

Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas  
Facultad de Ingeniería Eléctrica  
Departamento de Automática y Sistemas Computacionales



## PROYECTO DE TRABAJO DE DIPLOMA

# Integración GPS/INS para la navegación de vehículos autónomos

Autor: Yordany Marquetti Gómez

Tutores: Dr.C Luis Hernández Santana  
Ms.C Delvis García García

Santa Clara

2014

”Año 56 de la Revolución”

Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas  
Facultad de Ingeniería Eléctrica  
Departamento de Automática y Sistemas Computacionales



PROYECTO DE TRABAJO DE DIPLOMA  
**Integración GPS/INS para la navegación de vehículos  
autónomos**

PROYECTO DE TRABAJO DE DIPLOMA

Autor: Yordany Marquetti Gómez  
email: ymarquetti@uclv.edu.cu

Tutores: Dr.C Luis Hernández Santana Asistente  
Dpto. de Automática, Facultad de Ing. Eléctrica, UCLV  
email: luishs@uclv.edu.cu

Ms.C Delvis García García Titular  
Dpto. de Automática, Facultad de Ing. Eléctrica, UCLV  
email: dggarcia@uclv.edu.cu

Santa Clara

2014

”Año 56 de la Revolución”



Hago constar que el presente PROYECTO DE TRABAJO DE DIPLOMA fue realizado en la Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas como parte de la culminación de estudios de la especialidad de Ingeniería en Automática, autorizando a que el mismo sea utilizado por la Institución, para los fines que estime conveniente, tanto de forma parcial como total y que además no podrá ser presentado en eventos, ni publicados sin autorización de la Universidad.

---

Yordany Marquetti Gómez  
Autor

---

Fecha

Los abajo firmantes certificamos que el presente trabajo ha sido realizado según acuerdo de la dirección de nuestro centro y el mismo cumple con los requisitos que debe tener un trabajo de esta envergadura referido a la temática señalada.

---

Yordany Marquetti Gómez  
Autor

---

Fecha

---

Boris Luis Martínez Jiménez, Dr.C  
Jefe del Departamento

---

Fecha

---

Responsable ICT o J' de Carrera, (Dr.C., M.Sc. o Ing.)  
Responsable de Información Científico-Técnica

---

Fecha

## PENSAMIENTO

*“La inteligencia no solo consiste en el conocimiento, sino también en la destreza de aplicarlo en la práctica ”.*

*Aristóteles*

## DEDICATORIA

A mis padres, María y Leonardo,  
*por su apoyo y por lo que han logrado hacer de mi persona.*

A mi novia Rujaimé,  
*por estar siempre apoyándome y ser tan especial en mi vida.*

A mi familia y amigos,  
*por estar siempre presentes.*

## AGRADECIMIENTOS

A mis padres por todo lo que han hecho siempre por mí ya que sin ellos no hubiera sido posible este resultado.

A mi novia, por todo el apoyo y comprensión que me ha dado y por ser autora también de esta obra.

A mi tutor Delvis, por haberme guiado en la obtención de este resultado.

A mis amigos incondicionales: en especial a Alejandro, Michel y Sandy.

A toda mi familia, por haber influido en mi formación y educación en cada etapa de mi vida.

A todos los que se mantuvieron a mi lado pese a las dificultades y siempre supieron apoyarme incondicionalmente.

## RESUMEN

Los vehículos autónomos son muy utilizados e investigados a nivel mundial debido a sus variadas aplicaciones. Dada la importancia que representa para nuestro país contar con este tipo de vehículos, el Grupo de Automatización, Robótica y Percepción trabaja en el Sistema de Posicionamiento para vehículos terrestres y sumergibles; lo cual requiere de la información de posición de manera continua, confiable y precisa. En los últimos años, el uso de los Sistemas de Navegación Inercial conjuntamente con el Sistema de Posicionamiento Global ha incrementado de manera significativa la precisión en la navegación. Esta combinación hace uso de las ventajas de la naturaleza complementaria de ambos sistemas y como técnica de integración se emplea el Filtro de Kalman, lo cual incrementa la integridad y calidad de cada sistema por separado. El algoritmo propuesto considera las no linealidades de los modelos de navegación y fue implementado utilizando el toolbox Simulink del Matlab. Para ilustrar el buen desempeño del del Filtro Kalman se presentan varias simulaciones, utilizando tanto datos simulados como reales, comprobándose el comportamiento de los errores de estimación y la estabilidad del sistema.

## TABLA DE CONTENIDO

	<u>Página</u>
PENSAMIENTO . . . . .	I
DEDICATORIA . . . . .	II
AGRADECIMIENTOS . . . . .	III
RESUMEN . . . . .	IV
Índice de cuadros . . . . .	VIII
Índice de figuras . . . . .	IX
1. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA . . . . .	5
1.1. Navegación Inercial. . . . .	5
1.2. Sistema de Navegación Inercial (INS) . . . . .	5
1.3. Clasificación de los INS. . . . .	6
1.4. Sensores inerciales . . . . .	6
1.4.1. Acelerómetros . . . . .	6
1.4.2. Giróscopos . . . . .	7
1.4.3. Errores comunes de los sensores inerciales . . . . .	7
1.4.4. Ventajas y desventajas de los INS . . . . .	8
1.5. Sensores de posicionamiento . . . . .	9
1.5.1. Errores comunes de los sensores GPS . . . . .	10
1.5.2. Métodos y técnicas de medición . . . . .	12
1.5.3. Ventajas y desventajas de los GPS . . . . .	13
1.6. Estrategias de integración . . . . .	13
1.6.1. Integración desacoplada (Uncoupled mode) . . . . .	14
1.6.2. Integración débilmente acoplada (Loosely coupled mode) . . . . .	15
1.6.3. Integración fuertemente acoplada (Tightly coupled mode) . . . . .	16
1.7. Limitaciones de la integración de INS-GPS usando Filtro Kalman (KF) . . . . .	18
1.8. Filtro Kalman (KF) . . . . .	19

1.9.	Consideraciones del capítulo . . . . .	19
2.	MODELO MATEMÁTICO DEL INS . . . . .	20
2.1.	Sistemas de coordenadas y transformaciones . . . . .	20
2.1.1.	Sistema de coordenadas Inercial I-frame . . . . .	20
2.1.2.	Sistema de coordenadas ECI i-frame . . . . .	21
2.1.3.	Sistema de coordenadas ECEF e-frame . . . . .	21
2.1.4.	Sistema de coordenadas de Navegación n-frame . . . . .	22
2.1.5.	Sistema de coordenadas Body b-frame . . . . .	22
2.2.	Métodos para la representación de la actitud . . . . .	23
2.2.1.	Matriz de Cosenos Directores (DCM). . . . .	24
2.2.2.	Ángulo vectorial de rotación o Eje y Ángulo de Euler. . . . .	25
2.2.3.	Ángulos de Euler. . . . .	25
2.2.4.	Cuaterniones o Parámetros Simétricos de Euler. . . . .	27
2.3.	Modelo para la realización del INS . . . . .	30
2.4.	Cálculo de la actitud a partir de los giroscopios . . . . .	32
2.5.	Compensación de la fuerza gravitacional y centrípeta. . . . .	33
2.6.	Transformación del sistema de coordenadas cuerpo al sistema de coordenadas navegación. . . . .	35
2.7.	Simulación del INS . . . . .	35
2.8.	Conclusiones del capítulo . . . . .	40
3.	MODELO MATEMÁTICO DEL FILTRO DE KALMAN . . . . .	41
3.1.	Análisis de perturbación . . . . .	41
3.2.	Dinámica de error de posición . . . . .	41
3.3.	Dinámica de error de velocidad . . . . .	43
3.4.	Implementación del Filtro Kalman en la integración del INS/GPS . . . . .	48
3.5.	Resultados de la integración . . . . .	57
3.5.1.	Caso 1: Vehículo Sumergible Autónomo . . . . .	58
3.5.2.	Caso 2: Vehículo terrestre . . . . .	63
3.6.	Análisis Económico . . . . .	65
3.7.	Conclusiones del capítulo . . . . .	66
	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES . . . . .	67

APENDICES . . . . .	71
A. Anexo 1 . . . . .	72

## Índice de cuadros

<u>Cuadro</u>		<u>Página</u>
1-1.	Estrategias de integración del bloque INS con otros sistemas . . . . .	14
3-1.	Valores estadísticos de los errores de estimación . . . . .	61
3-2.	Valores estadísticos de los errores de estimación . . . . .	65

## Índice de figuras

<u>Figura</u>	<u>Página</u>
1-1. lazo (feedforward feedback) . . . . .	14
1-2. Integración Desacoplada (Uncoupled mode) . . . . .	15
1-3. Integración Débilmente Acoplada (Loosely coupled mode). . . . .	16
1-4. Integración Fuertemente Acoplada (Tightly coupled mode) . . . . .	17
2-1. Esquema de coordenadas ECEF y NED . . . . .	22
2-2. Sistemas de referencia rotados . . . . .	23
2-3. Sentidos de rotaciones elementales . . . . .	26
2-4. cuaterno vector de orientación unitaria y ángulo de rotación . . . . .	27
2-5. Esquema que describe el lazo de navegación . . . . .	31
2-6. Estructura matemática del lazo de navegación. . . . .	32
2-7. Fuerza centrípeta en un movimiento circular. . . . .	34
2-8. Salidas simuladas de los sensores. . . . .	36
2-9. Mediciones simuladas de los sensores . . . . .	37
2-10.Ángulos de orientación obtenidos. . . . .	38
2-11.Velocidades ideales. . . . .	38
2-12.Posición ideal. . . . .	39
2-13.Posición con ruido. . . . .	40
3-1. Modelo del Filtro Kalman . . . . .	52
3-2. Modelo Feedforward . . . . .	56

3-3. Modelo Feedback . . . . .	56
3-4. Trayectoria bidimensional del vehículo sumergible . . . . .	59
3-5. Trayectoria tridimensional del vehículo sumergible . . . . .	60
3-6. Desplazamientos en metros y errores de estimación en cada dirección (submarino). . . . .	61
3-7. Velocidades corregidas del INS. . . . .	62
3-8. Ganancia del FK y covarianza de los errores. . . . .	63
3-9. Trayectoria bidimensional del vehículo terrestre. . . . .	63
3-10. Trayectoria tridimensional del vehículo terrestre. . . . .	64
3-11. Desplazamientos en metros y errores de estimación en cada dirección (carro). . . . .	64

## INTRODUCCIÓN

El desarrollo de los vehículos autónomos cambió la historia del mundo. El objetivo ha sido siempre contar con vehículos no tripulados que lleguen más lejos y cuya pérdida no implique el costo de vidas humanas. En la actualidad, con el desarrollo de los microcontroladores y de los sensores inerciales de tecnología de estado sólido, es posible fabricar estas máquinas a un precio asequible. Es por este motivo que en los últimos años esta tecnología ha sido testigo de un incremento en los recursos destinados a promover su investigación y desarrollo. Como resultado de este esfuerzo se han generado numerosas innovaciones que la han llevado a transformarse en una disciplina de alta complejidad. El mundo moderno cuenta ya con cierto desarrollo en cuestiones relacionadas con estas tecnologías, y posee avances notables en el campo del hardware y el software, que permiten que los vehículos autónomos cumplan numerosas funciones en la vida diaria, sin embargo, estas tecnologías resultan sumamente caras para nuestro país. Los científicos e investigadores se ven ante la necesidad de encontrar una solución capaz de suplir esta carencia y que sea económicamente factible. Es por ello que se hace necesario para nuestro país dominar este tipo de tecnologías para poder contar con aplicaciones de factura nacional que minimicen los costos en concordancia con las posibilidades económicas que tenemos, además una plataforma de este tipo ofrece ventajas considerables para nuestro país por su utilización en tareas de inspección, rescate y salvamento, entre otras. Otra de las tendencias claramente evidenciadas se relacionan con el creciente uso de los sistemas de navegaciones híbridos, donde varios dispositivos electrónicos se han usado, para coleccionar la información necesario para dar la posición del vehículo, y reducir los errores de los sensores inerciales (Erin L. *et al.*, 2005). La precisión en la navegación con el sistema de posicionamiento global (GPS) ha progresado ampliamente, encontrándose en el rango de metros a centímetros, dependiendo del tipo de observaciones y métodos utilizados para su procesamiento.

El entorno operacional del sistema de navegación juega un papel importante en la calidad de las medidas obtenidas, debido a que se necesita mantener en línea de vista los satélites que tiene enganchados el receptor GPS, y bajo condiciones adversas, existen dificultades en el seguimiento de los satélites, introduciendo errores de medida que pueden sesgar los parámetros estimados, comprometiendo la integridad del sistema. Por otra parte, las unidades de medidas inerciales (IMU) son instrumentos completamente autónomos que registran las aceleraciones y velocidades de rotación de un cuerpo relativo a un sistema de coordenadas de referencia inercial. A partir de las velocidades de rotación se obtienen los cambios de orientación que permitirán transformar las medidas de los acelerómetros al sistema de coordenadas de navegación deseado e integrarlas para obtener la velocidad y la posición. Pero las imprecisiones de los sensores, principalmente sesgos y derivas, causan una degradación del posicionamiento inercial. Por lo tanto, es necesario proporcionar actualizaciones regulares para limitar el error a un nivel aceptable. Dada la naturaleza complementaria del GPS y de las IMU, su integración representa la mejor opción para incrementar la disponibilidad y precisión de la solución de navegación. En este sentido se destaca el uso del filtro Kalman en sus diferentes variantes (en inglés KF, Kalman Filter), ([Welch and Bishop, 2001](#)), filtro basado en muestreo (en inglés UKF, Unscented Kalman Filter) entre otros; conjuntamente con mediciones de GPS, sensores de presión y demás sensores que puedan brindar mediciones redundantes ([Salychev, 2004](#)). En este proyecto se explicarán las bases de la integración GPS/INS, donde el Sistema de Navegación Inercial (INS) incluye la IMU y las ecuaciones de mecanización. Una vez concluido este proyecto la arquitectura deberá ser lo suficientemente flexible como para aceptar pequeñas modificaciones en función de la aplicación.

**Objetivo general:**

Desarrollar un algoritmo de integración de una IMU y un receptor GPS mediante el uso del Filtro Kalman.

**Objetivos específicos:**

1. Identificar las principales fuentes de error que afectan a los sensores inerciales.
2. Seleccionar los algoritmos óptimos para la integración de IMUs con otros sensores absolutos (GPS).
3. Desarrollar los procedimientos para la integración de manera modular.
4. Validar los procedimientos desarrollados.

**Resultados esperados:**

Con este proyecto se pretende brindar una solución factible para la integración de una IMU con un receptor GPS específicamente para vehículos autónomos. La ejecución de este proyecto pretende proporcionar soluciones novedosas en el ámbito nacional a problemáticas actuales vinculadas a los vehículos no tripulados. Con el desarrollo de este algoritmo de integración se logrará contar con datos fiables que permitan la navegación autónoma, lo cual proporcionará un ahorro para el país, pues se podrán llevar a cabo misiones que en la actualidad solo pueden ser realizadas por países desarrollados dueños de esta tecnología.

**Estructura del Trabajo:**

En la **Introducción** quedará definida la importancia y necesidad del tema que se aborda y se dejarán explícitos los elementos del diseño teórico de la investigación. La investigación incluirá tres capítulos, además de las conclusiones, recomendaciones, referencias bibliográficas y anexos correspondientes. Los temas que se abordarán en cada capítulo se encuentran estructurados de la forma siguiente:

**Capítulo I:** Se realiza un análisis crítico de la literatura especializada consultada. Se presentan los principales conceptos y definiciones de la navegación inercial, se plantean las diferentes estrategias de integración más utilizadas mundialmente en esta tecnología. Se caracterizan de forma detallada los errores más comunes existentes en los sensores inerciales y como inciden dentro de un sistema de navegación inercial, además se describen los diferentes algoritmos utilizados en la integración de una IMU y un GPS, dando de esta forma una panorámica general de la situación del problema a resolver y proponiendo un algoritmo de integración que cumpla con los requerimientos generales de un vehículo autónomo.

**Capítulo II:** Se presenta en este capítulo de forma explícita la nomenclatura utilizada. Se describen los diferentes sistemas de coordenadas, así como las transformaciones que son necesarias para brindar la solución final de navegación. Se desarrolla el INS y se obtendrá un modelo aproximado del error de la solución inercial. Por último se lleva a cabo la obtención de manera aproximada también de la varianza del modelo del error del INS y con estos datos se realiza la integración sensorial entre el INS y el GPS.

**Capítulo III:** En este tercer capítulo y final se expone la implementación para la integración de una IMU y un GPS mediante la utilización del Filtro Kalman, presentando los resultados obtenidos (programación en MATLAB). Adicionalmente se muestran las pruebas de validación realizadas al algoritmo desarrollado.

# Capítulo 1

## REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

### Introducción

Los vehículos no tripulados basan su funcionamiento en la navegación, actividad que permite determinar la posición, velocidad y la orientación de un vehículo en función del tiempo, con respecto a uno o varios sistemas de referencia seleccionados. Para ello estos incorporan varios dispositivos o sensores, mediante los cuales pueden conocer su posición en todo momento. Los dispositivos utilizados corresponden a sensores inerciales (INS, IMU, etc.) y a sistemas de posicionamiento como el GPS.

#### 1.1. Navegación Inercial.

La navegación inercial se basa en el posicionamiento relativo a partir de la integración de las aceleraciones registradas por los acelerómetros, utilizando las velocidades angulares de los giróscopos para determinar la dirección del recorrido. Al conjunto de sensores inerciales se le conoce como IMU que, junto con las ecuaciones de mecanización, conforman un sistema de navegación inercial (INS).

#### 1.2. Sistema de Navegación Inercial (INS)

Un Sistema de Navegación Inercial (INS) consiste en una unidad de medida inercial que incluye los sensores ligados a una plataforma común para mantener las mismas orientaciones relativas y un ordenador para procesar estas medidas o cualquier otro cálculo. Dentro de los sistemas de navegación existentes con fines comerciales, ha ido en incremento la demanda de los que tienen pequeño tamaño y que implican un bajo costo; para su uso en muchas aplicaciones que abarcan desde la navegación asistida para personas, carros, vehículos acuáticos, vehículos aéreos no tripulados. Los avances en las tecnología de fabricación de

los sensores inerciales y el gran auge de los micro-sistemas electro-mecánicos (MEMS), han propiciado el surgimiento de nuevas aplicaciones, desarrollo que en la actualidad exhibe un futuro prometedor. En comparación con los sistemas de alta calidad (higher grade), un sistema de navegación inercial de baja calidad (lower grade), experimenta grandes errores de posicionamiento aún para pequeños intervalos de tiempo.

### 1.3. Clasificación de los INS.

Hay diferentes tipos de INS y se clasifican en **gimbaled** y **strapdown**.

El sistema **gimbaled** pretende aislar la plataforma con los sensores inerciales de los movimientos de rotación externos. Las plataformas **gimbaled** están sujetas a un marco rígido que rota de tal manera que aísla el interior de la plataforma de rotaciones externas con los ejes del cuerpo. Generalmente es imposible alcanzar un nivel de aislamiento perfecto y siempre rota algo.

El sistema **strapdown** donde los ejes de los sensores están alineados con los ejes del móvil. Necesita mayor capacidad de cálculo ya que es necesario *aislar virtualmente* las medidas de los sensores al sistema de referencia inercial. Este sistema es el que se va a utilizar en este proyecto.

### 1.4. Sensores inerciales

Los acelerómetros y giróscopos son sensores inerciales que miden aceleración y velocidad angular y se utilizan en aplicaciones de captura y análisis de movimiento. Estos sensores inerciales trabajan con posiciones locales relativas al vehículo sobre el cual se encuentran instalados, por lo que no se puede obtener la posición global sin realizar una conversión o integración matemática.

