

*Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas*

*Facultad de Matemática, Física y Computación*

*Departamento de Matemática*



*Sistema integrado de medios para favorecer la  
comprensión de las ecuaciones en la Matemática Básica*

***TESIS PRESENTADA EN OPCIÓN AL TÍTULO ACADÉMICO DE MÁSTER  
EN MATEMÁTICA APLICADA***

*Autor:* *Lic. Lucrecia Iliana Abelenda Lorenzo*

*Tutora:* *Dra. Dámasa Martínez Martínez*

*2008*

## **RESUMEN**

El presente trabajo forma parte de un trabajo de investigación que se ha venido desarrollando en el Dpto. de Matemáticas de la Facultad de Matemática, Física y Computación de La Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas que tributa al perfeccionamiento del proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática en el contexto universitario actual.

Responde a la necesidad diagnosticada de preparación del estudiante en los contenidos del Algebra para la Matemática Básica y en específico en los contenidos de ecuaciones que se estudian en la Matemática Básica. A partir de la aplicación de métodos de investigación pedagógica se diagnosticó las dificultades que se presentan relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje para la comprensión de las ecuaciones en la Matemática Básica y en consecuencia se propone un sistema integrado de medios para favorecer la comprensión de las ecuaciones en la Matemática Básica.

Permite una preparación más eficiente a los estudiantes en la Universalización de La Educación Superior, proponiendo un sistema de guías y materiales que le permite al estudiante, ante la no comprensión de un concepto matemático, la posibilidad de utilizar otros recursos didácticos disponibles; además la posibilidad de adquirir hábitos y habilidades en el uso de otros recursos y con ello el empleo de medios más eficiente con el objetivo de favorecer la comprensión de la matemática en esos jóvenes que hoy se incorporan en nuestros territorios a la Universidad Cubana.

Los materiales pueden ser utilizados por los estudiantes en función de sus propias necesidades y les complementan los contenidos que les han impartido los docentes, reforzando de esta manera el camino a la comprensión matemática en la modalidad de aprendizaje semipresencial.

## INTRODUCCIÓN

En Cuba se cuenta con una política educacional aprobada en el 1er Congreso del PCC y ratificadas en los Congresos celebrados posteriormente, donde se establece que la educación intelectual:

“...tiene por objeto desarrollar las potencialidades del pensamiento del individuo para la adquisición de conocimientos, interpretar con criterio objetivo los fenómenos de la naturaleza y la sociedad, consecuente con los principios del materialismo histórico y dialectico. Ello lo hará, además apto para asimilar los logros de la Revolución Científico -Técnica Contemporánea “.

Con el Triunfo de la Revolución en el año 1959, la Universidad cubana abandona su carácter elitista, se pone al servicio de la sociedad e inicia un proceso de profundas y continuas transformaciones dirigidas a ampliar el acceso a la misma de los diferentes sectores de la población, se establece la educación gratuita, se crea el plan de becas universitarias, se multiplican las universidades, se abren nuevas carreras, se incrementan significativamente las matrículas, surgen las unidades docentes, se estructura un sistema de estudios de postgrado y se diversifican los tipos de curso para posibilitar los estudios de nivel superior a los trabajadores, entre ellos los cursos vespertinos nocturnos, los cursos por encuentros y la educación a distancia.

La creación de las sedes universitarias municipales dio una nueva dimensión a la universidad cubana, posibilitando la ampliación de acceso y el estudio permanente a lo largo de toda la vida. Se conformó para ello un *nuevo modelo pedagógico*, que se ha venido aplicando en todas las sedes universitarias desde hace varios cursos, con un apreciable incremento de la matrícula en cada año, que hoy constituye la principal fuente de acceso a la educación superior.

En la actualidad se trabaja desde el M.E.S. por lograr establecer, en la educación superior cubana, solo dos modalidades de estudio diferentes: la *presencial*, que se aplica en los Cursos Regulares Diurnos, propia para estudiantes que dedican todo su tiempo al estudio; y la *semipresencial*, para el resto de los tipos de curso, en la que por lo general los estudiantes comparten el estudio con otras ocupaciones y que hoy representa cerca del 80 % de los 620000 estudiantes que alcanza la matrícula total. De ahí la importancia que tiene que prestársele a esta modalidad.

Dentro de la referida modalidad se establece estatalmente dentro del plan de estudio de las carreras de ingeniería la Enseñanza de la Matemática en Cuba y esta se presenta como una ciencia con un marcado carácter científico-experimental, apoyada sobre todo en las condiciones concretas de las escuelas cubanas, en las experiencias propias acumuladas, y en las influencias recibidas durante las décadas del 70 y del 80, de países, como los hoy extintos RDA y la Unión de Repúblicas Socialistas

Soviéticas (URSS) que aportaron algunas de las bases teóricas sobre las cuales se ha edificado la didáctica de la Matemática Cubana.

La realización de investigaciones científicas, las experiencias obtenidas en la labor docente y la validación permanente de los planes y programas que se han introducido, han permitido la elaboración paulatina de una concepción metodológica para la Enseñanza de la Matemática, en correspondencia con el desarrollo de las ciencias pedagógicas y las normas sociales impuestas por las profundas transformaciones ocurridas en el país con el triunfo revolucionario.

Una de las tendencias en la modernización de la clase en la actualidad lo constituye la utilización de los más variados métodos y medios de enseñanza lo que contribuye, además, a resolver la contradicción entre el volumen siempre creciente de información que se debe transmitir y el constante tiempo escolar para la educación de los individuos.

En este contexto un sistema de Medios tiene un significado especial, su introducción determina modificaciones en la forma de enseñar, en los procedimientos que pueden utilizar los estudiantes para aprender, en los contenidos que se estudian, en las habilidades que se deben desarrollar, y por ende en los efectos que se pretenden lograr en la formación del educando; lo que presupone la necesidad de que dicha introducción sea rigurosamente estudiada en sus múltiples aspectos.

La base teórica necesaria para emprender investigaciones se puede encontrar en los múltiples proyectos realizados en el mundo en este sentido. Sin embargo tales investigaciones realizadas no apuntan hacia el uso de un Sistema Integrado de Medios (Dirección de Tecnología Educativa-MES 2006), principal soporte de la enseñanza con la modalidad Semipresencial de la *Nueva Universidad* lo cual ha suscitado la mayor demanda, dado que no se trata de un medio individual, sino de un sistema que de forma valiosa facilite la asimilación individual de la información para elevar a planos superiores el cumplimiento de los objetivos y funciones que tiene la Matemática en el currículo escolar, pues permite poner el énfasis en la comprensión teórica y en el desarrollo de capacidades y habilidades, a la vez que propicie una nueva forma de relación con el contenido y permite modificar la forma de enfrentar la enseñanza de esta ciencia. Tal situación se presenta en la enseñanza de la Matemática Básica y en particular del Álgebra que se imparte en las carreras de Ingeniería no existe un medio en particular que permita integrar todos los contenidos de la enseñanza de la Matemática Básica, ni proveer los cambios que hay que realizar para lograrlo.

En un lenguaje más esquemático, podría decirse que no se ha previsto el efecto de un Sistema de Medios sobre la Enseñanza de la Matemática Básica ni se ha desarrollado una concepción que incorpore este instrumento a la Matemática.

Actualmente los alumnos que llegan a nuestras aulas universitarias han presentado ciertas dificultades en el aprendizaje de la Matemática y en particular en el aprendizaje de las ecuaciones matemática elemento fundamental dentro del Álgebra, en su tránsito por la enseñanza media. De lo que puede inferirse que estas insuficiencias en el desarrollo de habilidades son limitaciones para lograr un aprendizaje significativo.

Esta situación obliga a prestar una especial atención al análisis de las formas de enseñanza-aprendizaje en las ecuaciones en el nivel superior tanto en el modo de impartir el conocimiento como en el de formar un joven que intervenga de manera activa en el proceso revolucionario que lleva a cabo nuestro país.

Históricamente la enseñanza de las ecuaciones de la Matemática Básica se ha desarrollado con la utilización de la tiza y la pizarra o el papel y el lápiz los cuáles son medios estáticos. Sin embargo la utilización de la Computadora permite la realización de su enseñanza sobre una base dinámica, donde es posible presentar la información matemática de varias formas y sobre todo la dinámica e interactiva.

En este sentido la Universidad Central Marta Abreu de Las Villas, la Facultad de Matemática, Física y Computación y en particular la Carrera de Matemática tienen como estrategia número uno la calidad en la formación del profesional que les permitirá cumplir cabalmente su misión en la sociedad.

Partiendo de que la gran tarea de la Matemática en este siglo XXI es seguir contribuyendo de múltiples formas al progreso de la cultura humana y una de las vías de llevar a cabo esta contribución es conservando y transmitiendo el legado matemático acumulado durante muchos siglos de conocimiento. Entonces, la mejor manera de transmitir esa riqueza cultural resulta ser un trabajo extraordinariamente complejo, que requiere de un esfuerzo sistemático por parte de la comunidad de los matemáticos.

La enseñanza de esta ciencia afecta a millones de jóvenes y adolescentes. Este carácter eminentemente social y cultural, junto a la complejidad y dificultades detectadas en el aprendizaje de la misma, han contribuido a despertar la preocupación por el estudio de los procesos de comunicación, transmisión y comprensión de las ecuaciones de la Matemática Básica y a interesar al respecto, a una amplia comunidad científica, que viene investigando desde hace mucho tiempo en este campo. Es por ello que se ha encaminado esta investigación hacia esta dirección, pues los docentes se sienten comprometidos, en la formación de los jóvenes que hoy estudian dicha asignatura.

Para el desarrollo de esta investigación se partió de hacer un detallado análisis cualitativo y cuantitativo de los resultados docentes alcanzados por los estudiantes universitarios durante varios cursos. Se obtuvo como resultado que: Gran parte de los estudiantes presentan un bajo aprovechamiento docente, en el primer año donde predominan las puntuaciones de 2 y 3, estas corresponden fundamentalmente a la asignatura de Matemática Básica. Partiendo de este análisis se considera que una de las causas por las cuales estos resultados son bajos, está vinculada directamente con el desarrollo de habilidades adquiridas por el estudiante en los contenidos algebraicos, ya que precisamente con el Álgebra y a través de ella es que se logran las representaciones de variables, objetos y conceptos matemáticos.

Para revertir esta situación se desarrolla el proceso enseñanza y aprendizaje de la asignatura de Matemática Básica encaminado a abordar el "Cómo y Con Qué" se imparte ella. Por otra parte se ha constado que en las carreras de ingeniería donde se estudia la Matemática Básica como disciplina, los estudiantes enfrentan una difícil tarea de aprendizaje, debido a las dificultades naturales que se presentan en la comprensión y aplicación de esta materia. Se hace imprescindible atender esta situación polémica lo que ameritó un estudio más profundo que fundamentara el actuar de todos los componentes del proceso en este modelo pedagógico, debido a lo heterogéneo de la preparación que presenta el estudiantado que ingresa a la universidad por esta vía.

Por no contar con materiales auxiliares para el estudio de la Matemática Básica concebidos con las características que se requieren para el desarrollo de un currículum flexible, cualidad esencial que tienen los planes de estudio de la universalización de la Educación Superior, se hace necesario contar con un sistema integrado de medios que favorezcan la comprensión de las ecuaciones en la Matemática Básica que incluye el uso intensivo de las tecnologías de información en aras de lograr la comprensión matemática de manera significativa.

La discrepancia existente entre la demanda social que tiene la enseñanza de las ecuaciones de la Matemática Básica en las carreras de ingeniería en la Universidad, el vacío teórico respecto al uso de los medios en el particular y las necesidades que en la práctica revelan los estudiantes en este aprendizaje, permiten aseverar que el **Problema Científico** de esta investigación es: ¿Cómo contribuir a la utilización de medios de enseñanza que permitan una mejor comprensión de las ecuaciones de la Matemática Básica, por parte de los estudiantes que ingresan a las carreras universitarias desde el modelo semipresencial?

Este problema se inserta en **el objeto de estudio**: El proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática Básica en las carreras de Ingenierías **y su campo de acción es**: El sistema integrado de

medios de enseñanza para el estudio de las ecuaciones en la asignatura Matemática Básica en las carreras de ingenierías.

El análisis del problema científico y la precisión del objeto y el campo de acción nos llevaron a plantear el siguiente **Objetivo General**: Proponer un sistema integrado de medios para favorecer la comprensión de las ecuaciones en la Matemática Básica, por parte de los estudiantes que ingresan a las carreras de ingenierías desde el modelo semipresencial.

**Los objetivos específicos que responden al objetivo general son:**

1. Determinar el estado actual del problema de investigación y establecimiento del marco teórico de la investigación a través del estudio de la bibliografía.
2. Diagnosticar la situación problemática mediante el análisis de la situación didáctica que se enfrenta.
3. Diseñar desde el punto de vista teórico -metodológico el sistema integrado de medios para favorecer la comprensión de las ecuaciones de la Matemática Básica, por parte de los estudiantes que ingresan a las carreras universitarias desde el modelo semipresencial.

**Las Preguntas Científicas son las siguientes:**

1. ¿Cuáles son los presupuestos teóricos que sustentan un sistema de medios de enseñanza para la comprensión de las ecuaciones en la Matemática Básica, por parte de los estudiantes que ingresan a las carreras de ingenierías?
2. ¿Cuál es el estado actual que tiene la situación problemática mediante el análisis de la situación didáctica que se enfrenta?
3. ¿Cuál debe ser la conformación teórico- metodológica del sistema integrado de medios de enseñanza para la comprensión de ecuaciones de la Matemática Básica, por parte de los estudiantes que ingresan a las carreras de ingenierías?

La investigación se sustenta en el enfoque dialectico-materialista, utilizando tanto métodos cualitativos como cuantitativos.

**Métodos:**

**Del nivel teórico:**

1. Lógico – histórico en los antecedentes teóricos y su evolución posterior.
2. Analítico-sintético para el procesamiento de la información científica consultada y recogida mediante la aplicación de los diferentes instrumentos.

3. El método sistémico para interrelacionar los diferentes elementos que conforman el proceso de enseñanza aprendizaje
4. Inductivo-deductivo para el procesamiento de la información.

### **Del nivel empírico:**

1. **Análisis de documentos:** Aplicado con el objetivo de obtener información sobre las orientaciones metodológicas establecidas para llevar a cabo los programas de la enseñanza anterior y de la enseñanza posterior, se consideró la revisión de documentos oficiales, se efectúa la búsqueda en los expedientes de los estudiantes para evidenciar las características distintivas de los sujetos en base a sus resultados docentes. Se realiza un estudio minucioso de los documentos rectores del proceso docente (programa de la disciplina, programa de la asignatura)

### 2. **La entrevista no estructurada:**

- a) Estudiantes de Ingeniería de Procesos Agroindustriales y de Agropecuaria de la Sede Municipal.
- b) Profesores adjuntos a Sedes Municipales.

Fue aplicada con el propósito de conocer los contenidos del álgebra que presentan insuficiencias en la Matemática Básica y los criterios sobre el uso de los medios de enseñanza en las clases de Matemática Básica.

### 3. **La encuesta**

- a) A estudiantes de Ingeniería de Procesos Agroindustriales y de Agropecuaria de la Sede Municipal.
- b) A Profesores adjuntos de Sedes Municipales.

Fue aplicada con el propósito de conocer los contenidos del álgebra que presentan insuficiencias en la Matemática Básica y los criterios sobre el uso de los medios de enseñanza en las clases de Matemática Básica.

### **Métodos estadísticos y/o procesamiento matemático:** Análisis Porcentual.

Con arreglo a la organización muestral que se adopta, se escoge una muestra con carácter intencional conformada de la forma siguiente:

### **La muestra:**

Se utilizó como muestra 12 profesores que han impartido la asignatura de Matemática Básica en cinco sedes municipales de la provincia: Placetas, Cifuentes, Ranchuelo, Sagua y Santa Clara y 31 estudiantes de las Carreras de Ingeniería Agropecuaria y de Proceso Agroindustrial, de 1ro, 2do, 3ro y 4to año de la SUM de Ranchuelo.

Se seleccionó estudiantes de 1ro a 4to año de las carreras mencionadas para tener una mayor representatividad.

**Novedad científica:** Resulta novedosa porque se concreta un sistema integrado de medios para la comprensión de las ecuaciones de la Matemática Básica que en manos de los estudiantes pueden tributar al alcance de elevar la enseñanza- aprendizaje de lo cual no existen antecedentes, dada la reciente introducción del nuevo modelo de la semipresencialidad en la Universidad Cubana.

**El aporte práctico de la investigación es:**

Un sistema integrado de medios para la comprensión de las ecuaciones de la Matemática Básica.

En el Primer Capítulo dedicado a las consideraciones teóricas que fundamentan el sistema integrado de medios para favorecer la comprensión de las ecuaciones en la Matemática Básica se hace una valoración de las características del modelo semipresencial en la universidad cubana, se hace un estudio de las ecuaciones en la formación de los estudiantes universitarios, y en este aspecto se abordan; la línea directriz Ecuaciones e Inecuaciones en la enseñanza general, así como el estudio de las ecuaciones en la enseñanza universitaria, se trata la Comprensión Matemática en el proceso de enseñanza universitaria y se hace una valoración teórica sobre el sistema integrado de medios en el proceso de enseñanza aprendizaje y dentro de este, los medios de enseñanza y el sistema integrado de medios y su papel en la comprensión matemática.

El capítulo 2 está dedicado a explicar la propuesta del sistema integrado de medios para la comprensión de las ecuaciones en la matemática básica se hace una breve explicación de lo realizado tales como; el diagnóstico de necesidades, la constatación de los diferentes documentos, la encuesta y la entrevista a profesores y estudiantes y una valoración de los resultados en exámenes finales para lo que se propone una estructura del sistema integrado de medios y se dan orientaciones metodológicas a los profesores de lo que se trata en el sistema integrado de medios. A partir de los resultados obtenidos se pudo concluir que el diseño del sistema integrado de medios permite lograr un aprendizaje independiente en los estudiantes universitarios, lo que confirma la idea científica planteada en esta investigación.

# **CAPITULO 1. Consideraciones teóricas que fundamentan el sistema integrado de medios para favorecer la comprensión de las ecuaciones en la Matemática Básica.**

## **1.1 Características del modelo semipresencial**

En la Educación Superior en la época actual, al margen de las posibles particularidades que puedan existir en diferentes países, se acostumbra a distinguir, básicamente, entre dos modalidades de estudio; diferentes por el modo de asumir la relación estudiante-profesor: “*presencial*” y “*a distancia*”.

La constante elevación de la matrícula universitaria en las Sedes Universitarias Municipales trajo consigo la introducción del modelo pedagógico *Semipresencial*. El mismo está centrado en el estudiante, integra las actividades presenciales con las ayudas pedagógicas y ha comenzado a desarrollar espacios de aprendizaje presenciales, cómo son las aulas en las escuelas de la enseñanza precedente, las instalaciones culturales municipales, los centros laborales, entre otros. Por otra parte comienzan a surgir espacios virtuales para el aprendizaje. Aunque hoy el peso fundamental está en los medios tradicionales, se espera que en un futuro cercano se incremente el uso de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC) y se comiencen a aplicar los conceptos y prácticas asociadas a la Gestión del Conocimiento (Estrada-Sentí y Benítez-Cárdenas 2005). Se valora que ya en nuestro país se están dando los primeros pasos pues en el siglo XXI la Computación ocupa un lugar cimero en todas las esferas de la sociedad y en particular, la educación se ha beneficiado en este sentido ya que existen una gran variedad de software cuyo objetivo fundamental es servir como medio de enseñanza, reafirmando todo lo anteriormente expuesto con las palabras del Dr. Vicente González Castro al expresar: “(...) hay que enseñar con la técnica de hoy a los que vivirán y harán funcionar la técnica del mañana.”

El perfeccionamiento de la modalidad semipresencial debe transitar hacia una formación que enfatice más en los aspectos de la enseñanza y aprendizaje que el estudiante debe asumir por sí mismo; con un amplio y progresivo empleo de los medios de enseñanza y de las modernas tecnologías educativas adecuados a este tipo de enseñanza; optimizando las ayudas pedagógicas que brindan los profesores en los diferentes roles que desempeñan; aprovechando al máximo su flexibilidad, y estructuración, así como los diferentes escenarios educativos que esa modalidad posibilita; incrementando su impacto social.

Lo anterior supone comprender la necesidad de lograr, en la realidad, que el trabajo de orientación, en cada nivel organizativo y de dirección aborde estos aspectos con la prioridad requerida. Siendo el uso de las tecnologías en los procesos de enseñanza y aprendizaje en la Educación Superior, motivo de reflexión permanente respecto al lugar y al papel que cumplen estas como instancias de mediación pedagógica. A su vez esta labor ha creado una serie de necesidades para hacerle frente a esta integración, como rediseñar y encarnar nuevos procesos formativos, nuevos roles y nuevos hábitos, habilidades y capacidades, donde se integren y exploren otros contenidos y métodos; así como estrategias didácticas más acordes a las necesidades actuales; nuevas formas de comunicarnos, expresarnos y relacionarnos; otras formas de aprender y evaluar, para construir entornos de aprendizaje que se apoyen con estas tecnologías. Entendiendo por entorno de aprendizaje *“el espacio educativo en el que docentes y estudiantes planifican, acuerdan, desarrollan y participan activamente en experiencias orientadas al logro del aprendizaje de los estudiantes y de los fines educativos de la institución”*. (Herrero, E, & Cabrera, 2001)

La modalidad presencial es entendida generalmente, como aquella donde el proceso de formación tiene lugar a partir de la presencia de los estudiantes y sus profesores, en el mismo lugar, en el mismo tiempo y con altos niveles de carga lectiva semanal, con lo cual se asegura una relación estable y permanente para lograr los objetivos propuestos.

