amplitud para un controlador PI sintonizado a partir de la regla de la doble relación.

Anexo III Controlador PI con K_p en retroalimentación

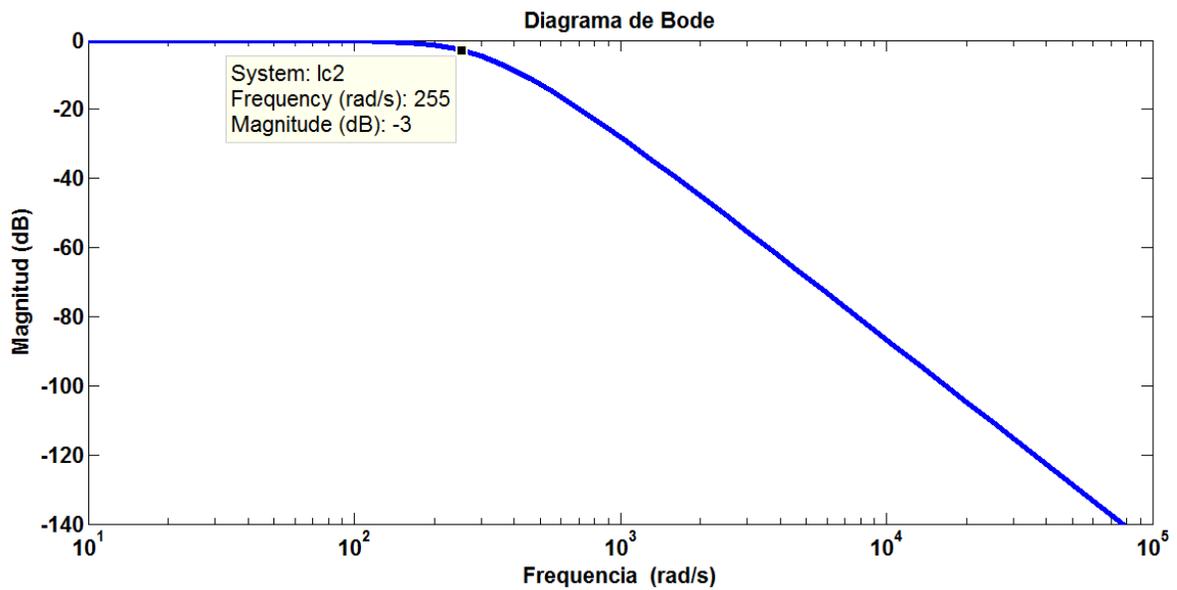


Figura 1. Diagrama de Bode de amplitud para un controlador PI sintonizado a partir del LGR.

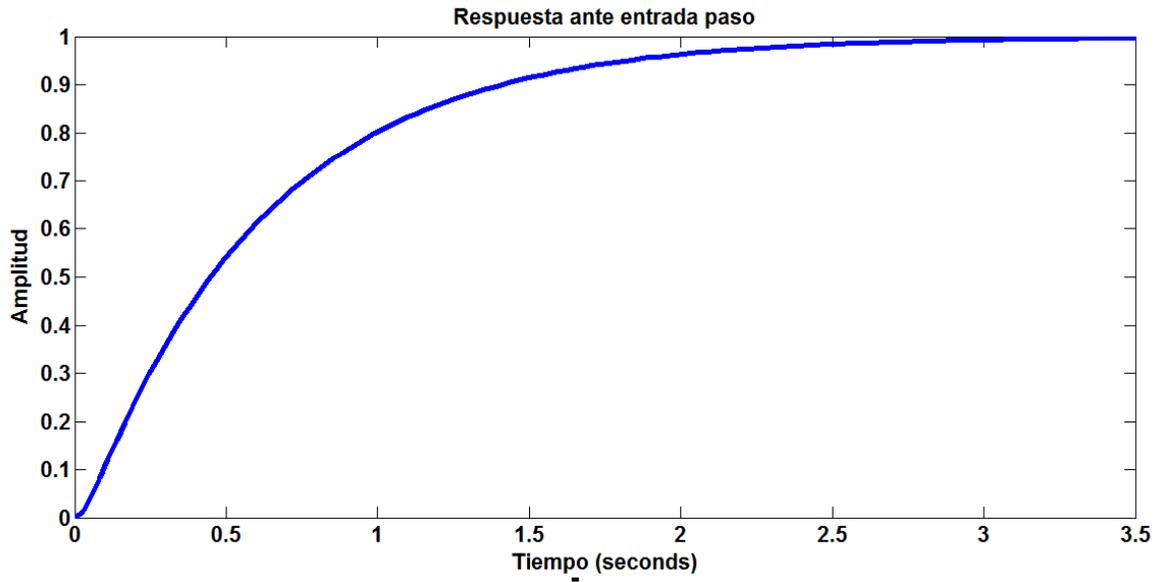


Figura 2. Respuesta transitoria ante una entrada paso con un controlador PI sintonizado a partir de oscilaciones sostenidas.