#### 1.4.1. Acelerómetros

Los acelerómetros tienen la capacidad de medir la aceleración lineal que sufre el vehículo en cada uno de los ejes de coordenadas XYZ (ejes locales relativos al vehículo), de forma periódica. Por ejemplo, si un vehículo empieza a moverse hacia delante y en línea recta, el

acelerómetro registrará un aumento de la aceleración en el eje correspondiente, hasta que la velocidad se estabilice.

### **Tipos de acelerómetros**

- De péndulo oscilante
- De estrangulación
- De balance de fuerzas
- De efecto vibratorio
- De fibra óptica

#### **1.4.2. Giróscopos**

Los giróscopos por otra parte, miden la velocidad angular del elemento sobre el cual se encuentran instalados. En el caso de este proyecto, el uso de un giróscopo permite medir la velocidad con la que un vehículo realiza los movimientos giratorios sobre cualquiera de los tres ejes XYZ, en grados por segundo. Existen diferentes clases de giróscopos que operan siguiendo diferentes principios por ejemplo.

- De efecto Coriolis
- De efecto vibratorio
- De fibra óptica
- De Laser
- Electrostáticos
- Magnéticos

#### **1.4.3. Errores comunes de los sensores inerciales**

Todos los sensores inerciales presentan errores, los cuales son más acentuados en las IMU de bajo costo, lo que provoca una representación errónea de la posición estimada. La mayor desventaja de un INS es que los errores tienden a crecer rápidamente en el tiempo. Estos errores son provocados por diferentes razones; desconocimiento de las condiciones iniciales, errores de procesamiento y otros generados por los giróscopos y acelerómetros ([Abdel-Hamid, 2005](#); [Mohinder, 2007b](#)). Los errores más comunes son:

- **Sesgos (bias):** El sesgo es la medida sobre un tiempo determinado de la salida del sensor en condiciones específicas de funcionamiento que no tienen correlación con la entrada, esta medida se toma en el proceso de calibración del sensor y luego es corregido en el procesamiento del INS. Es definido también como un error sistemático del cero del instrumento por causa del funcionamiento interno y resultante de la sensibilidad a campos externos. Cuando el sesgo es constante se denomina offset, esta es una medida proporcionada por el sensor y se determina por la calibración o la hoja de datos del fabricante (data sheet).
- **Factor de escala:** Denominado también sensibilidad, es la razón de cambio en la salida con respecto al cambio en la entrada del sensor objeto de medición. Se trata de una constante multiplicativa que escala el valor real de la medición del sensor respecto a la medición esperada teóricamente. El factor de escala se ve afectado por factores relacionados con el material y su construcción.
- **Deriva (drift):** Se presenta debido a la acumulación de errores sistemáticos (bias) que van siendo integrados en el tiempo, es decir el error se va incrementando mientras transcurre el tiempo.
- **Desalineación:** La desalineación de los ejes es el error resultante de imperfección del montaje de los sensores; presentando una no ortogonalidad en el rango de operación del sensor, siendo afectada la medida de cada eje, por la medida de los otros dos ejes del sensor, existe un error de desalineación especificado por el fabricante que es del 5 por ciento.
- **Ruido térmico:** Este ruido es generado por energía térmica debido a la agitación del movimiento aleatorio de transporte de carga dentro de los acelerómetros.

#### 1.4.4. Ventajas y desventajas de los INS

La IMU nos permite tener una medición constante de los parámetros de navegación (posición, velocidad y actitud), un cambio en la posición geográfica (desplazamiento al norte,

sur, este, oeste), un cambio en su velocidad (módulo de dirección), un cambio en su orientación (rotación alrededor de un eje), proporcionando las siguientes ventajas ([Mohinder, 2007b](#)):

- Se logra una verdadera autonomía ya que no se necesita de sensores externos adicionales.
- No se ve comprometido por malas condiciones de visibilidad dándole la ventaja de operar en túneles y medios subacuáticos.
- Es intrínsecamente sigiloso ya que no emite ni recibe ningún tipo de señal por lo que no requiere de aditamentos externos.
- Ejecutan la integración en el tiempo de la fuerza específica, obteniendo velocidad y posición.
- Poseen una precisión bastante elevada, del orden de centímetros, por lo que su uso en tareas de navegación es altamente recomendable.

Sin embargo las distintas fuentes de errores presentes en los sensores inerciales afectan de una manera directa al INS provocando la presencia de un factor de error en el sistema. Este modelo de error está dividido en dos términos:

- **Estacionarios:** Este componente está definido principalmente por los drifts presentes en los giróscopos y acelerómetros.
- **No Estacionarios:** El componente no estacionario depende de la dinámica del vehículo y está caracterizado en su mayoría por el factor de escala de los acelerómetros y problemas de alineación y calibración. En adición a un componente variable de bias o drift (que es el que cambia cada vez que se enciende la IMU).
- En periodos largos de trayectoria, los errores son cada vez mayores.
- El coste de los dispositivos de este tipo en términos de altas prestaciones pueden ser muy elevados en comparación con sistemas de posicionamiento global o GPS.

### 1.5. Sensores de posicionamiento

Los sistemas de posicionamiento global (GPS) son utilizados para medir la posición del elemento en el que se encuentra instalado. La posición que mide este tipo de dispositivos,

es una posición relativa a todo el globo terrestre, y por tanto se utilizan los valores de longitud y latitud para indicar la posición exacta. El principio de funcionamiento del GPS se basa en medir el tiempo empleado por la señal transmitida por los satélites en llegar al receptor del usuario, y este intervalo de tiempo es multiplicado por la velocidad de la luz para obtener la distancia satélite receptor (Leick, 2004; Rizos, 2002). Para esto es necesario tener una visión directa con tres o más satélites del sistema GPS.

### 1.5.1. Errores comunes de los sensores GPS

Precisión es el grado de conformidad que existe entre una posición, tiempo y/o velocidad determinada por un receptor GPS y su verdadera posición, tiempo y/o velocidad cuando se compara con una constante estándar.

En el sistema GPS, las causas de los errores se agrupan en varias categorías:

1. **Errores orbitales o de efemérides:** Son causados por calcular una posición del satélite diferente a la real. Para determinar la posición del usuario se parte de la posición de los satélites. Estas se determinan mediante los parámetros orbitales de los satélites, los cuales son calculados cada hora. Sin embargo, las fuerzas perturbadoras que actúan sobre el satélite hacen que la posición calculada sea ligeramente diferente de la real; este error está en el orden de 5m.  $\text{Error en la línea base/longitud de la línea base} = \text{error en la posición del satélite/distancia del satélite}$ .
2. **Retrasos por ionosfera y troposfera:** El paso de la señal a través de estas capas de la atmósfera hace que la misma se desvíe de la línea recta que debe existir entre el satélite y el receptor, alargando en consecuencia el tiempo de viaje de la señal. Los receptores poseen modelos predeterminados que compensan en promedio este error, pero sin eliminarlo completamente. La ionosfera causa un avance de la fase en la onda portadora. Por ello se diseñó el sistema GPS con dos ondas portadoras, ya que con dos observaciones de frecuencia diferente se puede eliminar este error. La troposfera causa retraso tanto en la onda portadora como en el código; para corregir este error, se modela la troposfera para obtener la corrección necesaria.

3. **Trayectoria múltiple:** Ocurre cuando la señal GPS es reflejada por objetos tales como edificios antes de alcanzar el receptor. Esto hace que el tiempo de viaje de la señal se incremente, causando por lo tanto errores en la posición. La superficie natural que más refleja la señal es el agua. La que menos la refleja es la arena o suelo arenoso.

4. **Error del reloj del receptor:** Ya que el reloj del receptor no puede tener la misma precisión que el de los satélites por razones de costo y de portabilidad, presenta pequeñas diferencias de tiempo con respecto al del sistema GPS.

Otros factores que desmejoran la exactitud de la posición y que no pueden considerarse como errores propios del sistema son:

5. **Error del operador:** Ocurre cuando se introduce en el GPS un dato de iniciación incorrecto. Como este es un error grosero, es fácil de evitar prestando atención a los datos iniciales que se ingresan al receptor.

6. **Ruido del receptor:** Es el error causado por el proceso de medición usado por el receptor. Depende del diseño de la antena, del método usado por la conversión analógica-digital, por el proceso de correlación y por los ciclos de seguimiento de la señal de los satélites.

7. **Degradación controlada de la precisión:** Para efectos de evitar que el GPS pueda ser usado por personas ajenas a las fuerzas armadas de Estados Unidos, cuando este país lo considere necesario, existen dos formas de degradar la precisión del sistema:

- **Disponibilidad selectiva (S/A en sus siglas en inglés, Selective Availability).**

Existen dos formas de llevar a cabo este tipo de degradación de la precisión:

1.- Mediante variación de la frecuencia generadora del código C/A, lo cual modifica la distancia existente entre el satélite y el receptor.

2.- Mediante la modificación de las efemérides, lo cual modifica la posición de los satélites y por lo tanto la distancia entre ellos y el receptor.

Si bien la degradación de la señal, conocida con el nombre disponibilidad selectiva fue eliminada el 2 de mayo de 2000, puede activarse de nuevo, de acuerdo a las necesidades del gobierno de Estados Unidos.

- **Anti-Spoofing (A/S)**. En este caso se encripta el código P, el cual pasa a ser el código Y, que solamente puede ser procesado correctamente por los receptores GPS autorizados por el DoD.

### 1.5.2. Métodos y técnicas de medición

Para minimizar los errores de los sensores GPS, se han desarrollado distintos métodos de medición; Posicionamiento Autónomo y Posicionamiento Diferencial, siendo este último el más utilizado ([Conejeros, 2004](#)).

**Posicionamiento autónomo:** Es el método básico de medición y consiste en utilizar solo un receptor, el cual cuando capte una cantidad suficiente de satélites entregará en pantalla la posición en que se encuentra el receptor. Cualquier equipo GPS tiene la capacidad de ser utilizado en este método, pero tiene la desventaja de que está sujeto a las distintas fuentes de error con lo cual sus precisiones actualmente bordean los 10 metros.

**Posicionamiento diferencial:** El método fue desarrollado para suplir las necesidades de las aplicaciones que requieren de una alta precisión donde se obtienen precisiones de alrededor de 3 m. Consiste en utilizar al menos dos equipos en forma simultánea, uno es la base ubicado en un punto con coordenadas conocidas, registrando constantemente las señales de los satélites para determinar el error entre la verdadera pseudodistancia al satélite y el valor observado en el momento de la medición, enviando constantemente las correcciones diferenciales mediante radios, que utilizadas en configuraciones de: potencia, frecuencia y velocidad de transmisión ideales, permiten alcanzar distancias de hasta 500 km. Los demás son los equipos móviles, los cuales capturan la información de los puntos y la corrigen de acuerdo a las indicaciones de la base. Es aplicado en navegación y aplicaciones cartográficas ([Mohinder, 2007a](#); [Navstar., 1996](#)).

### 1.5.3. Ventajas y desventajas de los GPS

#### Ventajas:

- Adiciona mayor funcionalidad con el mismo equipamiento existente.
- No representa un aumento considerable de costo.
- No contiene partes móviles.
- Provee de una medición absoluta.
- El error puede ser delimitado.

#### Desventajas:

- No tiene una alta precisión.
- Baja frecuencia de muestreo (5-10 Hz).
- Requiere de visión directa con los satélites.
- Sensible a interferencia.

### 1.6. Estrategias de integración

Dada la naturaleza complementaria del GPS y de la IMU, su integración representa la mejor opción para incrementar la integridad y calidad de cada sistema por separado: el empleo del GPS permite la calibración y corrección de los errores de medición de los sensores inerciales y el INS se emplea para mejorar la solución de navegación ante la ausencia de la señal del GPS, durante periodos de tiempo limitados. Existen 2 alternativas para la corrección de errores que pueden ser implementadas en la integración GPS/INS la técnica de lazo abierto (feedforward) o la técnica de lazo cerrado (feedback) las cuales se muestran en la Figura 1-1.

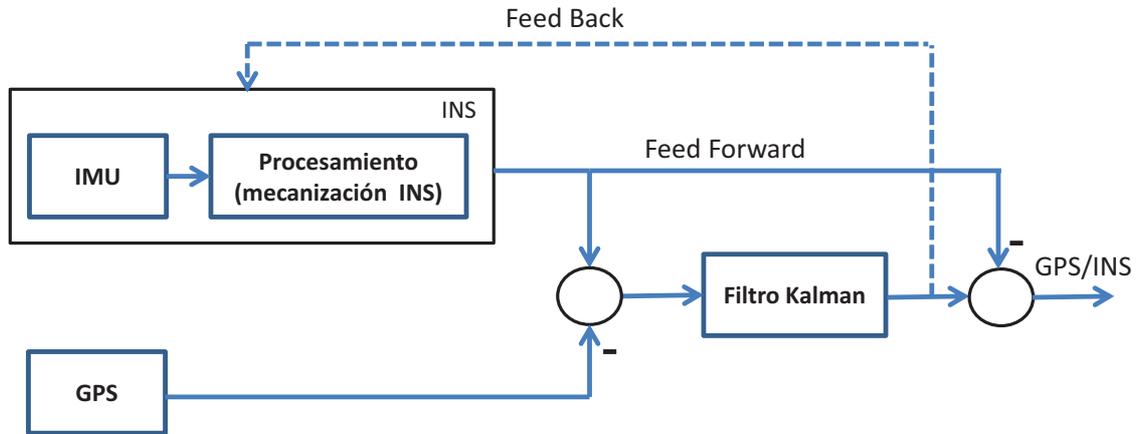


Figura 1-1: lazo (feedforward feedback)

Además, existen otras metodologías básicas para la integración de los datos del GPS y del INS en un sistema de navegación. Estas son: Desacoplada, Débilmente acoplada y Fuertemente acoplada. El grado de complejidad de la integración está reflejada en los requerimientos del sistema y el monto a invertir con el objetivo de suplir estos (Salytcheva, 2004). Las estrategias de integración sensorial de los sistemas de navegación se clasifican de acuerdo a la mecanización y a la arquitectura a través de la cual se fusiona la información de los sensores inerciales y se pueden ver en el siguiente Cuadro 1.1

Cuadro 1-1: Estrategias de integración del bloque INS con otros sistemas

<i>Mecanización</i>	<i>Procesamiento</i>
Desacoplado	Descentralizado
Débilmente acoplada	Descentralizado
Acoplada	Centralizado
Fuertemente acoplada	Centralizado

### 1.6.1. Integración desacoplada (Uncoupled mode)

En esta arquitectura los datos del INS y del GPS son procesados de forma independiente y no existe influencia de uno sobre el otro. La información del GPS se emplea para reiniciar constantemente las salidas del bloque INS evitando que su error aumente en caso de que las mismas se necesiten en ausencia temporal de las fuentes externas de medición. Este

método es de procesamiento descentralizado como se muestra en la (Fig 1-2)(Salytcheva, 2004; Zhang, 2003).

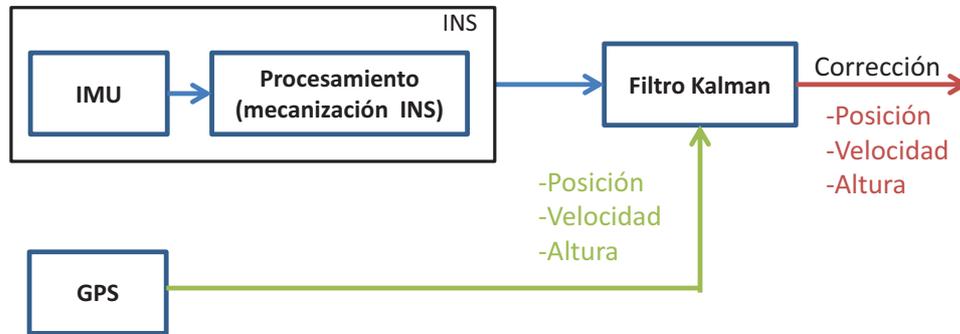


Figura 1-2: Integración Desacoplada (Uncoupled mode)

### 1.6.2. Integración débilmente acoplada (Loosely coupled mode)

El algoritmo de integración débilmente acoplada (loosely coupled) es uno de los más comúnmente utilizados en muchas aplicaciones, en esta variante se realizan constantemente estimaciones de los errores sistemáticos de la IMU mediante observaciones externas que se obtienen de los datos pre-procesados de las otras mediciones haciendo uso de un lazo de retroalimentación donde los efectos de los bias y drifts de los sensores inerciales disminuyen significativamente (Zhang, 2003). Esta arquitectura se muestra en la figura 1-3. La misma se implementa mediante algoritmos de estimación óptima como el filtro de Kalman (Rogers, 2003) para limitar los errores de la solución inercial. En caso de que las mediciones del GPS no están disponibles se puede estimar los errores mediante la información anterior acumulada y compensando de esta manera la salida del bloque INS. Esta estrategia presenta una implementación computacional simple además de una gran flexibilidad y universalidad para diferentes tipos de INS y fuentes externas de medición (Salytcheva, 2004). Este método es de procesamiento descentralizado.

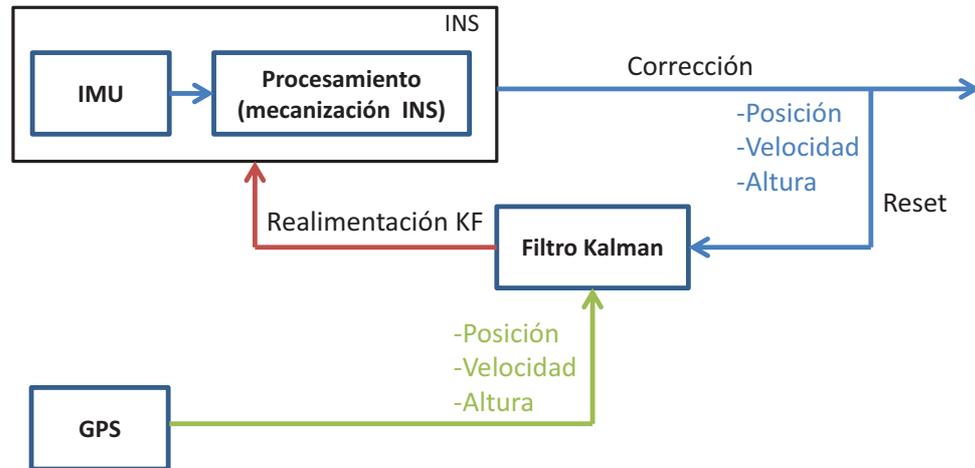


Figura 1-3: Integración Débilmente Acoplada (Loosely coupled mode).

### 1.6.3. Integración fuertemente acoplada (Tightly coupled mode)

El algoritmo de integración fuertemente acoplado (Tightly coupled mode) usa un solo filtro EKF centralizado para procesar la solución de navegación ([Kwakkel, 2008](#)) en esta arquitectura se combinan los datos de los diferentes sistemas INS y GPS para obtener una información de navegación final entre todas las fuentes presentes de la manera como se muestra en la figura 1-4. Esta configuración generalmente ofrece mejores resultados, mejorando la precisión con respecto a las anteriores. Tiene la ventaja de brindar mejores estimados al limitar los errores en las fuentes involucradas en el sistema INS. Por otra parte requiere un mayor nivel de cálculo y acceso constante a los datos de los sensores, lo cual puede resultar complicado cuando se mezclan fuentes de distintas características de muestreo. Esta arquitectura no es inmune a los errores, por el contrario los errores crecientes de los sensores inerciales afectan la solución final, al igual que los errores en las mediciones absolutas ([Li, 2006](#)). La última estrategia de integración solo es adoptada en la actualidad por los fabricantes de hardware o compañías que tienen considerables recursos destinados a la investigación de los sistemas de navegación. La misma requiere de la realización de actualizaciones en el firmware de los dispositivos. Debido a estas características, no constituye en estos momentos una posibilidad de implementación para nuestras aplicaciones.