Esa modalidad es la más apropiada para estudiantes que dedican todo su tiempo a los estudios y de docentes a dedicación exclusiva y por tanto, consideramos que no constituye la respuesta más general al objetivo del pleno acceso que Cuba se ha propuesto alcanzar.

De tal modo, la concepción de semipresencialidad que se presenta nos supone la articulación de ayudas pedagógicas de ambos tipos, tanto presenciales como *mediadas* por los recursos tecnológicos, en una estrategia educativa integrada que puede adecuarse a las reales posibilidades de la población destinataria de la formación, propiciando un enfoque más individualizado de esa relación, a partir de las necesidades educativas individuales de cada estudiante.

“En la Educación Superior cubana, la semipresencialidad es la modalidad pedagógica que posibilita el amplio acceso y la continuidad de estudios de todos los ciudadanos, a través de un proceso de formación integral, enfatizando más en los aspectos que el estudiante debe asumir por sí mismo; flexible y estructurado; en el que se combina el empleo intensivo de los medios de enseñanza con las ayudas pedagógicas que brindan los profesores; adaptable en intensidad a los requerimientos de éstos y a los recursos tecnológicos disponibles para llevarla a cabo”. (Dirección de Tecnología Educativa-MES 2006)

Los estudios semipresenciales son propios de estudiantes que no disponen de todo su tiempo para los estudios, por razones laborales o similares. Por sus características, permite enfrentar mayores niveles de acceso y demandas de poblaciones estudiantiles geográficamente distantes de las sedes centrales, llevando los estudios universitarios allí donde ellos residen o laboran, con lo cual se abren nuevas posibilidades para todos los que aspiran a cursar estudios universitarios.

A partir de las anteriores reflexiones y de la experiencia acumulada por nuestras universidades en la impartición de los diferentes tipos de cursos, es posible caracterizar, de modo general, cuales pudieran ser las diferencias que se presentan entre ambas modalidades de estudio, **ver Anexo 1**. Y a partir de estas diferencias nos detendremos en las características de la modalidad en que nos concentraremos en nuestro trabajo.

Características esenciales de la modalidad semipresencial en la Educación Superior cubana.

**Formación integral** con mayor énfasis en la actividad independiente del estudiante, para que éste sea capaz de asumir de modo activo su propio proceso de formación integral.

Y esta formación integral es el objetivo fundamental del proceso de formación en la educación superior cubana, lo que supone: elevada competencia profesional, amplia cultura social-humanística, profundo desarrollo político-ideológico, defender la Revolución en el campo de las ideas, y servir a la Revolución en el lugar donde sea más necesario

Una cualidad importante es el desarrollo de la independencia cognoscitiva del estudiante. Sin dejar de reconocer que en ambas modalidades de estudio se requiere de dicha cualidad, en la semipresencial hay que lograrla en un grado mayor y en menos plazo de tiempo, toda vez que, al ser menos frecuentes las actividades presenciales, el estudiante tiene menos posibilidades de ser conducido por los profesores hacia los objetivos propuestos. La independencia cognoscitiva del estudiante se manifiesta en su capacidad de representar la tarea cognoscitiva; en el establecimiento de un plan que permita su solución; en la selección de los métodos para su solución; en la búsqueda creadora de la solución y en la forma en que verifica la validez de los resultados obtenidos.

El concepto que estructura la independencia cognoscitiva del estudiante en la educación superior cubana es el de **trabajo independiente**. La educación superior debe lograr desarrollar en el estudiante la capacidad de aprender, es decir, la tarea de la universidad no consiste en dar una gran cantidad de conocimientos sino enseñar al alumno a pensar, a orientarse independientemente. Para ello es necesario organizar una enseñanza que impulse el desarrollo de esta capacidad, que el estudiante de sujeto pasivo se convierta en el centro del proceso de aprendizaje.

Aprender a aprender implica la capacidad de reflexionar en la forma en que se aprende y actuar en consecuencia, autorregulando el propio proceso de aprendizaje mediante el uso de estrategias flexibles y apropiadas que se transfieren y adaptan a nuevas situaciones. El estudiante debe jugar un papel más protagónico, debe aprender básicamente mediante el auto-estudio y la realización de forma independiente de las actividades, apoyado por los medios de enseñanza y por las ayudas pedagógicas que le brindan sus profesores.

En correspondencia con ello, este enfoque del aprendizaje tiene que reflejarse en los diferentes componentes del proceso docente-educativo: en el diseño de los planes y programas de estudio, en la actuación de los estudiantes, en los medios de enseñanza, en las ayudas pedagógicas de los profesores, en las actividades presenciales, en la utilización de los diferentes escenarios educativos y en general en todos los elementos que intervienen en dicho proceso.

**Flexibilidad**, para facilitar el amplio acceso y adaptarse a diversas situaciones laborales, a las particularidades territoriales y al ritmo individual de aprovechamiento académico del estudiante, de acuerdo al tipo de curso que se trate.

Implica flexibilidad en el currículum, en el ritmo de aprendizaje, en las ayudas pedagógicas que reciba el estudiante, en los sistemas de evaluación, y en todos aquellos aspectos relacionados con la capacidad de adaptación del proceso de formación a la realidad personal, profesional y familiar del estudiante, a sus motivaciones, a sus expectativas, así como a las características del tipo de curso matriculado y las condiciones en que éste se desarrolla.

**Estructuración** para favorecer la organización y desarrollo del aprendizaje y propiciar que no se produzcan bajas por razones académicas

Ello supone la existencia de una organización de las asignaturas por periodos lectivos, que permita orientar a los estudiantes sobre cómo puede tener lugar el tránsito por su plan de estudio. Ese ordenamiento, por año y período, está concebido en un plazo de tiempo en el cual podrían culminar sus estudios los estudiantes que avancen al ritmo normal previsto para esa carrera y debe favorecer la organización de los calendarios docentes del curso.

En la concepción desarrollada por el MES para estos estudios, en la cual cada estudiante decide su propio ritmo de aprendizaje, dicha estructuración constituye solo una guía para el estudiante y su tutor a la hora de seleccionar las asignaturas a matricular.

Lo verdaderamente importante es que progrese; que no cause baja; que trabaje durante todo el semestre por aprobar todas las asignaturas que matriculó (no importa que sea una, o dos) y que al

final, si lo logra, se sienta estimulado con el reconocimiento de sus profesores y su tutor por el esfuerzo realizado.

La estructuración como característica de la modalidad semipresencial está dada además hacia lo interno de las asignaturas, debiéndose lograr un ordenamiento de los contenidos que favorezcan el aprendizaje, siguiendo una lógica de integración temática.

**Con ayudas pedagógicas presenciales** que posibiliten, en función del tiempo y los recursos disponibles, que los profesores guíen, apoyen y acompañen al estudiante en su aprendizaje.

Se concibe en esta modalidad un sistema de actividades presenciales de diferentes tipos que aseguren el adecuado acompañamiento y apoyo, de modo que no tengan cabida ni el fracaso ni el desaliento. Es importante comprender aquí que las actividades presenciales en esta modalidad no se diferencian sólo en cantidad de las que se imparten en los cursos regulares diurnos. Cualitativamente existen diferencias importantes en su concepción y desarrollo, toda vez que el proceso de formación se centra en el aprendizaje del estudiante y por otra parte el profesor que desarrolla los encuentros no dispone del tiempo suficiente para realizar todas las actividades docentes que se imparten en la modalidad presencial.

Se reconocen como ayudas pedagógicas fundamentales las siguientes:

- **La clase encuentro**, tiene como objetivos instructivos aclarar las dudas correspondientes a los contenidos y actividades previamente estudiados por los alumnos, debatir y ejercitar dichos contenidos y evaluar su cumplimiento. Igualmente, durante la clase deben explicarse los aspectos esenciales del nuevo contenido y orientar con claridad y precisión el trabajo independiente que el estudiante debe realizar para alcanzar un adecuado dominio de los mismos. La misión instructiva más importante que tiene el profesor en los encuentros es desarrollar en ellos la independencia cognoscitiva, para que sean capaces de aprender por sí mismos.
- **La consulta**, mediante la cual el estudiante recibe orientaciones para ayudarle a aclarar las dudas individuales y comprender mejor los contenidos estudiados. De la calidad del diálogo que se establezca entre el profesor y el estudiante dependerá que se logre el objetivo de aprendizaje. Las consultas pueden desarrollarse en forma individual y colectiva; de forma presencial o por vías no presenciales.
- **La tutoría**, se concibe como un proceso de transformación y desarrollo educativo centrado en el autoaprendizaje, que se concreta mediante la atención personalizada y sistemática del tutor a un estudiante o a un grupo muy reducido de ellos, para que sean capaces de dominar los recursos de su formación, se apropien de un sistema de saberes y valores que determinan la

posición vital activa y creativa en su desempeño profesional, personal y social. Integra el sistema de influencias educativas de los distintos ámbitos de la formación del estudiante, promoviendo su crecimiento personal y el desarrollo de su autodeterminación; el tutor acompaña al mismo durante toda la carrera, brindándole el apoyo necesario para la toma de decisiones ante los problemas, desde una acción personalizada.

**Amplio y progresivo empleo de los medios de enseñanza y las tecnologías educativas**, que posibiliten el aprendizaje independiente del estudiante y compensen las actividades de las clases de la modalidad presencial, que el profesor no puede realizar en ésta por el limitado tiempo de contacto con sus alumnos.

De conjunto con las ayudas presenciales, esta modalidad requiere de una amplia utilización de diferentes medios de enseñanza que, en calidad de ayudas pedagógicas no presenciales, posibiliten el logro de los objetivos propuestos con el nivel de asimilación requerido. Los medios de enseñanza, constituyen el sistema de materiales docentes y de recursos tecnológicos destinados a posibilitar la auto preparación de los estudiantes; devienen parte importante del éxito de la enseñanza semipresencial, vistos no como un fin en sí mismo, sino como herramientas pedagógicas que facilitan el proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que contribuyen a resolver los problemas que se derivan de la disminución en la presencialidad.

Los medios de enseñanza en la modalidad semipresencial juegan un importante papel en el proceso de aprendizaje y a través de los mismos debe transitar una parte apreciable de la adquisición de contenidos por parte de los estudiantes.

Hay que tener en cuenta que esta modalidad de estudios se soporta en diferentes escenarios de aprendizaje, como se verá posteriormente, por lo que se debe estructurar un sistema de medios que posibilite el aprendizaje en disímiles condiciones, desde una persona aislada sin recursos tecnológicos hasta la situación más favorable, en la que dispone de todos esos recursos, incluida la conectividad "en línea" con los servidores de la universidad. Es, por tanto, una misión permanente de la educación superior, trabajar de modo continuo en su perfeccionamiento.

A partir del desarrollo de la enseñanza a distancia, de la introducción de las TICs y de la nueva concepción del modelo pedagógico *Semipresencial*, se comienza a vislumbrar la apertura de un nuevo capítulo de la Educación Superior cubana, para lo cual se hace necesario desarrollar estrategias y acciones que permitan asegurar una debida *calidad en la masividad* de la enseñanza (Benítez-Cárdenas et al. 2006). En este sentido se propone que el libro de texto y la guía de estudio continúen siendo la base fundamental del auto aprendizaje pero, con una nueva visión (Dirección de Tecnología

Educativa-MES 2006): Cada asignatura de la modalidad de estudio Semipresencial contará con un sistema integrado y progresivo de medios de enseñanza que posibiliten el aprendizaje de los estudiantes, en el que el texto y la guía de estudio desempeñan el papel fundamental y esta última además una función articuladora entre todos.

Sin querer indicar que esta modalidad sea la que resuelva todos los problemas educativos, es cierto que puede ayudar a solucionar algunas de las limitaciones que posee la educación y la formación actual sobre todo en los niveles universitarios. Comentarios como los que estamos realizando nos llevan a reclamar la necesidad de contar con materiales que posean un diseño y estructura específica, que puedan apoyarse en una serie de hechos, al respecto tomamos como referente lo planteado por Cabero. J (2002), cuando destaca: Toda asignatura que se imparta en esta modalidad, debe tener garantizado su propio libro de texto y sus guías de estudio, asegurando que entre ambas existan la correspondencia necesaria para asegurar el desarrollo exitoso del proceso de formación. Ambos materiales, de conjunto, deben posibilitar que el estudiante pueda vencer, al nivel requerido, las asignaturas matriculadas; aun cuando no se disponga de los restantes medios antes mencionados.

### **1.2 Las Ecuaciones de la Matemática Básica en la formación de los estudiantes Universitarios.**

Actualmente las Matemáticas Superiores sirven de fundamento teórico de la mayoría de las disciplinas científicas naturales y técnicas. El dominio de los métodos matemáticos y la capacidad de utilizarlos en la práctica, son elementos imprescindibles para el buen desempeño de todo especialista. En los últimos años, en la enseñanza de las matemáticas en las facultades especializadas, se nota una serie de nuevas tendencias entre las que se encuentra que debido a la computación ha crecido sensiblemente el interés por los métodos numéricos de resolución de las ecuaciones, y no se tiene en cuenta que algunas especialidades requieren los conocimientos básicos sobre ellas. En primer lugar con la modernización de los contenidos y en segundo con la actualización de los métodos de impartición de la Matemática Básica se valora que para revertir esta situación se debe realizar un trabajo encaminado a la búsqueda de métodos más efectivos para impartir estos temas que deben estar en correspondencia con las exigencias actuales, donde se propicie la introducción de medios novedosos para el aprendizaje, además que conlleven a consolidar los conocimientos y por ende que despierten el interés y la motivación de nuestros estudiantes al recibir esta asignatura.

En consecuencia con lo planteado, sostenemos que la Matemática Básica, reúne los elementos necesarios por su estructura y contenidos para convertirse en una rama primordial para este proceder, teniendo en cuenta los elementos que constituyen la estructura general de cualquier rama de la Matemática y que estos aparecen explícitamente en los contenidos del álgebra.

Por lo que con el trabajo con las ecuaciones que se tratan en la Matemática Básica se puede contribuir a ampliar la madurez matemática y la capacidad de trabajo con la abstracción en los estudiantes que inician estudios de Ingeniería, contribuir al desarrollo del pensamiento lógico y algorítmico, en particular en lo referente a las habilidades de identificar conceptos, demostrar propiedades matemáticas, así como establecer y desarrollar secuencias de operaciones matemáticas, con el fin de dar solución a problemas propios de la asignatura, contribuir al desarrollo intelectual, ético y estético de los estudiantes; a través del desarrollo de habilidades en el lenguaje lógico verbal y escrito en las operaciones mentales propias de la matemática, en la defensa de sus valoraciones y en el uso de la crítica y la autocrítica y contribuir a desarrollar en los estudiantes la habilidad de trabajo independiente, consultando sistemáticamente los libros de texto que se ajustan al contenido del programa, incentivando la constancia y el hábito de proceder reflexivamente.

### **1.2.1 La línea directriz Ecuaciones e Inecuaciones en la Enseñanza General**

Las líneas directrices son conceptos y procedimientos que son fundamentales, que poseen una importancia relativamente general y que, desde el punto de vista histórico, son relativamente estables (Ballester, S. Metodología de la Enseñanza de la Matemática Tomo I, Editorial Pueblo y Educación, Guantánamo, 1993).

Estas líneas sirven para ordenar la materia de enseñanza atendiendo a aspectos principales de la transmisión de conocimientos, el desarrollo de habilidades y capacidades generales y específicas y de la educación de los alumnos.

En los programas para la enseñanza de la Matemática en el nivel medio se reconocen 16 líneas directrices (**ver Anexo 2**) y entre ellas se encuentra la línea directriz “Ecuaciones e Inecuaciones. Sistemas. Optimización lineal”. En este trabajo solo nos ocuparemos de las Ecuaciones.

Al concluir los estudios de nivel secundario y preuniversitario se exige que los alumnos cumplan los siguientes objetivos:

- Comprender el concepto de ecuación como una igualdad que contiene variable.
- Reconocer los diferentes tipos de ecuaciones.
- Desarrollar habilidades en los procedimientos para resolver ecuaciones.
- Dominar el procedimiento particular de los diferentes tipos de ecuaciones que se estudian.
- Identificar el conjunto solución.
- Reconocer la relación entre el conjunto solución y el dominio de definición.

Las ecuaciones se tratan en todos los grados de la enseñanza de la Matemática junto a las fases del tratamiento explícito de ecuaciones en los grados 6to, 7mo, 8vo, 9no y 12mo, existen también durante

todo el curso escolar fases del tratamiento implícito de ecuaciones, como por ejemplo, en el cálculo de áreas y volúmenes, en el cálculo porcentual, en cálculos con ayuda del teorema de las transversales, en el trabajo con variables, etc. En esto tienen que siempre aplicarse los conocimientos y las habilidades adquiridas por los alumnos en el tratamiento explícito de las reglas de transformación de ecuaciones. En ambas fases se nota, sin embargo, que las ecuaciones se resuelven de dos formas distintas: en un caso mediante reflexiones lógicas y en otro por medio de procedimientos sistemáticos.

Ambas formas de resolución pueden caracterizarse como sigue:

**Como resolución por reflexiones lógicas de ecuaciones** se entiende la búsqueda del conjunto solución sobre la base del conocimiento del dominio básico en cuestión, su orden y sus operaciones de cálculo, así como las capacidades y habilidades correspondientes de los alumnos.

**Como solución por procedimientos sistemáticos de ecuaciones** se entiende la búsqueda del conjunto solución sobre la base de un cálculo de solución conocido, es decir, transformaciones equivalentes de la ecuación dada.

Por la contribución que brinda a la comprensión matemática la manera de resolver ecuaciones por reflexiones lógicas es importante que esta forma de solución de ecuaciones se ejercite con frecuencia pues profundiza en el uso de las leyes válidas en el dominio que se esté tratando. A pesar de que en la introducción de las ecuaciones exponenciales y logarítmicas se proponen ejemplos sencillos para ser resueltos por reflexiones lógicas.

Generalmente la Matemática que reciben los estudiantes desde la secundaria básica hasta el preuniversitario suele denominarse Matemática Elemental y la que se imparte en las carreras universitarias se le llama Matemática Básica. Esta diferencia obedece a que para las carreras universitarias lo relacionado a la resolución de ecuaciones es un conocimiento básico en la formación de los profesionales que deben utilizar la Matemática, ya sea carreras técnicas o de Licenciatura.

La enseñanza de las ecuaciones en la escuela comienza desde el mismo preescolar cuando el niño tiene que identificar qué valor tiene un cuadradito para que la igualdad sea cierta, en los primeros grados ya resuelve ecuaciones por inferencias lógicas. Además se familiariza con conceptos tales como, igualdad etc.

Las ecuaciones se tratan por primera vez en 8vo grado, que son las de grado 1 o ecuaciones lineales, en noveno las cuadráticas, en el 10mo grado se retoma estas y se reactivan los contenidos profundizando en ellos, y las ecuaciones con radicales las exponenciales, logarítmicas y las

trigonométricas se tratan en el 11no grado y todas se retoman en el grado 12mo en el capítulo de sistematización.

En dependencia a estas consideraciones el plan de estudio se sustenta sobre la base de un currículo que permite romper con el formalismo a la hora de impartir este contenido y posibilita la recurrencia oportuna a la intuición, para reforzar esta labor docente se trabajó en la actualización y adecuación de la bibliografía a consultar para cada curso, con este fin los libros de texto poseen una buena ejemplificación y ejercitación variada que permiten, lograr los objetivos del plan de estudio, aunque se tiene el criterio de que este pudiera ser un aspecto a continuar perfeccionando en estos niveles de enseñanza.

En grado 12 en la segunda parte del curso se trabaja una unidad de sistematización para los estudiantes que opten por carreras técnicas.

Las **orientaciones metodológicas y las precisiones metodológicas** de los contenidos en esta enseñanza plantean que:

El eje conductor para el desarrollo del programa en todos los grados está dado a partir del planteamiento y la resolución de problemas. En la unidad 2 de 10mo grado lo fundamental a lograr en la misma es que los alumnos consoliden y sistematicen los conocimientos aritméticos, algebraicos y geométricos de niveles precedentes, priorizando aquellos problemas de carácter político, económico, científico y ambientales, con datos de la actualidad que reflejen la obra económica, política y social de la Revolución, donde integren, en particular, las operaciones con números naturales, fraccionarios y racionales y se combinen las diferentes operaciones, se aplique el tanto por ciento y el tanto por mil (su significado, cálculo sin uso de fórmulas) y aparezcan cantidades de magnitud (unidades monetarias, tiempo, longitud, superficie, masa y volumen), de modo que sea necesario realizar conversiones.

Los contenidos a desarrollar son tratados con un enfoque **integrador y generalizador**, para que se consoliden y sistematicen los propios de la unidad y de otras unidades del programa como un sistema de recursos que les sirvan a los estudiantes para resolver los problemas prácticos antes señalados y no como objetos matemáticos independientes entre sí.

