

UCLV
Universidad Central
"Marta Abreu" de Las Villas



FIE
Facultad de
Ingeniería Eléctrica

Material didáctico sobre el tema “Aplicación de la serie de Fourier en la solución de los circuitos eléctricos lineales” para los estudiantes de la carrera Ingeniería Eléctrica

Autor: Jorlis Izquierdo Daniel

Tutores: Dr.C. Ileana Moreno Campdesuñer

MSc. Juan Curbelo Cancio

Junio 2018

Santa Clara
Copyright©UCLV

Este documento es Propiedad Patrimonial de la Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas, y se encuentra depositado en los fondos de la Biblioteca Universitaria “Chiqui Gómez Lubian” subordinada a la Dirección de Información Científico Técnica de la mencionada casa de altos estudios.

Se autoriza su utilización bajo la licencia siguiente:

Atribución- No Comercial- Compartir Igual



Para cualquier información contacte con:

Dirección de Información Científico Técnica. Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas. Carretera a Camajuaní. Km 5½. Santa Clara. Villa Clara. Cuba. CP. 54 830

Teléfonos.: +53 01 42281503-1419

PENSAMIENTO

“Los científicos estudian el mundo tal como es ;los ingenieros crean el mundo que nunca ha sido...”

Theodore Von Karman

DEDICATORIA

Este trabajo va dedicado a mis padres Roberto Rosendo Izquierdo Castro y Luz Marina Daniel Santo, por estar presentes no solo en esta etapa tan importante de mi vida, sino en todo momento ofreciéndome lo mejor y buscando lo mejor para mi persona. A mi hermano Yunaiquer Izquierdo Daniel por estar siempre a mi lado en cada momento ya sean buenos o malos. A todos mis familiares, por motivarme a seguir superándome en la vida.

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por permitirme sonreír antes mis logros que son el resultado de su ayuda, y cuando caigo y me pone a prueba, aprendo de mis errores y me doy cuenta de que me los pone enfrente para que mejore como ser humano y crezca de diversas maneras.

A mis padres por ser la fuente de inspiración para terminar mis estudios.

A mi hermano por su apoyo incondicional ante cualquier circunstancia y estar presente en todo momento de mi vida.

A todos mis familiares por apoyarme en todo momento.

A mis tutores por su contribución y asesoría de este trabajo de diploma.

A todas las personas que de una forma u otra favorecieron el desarrollo de este trabajo.

A todos muchas gracias.

RESUMEN

Es necesario tener en cuenta que el alumno debe apropiarse de los métodos de aprendizaje que le permitan aplicar por sus propios medios, los conocimientos y procedimientos adquiridos en situaciones nuevas o en otras que se deriven de las ya estudiadas; generalizar estos conocimientos, sintetizarlos y expresarlos u orientarlos en la búsqueda de nueva información. Los materiales didácticos forman parte de los recursos que jugarán un papel fundamental en la formación de las futuras generaciones de ingenieros, debido a que en la aplicación del Plan de Estudio E se realiza una reestructuración de las carreras, trayendo consigo una reducción del tiempo docente y por tanto, se deberá prestar mayor atención al estudio independiente. En esta investigación se hace un amplio resumen de la teoría de la "Serie Trigonométrica de Fourier" y su aplicación en la solución de circuitos eléctricos, la cual será de gran ayuda para entender el desarrollo de los ejercicios analizados; los cuales serán resueltos detalladamente de forma analítica y simulada. Para ello se utiliza el programa informático MatLab y su simulador con el objetivo de enfrentar la constante renovación tecnológica en los procesos productivos y el caudal de información científica y técnica que necesita asimilar un profesional para no quedar rezagados, lo que exige haber desarrollado la capacidad de orientarse por sus propios medios en estas fuentes de información y aplicar esa información en la labor que cada uno de ellos lleva a cabo. Esta es la tarea principal de la enseñanza contemporánea y para enfrentarla es necesario fortalecimiento de los conocimientos sobre este tema de fundamental importancia en la solución de futuras problemáticas.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN.....	1
CAPÍTULO 1. Fundamentación teórico – metodológica acerca de la necesidad de los materiales didácticos para orientar el estudio independiente en la disciplina Circuitos Eléctricos del Plan E con apoyo de las TIC.	5
1.1 Bases conceptuales del Plan de estudios E	5
1.1.1 Contenidos para la disciplina CE según Plan de estudios E.....	8
1.1.2 Importancia del tema: “Aplicación de la serie de Fourier en la solución de circuitos eléctricos lineales”	12
1.1.3 Desarrollo del tema “Aplicación de la serie de Fourier en la solución de los circuitos eléctricos lineales” para orientar el estudio independiente de los estudiantes de la carrera Ingeniería Eléctrica según Plan E con apoyo de las TIC. según la evolución de los planes de estudio.	13
1.2 Las TIC en la educación superior	14
1.2.1 Generalidades del Matlab	16
1.2.2 Posibilidades que brinda Simulink para la simulación de circuitos eléctricos.....	17
1.3 Necesidad e importancia de los materiales didácticos como guía del estudio independiente.....	18
1.4 Consideraciones finales del capítulo.....	19

Capítulo 2. Teoría básica fundamental sobre la Aplicación de la serie trigonométrica de Fourier en la solución de circuitos eléctricos lineales.....	20
2.1 Series trigonométricas de Fourier	20
2.2 Consideraciones de simetría.....	26
2.2.1 Simetría par	26
2.2.2 Simetría impar	30
2.2.3 Simetría de media onda.....	32
2.3 Aplicaciones en circuitos	37
2.4 Potencia promedio y valores RMS	39
2.5 Series exponenciales de Fourier	42
2.6 Resumen sobre la serie trigonométrica de Fourier en la solución de circuitos eléctricos lineales	47
CAPÍTULO 3. Ejemplos resueltos.....	50
3.1 Ejercicios resueltos.....	50
CONCLUSIONES.....	81
RECOMENDACIONES	82
BIBLIOGRAFÍA.....	83
ANEXOS.....	85
Anexo 1: Ejercicios propuestos.....	85

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, la educación superior cubana está enfrascada en mantener su modelo de universidad moderna, humanista, universalizada, científica, tecnológica, innovadora, integrada a la sociedad y profundamente comprometida con la construcción de un socialismo próspero y sostenible. Una universidad caracterizada por la formación de valores y por el aseguramiento de la calidad de sus procesos sustantivos, en aras de lograr un egresado que posea cualidades personales, cultura y habilidades profesionales que le permitan desempeñarse con responsabilidad social, y que propicie su educación para toda la vida. Uno de los retos a vencer, para el logro de lo anterior, es contar con diseños curriculares pertinentes que sienten las bases para propiciar un incremento continuo de la calidad y la eficacia en la formación integral de los profesionales del país.

Es por ello que se debe recuperar la riqueza de los medios y materiales didácticos producidos, o incorporados tanto a la práctica académica de los docentes, como al estudio independiente de los estudiantes [1].

Un material didáctico es un instrumento que facilita la enseñanza-aprendizaje, se caracteriza por despertar el interés del estudiante, adaptándose a sus características, por facilitar la labor docente, por ser sencillo, consistente y adecuado a los contenidos; crea lazos entre las diferentes disciplinas, y sobretodo, liberan en los estudiantes la creatividad, la capacidad de observar, comparar y hacer sus propias elaboraciones [2].

En Cuba, los planes de estudio de las carreras universitarias se estructuran horizontalmente por año académico y verticalmente por disciplinas. Cada año académico se organiza en períodos lectivos cuya duración estará determinada por las características de la carrera en cuestión. Las pautas a seguir para la conformación de los planes de estudio debe ser la reducción del número de las disciplinas, integrando los contenidos que tengan un hilo conductor común. Desde la creación del Ministerio de Educación Superior en el año 1976, se ha mantenido como una de sus funciones principales el perfeccionamiento continuo de los planes de estudio, que en determinados momentos históricos adquirió tal significación que condujo a transformaciones curriculares. Estas modificaciones se llevan a cabo con el propósito de fortalecer cada vez más la preparación de la docencia y la investigación para la formación de profesionales con un perfil cada vez más amplio, que sean capaces de resolver con independencia y creatividad los problemas generales y frecuentes que se presenten en las diferentes esferas de la actividad profesional[3].

Desde el año 1977 hasta la fecha, se han aplicado cuatro generaciones de planes de estudio, como resultado de los cambios económicos y sociales que ha experimentado el país en respuesta a las condiciones del contexto internacional en que está inmerso [4].

Actualmente se trabaja en función del diseño del Plan E para las carreras universitarias, que tiene como premisa la reducción de los años de estudio a cuatro, lo cual no significa que se deba compactar el Plan D vigente, sino que debe verse como un nuevo enfoque en el proceso de enseñanza aprendizaje, en el que prime la autogestión del aprendizaje con el apoyo de las TIC y la guía de los docentes.

La carrera de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Central “Marta Abreu” de las Villas, siguiendo la propuesta de reestructuración de carreras, implementada por el Ministerio de Educación Superior (MES), se encuentra en un proceso de ordenación, a través del cual diversas asignaturas reducirán sus temarios y cantidad de horas de clases. Una condición muy importante para lograr este proceso es garantizar la interrelación que debe existir entre la teoría y la práctica, y aumentar el empleo de los materiales didácticos. Dentro de estas asignaturas se encuentran las pertenecientes a la disciplina Circuitos Eléctricos (CE), la cual es la base de las carreras Ingeniería Eléctrica, Ingeniería en Telecomunicaciones y Electrónica e Ingeniería en Automática que se estudian en la Facultad de Ingeniería Eléctrica ya que la mayoría de las materias posteriores dependen de los conocimientos adquiridos en la misma [4].

El tema “Aplicaciones de la serie de Fourier en la solución de circuitos eléctricos lineales” es un tema en el cual debido a la disminución de su tiempo docente, se hace necesario el aumento de las horas de estudio independiente de los estudiantes. Por todo lo planteado anteriormente, el problema científico a resolver es: ¿Cómo facilitar el estudio independiente sobre el tema Aplicación de la Serie de Fourier en la solución de circuitos eléctricos lineales según Plan E a los estudiantes de la carrera de Ingeniería Eléctrica apoyándose en las TIC?

Para solucionar el problema científico se plantea el siguiente objetivo general:

- Elaborar un material didáctico sobre el tema “Aplicación de la serie de Fourier en la solución de circuitos eléctricos lineales” para orientar el estudio independiente de los estudiantes de la carrera Ingeniería Eléctrica Según Plan E con apoyo de las TIC

Para cumplir con dicho objetivo se plantean los objetivos específicos siguientes:

1. Establecer la fundamentación teórico – metodológica acerca de la necesidad de los materiales didácticos para orientar el estudio independiente en la disciplina Circuitos Eléctricos del Plan E con apoyo de las TIC.

2. Describir la teoría básica fundamental sobre la Aplicación de la serie trigonométrica de Fourier en la solución de circuitos eléctricos lineales.
3. Solucionar los ejercicios seleccionados de forma teórica y mediante simulación en MatLab.

Para desarrollar los objetivos planteados, se definen las siguientes tareas científicas:

- Búsqueda y estudio de la bibliografía relacionada con el tema Aplicación de la serie de Fourier en la solución de los circuitos eléctricos lineales.
- Estudio de los contenidos fundamentales acerca del empleo del programa MatLab y su simulador Simulink, que permitan elevar los conocimientos en el área de la programación y simulación.
- Selección de manera adecuada y coherente, ejercicios que respondan a los objetivos del tema Aplicación de la serie de Fourier en la solución de los circuitos eléctricos lineales de la asignatura CE II en el plan de estudios E.
- Solución de los ejercicios seleccionados, verificando la solución de manera parcial o total con el MatLab y llevar a cabo la simulación de los circuitos, empleando el simulador Simulink.
- Elaboración, como resultado final del trabajo, un material didáctico que contenga la solución analítica de los ejercicios seleccionados, la solución parcial o total con ayuda del MatLab y los resultados de la simulación junto a los archivos.mdl correspondientes.
- Organización adecuada del informe de tesis, basándose en un diseño metodológico estratégico según la didáctica de la asignatura CE II Plan E y las orientaciones y normas aprobadas por el MES.

Este trabajo es un material que contiene la teoría fundamental sobre el tema “la Aplicación de la serie trigonométrica de Fourier en la solución de circuitos eléctricos lineales”, ejercicios resueltos y además orienta a los estudiantes con ejercicios propuestos, por lo que facilitará en gran medida el estudio independiente, vinculando los conocimientos analíticos y los del Simulink, los cuales son de gran utilidad en la práctica.

El trabajo escrito cuenta con una introducción, tres capítulos, conclusiones, recomendaciones y bibliografía.

En el primer capítulo se describe la fundamentación teórico–metodológica acerca de la necesidad de los materiales didácticos para orientar el estudio independiente en la disciplina Circuitos Eléctricos con apoyo de las TIC.

En el segundo capítulo se describe la teoría básica fundamental de la Serie Trigonométrica de Fourier, desarrollando por epígrafes cada uno de sus contenidos principales, de acuerdo al plan de estudios E.

En el tercer capítulo se muestran las soluciones tanto analíticas como simuladas de los diferentes ejercicios y se proponen un conjunto de problemas para ejercitar los conocimientos adquiridos.

Con la confección de este trabajo de diploma se obtendrán diferentes aportes teniendo en cuenta el desarrollo tecnológico actual.

Conveniencia: Este trabajo de diploma constituye una fuente de información necesaria para el estudio independiente de la Aplicación de la serie trigonométrica de Fourier en la solución de circuitos eléctricos lineales con todas las exigencias debidas para el uso académico y docente.

Relevancia Social: Con la utilización de este material, los estudiantes saldrán con una mejor preparación en el tema, lo que redundará en un profesional más capaz.

Implicaciones Prácticas: Se dispone de un material didáctico que servirá de guía y de base para el estudio independiente así como para futuras investigaciones del tema en cuestión además de fuente bibliográfica para enriquecer el desarrollo de otros materiales.

Valor Teórico: En el trabajo se hace una sistematización de la teoría acerca de la serie de Fourier y su aplicación en la solución de circuitos eléctricos lineales.

Utilidad Metodológica: Esta investigación servirá de guía metodológica para el desarrollo de otros materiales didácticos en la carrera.

CAPÍTULO 1. Fundamentación teórico – metodológica acerca de la necesidad de los materiales didácticos para orientar el estudio independiente en la disciplina Circuitos Eléctricos del Plan E con apoyo de las TIC.

En este capítulo se presenta la fundamentación teórico-metodológica acerca de la necesidad de utilizar materiales didácticos para apoyar el estudio independiente de los estudiantes de la carrera Ingeniería Eléctrica, la cual viene dada por las generalidades del Plan de estudio E y la reestructuración que va a llevarse a cabo en la disciplina Circuitos Eléctricos en cuanto a cantidad de horas y temas a impartir debido a la implementación del nuevo Plan de estudio. Se hará referencia al estudio independiente como pilar fundamental en el proceso de aprendizaje.

1.1 Bases conceptuales del Plan de estudios E

La experiencia de más de 7 años de aplicación de los planes de estudio “D” vigentes, con un modelo de formación de perfil amplio en el pregrado, permitió elevar la calidad del proceso de formación de los profesionales y trabajar en el logro de una colaboración más estrecha con el sector de la producción y los servicios, en aras de conseguir una mayor pertinencia de las carreras. En este nuevo nivel de desarrollo alcanzado, se han detectado una serie de limitaciones que no están en correspondencia con la realidad actual del país y del entorno mundial, entre las que se destacan: la duración de las carreras que retrasa el ciclo de formación y las encarece, disminuyendo además la posibilidad de ofrecer una respuesta más rápida a la demanda laboral, y el poco aprovechamiento de la flexibilidad de los actuales planes de estudio, debido fundamentalmente a la escasa cultura institucional que se posee en este sentido; entre otras [4].

Por tanto, el Plan de estudios E, teniendo en cuenta el sistema de formación continua de los profesionales cubanos y el concepto de formación integral como premisas fundamentales para su diseño, se plantea como bases conceptuales las siguientes:

1. El perfeccionamiento del modelo de formación de perfil amplio: Se trata de preparar con solidez al profesional en los aspectos que están en la base de toda su actuación profesional, lo que asegura el dominio de los modos de actuación con la amplitud requerida. Hace realidad el sistema de formación continua, de acuerdo con una armónica conjugación de las necesidades sociales y personales. Reducir el tiempo de duración de las carreras y como resultado formar en menos tiempo los profesionales que la sociedad necesita y demanda.

2. Mayor articulación del pregrado y el posgrado: Se deben adecuar sistemáticamente los programas de formación de posgrado teniendo en cuenta las necesidades socioeconómicas locales, territoriales y nacionales.
3. Lograr una efectiva flexibilidad curricular: La flexibilidad curricular se debe manifestar fundamentalmente por la existencia de tres tipos de contenidos curriculares (base, propio y optativo/electivo). Se trata de la actualización permanente del plan de estudio de la carrera y su adaptación a las necesidades del país, del territorio, al desarrollo del claustro y a los intereses de los estudiantes.
 - Contenidos curriculares de carácter nacional (currículo base): Se determinan centralmente por las Comisiones Nacionales de Carreras, de obligatorio cumplimiento para todas las universidades en que se desarrolla la carrera.
 - Contenidos curriculares propios (currículo propio): Se deciden por cada universidad. Incluye contenidos dirigidos a satisfacer necesidades específicas del desarrollo regional. Son de obligatorio cumplimiento para todos los estudiantes que cursan la carrera en dicho centro de educación superior.
 - Contenidos curriculares optativos/electivos (currículo optativo/electivo): Se ofertan por cada universidad, y son elegidos por los estudiantes. Sirven como complemento para su formación integral, con lo cual se da respuesta también a legítimos intereses de desarrollo personal de cada estudiante. Pueden seleccionarse asignaturas que se imparten en otras carreras.
4. Mayor grado de racionalidad en el diseño de los planes de estudio: Mediante la elaboración de programas de disciplinas y de asignaturas comunes para diferentes carreras, siempre que sea posible.
5. Mayor nivel de esencialidad en los contenidos de las disciplinas: Este aspecto se logra mediante la selección de aquellos contenidos que son fundamentales para el logro de los objetivos previstos en la carrera. El proceso de integración de los contenidos científicos de diferentes disciplinas crea la necesidad de incluir enfoques intra, inter y transdisciplinarios, lo que evitaría la reiteración innecesaria de conocimientos.
6. Lograr un equilibrio adecuado entre las actividades académicas, laborales e investigativas: El componente investigativo estará presente en las actividades curriculares y extracurriculares, fomentando en los estudiantes la independencia, la creatividad y la búsqueda permanente del conocimiento. Es importante que en la actividad académica esté presente el vínculo teoría-práctica, es decir, que los estudiantes aprendan a aplicar los conocimientos en situaciones prácticas, a manejar instrumentos y equipo, así como a realizar prácticas de laboratorio sobre bases teóricas para el desarrollo de habilidades profesionales necesarias en su desempeño futuro. Se han de crear espacios propicios que favorezcan la motivación por la actividad profesional.

7. El fortalecimiento de la formación humanista en todas las carreras: Se aboga por la formación integral del futuro profesional, por instruir su pensamiento y educar sus sentimientos, de manera que pueda participar activa y responsablemente en el desarrollo social sostenible de su país. Es esta la concepción martiana de preparar al hombre para la vida y la fidelista de desarrollar desde muy temprano la personalidad humana.
8. Potenciar el protagonismo del estudiante en su proceso de formación: Orientar el proceso de formación más al aprendizaje que a la enseñanza, a priorizar el cómo y no el qué, de manera que se eleve el protagonismo del estudiante y se favorezca su independencia cognoscitiva y creatividad.
9. Potenciar el tiempo de autopreparación del estudiante: Se debe tener en cuenta que el proceso de aprendizaje no se restringe a los tiempos de actividades académicas presenciales. Se torna necesaria la creación de espacios de tiempo en el currículo para la búsqueda, reflexión, interiorización y consolidación de los conocimientos por parte de los estudiantes, como vía para fomentar su autoaprendizaje.
10. Lograr transformaciones cualitativas en el proceso de formación como consecuencia de un amplio y generalizado empleo de las TIC: El uso de las TIC rompe con el concepto del profesor como fuente principal del conocimiento, pues deja de ser la única referencia que tiene el estudiante para el acceso al saber. Se debe lograr el empleo generalizado de software profesionales, plataformas interactivas y un acceso eficiente a fuentes confiables de información en la red de redes, entre otras.
11. El fortalecimiento de los vínculos de las universidades con los organismos empleadores y todas las instancias que sean fuentes de empleo: La universidad debe tener pertinencia social, por eso es primordial que en el proyecto curricular se refuerce el vínculo universidad-sociedad. Debe lograrse una mayor pertinencia del currículo y contribuir mediante un desarrollo eficaz de la práctica laboral, a la preparación de un egresado capaz de resolver los problemas más generales de la profesión en el eslabón de base. Por ello la necesaria integración de los organismos empleadores a los niveles organizativos de la carrera y a su concepción curricular.
12. Lograr transformaciones en la evaluación del aprendizaje: La tarea de evaluar debe considerarse en su carácter cualitativo y formativo. Esto supone integrarla al proceso pedagógico, es decir, realizarla de modo permanente durante las actividades de aprendizaje utilizando formas no tradicionales de evaluación y, además, dando a conocer a los estudiantes cuáles son los criterios que se utilizan para valorar su desempeño desde los objetivos de la clase, de modo que esto lo ayude a revisar lo que hace y a desarrollar su capacidad de autoevaluación, su espíritu crítico y autocrítico.

13. Evaluar y certificar conocimientos y habilidades profesionales no contempladas en los planes de estudio y que se consideren requisitos indispensables para obtener la titulación, ofreciendo los niveles de ayuda necesarios.