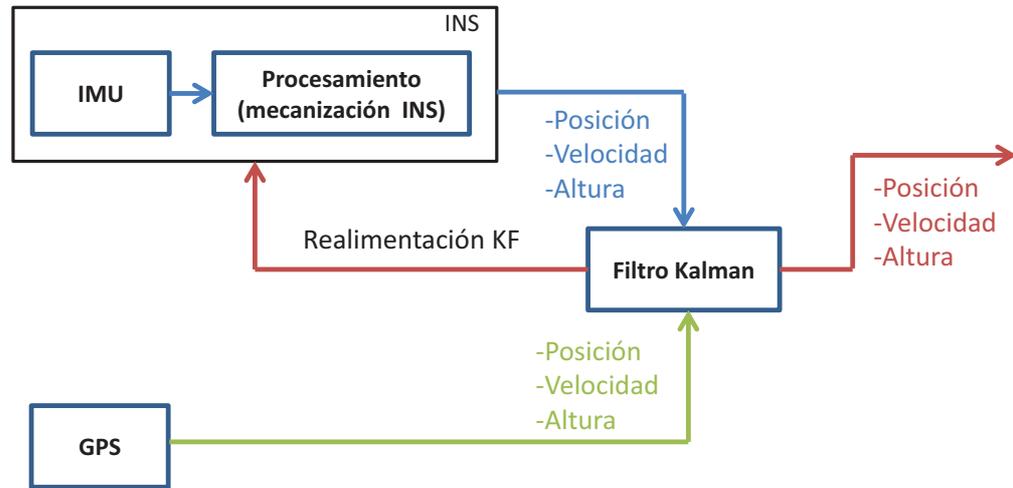


Figura 1–4: Integración Fuertemente Acoplada (Tightly coupled mode)

Los sistemas de navegación constituyen una aplicación típica de un sistema dinámico no lineal y en el núcleo de estos sistemas el principal problema que se presenta es la estimación de los estados del mismo dinámicamente. Los métodos que han sido utilizados para la estimación de los estados en un sistema de navegación integrado son:

1. El Filtro de Kalman linealizado (LKF) o el Filtro de Kalman Extendido (EKF)
2. Los filtros basados en muestreo, como el Filtro de Kalman unscented (UKF) y los Filtros de Partículas (PF)
3. Los métodos basados en Inteligencia Artificial (AI). Como las Redes Neuronales Artificiales (ANN) o la técnica borrosa (ANFIS)

Los filtros basados en muestreo y los métodos de inteligencia artificial se han comenzado a desarrollar desde hace pocos años y muchos de los trabajos publicados carecen de resultados prácticos y pruebas experimentales debido a la complejidad de desarrollo. Sin duda alguna hasta hace pocos años la gran mayoría de las publicaciones se concentraban en los LKF, EKF y algunas en los filtros unscented. Por estas razones en esta investigación se muestra una revisión de la aplicación de los primeros mencionados para la integración GPS/INS.

### 1.7. Limitaciones de la integración de INS-GPS usando Filtro Kalman (KF)

Gran cantidad de instituciones han dedicado y centran sus esfuerzos en la investigación del tema. Sin embargo la integración de INS/GPS utilizando un filtro Kalman presenta una serie de limitaciones ([Bruton, 1999](#); [Fossen, 1994](#); [Chiang, 2003](#)):

- Presenta altos requerimientos computacionales.
- Es necesaria la linealización de los modelos y la utilización de las ecuaciones de Riccati ([SUGA, 1960](#)) para la sintonización de las ganancias.
- Puede conducir a la compensación del error inercial dentro de un limitado ancho de banda que depende de la dinámica del vehículo, la precisión de los sensores inerciales y la velocidad de actualización.
- Solo opera bajo ciertos modelos predefinidos y las salidas de los sensores se ajustan a estos modelos. De hecho es muy difícil establecer un modelo estocástico preciso para cada sensor inercial (giróscopos y acelerómetros), en todos los casos esto funciona eficientemente y su influencia es reflejada en los términos de error a largo plazo de estos sensores ([Hide, 2002](#)). Sin embargo si las IMUs empleadas son de bajo costo o contienen tecnología MEMS la situación empeora dado que estos presentan drift altos y variables y son extremadamente complicados de modelar.
- Es necesaria la obtención de un gran número de parámetros mediante pruebas experimentales ya que se necesita información estadística precisa acerca de la varianza de los modelos (parámetros que en la mayoría de los casos son muy difíciles de determinar).

Esto puede impedir que este algoritmo de integración presente un funcionamiento correcto principalmente cuando la señal del GPS no está disponible. Por tanto el rendimiento de un sistema integrado INS/GPS de bajo costo se degrada considerablemente durante el tiempo en que la señal de GPS no está disponible, por lo que es necesaria la aplicación de otro algoritmo que sea capaz de proveer una estimación de posición y velocidad más fiable en situaciones donde la señal de GPS no está accesible ([Abdel-Hamid, 2005](#)).

### 1.8. Filtro Kalman (KF)

El filtro de Kalman consiste en un conjunto de ecuaciones matemáticas que proveen una solución recursiva óptima, por el método de mínimos cuadrados. La meta de esta solución consiste en calcular un estimador lineal, insesgado y óptimo del estado de un sistema en  $t$  con base en la información disponible en  $t-1$ , y actualizar, con la información adicional disponible en  $t$ , dichas estimaciones. (Mohinder, 2007b).

El Filtro Kalman se fundamenta en los siguientes supuestos (Mayhew, 2003):

- El sistema puede describirse con un modelo lineal. Cuando esto no es posible debe linealizarse el modelo del sistema. Esto es lo que se conoce como filtro extendido de Kalman.
- Los ruidos del sistema y de las mediciones son blancos y gaussianos. Decir que un ruido es blanco implica que su valor no tiene correlación en el tiempo y que su potencia es igual en todas las frecuencias. Un ruido blanco no existe realmente, pero para los cálculos matemáticos, simplifica el problema y se aproxima con mucha precisión a un ruido ideal.

### 1.9. Consideraciones del capítulo

La caracterización de los sensores se ha visto que es crucial para conseguir una mejor estimación de la posición. En la actualidad podemos encontrar un sin número de publicaciones científicas abordando el tema de integración del INS/GPS con la implementación del Filtro de Kalman, para sistemas de navegación tanto en vehículos de tierra, mar o aire como espaciales. Con el objetivo de mostrar y siendo el propósito de esta tesis se planteará el algoritmo la implementación de dicho filtro.

## Capítulo 2

# MODELO MATEMÁTICO DEL INS

En este capítulo se discute como se procesan los datos que recogen los sensores, es decir, lecturas del acelerómetro y del giróscopo, todas ellas en el sistema de coordenadas del cuerpo del vehículo. Se detallan las operaciones para calcular la solución de velocidad y actitud para luego convertir estos datos a coordenadas de navegación, que es el marco de referencia en el que se calcula la solución obteniendo a la salida (posición) a través de una integración. Una vez acabado el capítulo, se tratarán todos los resultados como un único bloque llamado INS.

### 2.1. Sistemas de coordenadas y transformaciones

Un sistema de coordenadas es un conjunto de vectores y números sin sentido. Para que estos valores adquieran significado, es necesario relacionarlos con una referencia conocida. Existen varios sistemas de coordenadas fundamentales, estos sistemas son ortogonales, dextrógiro y cartesianos. Únicamente difieren en el origen, la orientación relativa de sus ejes y el movimiento relativo entre sus planos. Dependiendo del movimiento que se quiera estudiar, es más interesante usar unos sistemas que otros.

#### 2.1.1. Sistema de coordenadas Inercial I-frame

Es el único sistema de referencia donde las leyes de Newton tienen validez, es decir, que este sistema idealmente no se mueve ni rota respecto a nada. En la práctica resulta imposible encontrar un sistema realmente inercial que no se mueva, ya que las mismas estrellas se mueven así que este sistema se utiliza como aproximación teórica y para visualizar otros marcos de referencia más fácilmente. En la práctica consiste en un conjunto de ejes

perpendiculares entre sí (como todos los sistemas de referencia) que no rotan ni aceleran respecto al espacio inercial.

### **2.1.2. Sistema de coordenadas ECI i-frame**

Este sistema de coordenadas tiene su origen en el centro de masas de la Tierra y se supone que no rota respecto al espacio inercial, ya que se mueve con el planeta. Sabemos que eso no es del todo cierto, porque la Tierra gira con respecto al Sol además de su propia rotación  $\Omega$ , pero se tomará este sistema como inercial. Los ejes del sistema ECI están fijados en las estrellas: El eje Z coincide con el eje polar y el plano perpendicular al eje Z coincide con el Ecuador. El eje X e Y no rotan con la tierra, apuntando X directamente al equinoccio Vernal. El sistema de coordenadas inercial es importante porque las leyes de Newton son casi ciertas y permite visualizar más fácilmente otros marcos de referencia no inerciales.

### **2.1.3. Sistema de coordenadas ECEF e-frame**

También se le conoce como sistema de coordenadas geocéntrico. Tiene su origen en el centro de masa de la Tierra y sus ejes rotan con ella. El eje Z se dirige directamente al norte a lo largo del eje polar. Los ejes X e Y están en el plano ecuatorial con X dirigido hacia el meridiano de Greenwich ( $0^\circ$  latitud,  $0^\circ$  longitud) y el eje Y  $90^\circ$  hacia el Este, ver figura 2-1.

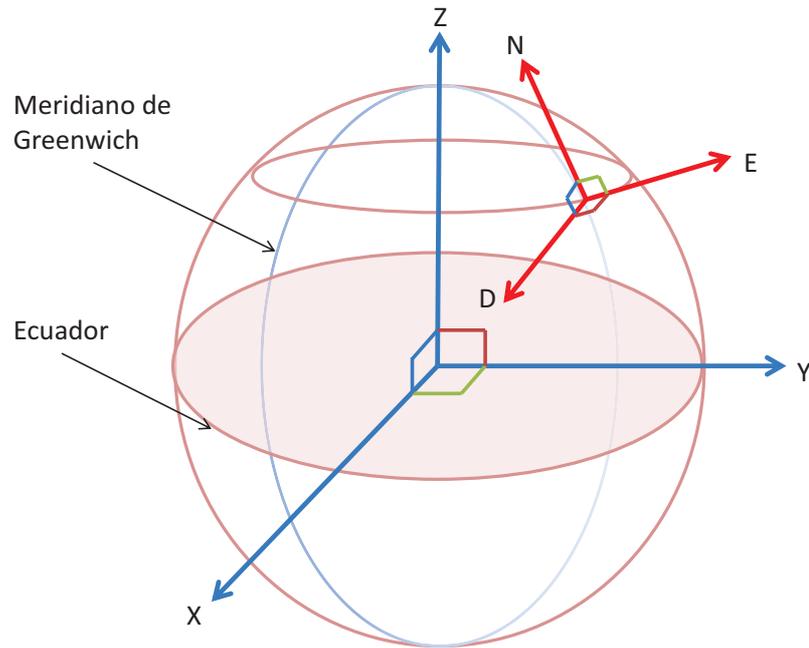


Figura 2-1: Esquema de coordenadas ECEF y NED

#### 2.1.4. Sistema de coordenadas de Navegación n-frame

Tiene su origen en la localización del sistema inercial (longitud latitud). Es un sistema local con sus ejes X e Y en el plano tangente al punto de la Tierra donde está el origen. Típicamente el eje X apuntará al norte, el eje Y al Este y el eje Z abajo, aunque debe ser especificado. También se le conoce como NED (North, East, Down) ya que sus ejes apuntan a estas direcciones Figura 2-1. Otra posible configuración, aunque no es la que se ha utilizado en el proyecto, sería con el eje X apuntando al este, el eje Y apuntando al norte y el eje Z apuntando hacia arriba, también conocido como ENU (East, North, Up). Es un sistema que presenta dificultades cuando se acerca a latitudes cercanas a los polos.

#### 2.1.5. Sistema de coordenadas Body b-frame

Este sistema tiene su origen en el centro de masas del vehículo. Típicamente usado en plataformas Strapdown, es decir, cuando los sensores tienen también como centro de masas el vehículo y sus ejes se mueven con él.

**2.2. Métodos para la representación de la actitud**

Como se mencionó anteriormente, uno de los objetivos principales de la navegación es conocer en todo instante la orientación del vehículo respecto a una terna dada de referencia. Para describir y caracterizar matemáticamente la orientación relativa entre ternas de referencia se utilizan diversos métodos denominados parametrizaciones, cuyos valores numéricos son actualizados permanentemente por los algoritmos de navegación. En este trabajo se utilizan sistemas de referencia ortogonales dextrógiros. En la Figura 2-2, se presentan dos sistemas de referencia, a y b, el primero es fijo y el segundo está sobre el cuerpo rígido en movimiento. Los ejes de la terna {b} apuntan normalmente según direcciones del cuerpo de interés para la aplicación. Por ejemplo, en un vehículo el eje x suele estar en el eje longitudinal, cercano a la dirección del desplazamiento y los otros dos en un plano ortogonal con uno de ellos paralelo a la vertical en condiciones nominales de movimiento. Se asume que la terna {b} se obtiene para este caso trasladando la terna {a} paralela a sí misma al punto p sobre el cuerpo rígido y aplicándole una rotación arbitraria en un intervalo de tiempo  $(t_0, t)$  tal que  $\{b(t_0)\} \equiv \{b\}$ .

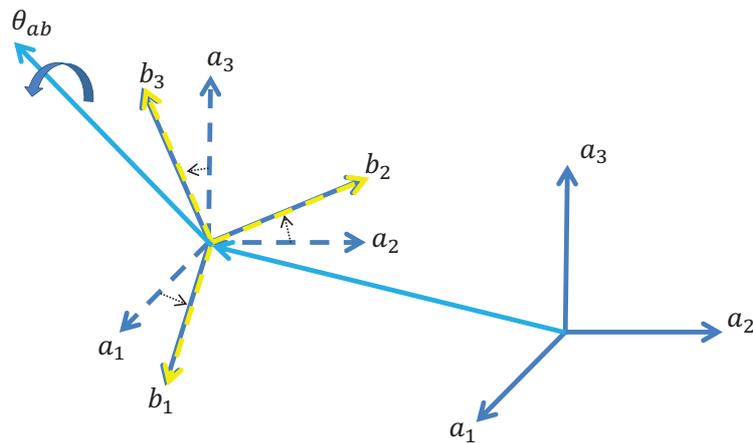


Figura 2-2: Sistemas de referencia rotados

Utilizando la descripción de la Figura anterior (2-2) se realiza la introducción de las parametrizaciones más utilizadas para determinar la orientación o actitud de un cuerpo, ellas son:

Matriz de Cosenos Directores.

Ángulo vectorial de rotación o Eje y Ángulo de Euler.

Ángulos de Euler.

Cuaterniones.

### 2.2.1. Matriz de Cosenos Directores (DCM).

La Matriz de Cosenos directores es un sistema de cambio de coordenadas. Simplemente rota un vector de un marco de referencia a otro, digamos del marco  $\{b\}$  al marco  $\{a\}$ .

$$\mathbf{C}_b^a = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Cada componente de esta matriz es uno de los cosenos de los ángulos entre los ejes de los dos sistemas de coordenadas. Acaba siendo una matriz de cambio de coordenadas.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^a = \mathbf{C}_b^a \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}^b \quad (2.2)$$

Cumple un par de propiedades, igual que todas las matrices de cambio de coordenadas:

$$\text{Det}(\mathbf{C}_b^a) = 1 \quad (2.3)$$

$$(\mathbf{C}_b^a)^{-1} = (\mathbf{C}_b^a)^T = (\mathbf{C}_a^b) \quad (2.4)$$

### 2.2.2. Ángulo vectorial de rotación o Eje y Ángulo de Euler.

Se puede demostrar que el resultado de cualquier rotación de un cuerpo, en  $R^3$ , alrededor de un punto fijo admite una única dirección que no varía bajo la rotación, y ésta se corresponde con el valor propio igual a uno de la Matriz de Cosenos Directores asociada.

Dada una velocidad angular vectorial  $\omega_{ab}^a(t)$  que se mantiene paralela a sí misma, se define  $\theta_{ba}(t)$  como el Ángulo Vectorial rotado por la terna {b} desde {a} en un lapso de tiempo  $(t_0, t)$  y calculada como:

$$\theta_{ba}(t) = \int_{t_0}^t \omega_{ab}^b(t) dt \quad (2.5)$$

La dirección del vector  $\theta_{ba}(t)$  corresponde al eje invariante de la rotación llamado Eje de Euler, y el módulo  $\theta_{ba}(t) = \|\theta_{ba}(t)\|$  se corresponde con el Ángulo de Euler, que es el ángulo rotado alrededor del Eje de Euler en el sentido de la regla de la mano derecha. Y por ser  $\theta_{ba}(t)$  un eje invariante tiene las mismas coordenadas tanto en {a} como en {b}.

### 2.2.3. Ángulos de Euler.

Otro método bastante popular para especificar la orientación angular de un sistema de coordenadas respecto a otro es el uso de los tres ángulos de Euler. Tres ángulos, que mediante una sucesión ordenada de giros, definen el cambio de un sistema de coordenadas a otro (figura 2-3). Los ángulos de Euler ( $\phi, \theta, \psi$ ) corresponden con los ángulos convencionales de  $roll(\phi), pitch(\theta), yaw(\psi)$  que se utilizan en navegación para especificar la actitud de un móvil. El ángulo de  $roll(\phi)$  es el giro de las alas del avión, el ángulo de  $pitch(\theta)$  la inclinación del morro y el ángulo de  $yaw(\psi)$  es el giro del morro del avión respecto al norte.

Donde:

$\phi$ : es el ángulo rotado en sentido positivo sobre el eje x .

$\theta$ : es el ángulo rotado en sentido positivo sobre el eje y .

$\psi$ : es el ángulo rotado en sentido positivo sobre el eje z .

$$C_a^b(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

$$C_a^b(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

$$C_a^b(\psi) = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

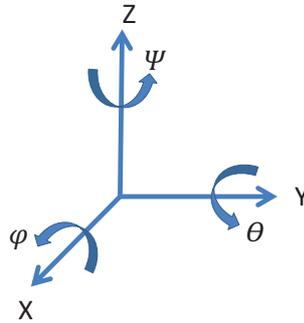


Figura 2-3: Sentidos de rotaciones elementales

Y para una secuencia de rotaciones elementales:  $\{\phi@x''\}\{\theta@y'\}\{\psi@z\}$  donde se aplica una rotación de un ángulo  $\psi$  alrededor del eje z, seguida de una rotación de un ángulo  $\theta$  alrededor del eje  $y'$ , seguida de una rotación de un ángulo  $\phi$  alrededor del eje  $x''$ . Componiendo estas rotaciones en forma matricial, con ayuda de las Matrices Cosenos Directores se obtiene:

$$C_a^b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

$$C_a^b = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\psi) & \cos(\theta) \sin(\psi) & -\sin(\theta) \\ -\cos(\phi) \sin(\psi) + \sin(\phi) \sin(\theta) \cos(\psi) & \cos(\phi) \cos(\psi) + \sin(\phi) \sin(\theta) \sin(\psi) & \sin(\phi) \cos(\theta) \\ \sin(\phi) \sin(\psi) + \cos(\phi) \sin(\theta) \cos(\psi) & -\sin(\phi) \cos(\psi) + \cos(\phi) \sin(\theta) \sin(\psi) & \cos(\phi) \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Y a partir de la Matriz de Cosenos Directores se pueden obtener los Ángulos de Euler calculando:

$$\phi = \arctan \left( \frac{C_a^b(2, 3)}{C_a^b(3, 3)} \right) \quad (2.11)$$

$$\phi = \arctan \left( \frac{C_a^b(1, 2)}{C_a^b(1, 1)} \right) \quad (2.12)$$

$$\theta = \arctan (-C_a^b(1, 3)) \quad (2.13)$$

**2.2.4. Cuaterniones o Parámetros Simétricos de Euler.**

Los cuaterniones describen un eje invariante y la rotación de este. Este cuaternión usa el vector de orientación unitario  $\lambda$  para describir el eje de rotación y el ángulo de rotación alrededor del  $\delta$ . Los ángulos que dirigen la orientación son:  $\alpha, \beta, \gamma$  (figura 2-4).