Se incorporan ideas para desarrollar habilidades en el procesamiento y análisis de información de datos tomados de la prensa y de otras fuentes que coadyuven a extraer conclusiones de la obra de nuestra Revolución Socialista. Además se trabaja por desarrollar habilidades en la estimación de cantidades de magnitud y resultados de cálculo (tanto oral como escrito).

Se insiste en los significados de las operaciones y de los algoritmos de aquellas en las cuales los estudiantes hayan reflejado mediante el diagnóstico las mayores dificultades.

En el cálculo con radicales lo fundamental es el cálculo con radicales cuyos radicandos sean números y no variables, en ocasiones pueden presentarse algunos casos cuyos radicandos sean expresiones algebraicas.

En la parte relativa al trabajo con variables, se evita en lo posible que se trabaje por separado con problemas que conducen a ecuaciones lineales, cuadráticas y fraccionarias.

Algunas precisiones metodológicas: En la **unidad 1** de 11no grado se tratan todos los casos de ecuaciones con radicales incluyendo el caso donde se puede resolver la ecuación por cambio de variable y pueda utilizarse otros radicales con índice mayor que 2. Al trabajar con este tipo de ecuaciones, se utilizan algunas propiedades de las funciones que conduzcan a ecuaciones del tipo de las que se están estudiando en esta unidad, entre estas propiedades puede utilizarse la de hallar los puntos donde la función corta a los ejes coordenados, buscar los puntos donde se cortan dos o más funciones y otras que el profesor pueda utilizar.

En la **unidad 3** de 11no grado se retoma los contenidos explicados en la segunda unidad, acerca de las funciones, incluyendo los de función compuesta e inversa en el caso de las funciones exponenciales y logarítmicas.

Se incluyen tareas donde se aplique la periodicidad de las funciones trigonométricas. Las identidades trigonométricas fundamentales y las fórmulas que se estudian en esta unidad se deducen con los alumnos. En el trabajo con las ecuaciones trigonométricas se resuelven ejercicios que conducen a la resolución de ecuaciones de los tipos que se estudiaron con anterioridad, incluyendo las fraccionarias y con radicales, como una forma de sistematizar los contenidos aprendidos.

En la **unidad 4** de 11no grado se retoman los contenidos explicados en la segunda unidad, acerca de las funciones incluyendo los de función compuesta e inversa

**Para grado 12** orienta el programa que la distribución de las horas clases de cada una de las unidades temáticas asociadas a las unidades del programa la hará el profesor de acuerdo al diagnóstico y características de sus grupos. El contenido se trata en la segunda parte del curso escolar cuando se trabaja el Capítulo de Sistematización con el objetivo de preparar estudiantes que se presentarán a prueba de ingreso a la Educación Superior, y estos son los que optan por carreras técnicas

Por otra parte al reducirse el número de clases en el programa de grado 12mo en la segunda parte del curso, donde se trata nuevamente el contenido referente a todas las ecuaciones tratadas desde 10mo

hasta grado 12<sup>mo</sup> propone que es necesario poner énfasis en el trabajo independiente de los estudiantes, el cual debe estimularse mediante la TV y los sistemas de ejercicios utilizados para las tareas. En todo momento, el profesor tiene presente la condición de que está impartiendo contenidos, que son conocidos por los estudiantes, y su función principal, es la de reactivar aquellos elementos del conocimiento necesarios para que ellos puedan enfrentarse a las situaciones que se les vayan presentando.

Los contenidos que se imparten en este nivel de enseñanza se ubican de manera acertada solo que consideramos que en la práctica se le dedica más tiempo al estudio de las propiedades de las funciones y a su representación gráfica que al trabajo con desarrollo de habilidades.

En las orientaciones metodológicas referentes al tema de ecuaciones, enfatizan en el desarrollo de habilidades en el procesamiento y análisis de información de datos tomados de la prensa y de otras fuentes que coadyuvan a extraer conclusiones de la obra de nuestra Revolución Socialista. Además se deberá trabajar por desarrollar habilidades en la estimación de cantidades de magnitud y resultados de cálculo (tanto oral como escrito).

Deberá insistirse en los significados de las operaciones y de los algoritmos de aquellas en las cuales los estudiantes hayan reflejado mediante el diagnóstico las mayores dificultades.

En el cálculo con radicales lo fundamental debe ser el cálculo con radicales cuyos radicandos sean números, en ocasiones pueden presentarse algunos casos cuyos radicandos sean expresiones algebraicas.

En la parte relativa al trabajo con variables, debe evitarse en lo posible que se trabaje por separado con problemas que conducen a ecuaciones lineales, cuadráticas y fraccionarias y se resalta en las posibilidades que brindan estos contenidos para mostrar a los alumnos las formas que tiene la matemática de asegurar sus conocimientos, mediante la resolución de los ejercicios en que se apliquen diferentes métodos de solución.

Se proponen lograr las habilidades siguientes:

Planteamiento y la resolución de problemas.

Consolidar y sistematizar los conocimientos aritméticos, algebraicos y geométricos de niveles precedentes.

Integrar, las operaciones con números naturales, fraccionarios y racionales y combinar las diferentes operaciones, aplicar el tanto por ciento y el tanto por mil.

Procesar y analizar informaciones de datos.

Calcular con radicales.

Evitar que se trabaje por separado con problemas que conducen a ecuaciones lineales, cuadráticas y fraccionarias.

En dependencia a estas consideraciones el plan de estudio se sustenta sobre la base de un currículo que permite romper con el formalismo a la hora de impartir este contenido y posibilite la recurrencia oportuna a la intuición, para reforzar esta labor docente se revisó la actualización y adecuación de la bibliografía a consultar para cada curso, con este fin los libros de texto poseen una buena ejemplificación y ejercitación variada que permiten, lograr los objetivos del plan de estudio, aunque se tiene el criterio de que este pudiera ser un aspecto a continuar perfeccionando en estos niveles de enseñanza.

Podemos concluir que en la actualidad el plan de estudio ha continuado sufriendo modificaciones, por ejemplo en 8vo grado se trabaja con las ecuaciones lineales sin prever el trabajo con el tratamiento de las funciones elementales de la matemática, en particular con la función lineal o afín, la cual ha venido a sustituir el método de transformaciones que fue empleado en la concepción inicial; un aspecto importante y del cual opinaremos en trabajos posteriores como el relacionado con la eliminación de partes de temas por un lado o la idea de considerarlos opcionales por otro. Pero su esencia general ha permanecido inalterable.

En el **Anexo 3** se detallan los contenidos que se imparten en los diferentes grados de preuniversitario. Los contenidos referentes a ecuaciones son tratados básicamente en 10mo y en 11no grado donde las orientaciones metodológicas que se brindan para la impartición de estos contenidos plantean que:

En el caso del Álgebra, incluir ejercicios sobre trabajo con variable donde se destaca lo importante que es para los alumnos que comprendan los procedimientos de solución y aprecien como muchos ejercicios son de fácil solución. En general, una vez tratado las diferentes tipos de ecuaciones se trata de combinar cada una de ellas.

En las orientaciones metodológicas referentes al tema, enfatizan en el desarrollo de habilidades y se resalta en las posibilidades que brindan estos contenidos para mostrar a los alumnos las formas que tiene la matemática de asegurar sus conocimientos, mediante la resolución de los ejercicios en que se apliquen diferentes métodos de demostración. Se proponen lograr las habilidades siguientes:

- Tener un enfoque integrador y generalizador, en que se consoliden y sistematicen todos los contenidos a tratar.

- Desarrollar el trabajo independiente de los estudiantes, el cual debe estimularse mediante la TV y los sistemas de ejercicios utilizados para las tareas.
- En todo momento, el profesor debe tener presente la condición de que está impartiendo contenidos, que son conocidos por los estudiantes, y su función principal, es la de reactivar aquellos elementos del conocimiento necesarios para que ellos puedan enfrentarse a las situaciones que se les vayan presentando.

Desde principio de los años noventa en el nivel medio de enseñanza se ha venido produciendo ciertas modificaciones de los contenidos matemáticos que hasta entonces formaban parte del currículo del bachiller y por tanto resulta importante saber con exactitud cuáles son los conocimientos que han adquirido estos estudiantes para enfrentar las exigencias con que se imparten los contenidos de la educación superior, pues se están dando situaciones de bajo aprovechamiento docente fundamentalmente en los primeros años, por lo que puede verse que existe la necesidad de que los alumnos deben haber aprendido bien estos contenidos, para poder avanzar sus carreras universitarias. Independientemente de que se le va prestando importancia a la visualización, pues las videoclases muestran cómo obtener determinados resultados partiendo de las representaciones se debe enfatizar más en los procedimientos algorítmicos para la resolución de ecuaciones a través del uso de asistentes, y cómo reconocer además la existencia de problemas con los recursos humanos (personal capacitado) y materiales (cantidad de computadores disponibles), y que las orientaciones solo hacen mención a estos como medios de consulta, resulta evidente, que es este un aspecto que debe y puede ser valorado y mejorado en las orientaciones metodológicas.

Lograr que el empleo de asistentes matemáticos en la impartición de los contenidos en la escuela, deban hacerse de manera sistemática, para así alcanzar un adecuado desarrollo de las habilidades y por consiguiente un aprendizaje donde los conocimientos estén bien consolidados

### **1.2.2 El estudio de las Ecuaciones de la Matemática Básica en la Matemática Universitaria**

El diseño de la estructura de los conocimientos en el sistema de educación cubano se sustenta en una articulación horizontal y vertical, esto conduce a relacionar un nivel educacional con el precedente, es aquí donde la eficacia del proceso de aprendizaje puede ayudar o entorpecer el buen funcionamiento del sistema educacional. Esta observación se realiza a partir de la experiencia en la realización de las actividades docentes, donde resulta frecuente encontrar estudiantes que carecen de habilidades algebraicas para poder identificar las características de los objetos matemáticos que son centro de análisis de esta disciplina.

Existen dos aspectos que refuerzan esta realidad educativa en Matemática, que se encuentran vinculados: en primer lugar con la modernización de los contenidos y en segundo con la actualización de los métodos para estudiar esta asignatura, al respecto se valora que para revertir esta situación se debe realizar un trabajo de orientación encaminado a la búsqueda de métodos más efectivos para estudiar estos temas que deben estar en correspondencia con las exigencias actuales, donde se propicie la introducción de medios novedosos para el aprendizaje, además que conlleven a consolidar los conocimientos y por ende que despierten el interés y la motivación de nuestros estudiantes al recibir esta asignatura.

En consecuencia con lo planteado, sostenemos que la disciplina, reúne los elementos necesarios por su estructura y contenidos para convertirse en una rama primordial para este proceder los que constituyen la estructura general de cualquier rama de la Matemática y que estos aparecen explícitamente en los contenidos del álgebra.

La definición de ecuación en su forma más general, forma la base del estudio de la matemática moderna a través del Calculo Diferencial por ejemplo. Los contenidos asociados al concepto de Análisis de Curvas, forman hoy el lenguaje obligado de la Ecuaciones. **Ver Anexo 4**

### **1.3 La Comprensión Matemática en el proceso de Enseñanza Aprendizaje Universitario.**

La Universidad Cubana no sólo prepara al individuo en el orden teórico y práctico para desempeñarse en determinada profesión, sino que ofrece una formación que abarca de manera integral el desarrollo de la personalidad de los estudiantes.

Actualmente la Educación Superior Cubana se orienta hacia la renovación del proceso de enseñanza aprendizaje pues tradicionalmente ha estado centrado en modelos de enseñanza, en los cuales se atendía a la materia y a la forma de impartirla, cuando en realidad se requiere de una óptica más ocupada por el sujeto que aprende, sus características personales y sociales, así como las necesidades profesionales que el territorio determina, es por todo esto que la flexibilidad del proceso de enseñanza potencia el aprendizaje, la formación de valores y la auto preparación científica.

Si somos consecuente con lo señalado anteriormente, debemos concebir un modelo de enseñanza aprendizaje en las universidades, que garantice un aprendizaje con estas características, donde el empleo de métodos y procedimientos didácticos en el proceso de enseñanza movilicen todos los recursos de que dispone el sujeto para enfrentar su aprendizaje y por otra parte se desarrolle la comprensión del contenido, con lo que se propiciará que la asimilación de los conocimientos sea profunda y tenga un carácter perdurable.

Cuestión que todavía se evidencia como carencia, en algunas especialidades con una fuerte formación básica en Matemática, cuyas asignaturas siguen siendo, los obstáculos más fuertes que deben vencer los alumnos en su empeño por lograr éxito en su carrera. E incluso, cuando el estudiante por su esfuerzo y el de los “otros” es capaz de aprobar la asignatura, en muchos casos el nivel de apropiación, de esos conocimientos con los cuales aprobó el examen, es tan bajo que en el próximo semestre no es capaz de relacionar estos mismos conocimientos con otras propiedades de ese mismo objeto matemático o con otros objetos matemáticos de la propia disciplina u otra del currículo, lo que denota que no llegó a comprender la naturaleza y desarrollo del mismo, por lo que su aprendizaje no es sólido para enfrentar los nuevos conocimientos que la carrera le exigirá, con lo cual no solo se pone en peligro la permanencia del estudiante en nuestras aulas, sino también la calidad del profesional que necesita que formemos para el desarrollo científico técnico del país.

Entender la comprensión matemática como proceso a desarrollar en los estudiantes universitarios reconoce la necesidad de un desarrollo mental, pero centra su interés en las descripciones y representaciones a medida que se “construyen” mediante las interacciones que se desarrollan en una institución escolar dada, ya sea entre los alumnos, entre ellos y sus profesores, entre estos últimos y entre cualquiera de estos sujetos y el contexto social en el cual se desarrolla el proceso de aprendizaje.

Este enfoque general es compatible con el que están desarrollando y se pueden encontrar en diferentes trabajos de Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Contreras, Font, Luque, Ordóñez, 2005; Godino, Batanero y Roa, 2005; Godino, Contreras y Font, en prensa) los que han desarrollado un conjunto de nociones teóricas que configuran un enfoque ontológico y semiótico de la cognición e instrucción matemática.

En correspondencia con el enfoque del Modelo Histórico Cultural asumimos que **comprender un objeto matemático consiste en ser capaz de reconocer sus características, propiedades y representaciones; relacionarlo con otros objetos matemáticos y usarlo en toda la variedad de situaciones problémicas que sean propuestas por el profesor. Es decir, cuando puede comunicar la actividad matemática que realiza.**( Torres A, Martínez D. (2007).

Bajo esta perspectiva la comprensión matemática asumida por un sujeto en un momento, difícilmente será total o nula, sino parcial. Se necesita por tanto, concebir por parte del profesor una secuencia de actividades que tengan como objetivo el aprendizaje de manera personal de objetos matemáticos como resultado de una organización didáctica diseñada a priori por el profesor.

Del otro lado del problema didáctico a resolver, el alumno habrá comprendido un objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diversas situaciones didácticas, en las que requerirá utilizar diferentes notaciones, así como convertir una representación en otra de manera natural, y además tenga la capacidad de poder expresarlo públicamente, con argumentos que demuestren que su pensamiento ha evolucionado tras un esfuerzo intelectual productivo y no igualar estas prácticas evaluativas con la participación “activa” de los estudiantes en las cuales solo se analiza si participó o no en clases, pero no si la misma se sustenta en un desarrollo de su pensamiento y actividad matemática concreta

En la formación en Matemática, no sólo se desarrollan sus capacidades de abstracción, generalización, análisis y síntesis, el pensamiento lógico y el pensamiento algorítmico, sino también se desarrollan las habilidades que el individuo necesita para utilizar la modelación matemática y el experimento de cálculo como metodología de investigación en su futura actividad profesional.

#### **1.4 El sistema integrado de medios en el proceso de enseñanza aprendizaje.**

En el marco de las transformaciones que se materializan en los diferentes niveles de enseñanza en nuestro país, el uso de los más modernos y variados medios, fomentan en un elevado nivel la esfera formativa en el proceso de enseñanza aprendizaje, pilar fundamental para la formación del egresado integral pues apoyan no solo la parte instructiva, sino también el trabajo educativo y estimulan la formación de valiosos rasgos del carácter, tales como la conciencia de responsabilidad, actividad, iniciativa, conciencia en el cuidado de la propiedad del estado, el colectivismo y otras. Además los medios causan un gran efecto emocional sobre los alumnos, desarrollan hábitos, habilidades y capacidades para sus futuros

##### **1.4.1 Los Medios de Enseñanza en el proceso enseñanza-aprendizaje.**

La otra arista incluida en la triada (objetivo-método-contenido) la conforma el medio de enseñanza y de frente a las conceptualizaciones de lo que es un medio que subyacen a anteriores definiciones, hemos encontrado una que creemos que se ajusta a nuestra visión de los medios, a la vez que es lo suficientemente completa, en el sentido que incluye los atributos críticos definitorios de los medios de enseñanza. Esta definición a la que nos referimos es la ofrecida por Escudero (1983): "**(medio de enseñanza) es cualquier recurso tecnológico que articula en un determinado sistema de símbolos ciertos mensajes con propósitos instructivos**"

Analicemos esta definición y con ello justificaremos los motivos de elección de la misma. El primer rasgo que se destaca es que un medio es un **recurso tecnológico**. Con ello se indica que un medio o

material de enseñanza exige en primer lugar un soporte físico-material. Con este dato, podemos distinguir a los medios de otros elementos educativos como son los objetivos, las actividades, los contenidos, etc. En segundo lugar en un medio debe existir algún tipo de **sistema de símbolos**, es decir, el medio debe representar a "algo" diferente de sí mismo. Debe poseer un referente que es simbolizado en el medio a través de ciertos códigos. El tercer rasgo es que el medio porta **mensajes**, comunica informaciones, significa algo. Pero, lo que diferencia al medio de enseñanza de otros medios informativos (prensa o TV) es el cuarto atributo, es decir, que dicho mensajes son elaborados con propósitos formativos y no solo instructivo como plantea el referido autor. Los directores de un periódico o canal televisivo no diseñan y elaboran sus mensajes con la finalidad específica de provocar aprendizaje en su audiencia y menos aún que éste se produzca en contextos escolares. Perseguirán informar, entretener, motivar, crear actitudes, etc. De la conjunción de estos cuatro rasgos definicionales, los medios de enseñanza, pueden ser diferenciados de otros elementos u objetos instructivos que a veces son confundidos con el término "medio". Nos estamos refiriendo a que bajo la categoría "medios de enseñanza" no caben ni *formas o modos organizativos de la enseñanza* (como pueden ser las demostraciones, las exposiciones, los trabajos en grupo, las excursiones, etc.) ya que éstas no cumplen el atributo de "recurso tecnológico"; ni tampoco nuestra definición incluye *herramientas e instrumentos de trabajo y mobiliario escolar*, ya que ni las tijeras, rotuladores, folios, ..., ni por supuesto los pupitres, mesas o sillas, cumplen el atributo de "simbolizar", ni transmitir mensajes. Estos últimos son objetos reales como pueden ser los animales o plantas, pero no medios de enseñanza en el sentido que los hemos definido, pero pueden convertirse en ello, si estos son el contenido de estudio.

Una clasificación de los tipos de medios y materiales de enseñanza, la presentamos a continuación, aquí se incluye una pequeña descripción de las características de cada tipo de medio y se ejemplifican algunos materiales representativos de cada tipología. **Ver Anexo 5**

Este conjunto de recursos, representativos de las denominadas Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC), se caracterizan porque posibilitan internamente desarrollar, utilizar y combinar indistintamente cualquier modalidad de codificación simbólica de la información. Los códigos verbales, icónicos fijos o en movimiento, el sonido son susceptibles de ser empleados en los sistemas informáticos.

Las TIC constituyen un factor fuertemente asociado al desarrollo de una comprensión científica del proceso de enseñanza aprendizaje, por ser éste, esencialmente, un proceso de comunicación y, consecuentemente, de información. Por ello, el surgimiento de tecnologías cada vez más sofisticadas

y masivas modifica sensiblemente las vías de expresión del contenido, los métodos de trabajo con el mismo y, por extensión, las formas de organización del proceso.

En el marco de las transformaciones que se materializan en los diferentes niveles de enseñanza en nuestro país, el uso de los más modernos y variados medios, fomentan en un elevado nivel la esfera formativa en el proceso de enseñanza aprendizaje, pilar fundamental para la formación del egresado integral pues apoyan no solo la parte instructiva, sino también el trabajo educativo y estimulan la formación de valiosos rasgos del carácter, tales como la conciencia de responsabilidad, actividad, iniciativa, conciencia en el cuidado de la propiedad del estado, el colectivismo y otras. Además los medios causan un gran efecto emocional sobre los alumnos, desarrollan hábitos, habilidades y capacidades para su futuro; y vinculado a ello tenemos el empleo de los asistentes matemáticos Derive, el Geómetra y otros, donde el estudiante observa por ejemplo, en el Derive el gráfico de la función, su comportamiento al asignar valores, en el caso del Geómetra, el estudiante construye la figura, la analiza, puede modificarla, calcular áreas, perímetros, trazar paralelas, perpendiculares y otros elementos, con la importante posibilidad de poder modificar algunos elementos y analizar, o sea, la posibilidad de ser representaciones dinámicas. También es posible aprovechar las potencialidades del tabulador electrónico Excel que como componente tiene el Office en la construcción de gráficos, tablas, el trabajo con funciones estadísticas.

#### **1.4.2 El sistema integrado de medios y su papel en la comprensión.**

**Sistema integrado de medios:** Lo constituyen todos los materiales y recursos tecnológicos que están a disposición de los estudiantes y docentes para realizar con éxito su proceso de enseñanza y aprendizaje en disímiles condiciones. Se conforma por medios impresos, audiovisuales e informáticos.