Las bases conceptuales del Plan E son precisas y apuntan hacia la necesidad de fortalecer el proceso de formación del profesional universitario, en correspondencia con las exigencias actuales, mediante un proceso docente educativo más flexible, donde los estudiantes en menor tiempo de formación, puedan tener un amplio acceso al saber mediante la búsqueda, reflexión, interiorización y consolidación de los conocimientos, como vía para fomentar su autoaprendizaje, así como la creación de espacios propicios que favorezcan la motivación por la actividad profesional [3].

1.1.1 Contenidos para la disciplina CE según Plan de estudios E

La disciplina Circuitos Eléctricos constituye uno de los pilares principales de la carrera, ya que en ella se estudia el análisis de los circuitos lineales en tres direcciones: análisis de circuitos resistivos, análisis en el dominio del tiempo y análisis en el dominio de la frecuencia. Para ser consecuente con el Modelo del Profesional y con las bases conceptuales del Plan de estudios E ya abordadas anteriormente, se hace necesario precisar los contenidos de la disciplina CE, con sus correspondientes conocimientos esenciales y habilidades a adquirir. A continuación se ilustran dichos contenidos y las principales habilidades a dominar, los cuales deben ser de pleno dominio por parte de los profesores y estudiantes de la carrera Ingeniería Eléctrica.

Conocimientos esenciales a adquirir:

- ❖ Conceptos básicos de circuito eléctrico, clasificación, componentes, elementos reales y modelos, corriente, tensión y potencia, resistencia y conductancia.
- ❖ Fuentes de tensión y de corriente, ideales y reales, dependientes e independientes. Leyes de Ohm y Kirchhoff. Propiedades de los circuitos eléctricos lineales.
- ❖ Transformaciones equivalentes en circuitos resistivos conectados en serie, paralelo. Divisores de tensión y de corriente. Transformaciones de fuentes reales.
- ❖ Métodos generales para el análisis de circuitos eléctricos. Teoremas de los circuitos lineales: Superposición, Thevenin, Norton. Condición de máxima transferencia de potencia.
- ❖ Capacitores e inductores. Propiedades de los elementos almacenadores ideales. Método clásico para el cálculo de circuitos de primer y segundo orden simples con estímulos de corriente directa (CD), frecuencias naturales, propiedades de la respuesta transitoria.
- ❖ Análisis de circuitos eléctricos con estímulos periódicos sinusoidales. Definiciones básicas del método fasorial, diagramas fasoriales. Leyes de Ohm y Kirchhoff en forma

compleja para elementos R, L y C, impedancia, admitancia, reactancia, susceptancia, carácter de los circuitos, dependencia de la frecuencia. Transformaciones, reducción a circuitos equivalentes, teoremas y métodos generales en régimen de corriente alterna (CA).

- ❖ Potencia activa, reactiva, aparente y aparente compleja. Factor de potencia. Mejoramiento del factor de potencia en la industria. Máxima transferencia de potencia.
- ❖ Definiciones básicas sobre los circuitos trifásicos. Circuitos trifásicos conectados en delta y en estrella, balanceados y desbalanceados. Cargas trifásicas en paralelo, balanceadas y desbalanceadas. Transformaciones recíprocas delta-estrella. Método de las componentes simétricas y sus propiedades para los circuitos trifásicos. Potencias en circuitos trifásicos.
- ❖ Análisis de circuitos sencillos con inductancia mutua. Circuitos acoplados magnéticamente.
- ❖ Análisis de circuitos en el dominio de la frecuencia compleja. Resonancia en circuitos eléctricos, propiedades de los circuitos resonantes serie, paralelo y serie-paralelo. Factor de calidad y ancho de banda.
- ❖ Método operacional. Leyes de Ohm y Kirchhoff en forma operacional, circuito operacional equivalente. Teoremas y métodos de análisis de los circuitos lineales operacionalmente en estado estable y transitorio.
- ❖ Análisis de circuitos monofásicos y trifásicos estimulados por ondas no sinusoidales periódicas y estímulos aperiódicos (Análisis de Fourier). Espectros de las ondas periódicas no sinusoidales. Valor eficaz. Potencia en régimen periódico no sinusoidal. Factor de potencia. Propiedades de los armónicos en circuitos trifásicos. El THD (Distorsión Armónica Total)
- ❖ Estudio de circuitos eléctricos no lineales.
- ❖ Funciones básicas de los elementos que componen el sistema de medición. Esquemas funcionales y ecuaciones de transferencia.
- ❖ Características estáticas y dinámicas de los elementos y del sistema de medición. Determinación de las variables y modelación del sistema.
- ❖ Nociones básicas sobre metrología. Conservación y transmisión de las unidades patrones de magnitudes físicas.
- ❖ Incertidumbre de las mediciones y medios de medición. Formas de expresar y normalizar los errores. Evaluación del error. Errores sistemáticos y aleatorios. Verificación de instrumentos.
- ❖ Convertidores de medición resistivos, inductivos y capacitivos. Principio físico de funcionamiento. Características metrológicas.

- ❖ Instrumentos de medición electrónicos, analógicos, digitales y ópticos. Procesamiento digital de señales. Puentes. Potenciómetros Principio de operación y características metrológicas.
- ❖ Medición de tensión e intensidad de corriente en corriente directa(CD) y corriente alterna(CA).
- ❖ Ampliación del campo de medición de los instrumentos. Conectar, escoger el campo de medición y realizar la lectura con instrumentos analógicos y digitales.
- ❖ Medición de resistencia eléctrica. Resistencias altas, medias y bajas. Medición de inductancia. Factor de calidad. Medición de capacitancia. Factor de pérdida.
- ❖ Medición de potencia en circuitos de CD. Medición de potencias activa y reactiva en circuitos monofásicos y trifásicos.
- ❖ Medición de energía en circuitos monofásicos y trifásicos. Contadores de energía de inducción y electrónicos. Determinación de la demanda máxima. Analizadores de carga. Medición de ángulo de fase y factor de potencia. Medición de frecuencia.
- ❖ Transformadores de medición, principio de operación, conexiones, medidas de seguridad, clase de precisión. Conexiones de instrumentos a través de transformadores en circuitos trifásicos.
- ❖ Sistemas de adquisición de datos. Medición de magnitudes no eléctricas. Termógrafos. Analizadores de redes. Fundamentos de operación.
- ❖ Sistemas automáticos de medición. Instrumentos analizadores y programables.
- ❖ Introducción en la medición digital y el procesamiento digital de las señales en las mediciones de parámetros eléctricos periódicos y no periódicos.

Habilidades principales a dominar:

1. Aplicar las leyes de Ohm y Kirchhoff, los divisores de tensión y de corriente, las simplificaciones y transformaciones de las conexiones serie, paralelo, serie-paralelo, delta y estrella; incluido el retorno al circuito original cuando sea necesario; así como las transformaciones de fuentes al cálculo de tensión, corrientes y potencias en circuitos lineales.
2. Aplicar los métodos generales, así como los teoremas de Thevenin, Norton y de Superposición, al análisis de circuitos lineales.
3. Calcular en el dominio del tiempo, mediante el método clásico, e interpretar físicamente, procesos transitorios en circuitos lineales simples de primer orden y segundo orden con elementos en serie o paralelo, a estímulos de corriente directa y ondas rectangulares.
4. Aplicar el método fasorial al análisis de circuitos de corriente alterna monofásicos para calcular impedancias y admitancias, trazar diagramas fasoriales, aplicar los métodos generales de análisis y los teoremas de Thevenin, Norton, Superposición y Máxima transferencia de potencia.

5. Analizar circuitos trifásicos desbalanceados, en estado estable, en régimen de corriente alterna.
6. Determinar las componentes simétricas de un sistema de voltajes trifásicos desbalanceados y resolver circuitos con carga trifásica balanceada, conectada en estrella o en delta, alimentada por el sistema de voltajes desbalanceados, aplicando el método de las componentes simétricas.
7. Utilizar los métodos básicos de análisis de circuitos lineales en el cálculo de circuitos con inductancia mutua y aplicar las relaciones del transformador ideal y del transformador lineal.
8. Utilizar los métodos básicos de análisis de los circuitos magnéticos.
9. Calcular funciones transferenciales en función de la frecuencia compleja, identificar los polos y ceros y obtener la respuesta de frecuencia en forma aproximada a partir de la propia función.
10. Describir el comportamiento de filtros sencillos (activos y pasivos). Aplicaciones prácticas.
11. Aplicar el concepto y las propiedades de los circuitos resonantes al análisis de redes RLC serie, paralelo y serie - paralelo.
12. Aplicar la transformada de Laplace al cálculo de la respuesta en el tiempo y, fundamentalmente, al cálculo de funciones de redes en circuitos lineales.
13. Aplicar el desarrollo en series de Fourier y el teorema de la Superposición al cálculo de circuitos monofásicos en régimen periódico no sinusoidal.
14. Aplicar programas de computación al análisis de circuitos eléctricos de baja y mediana complejidad, incluyendo la interpretación de los resultados.
15. Seleccionar, conectar y realizar mediciones con instrumentos analógicos y digitales para medir variables en circuitos eléctricos teniendo en cuenta las medidas de seguridad y protección.
16. Evaluar los principales errores que aparecen en las mediciones digitales y el procesamiento digital de las señales.
17. Utilizar, analizar e interpretar la información científico-técnica relacionada con dispositivos eléctricos y circuitos eléctricos. (manuales, especificaciones, artículos, libros y otros), en lengua materna y en inglés.
18. Expresar con un lenguaje técnico riguroso, concreto, preciso, de forma oral y escrita, los conocimientos de circuitos eléctricos.
19. Elaborar informes técnicos utilizando las normas técnicas orientadas para este fin, así como observar las reglas establecidas para la protección e higiene del trabajo.
20. Adquirir de forma independiente conocimientos relacionados con la disciplina.
21. Interpretar, analizar y resolver adecuadamente problemas generales y frecuentes de la profesión, fundamentando coherentemente sus razonamientos, basados en principios físicos y matemáticos.

22. Montar y medir circuitos electrónicos teniendo en cuenta las medidas de seguridad y protección.
23. Adquirir autodisciplina, caracterizada por la puntualidad, normas de comportamiento adecuadas, cumplimiento y sentido de la responsabilidad individual y colectiva [1].

Como se aprecia, estos contenidos están ordenados de manera gradual y ascendente, con una adecuada secuencia lógica y pedagógica en aras de lograr un conocimiento asequible por los estudiantes. Para lograr un mayor nivel de esencialidad en los contenidos de las disciplinas se seleccionaron estos contenidos que son fundamentales para el logro de los objetivos previstos en la carrera. Esto debe contribuir a la disminución de asignaturas y al adecuado balance entre las horas presenciales y el tiempo de autopreparación de los estudiantes, ya que el proceso de aprendizaje no se restringe a los tiempos de las actividades académicas presenciales.

Con esta investigación se pretende profundizar en las aplicaciones de la serie de Fourier en la solución de circuitos eléctricos lineales.

1.1.2 Importancia del tema: “Aplicación de la serie de Fourier en la solución de circuitos eléctricos lineales”

Algunas funciones, como el diente de sierra o la onda cuadrada, se definen a tramos en un intervalo principal, que se repetirá periódicamente. Aunque estas expresiones satisfacen la forma de onda, si se las aplican como función de entrada a un circuito, no permiten determinar la respuesta del mismo. Sin embargo, si a una función periódica se la expresa como suma de funciones sinusoidales, las respuestas de los circuitos antes mencionados se podrán determinar utilizando el principio de superposición. La serie de Fourier es la herramienta que permite expresar funciones periódicas como una serie trigonométrica.

La serie de Fourier permite tratar cualquier función periódica como una suma finita o infinita de funciones sinusoidales relacionadas armónicamente. En este trabajo se presentará la aplicación de esta herramienta para hallar soluciones estacionarias de circuitos con corriente alterna [5].

Este método es práctico a la hora de resolver circuitos, ya que se puede hacer de un problema complejo, con corrientes no sinusoidales, un ejercicio más simple, donde se tiene tantos circuitos como valores de n se tomen. La ventaja es que con pocos términos se llega a un resultado de gran exactitud, además de que la serie de Fourier puede utilizarse para representar gran cantidad de funciones: tanto las que están definidas solo en un intervalo como las que son periódicas. Las series de Fourier muestran el espectro de una señal.

El espectro está compuesto por las amplitudes y las fases de las armónicas en función de la frecuencia. Al proporcionar el espectro de la señal $f(t)$, las series de Fourier son de utilidad para la identificación de las características de la señal. Muestra cuáles frecuencias desempeñan un resultado importante a la salida y cuáles no. Por ejemplo, los sonidos audibles tienen componentes importantes en el intervalo de frecuencias de 20 Hz a 15 kHz, en tanto que las señales de luz visible varían de 105 GHz a 106 GHz [6].

La aplicación de la serie de Fourier en la solución de circuitos eléctricos lineales es usada en muchas ramas de la ingeniería, además de ser una herramienta sumamente útil en la teoría matemática abstracta. Áreas de aplicación incluyen análisis vibratorio, acústica, óptica, procesamiento de imágenes y señales, y compresión de datos. En ingeniería, para el caso de los sistemas de telecomunicaciones, y a través del uso de los componentes espectrales de frecuencia de una señal dada, se puede optimizar el diseño de un sistema para la señal portadora del mismo. Además cabe destacar su importancia en los análisis del comportamiento armónico de una señal, en el reforzamiento de señales y la generación de formas de onda de corriente o tensión eléctrica por medio de la superposición de sinusoides generadas por osciladores electrónicos de amplitud variable cuyas frecuencias ya están determinadas.

1.1.3 Desarrollo del tema “Aplicación de la serie de Fourier en la solución de los circuitos eléctricos lineales” para orientar el estudio independiente de los estudiantes de la carrera Ingeniería Eléctrica según Plan E con apoyo de las TIC. según la evolución de los planes de estudio.

El tema “Aplicación de la serie de Fourier en la solución de los circuitos eléctricos lineales” ha estado incluido en todos los planes de estudio que se han elaborado hasta el momento por la importancia que tiene en la formación de ingenieros de perfil eléctrico, la diferencia fundamental ha estado en la cantidad de horas presenciales que se le han destinado, las cuales han ido disminuyendo a medida que han ido perfeccionándose dichos planes, en busca de un mayor protagonismo del estudiante en su propio aprendizaje.

Con respecto al plan de estudios D hay una reducción del número de horas en la disciplina tal como se muestra en la tabla 1.1, donde se aprecia una disminución del 35,4 % del tiempo asignado.

Tabla 1.1 Distribución de horas para los planes de estudios D y E de la carrera IE.

Carrera Asignatura	Ingeniería Eléctrica	
	D	E
CE I	64	60
CE II	64	64
CE III	64	
Total	192	124
Diferencia (h)/%	68/35,4	

En el plan de estudios D vigente, el tema en cuestión se estudia en CE III y para ello se destinan 4 horas. Sin embargo, para el Plan de estudios E, la propuesta se mantiene en 4 horas (una conferencia y una clase práctica) para el tema pero en la asignatura CE II que incluye más temas en mucho menor tiempo que en el Plan D.

1.2 Las TIC en la educación superior

Los seres vivos siempre han necesitado comunicarse y los humanos han desarrollado y perfeccionado las formas de hacerlo. Inventaron el lenguaje, aprendieron a escribirlo, lograron la forma de reproducir lo escrito, aprendieron a fijar las imágenes y a darles movimiento. Y todos estos procesos los han desarrollado aun mas ,a partir de la década de los 80 del siglo XX con la aparición y auge de la computación.

En la actualidad el vertiginoso avance de la tecnología de la informática y las comunicaciones (TIC) y su influencia en todas las esferas de la sociedad ha permitido no solo el incremento en los resultados de la ciencia , la producción y los servicios sino que también se refleja en la forma de actuar y pensar de los individuos , donde lo logrado hasta hoy era catalogado como inalcanzable, utópico y , a veces , imposible imaginarlo [7].

Ha sido una preocupación e interés del Ministerio de educación de Cuba, llevar a todo sus centros universitarios, los nuevos adelantos de las técnicas más actualizadas de la

información y la comunicación, al servicio de profesores y estudiante, con el objetivo de lograr un egresado con mente abierta y gran creatividad capaz de enfrentar los retos que ofrece la sociedad de estos tiempos.

Existen diversas formas de definir qué se entiende por Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC). En todo caso el nombre dado a este tipo de tecnología está seriamente marcado por aquellos que la han desarrollado, los tecnólogos. Es por ello que la definición más acertada es aquella que expresa que las tecnologías de la información y la comunicación son:

El conjunto de procesos y productos derivados de las nuevas herramientas (hardware y software), soportes de la información y canales de comunicación relacionados con el almacenamiento, procesamiento y transmisión digitalizados de la información [7].

En la educación superior como en muchas otras actividades el uso de las TIC ha venido dictado por la evolución de estas. Las TIC se han aplicado a la educación desde hace bastante tiempo, pero fue la aparición de las computadoras personales a comienzo de los años 80 el hito que permitió que la informática fuera un recurso barato y con grandes prestaciones, accesible a todos. Las mejoras continuas del hardware y otras tecnologías han extendido y acelerado su uso. Un aspecto importante fue el desarrollo de mejores interfaces de usuario y gráficos. Últimamente han tenido gran impacto multimedia e internet. Asimismo, esta incorporación de las comunicaciones hace prever nuevas posibilidades y desarrollos en un futuro próximo.

Específicamente en la Universidad, las TIC han revolucionado el método de aprendizaje, complementando la educación impartida a través de libros y revistas escolares, facilitando el acceso de los estudiantes a una mayor cantidad de información y fomentando la creatividad y la iniciativa de los mismos.

Una posibilidad que ofrece la tecnología es experimentar con procesos que en condiciones normales sería difícil o incluso imposible hacerlo. La simulación es un uso de TIC que están aprovechando los profesores para enriquecer el aprendizaje de sus estudiantes. En varias asignaturas de los programas se encuentran propuestas pedagógicas muy interesantes que se apoyan en los simuladores para que los estudiantes, a través de la simulación, conozcan un escenario empresarial y aprendan a tomar decisiones en él. Además, se encuentran que estas propuestas no se basan solo en el uso de simuladores, sino que integran el uso de otras herramientas TIC que les permiten a los estudiantes hacer procesos de análisis, organización y presentación de información [7].

1.2.1 Generalidades del Matlab

MATLAB es un lenguaje de programación que presenta varias características que lo hacen, hoy en día, uno de los más usados en diversas ramas de la ciencia en especialmente en ingeniería. El Matlab es un paquete de software profesional útil para aplicaciones técnicas. Las potencialidades del Matlab lo ubican como esencial para el diseño, modelado y simulación de problemas de ingeniería.

MATLAB, escrito en C, se comunica con el usuario a través de una ventana con un prompt, similar a como se presenta el sistema operativo DOS (Command Window), desde donde se definen variables y se utilizan subprogramas o funciones tanto predefinidas como definidas por el mismo usuario. Una de las capacidades más atractivas es la de realizar una amplia variedad de gráficos en dos y tres dimensiones. MATLAB tiene también un lenguaje de programación propio. Permite el uso de diversos tipos de variables como matrices de reales, complejos o caracteres sin la necesidad de hacer una declaración previa lo que lo hace muy versátil a la hora de hacer programas en que el número de variables a utilizar es incierto. Posee altas capacidades de manejo gráfico en ya sea en dos o en tres dimensiones lo que permite a un usuario relativamente diestro un despliegue claro de la información. También incluye herramientas de interfaz gráfica con el usuario. Una de las grandes fortalezas de Matlab y una de las razones que lo hace tan utilizado por sobre otros lenguajes es su alta capacidad gráfica. MATLAB integra análisis numérico, cálculo matricial, proceso de señal y visualización gráfica en un entorno completo [8].

Además, es un entorno de computación y desarrollo de aplicaciones totalmente integrado orientado para llevar a cabo proyectos en donde se encuentren implicados elevados cálculos matemáticos y la visualización gráfica de los mismos. MATLAB integra análisis numérico, cálculo matricial, proceso de señal y visualización gráfica en un entorno completo donde los problemas y sus soluciones son expresados del mismo modo en que se escribirían tradicionalmente, sin necesidad de hacer uso de la programación tradicional.

En los medios universitarios, MATLAB se ha convertido en una herramienta básica, tanto para los profesionales e investigadores de centros docentes, como una importante herramienta para el dictado de cursos universitarios, tales como sistemas e ingeniería de control, álgebra lineal, proceso digital de imagen, señal, etc. En el mundo industrial MATLAB está siendo utilizado como herramienta de investigación para la resolución de complejos problemas planteados en la realización y aplicación de modelos matemáticos en ingeniería. Los usos más característicos de la herramienta se encuentran en áreas de computación y cálculo numérico tradicional, prototipaje algorítmico, teoría de control automático, estadística, análisis de series temporales para el proceso digital de señal [9].

Con Matlab se pueden abordar tantos problemas de cálculo elemental, de forma interactiva, como realizar simulaciones numéricas de problemas extremadamente complejos, utilizándolo como lenguaje de programación. Incorpora gran cantidad de funciones predefinidas que ahorran un considerable esfuerzo de programación. Además de tener grandes posibilidades gráficas ya que se obtienen fácilmente representaciones e interpretaciones gráficas de los resultados de los cálculos realizados, mejorando sensiblemente la calidad del post-proceso de la información.

MATLAB tiene también un lenguaje de programación propio. Es un gran programa de cálculo técnico y científico. Para ciertas operaciones es muy rápido, cuando puede ejecutar sus funciones en código nativo con los tamaños más adecuados para aprovechar sus capacidades de vectorización. En otras aplicaciones resulta bastante más lento que el código equivalente desarrollado en C/C++ o Fortran. En cualquier caso, el lenguaje de programación de MATLAB siempre es una magnífica herramienta de alto nivel para desarrollar aplicaciones técnicas, fácil de utilizar y que aumenta significativamente la productividad de los programadores respecto a otros entornos de desarrollo. MATLAB dispone de un código básico y de varias librerías especializadas (toolboxes) [9].