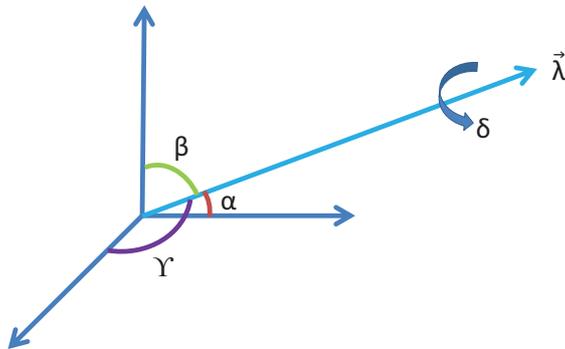


Figura 2-4: cuaterno vector de orientación unitaria y ángulo de rotación

Las unidades describen la orientación del vector unitario, con respecto a los ejes de coordenadas, y al sistema de coordenadas de rotación del que se reúnen cuatro parámetros  $q_0, q_1, q_2$  y  $q_3$ , formando un vector  $E$ . Los parámetros son:

$$q_0 = \cos \left( \frac{\delta}{2} \right) \quad (2.14)$$

$$q_1 = \cos \alpha \sin \left( \frac{\delta}{2} \right) \quad (2.15)$$

$$q_2 = \cos \beta \sin \left( \frac{\delta}{2} \right) \quad (2.16)$$

$$q_3 = \cos \gamma \sin \left( \frac{\delta}{2} \right) \quad (2.17)$$

La Matriz de Cosenos Directores puede ser expresada en términos de cuatro parámetros acorde a la expresión  $\mathbf{v}_n = DCM * \mathbf{v}_b$ .

$$R_{Quaternion} = DCM_{Quaternion} = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

La transformación de un sistema de coordenadas en otro se realiza de la misma manera como en el acercamiento de Euler.

$$\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix} * \mathbf{v}_b \quad (2.19)$$

Los ángulos de los cuaterniones pueden ser usados como modelos de descripción de actitud en la parte de la realización de esta tesis. Los modelos de ángulos de los cuaterniones no tienen el problema de singularidad y es buena la opción para los cálculos discretos en la

computadora porque permite generar la Matriz de Cosenos Directores (DCM) sin usar las funciones trigonométricas. Las desventajas de los cuaterniones son la dificultad para visualizar los ángulos físicamente y la necesidad para la normalización después de cada cálculo de la computadora.

La normalización de los parámetros del cuaternión afianza que el modelo no contiene más información que la verdadera descripción. Los cuatro parámetros que no son independientes deben satisfacer la condición siguiente:

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \quad (2.20)$$

La normalización se realiza mediante la ecuación siguiente:

$$E_{normalizada} = \frac{E_{new}}{\|E_{new}\|} = \frac{E_{new}}{\sqrt{q_{0new}^2 + q_{1new}^2 + q_{2new}^2 + q_{3new}^2}} \quad (2.21)$$

Los Cuaterniones y los ángulos de Euler tienen conexiones que hacen posible convertir los ángulos de Euler en magnitudes de Cuaterniones.

$$q_0 = \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \quad (2.22)$$

$$q_1 = \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \quad (2.23)$$

$$q_2 = \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \quad (2.24)$$

$$q_3 = \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} - \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \quad (2.25)$$

La conversión opuesta ocurre cuando la información del ángulo momentánea se despliega. Esto hace posible conseguir una vista clara de la información del ángulo resultante. Los valores se importan del Cuaternión a la DCM.

$$\phi = \arctan \left( \frac{2(q_0q_1 + q_2q_3)}{q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2} \right) \quad (2.26)$$

$$\theta = \arcsin (2(q_0q_2 - q_3q_1)) \quad (2.27)$$

$$\psi = \arctan \left( \frac{2(q_0q_3 + q_1q_2)}{q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2} \right) \quad (2.28)$$

#### **Algunas observaciones sobre los Cuaterniones:**

Ofrecen una parametrización muy eficaz de la orientación debido a que sólo tienen un parámetro redundante. Importantes ventajas computacionales. Sencilla ley de composición. No presentar singularidades o ambigüedades para ningún valor de sus parámetros que deba resolverse con información suplementaria. Como desventaja se puede observar cierta dificultad para interpretar geoméricamente el sentido de sus parámetros.

### **2.3. Modelo para la realización del INS**

El alcance de esta tesis es diseñar una vuelta de navegación para un sistema de la navegación inercial. Para lograrlo presentaremos el esquema que describe el laso de navegación.

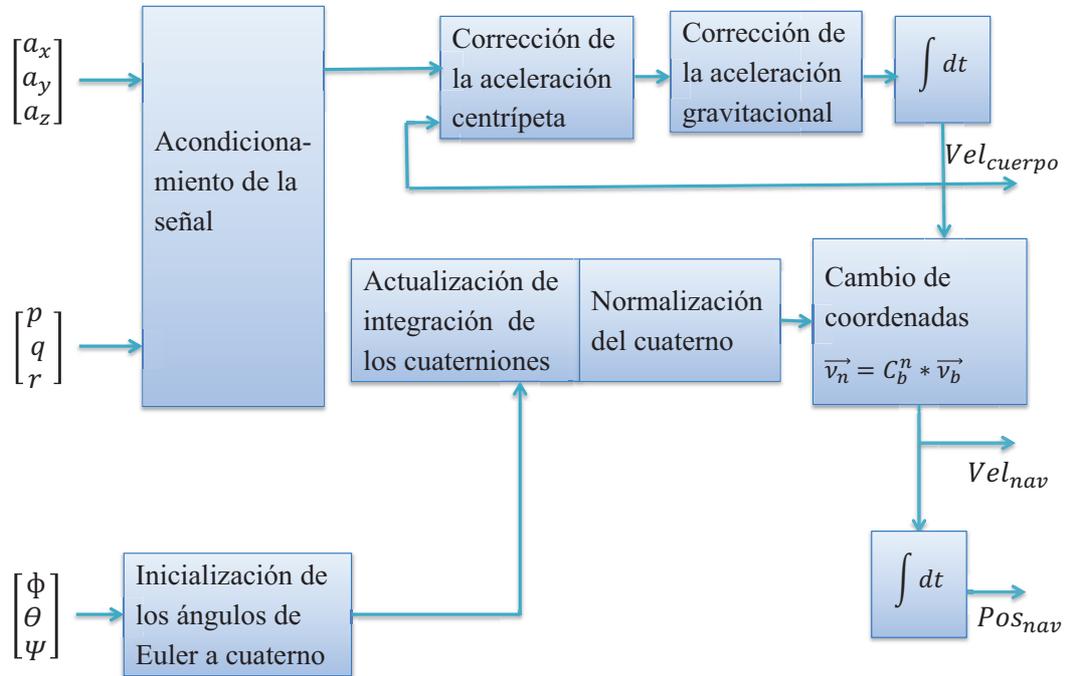


Figura 2-5: Esquema que describe el lazo de navegación

El movimiento de información adquirida por los sensores del sistema es alimentado dentro del lazo del sistema de navegación. Esta información es calibrada para diferentes factores influyentes usándose las ecuaciones correspondientes, que se pueden observar en la figura 2-6.



El modelo para alojar la rotación de los ejes momentáneos en el sistema y reformarlo en parámetro de cuaternión que en cierto paso del tiempo describe el estado actual del sistema, es la integración siguiente:

$$\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}_{n+1} = \frac{1}{2} * T_s * \begin{pmatrix} 1 & -p & -q & -r \\ p & 1 & r & -q \\ q & -r & 1 & p \\ r & q & p & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}_n \quad (2.29)$$

El paso de integración es de cero orden hold que es un integrador bastante simple que actualiza el valor de la actitud.  $T_s$  es el tiempo de muestreo y tiene un valor de 0,01seg. Después de este paso los cuatro parámetros del cuaternión del estado siguiente ( $vectorq_{n+1}$ ) tienen que ser normalizados.

### 2.5. Compensación de la fuerza gravitacional y centrípeta.

Se llama fuerza centrípeta a la fuerza, o al componente de la fuerza que actúa sobre un objeto en movimiento sobre una trayectoria curvilínea, y que está dirigida hacia el centro de curvatura de la trayectoria. La fuerza centrípeta siempre actúa en forma perpendicular a la dirección del movimiento del cuerpo sobre el cual se aplica. En el caso de un objeto que se mueve en trayectoria circular con velocidad cambiante (figura 2-7), la fuerza neta sobre el cuerpo puede ser descompuesta en un componente perpendicular que cambia la dirección del movimiento y uno tangencial, paralelo a la velocidad, que modifica el módulo de la velocidad.

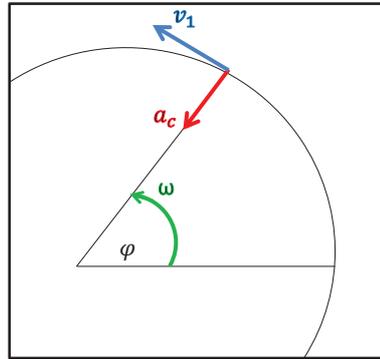


Figura 2–7: Fuerza centrípeta en un movimiento circular.

Los efectos de la gravedad son siempre atractivos, y la fuerza resultante se calcula respecto al centro de gravedad de ambos objetos (en el caso de la Tierra, el centro de gravedad es su centro de masas, al igual que en la mayoría de los cuerpos celestes de características homogéneas).

La gravedad tiene un alcance teórico infinito; pero, la fuerza es mayor si los objetos están próximos, y mientras se van alejando dicha fuerza pierde intensidad.

Para definir la aceleración vertical de un objeto la gravedad y las fuerzas centrípetas son substraídas del rendimiento de los sensores. La gravedad se encuentra en la salida del acelerómetro que está apuntando hacia abajo. Quitando el factor de gravedad se hace uso de un modelo matemático que depende de la latitud y longitud y que utiliza además la constante de gravedad  $g = 9,80665m/s_2$  (Cardona, 2006).

Para la realización de la compensación gravitacional usamos la siguiente ecuación implementada por:  $R_{euler} = R_{bx}^n * R_{by}^n * R_{bz}^n$ .

$$g_{constante} * \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta * \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

La fuerza Centrípeta es causada por la rotación de la Tierra y es un factor de influencia. La fuerza Centrípeta es más intensa en el ecuador.

El modelo de compensación utilizado requiere del conocimiento de la velocidad de retroalimentación. La fuerza centrípeta afecta las mediciones del movimiento vertical donde  $r$  es el radio al centro-eje del giro.

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{\omega * \gamma * \omega * \gamma}{\gamma} = \omega * v \quad (2.31)$$

$$\omega * v = \begin{pmatrix} \omega_{xbody} \\ \omega_{ybody} \\ \omega_{zbody} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} v_{xbody} \\ v_{xbody} \\ v_{xbody} \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

## 2.6. Transformación del sistema de coordenadas cuerpo al sistema de coordenadas navegación.

Como se había descrito en la Matriz de Cosenos Directores y en la sección de los cuaterniones las transformaciones son llevadas a cabo con la  $DCM_{cuaternio}$  y el vector de velocidad del cuerpo  $v_b$ , la multiplicación de estos factores da origen al vector velocidad de navegación  $v_n$ . La velocidad que experimenta el cuerpo; antes de ser multiplicada con la  $DCM_{cuaternio}$  se pone al día con el cuaternión. En el sistema discreto de la computadora hay una actualización de la matriz y transformación para cada momento de muestreo,  $T_s$ . Una vez calculada la velocidad del marco de navegación se realiza una integración y así obtenemos la posición en coordenadas de navegación.

## 2.7. Simulación del INS

Para obtener una simulación del INS se generaron señales simuladas de los sensores, en primer lugar no se tuvieron en cuenta los errores de medición que existen en la realidad en las mediciones de estos sensores. Las salidas tanto de los acelerómetros como la de los tres giróscopos utilizados por el INS se generaron de manera ideal en forma impulsiva para distintos intervalos de tiempo como se muestra en la figura 2-8

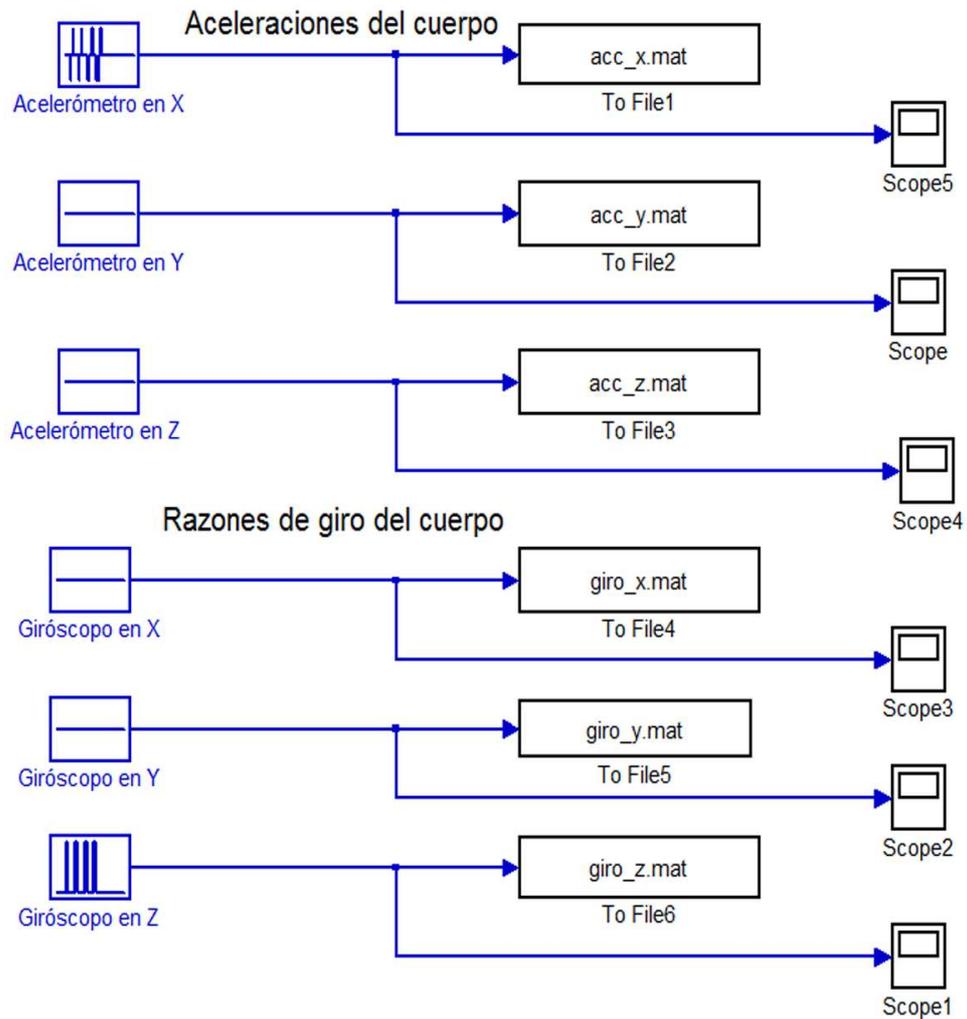
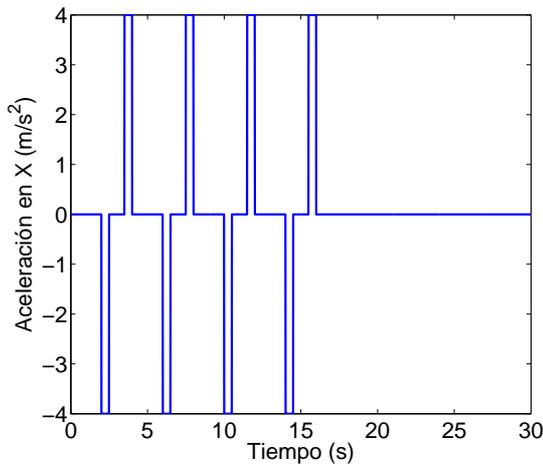
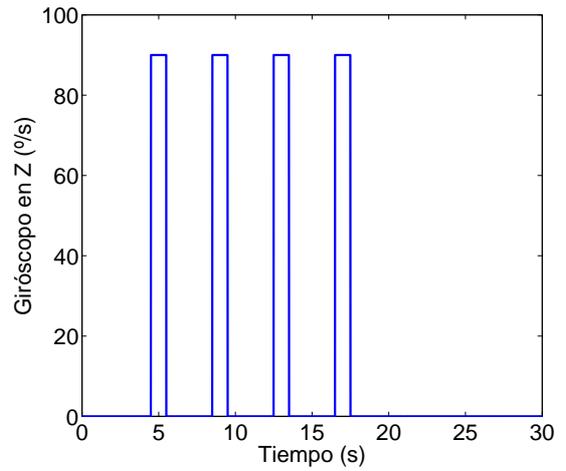


Figura 2–8: Salidas simuladas de los sensores.

De la figura anterior se puede observar que solo se han generado señales de medición para el acelerómetro en  $X$  y el giróscopo en  $Z$ , con la intención de generar una trayectoria cuadrada. Para ello la aceleración tiene valores entre  $\pm 4 \text{ m/s}^2$  en intervalos de  $0,5 \text{ seg}$ ; en el caso del giróscopo las variaciones están comprendidas entre  $0 - 90 \text{ grados/seg}$  con una duración de  $1 \text{ seg}$  cada pulso. Estos datos se muestran en la figura 2-9 en una simulación de  $30 \text{ seg}$ .



(a) Aceleración ideal en el eje X



(b) Giro ideal en el eje Z

Figura 2-9: Mediciones simuladas de los sensores

Las mediciones mostradas se guardan en ficheros .mat que se utilizan como entradas a la función INS desarrollada en Matlab. Una parte fundamental del algoritmo constituye la determinación de la orientación del vehículo, pues la misma se emplea en la matriz de transformación de coordenadas para convertir las variables del sistema cuerpo al sistema de navegación empleado (NED). En nuestro caso se convierten las mediciones de los giros en cuaterniones como base para el cálculo de actitud y para mostrarlos se utilizan los ángulos de Euler por ser más cómodos de trabajar. Para los giros simulados en las figuras 2-10, 2-11, 2-12 y 2-13 se muestran los siguientes ángulos obtenidos:

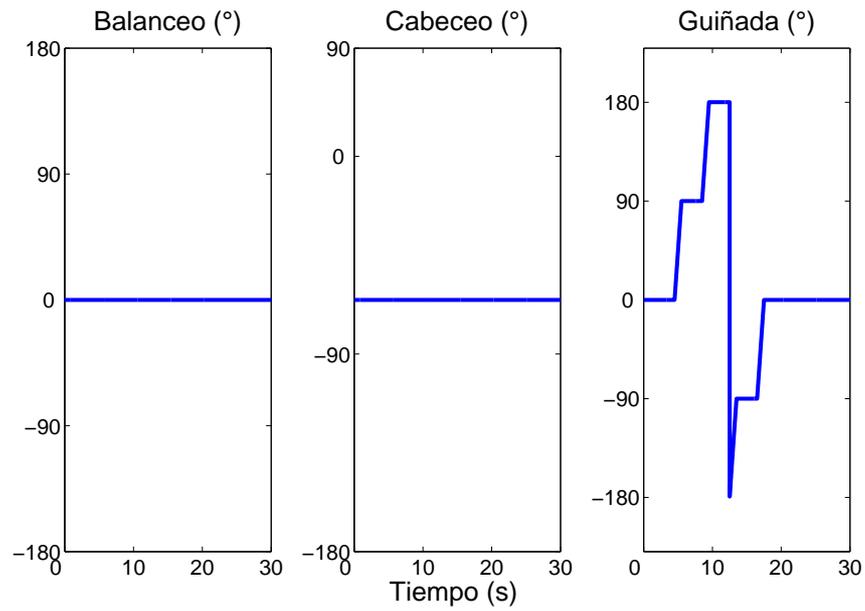


Figura 2-10: Ángulos de orientación obtenidos.