**Medios impresos:** Texto básico, guía de estudio, guía de la carrera, guía del profesor, materiales complementarios, y otros documentos impresos complementarios.

**Medios audiovisuales e informáticos:** Videos, transparencias, audio casetes, radio y TV educativa, software educativa, materiales en formato digital, laboratorios virtuales, multimedia, correo electrónico, plataformas interactivas, y otros.

El sistema integrado de medios está creado para que actúe en las más disímiles condiciones. Los escenarios educativos que podemos encontrar son: el hogar, la sede universitaria central, la sede universitaria municipal, otras instituciones educativas sociales, centros de recursos del aprendizaje y centros laborales.

Entre los medios de enseñanza se tienen los siguientes:

- El texto y la guía de estudio como documentos rectores en el sistema integrado de medios.
- Guías del programa.
- Multimedia.
- Videos.
- Bibliografía Complementaria.
- Otros medios

El sistema integrado de medios como se dijo anteriormente tiene como elementos rectores: el libro de texto y la guía de estudio, los que actúan como eje articulador y tienen las siguientes funciones. Estar aptos para actuar en cualquier condición. Ambos deben guiar y posibilitar por sí solos el auto aprendizaje. Ambos marcan la pauta de entrada y participación de los restantes medios en el sistema. El libro de texto y la guía de estudio constituyen la base para sobre ellos construir un conjunto de materiales impresos o digitalizados.

Dentro de los medios impresos se tiene: La guía de estudio.

La guía de estudio en el sistema de medios de enseñanza

Ningún medio de enseñanza por sí solo garantiza la calidad del proceso de enseñanza y aprendizaje por lo que la guía de estudio constituye un apoyo al desarrollo del proceso, y tiene que estar plenamente integrado al modelo pedagógico establecido.

**La guía de estudio** ejerce una función **articuladora de los restantes medios didácticos**.

La articulación de la guía de estudio con los restantes medios didácticos, resulta un elemento esencial a tener en cuenta por los profesores encargados de su elaboración.

La guía de estudio sin embargo, no puede pretender sustituir al texto o a las fuentes de información básica, ni incorporar en exceso información que atente contra la necesaria búsqueda y consulta de diversas fuentes que debe realizar el estudiante en su aprendizaje para vencer la materia; es necesario evitar el desuso de la bibliografía básica y de consulta, así como también el exceso de facilismo por parte del estudiante.

**La guía de estudio:**

- Orienta al estudiante sobre cómo utilizar el texto.
- Actualiza conceptos, categorías y amplía la información contenida en el texto.
- Establece una relación con los restantes medios del sistema en tanto:
- Ubica y orienta su uso.

- Los referencia.

En el **Anexo 6** se expone ¿Qué es la guía de estudio? y ¿Qué es la guía formativa?

Los restantes medios del sistema constituyen materiales de: apoyo y complementarios, los que son muy importantes.

Y estos pueden ser. Multimedia, Otras guías, Videos, Bibliografías complementarias, y otros medios.

Podría decirse que no se ha previsto el efecto de un Sistema de Medios sobre la Enseñanza de la Matemática ni se ha desarrollado una concepción que incorpore este poderoso instrumento a la enseñanza de la Matemática.

El Sistema Integrado de medios para la comprensión de las ecuaciones es una propuesta metodológica de utilización de las Tecnologías de la Información y Comunicación en el proceso de enseñanza-aprendizaje de este tema de la Matemática Básica.

Sobre la estructura del sistema integrado de medios.

La concepción del mismo como sistema integrado se basa en una recopilación de materiales y recursos didácticos en un entorno informático como herramientas de seguimiento en el aprendizaje que tiene como objetivo:

- Mejorar la calidad de la enseñanza y del aprendizaje usando el material.
- Facilitar el seguimiento del trabajo del alumno.
- Potenciar el trabajo de ayuda haciendo uso del material.
- Romper las limitaciones espacio-tiempo posibilitando el seguimiento de los encuentros no presenciales.
- Personas con dificultad de acceso por motivo de trabajo, residencia, etc.
- Reforzar las destrezas de los alumnos en la resolución de ecuaciones.

#### **Fases del sistema integrado de medios para la comprensión de las ecuaciones.**

A. Planificación de la Acción Formativa y Diseño del Material.

B. Desarrollo de la Formación.

C. Seguimiento y Evaluación.

D. Evaluación Global.

E. Adaptación al Espacio.

Una de las tendencias en la modernización de la clase en la actualidad lo constituye la utilización de los más variadas métodos y medios de enseñanza lo que contribuye, además, a resolver la contradicción entre el volumen siempre creciente de información que se debe transmitir y el constante tiempo escolar para la educación de los individuos.

En este contexto un sistema de Medios tiene un significado especial, su introducción determina modificaciones en la forma de enseñar, en los procedimientos que pueden utilizar los estudiantes para aprender, en los contenidos que se estudian, en las habilidades que se deben desarrollar, y por ende en los efectos que se pretenden lograr en la formación del educando; lo que presupone la necesidad de que dicha introducción sea rigurosamente estudiada en sus múltiples aspectos.

El uso de un Sistema de Medios no significa el uso de un medio individual, se trata de una forma valiosa para la transmisión individual de la información que posibilita elevar a planos superiores el cumplimiento de los objetivos; y funciones que tiene la Matemática en el currículo escolar, pues permite poner el énfasis en la comprensión teórica y en el desarrollo de capacidades y habilidades, a la vez que facilita nuevas formas de relación con el contenido y permite modificar la forma de enfrentar la enseñanza de esta ciencia. Sin embargo no existe un medio en particular que permita integrar todos los contenidos de la enseñanza de la Matemática Básica, ni prever los cambios que hay que realizar para lograrlo.

Los retos que suponen para la organización del proceso de enseñanza-aprendizaje dependerán en gran medida del escenario de aprendizaje (el hogar, el puesto de trabajo o el centro de recursos de aprendizaje); es decir, el marco espaciotemporal en el que el usuario desarrolla actividades de aprendizaje.

De igual manera, el rol del personal docente también cambia en un ambiente de uso intensivo de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TICs). El profesor deja de ser fuente de todo conocimiento y pasa a actuar como guía de los alumnos, facilitándoles el uso de los recursos y las herramientas que necesitan para explorar y elaborar nuevos conocimientos y destrezas; pasa a actuar con los recursos de aprendizaje y a acentuar su papel de orientador y mediador (Salinas, 1998).

Junto a ello, el alumno necesitará servicios de apoyo de guías y ayudas profesionales que le permitan participar enteramente en el ejercicio de su actividad.

Podemos entender la innovación como un proceso intencional y planeado, que se sustenta en la teoría y en la reflexión y que responde a las necesidades de transformación de la práctica para un mejor logro de los objetivos (Fullan y Stiegelbauer, 1991; Rhodes, 1994)

Cada universidad debe responder desde su propia especificidad, partiendo del contexto en el que se halla, teniendo en cuenta las fortalezas que posee.

## **CAPITULO 2. Propuesta del sistema integrado de medios para favorecer la comprensión de las Ecuaciones en la Matemática Básica.**

### **2.1 Diagnóstico de necesidades del proceso de enseñanza aprendizaje de las Ecuaciones en la Matemática Básica.**

Diagnóstico- Indica el estado real del objeto y evidencia el problema en torno al cual gira y se desarrolla la estrategia. Esto es uno de los elementos que se tuvo en cuenta para diseñar y aplicar un estudio acerca de la situación que se presenta en la Matemática Básica con las ecuaciones matemáticas, teniendo en cuenta, que la misión de la Universidad cubana es la formación del profesional en los propósitos predeterminados en las condiciones de la Revolución Educativa.

Para el estudio diagnóstico se tuvo en cuenta los elementos del álgebra que inciden en la Matemática Básica y los contenidos de la Matemática Básica que mayor incidencia tienen en los bajos resultados docentes de los estudiantes así como valorar la utilización de los medios de enseñanza utilizados en el aprendizaje de esta asignatura.

El estudio se concentró en profesores que han impartido la asignatura y en estudiantes que cursan o han transitado ya por la asignatura. Con el objetivo de constatar el problema que da origen a la investigación y realizar el diagnóstico de necesidades para establecer las dificultades fundamentales del proceso de enseñanza aprendizaje que permitirán la orientación adecuada en el estudio de las Ecuaciones en la Matemática Básica, se utiliza la metodología de investigación cualitativa y cuantitativa.

Se utilizó como muestra 12 profesores adjuntos que han impartido la asignatura de Matemática Básica en cinco sedes municipales de la provincia: Placetas, Cifuentes, Ranchuelo, Sagua y Santa Clara y 31 estudiantes de las Carreras de Ingenierías Agropecuaria y de Procesos Agroindustriales, de 1ro, 2do, 3ro y 4to año de la SUM de Ranchuelo.

En el estudio diagnóstico se emplearon diferentes métodos de investigación científica que permitieron arribar a conclusiones sobre el comportamiento de situación que presenta la comprensión de las ecuaciones de la matemática Básica.

De los métodos del nivel teórico se emplearon:

- El analítico-sintético y el inductivo-deductivo.

Éstos permitieron el procesamiento de la información científica consultada y recogida mediante la aplicación de los diferentes instrumentos, así como de los elementos esenciales para el diseño del sistema integrado de medios.

- El histórico-lógico: permitió contextualizar el problema, sus antecedentes y su desarrollo, así como las transformaciones que se producen en los programas de la Educación Media Superior y en la Educación Superior como parte de la Revolución Educacional para determinar el proceso y el estado de las ecuaciones en el momento de la aplicación de diagnóstico.

### **2.1.1 Análisis de documentos.**

Los documentos revisados y analizados fueron: Orientaciones metodológicas de 10mo, 11no y 12mo grado; Programas de 10mo, 11no y 12mo grado.

Programas y Orientaciones metodológicas de la Matemática en la Universidad.

El libro de texto básico “Precálculo Funciones y Gráficas”

Comprobándose que en estos documentos no se recomienda otro elemento para el estudio que no sea el libro de texto y el uso de la computadora. En el tema de las ecuaciones del grado 11 (Orientaciones metodológicas de 10mo, 11no y 12mo grado) se enfatiza en el desarrollo de habilidades para encontrar un procedimiento de solución, se resaltan las posibilidades que brindan estos contenidos para mostrar a los alumnos las formas que tiene la matemática de asegurar sus conocimientos mediante la resolución de los ejercicios en que se apliquen diferentes vías de solución. En la universidad se pretende ampliar y profundizar sobre este tema.

En un análisis realizado a los programas (Ver **Anexo 4**) de la Matemática Básica para las carreras de Ingeniería Agropecuaria y para Procesos Industriales como parte del diagnóstico sobre el cual se diseñó este proyecto, se encontraron varios programas con escasa sistematización entre los objetivos, los contenidos, y los métodos de enseñanza (incluso existen programas que solo consisten en un listado de contenidos). Se percibe en la organización de los contenidos plasmada en los programas una influencia notable de la estructura formal del procedimiento de resolución, por lo que predomina en ellos un enfoque abstracto con escasa relación con los fenómenos del dominio de definición. Las orientaciones metodológicas de la Matemática Básica aporta escasos elementos y en algunos casos con sugerencias metodológicas muy puntuales. El texto básico “Precálculo Funciones y Graficas” impone el predominio de trabajo algorítmico y no así las actividades de sistematización con una colección de ejercicios con sus diferentes niveles de desempeños a resolver con el uso de medios informáticos. En las orientaciones metodológicas de la Matemática Básica ver **Anexo 4** se observa que no se insiste en la comprensión de las ecuaciones, solo se presta especial atención a la

modelación matemática. Y no se recomienda el uso de medios para favorecer la comprensión de la ecuación matemática.

### **2.1.2. La encuesta:**

Los indicadores medidos están indicados en el **Anexo 7**

**En los estudiantes:** Aspectos sobre elementos del Álgebra: Teoría de conjuntos. Relaciones y estructuras. Dominios numéricos. Potenciación, radicación, y logaritmación. Operaciones con expresiones algebraicas. Descomposición factorial. Funciones, gráficos y propiedades. Ecuaciones. Sistemas de ecuaciones. Ecuaciones de segundo grado. Y sobre los contenidos de la Matemática Básica se tuvieron en cuenta: Sistemas de ecuaciones lineales. Desigualdades polinomiales y racionales. Ecuaciones cuadráticas. Ecuaciones reducibles a la forma cuadrática. Funciones polinomiales, racionales exponenciales y logarítmicas. Operaciones, análisis de las propiedades. Determinación de raíces racionales de polinomios. Gráficos. de funciones racionales en fracciones parciales. Ecuaciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. Números complejos. Definición. Operaciones. Además se encuestó sobre los medios utilizados para el estudio independiente.

**En los profesores:** Aspectos sobre elementos del Álgebra: Teoría de conjuntos. Relaciones y estructuras. Dominios numéricos. Potenciación, radicación, y logaritmación. Operaciones con expresiones algebraicas. Descomposición factorial. Funciones, gráficos y propiedades. Ecuaciones. Sistemas de ecuaciones. Ecuaciones de segundo grado. Y sobre los contenidos de la Matemática Básica se tuvieron en cuenta: Sistemas de ecuaciones lineales. Desigualdades polinomiales y racionales. Ecuaciones cuadráticas. Ecuaciones reducibles a la forma cuadrática. Funciones polinomiales, racionales exponenciales y logarítmicas. Operaciones, análisis de las propiedades. Determinación de raíces racionales de polinomios. Gráficos de funciones racionales en fracciones parciales. Ecuaciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. Números complejos. Definición. Operaciones.

Además se encuestó sobre los medios utilizados para el estudio independiente por los estudiantes y las causas que los profesores consideran que inciden en las dificultades detectadas.

#### **Sobre los resultados de la aplicación de la encuesta a los estudiantes.**

En cuanto a los resultados en el aprendizaje de la Matemática Básica (**pregunta 1**) refieren bien el 22.5%, regular el 30% y el 47,5% dicen haberse evaluado de mal.

**En la pregunta 2** sobre los contenidos de la Matemática Básica en que tuvieron dificultades, el 100% de los estudiantes marcaron las ecuaciones lineales y cuadráticas, las ecuaciones reducibles a cuadráticas y las ecuaciones exponenciales y logarítmicas y las trigonométricas. Solo el 40% de los

estudiantes marcaron algún otro elemento, todo lo que advierte que tienen dificultades en la comprensión de las ecuaciones de la Matemática Básica.

**En la pregunta 3** sobre los elementos del álgebra que incidieron en el resultado del aprendizaje en la Matemática Básica el 100% de los estudiantes señalaron las ecuaciones y como otro elemento importante aparece que el 100% señaló la descomposición factorial. Solo el 39,1% señaló algún otro elemento.

**En la pregunta 4** sobre los medios utilizados para el estudio independiente el 100% señala que utilizó el libro de texto y el 83,1% señaló que además del libro de texto estudió por las notas de clases. Como se aprecia no cuentan con otros materiales por dónde estudiar.

**En la pregunta 5** sobre si consideran importante contar con un sistema de medios que contribuya a la autopreparación el 100% consideró que sí porque más del 90% viven en zonas rurales donde no hay bibliotecas y porque necesitan ampliar lo que el profesor imparte no solo por el libro de texto sino por otras bibliografías.

Como síntesis de la aplicación de este instrumento se precisa:

Que los estudiantes tienen dificultades en el aprendizaje de las ecuaciones tratadas en la Matemática Básica.

Que los estudiantes presentan dificultades en la línea directriz Ecuaciones.

Que no se logró un aprendizaje significativo de las ecuaciones tratadas en la enseñanza media general.

Que solo se utiliza para el estudio independiente el libro de texto y las notas de clases.

De la encuesta realizada a los profesores se evaluaron los siguientes resultados.

En la pregunta 1 sobre los contenidos del álgebra con dificultades, propiedades de la inclusión y de la igualdad en la Teoría de Conjuntos. En el sistema de Numeración de los Reales. Operaciones. Cálculo del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo. Multiplicación, división de monomios y polinomios. Suma y Resta de monomios y polinomios. Regla para la factorización de un binomio, trinomio y polinomio. Simplificación de expresiones algebraicas. Propiedades de los logaritmos. Propiedades de la potenciación. Racionalización. Radicales semejantes. Ecuaciones. Inecuaciones. Sistemas de ecuaciones. El 100% de los profesores consideró que hay muchas dificultades en las ecuaciones y en las reglas para la factorización de un polinomio. El 93% consideró que hay pocas dificultades en el aprendizaje del resto de los componentes del algebra y el 0% aseveró que ninguna dificultad del aprendizaje no hay en algunos de los elementos considerados.

En **la pregunta 2** sobre las dificultades encontradas por los profesores para el logro de una buena enseñanza: Dificultades encontradas para enseñar matemática en cuanto al nivel de actuación. Falta de preparación psicológica en los estudiantes. Falta de base educacional (aprendizaje) de los estudiantes. Desinterés en los estudiantes. Poca preparación por parte del profesor. Falta de materiales o bibliografías para el estudio independiente. Insuficientes habilidades para el razonamiento lógico. Métodos inadecuados de estudio y falta de estudio. Otros.

Se detectó que el 100% de los profesores encuestados aseveran que existe mucha falta de base educacional (aprendizaje) de los estudiantes y mucha falta de materiales o bibliografías para el estudio independiente. En el resto de los elementos señalados consideran que hay pocas dificultades y el 0% plantea que no hay elementos con ninguna dificultad, por lo que se considera que en todos los elementos del álgebra por lo menos hay pocas dificultades

Como síntesis de la aplicación de este instrumento se precisa:

- Que los estudiantes tienen muchas dificultades en el trabajo con todas las ecuaciones matemáticas que se presentan en las Matemática Básica.
- Que los estudiantes que ingresan a las carreras de ingeniería en la Universidad tienen muchas dificultades en el aprendizaje que le antecede a esta enseñanza.
- Que los profesores no cuentan con materiales para apoyar la orientación del estudio independiente.

**Como resumen de la aplicación de este instrumento podemos plantear que:**

- Existe poco dominio del trabajo con las ecuaciones matemáticas presentes en la Matemática Básica.
- La descomposición factorial es un elemento del álgebra con dificultades en el aprendizaje para su aplicación al trabajo con las ecuaciones.
- No se utilizan medios didácticos ajenos al libro de texto y a las notas de clases.
- Los profesores consideran que el tratamiento dado a las ecuaciones en la enseñanza media general es insuficiente.

Las necesidades planteadas por los estudiantes se corresponden con la de los profesores.

En la encuesta realizada a 2 profesores con más de 4 años de experiencia se registran iguales resultados que los descritos con antelación, lo cual corrobora la existencia generalizada de los mismos problemas.

### **2.1.3. La Entrevista semiestructurada**

**En el Anexo 8** se muestra las preguntas generadoras de la entrevista a estudiantes y a profesores.

Se consideraron los siguientes elementos:

**A los estudiantes.** Conocimientos sobre los elementos del álgebra que inciden en la Matemática Básica, situación que presentan las ecuaciones matemáticas, y los medios que se utilizan para el estudio independiente.

**A los profesores.** Contenidos de la Matemática Básica que necesitan conocimientos del nivel de enseñanza anterior. Conocimiento real de la preparación que tienen los alumnos para el estudio de las ecuaciones en la Matemática Básica. Causas que inciden en los resultados del aprendizaje de las ecuaciones en la Matemática Básica. Conocimientos pedagógicos y didácticos para resolver las dificultades que se les presentan a los profesores en el proceso docente educativo. Uso de medios de enseñanza para el estudio independiente. Consideraciones y la utilidad que les ofrece los medios de enseñanza para dicho estudio.

**En la entrevista aplicada a los estudiantes, se obtuvieron los resultados siguientes:**

- Las ecuaciones matemáticas que recibieron en los programas de preuniversitario no logró el objetivo propuesto; el de desarrollar habilidades.
- La matemática Básica pretende reafirmar objetivos que ya conocen, y no se puede lograr en el caso de las ecuaciones más elementales, lineales, cuadráticas, con radicales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.
- Sobre los medios a utilizar para el estudio independiente se corroboró que por no tener:
  - Û No se pueden relacionar una mayor cantidad de ejercicios para resolver ecuaciones.
  - Û No se puede establecer estrecha relación entre la teoría y los ejercicios.
  - Û No se puede organizar mejor el estudio independiente.
  - Û No se sienten bien preparados para enfrentar las evaluaciones.
  - Û Están desmotivados al estudiar.

Y consideran como elementos negativos en este aspecto:

- Û Los laboratorios de computación no aseguran ser utilizados.
- Û No tienen más materiales que el libro de texto.

Y como aspectos interesantes señalaron que:

- Û Los medios los harían sentir más seguros.
- Û Propicia la orientación del estudio independiente.

**En la entrevista aplicada a los profesores, se obtuvieron los resultados siguientes.**

1. Los profesores de la universidad prestan poca atención al conocimiento y a la preparación real de los estudiantes al iniciar los estudios universitarios, no se realiza un diagnóstico real de los

conocimientos. En particular no conocen de qué forma se define y trabaja con las ecuaciones en la enseñanza media.

2. Los estudiantes no están interesados en la Matemática que reciben en sus estudios pues no perciben la utilidad de la misma.