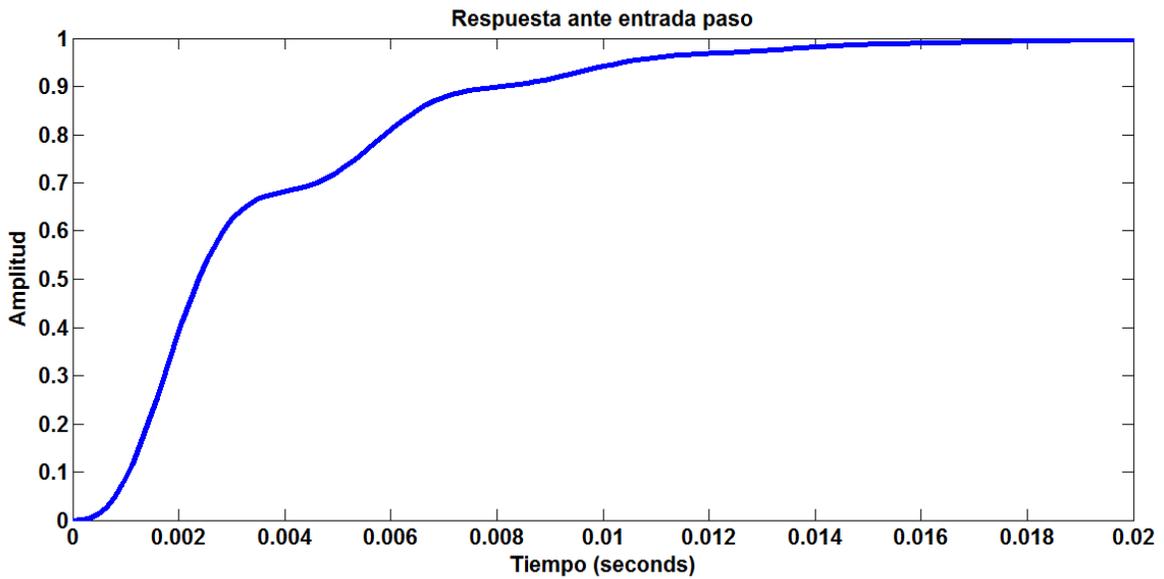


Figura 3. Respuesta transitoria ante una entrada paso con un controlador PI sintonizado a partir de $\frac{1}{4}$ de razón de decrecimiento.

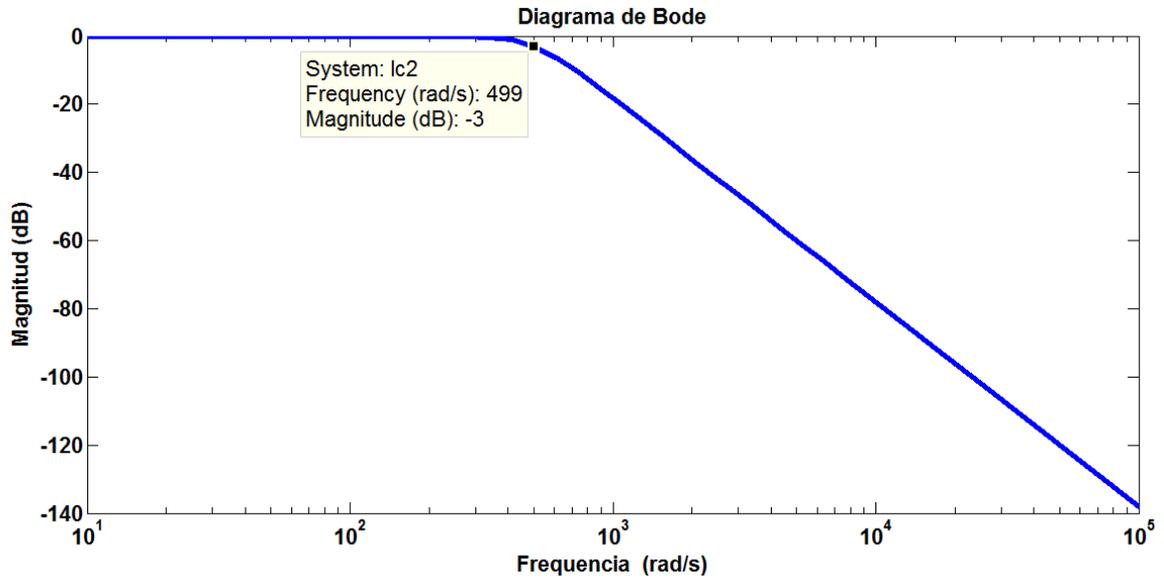


Figura 4. Diagrama de Bode de amplitud para un controlador PI sintonizado a partir de la regla de la doble relación.