En la figura 2-10 (guiñada) se ven giros en ambos sentidos aun cuando la señal que se uso en el giroscopio solo generó pulsos en el sentido positivo. Esto se debe a que la trayectoria experimentó un cambio en el sentido a partir del tercer tramo de la misma.

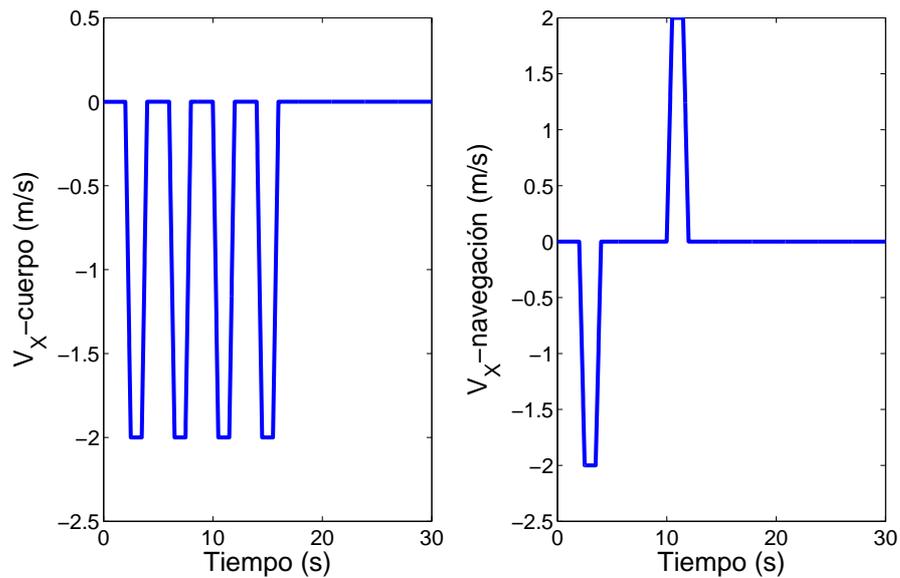


Figura 2-11: Velocidades ideales.

Como la trayectoria ideal modelada (figura 2-12) es cuadrada y experimenta giros de  $90^\circ$  en el sentido positivo y el sistema de coordenadas cuerpo es fijo al vehículo, las velocidades que se experimentan en el eje x tienen el mismo sentido (-) y valor modular en los cuatro tramos de la trayectoria, como se muestra en la parte izquierda de la figura 2-11. En la parte derecha de esta misma figura están registradas las velocidades en el eje x del sistema de coordenadas de navegación correspondiente al primer y tercer tramo de la trayectoria modelada. Estas velocidades tienen igual valor modular pero diferentes signos por tener sentidos contrarios. En los restantes tramos de la trayectoria no se registran velocidades en el eje x porque estos son perpendiculares a dicho eje.

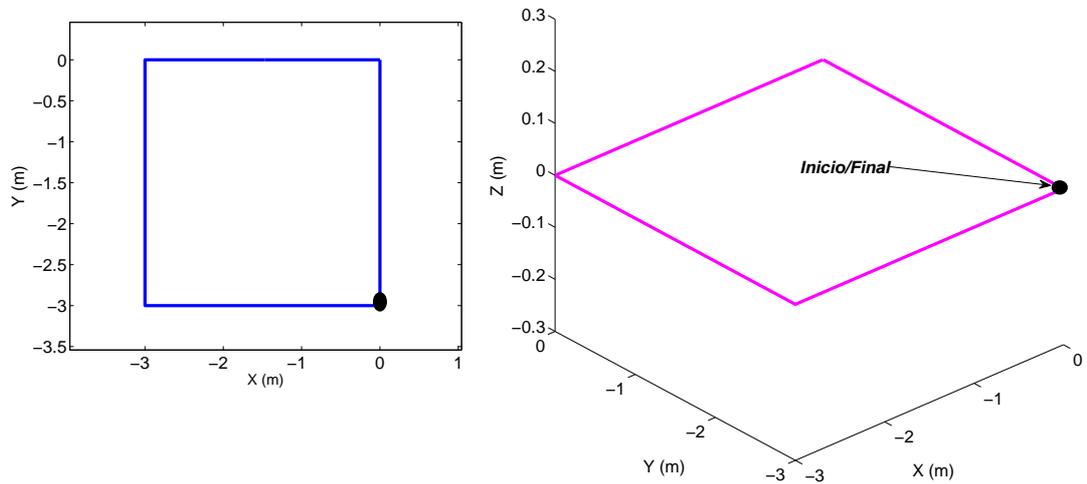


Figura 2-12: Posición ideal.

Como se puede ver en la figura 2-12 la posición no presenta ningún error debido a que no está expuesto a ninguna influencia externa ni están presentes los drift de los sensores. Ahora cuando se simula con datos reales a los que se expone en la realidad la trayectoria comienza a presentar variaciones como se muestra en la figura 2-13.

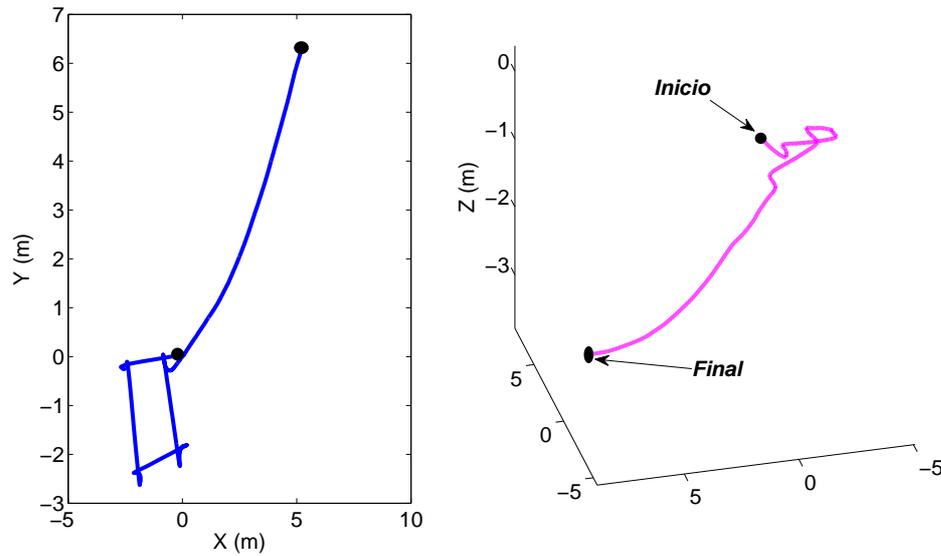


Figura 2-13: Posición con ruido.

La acción de la fuerza de gravedad condiciona la ocurrencia del error que se observa en el eje z de la figura 2-13.

## 2.8. Conclusiones del capítulo

Como se pudo observar la implementación del INS solamente no es recomendable para dar las salidas de posición y velocidad pues aparecen grandes errores debido a las integrales que se realizan dentro de este bloque para obtener dichas salidas. Además existen numerosos errores de medición que degradan en mayor medida esta solución de navegación, aún para muy pequeños intervalos de tiempo. Debido a estos errores es que se emplean en los sistemas de navegación un INS pero de manera obligada en combinación o asistido por otras fuentes de información que brinden mediciones confiables de posición y velocidad. En este sentido el elemento adicional más empleado es el GPS, el cual se utiliza para complementar el INS, al mismo tiempo que el INS mejorado puede ser utilizado durante los períodos de ausencia de la señal del GPS. En el siguiente capítulo se desarrolla la estrategia de integración entre ambos sistemas una vez que ha sido validado mediante simulaciones el INS en el presente capítulo.

## Capítulo 3

# MODELO MATEMÁTICO DEL FILTRO DE KALMAN

En este capítulo serán mostradas las ecuaciones de la dinámica de errores del sistema de navegación inercial basado en el análisis de perturbación. Para su construcción se usarán los estados obtenidos como resultado de la integración INS/GPS dada por el filtro Kalman.

### 3.1. Análisis de perturbación

En el análisis del error se utiliza el método de perturbación para linealizar las ecuaciones diferenciales de los sistema no lineales ([Britting, 1971](#)). Por ejemplo, la perturbación en la posición y la velocidad pueden expresarse como:

$$\hat{\mathbf{p}}^n = \mathbf{p}^n + \delta\mathbf{p}^n \quad (3.1)$$

$$\hat{\mathbf{v}}^n = \mathbf{v}^n + \delta\mathbf{v}^n \quad (3.2)$$

$\hat{p}$  y  $\hat{v}$  denotan los valores estimados de posición y velocidad respectivamente y  $\delta$  los errores.

### 3.2. Dinámica de error de posición

La linealización de la dinámica de error de posición puede ser obtenida perturbando la siguiente ecuación:

$$\dot{\mathbf{p}}^n = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\lambda} \\ \dot{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{M+h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(N+h)\cos\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} v_N \\ v_E \\ v_D \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Siendo M y N los radios terrestres en la latitud y longitud respectivamente;  $\dot{\varphi}$ ,  $\dot{\lambda}$  y  $\dot{h}$  son latitud, longitud y altura respectivamente;  $v_N$ ,  $v_E$  y  $v_D$  son las velocidades en cada uno de los ejes del sistema de coordenadas NED (North, East, Down respectivamente). El calculo de M y N se realiza mediante las siguientes ecuaciones:

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.4)$$

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.5)$$

Donde a y e son el semi eje mayor y menor del elipsoide de referencia respectivamente. Para facilitar los cálculos M y N serán considerados constantes.

Como las ecuaciones de dinámica de posición son funciones de posición y velocidad, las ecuaciones de dinámica de error de posición pueden ser obtenidas usando las derivadas parciales.

$$\delta\dot{\mathbf{p}}^n = \mathbf{F}_{pp}\delta\mathbf{p}^n + \mathbf{F}_{pv}\delta\mathbf{v}^n \quad (3.6)$$

Donde:

$$\mathbf{F}_{pp} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \varphi} & \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \lambda} & \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial h} \\ \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \varphi} & \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \lambda} & \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial h} \\ \frac{\partial \dot{h}}{\partial \varphi} & \frac{\partial \dot{h}}{\partial \lambda} & \frac{\partial \dot{h}}{\partial h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-v_N}{(M+h)^2} \\ \frac{v_E \sin \varphi}{(N+h) \cos^2 \varphi} & 0 & \frac{-v_E}{(N+h)^2 \cos \varphi} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{F}_{pv} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial v_N} & \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial v_E} & \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial v_D} \\ \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial v_N} & \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial v_E} & \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial v_D} \\ \frac{\partial \dot{h}}{\partial v_N} & \frac{\partial \dot{h}}{\partial v_E} & \frac{\partial \dot{h}}{\partial v_D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{M+h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(N+h) \cos \varphi} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

### 3.3. Dinámica de error de velocidad

Con esta ecuación:

$$\dot{\mathbf{v}}^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) * \mathbf{v}^n + \mathbf{g}^n \quad (3.9)$$

la dinámica de velocidad puede ser expresada como:

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}}^n = \hat{\mathbf{C}}_b^n \tilde{\mathbf{f}}^b - (2\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^n + \hat{\boldsymbol{\omega}}_{en}^n) * \hat{\mathbf{v}}^n + \boldsymbol{\gamma}^n \quad (3.10)$$

Perturbando la ecuación (3.10) obtenemos:

$$\dot{\mathbf{v}}^n + \delta \dot{\mathbf{v}}^n = (\mathbf{I} - E^n) \mathbf{C}_b^n (\mathbf{f}^b + \delta \mathbf{f}^b) - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n + 2\delta \boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta \boldsymbol{\omega}_{en}^n) * (\mathbf{v}^n + \delta \mathbf{v}^n) + \mathbf{g}^n + \delta \mathbf{g}^n \quad (3.11)$$

Agrupando los términos de primer orden de la ecuación (3.11) podemos reducirla a:

$$\delta \dot{\mathbf{v}}^n = -(2\delta\omega_{ie}^n + \delta\omega_{en}^n) * \mathbf{v}^n + \delta\mathbf{g}^n - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) * \delta\mathbf{v}^n + \mathbf{C}_b^n * \delta\mathbf{f}^b \quad (3.12)$$

$$= \mathbf{v}^n * (2\delta\omega_{ie}^n + \delta\omega_{en}^n) + \delta\mathbf{g}^n - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) * \delta\mathbf{v}^n + \mathbf{C}_b^n * \delta\mathbf{f}^b \quad (3.13)$$

donde el primer y segundo término del lado derecho pueden ser desarrollados dentro de las funciones de errores de posición y velocidad.

$$\omega_{in}^n = \omega_{ie}^n + \omega_{en}^n \quad (3.14)$$

$$\omega_{ie}^n = \mathbf{C}_e^n \omega_{ie}^e = \begin{pmatrix} \omega_e \cos \varphi & 0 & -\omega_e \sin \varphi \end{pmatrix}^T \quad (3.15)$$

$$\omega_{en}^n = \begin{pmatrix} \dot{\lambda} \cos \varphi & -\dot{\varphi} & -\dot{\lambda} \sin \varphi \end{pmatrix}^T \quad (3.16)$$

Sustituyendo  $\dot{\varphi} = \frac{v_N}{(M+h)}$  y  $\dot{\lambda} = \frac{v_E}{(N+h) \cos \varphi}$  la ecuación (3.16) quedaría expresada de la siguiente forma:

$$\omega_{en}^n = \begin{pmatrix} \frac{v_E}{(N+h)} \\ \frac{-v_N}{(M+h)} \\ \frac{-v_E \tan \varphi}{(N+h)} \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{in}^n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_e \cos \varphi + \frac{v_E}{N+h} \\ \frac{-v_N}{M+h} \\ -\boldsymbol{\omega}_e \sin \varphi - \frac{v_E \tan \varphi}{N+h} \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

$$2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n = \begin{pmatrix} 2\boldsymbol{\omega}_e \cos \varphi + \frac{v_E}{N+h} \\ \frac{-v_N}{M+h} \\ -2\boldsymbol{\omega}_e \sin \varphi - \frac{v_E \tan \varphi}{N+h} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Perturbando la ecuación (3.19) obtenemos:

$$2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n = \delta\boldsymbol{\Omega}_p \delta\boldsymbol{p}^n + \delta\boldsymbol{\Omega}_v \delta\boldsymbol{v}^n \quad (3.20)$$

Donde:

$$\delta\boldsymbol{\Omega}_p = \begin{pmatrix} -2\boldsymbol{\omega}_e \sin \varphi & 0 & -\frac{v_E}{(N+h)^2} \\ 0 & 0 & \frac{v_N}{(M+h)^2} \\ -2\boldsymbol{\omega}_e \cos \varphi - \frac{v_E}{(N+h) \cos^2 \varphi} & 0 & \frac{v_E \tan \varphi}{(N+h)^2} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

y

$$\delta\boldsymbol{\Omega}_v = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{N+h} & 0 \\ \frac{-1}{M+h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\tan \varphi}{N+h} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Usando la ecuación (3.20) y el primer término del lado derecho de la ecuación (3.13) podemos desarrollar las funciones de errores de posición y velocidad.

$$\mathbf{v}^n * (2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n) = \mathbf{v}^n * (\delta\boldsymbol{\Omega}_p\delta\mathbf{p}^n + \delta\boldsymbol{\Omega}_v\delta\mathbf{v}^n) \quad (3.23)$$

$$= \mathbf{v}^n * \delta\boldsymbol{\Omega}_p\delta\mathbf{p}^n + \mathbf{v}^n * \delta\boldsymbol{\Omega}_v\delta\mathbf{v}^n \quad (3.24)$$

Completando el álgebra, podemos conseguir:

$$\mathbf{v}^n * \delta\boldsymbol{\Omega}_p = \begin{pmatrix} -2v_E\boldsymbol{\omega}_e \cos \varphi - \frac{v_E^2}{(N+h)\cos^2 \varphi} & 0 & \frac{-v_N v_D}{(M+h)^2} + \frac{v_E^2 \tan \varphi}{(N+h)^2} \\ 2\boldsymbol{\omega}_e(v_N \cos \varphi - v_D \sin \varphi) + \frac{v_E v_N}{(N+h)\cos^2 \varphi} & 0 & \frac{-v_E v_D}{(N+h)^2} - \frac{v_N v_E \tan \varphi}{(N+h)^2} \\ 2v_E\boldsymbol{\omega}_e \sin \varphi & 0 & \frac{v_E^2}{(N+h)^2} + \frac{v_N^2}{(M+h)^2} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{v}^n * \delta\boldsymbol{\Omega}_v = \begin{pmatrix} \frac{v_D}{M+h} & \frac{v_E \tan \varphi}{N+h} & 0 \\ 0 & \frac{v_D}{N+h} + \frac{v_N \tan \varphi}{N+h} & 0 \\ \frac{-v_N}{M+h} & \frac{-v_E}{N+h} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

El vector de gravedad en el marco de navegación,  $\mathbf{g}^n$ , es aproximadamente igual al vector de gravedad normal  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}^T$ , y  $\gamma$  varía con la altitud. En esta tesis asumiremos un modelo de Tierra esférico y un modelo de gravedad cuadrado inverso simplificado siguiendo (Rogers, 2000).

$$\gamma = \gamma_0 \left( \frac{R}{R+h} \right)^2 \quad (3.27)$$

Donde  $\gamma_0$  es gavedad normal en  $h = 0$  y  $R = \sqrt{M * N}$ . Perturbando la ecuación (3.27):

$$\delta\gamma = -2 \left( \frac{\gamma}{R+h} \right) \delta h \quad (3.28)$$

Usando las ecuaciones (3.19) y (2.29) , la ecuación de la dinámica de error de velocidad (3.13) puede volverse a escribir como:

$$\delta\dot{\mathbf{v}}^n = \mathbf{F}_{vp}\delta\mathbf{p}^n + \mathbf{F}_{vv}\delta\mathbf{v}^n + \mathbf{C}_b^n\delta\mathbf{f}^b \quad (3.29)$$

Donde:

$$\mathbf{F}_{vp} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_N}{\partial \varphi} & \frac{\partial v_N}{\partial \lambda} & \frac{\partial v_N}{\partial h} \\ \frac{\partial v_E}{\partial \varphi} & \frac{\partial v_E}{\partial \lambda} & \frac{\partial v_E}{\partial h} \\ \frac{\partial v_D}{\partial \varphi} & \frac{\partial v_D}{\partial \lambda} & \frac{\partial v_D}{\partial h} \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}_{vv} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_N}{\partial v_N} & \frac{\partial v_N}{\partial v_E} & \frac{\partial v_N}{\partial v_D} \\ \frac{\partial v_E}{\partial v_N} & \frac{\partial v_E}{\partial v_E} & \frac{\partial v_E}{\partial v_D} \\ \frac{\partial v_D}{\partial v_N} & \frac{\partial v_D}{\partial v_E} & \frac{\partial v_D}{\partial v_D} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{vp} = \begin{pmatrix} -2v_E\omega_e \cos \varphi - \frac{v_E^2}{(N+h)\cos^2 \varphi} & 0 & \frac{-v_N v_D}{(M+h)^2} + \frac{v_E^2 \tan \varphi}{(N+h)^2} \\ 2\omega_e(v_N \cos \varphi - v_D \sin \varphi) + \frac{v_E v_N}{(N+h)\cos^2 \varphi} & 0 & \frac{-v_E v_D}{(N+h)^2} - \frac{v_N v_E \tan \varphi}{(N+h)^2} \\ 2v_E\omega_e \sin \varphi & 0 & \frac{v_E^2}{(N+h)^2} + \frac{v_N^2}{(M+h)^2} - \frac{2\gamma}{(R+h)} \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

$$\mathbf{F}_{vv} = \begin{pmatrix} \frac{v_D}{(M+h)} & -2\omega_e \sin \varphi - 2\frac{v_E \tan \varphi}{(N+h)} & \frac{v_N}{(M+h)} \\ 2\omega_e \sin \varphi + \frac{v_E \tan \varphi}{(N+h)} & \frac{v_D + v_N \tan \varphi}{(N+h)} & 2\omega_e \cos \varphi + \frac{v_E}{(N+h)} \\ -2\frac{v_N}{(M+h)} & -2\omega_e \cos \varphi - 2\frac{v_E}{(N+h)} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

### 3.4. Implementación del Filtro Kalman en la integración del INS/GPS

La ecuación de estado de los sistemas continuos puede construirse combinando las ecuaciones (3.6),(3.29):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{u} \quad (3.32)$$

Donde  $\mathbf{F}$  es la matriz de la dinámica,  $\mathbf{x}$  es el vector de estado,  $\mathbf{G}$  es una matriz diseñada y  $\mathbf{u}$  es la función del vector forzado.