3. Los estudiantes no tienen métodos apropiados para el aprendizaje de la Matemática en el nivel superior.

4. Dificultades de los estudiantes por las formas de estudio y la organización que le dan a sus clases los profesores universitarios.

5. Los estudiantes presentan problemas con los cambios en el pensamiento matemático para el nivel superior y con la inestabilidad de las “ayudas “del profesor.

6. Dificultades por parte de estudiantes y profesores para acceder a las nuevas tecnologías de la información y la comunicación, y por tanto para su aplicación en el proceso docente educativo.

En los **resultados en la entrevista a profesores con más de 4 años de experiencia** se obtuvo que:

- En los cinco cursos los estudiantes han demostrado no saber resolver ningún tipo de ecuación.
- Durante los cinco años los estudiantes solo han tenido como material bibliográfico el libro de texto y las notas de clases. En los cinco cursos han tenido dificultad con el uso de los laboratorios de computación.
- Existe deficiencia generalizada en el nivel de partida de los estudiantes al iniciar los cursos.
- En la mayoría de las veces los programas no son vistos totalmente en el tiempo destinado para ello.
- Se usa excesivamente el método expositivo en la enseñanza
- No se utilizan los medios de enseñanza.

**Como resumen de la aplicación de este instrumento podemos plantear que:**

Los resultados confirman las mismas carencias advertidas por los estudiantes y profesores entrevistados, lo que trasciende a la necesidad de diseñar un sistema integrado de medios para favorecer la comprensión de las ecuaciones en la Matemática Básica.

#### **2.1.4 Realización de pruebas**

En la **Prueba de diagnóstico Ver Anexo 9** se encontró que en el inicio del curso escolar el 100% de los estudiantes resultaron no saber resolver una ecuación y el 45% solamente pudo descomponer en factores un trinomio de la forma  $x^2+px+q$ .

En el **Anexo 10** se puede observar proyectos de exámenes finales en los que se valora que el único objetivo evaluado es las ecuaciones con radicales y en ellas el procedimiento de trabajo y no así la modelación matemática que es el objetivo del programa en este nivel.

## Valoraciones

En el **Anexo 11** se aprecian los resultados en exámenes finales durante 4 cursos escolares y se constató que de los 204 estudiantes matriculados hasta el curso 2007-2008, solo se presentaron a pruebas finales 122 y aprobaron 92 que representa el 45,1%, de los presentados, y en la revisión de las actas de los exámenes finales se encontró que 83 estudiantes obtuvieron notas de 2 y 3 puntos y solo 39 estudiantes obtuvieron notas de 4 y 5. Gran parte de los estudiantes presentan un bajo aprovechamiento docente, en los primeros años donde predominan las puntuaciones de 3. Varias causas relativas a los procesos de aprendizaje provocan escasa comprensión del procedimiento de solución de las ecuaciones. En cuanto a contenidos de aprendizaje, tradicionalmente la enseñanza de la matemática ha sido notablemente influida por la forma de cómo se organiza el contenido matemático en la ciencia matemática. Sin embargo esta estructuración del contenido poco ha contribuido a la comprensión de los conceptos matemáticos en los escolares. Según datos obtenidos se conoce que es generalizado el hecho de que se logre un dominio razonable de los procedimientos de transformación, existen dificultades en la determinación del conjunto solución y en la determinación del dominio de definición así como la relación entre estos dos elementos. Se pudo comprobar que muchos estudiantes de manera significativa solo pueden resolver las ecuaciones algebraicas y no así las trascendentes. Inclusive, difícilmente logren asociar una ecuación algebraica con una trascendente.

### **2.1.5 Valoración de los resultados obtenidos:**

Al realizar el análisis de los resultados obtenidos durante la aplicación de los diferentes métodos se constató lo siguiente:

- La enseñanza de las ecuaciones no esta orientada en función del papel que ella desempeña en la formación de un profesional, es decir, por una parte ayudar a la formación de la mentalidad y por otra, la de constituir un instrumento para investigar en otras ramas de la matemática.
- La utilización de la computación en la enseñanza contribuye a disminuir las deficiencias en lo concerniente al desarrollo del pensamiento abstracto al presentar a los estudiantes las ecuaciones no en forma estática sino dinámica.
- Los contenidos de álgebra que se imparten en el nivel medio de enseñanza se ubican de manera acertada, pues parten del análisis aritmético hasta llegar al trabajo con variable, es decir el estudiante a través de expresiones algebraicas, entra en contacto directo con el medio donde vivimos y nos hemos desarrollado pero no se desarrollan las habilidades necesarias.

- El álgebra en la Matemática Básica debe estar en correspondencia con las exigencias actuales, donde se propicie la introducción de medios novedosos para el aprendizaje, además que conlleven a fijar con mayor solidez los conocimientos y por ende que despierten el interés y la motivación de nuestros estudiantes al recibir esta asignatura.

Tales resultados entran a confirmar el problema científico planteado en la investigación, por lo que se requiere pasar de la descripción a la explicación en la solución de tal problema.

## **2.2 Estructura y propuesta del sistema integrado de medios para favorecer la comprensión de las ecuaciones en la Matemática Básica.**

En la práctica, la enseñanza de las ecuaciones ha dependido principalmente de los textos que utilizan los profesores.

Por medio de un análisis de los textos y de artículos de investigación especializados, se aprecia dos tendencias fundamentales en la enseñanza de las ecuaciones. En una de ellas predomina la organización del contenido clásico como se estructura en el Álgebra para finalmente buscarle sus aplicaciones, y en la otra, el contenido se genera a través de la necesidad de resolver problemas prácticos, de modo que los conceptos básicos se forman a partir del problema de buscar los ceros o de su significado físico.

Se ha difundido en el país software para la enseñanza por medio de microcomputadoras, e incluso a nivel experimental se han diseñado programas para calculadoras que logran acercamientos intuitivos al concepto de ecuación.

Varios investigadores han reportado éxitos importantes en la enseñanza utilizando estos medios, sin embargo este tipo de acercamientos tiene el inconveniente de ser costoso y por tanto tiene pocas posibilidades de convertirse en recurso de uso masivo en nuestro medio

El sistema integrado de medios para favorecer la comprensión de las ecuaciones en la Matemática Básica está estructurado en una parte para los profesores y una para los estudiantes, en el epígrafe 2.3 de Propuesta de orientaciones metodológicas a profesores se explica los medios que se ofrecen para los profesores.

La correspondiente a los estudiantes se articula a partir de tres guías de estudio que constituyen el eje a partir del cual se integra el sistema de medios y para su confección se tuvo en cuenta el tratamiento de los contenidos considerando los elementos matemáticos fundamentales de cada tipo de ecuación así como:

- El nivel de complejidad de los problemas a tratar.
- El objetivo que se pretende lograr en cada uno de ellos.

- La relación interdisciplinaria que se da entre los problemas a resolver.

La articulación de la guía de estudio con los restantes medios didácticos, resulta un elemento esencial a tener en cuenta.

Las tres guías de estudio se titulan:

Guía de estudio para las ecuaciones polinómicas.

Guía de estudio para las ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Guía de estudio para las ecuaciones trigonométricas.

Con la aplicación de este sistema de medios para favorecer la comprensión de las ecuaciones en la Matemática Básica se pretende que el estudiante pueda realizar mayor cantidad de ejercicios y con mayor grado de dificultad, además que pueda visualizar algunos contenidos. Se proponen un gran número, con un alto nivel de variedad, de ejercicios resueltos, para que se pueda preparar de manera independiente y contribuir así que fluya de manera amena el proceso docente y, con un ambiente favorable donde los estudiantes se sientan motivados. Las guías de estudio se articulan con:

#### **Materiales Impresos.**

- Libro de texto. Precálculo Gráfica y Funciones.
- Bibliografías Complementarias: Libros de texto de 10mo, 11no y 12mo grado.
- Guía del programa.

#### **Medios audiovisuales:**

- Software educativo. Eureka (Preuniversitario)
- Materiales complementarios.
- Presentaciones en Power Point.
- Documentos con páginas Web.
- Documentos en formato PDF, en EXCEL y en Word.

Ver en **Anexo 12** el esquema que muestra la estructura del Sistema de medios propuesto.

Las tres guías de Estudio muestran la forma en que puede integrarse los diversos medios didácticos en el estudio de las Ecuaciones en la Matemática Básica. Estas guías se exponen a continuación.

#### **Guía de estudio para ecuaciones polinomiales.**

Asignatura: Matemática Básica.

#### **Tema: Ecuaciones polinomiales.**

**Objetivo General:** Identificar y resolver ecuaciones polinomiales, empleando el procedimiento correspondiente para su solución, y aplicarlo a la resolución de problemas prácticos.

## **Sumario.**

Ecuaciones lineales de una variable. Ecuaciones lineales con dos variables. Ecuaciones cuadráticas. Ecuaciones cúbicas. Ecuaciones bicuadráticas. Ecuaciones con radicales. Solución por factorización. Solución por radicación. Completamiento de cuadrados y la fórmula cuadrática. Tipos de raíces de acuerdo con el discriminante. **Otras** transformaciones para obtener ecuaciones cuadráticas. Ejercicios. Ecuaciones polinomiales. Determinación de raíces en las ecuaciones polinomiales.

## **Objetivos específicos:**

1. Definir el concepto de ecuación polinómica.
2. Identificar el tipo de ecuación polinómica a que se refiere.
3. Resolver ecuaciones lineales aplicando transformaciones algebraicas.
4. Resolver ecuaciones cuadráticas por el método de factorización, el método de radicación o la fórmula cuadrática, según el caso.
5. Resolver ecuaciones cúbicas aplicando el método por agrupamiento.
6. Resolver ecuaciones bicuadráticas aplicando sustituciones.
7. Resolver ecuaciones con radicales aplicando el método propuesto.
8. Identificar formas cuadráticas y resolver ecuaciones que las contengan.
9. Resolver ejercicios.
10. Resolver ecuaciones polinómicas de grado  $n$ .

## **Pre-requisitos:**

Es necesario que antes de estudiarse los tópicos de este sumario se revisen los siguientes aspectos básicos para la comprensión del tema:

1. Dominios numéricos.
2. Igualdades.
3. Definición de ecuación.
4. Solución o raíces de una ecuación.
5. Conjunto solución de una ecuación.
6. Significado de resolver una ecuación.
7. Ecuaciones equivalentes.
8. Transformaciones equivalentes y no equivalentes.
9. Descomposición factorial.
10. Traducción del lenguaje común al algebraico.
11. Raíz  $n$ -ésima de un número real.

12. Definición y propiedades de los números complejos.
13. Polinomios. Operaciones básicas. Factorización.
14. Teorema de factorización de polinomios.
15. Teorema fundamental del Álgebra.
16. Teorema de raíces imaginarias.
17. Teorema de las raíces racionales.

**Bibliografía a utilizar:**

Pre cálculo: Funciones y Gráficas. Raymond A. Barnett, Michael R. Ziegler, Karl E. Byleen. Vol. 1, 1ra Parte y 2da Parte.

Sistema integrado de medios en formato digital para el estudio de las ecuaciones polinómicas

**Tareas a desarrollar.** Ecuaciones polinomiales:

Antes de comenzar el estudio del tema si presenta dificultades en los prerrequisitos del 1 al 8 le sugerimos que **consulte el material general de ecuaciones** que se ofrece en el sistema de medios, Si es en el prerrequisito 9 donde están sus dificultades puede consultar el **material sobre descomposición factorial**

Repasar en la sección A-2 del libro de texto de Pre cálculo la definición de **Polinomio**, y analizar los ejemplos que se proponen.

Note que de manera general un polinomio es una expresión algebraica que se puede representar de la siguiente forma:

$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\dots+a_1x+a_0$ , donde  $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0$  se llaman coeficientes de los términos que tienen la forma  $ax^n$  con  $n$  un número entero no negativo y  $a$  es un número real.

Observe que los polinomios se pueden clasificar de acuerdo con el grado: polinomio de grado 1, polinomio de grado 2, polinomio de grado 3 y así sucesivamente.

Por lo antes expuesto se puede concluir que si queremos conocer la solución o raíz de la ecuación  $P(x)= 0$ , es necesario conocer el grado de dicho polinomio y así estamos en presencia de:

- Ecuación lineal o ecuación polinomial de primer grado.
- Ecuación cuadrática o ecuación polinomial de segundo grado.
- Ecuación cúbica o ecuación polinomial de grado 3.
- Ecuación bicuadráticas o ecuación polinomial de grado 4.
- Ecuación de grado superior a 4.

A continuación comenzamos con el estudio de las ecuaciones polinomiales de primer grado.

## Ecuaciones lineales.

Orientaciones:

Estudiar los dominios numéricos, el concepto de igualdad, la definición de ecuación, el procedimiento de solución o raíces de una ecuación, el conjunto solución de una ecuación, el significado de resolver una ecuación, concepto de ecuaciones equivalentes, y sus transformaciones.

Analizar la definición 1 página 4 de ecuación lineal con una variable en el libro de texto. Investigue sobre otra definición dada para ecuación lineal que no sea la del texto y encontrarás que.

**Definición:** Cualquier ecuación que se puede escribir en la forma:  $ax + b = 0$  donde  $a$  y  $b$  son constantes reales,  $a \neq 0$  y  $x$  es una variable, se denomina **ecuación lineal** o polinomial de **primer grado** con una variable.

Analizar ejemplo 1, página 4. del libro de texto.

Recuerde que: “Para solucionar una ecuación con una variable se realizan transformaciones algebraicas hasta despejar la variable”.

Observación: Si la ecuación lineal dada contiene más de una variable, para solucionarla se expresará una de las variables en términos de las restantes.

Estudiar y analizar el ejemplo 2, página 5.

Estudiar la estrategia o la sucesión de indicaciones para resolver un problema cuyo modelo matemático es una ecuación con una variable en las páginas 5 y 6.

Observación: Estos problemas se han clasificado como:

- Problemas numéricos y geométricos (ver ejemplos 3 y 4, página 6-7).
- Problemas de razón y tiempo (ver ejemplos 5, 6, y 7 página 9-11).
- Problemas con mezclas (ver ejemplo 8, página 12).

Ver las observaciones finales que aparecen en la página 13 respecto a las ecuaciones lineales.

Importante:

### 1. Solución de ecuaciones lineales. Tener en cuenta que:

Regla: Para resolver ecuaciones lineales o de primer grado, se aplican las propiedades de la igualdad para transformar la ecuación dada en una ecuación equivalente cuya solución sea obvia.

Y las reglas a tener en cuenta son:

$a=b$  equivale a  $a+c=b+c$  para cualquier  $c$

$a=b$  equivale a  $ca=cb$  para cualquier  $c \neq 0$

Ejemplo.

Resolver la ecuación  $3x-5=7x+19$

Solución

$$3x-5=7x+19$$

Equivale a  $3x-5+5=7x+19+5$  sumando 5 en ambos miembros

Equivale a  $3x=7x+19+5$  porque  $5-5=0$

Equivale a  $3x-7x=7x-7x+19+5$  sumando  $-7x$  en ambos miembros

Equivale a  $-4x=24$  agrupando términos semejantes

Equivale a  $\frac{-4x}{-4} = \frac{24}{-4}$  dividiendo ambos miembros por  $-4$

Equivale a  $x=-6$  efectuando las divisiones

Conjunto solución:  $\{-6\}$

Como se observa, la última ecuación tiene una solución obvia. En la práctica, se suelen realizar varios de estos pasos a la vez, de manera que el proceso de solución sea más corto. También suele omitirse la frase “equivale a” o sustituirla por algunas similares tales como “así que”, “entonces”, “se tiene”, “por lo tanto”, etcétera. El proceso es completamente similar si aparecen letras en lugar de números concretos.

A continuación te oriento sobre la vía para estudiar y profundizar en el tema sobre las ecuaciones lineales. En los **materiales complementarios** del sistema de medios encontrarás una **presentación en Power Point con ecuaciones lineales y ejercicios resueltos**.

En los **materiales documentales** puedes consultar un documento para reactivar conocimientos sobre cómo resolver una ecuación lineal y en los ejercicios ver: **Web sobre ecuaciones lineales con ejercicios resueltos**, que constituyen dos documentos.

## Ecuaciones cuadráticas

Orientaciones:

Por la importancia que tiene el hecho de dominar a la perfección todos los casos posibles de la descomposición factorial y la repercusión en el futuro en el estudio de las ecuaciones matemáticas te propongo estudiar la descomposición factorial según el **folleto documento general Descomposición factorial**.

Note que si la solución de una ecuación es un número real entonces la raíz se denomina raíz real. Y si la solución es un número imaginario entonces estamos en presencia de una raíz imaginaria.

Estudiar el concepto de ecuación cuadrática en la página 58 del texto Pre cálculo, así como la definición 1 de la misma página de ecuación cuadrática.

Como habrás observado se describen en el texto cuatro procedimientos para solucionar una ecuación cuadrática.

Métodos de solución.

1. Solución por factorización.
2. Solución por radicación.
3. Solución al completar el cuadrado.
4. Solución por la fórmula cuadrática.

### **1. Solución por factorización.**

Ocurre cuando el trinomio de la forma  $ax^2+bx+c$  se puede escribir como el producto de dos factores de primer grado. Y la solución por descomposición en factores descansa en la siguiente propiedad de los números reales y complejos que el texto llama “propiedad cero”.

**Propiedad cero:** Si  $m$  y  $n$  son números complejos (o reales en particular):

Entonces:  $m.n = 0$  si y solo si  $m = 0$  ó  $n = 0$  ó ambos.

- Destacar que la propiedad solo se cumple cuando existe un producto de dos factores igualado a cero, no a otro número.
- Discutir cómo se podría generalizar este resultado a un producto de más de dos factores.
- Así la ecuación cuadrática queda convertida en dos ecuaciones lineales sencillas.
- En la práctica, el polinomio solo puede descomponerse en factores cuando las raíces de la ecuación son números racionales, y esta es una limitante en la que no se insiste en enseñanza media por lo que se deben remitir al material **de descomposición factorial** y profundizar en los casos cuyas raíces son números complejos.,
- Observar el recuadro con la orden de precaución en el texto de Precálculo donde hace un llamado de atención pág.60 sobre lo que sucede en el trabajo de transformaciones donde no siempre resultan ecuaciones equivalentes. Pudiendo establecer la siguiente regla:

“No divida ambos miembros de una ecuación por una expresión que contenga la variable que está resolviendo”. Si lo hace podría estar dividiendo entre cero.

Estudiar ejemplo resuelto del libro de texto de Precálculo pág.59, el número.

### **2. Solución por radicación.**

Ver en la página 60 del libro de texto.

Ecuaciones de la forma:  $ax^2+c = 0$

Ver propiedad de la raíz cuadrada página 60.

Luego: Cuando la ecuación cuadrática carece del término lineal ( $bx$ ) puede ser resuelta de manera muy simple del siguiente modo:  $ax^2 + c = 0$

Restando  $c$  en ambos miembros:  $ax^2 = -c$

Dividiendo por  $a$ :  $x^2 = -\frac{c}{a}$

Así que  $x$  será cualquiera de las dos raíces cuadradas de  $-\frac{c}{a}$ . Nótese que estas raíces serán reales o imaginarias dependiendo de los signos de  $c$  y de  $a$ , pero siempre serán dos raíces.

- Insistir en que no se desea que memorices la expresión final como una fórmula, sino que utilices el procedimiento que se ha seguido aquí.

- Ejemplo

Resolver  $7x^2 - 1 = 0$  Solución: Despejando:  $x^2 = \frac{1}{7}$  Extrayendo raíces:  $x = \pm\sqrt{\frac{1}{7}}$

Racionalizando:  $x = \pm\frac{\sqrt{7}}{7}$

Conjunto solución:  $\left\{-\frac{\sqrt{7}}{7}, \frac{\sqrt{7}}{7}\right\}$

Ejemplo Resolver  $5x^2 - 3 = 0$

Solución: Despejando:  $x^2 = \frac{3}{5}$  Extrayendo raíces:  $x = \pm\sqrt{\frac{3}{5}} = 0,774597$

Conjunto solución:  $\left\{-\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right\}$

Analizar el ejemplo del texto.

### 3. El completamiento de cuadrados y la fórmula cuadrática.

Aunque en el libro viene como un método más para resolver ecuaciones cuadráticas, en la práctica es poco usual emplear esta forma. Aquí lo vamos a estudiar como una manera de deducir la fórmula cuadrática, que es la que se emplea en los casos en que la factorización y la extracción de raíz no se pueden aplicar.

El método de la extracción de raíz se puede aplicar a ecuaciones más complicadas si previamente se realiza un completamiento de cuadrados de manera que la variable  $x$  esté contenida dentro de un trinomio cuadrado perfecto. Vamos a verlo primero mediante un ejemplo.

Ejemplo Aclarar que, más que ver los pasos de este ejemplo particular, queremos que se vea los pasos generales que se realizan, de modo que después comprendas mejor la deducción que se realizará de la fórmula cuadrática.