Dentro de sus aplicaciones más elementales en la rama de la ingeniería se tiene: El cálculo numérico tradicional, la teoría del control automático, estadística y análisis de series temporales para el proceso digital de señales.

1.2.2 Posibilidades que brinda Simulink para la simulación de circuitos eléctricos

Una mención especial merece un toolbox que permite una representación en diagrama de bloques para sistemas dinámicos orientado a la simulación, este es SIMULINK. Este permite la simulación de complejos sistemas donde la interconexión de bloques básicos o no tan básicos se hace a través de la conexión de líneas que llevan las señales del tiempo. Simulink se utiliza en general para el diseño y prueba de diversos sistemas, así como para el diseño, ajuste y prueba de controladores para procesos. La capacidad de integración de Simulink con MATLAB, le permite incorporar algoritmos de este lenguaje dentro de los modelos Simulink, exportar los resultados de la simulación a MATLAB para así poder llevar a cabo más análisis. [10].

Mediante los diagramas de bloques de Simulink se puede entender el comportamiento de diferentes sistemas por medio de su representación gráfica, que esencialmente consiste de representaciones de los componentes individuales del sistema, a través de los diferentes

bloques que se encuentran en la biblioteca, junto con un flujo de señales entre estos componentes.

Para la simulación de circuitos eléctricos Simulink es un entorno de programación visual que facilita el diseño de diferentes circuitos. Consta de una amplia biblioteca donde se pueden encontrar todo tipo de bloques que representan los diferentes elementos de circuitos como: resistor, fuente de voltaje, fuente de corriente, capacitor, inductor, etc [8].

1.3 Necesidad e importancia de los materiales didácticos como guía del estudio independiente

Los materiales didácticos son un conjunto de informaciones, orientaciones, actividades y propuestas que el sistema a distancia elabora para guiar al alumno en su proceso de aprendizaje y que están contenidos en un determinado soporte (impreso, audiovisual, informático). Los materiales cumplen una función muy importante, pues tienen una finalidad de enseñanza y expresan una propuesta pedagógica. Enseñan en tanto guían el aprendizaje de los alumnos, presentando y graduando los contenidos y las actividades, transmitiendo información actualizada sobre la temática del curso, planteando problemas, alentando la formulación de preguntas y el debate del grupo. Incrementan la motivación de nuestros alumnos con desarrollos serios, interesantes y atractivos. Pero, también, deberán proveer al alumno de una estructura organizativa capaz de hacerle sentir que está haciendo un curso, no solo leyendo un material. Nos referimos aquí a la estructura que vincula los conocimientos previos con los nuevos aportes y que establece o ayuda a establecer las futuras conexiones de los mismos apoyando de este modo al alumno para que teja la trama de relaciones necesarias para el aprendizaje[11].

Los materiales educativos deben ser un apoyo para el docente y no su reemplazo. Las guías y manuales de trabajo son herramientas que permiten aproximarse al conocimiento y que facilitan la construcción de los conceptos, pero no deben sustituir los procesos cognitivos de los estudiantes. En síntesis, los sistemas para textuales son necesarios para afianzar los procesos de construcción del conocimiento pero no son en sí mismos el conocimiento. Los materiales didácticos son de gran importancia, pues tienen una finalidad de enseñanza y expresan una propuesta pedagógica. Enseñan en tanto guían el aprendizaje de los alumnos, presentando y graduando los contenidos y las actividades, transmitiendo información actualizada sobre la temática del curso, planteando problemas, alentando la formulación de preguntas y el debate del grupo [3].

1.4 Consideraciones finales del capítulo.

- Debido a la reducción de las horas presenciales de las asignaturas, que trae consigo la implementación del Plan de estudio E, se hace necesario un aumento en el tiempo que los estudiantes dedican al estudio independiente.
- La elaboración de materiales para apoyar al estudio independiente será de gran importancia para lograr una preparación óptima de los estudiantes.
- Los materiales didácticos tomarán un papel preponderante dentro del Plan de estudio E pero en ningún momento deben sustituir al profesor, sino que este debe orientar a los estudiantes cómo utilizarlos para su mejor provecho.
- La asignatura Circuitos Eléctricos que es la base de las carreras de la Facultad de Ingeniería Eléctrica mantiene el tema “Aplicación de la serie de Fourier en la solución de los circuitos eléctricos lineales” dentro de sus contenidos por la importancia del mismo para la carrera y aunque en el plan E mantiene el mismo número de horas que en el plan de estudios D, se inserta en una asignatura con menor cantidad de horas.
- Lo anterior constituye la justificación para la elaboración de esta tesis que es un material complementario, el cual será de gran ayuda en la preparación de los estudiantes, apoyando su estudio independiente.

Capítulo 2. Teoría básica fundamental sobre la Aplicación de la serie trigonométrica de Fourier en la solución de circuitos eléctricos lineales

Las series de Fourier reciben su nombre en honor a Jean Baptise Joseph Fourier (1768-1830). En 1822, el genio de Fourier llegó a la conclusión de que cualquier función periódica práctica puede representarse como una suma de sinusoides. Tal representación, junto con el teorema de superposición, permite encontrar la respuesta de circuitos a entradas periódicas arbitrarias utilizando técnicas fasoriales.

Este capítulo tiene que ver con medios para analizar circuitos con excitaciones periódicas no sinusoidales. La senoide es la función periódica más simple y útil. En este capítulo se presenta las series de Fourier, una técnica para expresar una función periódica en términos de senoide. Una vez que la excitación de la fuente se expresa en términos de senoide, es posible aplicar el método fasorial para analizar circuitos.

2.1 Series trigonométricas de Fourier

Mientras estudiaba el flujo de calor, Fourier descubrió que una función periódica no sinusoidal puede expresarse como una suma infinita de funciones sinusoidales.

Una función periódica es aquella que se repite cada T segundos, en otras palabras, una función periódica $f(t)$ satisface:

$$f(t) = f(t + nT) \quad (2.1)$$

donde n es un entero y T es el período de la función.

De acuerdo con el *teorema de Fourier*, toda función periódica práctica de frecuencia ω_0 puede expresarse como una suma infinita de funciones seno o coseno que son múltiplos enteros de ω_0 . Por lo tanto, $f(t)$ puede expresarse como:

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + a_3 \cos 3\omega_0 t + b_3 \sin 3\omega_0 t + \dots \quad (2.2)$$

o sea:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (2.3)$$

donde $\omega_0 = 2\pi / T$ se llama la frecuencia fundamental en radianes por segundo.

Las sinusoides $\sin n\omega_0 t$ o $\cos n\omega_0 t$ se llaman las armónicas n -ésimas de $f(t)$; esta es una armónica impar si n es impar y es una armónica par si n es par. La ecuación 2.3 recibe el nombre de *serie trigonométrica de Fourier de $f(t)$* .

Las constantes a_n y b_n son los *coeficientes de Fourier*. El coeficiente a_0 es la componente de cd o el valor promedio de $f(t)$. Debe recordarse que las sinusoides tienen valores promedio cero. Los coeficientes a_n y b_n (para $n \neq 0$) son las amplitudes de las sinusoides en la componente de ca [12].

Las series de Fourier de una función periódica $f(t)$ constituyen una representación que descompone a $f(t)$ en una componente de cd y una componente de ca, las cuales abarcan una serie infinita de sinusoides armónicas [13].

Una función que pueda representarse mediante una serie de Fourier como en la ecuación (2.3), debe cumplir ciertos requerimientos, debido a que la serie infinita de la ecuación (2.3) puede o no converger. Estas condiciones sobre $f(t)$ para producir una serie de Fourier convergente son:

1. $f(t)$ tiene un solo valor en cualquier punto.
2. $f(t)$ tiene un número finito de discontinuidades finitas en cualquier período.
3. $f(t)$ tiene un número finito de máximos y mínimos en cualquier período.
4. La integral $\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)| dt < \infty$ para cualquier t_0 .

Estas condiciones se denominan *condiciones de Dirichlet*. Aunque no son condiciones necesarias, son suficientes para que exista una serie de Fourier.

Una tarea fundamental en las series de Fourier es la determinación de los coeficientes de Fourier a_0 , a_n y b_n . El proceso para determinar los coeficientes se denomina *análisis de Fourier*. Las siguientes integrales trigonométricas son muy útiles en el análisis de Fourier [14].

Para cualquiera de los enteros m y n :

$$\int_0^T \sin n\omega_0 t \, dt = 0 \quad (2.4a)$$

$$\int_0^T \cos n\omega_0 t \, dt = 0 \quad (2.4b)$$

$$\int_0^T \sin n\omega_0 t \cos m\omega_0 t \, dt = 0 \quad (2.4c)$$

$$\int_0^T \sin n\omega_0 t \sin m\omega_0 t \, dt = 0 \quad (m \neq n) \quad (2.4d)$$

$$\int_0^T \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t \, dt = 0 \quad (m \neq n) \quad (2.4e)$$

$$\int_0^T \sin^2 n\omega_0 t \, dt = \frac{T}{2} \quad (2.4f)$$

$$\int_0^T \cos^2 n\omega_0 t \, dt = \frac{T}{2} \quad (2.4g)$$

Estas identidades se usan para evaluar los coeficientes de Fourier.

Se comienza determinando a_0 . Se integran ambos lados de la ecuación (2.3) sobre un período y se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t) \, dt &= \int_0^T [a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)] \, dt \\ &= \int_0^T a_0 \, dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^T a_n \cos n\omega_0 t \, dt + \int_0^T b_n \sin n\omega_0 t \, dt \right] \, dt \end{aligned} \quad (2.5)$$

Apelando a las identidades de las ecuaciones (2.4a) y (2.4b), se anulan las dos integrales que involucran a los términos de $\cos$ y $\sin$. Por consiguiente:

$$\int_0^T f(t) dt = \int_0^T a_0 dt = a_0 T$$

o sea

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (2.6)$$

lo que demuestra que a_0 es el valor promedio de $f(t)$.

Para evaluar a_n se multiplican ambos lados de la ecuación (2.3) por $\cos m\omega_0 t$ y se integra sobre un periodo:

$$\begin{aligned} & \int_0^T f(t) \cos m\omega_0 t dt \\ &= \int_0^T [a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sen n\omega_0 t)] \cos m\omega_0 t dt \\ &= \int_0^T a_0 \cos m\omega_0 t dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^T a_n \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt \right] \\ &+ \int_0^T b_n \sen n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt \end{aligned} \quad (2.7)$$

La integral que contiene a_0 es cero en vista de la ecuación (2.4b), mientras que la integral que incluye a b_n se anula de acuerdo con la ecuación (2.4c). La integral que contiene a a_n será cero salvo cuando $m = n$, en cuyo caso esta es $T/2$, de acuerdo con las ecuaciones (2.4e) y (2.4g). Por lo tanto:

$$\int_0^T f(t) \cos m\omega_0 t dt = a_n \frac{T}{2}, \quad \text{para } m = n$$

o sea:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (2.8)$$

De modo similar, se obtiene b_n multiplicando ambos lados de la ecuación (2.3) por $\sen n\omega_0 t$ y se integra sobre el período. El resultado es:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega_0 t dt \quad (2.9)$$

Tomando en cuenta que $f(t)$ es periódica, puede ser más conveniente efectuar las integraciones anteriores desde $-T/2$ hasta $T/2$, o generalmente desde t_0 hasta $t_0 + T$ en lugar de hacerlo desde 0 hasta T . El resultado será el mismo.

Una forma alterna de la ecuación (2.3) es la de *amplitud-fase*:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n) \quad (2.10)$$

Es viable aplicar la identidad trigonométrica

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \quad (2.11)$$

a los términos de ca en la ecuación (2.10), de modo que:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos\phi_n) \cos n\omega_0 t - (A_n \sin\phi_n) \sin n\omega_0 t \quad (2.12)$$

La igualación de los coeficientes de los desarrollos de las series en las ecuaciones (2.3) y (2.12) muestra que:

$$a_n = A_n \cos\phi_n \quad b_n = -A_n \sin\phi_n \quad (2.13a)$$

o sea:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \phi_n = -\tan^{-1} \frac{b_n}{a_n} \quad (2.13b)$$

Para evitar cualquier confusión en la determinación de ϕ_n quizá resulte mejor relacionar los términos en forma compleja como:

$$A_n \angle \phi_n = a_n - jb_n \quad (2.14)$$

La gráfica de la amplitud A_n de las armónicas, en comparación con $n\omega_0$ se conoce como el *espectro de amplitud de $f(t)$* ; la gráfica de la fase ϕ_n en comparación con $n\omega_0$ constituye el *espectro de fase de $f(t)$* . Tanto los espectros de amplitud como de fase forman el *espectro de frecuencia de $f(t)$* .

El espectro de frecuencia de una señal consiste en las gráficas de las amplitudes y de las fases de sus armónicas, en comparación con la frecuencia.

Por lo tanto, el análisis de Fourier constituye también una herramienta matemática para determinar el espectro de una señal periódica.

Para evaluar los coeficientes de Fourier a_0 , a_n y b_n , muchas veces es necesario aplicar las integrales siguientes:

$$\int \cos at \, dt = \frac{1}{a} \sin at \quad (2.15a)$$

$$\int \sin at \, dt = -\frac{1}{a} \cos at \quad (2.15b)$$

$$\int t \cos at \, dt = \frac{1}{a^2} \cos at + \frac{1}{a} t \sin at \quad (2.15c)$$

$$\int t \sin at \, dt = \frac{1}{a^2} \sin at - \frac{1}{a} t \cos at \quad (2.15d)$$

También es útil conocer los valores de las funciones coseno, seno y exponencial para múltiplos enteros de π . Éstos se presentan en la tabla 2.1, donde n es un entero

Tabla 2.1 Valores de las funciones coseno, seno y exponencial para múltiplos enteros de π .

Función	Valor
$\cos 2n\pi$	1
$\text{sen } 2n\pi$	0
$\cos n\pi$	$(-1)^n$
$\text{sen } n\pi$	0
$\cos \frac{n\pi}{2}$	$\begin{cases} (-1)^{n/2} & n = \text{par} \\ 0 & n = \text{impar} \end{cases}$
$\text{sen } \frac{n\pi}{2}$	$\begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} & n = \text{impar} \\ 0 & n = \text{par} \end{cases}$
$e^{j2n\pi}$	1
$e^{jn\pi}$	$(-1)^n$
$e^{jn\frac{\pi}{2}}$	$\begin{cases} (-1)^{n/2} & n = \text{par} \\ j(-1)^{(n-1)/2} & n = \text{impar} \end{cases}$

2.2 Consideraciones de simetría

Existe un método por medio del cual es posible conocer con anticipación que algunos de los coeficientes de Fourier serían cero y evitar así el trabajo innecesario en el proceso de calcularlos. Este método se basa en reconocer la existencia de la simetría. A continuación se analizan tres tipos de simetría: (1) simetría par, (2) simetría impar, (3) simetría de media onda [14].

2.2.1 Simetría par

Una función $f(t)$ es par si su gráfica es simétrica con respecto al eje vertical; esto es:

$$f(t) = f(-t) \quad (2.16)$$

Ejemplos de funciones pares son t^2 , t^4 y $\cos t$. La figura 2.1 presenta más ejemplos de funciones pares periódicas. Se observa que cada uno de estos ejemplos satisface la ecuación (2.16). Una propiedad principal de cualquier función para $f_e(t)$ es que:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_e(t) dt = 2 \int_0^{\frac{T}{2}} f_e(t) dt \quad (2.17)$$

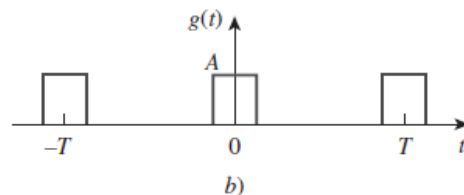
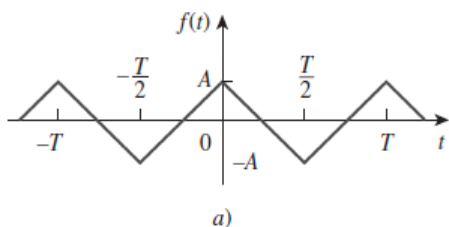
debido a que integrar desde $-T/2$ hasta 0 es lo mismo que hacerlo desde 0 hasta $T/2$. Recurriendo a esta propiedad, los coeficientes de Fourier para una función par se convierten en:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (2.18)$$

$$b_n = 0$$

Puesto que $b_n = 0$, la ecuación (2.3) se vuelve una *serie de cosenos de Fourier*. Esto tiene sentido debido a que la misma función coseno es par. También tiene sentido intuitivo que una función par no contenga términos seno, ya que la función seno es impar.



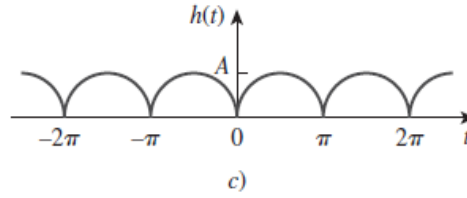


Figura 2.1 Ejemplos comunes de funciones periódicas pares.

Se puede confirmar de manera cuantitativa la ecuación (2.18), aplicando en la ecuación (2.17) la propiedad de una función par para evaluar los coeficientes de Fourier en las ecuaciones (2.6), (2.8) y (2.9). Es conveniente en cada caso integrar sobre el intervalo $-T/2 < t < T/2$ que es simétrico en torno al origen. De tal modo:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^0 f(t) dt + \int_0^{T/2} f(t) dt \right] \quad (2.19)$$

Se cambian variables para la integral sobre el intervalo $-T/2 < t < 0$ poniendo $t = -x$, por lo que $dt = -dx$, $f(t) = f(-t) = f(x)$ puesto que $f(t)$ es una función par, y cuando $t = -T/2$, $x = T/2$. Entonces:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \left[\int_{T/2}^0 f(x) (-dx) + \int_0^{T/2} f(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} f(x) dx + \int_0^{T/2} f(t) dt \right] \end{aligned} \quad (2.20)$$

lo que muestra que las dos integrales son idénticas. En consecuencia:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt \quad (2.21)$$

como se esperaba.

De manera similar, según la ecuación (2.8):

$$a_n = \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^0 f(t) \cos n\omega_0 t dt + \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \right] \quad (2.22)$$

Se realiza el mismo cambio de variable que condujo a la ecuación (2.20) y se observa que tanto $f(t)$ como $\cos n\omega_0 t$ son funciones pares, lo que implica

que $f(-t)=f(t)$ y $\cos(-n\omega_0 t) = \cos n\omega_0 t$ La ecuación (2.22) se vuelve

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{T} \left[\int_{\frac{T}{2}}^0 f(-x) \cos(-n\omega_0 x)(-dx) + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t dt \right] \\
 &= \frac{2}{T} \left[\int_{\frac{T}{2}}^0 f(x) \cos(n\omega_0 x)(-dx) + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t dt \right] \\
 &= \frac{2}{T} \left[\int_{\frac{T}{2}}^0 f(x) \cos(n\omega_0 x)(dx) + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t dt \right] \tag{2.23a}
 \end{aligned}$$

o sea:

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t dt \tag{2.23b}$$

como se esperaba.

Para b_n , se aplica la ecuación (2.9),

$$b_n = \frac{2}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 f(t) \sen n\omega_0 t dt + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sen n\omega_0 t dt \right] \tag{2.24}$$

Se realiza el mismo cambio de variable, aunque recuerdese que $f(-t) = f(t)$ pero $\sen(-n\omega_0 t) = -\sen n\omega_0 t$. La ecuación (2.24) produce:

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{T} \left[\int_{\frac{T}{2}}^0 f(-x) \sen(-n\omega_0 x)(-dx) + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sen(n\omega_0 t dt) \right] \\
 &= \frac{2}{T} \left[\int_{\frac{T}{2}}^0 f(x) \sen(n\omega_0 x)(dx) + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sen(n\omega_0 t dt) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{T} \left[- \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \sin(n\omega_0 x) (dx) + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \right] \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.25}$$

lo que confirma la ecuación (2.18).

2.2.2 Simetría impar

Se dice que una función $f(t)$ es *impar* si su gráfica es antisimétrica con respecto al eje vertical.

$$f(-t) = -f(t) \tag{2.26}$$

Ejemplos de funciones impares son t, t^3 y $\sin t$. La figura 2.2 muestra más ejemplos de funciones impares periódicas. Todos ellos satisfacen la ecuación (2.26). Una función impar $f_0(t)$ tiene como característica principal:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_0(t) dt = 0 \tag{2.27}$$

debido a que la integración desde $-T/2$ hasta 0 es la negativa de aquella de 0 hasta $T/2$. Con esta propiedad, los coeficientes de Fourier para una función impar se vuelven:

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0$$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega_0 t dt \tag{2.28}$$

que da una *serie de senos de Fourier*. También esto tiene sentido debido a que la misma función seno es impar. Además, se observa que no hay término de $\cos$ para el desarrollo de la serie de Fourier de una función impar.