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{pp} & \mathbf{F}_{pv} \\ \mathbf{F}_{vp} & \mathbf{F}_{vv} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \delta\mathbf{p}^n \\ \delta\mathbf{v}^n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{C}_b^n \end{pmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \delta\mathbf{f}^b \\ \delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \end{pmatrix}$$

Los elementos de  $\mathbf{u}$  son ruido blanco por lo que su matriz de covarianza está dada por:

$$\mathbf{E}[\mathbf{u}(t)\mathbf{u}(\tau)^T] = \mathbf{Q}(t)\delta(t - \tau) \quad (3.33)$$

donde el operador  $\delta$  denota la delta de Dirac cuya unidad es  $1/time$  (Pres, 1974).  $\mathbf{Q}$  es la matriz de covarianza del modelo y tiene la forma:

$$\mathbf{Q} = diag \left( \sigma_{ax}^2 \quad \sigma_{ay}^2 \quad \sigma_{az}^2 \quad \sigma_{\omega x}^2 \quad \sigma_{\omega y}^2 \quad \sigma_{\omega z}^2 \right) \quad (3.34)$$

donde  $\sigma_a$  y  $\sigma_\omega$  son las desviaciones estándar del acelerómetro y giróscopo respectivamente. Como el sistema inercial strapdown está usualmente implementado con altas prestaciones la ecuación (3.32) es transformada a su forma discreta abreviada:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}_k \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\omega}_k \quad (3.35)$$

donde  $\mathbf{\Phi}_k$  es la matriz de la transición de estado,  $\boldsymbol{\omega}_k$  es el ruido del proceso y es responsable de operar en  $(t_k, t_{k+1})$  debido a la presencia de la entrada del ruido blanco durante ese intervalo de tiempo (Brown and Hwang, 1992). Dado que una sucesión blanca es una sucesión de variables al azar que no tienen relación en el tiempo (Brown and Hwang, 1992), la matriz de covarianza asociada con  $\boldsymbol{\omega}_k$  es:

$$\mathbf{E}[\boldsymbol{\omega}_k \boldsymbol{\omega}_i^T] = \begin{cases} \mathbf{Q}_k & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases} \quad (3.36)$$

El método analítico para encontrar la matriz de transición de estado es:

$$\mathbf{\Phi}_K = L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}] \quad (3.37)$$

donde  $L^{-1}$  representa la inversa de la transformada Laplace y  $s$  es el parámetro de la transformada Laplace. Sin embargo, para la aplicación del INS, el intervalo de tiempo probado  $\Delta t = t_{k+1} - t_k$  es muy pequeño, por lo que se prefiere seguir la aproximación numérica simple:

$$\Phi_k = \exp(\mathbf{F}\Delta t) \approx \mathbf{I} + \mathbf{F}\Delta t \quad (3.38)$$

Una solución común aproximada a la ecuación anterior ( $\mathbf{Q}_k$ ) se da como:

$$\mathbf{Q}_k \approx \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T \Delta t \quad (3.39)$$

Esta aproximación no responde para cualquiera de las correlaciones entre los componentes de ruido  $\mathbf{w}_k$  cuya tendencia se desarrolla por encima del curso de un período probado debido a la integración de la tendencia de ruido de tiempo continuo a través de la dinámica de estado (Farrell and Barth, 1998). Por consiguiente, en esta investigación  $\mathbf{Q}_k$  es calculado usando la aproximación de primer orden de la matriz de la transición, es decir ecuación (3.38), como:

$$\mathbf{Q}_k \approx \Phi_k \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T \Phi_k^T \Delta t \quad (3.40)$$

Si la norma de  $\mathbf{Q}_k$  es más grande que la real, el filtro Kalman confirma las medidas dadas por los sensores. Entonces, las estimaciones resultantes serán ruidosas debido al libre pasaje de medida con ruido. Sin embargo, la estimación no tiene el retraso de tiempo (Salychev, 1998). Si la norma de  $\mathbf{Q}_k$  es más pequeña que la real, el retraso de tiempo se presentará. Cuando esto ocurre el filtro diverge, lo que puede resultar en inestabilidades numéricas. Ahora, para el bajo costo de los sistemas inerciales,  $\mathbf{Q}_k$  debe seleccionarse

de manera pesimista para que la trayectoria pueda seguirse mediante el GPS; sobre todo, los elementos que corresponden a  $\delta f_z$  deben ser bastante grandes para que puedan responder a las incertidumbres de la gravedad y a las imperfecciones del sensor. En esta tesis, se aumentaron los elementos de  $\mathbf{Q}_k$  hasta que el filtro fuera estabilizado y la trayectoria pudiera seguirse por el GPS (Salychev, 1998; Mohamed, 1999).

La derivación del filtro Kalman es recursiva, imparcial y estimadora de la varianza mínima. Las salidas del modelo del proceso aleatorio, es decir de la ecuación (3.35), y la observación de la siguiente ecuación:

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{e}_k \quad (3.41)$$

qué expresa el vector de medida,  $\mathbf{z}_k$ , en tiempo  $t_k$  como una combinación lineal del vector de estado,  $\mathbf{x}_k$ , más un error aleatorio de la medida  $\mathbf{e}_k$  (Brown and Hwang, 1992; Pres, 1974). Las matrices de covarianza para  $\boldsymbol{\omega}_k$  y  $\mathbf{e}_k$  están dadas por:

$$\mathbf{E}[\mathbf{e}_k \mathbf{e}_i^T] = \begin{cases} R_k & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases} \quad (3.42)$$

$$\mathbf{E}[\boldsymbol{\omega}_k \mathbf{e}_i^T] = \begin{cases} 0 & \text{para todo valor de } i, k \end{cases} \quad (3.43)$$

La aplicación del filtro Kalman puede ser dividida en dos fases, la predicción y la actualización como se muestra en la figura 3-1.

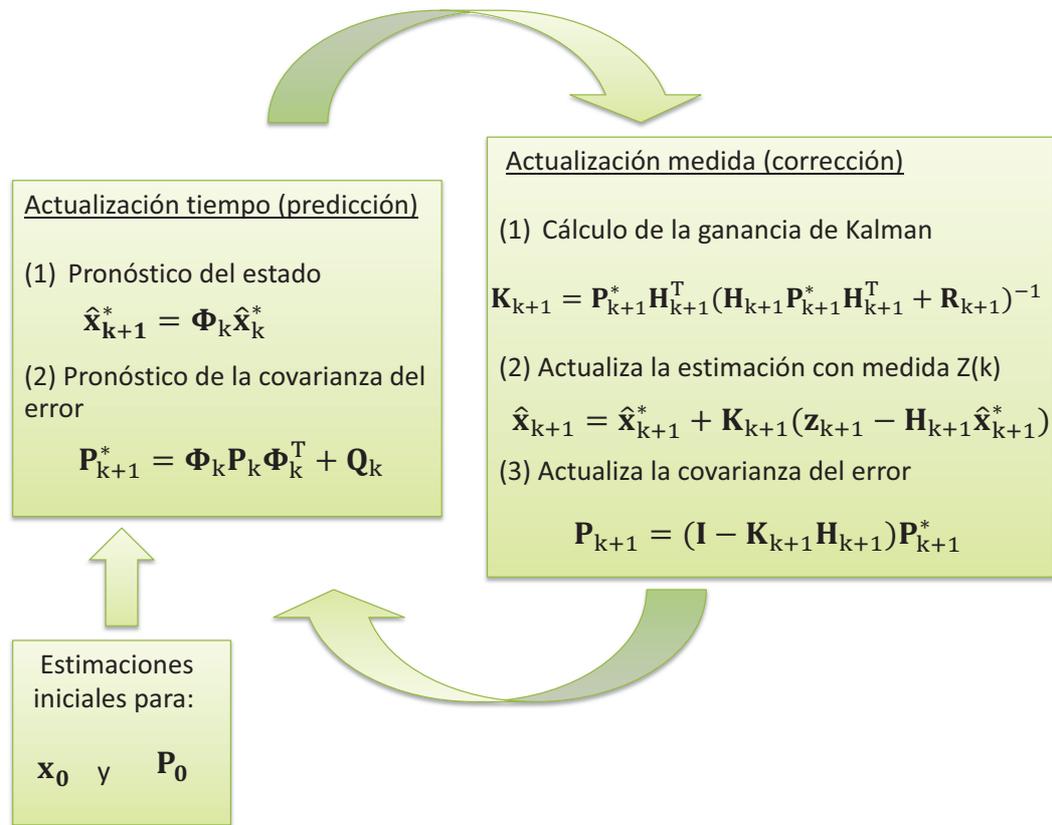


Figura 3-1: Modelo del Filtro Kalman

La predicción consiste en generar un pronóstico del estado futuro y el error de covarianza tomando en cuenta toda la información disponible en ese momento:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^* = \Phi_k \hat{\mathbf{x}}_k^* \tag{3.44}$$

$$\mathbf{P}_{k+1}^* = \Phi_k \mathbf{P}_k \Phi_k^T + \mathbf{Q}_k \tag{3.45}$$

En la actualización, se genera un pronóstico mejorado del estado, de tal manera que el error es minimizado estadísticamente. La primera tarea durante la actualización de la proyección del estado es el cálculo de la ganancia de Kalman,  $K_{k+1}$ . Este factor de ponderación o ganancia se calcula con información estadística referente a la precisión de los sensores y de los modelos utilizados; es seleccionado de tal forma que minimice la covarianza del error de la nueva estimación del estado. El siguiente paso consiste en generar una nueva estimación del estado con la mayor exactitud posible,  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$ , apoyándose en las mediciones de los sensores, las estimaciones dadas por el filtro durante la etapa de predicción y la ganancia de Kalman. El paso final de este bloque es obtener una nueva estimación de la covarianza del error,  $\mathbf{P}_{k+1}$ , utilizando la ganancia de Kalman y la covarianza del error estimada durante la predicción.

$$K_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1}^* \mathbf{H}_{k+1}^T (\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1}^* \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1})^{-1} \quad (3.46)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^* + K_{k+1} (\mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^*) \quad (3.47)$$

$$\mathbf{P}_{k+1} = (\mathbf{I} - K_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}) \mathbf{P}_{k+1}^* \quad (3.48)$$

La posición y velocidad del GPS pueden ser consideradas como medidas. La formulación verdadera de la ecuación de la medida puede escribirse como:

$$\mathbf{z}_{k+1} = \begin{pmatrix} \varphi^{INS} - \varphi^{GPS} \\ \lambda^{INS} - \lambda^{GPS} \\ h^{INS} - h^{GPS} \\ v_x^{INS} - v_x^{GPS} \\ v_y^{INS} - v_y^{GPS} \\ v_z^{INS} - v_z^{GPS} \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_{k+1} = \begin{pmatrix} I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

Como  $\varphi$  y  $\lambda$  están en radianes y por consiguiente son muy pequeños causan inestabilidades numéricas en el cálculo de  $(\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1}^* \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1})^{-1}$  para la ganancia de Kalman,  $K_{k+1}$ . Este problema puede resolverse si la primera y segunda fila se multiplican por  $(M + h)$  y  $(N + h) \cos \varphi$ , respectivamente. Ahora, la ecuación de la medida tomará la forma:

$$\mathbf{z}_{k+1} = \begin{pmatrix} (M + h)(\varphi^{INS} - \varphi^{GPS}) \\ (N + h) \cos \varphi (\lambda^{INS} - \lambda^{GPS}) \\ h^{INS} - h^{GPS} \\ v_x^{INS} - v_x^{GPS} \\ v_y^{INS} - v_y^{GPS} \\ v_z^{INS} - v_z^{GPS} \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

$$\mathbf{H}_{k+1} = \left( \begin{array}{c|c} \left( \begin{array}{ccc} (M+h) & 0 & 0 \\ 0 & (N+h)\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & 0_{3 \times 3} \\ \hline 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{array} \right) \quad (3.51)$$

y se usará la siguiente matriz de covarianza de la perturbación de la medición

$$\mathbf{R}_{k+1} = \text{diag} \left( \sigma_{\varphi}^2 \quad \sigma_{\lambda}^2 \quad \sigma_h^2 \quad \sigma_{vn}^2 \quad \sigma_{ve}^2 \quad \sigma_{vd}^2 \right) \quad (3.52)$$

que se obtiene de la medición del GPS.

Para inicializar el filtro Kalman, debe darse primero la incertidumbre de estimación inicial de la desviación estándar. Si la IMU se inicializa en el modo estacionario, la incertidumbre de la posición será entregada por el GPS y la incertidumbre de la velocidad será casi cero.

Las medidas de errores estimadas en la navegación son realimentadas a la mecanización (feed back), ver Figura 3-3, o alimentadas directamente a la salida (feedforward), vea Figura 3-2. En el método feedforward, el sistema inercial opera como si no tuviera ninguna ayuda; despreciando la existencia del filtro o los datos externos (Maybeck, 1994). La desventaja del método feedforward es que la mecanización puede experimentar un crecimiento ilimitado del error. Esto hace que las observaciones del error entregadas al filtro de Kalman sean ilimitadas, causando un problema para la linealización

del filtro, porque solo se permiten pequeños errores debido a la linealización del proceso (Sukkarieh, 2000). Por consiguiente, el método feedback es óptimo para los INS de bajo costo.

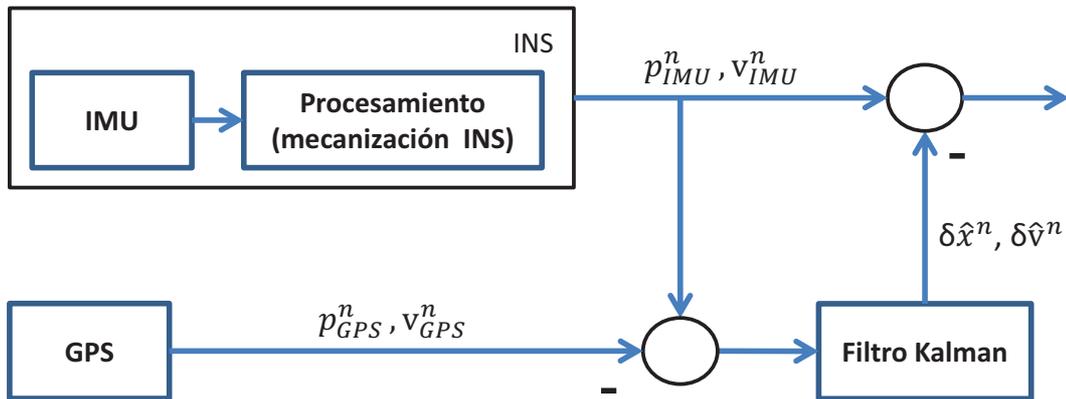


Figura 3-2: Modelo Feedforward

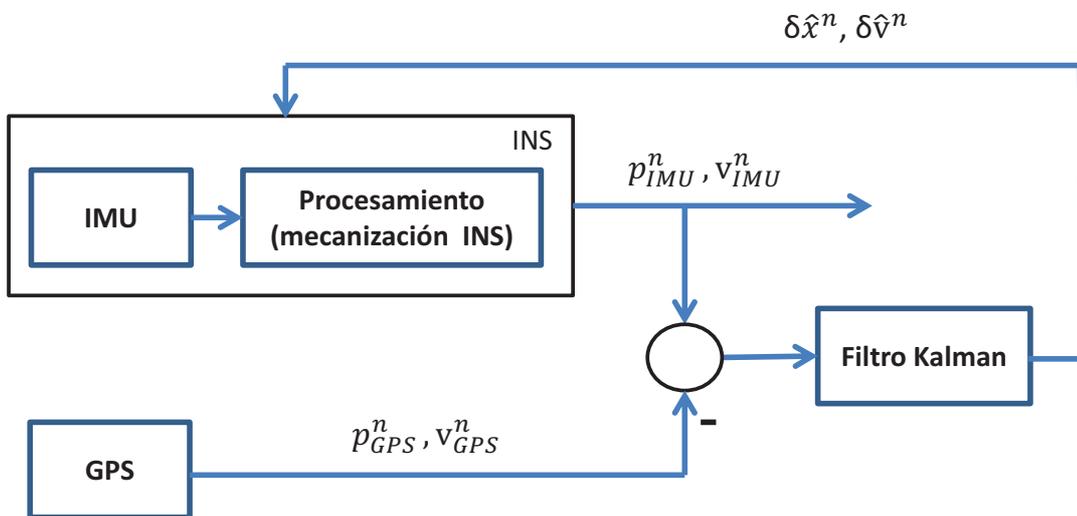


Figura 3-3: Modelo Feedback

La realimentación de los vectores de posición y velocidad pueden obtenerse fácilmente de las ecuaciones siguientes:

$$p^n = \hat{p}^n - \delta p^n \tag{3.53}$$

$$\mathbf{v}^n = \hat{\mathbf{v}}^n - \delta\mathbf{v}^n \quad (3.54)$$

Después de la realimentación el error del vector de estado debe ponerse en cero. Porque, para los estados de integración INS/GPS del filtro Kalman, el vector de estado es cero hasta que las próximas medidas sean hechas, si la realimentación es hecha en cada tiempo medido damos lugar a la predicción de estado.  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^* = \mathbf{\Phi}_k \hat{\mathbf{x}}_k^*$ , en caso de que las medidas esten ausentes no necesitamos implementar toda esta ecuación (3.47) es decir quedaría reducida a:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = K_{k+1} \mathbf{z}_{k+1} \quad (3.55)$$

### 3.5. Resultados de la integración

En esta sección se muestran los resultados de la integración del INS mostrados en el capítulo anterior con las mediciones del GPS haciendo uso de las ecuaciones no lineales mostradas en este capítulo. Los resultados serán discutidos para dos tipos de vehículos; uno sumergible y otro terrestre. En el caso del primero forma parte de las investigaciones en desarrollo por el GARP, por falta de otros datos experimentales las demás simulaciones se muestran para un vehiculo terrestre conducido empleando el mismo sensor inercial que en el sumergible. Para las simulaciones solo se hace necesario cambiar los parámetros de ajuste del algoritmo lo cual será discutido más adelante.