**Resolver**  $3x^2 - 5x + 2 = 0$

Trasponiendo el término independiente:  $3x^2 - 5x = -2$

Dividiendo por 3:  $x^2 - \frac{5}{3}x = -\frac{2}{3}$

Como  $(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$ , si se suma al binomio de la izquierda el cuadrado de la mitad del coeficiente de la  $x$ , se tendrá un trinomio cuadrado perfecto. En este ejemplo, habría que sumar el cuadrado de  $\frac{5}{6}$ . Por supuesto, se suma en ambos miembros de la igualdad para tener una ecuación equivalente:

$$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{25}{36} = -\frac{2}{3} + \frac{25}{36}$$

Descomponiendo en factores el primer miembro (trinomio cuadrado perfecto) y efectuando en el miembro de la derecha:

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1}{36} \quad \text{Extrayendo raíz cuadrada:} \quad x - \frac{5}{6} = \pm\sqrt{\frac{1}{36}}$$

Por último, despejando  $x$ :  $x = \frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{36}}$

- Nótese que, en este caso la cantidad sub radical fue positiva, pero que podría haber sido negativa (raíces imaginarias) o cero.
- Este es un método general, cualquier ecuación de segundo grado se puede resolver así, pero como las operaciones son un poco complicadas, todo el mundo prefiere aplicarlo a una ecuación general y obtener así una fórmula, mediante la cual se pueda dar la solución de manera inmediata. Esta fórmula se llama fórmula cuadrática.

#### 4. Solución por la fórmula cuadrática.

Consideraremos ahora la ecuación cuadrática general con coeficientes no especificados:

$ax^2 + bx + c = 0$ . Te propongo revises la idea de trabajo que considera el texto página 64 y analices el teorema 1 de la página 65.

Y para profundizar en el análisis de esta forma para resolver una ecuación cuadrática debes conocer cómo obtener dicha fórmula por ello el procedimiento es el siguiente:

### Deducción de la fórmula general:

Sea la ecuación general  $ax^2 + bx + c = 0$  donde los coeficientes son números cualesquiera, salvo  $a$ , que no puede ser cero.

Sumando  $-c$  en ambos miembros:  $ax^2 + bx = -c$

Dividiendo por  $a$  en ambos miembros:  $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$  Sumando en ambos miembros  $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$  para

completar un trinomio cuadrado perfecto:  $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$

Factorizando en el miembro izquierdo y desarrollando la expresión a la derecha:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \quad \text{Es decir: } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Extrayendo raíz cuadrada:  $x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Despejando  $x$ :  $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

y, finalmente, agrupando:

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	<b>Fórmula cuadrática</b>
--	---------------------------

Observaciones:

1. Ver la tabla 1, página 66. del libro de texto
2. Recuerde que ecuaciones que tienen la variable en al menos un denominador se denominan ecuaciones fraccionarias y se resuelven aplicando la siguiente sucesión de indicaciones:
  - a) Descompón en factores las expresiones que así lo permitan.
  - b) Simplifique si es posible.
  - c) Determine el mcm entre los denominadores y multiplica toda la ecuación por el mcm para eliminar denominadores.
  - d) Resuelve las ecuaciones transformadas.

Otro ejemplo resuelto que te ilustra el procedimiento de solución de una ecuación cuadrática

Ejemplo: Resolver:  $6x^2 + x - 2 = 0$

Solución:  $6x^2 + x - 2 = 0$

Multiplicando y dividiendo por 6:  $\frac{1}{6}(36x^2 + 6x - 12) = 0$

Tomando  $6x$  como variable:  $\frac{1}{6}(6x+4)(6x-3) = 0$

Sacando factores comunes y simplificando:  $(3x+2)(2x-1) = 0$

Aplicando la propiedad cero:  $3x+2 = 0$  ó  $2x-1 = 0$

$x = -\frac{2}{3}$        $x = \frac{1}{2}$       Conjunto solución:  $\left\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right\}$

Estrategia al resolver ecuaciones cuadráticas

1. Escriba la ecuación en la forma  $ax^2 + bx + c = 0$ , es decir, de modo que el miembro de la derecha sea cero.
2. Si el trinomio  $ax^2 + bx + c$  tiene factorización notable (esto solo sucede si sus ceros son números racionales) entonces resuelva la ecuación usando la propiedad cero.
3. Si el término  $bx$  no está presente, entonces despeje  $x^2$  y aplique el método de la radicación. Recuerde que siempre aparecerán dos raíces, que pueden ser reales o imaginarias.
4. Si los dos métodos anteriores no son aplicables, emplee la fórmula cuadrática.

Importante:

La fórmula cuadrática proporciona también una forma simple de predecir qué tipos de raíces tendrá la ecuación. Todo depende del valor que tome la cantidad que aparece debajo del radical, la cual se llama discriminante, porque permite “discriminar” o sea “distinguir” en qué caso nos encontramos.

El discriminante y los tipos de raíces

Discriminante:  $b^2 - 4ac$

Si  $b^2 - 4ac > 0$  entonces **dos** raíces son reales y desiguales.

Si  $b^2 - 4ac = 0$  entonces **dos** raíces reales e iguales (se dice que es una raíz doble).

Si  $b^2 - 4ac < 0$  entonces hay **dos** raíces complejas conjugadas

- Veremos, que en el tercer caso, las raíces complejas, tienen la misma parte real  $-\frac{b}{2a}$  mientras que sus partes imaginarias tienen signos opuestos, esto es, las raíces complejas, cuando aparecen, son conjugadas. (esto ocurre solo cuando los coeficientes de la ecuación sean reales).

**Observación importante:**

Nótese que en todos los casos, la ecuación de segundo grado, siempre tiene DOS raíces, lo cual no es casual y obedece a un importante teorema que mencionaremos sólo a modo de comentario:

**Teorema fundamental del Álgebra “Toda ecuación algebraica polinomial de grado “n” natural, tiene exactamente n raíces complejas”.**

Otros ejemplos resueltos.

Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas por el método más apropiado.

a.  $x^2 - 5x = -6$

b.  $x^2 + 6x = 0$

c.  $25x^2 + 16 = 0$

d.  $x^2 - 5x = -3$

Solución:

a.  $x^2 - 5x + 6 = 0 \quad (x-2)(x-3) = 0$

$x = 2 \text{ ó } x = 3 \quad \text{Conjunto solución: } \{2, 3\}$

b.  $x(x+6) = 0$

$x = 0 \text{ ó } x = -6 \quad \text{Conjunto solución: } \{0, -6\}$

Indicar el frecuente error de dividir por  $x$  en ambos miembros, con lo cual se elimina la raíz 0.

c.  $25x^2 + 16 = 0 \quad x^2 = -\frac{16}{25}$  no tiene soluciones en el dominio de los reales.

Conjunto solución: vacío

d.  $x^2 - 5x = -3 \quad x^2 - 5x + 3 = 0$

La factorización no es notable.

El discriminante es  $b^2 - 4ac = 25 - 12 = 13 > 0$ , lo cual indica que existen raíces reales. Usando la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} \quad \text{Conjunto solución: } \left\{ \frac{5 - \sqrt{13}}{2}, \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \right\}$$

Ver la estrategia para resolver problemas que conducen a ecuaciones cuadráticas páginas 66 y 67.

### Modelación de problemas mediante ecuaciones cuadráticas

No es necesaria una estrategia especial para la modelación de problemas con ecuaciones cuadráticas. Es la misma que se empleó para las ecuaciones lineales. Simplemente, que a veces sucede que, al hallar la ecuación que traduce el problema al lenguaje matemático, esta es una ecuación cuadrática (incluso pudieran aparecer ecuaciones de otros tipos que aun no hemos estudiado). En el libro aparecen varios ejemplos muy interesantes.

Otro ejemplo

Una lancha hace un viaje de ida y vuelta a un lugar que se encuentra 24 kilómetros río arriba en un tiempo de 6 horas. En aguas tranquilas la lancha hace 10 km/h. ¿Cuál es la rapidez de la corriente?

En el texto omitieron un dato en el ejemplo 8 resuelto página 68 parecido a este

Solución:

Velocidad de la corriente del río:  $x$

Velocidad de la lancha río arriba:  $10 - x$

Velocidad de la lancha río abajo:  $10 + x$

Tiempo empleado en el viaje de ida:  $\frac{24}{10 - x}$

Tiempo empleado en el viaje de vuelta:  $\frac{24}{10 + x}$

Como el tiempo total fue de 6 horas:  $\frac{24}{10 - x} + \frac{24}{10 + x} = 6$

Dividiendo por 4 y sumando las fracciones:  $\frac{4(10 + x) + 4(10 - x)}{100 - x^2} = 1$

Desarrollando y simplificando:  $\frac{80}{100 - x^2} = 1$

Nótese que  $x$  no puede ser 10, pues en ese caso la velocidad del río y la de la lancha coinciden, así que río arriba, la lancha nunca se movería. Como  $x = 10$  no puede ser una solución y tampoco  $x = -10$  (por ser negativa), entonces el denominador no puede ser cero. No hay peligro en que multipliquemos ambos miembros por el denominador:  $80 = 100 - x^2$

Como no hay término en  $x$ , se puede resolver por radicación:

$$x^2 = 20 \quad x = \pm\sqrt{20} = \pm 4,472$$

Como la raíz negativa no tiene sentido en este problema, solo se considera la positiva. Respuesta:

La corriente del río tiene una velocidad de 4,472 km/h.

Materiales para el apoyo a las ecuaciones cuadráticas:

**Materiales complementarios con presentaciones en Power Point sobre:**

**Ecuaciones cuadráticas y ejercicios, y ecuaciones fraccionarias y ejercicios.**

**Complementarios para reactivar los contenidos:**

**Esquema de descomposición factorial. Ejercicios.**

**En los documentos encontrarás:**

**Un material para reactivar los conocimientos que se titula Ecuaciones lineales y cuadráticas.**

**En los ejercicios encontrarás:**

**Documentos como página Web con ecuaciones resueltas cuadráticas (se pueden consultar dos documentos)**

**Dos presentaciones en Power Point: una con ejercicios resueltos con ecuaciones cuadráticas y otra con problemas que conducen a ecuaciones.**

### **Ecuaciones cúbicas o ecuaciones polinómicas de grado 3.**

Realizaremos el tratamiento a través de un ejemplo.

Ejemplo:  $x^3 = 1$

o sea  $x^3 - 1 = 0$ . Vamos a resolver esta ecuación, descomponiendo  $x^3 - 1$ . Tendremos:

$(x-1)(x^2+x+1)=0$ . Igualando a cero estos factores, se tiene:

$(x-1)=0$  de donde  $x = 1$      $x^2+x+1=0$

Resolvamos esta ecuación por la fórmula:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Entonces, las raíces cúbicas de la unidad son tres: una real y dos imaginarias

$$\left(1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \text{ y } \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$$

Observe que estas raíces tienen las siguientes propiedades:

1. Si una de las raíces imaginarias se eleva al cuadrado se obtiene la otra.
2. La suma de las tres es igual a cero.

Note que: La sucesión de indicaciones para resolver las ecuaciones cúbicas es similar a los procedimientos anteriores solo que como el número de raíces está indicado por el grado de la ecuación, en este caso la cantidad de soluciones será como máximo tres.

### **Ecuaciones reducibles a la forma cuadrática.**

#### **I. A través de las ecuaciones que implican radicales.**

**Ecuaciones con radicales.** Una ecuación que contiene la variable al menos bajo el signo de radical, se denominan ecuación con radical.

Para resolver se sigue la siguiente sucesión de indicaciones:

1. aislar el radical si es necesario.
2. Elevar ambos miembros si es posible al índice del radical.
3. Efectuar la operación indicada.
4. Resolver la ecuación transformada que resulta una ecuación cuadrática.
5. Verifique la ecuación planteada (Efectuar la comprobación).

Analice el teorema 1 página 74, ya que el mismo proporciona un método para resolver algunas ecuaciones que implican radicales.

**Importante:** Insistir en que cualquier ecuación obtenida al extraer la raíz de ambos miembros de una ecuación elevados a la misma potencia puede tener soluciones, que se conocen como soluciones extrañas; es decir, que no son soluciones de la ecuación original. Por otra parte cualquier solución de la ecuación original debe estar entre las soluciones de la nueva ecuación.

Observe detenidamente el recuadro en la página 74 y el recuadro de la página 76 en el que te propone tener precaución. Analizar el ejemplo 1 página 74.

## II Ecuaciones que implican exponentes racionales.

Te proponemos que estudies los ejemplos que encontrarás en el texto en la página 76.

Insistir en que si una ecuación que no es cuadrática se puede transformar a la forma

$$au^2 + bu + c = 0$$

donde  $u$  es una expresión de alguna otra variable, entonces la ecuación se llama forma cuadrática y se puede resolver utilizando los métodos cuadráticos.

Puedes también realizar el estudio del siguiente ejemplo:

Resolver  $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$

Es una ecuación que puede escribirse de la forma  $4(x^2)^2 - 37x^2 + 9 = 0$  y que se puede resolver por factorización, se hallan los valores de  $x^2$ :

$$(x^2 - 9)(4x^2 - 1) = 0$$

$$x^2 = 9 \text{ de donde } x = \pm\sqrt{9} = \pm 3,$$

$$x^2 = \frac{1}{4} \text{ de donde } x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2}. \text{ Luego las cuatro raíces de la ecuación son :}$$

$$3, -3, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \text{ todas reales.}$$

### Otros ejemplos:

1.  $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$  (Tomando  $u = x^2$  se transforma en  $u^2 - 7u - 18 = 0$  que es una ecuación cuadrática.

2.  $4x^{-1} - 9x^{-1/2} + 2 = 0$

Tomando  $u = x^{-1/2}$  se transforma en:  $4u^2 - 9u + 2 = 0$

3.  $\frac{4}{m^2} = 2 + \frac{1}{m^4}$  Haciendo  $u = \frac{1}{m^2}$  se obtiene:  $4u = 2 + u^2$

Podemos concluir que:

**1** Las ecuaciones de grado 4 que se puedan por la vía de la sustitución reducir a cuadráticas la resolvemos utilizando el procedimiento estudiado para resolver estos tipos de ecuaciones.

**2** De lo contrario si es de grado 4 y es de la forma:  $a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$  se puede entonces utilizar el método por agrupamiento y realizar la descomposición en factores indicada para lo cual te recomiendo profundizar en el folleto de Descomposición factorial.

**3** Ver la estrategia para resolver problemas que conducen a ecuaciones cuadráticas páginas 66 y 67. Para este tipo de ecuación te propongo que revises todos los materiales confeccionados al respecto por la importancia que este tiene en la aplicación del cálculo posteriormente.

**Un material complementario que contiene presentaciones en Power Point que contiene todas las propiedades y elementos para reactivar los conocimientos.**

**Un material complementario para fijar los contenidos en Power Point sobre ecuaciones con radicales, ecuaciones con radicales fraccionarias y ejercicios.**

**Un material documental para reactivar conocimientos sobre ecuaciones con radicales,**

**Materiales con ejercicios, Un documento con una página web con ejercicios con respuestas de ecuaciones con radicales. Dos documentos en PDF, uno con ejercicios con respuesta y otro con ejercicios propuestos**

**Y unas presentaciones en diapositivas que te ilustran ejercicios resueltos de ecuaciones con radicales.**

**Además pongo a tu disposición ecuaciones con radicales que han constituido preguntas de exámenes finales en los últimos años para el ingreso a la educación superior.**

### **Ecuaciones polinomiales de grado mayor que 4**

Orientaciones: Para el caso particular de este tipo de ecuaciones por ser lo novedoso en el programa de estudio de esta enseñanza, a menos que se indique otra cosa, los coeficientes de la expresión polinomial de n-ésimo grado  $P(x) = a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$  son números complejos y el dominio de definición es el conjunto de los números complejos.

Recuerde que:

- El número  $r$  es una solución o raíz de la ecuación  $P(x)=0$  si  $P(r)=0$ .

Partir de la sección 3-1 Funciones polinomiales y gráficas puesto que este contenido es nuevo en la enseñanza y necesitas conocer las propiedades fundamentales de este tipo de función y conocer procedimientos tales como: división de polinomios, algoritmo de división y teorema del residuo.

Estos elementos son la base del trabajo luego con las ecuaciones polinomiales que se tratan en la próxima sección.

De manera general estudiar la sección 3-2 sobre determinación de raíces racionales de polinomios a través de:

1. Teorema de factorización.
2. Teorema fundamental del álgebra.
3. Raíces imaginarias.
4. Raíces racionales.

Según el texto en esta sección se desarrollan algunas propiedades importantes de los polinomios con coeficientes arbitrarios. Pero también se consideran los coeficientes racionales y se encontrarán raíces irracionales e imaginarias.

Para la introducción del Teorema de factorización el libro de texto en la página 226 parte del Teorema 1 y del Teorema 2 referentes al algoritmo de división y al teorema del residuo donde se refiere a elementos tratados en la sección 4-1 lo que representa un error pues se encuentra tratado en la sección 3-1.

Es importante profundizar en este teorema así como en los teoremas 2, 3, 4, 5, y 6 estudiando los ejemplos resueltos en cada caso y tratando de desarrollar los problemas seleccionados que se orientan en el texto de las páginas 226 a la 233 realizando las conclusiones en esta página 233 con el recuadro sobre la Estrategia para encontrar raíces racionales.

No dejar de estudiar los ejemplos 4 y 5 porque:

El ejemplo 4 trata sobre la determinación de raíces racionales e irracionales.

El ejemplo 5 sobre la determinación de raíces racionales e imaginarias.

Observe que:

Las estrategias utilizadas están diseñadas para encontrar raíces reales e imaginarias tantas como sea posible pero existen raíces que no se pueden encontrar mediante esta estrategia. Por ejemplo, el polinomio

$P(x) = x^5 + x - 1$  debe tener al menos una raíz real según el teorema 5 estudiado (Raíces reales y polinomios de grado impar). Como las únicas raíces racionales posibles son  $\pm 1$  y ninguna de ellas es una raíz,  $P(x)$  debe tener al menos una raíz irracional. ¿Cómo hacerlo? Queda para que investigues al respecto y lo discutas con tu profesor. Sugerencia: Sección 3-3 página 238.

Estudiar en la página 275 en repaso del Capítulo 3 lo referente a determinación de raíces racionales de polinomios.

Resolver los ejercicios del 7 al 9 y del 18 al 20 de la página 278.

### Sistema de ejercicios.

Te proponemos que resuelvas los siguientes ejercicios.

- Problemas seleccionados 3, 4, 5, 6, 7, y 8 páginas 7-13.
- Problemas seleccionados 4, 5, 6, 7, 8, y 9, páginas 64-70.
- Problemas seleccionados 1, 2 y 3 páginas 75-79.
- Ejercicios del Capítulo 1, del 1-3, 10-16, 18-20, 26, 30-35.

Otros ejercicios propuestos.

Ejercicios para ecuaciones polinomiales de grado 1.

- Ejercicios del epígrafe 1-1 página 14.
- Problemas 47, 50, 51, 54, 63, 68 página 15.

Ejercicios para ecuaciones polinomiales de grado 2.

- Ejercicios del 19 al 26 del epígrafe 1-6 página 70.
- Ejercicios del 35 al 51 del epígrafe 1-6 página 70.

Ejercicios para ecuaciones polinomiales de grado 3 y 4.

- Ejercicios 71 y 72 del epígrafe 1-6 página 71.
- Ejercicios del 21 al 48 del epígrafe 3-2 página 237.

Ejercicios para ecuaciones con radicales.

- Ejercicios del 1 al 31 página 79 y 80.

Ejercicios para ecuaciones polinomiales de grado n.

- Ejercicios del 1 al 4 y del 21 al 26 página 236 Ejercicios del epígrafe 3-2 del texto Precálculo

Volumen I. Segunda parte.

Auto-examen.

Resuelve las siguientes ecuaciones y efectúe la verificación. Si hay raíces extrañas explique las causas de la aparición.

a)  $\frac{2}{2-x} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2x-x^2}$

b)  $1 + \sqrt{2x+7} = x-3$ .

c)  $\frac{x-2}{\sqrt{2x-7}} = \sqrt{x-4}$

d)  $2x^3 + x^2 - 11x - 10 = 0$

e)  $x^4 - 5x^3 + \frac{15}{2}x^2 - 2x - 2 = 0$

f)  $2x^5 - 3x^4 - 2x + 3 = 0$

**Preguntas de comprobación:**

1. ¿Cuántos tipos de igualdades matemáticas Ud. Conoce? ¿Cómo se clasifican las ecuaciones?.
2. ¿Qué es una ecuación cuadrática?
3. ¿El método de factorización se puede usar para resolver cualquier ecuación cuadrática?
4. ¿Cómo se puede saber qué tipo de raíz tiene una ecuación cuadrática antes de resolverla?
5. ¿Cómo se llega a la fórmula cuadrática?
6. ¿Qué es una raíz extraña?
7. ¿Por qué aparecen raíces extrañas?
8. ¿Cómo se resuelven las ecuaciones con radicales?

**Orientación para el estudio**

Estudie las secciones del texto 1-5 (páginas 47 a 56) 1-6 (páginas 58 a 70) y 1-7 (páginas 73 a 79).  
Vea detenidamente todos los ejemplos resueltos.

9. Estudie la sección 3-1, 3-2, y 3-3. Ejercicios del 5 al 10 página 236. (Ejercicios para aplicar lo estudiado). Analice los ejemplos, realice los problemas seleccionados propuestos y los ejercicios de las secciones orientados.

**Utilice los materiales complementarios para:**

- **Ecuaciones lineales.**
- **Ecuaciones cuadráticas.**
- **Ecuaciones con radicales.**

En cada uno de ellos encontrará:

- Contenidos para recordar.
- Ejemplos resueltos.
- Ejercicios propuestos para desarrollar tus habilidades.
- Presentaciones que te ilustran todo lo anterior.

Resuelva los siguientes ejercicios:

Del grupo 1-5 (página 57) los números 3, 7 y 15.