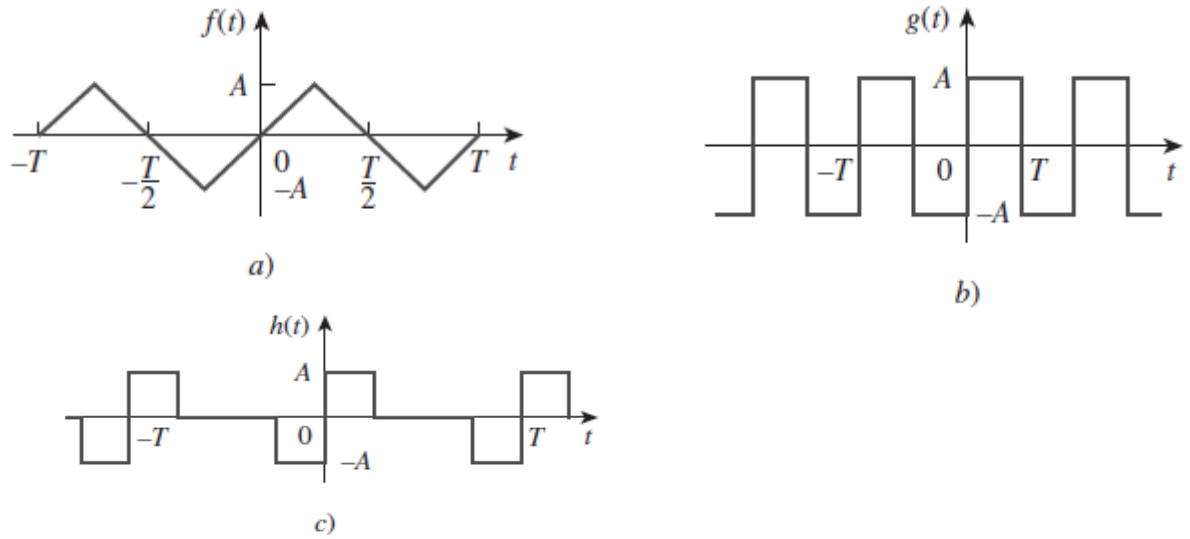


Figura 2.2 Ejemplos comunes de funciones periódicas impares.

La prueba cuantitativa de la ecuación (2.28) sigue el mismo procedimiento que se realizó para demostrar la ecuación (2.18), salvo que $f(t)$ es ahora impar, por lo que $f(t) = -f(-t)$. Con esta fundamental pero simple diferencia, es fácil ver que $a_0 = 0$ en la ecuación (17.20), $a_n = 0$ en la ecuación (2.23a) y b_n en la ecuación (2.24) se vuelve:

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{T} \left[\int_{\frac{T}{2}}^0 f(-x) \sin(-n\omega_0 x) (-dx) + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega_0 t dt \right] \\
 &= \frac{2}{T} \left[-\int_{\frac{T}{2}}^0 f(x) \sin(n\omega_0 x) (dx) + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega_0 t dt \right] \\
 &= \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \sin(n\omega_0 x) (dx) + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega_0 t dt \right] \\
 b_n &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega_0 t dt \tag{2.29}
 \end{aligned}$$

como se esperaba.

Es interesante observar que la función periódica $f(t)$ sin simetría par o impar puede descomponerse en partes que son pares e impares. Utilizando las propiedades de las funciones par e impar a partir de las ecuaciones (2.16) y (2.26), es posible escribir:

$$f(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)] + \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)] = f_e(t) + f_o(t) \quad (2.30)$$

Obsérvese que $f_e(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)]$ satisface la propiedad de una función par en la ecuación (2.16), en tanto que $f_o(t) = \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)]$ satisface la propiedad de una función impar en la ecuación (2.26). El hecho de que $f_e(t)$ contenga solo el término de $\cos$ y los términos coseno, en tanto que $f_o(t)$ cuente solo con los términos seno, se aprovecha al agrupar el desarrollo en serie de Fourier de $f(t)$ como:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t = f_e(t) + f_o(t) \quad (2.31)$$

Se concluye a partir de la ecuación (2.31) que cuando $f(t)$ es par, $b_n = 0$ y cuando $f(t)$ es impar, $a_0 = 0 = a_n$.

Las funciones pares e impares poseen las siguientes propiedades:

1. El producto de dos funciones pares es también una función par.
2. El producto de dos funciones impares es una función par.
3. El producto de una función par y de una función impar es una función impar.
4. La suma (o diferencia) de dos funciones pares es también una función par.
5. La suma (o diferencia) de dos funciones impares es una función impar.
6. La suma (o diferencia) de una función par y de una impar no es ni par ni impar.

2.2.3 Simetría de media onda

Una función tiene simetría de media onda (impar) si:

$$f\left(t - \frac{T}{2}\right) = -f(t) \quad (2.32)$$

lo cual significa que cada medio ciclo es la imagen espejo del siguiente medio ciclo. Las funciones $\cos n\omega_0 t$ y $\sin n\omega_0 t$ satisfacen la ecuación (2.32) para valores impares de n , y en consecuencia poseen simetría de media onda cuando n es impar. La figura 2.3 muestra otros ejemplos de funciones simétricas de media onda. Las funciones en las figuras 2.2a) y 2.2b) también son simétricas de media onda. Se observa que en cada función, un medio ciclo es la versión invertida del medio ciclo adyacente. Los coeficientes de Fourier se convierten en [13]:

$$a_0 = 0$$

$$a_n = \begin{cases} \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t dt & \text{para } n \text{ impar} \\ 0 & \text{para } n \text{ par} \end{cases} \quad (2.33)$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega_0 t dt & \text{para } n \text{ impar} \\ 0 & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$$

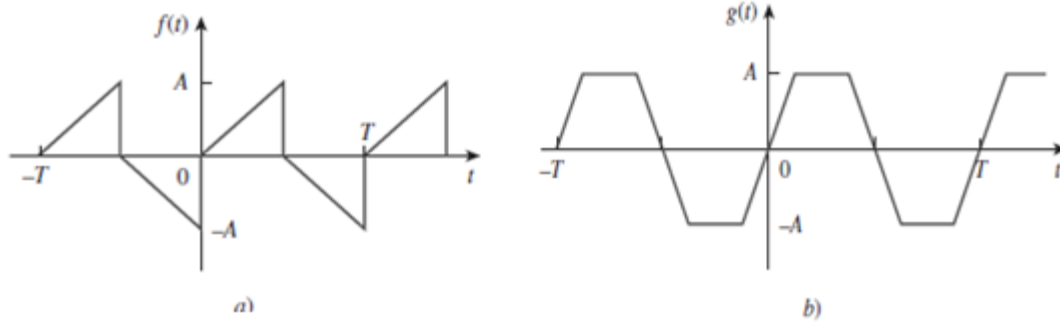


Figura 2.3 Ejemplos comunes de funciones con simetría de media onda.

lo que demuestra que las series de Fourier de una función simétrica de media onda contienen únicamente armónicas impares.

Para deducir la ecuación (2.33) se aplica la propiedad de las funciones simétricas de media onda en la ecuación (2.32) al evaluar los coeficientes de Fourier en las ecuaciones (2.6), (2.8) y (2.9). Por lo tanto:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{1}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 f(t) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt \right] \quad (2.34)$$

Se cambian las variables para la integral sobre el intervalo $-T/2 < t < 0$ poniendo $x = t + T/2$, por lo que $dx = dt$; cuando $t = -T/2$, $x = 0$; y cuando $t = 0$, $x = T/2$. Si se recuerda la ecuación (2.32); esto es, $f\left(x - \frac{T}{2}\right) = -f(x)$, entonces:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} f\left(x - \frac{T}{2}\right) dx + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{T} \left[-\int_0^{\frac{T}{2}} f(x) dx + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

lo que confirma la expresión para a_0 en la ecuación (2.33). De manera similar:

$$a_n = \frac{2}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 f(t) \cos n\omega_0 t dt + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t dt \right] \quad (2.36)$$

Se efectúa el mismo cambio de variable que condujo a la ecuación (2.35), por lo que la ecuación (2.36) se vuelve:

$$a_n = \frac{2}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 f\left(x - \frac{T}{2}\right) \cos n\omega_0 \left(x - \frac{T}{2}\right) dx + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t dt \right] \quad (2.37)$$

Puesto que $f(x - T/2) = -f(x)$ y

$$\begin{aligned} \cos n\omega_0 \left(x - \frac{T}{2}\right) &= \cos(n\omega_0 t - n\pi) \\ &= \cos(n\omega_0 t) \cos n\pi + \sin n\omega_0 t \sin n\pi \\ &= (-1)^n \cos n\omega_0 t \end{aligned} \quad (2.38)$$

Al sustituir esto en la ecuación (2.37) se llega a:

$$a_n = \frac{2}{T} [1 - (-1)^n] \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t dt$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt & \text{para } n \text{ impar} \\ 0 & \text{para } n \text{ par} \end{cases} \quad (2.39)$$

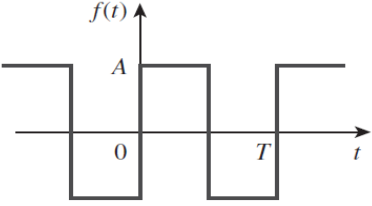
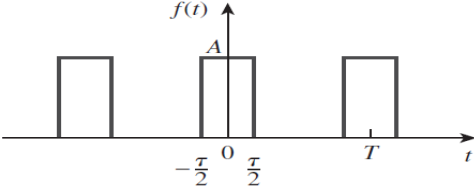
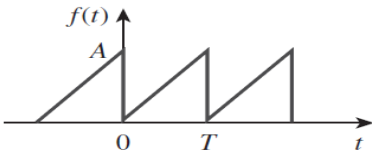
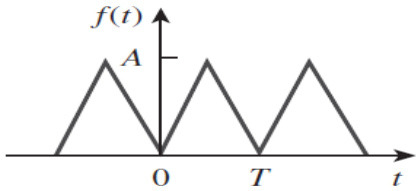
lo que confirma la ecuación (2.33). Siguiendo un procedimiento similar, se puede deducir b_n como en la ecuación (2.33).

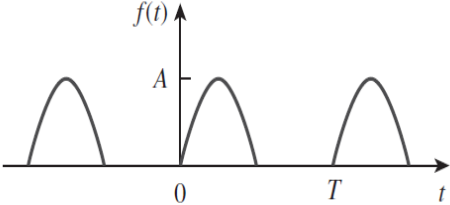
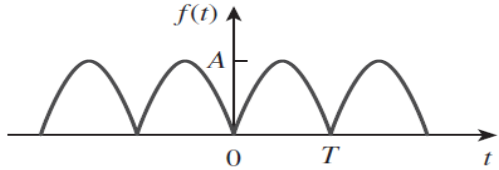
La tabla 2.2 resume los efectos de estas simetrías en los coeficientes de Fourier. La tabla 2.3 proporciona la serie de Fourier de algunas funciones periódicas comunes.

Tabla 2.2 Efecto de la simetría en los coeficientes de Fourier.

Simetría	a_0	a_n	b_n	Observaciones
Par	$a_0 \neq 0$	$a_n \neq 0$	$b_n = 0$	Integrar sobre T/2 y multiplicar por 2 para obtener los coeficientes.
Impar	$a_0 = 0$	$a_n = 0$	$b_n \neq 0$	Integrar sobre T/2 y multiplicar por 2 para obtener los coeficientes.
Media onda	$a_0 = 0$	$a_{2n} = 0$ $a_{2n+1} \neq 0$	$b_{2n} = 0$ $b_{2n+1} \neq 0$	Integrar sobre T/2 y multiplicar por 2 para obtener los coeficientes.

Tabla 2.3 Serie de Fourier de algunas funciones periódicas comunes.

Función	Serie de Fourier
1.Onda cuadrada 	$f(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)\omega_0 t$
2.Tren de pulsos rectangulares 	$f(t) = \frac{A\tau}{T} + \frac{2A}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi\tau}{T} \cos n\omega_0 t$
3.Onda diente de sierra 	$f(t) = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\omega_0 t}{n}$
4.Onda triangular 	$f(t) = \frac{A}{2} - \frac{4A}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)\omega_0 t$

5.Función seno rectificada de media onda 	$f(t) = \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2} \sin \omega_0 t - \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \cos n\omega_0 t$
6.Función seno rectificada de onda completa 	$f(t) = \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \cos n\omega_0 t$

2.3 Aplicaciones en circuitos

En la práctica se encuentra que muchos circuitos son excitados por medio de funciones periódicas no sinusoidales. Para determinar la respuesta en estado estable de un circuito a una excitación periódica no sinusoidal se requiere la aplicación de una serie de Fourier, al análisis fasorial de ca y el principio de superposición. El procedimiento suele implicar cuatro pasos.

Pasos para aplicar las series de Fourier

1. Se expresa la excitación como una serie de Fourier.
2. Se transforma el circuito del dominio temporal al dominio de la frecuencia.
3. Se encuentra la respuesta de las componentes de cd y ca en las series de Fourier.

4. Se suman las respuestas individuales de cd y ca utilizando el principio de superposición.

El primer paso consiste en determinar el desarrollo de la serie de Fourier de la excitación. Para la fuente de tensión periódica que se muestra en la figura 2.4a), por ejemplo, la serie de Fourier se expresa como:

$$v(t) = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} V_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \quad (2.40)$$

(Lo mismo podría hacerse para una fuente de corriente periódica). La ecuación (2.40) muestra que $v(t)$ está compuesta por dos partes: la componente de cd, V_0 y la componente de ca $V_n = V_n \angle \theta_n$, con varias armónicas. Esta representación de la serie de Fourier puede considerarse como un conjunto de fuentes sinusoidales conectadas en serie, con cada fuente teniendo su propia amplitud y frecuencia, como se indica en la figura 2.4b).

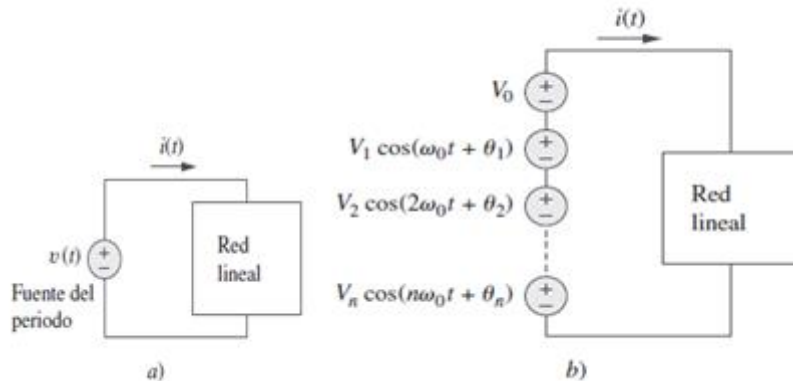


Figura 2.4 a) Red lineal excitada por una fuente de voltaje periódica. b) Representación de la serie de Fourier (dominio temporal).

El segundo paso es determinar la respuesta para cada término en la serie de Fourier. La respuesta a la componente de cd se determina en el dominio de la frecuencia fijando el valor de $n = 0$ o $\omega = 0$ como en la figura 2.5a), o en el dominio temporal sustituyendo todas las inductancias por cortocircuitos y todos los capacitores con circuitos abiertos. La respuesta a la componente de ca se obtiene mediante técnicas fasoriales como se muestra en la figura 2.5b). La red se representa mediante su impedancia $Z(n\omega_0)$ o admitancia $Y(n\omega_0)$. $Z(n\omega_0)$ es la impedancia de entrada de las fuentes cuando se sustituye en todas partes por $n\omega_0$ y $Y(n\omega_0)$ es el recíproco de $Z(n\omega_0)$ [15].

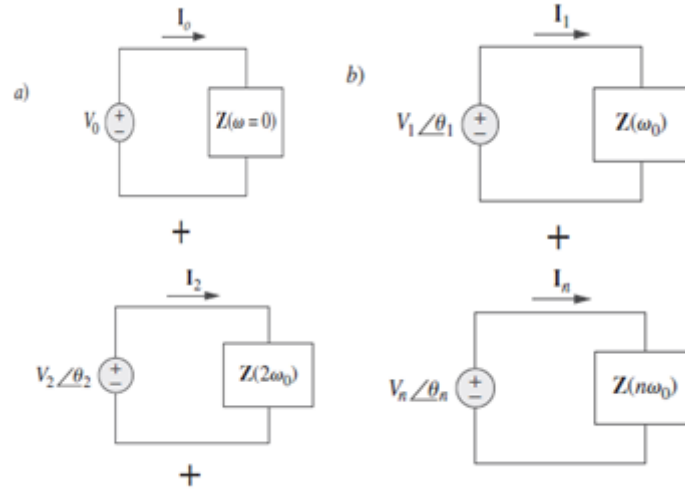


Figura 2.5 Respuestas en estado estable: a) componente de cd, b) componente de ca (dominio de la frecuencia).

Por último, siguiendo el principio de superposición, todas las respuestas individuales se suman. Para el caso que se muestra en la figura 2.5.

$$i(t) = i_0(t) + i_1(t) + i_2(t) + \dots$$

$$= I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \cos(n\omega_0 t + \psi_n) \quad (2.41)$$

donde cada componente I_n de frecuencia $n\omega_0$ se ha transformado al dominio temporal para obtener $i_n(t)$ y ψ_n es el argumento de I_n .

2.4 Potencia promedio y valores RMS

Para encontrar la potencia promedio (activa) que absorbe un circuito debido a una excitación periódica, se escribe el voltaje y la corriente en la forma de amplitud - fase [véase la ecuación (2.10)] como:

$$v(t) = V_{dc} + \sum_{n=1}^{\infty} V_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n) \quad (2.42)$$

$$i(t) = I_{dc} + \sum_{m=1}^{\infty} I_m \cos(m\omega_0 t - \phi_m) \quad (2.43)$$

Siguiendo la convención pasiva de los signos (figura 2.6) la potencia promedio es:

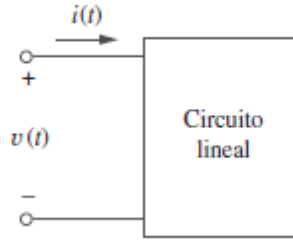


Figura 2.6 Referencia de polaridad de la tensión y dirección de referencia de la corriente.

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T v i \, dt \quad (2.44)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.42) y (2.43) en la ecuación (2.44) se obtiene:

$$\begin{aligned} P = & \frac{1}{T} \int_0^T V_{dc} I_{dc} \, dt + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{I_m V_{dc}}{T} \int_0^T \cos(m\omega_0 t - \phi_m) \, dt \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n I_{dc}}{T} \int_0^T \cos(n\omega_0 t - \theta_n) \, dt \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n I_m}{T} \int_0^T \cos(n\omega_0 t - \theta_n) \cos(m\omega_0 t - \phi_m) \, dt \end{aligned} \quad (2.45)$$

La segunda y la tercera integrales se anulan, ya que se está integrando el coseno sobre su período. De acuerdo con la ecuación (2.4e), todos los términos en la cuarta integral son cero cuando $m \neq n$. Al evaluar la primera integral y aplicar la ecuación (2.4g) a la cuarta integral para el caso de $m = n$ se obtiene:

$$P = V_{dc} I_{dc} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n \cos(\theta_n - \phi_n) \quad (2.46)$$

Esto demuestra que en el cálculo de la potencia promedio que involucra voltaje y corriente periódicos, la potencia promedio total corresponde a la suma de las potencias promedio de cada una de las armónicas correspondiente a su voltaje y su corriente[16].

Dada una función periódica $f(t)$, su valor rms (o valor efectivo) está dado por:

$$F_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt} \quad (2.47)$$

Al sustituir $f(t)$ de la ecuación (2.10) en la ecuación (2.47) y observando que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, se obtiene,

$$\begin{aligned} F_{\text{rms}}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T [a_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_0 A_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_n A_m \cos(n\omega_0 t + \phi_n) \cos(m\omega_0 t + \phi_m)] dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T a_0^2 dt + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_0 A_n \frac{1}{T} \int_0^T \cos(n\omega_0 t + \phi_n) dt \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_n A_m \frac{1}{T} \int_0^T \cos(n\omega_0 t + \phi_n) \cos(m\omega_0 t + \phi_m) dt \end{aligned} \quad (2.48)$$

Se han introducido diferentes valores enteros n y m para manejar el producto de dos series sumatorias. Utilizando el mismo razonamiento que antes, se obtiene:

$$F_{\text{rms}}^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2$$

o

$$F_{\text{rms}} = \sqrt{a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2} \quad (2.49)$$

En términos de coeficientes de Fourier a_n y b_n la ecuación (2.49) puede escribirse como:

$$F_{\text{rms}} = \sqrt{a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)} \quad (2.50)$$

Si $f(t)$ es la corriente que circula por un resistor R , entonces la potencia que se disipa en este último es:

$$P = R F_{\text{rms}}^2 \quad (2.51)$$

O si $f(t)$ es el voltaje a través de un resistor R , la potencia disipada en este es:

$$P = \frac{F_{\text{rms}}^2}{R} \quad (2.52)$$

Se puede evitar especificar la naturaleza de la señal (voltaje o corriente) eligiendo una resistencia de 1Ω . La potencia disipada por una resistencia de dicho valor es:

$$P_{1\Omega} = F_{\text{rms}}^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (2.53)$$

Este resultado se conoce como *teorema de Parseval*. Se observa que a_0^2 es la potencia en la componente de cd, en tanto que $\frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)$ es la potencia de ca en la n -ésima armónica. Por lo tanto, el teorema de *Parseval* establece que la potencia promedio en una señal periódica es la suma de la potencia promedio en su componente de cd y las potencias promedio en sus armónicas [17].

2.5 Series exponenciales de Fourier

Una manera compacta de expresar la serie de Fourier en la ecuación (2.3) consiste en ponerla en forma exponencial. Esto requiere que se representen las funciones seno y coseno en la forma exponencial utilizando la identidad de Euler:

$$\cos n\omega_0 t = \frac{1}{2} [e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}] \quad (2.54a)$$

$$\sin n\omega_0 t = \frac{1}{2j} [e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}] \quad (2.54b)$$

La sustitución de la ecuación (2.54) en la (2.3) y el agrupamiento de términos da lugar a:

$$f(t) = a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n - jb_n)e^{jn\omega_0 t} + (a_n + jb_n)e^{-jn\omega_0 t}] \quad (2.55)$$

Si se define un nuevo coeficiente c_n de manera que

$$c_0 = a_0 \quad c_n = \frac{(a_n - jb_n)}{2}, \quad c_{-n} = c_n^* = \frac{(a_n + jb_n)}{2} \quad (2.56)$$

Entonces, $f(t)$ se convierte en:

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{jn\omega_0 t} + c_{-n} e^{-jn\omega_0 t}) \quad (2.57)$$

o sea:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (2.58)$$

Esta es la representación mediante *series complejas de Fourier o exponencial* $f(t)$. Esta forma exponencial es más compacta que la forma seno – coseno de la ecuación (2.3). Aunque los coeficientes de la serie exponencial de Fourier c_n también pueden obtenerse de a_n y b_n utilizando la ecuación (2.56), también es posible obtenerlos directamente de $f(t)$ como

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (2.59)$$

Donde $\omega_0 = 2\pi/T$ como de costumbre. Las gráficas de la magnitud y de la fase de c_n en función de $n\omega_0$ reciben el nombre de *espectro complejo de amplitud* y *espectro complejo de fase de $f(t)$* , respectivamente. Los dos espectros forman el espectro complejo de frecuencia de $f(t)$.