### 3.5.1. Caso 1: Vehículo Sumergible Autónomo

En este caso la utilización de integración del INS con el GPS solo se utilizará para la navegación en la superficie del mar, debido a que cuando el mismo se sumerge pierde la recepción con los satélites y por lo tanto la información de las variables de posicionamiento. Limitando los errores del INS con las salidas estimadas de los errores de posición y velocidad del FK, se puede llegar a navegar pero solo durante cortos intervalos de tiempo ya que los mismos comienzan a crecer rápidamente si no se corrigen con alguna medición absoluta. Para las simulaciones los parámetros iniciales de las matrices del filtro se seleccionaron como se muestra:

$$\mathbf{R}_k = \text{diag} \left( 10 \ 10 \ 10 \ 2 \ 2 \ 2 \right) \quad (3.56)$$

$$\mathbf{Q}_k = \text{diag} \left( 0,05 \ 0,05 \ 0,05 \ 0,02 \ 0,02 \ 0,02 \right) \quad (3.57)$$

$$\mathbf{P}_k = \text{diag} \left( 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \right) \quad (3.58)$$

$$\mathbf{H}_k = \text{diag} \left( 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \right) \quad (3.59)$$

En las figuras 3-4 y 3-5 se muestra la trayectoria seguida por el vehículo sumergible en un experimento real realizado en el mes de marzo del 2014, según la información del GPS. Durante el experimento en la base de dato

de la computadora a bordo del vehículo se registran todas las variables necesarias para llevar a cabo la navegación inercial y la fusión de información con el GPS. Los datos fueron guardados en una frecuencia de 100 Hz y en cada iteración del algoritmo se actualizan las matrices del filtro relacionadas con la dinámica del error de posición y velocidad para corregir el INS según la frecuencia de muestreo. En estas figuras también se muestra la salida de posicionamiento del FK.

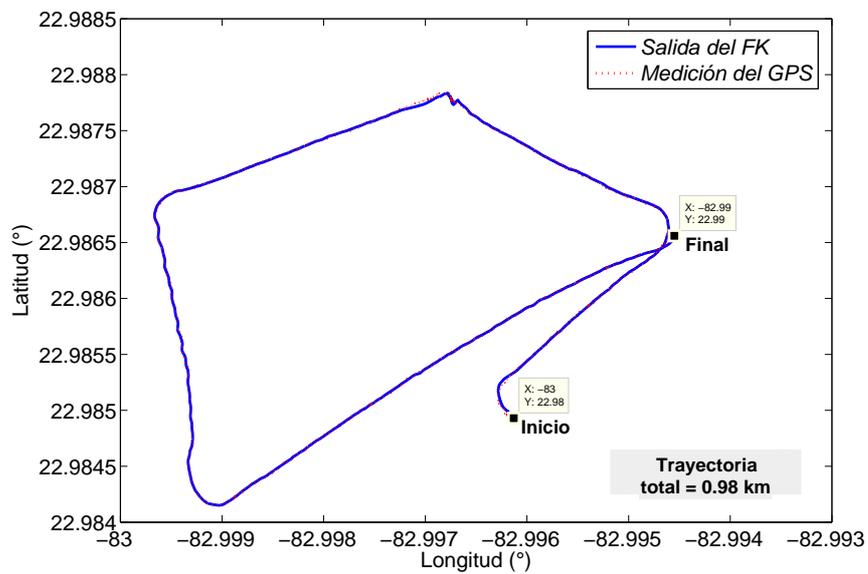


Figura 3-4: Trayectoria bidimensional del vehículo sumergible

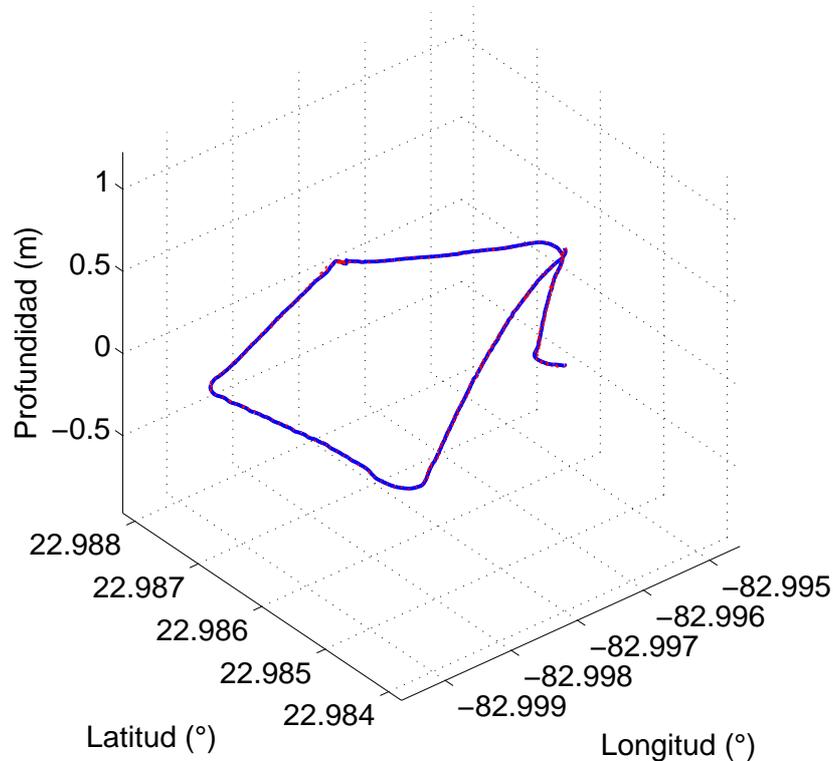


Figura 3-5: Trayectoria tridimensional del vehículo sumergible

Para generar la trayectoria se empleó como señal de referencia la latitud y longitud del GPS, sin embargo la información en el plano vertical presentó dificultades, por lo que se utilizó como fuente de corrección la medición de profundidad obtenida mediante sensor de presión ubicado en el casco del vehículo. Las gráficas anteriores muestran el resultado de la trayectoria en latitud, longitud y profundidad, que en el caso de las dos primeras variables como la trayectoria es en un marco reducido donde la longitud total de cada tramo no excede los 300 metros, las variaciones de las mismas son prácticamente imperceptibles en la gráfica, ya que la variación del FK con respecto al GPS es de solo algunos metros. En la figura (3-6) se muestran

ambos desplazamientos en metros, así como el valor de los errores en cada caso.

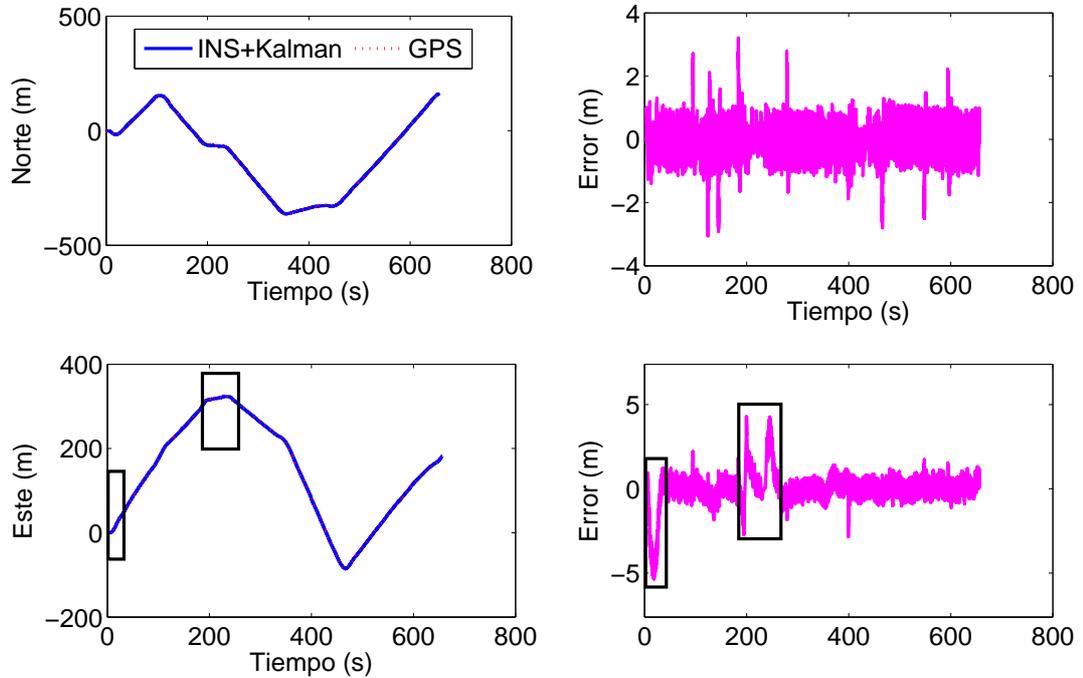


Figura 3–6: Desplazamientos en metros y errores de estimación en cada dirección (submarino).

Seguidamente se muestran en la tabla (3-1) los valores estadísticos de los errores para un mejor análisis del mismo.

Cuadro 3–1: Valores estadísticos de los errores de estimación

	Valor Mínimo	Valor Máximo	Valor Medio	Desviación Típica
Error dirección Norte (m)	-3,056	3,208	-0,023	0,517
Error dirección Este (m)	-5,35	4,304	0,031	0,955

Como se puede ver los errores cometidos en la estimación se mantienen generalmente por debajo de los 5 metros que es la mayor precisión que se puede alcanzar con el sistema GPS en el mejor de los casos. Por otra parte en la figura 3-7 se muestran las velocidades corregidas del vehículo en el plano de navegación; note las variaciones que introduce el error del GPS

en la velocidad vertical, de ahí la razón de corregir posición vertical con la medición de profundidad. En caso de corregir las velocidades del INS, las mismas continuarían creciendo de manera exponencial resultando en un grandísimo error de posicionamiento.

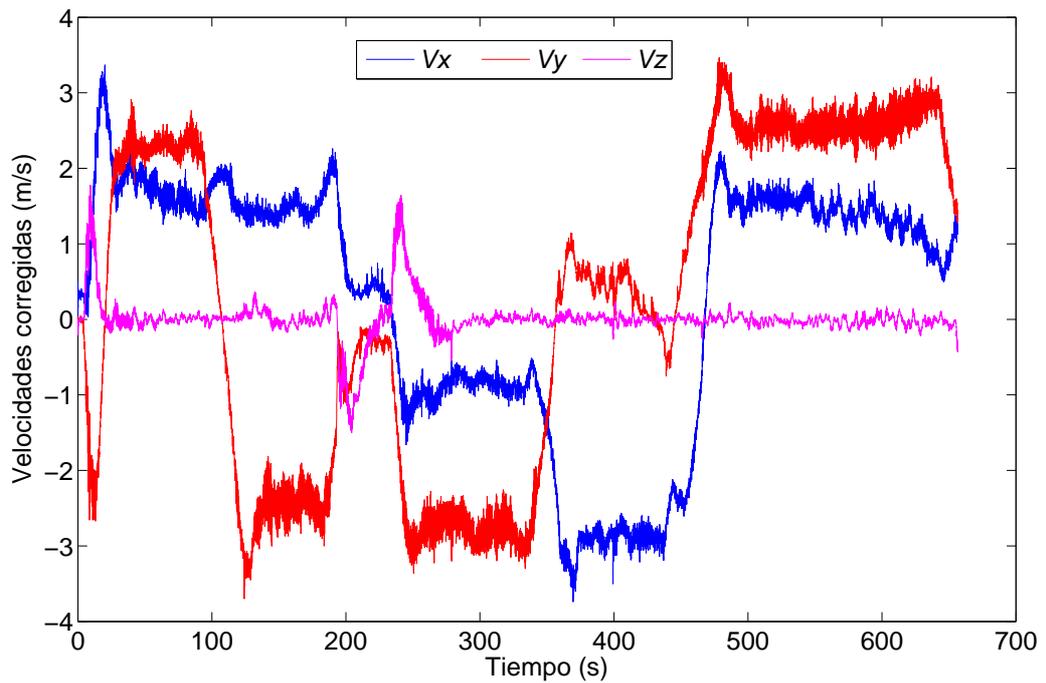


Figura 3-7: Velocidades corregidas del INS.

Por otra parte en la figura 3-8 se pueden ver la norma del vector de ganancia del FK y la matriz de covarianza de los errores. En ambas se observan la convergencia del algoritmo y la reducción casi a cero de la covarianza de los errores.

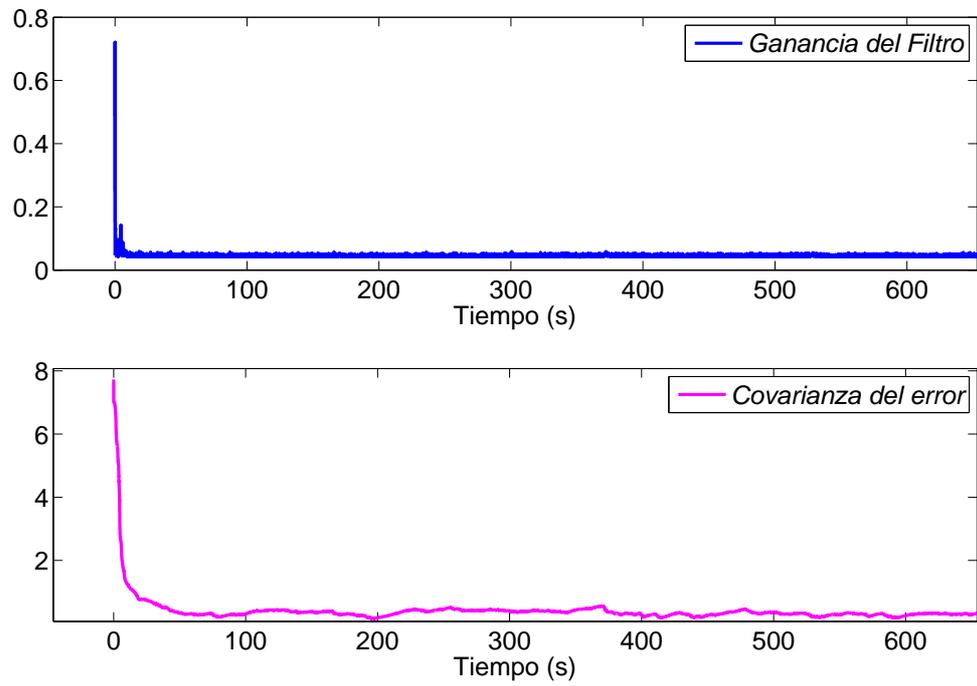


Figura 3–8: Ganancia del FK y covarianza de los errores.

### 3.5.2. Caso 2: Vehículo terrestre

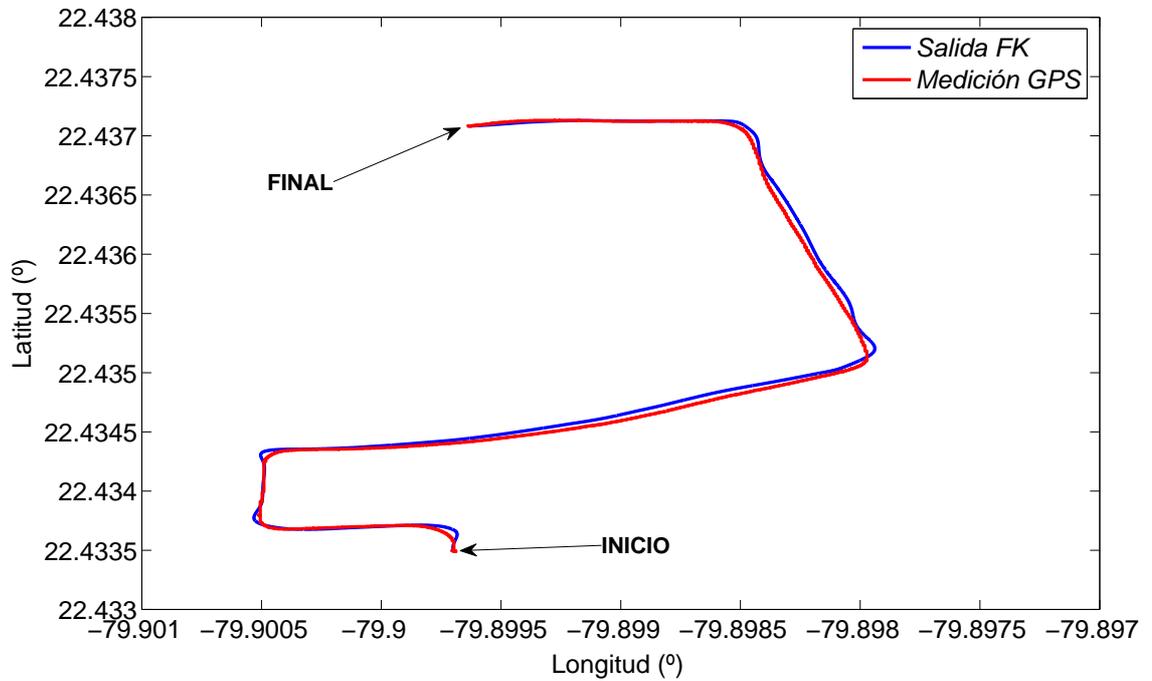


Figura 3–9: Trayectoria bidimensional del vehículo terrestre.

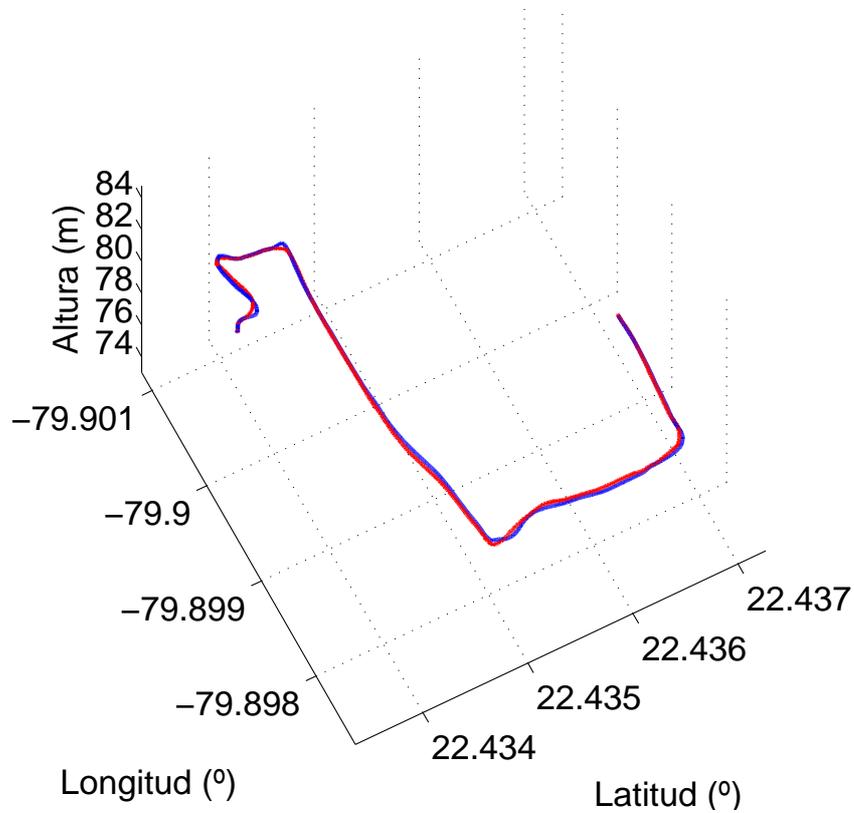


Figura 3-10: Trayectoria tridimensional del vehículo terrestre.