Del grupo 1-6 (página 70) los números 5, 13, 19 y 23.

Del grupo 1-7 (página 79) los números 5 y 9

**Guía de estudio para las ecuaciones exponenciales y logarítmicas.**

Asignatura: Matemática Básica.

**Tema:** Ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

### **Objetivo General.**

Identificar y resolver ecuaciones, exponenciales y logarítmicas empleando el procedimiento correspondiente, para aplicarlo a la resolución de problemas prácticos

### **Sumario.**

- Ecuaciones exponenciales.
- Ecuaciones logarítmicas.
- Problemas de aplicación.

### **Objetivos específicos:**

Al concluir el estudio y la ejercitación correspondiente debes saber:

- Definir los conceptos de ecuación exponencial y de ecuación logarítmica.
- Resolver ecuaciones exponenciales mediante la aplicación de logaritmos y sustituciones adecuadas.
- Resolver ecuaciones logarítmicas.
- Expresar logaritmos de una base en términos de logaritmos de otra base.
- Aplicar la solución de ecuaciones logarítmicas a la solución de problemas de modelación.

### **Pre-requisitos:**

Es necesario que antes de estudiarse los tópicos de este sumario se revisen los siguientes aspectos básicos para la comprensión del tema:

1. Dominios numéricos.
2. Igualdades.
3. Definición de ecuación.
4. Solución o raíces de una ecuación.
5. Conjunto solución de una ecuación.
6. Significado de resolver una ecuación.
7. Ecuaciones equivalentes.
8. Transformaciones equivalentes y no equivalentes
9. Descomposición factorial. Traducción del lenguaje común al algebraico.
10. Raíz  $n$ -ésima de un número real.
11. Resolver ecuaciones lineales y cuadráticas.
12. Propiedades de la potencia.
13. Definición de logaritmo. Propiedades de los logaritmos

### **Bibliografía a utilizar:**

Precálculo: Funciones y Graficas. Raymond A. Barnett, Michael R. Ziegler, Karl E. Byleen. Vol. 1, 1ra Parte.

Utilizar el folleto elaborado para el estudio de la descomposición factorial, los materiales complementarios para las ecuaciones exponenciales y logarítmicas, los documentos, y los materiales con ejercicios.

### **Tareas a desarrollar.** Ecuaciones exponenciales.

Si presentas dificultades en algún prerequisite puedes tener en consideración las siguientes orientaciones: (Los materiales a los cuales se refieren son los que aparecen en el sistema de medios informáticos que se propone)

1. Para los elementos que se refieren del 1 al 8 los puedes encontrar en un **material general que se llama Tratamiento general a las ecuaciones.**
2. Si tienes dificultad en el 9 puedes remitirte a un material general que se llama **Descomposición factorial.**
3. Si tienes dificultad en el 11 puedes remitirte a la **Guía de estudio de ecuaciones polinómicas y a los materiales que orienta esta guía relacionado con las ecuaciones lineales y cuadráticas**
4. Si tienes dificultad en el 12 ver **en presentación Power Point. Repaso sobre propiedades de potencia, igualdad y ejercicios. Y Power Point Ecuaciones exponenciales, algunas propiedades.** Además lo que se explica a continuación.

Propiedades de las potencias

Si tienen la misma base: igualamos los exponentes  $\Rightarrow a^b = a^c \rightarrow b = c$

Si tienen el mismo exponente: igualamos las bases  $\Rightarrow a^b = c^b \rightarrow a = c$

Potencias: Aplicamos sus propiedades para descomponer las ecuaciones exponenciales.

**Producto:** Nos encontramos con una suma de exponentes, ponemos el producto  $\Rightarrow a^{b+c} = a^b \cdot a^c$

**Cociente:** Nos aparece una resta de exponentes, ponemos el cociente

$$\Rightarrow a^{b-c} = a^b : a^c$$

**Potencia de potencia:** Nos aparece un producto en el exponente,  $\Rightarrow a^{b \cdot c} = (a^b)^c$

Para el prerequisite 13 puedes consultar los materiales que se indican a continuación:

Para la definición de logaritmo y sus propiedades ver **en materiales Complementarios la presentación en Power Point: Definición, propiedades y ejercicios de logaritmo.**

Estudiar los dominios numéricos, el concepto de igualdad, la definición de ecuación, el conjunto solución de una ecuación, el significado de resolver una ecuación, concepto de ecuaciones equivalentes, y sus transformaciones según el material que se refiere solamente al estudio de Ecuaciones debido a que estos elementos son comunes para todos los tipos de ecuaciones independientemente a la naturaleza de su tipo.

Note que si la solución de una ecuación es un número real entonces la raíz se denomina raíz real. Y si la solución es un número imaginario entonces estamos en presencia de una raíz imaginaria.

Por la importancia que tiene el hecho de dominar a la perfección todos los casos posibles de la **descomposición factorial** y la repercusión en el futuro en el estudio de la Matemática y muy en específico en el trabajo con las ecuaciones es que se propone estudiar por el material elaborado la descomposición factorial para que así recuerdes lo aprendido en la enseñanza anterior.

Estudiar el procedimiento de solución para las ecuaciones lineales y cuadráticas ya que es importante que conozcas que tienes la posibilidad de que se te presenten en cualquier momento de tu actual estudio. Ver guía de estudio para las ecuaciones Polinómicas.

Ver un **material complementario** que se denomina **Repaso sobre las propiedades de la función exponencial y logarítmica**, pues este material te ilustra la relación entre las propiedades de una función exponencial y logarítmica con la resolución de ecuaciones.

Para comenzar el estudio de estas ecuaciones es necesario identificar el tipo y las características de cada una de ellas y para ello proponemos lo siguiente:

Tipo de ecuación	Características
--- Exponencial	La incógnita se encuentra en algún exponente.
--- Logarítmica	La incógnita se encuentra afectada por alguna expresión logarítmica

Analizar lo referente a este tema en la sección 4-5 en la página 323 del texto Precálculo.

Observe que en el texto se introduce el concepto de estos tipos de ecuaciones a partir del concepto de función.

Ejemplos de ecuaciones exponenciales:

1.  $e^x + e^{-x} = 3$
2.  $5^{-x} = 3,453$
3.  $3 = 1,06^x$
4.  $xe^x = 3$

Ejemplos de ecuaciones logarítmicas.

1.  $\log x=3$
2.  $\log x+1=2$
3.  $4\log 2x-1=0$

El libro de texto no te propone un procedimiento para resolver este tipo de ecuaciones sino que lo ilustra a través de ejemplos resueltos. Por lo que a continuación te recordamos que: para encontrar un procedimiento para resolver las ecuaciones exponenciales y logarítmicas debes tener en cuenta los siguientes elementos para poder realizar las transformaciones necesarias:

Exponencial	<p>Igualar las bases. Igualar los exponentes</p> <p>Logaritmicación. Propiedades de las operaciones con potencias.</p>
Logarítmica	<p>Igualar las bases. Igualar los argumentos.</p> <p>Convertir a un solo logaritmo en ambos miembros.</p> <p>Aplicar propiedades.</p> <p>Convertir a exponencial</p>

Te sugerimos para solucionar una ecuación exponencial lo siguiente:

1. Realice transformaciones algebraicas hasta que la ecuación adopte la forma  $a^x = a^y$ .
2. De aplicar propiedades de las potencias, resuelva la ecuación resultante.
3. Si no es posible obtener una igualdad de potencias entonces te sugerimos lo siguiente:
  - Aplicar propiedades de las potencias para intentar solucionar como una ecuación cuadrática.
  - Aplicar la definición de logaritmo conveniente.

Observe que: Al utilizar el procedimiento para resolver una ecuación exponencial tendremos en cuenta que esta nos puede reducir a:

- Una ecuación lineal o,
- Una ecuación cuadrática. Ver los documentos de ecuaciones exponenciales y logarítmicas y documento para reactivar conocimientos sobre las propiedades de la potencia y de los logaritmos,

Ejemplo:

$$2^{3x-2}=5 \Rightarrow \log_2 5=3x-2 \text{ propiedades de cambio de base resulta}$$

$$\frac{\log 5}{\log 2}+2=3x$$

$$x = \frac{1}{3}\left(2+\frac{\log 5}{\log 2}\right)$$

Si la ecuación a resolver es logarítmica entonces te sugerimos:

Aplicar propiedades y transformar la ecuación hasta que se obtenga:

- Una igualdad de logaritmo en la misma base, en este caso iguale los argumentos y pase al paso 2 de los pasos propuestos para solucionar ecuaciones exponenciales
- Una expresión de la forma  $\log_a x = b$  y pase a 3 de los pasos propuestos para solucionar ecuaciones exponenciales.
- Resuelva la ecuación obtenida o aplique la definición de logaritmo y resuelva la ecuación obtenida.
- Realice la verificación de la ecuación.
- Exprese el conjunto solución. Ver documento de ecuaciones logarítmicas que contiene ejercicios resueltos aplicando la definición de logaritmo y trata el medio gráfico para la solución.

Recuerde que:

Para solucionar una ecuación se realizan transformaciones algebraicas hasta despejar la variable.

**Ejemplos de ecuaciones exponenciales que se reducen a una ecuación lineal:**

$$1. 2^{x+1} = 8 \Rightarrow 2^{x+1} = 2^3 \Rightarrow x + 1 = 3 \Rightarrow x = 2$$

Cuando tenemos un solo término en ambos miembros de la ecuación, descomponemos en factores para conseguir la misma base. Igualamos los exponentes y resolvemos.

$$2. 2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 7$$

1o. Aplicamos las propiedades de las potencias, para descomponer.

$$\frac{2^x}{2} + 2^x + 2^x \cdot 2 = 7$$

2o. Para resolver mejor hacemos  $2^x = t$

$$\Rightarrow \frac{t}{2} + t + 2t = 7 \Rightarrow t + 2t + 4t = 14 \Rightarrow 7t = 14 \rightarrow t = 2$$

3o. Como  $2^x = t \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1$

$$3. 3^x + 3^{x-1} + 3^{x+1} = 117$$

$$3^x + \frac{3^x}{3} + 3^x \cdot 3 = 117 \Rightarrow 3^x = t \Rightarrow t + \frac{t}{3} + 3t = 117 \Rightarrow 13t = 117 \Rightarrow t = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$$

**Ejemplo de ecuación exponencial que se reduce a ecuación de segundo grado.**

$$4. 2^{x+3} + 4^{x+1} - 320 = 0$$

1. Aplicamos las propiedades de las potencias y sustituimos  $2^x = t$

$$2^x \cdot 2^3 + (2^2)^{x+1} - 320 = 0 \Rightarrow 2^x \cdot 2^3 + (2^x)^2 \cdot 2^2 - 320 = 0 \quad 8t + 4t^2 - 320 = 0$$

2. Resolvemos la ecuación de segundo grado para obtener los valores de t. Finalmente calculamos x.

$$t^2 + 2t - 80 = 0 \quad t_1 = 8 \quad \rightarrow 2^x = t \rightarrow 2^x = 8 \rightarrow 2^x = 2^3 \rightarrow x = 3$$

$t_2 = -10 \rightarrow$  no tiene solución. También pueden tener lugar ecuaciones exponenciales o

logarítmicas, susceptibles de transformarse en ecuaciones cuadráticas.

Otra ecuación exponencial que después de transformada conduce a una cuadrática.

La ecuación resuelta fue:  $42^{\frac{1}{2}(x-1)} - 8^{(x+1)(x-1)} = 0$

La solución obtenida fue comprobada por el asistente DERIVE.

El conjunto solución es:  $S = \left\{ 1; -\frac{2}{3} \right\}$

Ver los materiales que tratan Ejercicios pues te propongo para fijar lo aprendido dos **páginas Web con ejercicios** que están dadas las respuestas; una para ecuaciones exponenciales y otra para ecuaciones logarítmicas

### **Importante:**

No dejar de analizar el ejemplo resuelto marcado con el número 4 de la página 325 del texto de Precálculo por la importancia que tiene para la preparación adecuada del estudio posterior del cálculo matemático cuyo símbolo se representa por  $\int$ . Resolver además el problema seleccionado 4 de la misma página.

Estudiar la estrategia o la sucesión de indicaciones para resolver un problema cuyo modelo matemático es una ecuación en las páginas 324 y 325.

Observe que:

Estos problemas se han clasificado como:

- Problemas de Interés compuesto (ver ejemplo 2 página 324 y ejercicios del 77 al 80 de la página 331).
- Problemas de Astronomía (ver ejemplo 3 página 324 y ejercicios 81 y 82 de la página 331).

Ver las observaciones finales que aparecen en la página 334 sobre las ecuaciones exponenciales.

Además de todo lo anterior te proponemos dos **documentos en formato PDF** con una variedad de **ejercicios resueltos sobre ecuaciones exponenciales** y otro **sobre ecuaciones logarítmicas** que te ayudarán a reafirmar lo aprendido.

### **Sistema de ejercicios:**

Te proponemos que resuelvas los siguientes ejercicios.

1. Problemas seleccionados 1, 2, 3,4, 5 y 7, páginas 324 -328.
2. Ejercicios 13-18 página 3 30.
3. Ejercicios 27-38 página 330.

Auto-examen.

1. Resuelve las siguientes ecuaciones y efectúe la verificación. Si hay raíces extrañas explique las causas de la aparición.

a)  $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$

b)  $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{9}{16}$

c)  $10^x \cdot 5^{x-1} \cdot 2^{x-2} = 950$

d)  $\log_3[(x-1)(2x-1)] = 0$

e)  $\log \sqrt{x-5} + \log \sqrt{2x-3} + 1 = \log 30$

### Guía de estudio para ecuaciones trigonométricas.

Asignatura: Matemática Básica.

Tema: Ecuaciones trigonométricas.

#### Objetivo General

Identificar y resolver ecuaciones trigonométricas empleando el procedimiento correspondiente y aplicarlo a la resolución de problemas prácticos

#### Sumario. Ecuaciones trigonométricas.

##### Objetivos específicos:

Al concluir el estudio y la ejercitación correspondiente, debes ser capaz de:

- Definir los conceptos de ecuación trigonométrica.
- Resolver ecuaciones trigonométricas mediante la aplicación de las razones, conceptos y propiedades estudiadas.
- Utilizar las identidades trigonométricas fundamentales. Aplicar la solución de ecuaciones trigonométricas a la solución de problemas de modelación.

##### Pre-requisitos:

Es necesario que antes de estudiarse los tópicos de este sumario se revisen los siguientes aspectos básicos para la comprensión del tema:

1. Dominios numéricos.
2. Igualdades.
3. Definición de ecuación.
4. Solución o raíces de una ecuación.

5. Conjunto solución de una ecuación.
6. Significado de resolver una ecuación.
7. Ecuaciones equivalentes.
8. Transformaciones equivalentes y no equivalentes
9. Traducción del lenguaje común al algebraico
10. Raíz n-ésima de un numero real.
11. Resolver ecuaciones lineales y cuadráticas. Trigonometría.
12. Ángulos positivos y negativos.
13. Sistema de medidas de los ángulos.
14. Razones trigonométricos.
15. Signo de las razones trigonométricas.
16. Valores de las razones trigonométricas de los ángulos notables y de los axiales.
17. Fórmulas de reducción.
18. Identidades trigonométricas fundamentales.

**Bibliografía a utilizar:**

Pre cálculo: Funciones y Graficas. Raymond A. Barnett, Michael R. Ziegler, Karl E. Byleen. Vol. 1, 3ra Parte.

Te propongo como bibliografía a consultar además el **documento** que tiene como objetivo reactivar los conocimientos que has recibido con anterioridad y que son los conocimientos que necesitas para aplicar a la resolución de una ecuación trigonométrica. Dicho documento tiene por nombre **Para reactivar conocimientos sobre ecuaciones trigonométricas.**

**Tareas a desarrollar.** Ecuaciones Trigonométricas.

**Ver un material si tienes dificultad en algunos de los prerrequisitos del 1 al 8, que se ubica en materiales generales y que se denomina Material general para las ecuaciones.**

**Ver la guía de estudio para ecuaciones polinomiales y los materiales que para este tema orienta dicha guía si presentas dudas en el prerrequisito 11.**

Para los prerrequisitos del 14 al 18 te sugerimos el **documento** que tiene como objetivo reactivar los conocimientos que has recibido con anterioridad y que son los conocimientos que necesitas para aplicar a la resolución de una ecuación trigonométrica. Dicho documento tiene por nombre **Para reactivar conocimientos sobre ecuaciones trigonométricas.** A continuación de manera sintética se hace referencia a las actividades que contiene dicho documento para la mejor orientación.

**Actividad 1**

**Título: Relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo. Funciones trigonométricas  $\text{sen}(x)$ ;  $\text{cos}(x)$ ;  $\text{tan}(x)$ ;  $\text{cot}(x)$**

**Sumario:**

Conceptos de ángulo agudo, obtuso, llano, recto, coterminal. Ángulos en posición estándar o normal. Medida de un ángulo. Definición alternativa de las funciones trigonométricas. Funciones trigonométricas de ángulos notables. Funciones periódicas. Período fundamental. Gráfica de  $y = \text{sen } x$ ,  $y = \text{cos } x$ ,  $y = \text{tan } x$ ,  $y = \text{cot } x$ ,  $y = \text{sec } x$  y  $y = \text{csc } x$

**Actividad 2**

**Título: Funciones trigonométricas inversas.**

**Sumario:**

Funciones trigonométricas inversas. Identidades del seno, coseno y tangente inversos. Los valores notables de las funciones circulares para calcular valores notables de las circulares inversas. Describir las funciones inversas de la cotangente, la secante y la cosecante.

**Actividad 3.**

**Título: Funciones trigonométricas y resolución de triángulos rectángulos.**

**Sumario:**

Funciones trigonométricas. Resolución de triángulos rectángulos.

**Actividad 4.**

**Título: Identidades trigonométricas básicas.**

**Sumario:**

Identidades de ángulos complementarios. Identidades trigonométricas básicas. Identidades de sumas y diferencias de ángulos.

**Actividad 5.**

**Título: Identidades trigonométricas especializadas.**

**Sumario:**

Identidades de ángulo duplo y de ángulo mitad. Identidades de producto a suma y de suma a producto, para senos y cosenos.

Te ilustra 9 ejercicios para profundizar que incluye ejercicios de aplicación.

Considera para el inicio del trabajo con ecuaciones trigonométricas todos los elementos necesarios para el trabajo con Ecuaciones los siguientes elementos:

- Dominio de definición.
- Conjunto solución.

- Raíz de una ecuación.
- Transformaciones equivalentes.
- Y otros que consideres necesarios.

Y así te habrás ya elaborado tu propio concepto de ecuación trigonométrica. Y estarás pensando en la necesidad de la búsqueda de un procedimiento de solución para ella.

Pero antes te propongo si tienes dificultades en los conceptos básicos y en las propiedades de la trigonometría que estudies en el **material complementario** elaborado con los contenidos para reactivar los conocimientos de trigonometría con profundidad pues si no dominas estos elementos no tendrás los instrumentos necesarios para enfrentar el trabajo con ecuaciones. Estudia las **presentaciones en Power Point** para que reactives tus conocimientos sobre **Círculo trigonométrico, Formulas de adición, reducción y ángulo duplo, Identidades y demostraciones trigonométricas sencillas y Repaso sobre razones trigonométricas y ejercicios con un poco de historia sobre la trigonometría.**

En el trabajo con las identidades trigonométricas has observado que has estado en presencia de una ecuación trigonométrica pero con la particularidad de que estas ecuaciones siempre son verdaderas para todos los reemplazos de la(s) variable(s) para las que ambos miembros están definidos. Recordar que existe otra clase de ecuación trigonométrica que puede ser verdadera para algunos reemplazos de la variable pero falsa para otras.

El ejemplo de la pág.485 del Libro de texto te ilustra una ecuación que es verdadera para algunos reemplazos de la variable pero falsos para otros.

Ver en el Libro de texto la propuesta de un procedimiento de solución por la vía algebraica para la solución de ecuaciones trigonométricas.

Analice con detenimiento los ejemplos resueltos pues en ellos se tienen en cuenta diferentes situaciones:

Ejemplo 1. Soluciones exactas mediante factorización.

Ejemplo 2. Soluciones aproximadas usando identidades y factorización.

Ejemplo 3. Soluciones aproximadas mediante sustitución.

Ejemplo 4. Soluciones exactas mediante identidades y factorización.

Ejemplo 5. Soluciones aproximadas mediante identidades y la fórmula cuadrática.

Otra manera de definir una **ecuación trigonométrica**:

Una ecuación en que la variable está contenida en el argumento de una razón trigonométrica se llama ecuación trigonométrica.

Además de las sugerencias del texto, usted puede:

1. Expresar todas las razones trigonométricas que aparecen en la ecuación con el mismo argumento.
2. Expresar todas las razones trigonométricas en términos de una sola razón.
3. Resolver la ecuación haciendo transformaciones considerando como variable la razón trigonométrica que quedó expresada en la ecuación.
4. Determinar los valores de la variable que satisfacen la ecuación transformada.
5. Verificar todas las soluciones en la ecuación original.
6. Escriba el conjunto solución.

Te sugerimos ver el resumen del capítulo páginas 499-502.

Te propongo para fijar los conocimientos aprendidos sobre ecuaciones trigonométricas aplicando las identidades y para que puedas visualizar **ejercicios resueltos sobre ecuaciones trigonométricas** que revise las **presentaciones en Power Point** sobre estos, en los **materiales complementarios**.