La serie exponencial de Fourier de una función periódica $f(t)$ describe el espectro de $f(t)$ en términos de la amplitud y del ángulo de fase de las componentes de c_n en las frecuencias armónicas positivas y negativas [17].

Los coeficientes de las tres formas de las series de Fourier (forma seno - coseno, forma de amplitud-fase y forma exponencial) se relacionan por medio de:

$$A_n \angle \phi_n = a_n - jb_n = 2c_n \quad (2.60)$$

o sea:

$$c_n = |c_n| \angle \theta_n = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2} \angle -\tan^{-1} \frac{b_n}{a_n} \quad (2.61)$$

Si únicamente $a_n > 0$, se observa que la fase θ_n de c_n es igual a ϕ_n .

En términos de los coeficientes complejos de Fourier c_n el valor rms de una señal periódica $f(t)$ se encuentra como:

$$\begin{aligned}
 F_{\text{rms}}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) [\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}] dt \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left[\frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{jn\omega_0 t} dt \right] \quad (2.62) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n c_n^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2
 \end{aligned}$$

o sea:

$$F_{\text{rms}} = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2} \quad (2.63)$$

La ecuación (2.62) puede escribirse como:

$$F_{\text{rms}}^2 = |c_0|^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \quad (2.64)$$

También en este caso, la potencia disipada por una resistencia de 1Ω es:

$$P_{1\Omega} = F_{\text{rms}}^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (2.65)$$

lo cual es una reformulación del teorema de Parseval.

El *espectro de potencia* de la señal $f(t)$ es la gráfica de $|c_n|^2$ en función de $n\omega_0$. Si $f(t)$ es el voltaje a través de una resistencia R , la potencia promedio que absorbe la resistencia es F_{rms}^2/R ; si $f(t)$ es la corriente que circula por R , la potencia correspondiente será $F_{\text{rms}}^2 R$.

Como un ejemplo, se considera el tren de pulsos periódicos de la figura 2.7. El objetivo es obtener sus espectros de amplitud y de fase. El periodo del tren de pulsos es $T = 10$, de manera que $\omega_0 = 2\pi/T = \pi/5$. Empleando la ecuación (2.59):

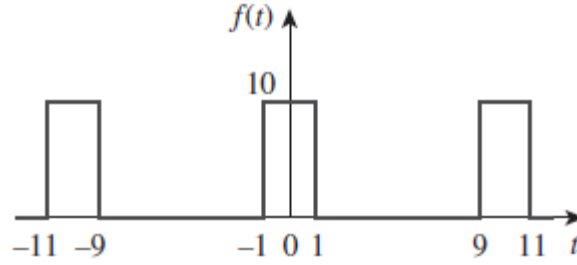


Figura 2.7 Tren de pulsos periódicos.

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{10} \int_{-1}^1 10 e^{-jn\omega_0 t} dt \\
 &= \frac{1}{-jn\omega_0} e^{-jn\omega_0 t} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{-jn\omega_0} (e^{-jn\omega_0} - e^{jn\omega_0}) \\
 &= \frac{2}{n\omega_0} \frac{e^{jn\omega_0} - e^{-jn\omega_0}}{2j} = 2 \frac{\text{sen } n\omega_0}{n\omega_0}, \quad \omega_0 = \frac{\pi}{5} \\
 &= 2 \frac{\text{sen } n\pi/5}{n\pi/5}
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

y

$$f(t) = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } n\pi/5}{n\pi/5} e^{jn\pi t/5} \tag{2.67}$$

Se observa en la ecuación (2.66) que c_n es el producto de 2 y una función de la forma $\sin x/x$. Esta función se conoce como la *función senc*; se escribe como:

$$\text{senc}(x) = \frac{\text{sen } x}{x} \tag{2.68}$$

Algunas propiedades de la función senc son importantes en este análisis. Para un argumento cero, el valor de la función senc es la unidad.

$$\text{senc}(0) = 1 \tag{2.69}$$

Esto se obtiene aplicando la regla de L'Hospital a la ecuación (2.68). Para un múltiplo entero de π el valor de la función senc es cero:

$$\text{senc}(n\pi) = 0, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (2.70)$$

Además, la función senc muestra una simetría par. Teniendo en cuenta lo anteriormente señalado, se pueden obtener los espectros de amplitud y de fase de $f(t)$. Según la ecuación (2.66), la magnitud es:

$$|c_n| = 2 \left| \frac{\sin n\pi/5}{n\pi/5} \right| \quad (2.71)$$

mientras que la fase equivale a:

$$\theta_n = \begin{cases} 0^\circ, & \text{sen } \frac{n\pi}{5} > 0 \\ 180^\circ, & \text{sen } \frac{n\pi}{5} < 0 \end{cases} \quad (2.72)$$

La figura 2.8 muestra la gráfica de $|c_n|$ en función de n variando de -10 a 10 , donde $n = \omega/\omega_0$ es la frecuencia normalizada.

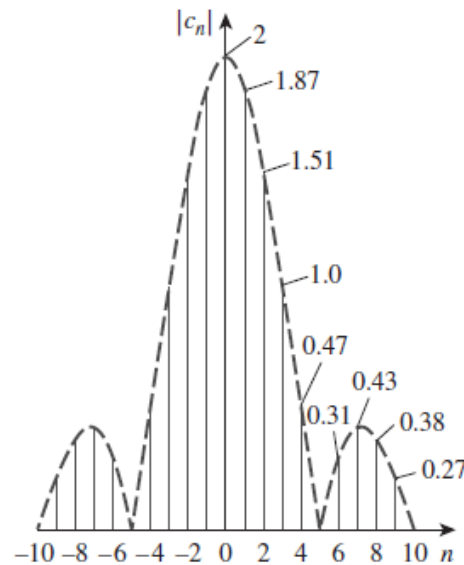


Figura 2.8 Amplitud de un tren de pulsos periódicos.

La figura 2.9 muestra la gráfica de θ_n en función de n . Tanto el espectro de amplitud como el de fase se denominan *espectros de línea*, pues el valor de $|c_n|$ y θ_n solo ocurre en valores discretos de frecuencias. El espaciamiento entre las rectas es ω_0 . El espectro de potencia, que es la gráfica de $|c_n|^2$ en función de $n\omega_0$ también puede graficarse. Puede observarse que la función senc forma la envolvente del espectro de amplitud.

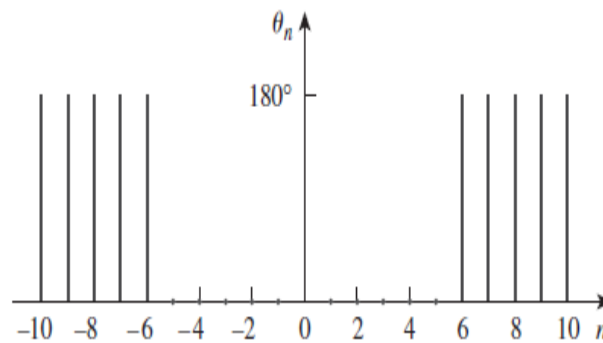


Figura 2.9 Espectro de fase de un tren de pulsos periódicos.

En este capítulo se ha demostrado que el desarrollo de la serie de Fourier permite la aplicación de las técnicas fasoriales utilizadas en el análisis de ca para los circuitos con excitaciones periódicas no sinusoidales. La serie de Fourier tiene muchas otras aplicaciones prácticas, en particular en las comunicaciones y en el procesamiento de señales. Aplicaciones comunes incluyen el análisis del espectro, el filtrado, la rectificación y la distorsión de armónicas.

2.6 Resumen sobre la serie trigonométrica de Fourier en la solución de circuitos eléctricos lineales

1. Una función periódica es aquella que se repite a sí misma cada T segundos; esto es, $f(t \pm nT) = f(t)$, $n = 1, 2, 3, \dots$
2. Cualquier función periódica no sinusoidal $f(t)$ en el campo de la ingeniería eléctrica puede expresarse en términos de senoide utilizando las series de Fourier:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

Donde $\omega_0 = 2\pi/T$ es la frecuencia fundamental. La serie de Fourier descompone la función en una componente de cd a_0 y en las componentes de ca que contienen un número infinito de sinusoides relacionadas armónicamente. Los coeficientes de Fourier se determinan como:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega_0 t dt$$

Si $f(t)$ es una función par $b_n = 0$; y cuando $f(t)$ es impar, $a_0 = 0$ y $a_n = 0$. Si $f(t)$ es simétrica de media onda, $a_0 = a_n = b_n = 0$ para valores pares de n .

3. Una alternativa a la serie trigonométrica de Fourier (forma seno coseno) es la forma de amplitud-fase:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$$

donde

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \phi_n = -\tan^{-1} \frac{b_n}{a_n}$$

4. La representación de la serie de Fourier permite aplicar el método fasorial para analizar circuitos cuando la función de la fuente es periódica más no sinusoidal. Se recurre a la técnica fasorial para determinar la respuesta de cada armónica de la serie, transformando las respuestas al dominio temporal y sumándolas.

5. La potencia promedio de la tensión y la corriente periódicas es

$$P = V_{dc} I_{dc} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n \cos(\theta_n - \phi_n)$$

En otras palabras, la potencia promedio total corresponde a la suma de las potencias promedio de cada una de las armónicas correspondientes a la tensión y la corriente relacionados [13].

6. Es igualmente posible representar una función periódica en términos de una serie exponencial (o compleja) de Fourier como

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

donde

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

y $\omega_0 = 2\pi/T$. La forma exponencial describe el espectro de $f(t)$ en términos de la amplitud y la fase de las componentes de ca en las frecuencias armónicas positiva y negativa. De tal manera que hay tres formas básicas de la representación de la serie de Fourier: la forma trigonométrica, la forma de la amplitud-fase y la forma exponencial.

7. El espectro de frecuencia (o de barras) es la gráfica de A_n y ϕ_n o $|c_n|$ y θ_n en función de la frecuencia.

8. El valor rms de una función periódica está dado por

$$F_{rms} = \sqrt{a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2}$$

La potencia disipada por una resistencia de 1Ω es

$$P_{1\Omega} = F_{rms}^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

Esta relación se conoce también con el nombre de teorema de Parseval.

9. Las series de Fourier encuentran una aplicación en los analizadores de espectro y en los filtros. El analizador de espectro es un instrumento que muestra los espectros discretos de Fourier de una señal de entrada, de modo que el analista puede determinar las frecuencias y energías relativas de los componentes de la señal. Debido a que los espectros de Fourier son discretos, los filtros se diseñan para que tengan buen desempeño en el bloqueo de componentes de frecuencia de una señal que está fuera de la banda deseada [13].

CAPÍTULO 3. Ejemplos resueltos

Este capítulo constará de 5 ejercicios resueltos tanto de forma analítica como simulada teniendo en cuenta la vinculación de los mismos al tema mediante el uso de Matlab y a través del Simulink. Conjuntamente en los anexos se presentan 9 ejercicios propuestos para el trabajo independiente.

3.1 Ejercicios resueltos

1. Determinar la serie de Fourier en forma trigonométrica, de la función periódica $f(t)$, con simetría par, mostrada en la figura 3.1.

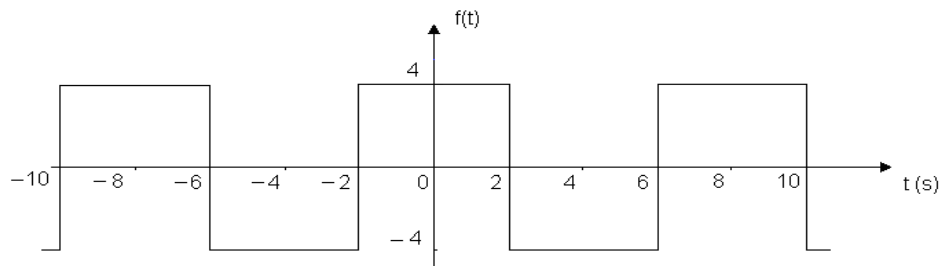


Figura 3.1 Señal periódica con simetría par.

R:

La serie de Fourier en forma trigonométrica, de una función periódica, viene dada de manera general por:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

El valor promedio en un período de la función $f(t)$ del ejemplo es cero, debido a esto:

$$a_0 = 0$$

La función $f(t)$ del ejemplo, posee simetría par. Debido a este tipo de simetría, no existen términos seno:

$$b_n = 0$$

El período de la función es $T = 8 \text{ s}$ y la frecuencia angular $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{4} \text{ rad/s}$.

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t \, dt = \frac{4}{8} \int_0^4 f(t) \cos n\omega_0 t \, dt = \frac{1}{2} \left(\int_0^2 4 \cos n\frac{\pi}{4} t \, dt + \int_2^4 -4 \cos n\frac{\pi}{4} t \, dt \right)$$

$$a_n = 2 \left(\frac{4}{n\pi} \sin n\frac{\pi}{4} t \Big|_0^2 - \frac{4}{n\pi} \sin n\frac{\pi}{4} t \Big|_2^4 \right) = 2 \left(\frac{4}{n\pi} \sin n\frac{\pi}{2} - 0 \right) - 2 \left(\frac{4}{n\pi} \sin n\pi - \frac{4}{n\pi} \sin n\frac{\pi}{2} \right)$$

$$a_n = \frac{8}{n\pi} \sin n\frac{\pi}{2} - \frac{8}{n\pi} \sin n\pi + \frac{8}{n\pi} \sin n\frac{\pi}{2} = \frac{16}{n\pi} \sin n\frac{\pi}{2}$$

Por tanto, la serie de Fourier en forma trigonométrica, de la función con simetría par $f(t)$ es:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{16}{n\pi} \sin n\frac{\pi}{2} \right) \cos n\frac{\pi}{4} t$$

R Matlab:

Archivo script, que permite obtener los coeficientes de los veinte primeros términos de la serie trigonométrica de Fourier, de la señal periódica del ejemplo.

% Simetría par

clear

clc

syms t n w0

T=8;w0=2*pi/T;

a0=1/T*(int(4,t,0,2)+int(-4,t,2,6)+int(4,t,6,8))

pretty(a0)

an=2/T*(int(4*cos(n*w0*t),t,0,2)+int(-4*cos(n*w0*t),t,2,6)+int(4*cos(n*w0*t),t,6,8))

pretty(an)

bn=2/T*(int(4*sin(n*w0*t),t,0,2)+int(-4*sin(n*w0*t),t,2,6)+int(4*sin(n*w0*t),t,6,8))

```

pretty(bn)

n=1:19;

a0=subs(a0);

an=subs(an);

bn=subs(bn);

a0

disp([' No. arm.' ' an' ' bn'])

disp(['n' an' bn'])

```

Resultados que se obtienen al ejecutar el archivo script:

Coeficiente a_0 y expresiones generales de los coeficientes a_n y b_n . Valores de los coeficientes hasta el armónico número diecinueve. Se observa, que al tener la onda simetría par, los términos seno (b_n) son iguales a cero.

a0 =

0

0

an =

$$(4*\sin(\{pi*n\}/2))/\{pi*n\} + (4*(\sin(2*pi*n) - \sin(3/2*n*pi)))/\{pi*n\} + (4*(\sin(\{pi*n\}/2) - \sin(3/2*n*pi)))/\{pi*n\}$$

$$\frac{4 \sin \left| \frac{\pi n}{2} \right|}{\pi n} + \frac{4 \left| \sin(2 \pi n) - \sin \left| \frac{3 n \pi}{2} \right| \right|}{\pi n} + \frac{4 \left| \sin \left| \frac{\pi n}{2} \right| - \sin \left| \frac{3 n \pi}{2} \right| \right|}{\pi n}$$

bn =

$$(8*\sin(\{pi*n\}/4)^2)/\{pi*n\} - (4*(\cos(\{pi*n\}/2) - \cos(3/2*n*pi)))/\{pi*n\} - (4*(\cos(2*pi*n) - \cos(3/2*n*pi)))/\{pi*n\}$$

$$\frac{8 \sin \left| \frac{\pi n}{4} \right|^2}{\pi n} - \frac{4 \left| \cos \left| \frac{\pi n}{2} \right| - \cos \left| \frac{3 n \pi}{2} \right| \right|}{\pi n} - \frac{4 \left| \cos(2 \pi n) - \cos \left| \frac{3 n \pi}{2} \right| \right|}{\pi n}$$

a0 =

0

No. arm.	an	bn
1.0000	5.0930	-0.0000
2.0000	-0.0000	0
3.0000	-1.6977	0.0000
4.0000	-0.0000	0.0000
5.0000	1.0186	-0.0000
6.0000	-0.0000	0
7.0000	-0.7276	0
8.0000	-0.0000	0.0000
9.0000	0.5659	-0.0000
10.0000	-0.0000	0
11.0000	-0.4630	0.0000
12.0000	0.0000	0.0000
13.0000	0.3918	-0.0000
14.0000	0.0000	0
15.0000	-0.3395	0.0000
16.0000	-0.0000	0.0000
17.0000	0.2996	-0.0000
18.0000	-0.0000	0
19.0000	-0.2681	0.0000

R Simulink:

En la figura 3.2 se muestra la solución del ejercicio a través del diagrama de bloques de Simulink, el cual se modela a partir de los elementos del circuito y sus bloques correspondientes en el programa. Utilizando los bloques que corresponden a los instrumentos de medición se obtienen los parámetros del circuito, siendo estos los mismos que los obtenidos a través de la resolución analítica y las instrucciones del MATLAB. En la figura 3.3 se muestran las diferentes ventanas de dialogo de los bloques que generan las funciones escalón y en la figura 3.4 se observa a través de la herramienta Powergui FFT Analysis Tool, la serie trigonométrica de Fourier de $f(t)$ en forma amplitud-fase.

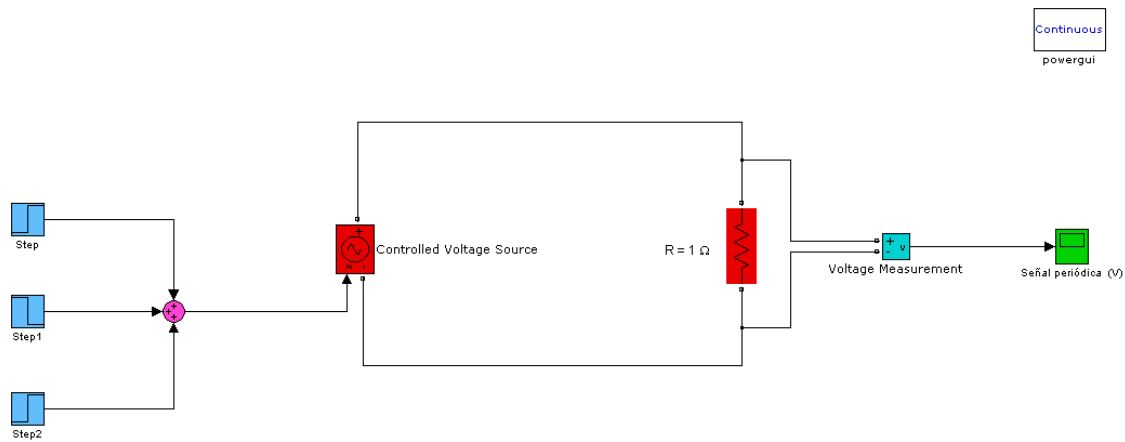


Figura 3.2 Archivo .mdl que permite generar la señal periódica con simetría par.

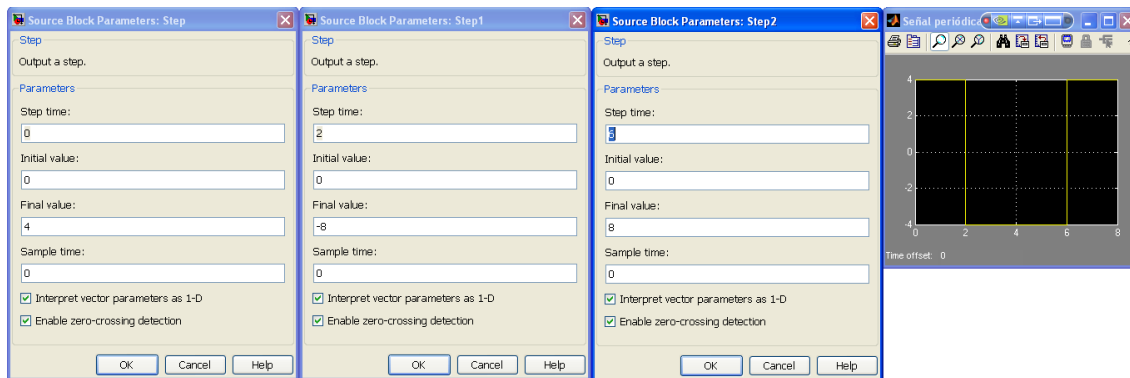


Figura 3.3 Ventanas de diálogo de los bloques que generan las funciones escalón.