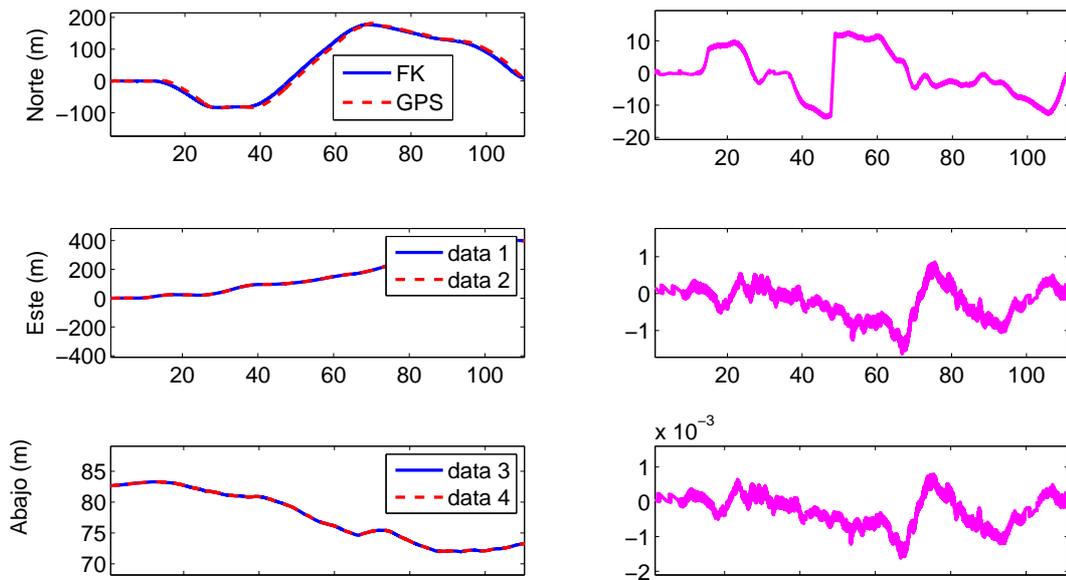


Figura 3-11: Desplazamientos en metros y errores de estimación en cada dirección (carro).

Cuadro 3-2: Valores estadísticos de los errores de estimación

	Valor Mínimo	Valor Máximo	Valor Medio	Desviación Típica
Error dirección Norte (m)	-13,9	12,6	-0,7	6,8
Error dirección Este (m)	-1,6	0,8	-0,12	0,45
Error dirección Vertical (m)	$-1,6 \times 10^{-6}$	$8 \times 10^{-4}$	$-2 \times 10^{-4}$	$4,4 \times 10^{-4}$

### 3.6. Análisis Económico

Las aplicaciones de vehículos autónomos han adquirido un gran auge en los últimos años, como consecuencia de esto sus precios se han elevado considerablemente ya que requieren de equipamientos y sistemas sensoriales especiales con altas prestaciones. Existen numerosos proyectos y aplicaciones multimillonarias en todo el mundo. El costo de adquisición de una plataforma de este tipo; en dependencia de la aplicación y de las características que posea, se encuentra por encima del millón de dólares, llegando a varias decenas de millones en algunos casos basados en tecnologías de última generación como el caso del AUV Hugin. Sin embargo, los sensores inerciales de bajo costo desarrollados con tecnología MEMS han puesto un punto y aparte en la barrera que existía entre estas tecnologías y los países como el nuestro, reduciendo considerablemente los precios de una IMU en el mercado mundial. En la actualidad se puede adquirir un sistema de navegación, incluso con un precio por debajo de los 1000 USD (con receptor GPS incluido). La adquisición por parte de nuestro país de un vehículo autónomo en el mercado mundial, no constituye una opción viable debido a que a pesar de pagar un alto precio se adquiere la aplicación pero no se dispone del conocimiento para realizar actualizaciones o reparaciones del

mismo, creándose un alto nivel de dependencia hacia los proveedores. Sin embargo, debido a las ventajas que estos vehículos ofrecen en comparación con sus contrapartes tripuladas, se ha convertido en una necesidad vital el desarrollo de estas aplicaciones totalmente de factura nacional. El GARP conjuntamente con otras instituciones ha desarrollado un AUV con una arquitectura de hardware y sensores de bajo costo. El sensor inercial que se emplea en este AUV es la MTI-G de la firma Xsens, valorado en 5069 USD que en comparación con la empleada en el proyecto Hugin cuesta tres veces menos, por solo mencionar algún ejemplo. Además, para llevar a cabo experimentos con el AUV Hugin hay que disponer de 26000 y 55000 USD por día de explotación, cifras que nuestro país no se puede dar el lujo de pagar. Por supuesto que el uso de sensores de bajo costo trae consigo el decremento de las prestaciones, por lo que se hace necesario desarrollar técnicas para incrementar las prestaciones y el desempeño final del sistema, logrando una buena relación costo-prestaciones. En esto ha centrado sus esfuerzos el GARP, demostrando que se pueden desarrollar en nuestro país aplicaciones de este tipo.

### **3.7. Conclusiones del capítulo**

Los resultados obtenidos con la integración de una IMU y un receptor GPS mediante el uso del Filtro Kalman, dan una muestra de las mejoras en prestación y fiabilidad en el posicionamiento, sobre todo en entornos problemáticos.

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

### CONCLUSIONES

- Se comprobó con las simulaciones que la implementación matemática del INS funciona correctamente.
- Los errores de los sensores como bias y drifts degradan drásticamente la solución inercial por lo que es necesario asistirle con otras mediciones.
- El Filtro Kalman es la opción más utilizada para los sistemas de navegación comerciales.
- Con el filtro se mostró que la solución de posicionamiento de ambos sistemas fusionados ofrecen mejores resultados que ambos sistemas por separados.

### RECOMENDACIONES

Con vistas a lograr una continuidad de esta investigación, complementar, validar e implementar los resultados obtenidos se recomienda llevar a cabo las siguientes tareas:

- Aplicar los resultados obtenidos mediante simulación en experimentos reales o en una plataforma de prueba.
- Utilizar las mediciones de los magnetómetros que son necesarios para poder disponer de una completa solución de navegación.
- Continuar investigando en otras técnicas para la estimación de los bias y drifts de los sensores inerciales, ya que estos efectos constituyen el principal factor negativo que afecta el rendimiento del sistema.
- Hacer extensible los resultados de este trabajo a otras aplicaciones.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abdel-Hamid, Walid. (2005). Accuracy Enhancement of Integrated MEMS-IMU/GPS Systems for Land Vehicular Navigation Applications.. PhD thesis.
- Britting, K. R. (1971). *Inertial Navigation Systems Analysis*.
- Brown, R. G. and P. Y. C. Hwang (1992). Introduction to random signals and applied kalman filtering.. second edition. ed.. p. 220.
- Bruton, A.M; Skaloud, J; Schwarz K.P. (1999). *The use of wavelets for the analysis and de-noising of kinematic geodetic measurements..* 2nd ed.
- Cardona, Lorena; Cárdenas, Marisol O.; Gutiérrez Luis B. (2006). Sistema de navegación para vehículos no tripulados. *MEASUREMENT SCIENCE AND TECHNOLOGY* p. 11.
- Chiang, K.W; Noureldin, A; El-Sheimy N. (2003). *Multi-sensors integration using neuron computing for land vehicle navigation. GPS Solutions, Springer Verlag Heidelberg V6..* 2nd ed.
- Conejeros, Enrique Edgardo Ahumada. (2004). Sistema de Posicionamiento Global en la Aeronautica Civil.. PhD thesis.
- Erin L., Renk, Collins Walter, Rizzo Matthew, Lee Fujun and Bernstein Dennis S (2005). Calibrating a triaxial accelerometer-magnetometer. *IEEE Control Systems Magazine* **05**, 10.
- Farrell, J. A. and M. Barth (1998). *The Global Positioning System & Inertial Navigation..* John Wiley.
- Fossen, Thor I. (1994). *Guidance and Control of Ocean Vehicles*. JOHN WILEY and SONS.
- Hide, C; Moore, T; Smith-M. (2002). Adaptive kalman filtering for low cost ins/gps. ion gps 2002, portland, or, 24-27 september 2002.

- Kwakkel, Sidney P. (2008). Human Lower Limb Kinematics Using GPS/INS.. PhD thesis. UNIVERSITY OF CALGARY.
- Leick, A (2004). Gps satellite surveying. 3th edition. john wiley and sons, new york.
- Li, Y. Wang, J. Rizos-C.Mumford P. Ding W (2006). Low-cost tightly coupled gps-ins integration based on a nonlinear kalman filtering design.. In: *Proceedings of ION National Technical Meeting*.
- Maybeck, P. S. (1994). *Stochastic Models, Estimation, and Control*. Vol. Volume 1. Navtech Book & Software Store.
- Mayhew, David McNeil (2003). Multi rate Sensor Fusion for GPS Navigation Using Kalman Filtering.. PhD thesis. Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University.
- Mohamed, A. H. (1999). Optimizing the Estimation Procedure in INS/GPS Integration for Kinematic Applications.. PhD thesis. The University of Calgary, Calgary, Canada. UCGE Reports Number 20127, Dept. of Geomatics Engineering,.
- Mohinder, Grewall. (2007a). Global positioning systems, inertial navigation, and integration. control systems technology.
- Mohinder, Grewall, Ed.) (2007b). *Global Positioning Systems, Inertial Navigation, and Integration*. Control Systems Technology. John Wiley and Sons.
- Navstar. (1996). Gps user equipment introduction.
- Pres, The M. I. T., Ed.) (1974). *Applied Optimal Estimation*.
- Rizos, C. (2002). Introduction to gps. university of new south wales, sidney.
- Rogers, R. M. (2000). (2000). Applied mathematics in integrated navigation systems.. *American Institute of Aeronautics and Astonautics*,.
- Rogers, Robert M. (2003). *Applied Mathematics in Integrated Navigation Systems*. Education Series. 2nd edition ed.. AIAA. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc.. Gainesville, Florida.
- Salychev, O. S. (1998). *Inertial Systems in Navigation and Geophysics*.. John Wiley and Sons.

- Salychev, Oleg, Ed.) (2004). *Applied Inertial Navigation: Problems and Solutions*. Bauman MSTU Press.
- Salytcheva, Anastasia Olegovna (2004). Medium Accuracy INS/GPS Integration in Various GPS Environments. PhD thesis. UNIVERSITY OF CALGARY.
- SUGA, IWAO (1960). *Riccatis nonlinear differential equation*. American Mathematical Monthly.
- Sukkarieh, S. (2000). Low Cost, High Integrity, Aided Inertial Navigation Systems for Autonomous Land Vehicles.. PhD thesis. Thesis, Australian Centre for Field Robotics, Dept. of Mechanical and Mechatronic Engineering, The University of Sydney, Sydney, Australia.
- Welch, Greg and Gary Bishop (2001). An introduction to the kalman filter. Technical report. University of North Carolina at Chapel Hill.
- Zhang, Xiaohong (2003). Integration of GPS with A Medium Accuracy IMU for Metre-Level Positioning.. PhD thesis. UNIVERSITY OF CALGARY.

# APENDICES

# Apéndice A

## ANEXO 1

### Implementación de la integración INS/GPS en MatLab

```
%definición de constantes para el INS
a1=9.7803267715;          %coeficientes para determinar gravedad
a2=0.0052790414;
a3=0.0000232718;
a4=-0.0000030876910891;
a5=0.0000000043977311;
a6=0.0000000000007211;

we=7.2921158e-005;      %rotación de la Tierra
ws=1.24e-002;

r_mayor=6378137.0;      %radio mayor y radio menor de la Tierra
r_menor=6356752.3142;
excent=sqrt((r_mayor-r_menor)/r_mayor*(2-(r_mayor-r_menor)/r_mayor));

%NO y MO para mantener la salida en Latitud-Longitud-Altura
NO=r_mayor/sqrt(1-(excent^2)*sin(lat_ini)*sin(lat_ini));
MO=r_mayor*(1-(excent^2))/(1-(excent^2)*sin(lat_ini)*sin(lat_ini))^(3/2);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%MATRICES PARA EL KALMAN%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Q=[0.05 0 0 0 0 0
```



```

for i=1:N    %ciclo con toda la trama
    roll=Roll(i)*pi/180;
    pitch=Pitch(i)*pi/180;
    yaw=Yaw(i)*pi/180;
    latitud=Latitude(i)*pi/180;
    longitud=Longitude(i)*pi/180;

    %comienzo del INS
    acel_body=[Acc_X(i)
                Acc_Y(i)
                Acc_Z(i)];

    %comienzo de la definici3n de las matrices
    %para correcci3n de gravedad y aceleraci3n centripeta
    vector_gravedad=[0
                    0
                    a1*(1+a2*sin(latitud)*sin(latitud)+a3*sin(4*latitud))
                    +altura*(a4+a5*sin(latitud)*sin(latitud))+a6*altura^2];

    M=r_mayor*(1-(excent^2))/(1-(excent^2)*sin(latitud)*sin(latitud))^(3/2);
    N=r_mayor/sqrt(1-(excent^2)*sin(latitud)*sin(latitud));

    wen_n=[vel_nav(1)/(N+altura)
            vel_nav(2)/(M+altura)
            vel_nav(3)*tan(latitud+altura)];

    wie_n=[we*cos(latitud)
            0

```

```

-we*sin(latitud)];

win_n=[we*cos(lat)+v_E/(N+h)
       -v_N/(M+h)
       -we*sin(lat)-v_E*tan(lat)/(N+h)];

omega_in_n=[ 0      -win_n(3) win_n(2)
             win_n(3)  0      -win_n(1)
             -win_n(2) win_n(1)  0];

rn=[lat
     long
     h];

D=[1/(M+h) 0 0
   0 1/((N+h)*cos(lat)) 0
   0 0 -1];

%cálculo de la matriz de transformación de coordenadas
C_bn=[cos(pitch)*cos(yaw) -cos(roll)*sin(yaw)+sin(roll)*sin(pitch)*cos(yaw)
      sin(pitch)*cos(yaw)*cos(roll)+sin(yaw)*sin(roll)

      cos(pitch)*sin(yaw) cos(yaw)*cos(roll)+sin(yaw)*sin(pitch)*sin(roll)
      -sin(roll)*cos(yaw)+cos(roll)*sin(pitch)*sin(yaw)

      -sin(pitch) cos(pitch)*sin(roll) cos(pitch)*cos(roll)];

%corrección de gravedad y aceleración centrípeta

```

```

    acel_corr=acel_body+vector_gravedad-(2*omega_ie + omega_en)*vel_nav;

    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    %Integrador de las aceleraciones corregidas%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    %obtención de las velocidades en el sistema cuerpo
    deltavx =(dot_vx0+ acel_corr(1,1))*dT/2;
    deltavy =(dot_vy0+ acel_corr(2,1))*dT/2;
    deltavz =(dot_vz0+ acel_corr(3,1))*dT/2;

    %corrección del error de velocidad estimado
    v_bx = velx0+deltavx-xm(4,1);
    v_by = vely0+deltavy-xm(5,1);
    v_bz = velz0+deltavz-xm(6,1);

    vb=[v_bx      %componentes de velocidad plano body
        v_by
        v_bz];

    %transformación de coordenadas
    vn=C_bn*vb;      %componentes de velocidad plano de navegación

    dot_rn=D*vn;

    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    %Integrador de velocidad para%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    %obtener posición en el plano de navegación%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    deltax=(dot_rn(1,1)+ dot_rn0(1,1))*dT/2;
    deltay=(dot_rn(2,1)+ dot_rn0(2,1))*dT/2;
    deltaz=(dot_rn(3,1)+ dot_rn0(3,1))*dT/2;

```

```

%corrección del error de posición estimado

lat=lat+deltax-xm(1,1)*pi/180;

long=long+deltay-xm(2,1)*pi/180;

h=h+deltaz-xm(3,1)*pi/180;

posn=[lat*180/pi
      long*180/pi
      h*180/pi];

velx0=v_N;

vely0=v_E;

velz0=v_D;

dot_vx0 = acel_nav(1,1);

dot_vy0 = acel_nav(2,1);

dot_vz0 = acel_nav(3,1);

dot_rn0=dot_rn;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Modelo de los errores para el Filtro de Kalman%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Error de posición %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Frr=[      0      0      -v_N/(M+h)
      v_E*sin(lat)/((N+h)*(cos(lat)^2))  0      -v_E/(((N+h)^2)*cos(lat))
      0      0      0];

Frv=[1/(M+h) 0 0
      0 1/((N+h)*cos(lat)) 0
      0 0 -1];

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Error de velocidad %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Fvr11=-2*v_E*we*cos(lat)-(v_E^2)/((N+h)*(cos(lat)^2));

```

```

Fvr13=-v_N*v_D/(M+h)^2 +(v_E^2)*tan(lat)/((N+h)^2);
Fvr21=2*we*(v_N*cos(lat)-v_D*sin(lat))+v_E*v_N/((N+h)*(cos(lat)^2));
Fvr23=-v_E*v_D/((N+h)^2) - v_N*v_D*tan(lat)/(N+h)^2;
Fvr31= 2*v_E*we*sin(lat);
Fvr33= v_E^2/((N+h)^2) + v_N^2/((M+h)^2)-2*(vector_gravedad(3))/(r_mayor+h);

Fvr=[Fvr11  0  Fvr13
      Fvr21  0  Fvr23
      Fvr31  0  Fvr33];

Fvv11=v_D/(M+h);
Fvv12=-2*we*sin(lat)-2*v_E*tan(lat)/(N+h);
Fvv13=v_N/(M+h);
Fvv21=2*we*sin(lat)+ 2*v_E*tan(lat)/(N+h);
Fvv22=(v_D+v_N*tan(lat))/(N+h);
Fvv23=2*we*cos(lat)+ v_E/(N+h);
Fvv31=-2*v_N/(M+h);
Fvv32=-2*we*cos(lat)- v_E/(N+h);

Fvv=[Fvv11 Fvv12 Fvv13
      Fvv21 Fvv22 Fvv23
      Fvv31 Fvv32 0];

%%%%%%%% Ecuaciones del Filtro de Kalman %%%%%%%%%
%%%%%%%%
%Matrices del sistema en continuo

F_1=horzcat(Frr, Frv);
F_2=horzcat(Fvr, Fvv);

```

```

F=vertcat(F_1,F_2);           %matriz de transición de estados

G_1=horzcat(zeros(3), zeros(3)); %matriz de las entradas
G_2=horzcat(C_bn, zeros(3));

G=vertcat(G_1,G_2);

%%%%%%%%Discretización de las matrices%%%%%%%%
Cita_k=eye(6)+F*dT;

Q_k=Cita_k*G*Q*G'*Cita_k'*dT;

%Comienzo de las etapas del FK
%%%%%%%% Predicción de los estados (sin medición)%%%%%%%%
xm=Cita_k*xm;                %vector de estados

P_k=Cita_k*P_k*Cita_k'+Q_k; %covarianza del error estimado

%%%Etapa de correccion%%%%%%%%
if Altitude(i)~=h01        %ante una medición válida del GPS hacer.....

z_k=[(M+h)*(lat-(Latitude(i)*pi/180)) %formación del vector de medidas
      (N+h)*cos(lat)*(long -(Longitude(i)*pi/180))
      (h-Altitude(i))
      (v_North(i)-Vel_X(i))
      (v_East(i)-Vel_Y(i))
      (v_Down(i)-Vel_Z(i))];

```

```
H_11=[(M+h) 0 0
       0 (N+h)*cos(lat) 0
       0 0 1];
H_1=horzcat(H_11, zeros(3));
H_2=horzcat(zeros(3), eye(3));

H_k=vertcat(H_1,H_2);

S=(H_k*P_k*H_k'+R_k);           %residuo
K_k=P_k*H_k'/S;                 %cálculo de la ganancia de Kalman
xm=xm+K_k*(z_k-H_k*xm);        %corrección de los estados
P_k=(eye(6)-K_k*H_k)*P_k;      %corrección de la covarianza del error

end

end
```