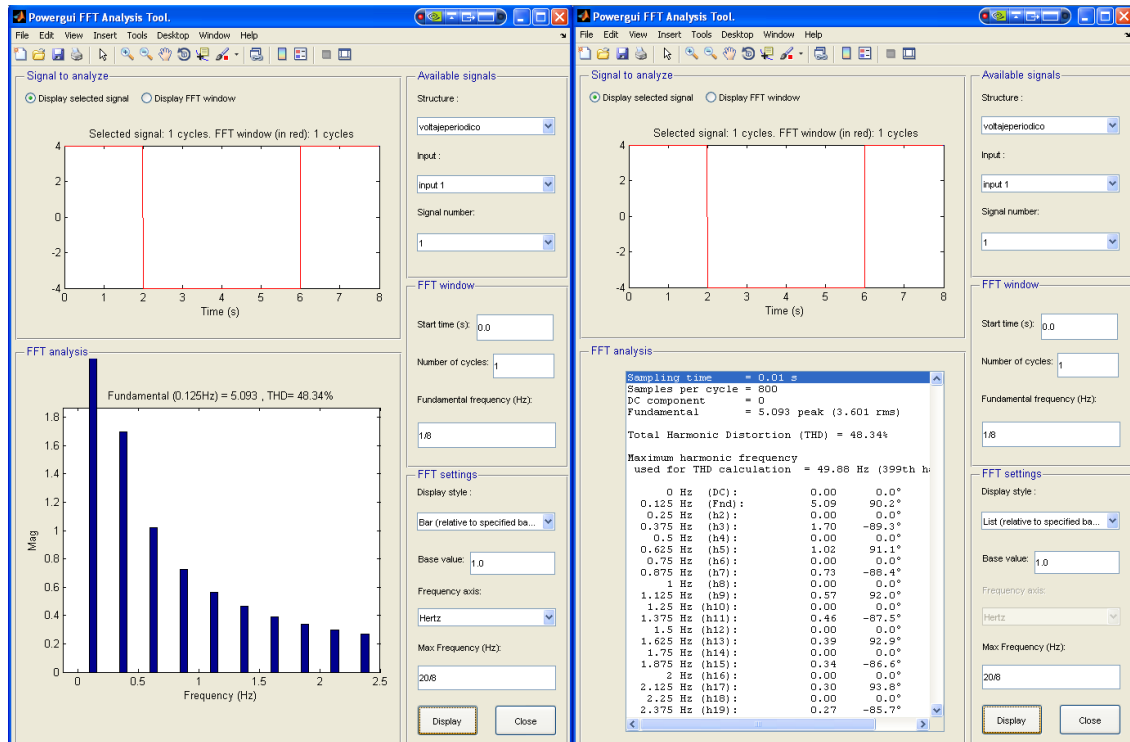


Figura 3.4 Serie trigonométrica de Fourier de $f(t)$ en forma amplitud-fase.

Observación:

La herramienta Powergui FFT Analysis Tool, brinda la serie trigonométrica de Fourier de $f(t)$ en forma amplitud-fase. Los ángulos que aparecen en Powergui FFT Analysis Tool, corresponden a funciones seno (para funciones coseno debe restarse 90° a los valores señalados para cada armónico). Cuando la magnitud del armónico es cero, el valor del ángulo es irrelevante.

Al comparar la serie trigonométrica de Fourier de $f(t)$ en términos de senos y cosenos (a_n, b_n) , con la forma amplitud-fase (A_n, ϕ_n) , se observa que se cumplen las siguientes relaciones:

$$a_n = A_n \cos \phi_n$$

$$b_n = -A_n \sin \phi_n$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\phi_n = -\tan^{-1} \frac{b_n}{a_n}$$

$$A_n \angle \phi_n = a_n - j b_n$$

2. La forma de onda semisinusoidal que se muestra en la figura 3.5 representa la respuesta en tensión que se obtiene a la salida del circuito rectificador de media onda, un circuito no lineal cuyo propósito es convertir una tensión de entrada sinusoidal en una tensión de salida de cd (pulsante). Determinar la representación mediante una serie de Fourier de esta forma de onda.

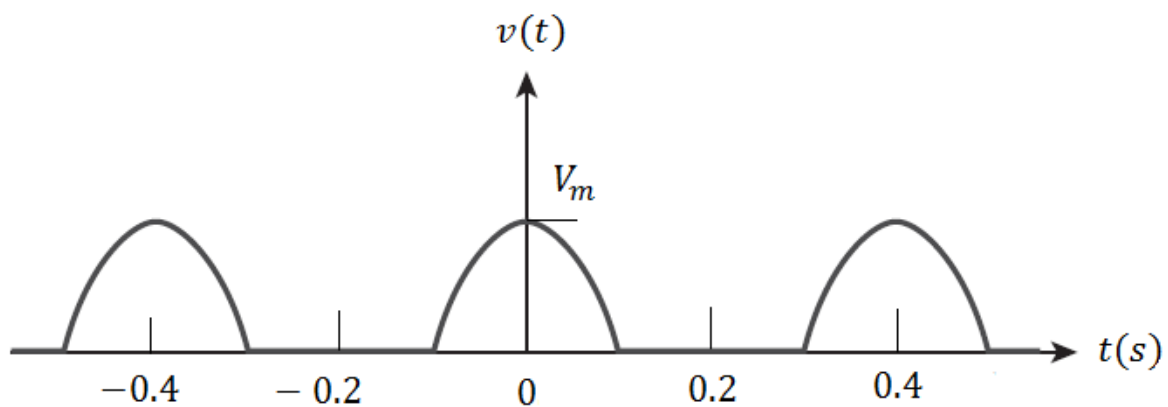


Figura 3.5 Salida de un rectificador de media onda en el que se aplica una entrada sinusoidal.

R:

De acuerdo con la gráfica, se observa que el periodo es

$$T = 0.4 \text{ s}$$

así que

$$f_0 = 2.5 \text{ Hz}$$

y

$$\omega_0 = 5\pi \text{ rad/s}$$

Elaborar un plan.

Para calcular el conjunto de coeficientes a_0, a_n y b_n . es necesario contar con una expresión funcional de $v(t)$, siendo la más directa la definida sobre el intervalo $t = 0$ a $t = 0.4$ como:

$$v(t) = \begin{cases} V_m \cos 5\pi t & 0 \leq t \leq 0.1 \\ 0 & 0.1 \leq t \leq 0.3 \\ V_m \cos 5\pi t & 0.3 \leq t \leq 0.4 \end{cases}$$

Sin embargo, al elegir que el periodo se extienda desde $t = -0.1$ hasta $t = 0.3$ se obtendría un menor número de ecuaciones, y en consecuencia menos integrales:

$$v(t) = \begin{cases} V_m \cos 5\pi t & -0.1 \leq t \leq 0.1 \\ 0 & 0.1 \leq t \leq 0.3 \end{cases}$$

Esta forma es preferible, aunque cualquier descripción daría el resultado correcto.

Construir un conjunto de ecuaciones apropiado

La componente de frecuencia cero se obtiene con facilidad:

$$a_0 = \frac{1}{0.4} \int_{-0.1}^{0.3} v(t) dt = \frac{1}{0.4} \left[\int_{-0.1}^{0.1} V_m \cos 5\pi t dt + \int_{0.1}^{0.3} (0) dt \right]$$

La amplitud de un término coseno general es:

$$a_n = \frac{2}{0.4} \int_{-0.1}^{0.1} V_m \cos 5\pi t \cos 5\pi n t dt$$

y la amplitud de un término sinusoidal general es

$$\frac{2}{0.4} \int_{-0.1}^{0.1} V_m \cos 5\pi t \sin 5\pi n t dt$$

Como la función es par, $b_n = 0$ para cualquier valor de n y la serie de Fourier de esta señal periódica, no contiene términos seno.

La forma de la función que se obtuvo luego de integrar, difiere cuando n es la unidad, en comparación con el caso en el que se elige cualquier otro valor de n .

Si $n = 1$, se tiene

$$a_1 = 5V_m \int_{-0.1}^{0.1} \cos 5\pi t \cos 5\pi t dt$$

La solución de las integrales restantes da como resultado:

$$a_0 = \frac{V_m}{\pi}$$

$$a_n = 5V_m \int_{-0.1}^{0.1} \frac{1}{2} [\cos 5\pi(1+n)t + \cos 5\pi(1-n)t] dt$$

o

$$a_n = \frac{2V_m \cos(\pi n/2)}{\pi (1-n^2)} \quad (n \neq 1)$$

La representación mediante una serie de Fourier de la forma de onda periódica del ejemplo es:

$$v(t) = \frac{V_m}{\pi} + \frac{V_m}{2} \cos 5\pi t + \frac{2V_m}{3\pi} \cos 10\pi t - \frac{2V_m}{15\pi} \cos 20\pi t + \frac{2V_m}{35\pi} \cos 30\pi t - \dots$$

R Matlab:

Archivo script para la determinación de los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier en forma *amplitud-fase* (todos los términos son expresados en forma de cosenos), de la señal a la salida de un rectificador de media onda, con carga resistiva pura, al cual se le aplica como estímulo, una señal periódica cosinusoidal:

```
clear
```

```
clc
```

```
clf
```

```
f1 = 1/0.4; % f1=1/T1
```

```
inv = 1/f1; inc = 1/(8000*f1); tnum = inv;
```

```
t = 0:inc:tnum;
```

```
g1=[cos(5*pi*t)];
```

```
g1=g1.*[ones(1,2001) zeros(1,4000) ones(1,2000)];
```

```
g = g1; % Para cada forma de onda se requiere escribir la expresión correcta
```

```
N = length(g);
```

```
num = 20;
```

```

for i = 1:num

for m = 1:N

cint(m) = exp(-j*2*pi*(i-1)*m/N)*g(m);

end

c(i) = sum(cint)/N;

end

cmag = 2*abs(c); % Se multiplica por 2 porque solo se consideran frecuencias positivas

cmag(1)=cmag(1)/2;

cphase = angle(c);

subplot(311)

% Dibujo del primer periodo de la forma de onda

plot(t,g,'LineWidth',4)

title('Señal a la salida de un circuito rectificador de media onda')

xlabel('t (s)')

ylabel('v(t) (V)')

% Ploteo del espectro de amplitud y fase

f = (0:num-1)*f1;

subplot(312), stem(f(1:20),cmag(1:20))

title('Espectro de amplitud')

xlabel('Frecuencia (Hz)')

```

```

ylabel('An (V)')

subplot(313), stem(f(1:20),cphase(1:20)*180/pi)

title('Espectro de fase')

xlabel('Frecuencia (Hz)')

ylabel('\theta (grados)')

N=1:20;

disp('Coeficientes de la serie de Fourier en forma trigonométrica:')

disp('')

Espectro=[[N-1]' [cmag(N)]' [cphase(N)*180/pi]'];

disp(' Arm. An Fase')

disp('')

disp(Espectro

```

Resultados numéricos y gráficos que se obtienen al ejecutar el archivo script:

Coeficientes de la serie de Fourier en forma trigonométrica (los ángulos corresponden a funciones coseno):

Coeficientes de la serie de Fourier en forma trigonométrica:

Arm.	A_n	Fase
0	0.3184	0
1.0000	0.5001	-0.0225
2.0000	0.2122	-0.0450
3.0000	0.0001	179.9325
4.0000	0.0425	179.9100
5.0000	0.0000	-0.1125
6.0000	0.0182	-0.1350
7.0000	0.0000	179.8425
8.0000	0.0101	179.8200
9.0000	0.0000	-0.2025
10.0000	0.0064	-0.2250
11.0000	0.0000	179.7525
12.0000	0.0045	179.7300
13.0000	0.0000	-0.2925
14.0000	0.0033	-0.3150
15.0000	0.0000	179.6625
16.0000	0.0025	179.6400
17.0000	0.0000	-0.3825
18.0000	0.0020	-0.4049
19.0000	0.0000	179.5726

En la figura 3.6 se muestra los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier de $v(t)$ en forma amplitud–fase.

En la figura 3.7 se muestra la solución del ejercicio a través del diagrama de bloques de Simulink, el cual se modela a partir de los elementos del circuito y sus bloques correspondientes en el programa. Utilizando los bloques que corresponden a los instrumentos de medición se obtienen los parámetros del circuito, siendo estos los mismos que los obtenidos a través de la resolución analítica y las instrucciones del MATLAB. En la figura 3.8 se muestra la señal a la salida de un rectificador de media onda. y en la figura 3.9 se observa a través de la herramienta Powergui FFT Analysis Tool, la serie trigonométrica de Fourier de $f(t)$ en forma amplitud–fase.

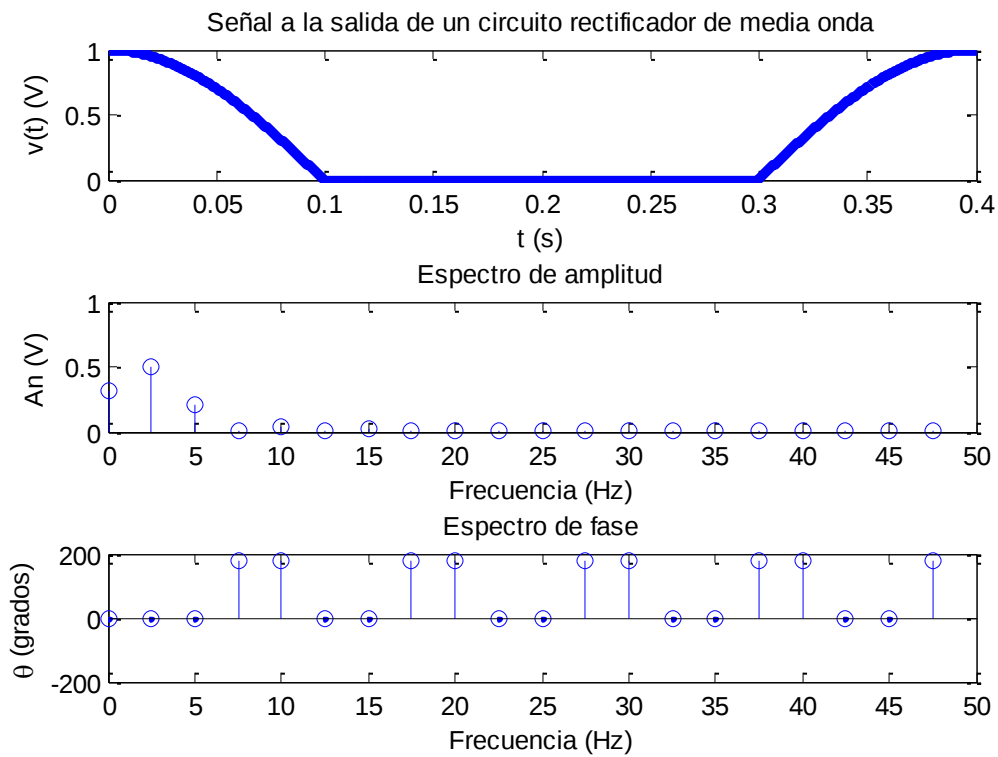


Figura 3.6 Coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier en forma *amplitud-fase*.

R Simulink:

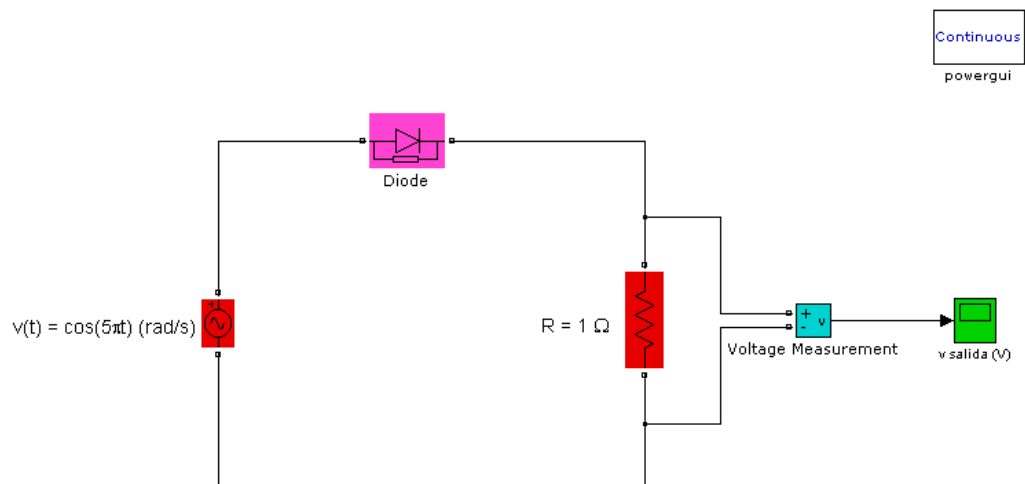


Figura 3.7 Archivo .mdl que permite generar la señal a la salida de un rectificador de media onda.

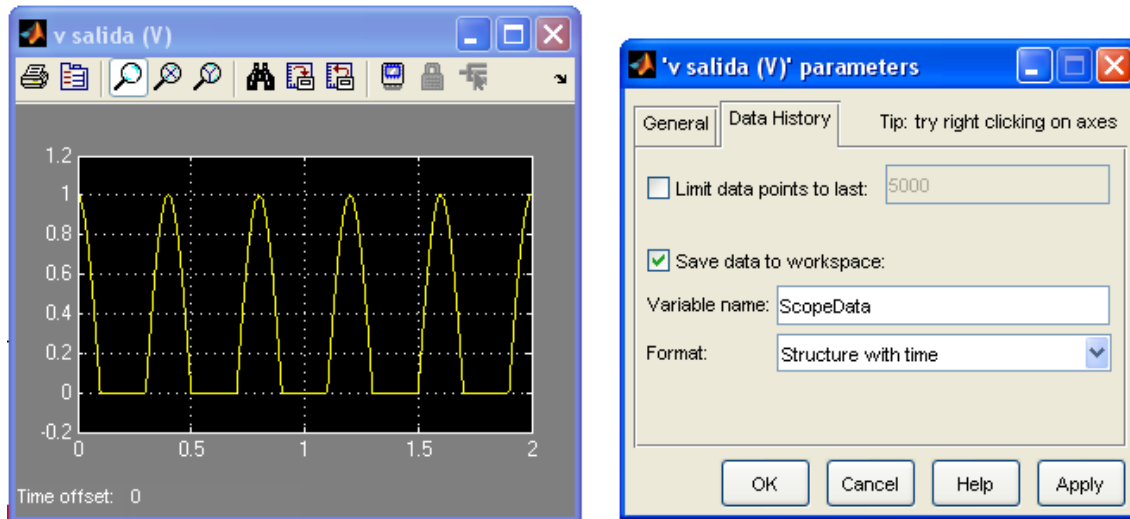


Figura 3.8 Señal a la salida de un rectificador de media onda.

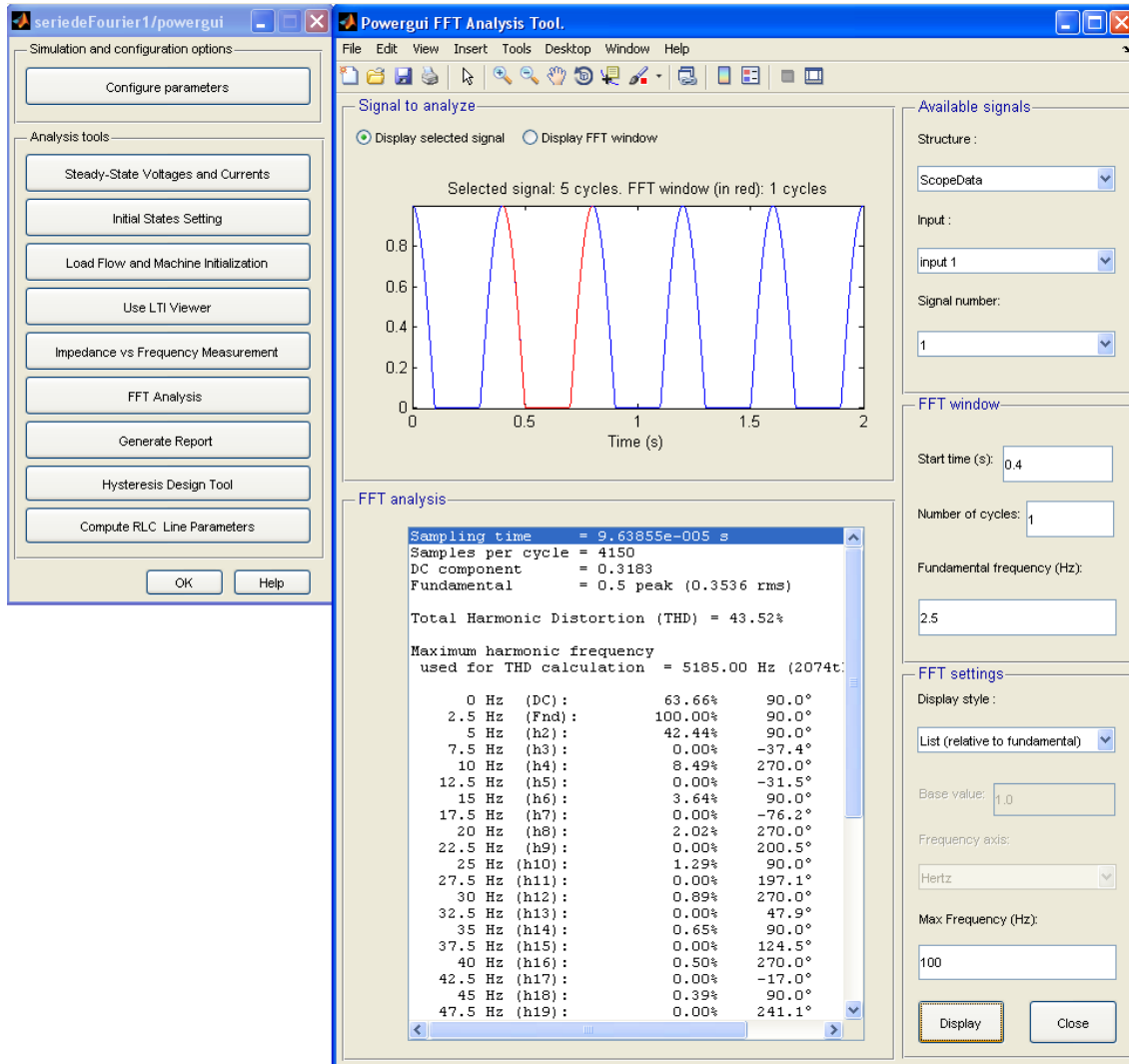


Figura 3.9 Serie trigonométrica de Fourier de $v(t)$ en forma *amplitud-fase*.

3. Encuentre la serie de Fourier de la onda triangular de voltaje periódico mostrada en la figura 3.10.

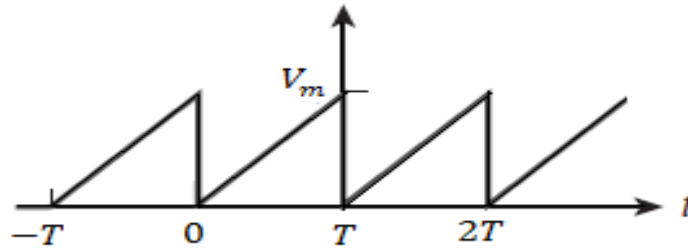


Figura 3.10 Corriente periódica con forma de onda diente de sierra.

R:

Al determinar a_0 , a_n y b_n , puede escogerse el valor de t_0 . Para el voltaje periódico de la figura, la mejor selección para t_0 es cero. Cualquier otra elección hace las integraciones requeridas más difíciles.

La expresión para $v(t)$ entre 0 y T son

$$v(t) = \left(\frac{V_m}{T}\right) t.$$

La ecuación para a_0 es

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{V_m}{T}\right) t dt = \frac{1}{2} V_m$$

Este es claramente el valor común de la forma de la onda mostrada en la figura

La ecuación para el valor enésimo de a_n es:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T \left(\frac{V_m}{T}\right) t \cos n\omega_0 t dt \\ &= \frac{2V_m}{T^2} \left(\frac{1}{n^2\omega_0^2} \cos n\omega_0 t + \frac{t}{n\omega_0} \sin n\omega_0 t \right) \Big|_0^T \\ &= \frac{2V_m}{T^2} \left[\frac{1}{n^2\omega_0^2} (\cos 2\pi n - 1) \right] = 0 \quad \text{para toda } n \end{aligned}$$

La ecuación para el valor enésimo de b_n es

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T \left(\frac{V_m}{T} \right) t \operatorname{sen} n\omega_0 t dt \\
 &= \frac{2V_m}{T^2} \left(\frac{1}{n^2\omega_0^2} \operatorname{sen} n\omega_0 t - \frac{t}{n\omega_0} \cos n\omega_0 t \right) \Big|_0^T \\
 &= \frac{2V_m}{T^2} \left(0 - \frac{T}{n\omega_0} \cos 2\pi n \right) \\
 &= \frac{-V_m}{\pi n}
 \end{aligned}$$

a serie de Fourier para $v(t)$ es

$$\begin{aligned}
 v(t) &= \frac{V_m}{2} - \frac{V_m}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} n\omega_0 t \\
 &= \frac{V_m}{2} - \frac{V_m}{\pi} \operatorname{sen} \omega_0 t - \frac{V_m}{2\pi} \operatorname{sen} 2\omega_0 t - \frac{V_m}{3\pi} \operatorname{sen} 3\omega_0 t - \dots
 \end{aligned}$$

R Matlab:

```
clear
```

```
clc
```

```
clf
```

```
f1 = 1/1; % f1=1/T
```

```
inv = 1/f1; inc = 1/(8000*f1); tnum = inv;
```

```
t = 0:inc:tnum;
```

```
g=1/1*t.*[ones(1,8001)]; % Para cada forma de onda se requiere escribir la expresión correcta
```

```
N = length(g);
```

```
num = 20;
```

```

for i = 1:num

for m = 1:N

cint(m) = exp(-j*2*pi*(i-1)*m/N)*g(m);

end

c(i) = sum(cint)/N;

end

cmag = 2*abs(c); % Se multiplica por 2 porque solo se consideran frecuencias positivas

cmag(1)=cmag(1)/2;

cphase = angle(c);

subplot(311)

% Dibujo del primer período de la forma de onda

plot(t,g,'LineWidth',4)

title('Señal de voltaje periódica con forma de onda diente de sierra')

xlabel('t (s)')

ylabel('v(t) (V)')

% Ploteo del espectro de amplitud y fase

f = (0:num-1)*f1;

subplot(312), stem(f(1:20),cmag(1:20))

title('Espectro de amplitud')

xlabel('Frecuencia (Hz)')

```

```

ylabel('An (V)')

subplot(313), stem(f(1:20),cphase(1:20)*180/pi)

title('Espectro de fase')

xlabel('Frecuencia (Hz)')

ylabel('\theta (grados)')

N=1:20;

disp('Coeficientes de la serie de Fourier en forma trigonométrica:')

disp('')

Espectro=[[N-1]' [cmag(N)]' [cphase(N)*180/pi]'];

disp(' Arm. An Fase')

disp('')

disp(Espectro)

```

Resultados numéricos y gráficos que se obtienen al ejecutar el archivo script:

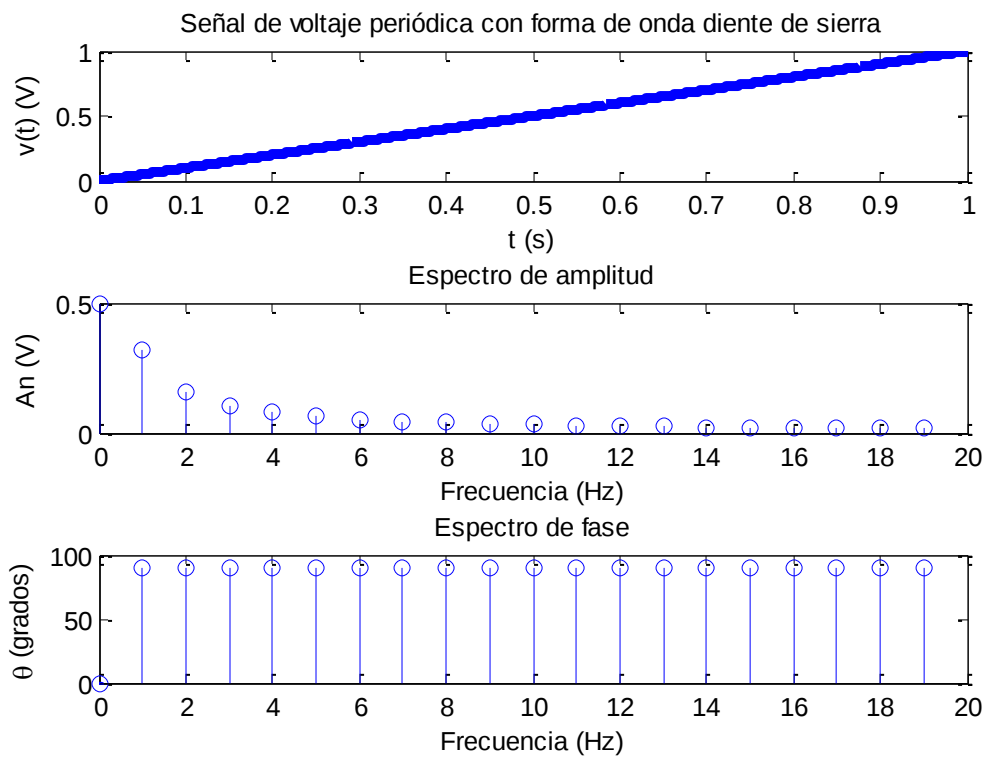
Coeficientes de la serie de Fourier en forma trigonométrica (los ángulos corresponden a funciones coseno):

Coeficientes de la serie de Fourier en forma trigonométrica:

Arm.	A_n	Fase
0	0.5000	0
1.0000	0.3183	89.9775
2.0000	0.1592	89.9550
3.0000	0.1061	89.9325
4.0000	0.0796	89.9100
5.0000	0.0637	89.8875
6.0000	0.0531	89.8650
7.0000	0.0455	89.8425
8.0000	0.0398	89.8200
9.0000	0.0354	89.7975
10.0000	0.0318	89.7750
11.0000	0.0289	89.7525
12.0000	0.0265	89.7300
13.0000	0.0245	89.7075
14.0000	0.0227	89.6850
15.0000	0.0212	89.6625
16.0000	0.0199	89.6400
17.0000	0.0187	89.6175
18.0000	0.0177	89.5951
19.0000	0.0168	89.5726

En la figura 3.11 se muestra los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier de $v(t)$ en forma amplitud–fase.

En la figura 3.12 se muestra la solución del ejercicio a través del diagrama de bloques de Simulink, el cual se modela a partir de los elementos del circuito y sus bloques correspondientes en el programa. Utilizando los bloques que corresponden a los instrumentos de medición se obtienen los parámetros del circuito, siendo estos los mismos que los obtenidos a través de la resolución analítica y las instrucciones del MATLAB. En la figura 3.13 se muestra una señal con forma de onda diente de sierra y en la figura 3.14 se observa a través de la herramienta Powergui FFT Analysis Tool, la serie trigonométrica de Fourier de $f(t)$ en forma amplitud–fase.



Figura

3.11 Coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier en forma *amplitud-fase*.

R Simulink:

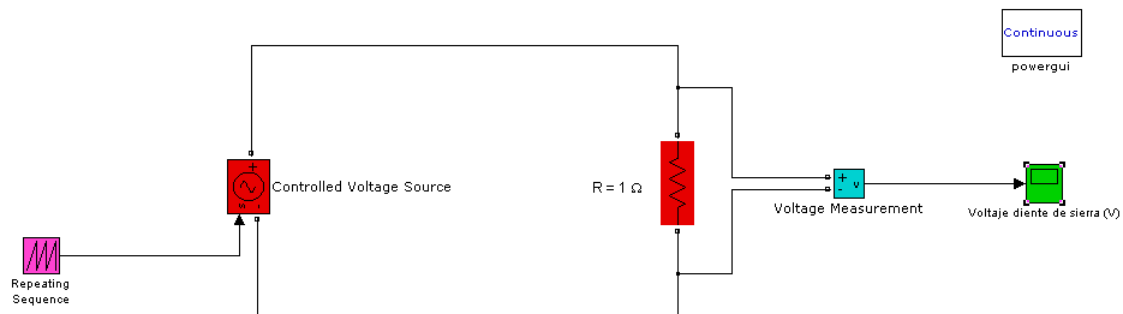


Figura 3.12 Archivo .mdl que permite generar la señal periódica de voltaje con forma de onda diente de sierra.

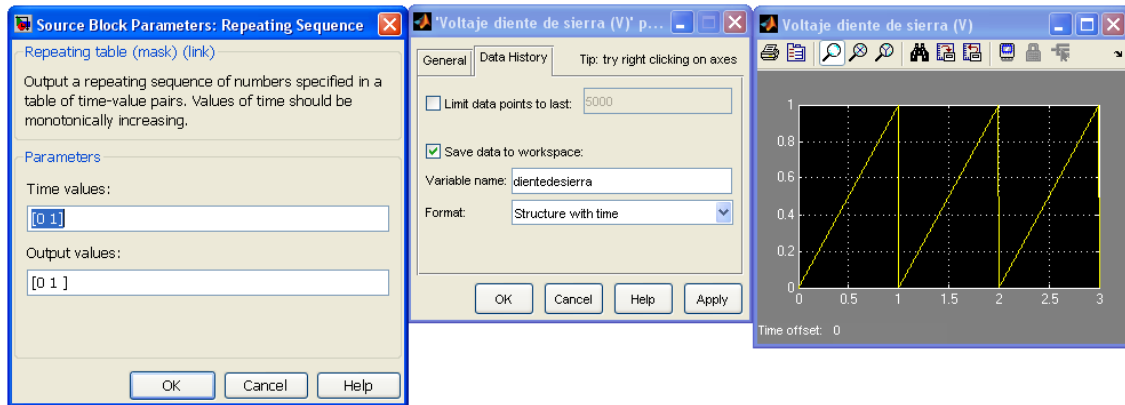
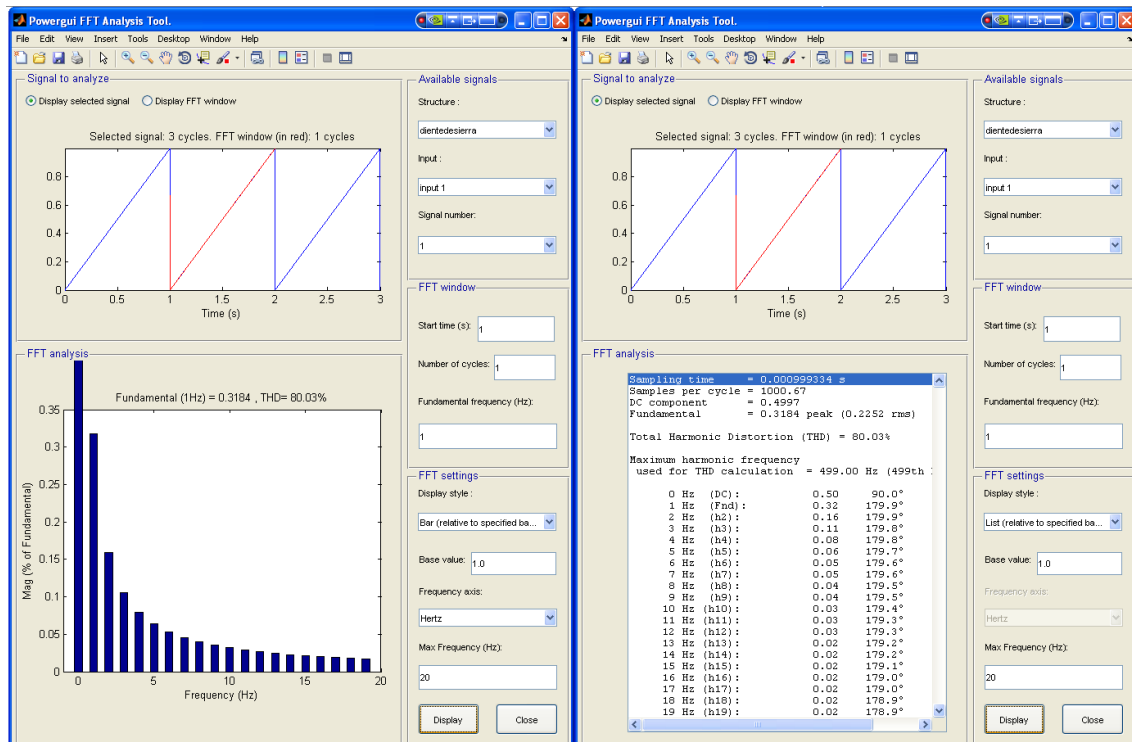


Figura 3.13 Señal con forma de onda diente de sierra.



Figura

3.14 Serie trigonométrica de Fourier de $v(t)$ en forma *amplitud-fase*.

4. Determinar la serie compleja de Fourier (en forma exponencial) de la onda de diente de sierra de la figura 3.15. Graficar los espectros de amplitud y de fase.

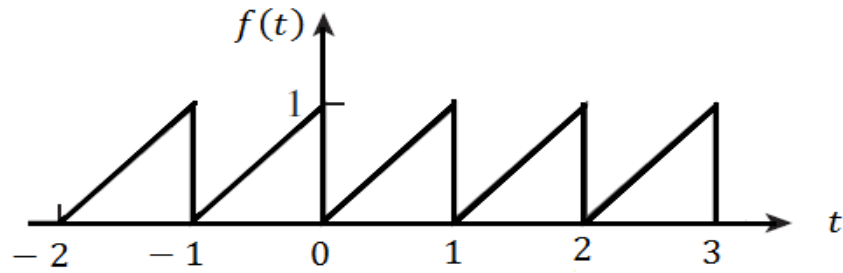


Figura 3.15 Señal periódica con forma de onda diente de sierra.

R:

Según la figura, $f(t) = t$, $0 < t < 1$, $T = 1$, por lo que $\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi$.

De aquí que:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{1} \int_0^1 t e^{-j2n\pi t} dt$$

Pero

$$\int t e^{at} dt = \frac{e^{at}}{a^2} (at - 1) + C$$

La aplicación de esto a la ecuación anterior produce:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{e^{-j2n\pi t}}{(-j2n\pi)^2} (-j2n\pi t - 1) \Big|_0^1 \\ &= \frac{e^{-j2n\pi} (-j2n\pi - 1) + 1}{-4n^2\pi^2} \end{aligned}$$

También en este caso:

$$e^{-j2n\pi} = \cos 2n\pi - j\sin 2n\pi = 1 - j0 = 1$$

de manera que la ecuación anterior se convierte en:

$$c_n = \frac{-j2n\pi}{-4n^2\pi^2} = \frac{j}{2n\pi}$$

Esta expresión no incluye el caso cuando $n = 0$.

Cuando $n = 0$:

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{1} \int_0^1 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = 0.5$$

Por consiguiente (para $n \neq 0$):

$$f(t) = 0.5 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{j}{2n\pi} e^{j2n\pi t}$$

R Matlab:

Archivo script para la determinación de los coeficientes de la serie de Fourier en forma exponencial, de una señal periódica:

```
clear
```

```
clc
```

```
clf
```

```
T=1; f1 = 1/T; % Introducir el período de la señal
```

```
inv = 1/f1; inc = 1/(8000*f1); tnum = inv;
```

```
t = 0:inc:tnum;
```

```
g=1/1*t.*[ones(1,8001)]; % Para cada forma de onda se requiere escribir la expresión correcta
```

```
N = length(g);
```

```
num = 20; % Escribir el número de componentes deseadas
```

```
for i = 1:2*num
```

```
for m = 1:N
```

```
cint(m) = exp(-j*2*pi*(i-num)*m/N)*g(m);
```

```
end
```

```

c(i) = sum(cint)/N;

end

cmag = abs(c);

cmag(1)=cmag(1);

cphase = angle(c);

subplot(311)

% Dibujo del primer periodo de la forma de onda

plot(t,g,'LineWidth',4)

title('Un ciclo de la señal periódica')

xlabel('t (s)')

ylabel('v(t) (V)')

% Ploteo del espectro de amplitud y fase

f = -(num-1)*f1:f1:(num-1)*f1;

subplot(312), stem(f(1:2*num-1),cmag(1:2*num-1))

title('Espectro de amplitud')

xlabel('Frecuencia (Hz)')

ylabel('|Cn| (V)')

subplot(313), stem(f(1:2*num-1),cphase(1:2*num-1)*180/pi)

title('Espectro de fase')

xlabel('Frecuencia (Hz)')

```

```

ylabel('\theta (grados)')

N=1:2*num-1;

disp('Coeficientes de la serie de Fourier en forma exponencial:')

disp('')

Espectro=[[-(num-1)+N-1]' [cmag(N)] [cphase(N)*180/pi]'];

disp(' n |Cn| Fase')

disp('')

disp(Espectro)

```

Resultados numéricos y gráficos que se obtienen al ejecutar el archivo script:

Coeficientes de la serie de Fourier en forma exponencial:

n	Cn	Fase
-19.0000	0.0084	-89.5726
-18.0000	0.0088	-89.5951
-17.0000	0.0094	-89.6175
-16.0000	0.0099	-89.6400
-15.0000	0.0106	-89.6625
-14.0000	0.0114	-89.6850
-13.0000	0.0122	-89.7075
-12.0000	0.0133	-89.7300
-11.0000	0.0145	-89.7525
-10.0000	0.0159	-89.7750
-9.0000	0.0177	-89.7975
-8.0000	0.0199	-89.8200
-7.0000	0.0227	-89.8425
-6.0000	0.0265	-89.8650
-5.0000	0.0318	-89.8875
-4.0000	0.0398	-89.9100
-3.0000	0.0531	-89.9325
-2.0000	0.0796	-89.9550
-1.0000	0.1592	-89.9775
0	0.5000	0
1.0000	0.1592	89.9775
2.0000	0.0796	89.9550
3.0000	0.0531	89.9325
4.0000	0.0398	89.9100
5.0000	0.0318	89.8875
6.0000	0.0265	89.8650
7.0000	0.0227	89.8425
8.0000	0.0199	89.8200
9.0000	0.0177	89.7975
10.0000	0.0159	89.7750
11.0000	0.0145	89.7525
12.0000	0.0133	89.7300
13.0000	0.0122	89.7075
14.0000	0.0114	89.6850
15.0000	0.0106	89.6625
16.0000	0.0099	89.6400
17.0000	0.0094	89.6175
18.0000	0.0088	89.5951
19.0000	0.0084	89.5726

En la figura 3.16 se muestra los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier de $v(t)$ en forma amplitud-fase.

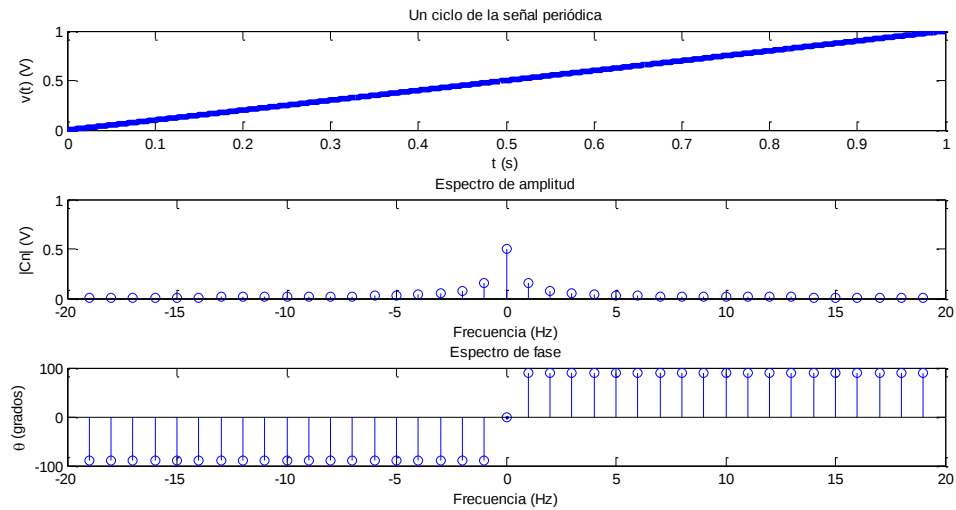


Figura 3.16 Coeficientes de la serie de Fourier en forma exponencial.

5. En el circuito mostrado en la figura 3.17 se desea calcular la potencia total generada por la fuente. Se conoce que:

$$v(t) = 30 + 100 \sin t + 40 \sin(3t + 20^\circ) \text{ V}$$

$$L = 12 \text{ H}$$

$$C = \frac{1}{30} \text{ F}$$

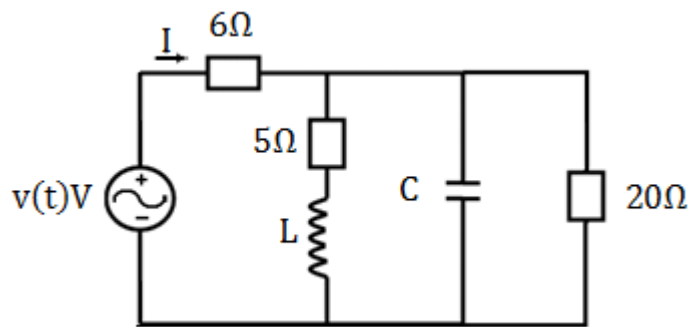


Figura 3.17 Circuito RLC mixto.

R:

Considerando la componente de corriente directa:

En estado estable, corriente directa, el inductor se comporta como un cortocircuito y el capacitor como un circuito abierto.

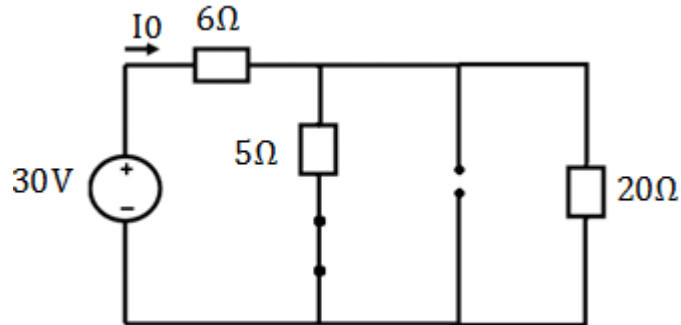


Figura 3.19 Circuito para calcular la componente de corriente directa.

$$I_0 = \frac{30}{6 + \frac{(5)(20)}{5+20}} = 3A$$

Potencia generada debido a la componente de corriente directa:

$$P_0 = V_0 I_0 = (30)(3) = 90W$$

Considerando el primer armónico ($\omega_1 = 1 \text{ rad/s}$):

$$X_{L1} = \omega_1 L = 12\Omega, X_{C1} = \frac{1}{\omega_1 C} = 30\Omega$$

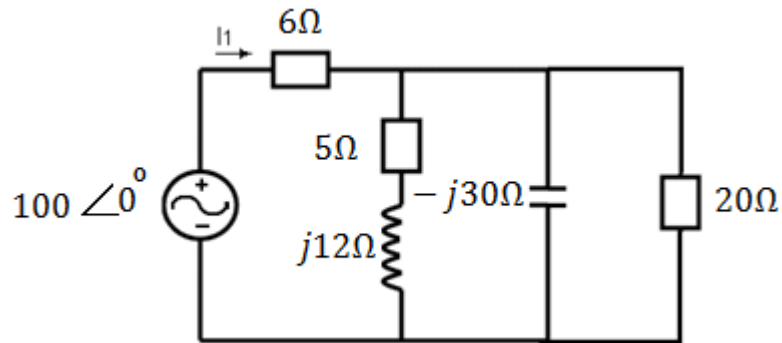


Figura 3.20 Circuito para calcular el primer armónico.

$$Z_{eq1} = 6 + \frac{1}{\frac{1}{5+j12} + \frac{1}{-j30} + \frac{1}{20}} = 17 \angle 16.68^\circ \Omega$$

$$I_1 = \frac{100 \angle 0^\circ}{Z_{eq1}} = \frac{100 \angle 0^\circ}{17 \angle 16.68^\circ} = 5.88 \angle -16.68^\circ A$$

$$P_1 = \frac{V_{m1} I_{m1}}{2} \cos(a_{v1} - a_{i1}) = \frac{(100)(5.88)}{2} \cos(0^\circ - (-16.68)) = 281.63 W$$

Considerando el tercer armónico:

$$X_{L3} = 3X_{L1} = 3\omega_1 L = 36 \Omega, X_{C3} = \frac{X_{C1}}{3} = \frac{1}{3\omega_1 C} = 10 \Omega$$

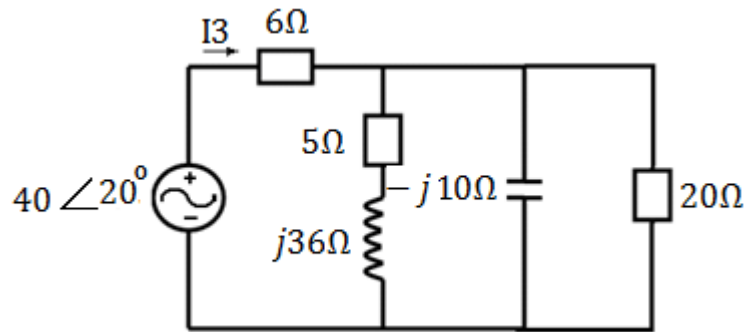


Figura 3.21 Circuito para calcular el tercer armónico.

$$Z_{eq3} = 6 + \frac{1}{\frac{1}{5+j36} + \frac{1}{-j10} + \frac{1}{20}} = 15.40 \angle -35.33^\circ \Omega$$

$$I_3 = \frac{40 \angle 20^\circ}{Z_{eq3}} = \frac{40 \angle 20^\circ}{15.40 \angle -35.33^\circ} = 2.6 \angle 55.33^\circ A$$

$$P_3 = \frac{V_{m3} I_{m3}}{2} \cos(a_{v3} - a_{i3}) = \frac{(40)(2.6)}{2} \cos(20^\circ - 55.33^\circ) = 42.42 W$$

Potencia total generada por la fuente:

$$P_T = P_0 + P_1 + P_3 = 90 + 281.63 + 42.42 = 414 W$$

R Matlab:

```
>> Vo=30;Io=3;Vm1=100;Im1=5.88;alfav1=0;alfai1=-16.68*pi/180;Vm3=40;Im3=2.6;alfav3=20*pi/180;alfai3=55.33*pi/180;
```

```
>> Po=Vo*Io
```

$P_0 =$

90

$\gg P_1 = (V_{m1} \cdot I_{m1}) / 2 \cdot \cos(\alpha_{fv1} - \alpha_{fi1})$

$P_1 =$

281.6293

$\gg P_3 = (V_{m3} \cdot I_{m3}) / 2 \cdot \cos(\alpha_{fv3} - \alpha_{fi3})$

$P_3 =$

42.4234

R Simulink:

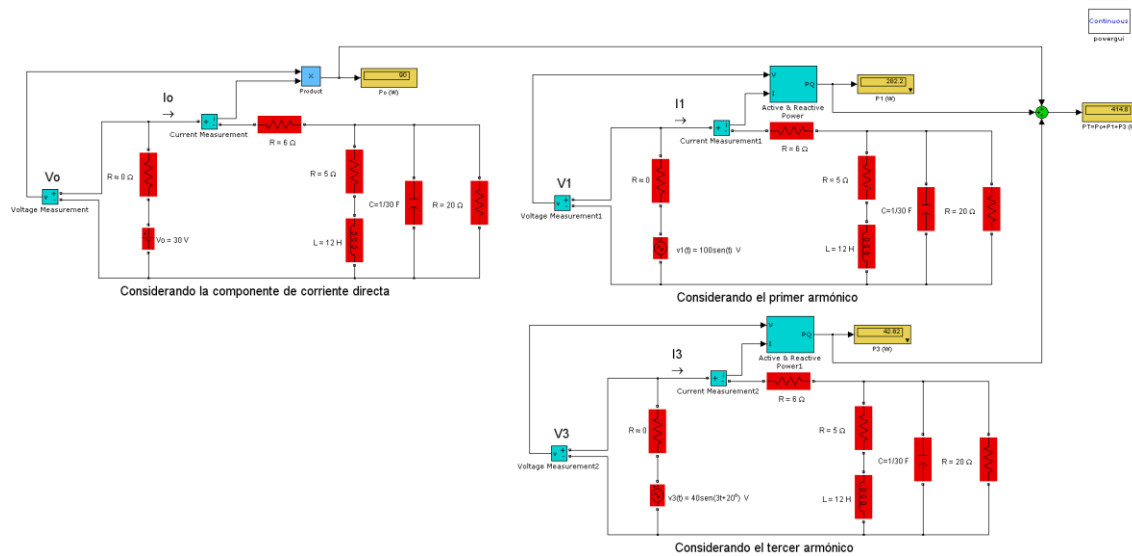


Figura 3.22 Archivo .mdl que permite calcular la potencia total generada por la fuente.

CONCLUSIONES

Luego de cumplirse con los objetivos propuestos se arribaron a las siguientes conclusiones:

1. Los cambios que trae consigo el plan de estudio “E”, en cuanto a disminución de horas clases de las asignaturas, conlleva al aumento del tiempo dedicado al estudio independiente por parte de los estudiantes.
2. Los materiales didácticos y las guías de estudio jugarán un papel fundamental en la nueva reestructuración propuesta por el Ministerio de Educación Superior en el plan de estudio “E”.
3. El uso del MatLab en especial su simulador facilita en gran medida la resolución de problemas tanto docentes como de la práctica, de ahí la importancia de su estudio en las distintas carreras de la Facultad de Ingeniería Eléctrica
4. Con este trabajo queda conformado un material que cumple con las necesidades de los estudiantes, sirviendo de guía para facilitar el estudio independiente.

RECOMENDACIONES

1. Colocar este material en la red para que pueda ser utilizado por todos los que lo necesiten, tanto estudiantes como profesores.
2. Continuar con la elaboración de otros materiales didácticos, que abarquen mayor cantidad de contenidos, en los cuales los ejercicios vayan aumentando su dificultad y su vinculación con la práctica.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] "Documento Base Para El Diseño De Los Planes De Estudio ``E´´," ed: Ministerio de Educación Superior, 2018.
- [2] M. Galdeano. (2006, Los materiales didácticos en Educación a Distancia (I): Funciones y características. *Recuperado en:* http://virtual.unne.edu.ar/paramail/BoletinN20_Articulo_materiales.html.
- [3] "Lineamientos metodológicos para la elaboración de Material Didáctico.," ed. Universidad Nacional Autónoma de México: Departamento de Titulación y Exámenes Profesionales, 2012.
- [4] "Documento Base Para El Diseño De Los Planes De Estudio ``E´´," ed: Ministerio de Educación Superior, 2016.
- [5] M. C. Fernández Montefiore, "Utilización de Series de Fourier para resolver circuitos con una señal de entrada periódica," ed. Argentina: Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, 2013.
- [6] A. M. Scarfone, "On the Deformed Cyclic Functions and the Generalized Fourier Series in the Framework of the Algebra," ed. Corso Duca degli Abruzzi 24,Torino I-10129, Italy: Istituto Sistemi Complessi (ISC-CNR) c/o Politecnico di Torino, 2015.
- [7] M. Garcia Montes and O. Gonzalez Ricardo. (2017). *Aplicacion de las TIC en la Educacion Superior*.
- [8] F. Godiño, "Tutorial de Matlab," ed. Mexico: Gerencia Departamentall Puno, 2000.
- [9] H. Augusto, "Introducción Básica a Matlab," ed. Universidad de Chile: Departamento de Ingenieria de Minas, 2000.
- [10] F. M. Rodríguez, " Aplicación del Simulink a la solución de ejercicios de la asignatura CE II según plan de estudio E," Trabajo de diploma, Departamento de Electroenergética, Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas, Santa Clara, 2016.
- [11] M. Vargas, M. Pérez, and L. M. Saravia, *Materiales educativos: Conceptos en construcción*. Bogotá: Convenio Andrés Bello, 2001.
- [12] J. A. Svoboda and R. C. Dorf, *Introductions to Electric Circuits*, 9th edition ed. United States of America: Don Fowley, 2014.
- [13] C. K. Alexander and M. N. O. Sadiku, *Fundamentos de Circuitos Eléctricos*, Tercera Edicion ed. Ciudad de México: Universidad Iberoamericana, 2006.
- [14] R. Rodriguez del Rio and E. Zuaza, *Series de Fourier y fenómeno de Gibbs*. Universidad Complutense de Madrid 28040 Madrid, España: Departamento de Matemática Aplicada, 2014.

- [15] J. Bird, *Electrical Circuit Theory and Technology*, Second Edition ed. Burlington, MA 01803: Oxford OX2 8DP ,200 Wheeler Rd, 2003.
- [16] D. Lasaosa Medarde "Calculo de sumas infinitas de potencias pares negativas de enteros utilizando series de Fourier," 2006.
- [17] T. Ooura, *A Double Exponential Formula for the Fourier Transforms*, English ed. Kyoto University.: Research Institute for Mathematical Sciences,, 2005.

ANEXOS

Anexo 1: Ejercicios propuestos

1. Una función periódica $f(t)$ se describe como sigue: $f(t) = -4$, para $0 < t < 0.3$; $f(t) = 0$, para $0.4 < t < 0.5$; $T=0.5$. Evaluar: (a) a_0 ; (b) a_1 ; (c) b_1 .

R: 18.2; -1.200; 1.383; -4.44

2. Encuentre la serie de Fourier de la onda cuadrada de la figura 1. Grafique los espectros de amplitud y de fase.

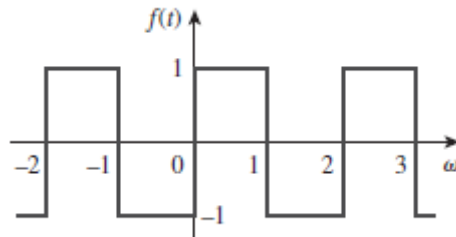


Figura 1 Onda Cuadrada

R: $f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\pi t, n = 2k - 1$. Los espectros se muestran en la figura 2

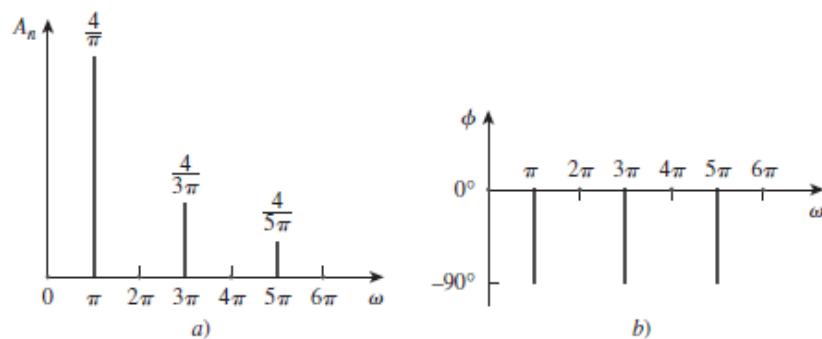


Figura 2 Espectros de la señal de la función de onda cuadrada

3. Para la función periódica de voltaje mostrada en la figura 3 si $V_m = 9\pi$ V.

Escriba la serie de Fourier incluyendo el 5to armónico

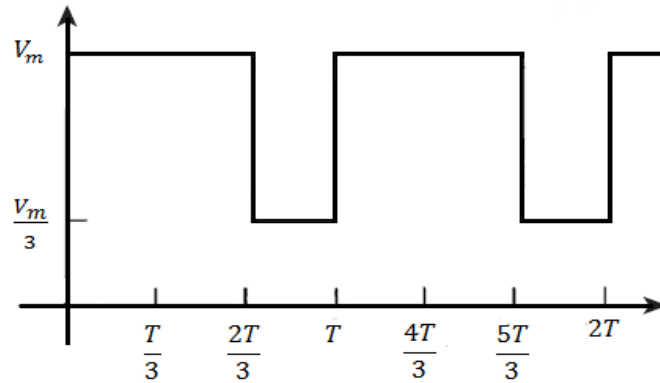


Figura 3 Señal de voltaje sin simetría

R: $v(t) = 21.99 - 5.2 \cos 50t + 9 \sin 50t + 2.6 \cos 100t + 4.5 \sin 100t$

$-1.3 \cos 200t + 2.25 \sin 200t + 1.04 \cos 250t + 1.8 \sin 250t \text{ V.}$

4. Encuentre la serie de Fourier para el voltaje periódico mostrado en la figura 4

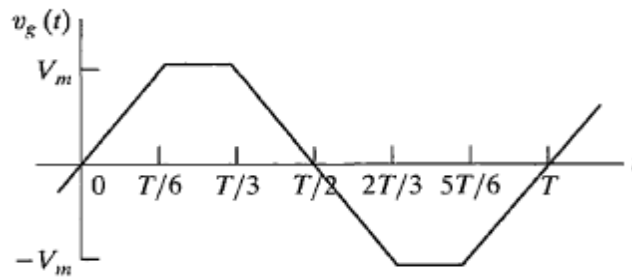


Figura 4 Señal de voltaje periódico

R: $V_g(t) = \frac{12V_m}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/3)}{n^2} \sin n\omega_0 t.$

5. Encuentre la serie de Fourier de la onda de voltaje periódico mostrado en la figura 5. Definida como

$v(t) = 100 \sin \frac{2\pi}{T} t \text{ V,} \quad 0 \leq t \leq \frac{T}{2};$

$v(t) = 60 \sin \frac{2\pi}{T} (T-t) \text{ V,} \quad \frac{T}{2} \leq t \leq T.$

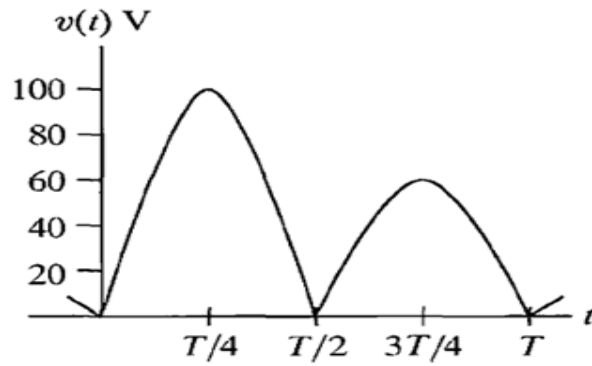


Figura 5 Señal de voltaje periódico

$$R: \frac{160}{\pi} + 20 \sin \omega_0 t - \frac{320}{\pi} \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{\cos(n\omega_0 t)}{(n^2-1)} V$$

6. Determine la serie de Fourier de la forma de onda periódica mostrada en la figura 6.

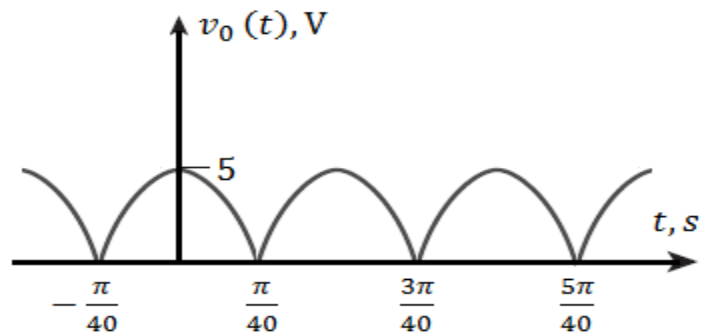
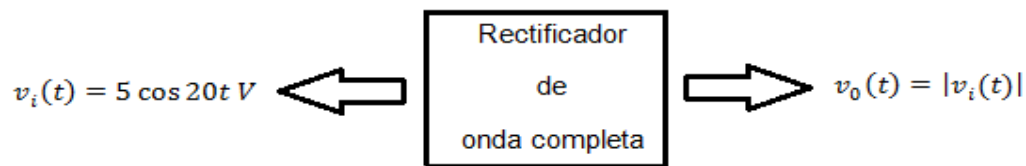


Figura 6 Forma de onda periódica

R:

$$V_0(t) = \frac{10}{\pi} + \frac{20}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1^n}{1-4n^2} \cos(40 nt)$$

7. Determine el valor de la corriente periódica rms

$$i(t) = 8 + 30 \cos 2t - 20 \sin 2t + 15 \cos 4t - 10 \sin 4t \text{ A}$$

R: 29.61 A

8. La tensión y la corriente en las terminales de un circuito son:

$$v(t) = 80 + 120 \cos 120\pi t + 60 \cos(360\pi t - 30^\circ)$$

$$i(t) = 5 \cos(120\pi t - 10^\circ) + 2 \cos(360\pi t - 60^\circ)$$

Determine la potencia promedio que absorbe el circuito.

R: 347,4 W

9. En el circuito de la figura 7, determinar la respuesta $v_o(t)$ del circuito.

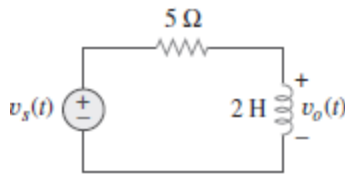


Figura 7 Circuito eléctrico lineal

$$v_s(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\pi t, \quad n = 2k - 1$$

R:

$$v_o(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{25+4n^2\pi^2}} \cos(n\pi t - \tan^{-1} \frac{2n\pi}{5}), \quad n = 2k - 1$$

Los primeros tres términos ($k = 1, 2, 3$ o $n = 1, 3, 5$) de las armónicas impares en la sumatoria dan:

$$v_o(t) = 0.4981 \cos(\pi t - 51.49^\circ) + 0.2051 \cos(3\pi t - 75.14^\circ)$$

$$+ 0.1257 \cos(5\pi t - 80.96^\circ) + \dots \text{ V}$$