Y en los **materiales para ejercicios** analizar el sistema de **ejercicios propuestos** sobre ecuaciones trigonométricas que se propone en este material y de acuerdo a sus necesidades resolver algunos de ellos.

Revise el **folleto elaborado con el nombre de Métodos analíticos y Métodos gráficos para la solución de ecuaciones trigonométricas** y ampliarás tus conocimientos.

Para la sección de ejercicios variados sobre ecuaciones trigonométricas te propongo abrir la carpeta sobre una página Web que contiene variedad de ejercicios con respuestas a manera de una actividad muy interesante

Te proponemos que resuelvas los ejercicios siguientes:

- Problemas seleccionados 1, 2, 3,4y5, páginas 487-491.
- Ejercicio 1-12 página 494-495, Ejercicio 23-34 página 495, Ejercicios26-30 página 502
- **Material elaborado con ejercicios propuestos.**

Y luego resolver los ejercicios propuestos para autoevaluar tu trabajo de aprendizaje.

**Auto-examen.** Resuelva.

1. 
$$\frac{\cos x}{1+\cos 2x} = 0$$

2. 
$$\operatorname{sen}^2 3x - 5\operatorname{sen} 3x = -4$$

3. 
$$2\cos^2 x + 5\operatorname{sen} x = 4$$

### **2.3 Propuesta de orientaciones metodológicas a los profesores para favorecer la comprensión de las Ecuaciones en la Matemática Básica y para el uso del Sistema Integrado de Medios.**

La propuesta está basada fundamentalmente en un cambio sustancial en el proceso docente apoyado en el uso de medios computacionales para poder visualizar diferentes objetos matemáticos, así como conceptos matemáticos y contribuir al logro de los objetivos del trabajo, es decir, se tratan los contenidos que siempre han sido explicados en esta asignatura, sólo que ahora se hace utilizando medios de enseñanza muy diferentes a los que se han estado aplicando por varios años los (Tradicionales), es lógico que aparejado a este cambio queda implícito una variación en la forma de orientar el estudio independiente, por lo que el uso de las TIC visto como medio de enseñanza en sentido general queda a un mismo nivel que los objetivos, contenidos y métodos dentro del proceso de enseñanza, solo que en el diseño que se defiende, la incidencia principal la constituyen los medios que se utilizan para llevar a cabo el proceso de instrucción, estos se concretan mediante el uso del software seleccionado, de ahí se desprende el valor de nuestra investigación, donde el aporte básico está dado en que el estudiante se convierte en un ente activo de su propio aprendizaje. Disponer de un software mediante el cual puede interactuar con los objetos y contenidos matemáticos, visualizando las características esenciales de estos, tener mejor comprensión de los problemas, cosa esta, un tanto complejo cuando de matemática se trata, por tener ese carácter eminentemente abstracto, permite acelerar el proceso de aprendizaje.

Orientaciones metodológicas.

El sistema integrado de medios se puede representar a través de un esquema que se ilustra en el **Anexo 12** y para que el profesor se sienta orientado la labor ha desempeñar debe seguir las siguientes instrucciones:

Consideraciones generales acerca de las orientaciones metodológicas.

Estas orientaciones metodológicas para los maestros tienen el fin de auxiliarlo en su trabajo, familiarizarlo con los objetivos y contenidos del programa y contribuir a su orientación para el uso del sistema integrado de medios para favorecer la comprensión de las ecuaciones en la Matemática Básica. Constituye además un material para la superación

No obstante la contribución que estas orientaciones puedan hacer, para obtener una mayor calidad en su trabajo, es necesario que Ud. estudie para lograr un mayor dominio de los contenidos de la asignatura y de los materiales que se diseñan así como el conocimiento de su metodología de modo que pueda comprender mejor estas orientaciones y enriquecerlas con su quehacer diario,

seleccionando cada vez los métodos y las vías que considere más adecuados para enseñar a sus estudiantes.

En este material se dan:

- Indicaciones metodológicas de carácter general que están relacionadas con todos los contenidos relacionados con los tipos de ecuaciones. tratados en las guías de estudio que aparecen indicados en el programa y en otros materiales confeccionados con ese fin en el sistema integrado de medios de enseñanza.
- Indicaciones específicas por contenidos según se aprecia en las guías de estudio que consta de: Objetivos generales y específicos, los prerrequisitos considerados, las tareas a desarrollar y la bibliografía a utilizar.

En los **objetivos generales y específicos** se tiene en cuenta la relación con el sistema de medios como una nueva concepción .Se destaca la función del contenido en la asignatura, en la carrera y en el año en que se encuentra el estudiante así como que se insiste en la utilización del sistema de medios.

En los **prerrequisitos** se presenta inicialmente un grupo de elementos en el que se destacan las condiciones previas más importantes y los contenidos o aspectos fundamentales a reactivar, los que están contemplados en la guía y relacionados con el sistema integrado de medios.

Las **tareas a desarrollar** constituyen el hilo conductor del contenido y permiten destacar lo esencial y lo que debe lograrse en los alumnos. Estas exigencias mínimas o nivel mínimo que deben alcanzar todos los estudiantes se representan mediante la idea de seguir el libro de texto e incluir otros elementos de gran importancia, contenidos en los materiales del sistema integrado de medios y ejercicios que expresan con claridad lo que se espera que ellos puedan hacer .Es importante en este punto destacar, que no se trata de “tipos de ejercicios “sino de ejercicios que ilustran el nivel esperado y que además eso no significa que se proponga lograr un nivel más elevado, en especial con los que tengan un mayor desarrollo. Se orienta como trabajar este aspecto utilizando el sistema integrado de medios.

En las **orientaciones metodológicas** aparecen los conceptos, relaciones y procedimientos (incluye habilidades específicas) así como las relaciones entre ellas y se enmarcan en las guías de estudio los puntos esenciales. El profesor debe seguir esta idea de trabajo.

Por último en cada contenido se ilustran ejercicios de aplicación que el profesor los puede utilizar en sus actividades de profundización y de evaluación o control y se orienta materiales del sistema integrado de medios donde se puede profundizar.

## **Algunas consideraciones metodológicas específicas para el tratamiento de la Matemática Básica en el primer año de la Carrera de Ingeniería.**

La vía metodológica fundamental para lograr los objetivos de la asignatura es el trabajo con la abstracción, en los estudiantes que se inician en los estudios de Ingeniería a través de los objetivos generales de la disciplina que son:

Modelar. La utilización de métodos matemáticos. Y el tratamiento de la información relacionada con problemas de su perfil profesional.

En la especialidad de Agronomía en particular se ha puesto en vigor tres planes de estudio, estando en vigor actualmente el plan D debido a insuficiencias en el plan anterior. Y para este plan proponemos en el **Anexo 13** los objetivos de la disciplina Matemática en la aplicación de la Matemática Básica.

En el tratamiento de habilidades se mantienen vigentes las orientaciones dadas en el plan C anterior:

- **Modelar problemas sencillos** donde se apliquen los contenidos estudiados, en particular problemas que conduzcan a ecuaciones lineales y cuadráticas.

- **Identificar y resolver ecuaciones**

- Reconocer, enunciar aplicar las propiedades fundamentales polinomiales, racionales, exponenciales, logarítmicas, y trigonométricas. Realizar transformaciones sencillas.
- Resolver ecuaciones cuadráticas y reducibles a cuadráticas, exponenciales, logarítmicas y Trigonométricas y polinomiales de grado mayor que 4..
- Utilizar el sistema de medios integrados para favorecer la comprensión de las ecuaciones. Esta habilidad proponemos que se incluya como nueva en el tratamiento metodológico

Para facilitar la preparación de los encuentros es necesario tener en cuenta las habilidades básicas a trabajar:

- Calcular, Evaluar, .Simplificar, .Resolver ecuaciones y descomposición en factores.

Estas habilidades pueden caracterizarse señalando los procedimientos que incluyen:

Por ejemplo, resolver ecuaciones, incluye realizar transformaciones equivalentes, reconocer el tipo de ecuación, seleccionar el tipo de ecuación, calcular y comprobar el resultado. Y tienen un carácter generalizador porque en esta enseñanza amplia su contenido:

La habilidad de resolver ecuaciones incluye ahora, además, la determinación de raíces racionales en la resolución de ecuaciones poli nómicas.

### **Sistema de conocimientos:**

Tratamiento metodológico general del contenido a tratar.

La vía metodológica fundamental para lograr una organización adecuada del contenido que conduce al logro de los fines propuestos, se debe fundamentar en el trabajo con un sistema de medios ,en ejercicios correctamente organizados, debido a que los ejercicios matemáticos resumen las exigencias que deben plantearse los estudiantes, de modo que su personalidad se desarrolle en la dirección adecuada. Este trabajo con ejercicios debe ser realizado de forma tal, que la participación del estudiante sea efectiva y desarrolle sus capacidades de trabajo independiente.

Lo anterior significa, que no debe verse el trabajo con los ejercicios como una actividad solo del maestro, sino como una actividad conjunta, en la que el estudiante participa en una medida cada vez más independiente en la que aplica y fija los conocimientos y habilidades adquiridos con la utilización del sistema de medios puestos a su disposición.

Existen muchas formas de clasificar los ejercicios matemáticos en cuanto a su tratamiento y sobre su papel en la enseñanza de la matemática pero también se pueden clasificar atendiendo al objetivo didáctico con que se les utiliza, serán ejercicios para: la introducción de nuevos conocimientos, el desarrollo de habilidades y hábitos, desarrollar el pensamiento de los estudiantes y el control.

### **Orientaciones metodológicas y de organización**

Se recomienda combinar la utilización de diferentes métodos de enseñanza que contribuyan a la activación del proceso enseñanza-aprendizaje.

Los encuentros deben tener un enfoque teórico-práctico, una base orientadora sobre los aspectos teóricos (desarrollando ejemplos y siempre que sea posible ejercicios de aplicación relacionados con la producción agrícola por ejemplo) y los ejercicios que deben resolver como preparación para las actividades prácticas. Dedicar especial atención a la orientación del estudio independiente debido a que cuenta con un sistema integrado de medios que favorece dicha actividad.

La Matemática Básica contiene los contenidos fundamentales del trabajo con ecuaciones polinómicas, exponenciales y logarítmicas, y trigonométricas que sirven de base a las otras asignaturas de la disciplina y a otras disciplinas, en estos temas se realiza una profundización en los aspectos teóricos ya que son elementos conocidos por ellos con el objetivo de dar una base general que permita a los estudiantes desarrollar el pensamiento a través de los diferentes tipos de ejercicios.

La Matemática I contiene entre otros el trabajo con Matrices, con los Espacios Vectoriales. Combinación lineal, dependencia e independencia lineal, con extremos locales y termina con el trabajo con Integrales Definidas e Integración Numérica.

La Matemática II contienen las aplicaciones del cálculo diferencial e integral a diferentes problemas como: trazado de curvas, extremos, problemas de optimización, ecuaciones diferenciales; además elementos de álgebra matricial su aplicación en la solución de sistemas de ecuaciones lineales y programación lineal.

El sistema de evaluación debe incluir en general evaluaciones en clases, pruebas parciales y trabajos extra clases, estos últimos deben propiciar la utilización del sistema integrado de medios.

### **Sobre los procedimientos lógicos del pensamiento:**

Para lograr el desarrollo del pensamiento lógico en los alumnos, el profesor debe dedicar su atención, en el proceso de enseñanza, a los procesos lógicos del pensamiento y trabajar explícitamente, para lograr que los alumnos se apropien de ellos.

Es importante prestar atención a los procedimientos lógicos y enseñará a los alumnos a emplearlos correctamente. Entonces es necesario referirse a la significación del sistema integrado de medios para favorecer la comprensión de las ecuaciones teniendo en cuenta que la enseñanza de las ecuaciones en la Matemática Básica hay que estructurarla de acuerdo a las leyes del proceso del conocimiento del hombre, que por tanto, va de la contemplación viva a la abstracción, para así reconocer más exacta y profundamente la realidad objetiva.

### **Indicaciones para el desarrollo de los contenidos.**

Estas indicaciones están tratadas en las guías de estudio que se han confeccionado para cada tipo de ecuación a las que se ha hecho referencia.

### **Contenido del sistema integrado de medios.**

A continuación se presenta el contenido interno del sistema integrado de medios que está dirigido a estudiantes y a profesores por la importancia que presenta que ambos estén preparados en sus características internas para la contribución que juntos pueden hacer al proceso de enseñanza aprendizaje.

El sistema para profesores contiene DOCUMENTOS GENERALES los que a su vez incluye:

#### **1. Material para profesores.**

Este incluye una panorámica del trabajo con las ecuaciones desde que los estudiantes empiezan en la enseñanza primaria hasta el nivel preuniversitario, que lo hacen de manera intuitiva aplicando únicamente las reflexiones lógicas hasta que las resuelve mediante procesos algorítmicos. Trata que la Resolución de ecuaciones e inecuaciones es un Línea Directriz que se pone de manifiesto en todos los niveles educacionales y en cualquier plan de estudio donde aparezca la Matemática como disciplina.

Se plantea que cuando el alumno ya tiene el concepto de ecuación, entonces se le comienza a plantear el problema de la búsqueda de su solución y se refiere de qué depende la existencia de estas soluciones y la introducción del concepto de nulo o vacío.

Trata que luego de haber realizado bloques de ejercicios para el logro de habilidades, se empieza a trabajar en la profundización del trabajo de resolución de cada tipo de ecuación mediante la idea de ir combinando entre sí cada una de ellas, transitando por supuesto de las combinaciones más sencillas a las más complejas, logrando de esta manera integrar la mayor cantidad de contenidos.

A continuación el material presenta una propuesta de trabajo desarrollado por el profesor Jacinto Hernández Avalos en una experiencia llevada a cabo con estudiantes de grado 12 en su preparación para la prueba de ingreso a la Educación Superior en la especialidad de Matemáticas en el IPVCE Ernesto Guevara el cual se propone extender al nivel superior teniendo en cuenta que en la mayoría de los casos los estudiantes de ingreso a las sedes municipales provienen de centro con escaso nivel obtenido en su preparación o de la enseñanza técnica profesional.

El trabajo se refiere a que los estudiantes luego de interpretar el concepto de ecuación se deben dirigir al proceso de resolución y para ello deben tener en cuenta primero la acción de reconocer en presencia de qué tipo de ecuación se encuentran, para lo que el profesor propone en primer lugar conocer las características de cada tipo de ecuación teniendo en cuenta que cada una de ellas tienen vías, leyes, propiedades y procedimientos muy particulares que ya el alumno conoce.

Se hace entonces una propuesta de clasificación para con ello referirse de un forma más fácil y rápida a cada tipo de ecuación y también de manera breve expone las diferentes formas de transformaciones que existen de manera general para cada tipo de ecuación.

El profesor debe introducir el cuadro con la clasificación propuesta y debe destacar a los estudiantes que el mismo conforma a grandes rasgos un elemento fundamental para que el estudiante tenga en cuenta al culminar su trabajo en aquellos ejercicios que se proponen para el logro de habilidades. Se proponen 11 ejemplos de ecuaciones que reúnen los requisitos de combinar más de un tipo para que se realice el trabajo de clasificación en elaboración conjunta con los estudiantes para que luego se proponga de trabajo independiente la resolución de la ecuación.

A continuación se indican algunos elementos a tener en cuenta por parte de los maestros.

A los profesores se les muestra los tipos de enlaces que se pueden presentar desde 1 hasta cuatro enlaces y a manera de información se le puede introducir al estudiante esta idea sin llegar a manifestar el tratamiento que esto conlleva así como las posibilidades que existen de combinación,

se propone un ejemplo de casos en que se repite el mismo tipo de ecuación. Así también se pone un ejemplo de permuta de casos.

## **2. Orientaciones metodológicas para profesores**

Este material contiene las orientaciones para que el profesor realice la utilización del sistema de medios para la comprensión de las ecuaciones; polinomiales, exponenciales y logarítmicas y trigonométricas. Se refiere a los materiales con que cuenta cada sistema y el objetivo propuesto ya sea para la fijación del contenido, para el desarrollo de habilidades o para reactivar los conocimientos.

Y el sistema para estudiantes incluye:

- Tratamiento para las ecuaciones.

Documentos generales: Descomposición factorial y Tratamiento para las ecuaciones.

**El documento sobre descomposición factorial** consta de 49 páginas y en él se incluyen todos los casos posibles de descomposición factorial así como la combinación de casos además de una colección de ejercicios que persiguen el objetivo de desarrollar habilidades con un nivel de desarrollo asequible a los estudiantes con dificultades.

**El tratamiento para las ecuaciones** es un documento para los estudiantes donde se hace una introducción con una pequeña historia del surgimiento del Álgebra con el objetivo de lograr una motivación por la idea de conocer por qué es importante el estudio de la comprensión de las ecuaciones.

Se comienza el estudio de manera general con el concepto de ecuación teniendo en cuenta lo importante que es lograr asimilar dicho concepto para el trabajo en general para cualquier tipo de ecuación en la práctica diaria.

A partir de este aspecto se introduce en el sistema integrado de medios para favorecer la comprensión de las ecuaciones en la Matemática Básica tres elementos fundamentales que son las guías de estudio. Guías de estudio para: las ecuaciones polinómicas, las ecuaciones exponenciales y logarítmicas y para las ecuaciones trigonométricas. Y estas guías constituyen el eje que articula los materiales a los que se debe dirigir para la comprensión del mismo y para su orientación.

- Materiales complementarios (Complementos).
- Materiales que constituyen documentos (Documentos).
- Materiales para ejercicios (Ejercicios).

**Los materiales complementarios** son elementos donde el estudiante puede estudiar, recordar y revisar algún contenido donde presente dificultad o donde le hayan quedado insuficiencias de la

enseñanza anterior y que es fundamental para el trabajo con las ecuaciones polinómicas. **Ver anexo 14**

A continuación se explican el resto de los materiales para cada tipo de ecuación.

## **Ecuaciones polinomiales:**

### **Materiales que constituyen documentos**

Para el estudio y para la mejor comprensión de las ecuaciones polinómicas.

- Cómo resolver una ecuación lineal. Es un material bien actualizado sobre ecuación lineal que constituye un material de consulta y fue obtenido de INTERNET.,
- Reactivación de lineales y cuadráticas. Es un material donde se hace referencia al procedimiento para la resolución de ecuaciones lineales y cuadrática y de esta se hace referencia a los cuatro métodos posibles de solución, así como se hace la deducción de la formula de resolución.
- Tecnicismo algebraico. Es un documento donde se hace referencia a todos los casos del tecnicismo algebraico de manera resumida incluyendo la descomposición factorial. También se refiere a la clasificación y a algunos elementos fundamentales de las ecuaciones. Representa el procedimiento de solución de una ecuación lineal y deja indicado algunos ejercicios para el estudio.
- Reactivación de radicación. Este documento presenta, que es un radical, las reglas en el uso de los exponentes para la radicación y las propiedades de los radicales.

### **Materiales para ejercicios.**

Son materiales para que los estudiantes encuentren ejercicios resueltos para fijar los procedimientos de solución, para que desarrollen habilidades y para que se autoevalúen con ejercicios sin respuesta, es decir con ejercicios propuestos.

- Carpeta Web ECUACIONES LINEALES. En este documento se observan 110 ecuaciones lineales resueltas y 110 propuestos. Están en formato EXCEL y ofrece posibilidades de trabajo para la adquisición de conocimientos.
  - Se propone un ejemplo de cómo resolver una ecuación lineal. Instrucciones.
- Carpeta Web ECUACIONES CUADRÁTICAS. Se puede observar por el estudiante una colección de ejercicios propuestos de ecuaciones racionales para el trabajo independiente, pero con la posibilidad de que al pinchar en ACTIVIDADES obtendrá la respuesta de la ecuación deseada. Ecuaciones racionales pero que conducen a ecuaciones cuadráticas.
- Carpeta Web de ecuaciones de primer grado. Se proponen 15 ejercicios de ecuaciones de primer grado, de manera independiente a las respuestas las cuales puede obtener cuando lo

deseo, pinchando en la actividad que le corresponda. Este grupo de ejercicios incluye trabajo con los signos de agrupación y con los números racionales.

- Carpeta Web de ecuaciones de segundo grado. Se presenta un documento con ejercicios resueltos de ecuaciones de segundo grado que son 16 presentadas de manera independiente a las respuestas, las que se obtienen pinchando en una de las actividades. Este grupo de ejercicios tienen como objetivo el de desarrollar habilidades.
- Carpeta Web ECUACIONES CON RADICALES. Este documento contiene 5 ecuaciones con radicales que varían el grado de dificultad tenido en cuenta para su selección y que en el documento contiene las respuestas, ilustrando el procedimiento de solución.
- Ejercicios resueltos de ecuaciones cuadráticas. Presenta una actividad sobre ecuaciones cuadráticas y sobre ecuaciones reducibles. Propone ejercicios para aplicar los diferentes métodos estudiados, se refiere a la modelación de problemas mediante ecuaciones cuadráticas. El alumno puede encontrar las soluciones de estos ejercicios en el material.
- Resolución de problemas. Aquí el alumno podrá encontrar problemas resueltos que conducen a ecuaciones cuadráticas,
- Folleto. Procedimiento. Ejemplos resueltos y ejercicios propuestos de ecuaciones con radicales. Es un material muy completo pues se puede encontrar propiedades importantes, pasos para resolver una ecuación con radical, 5 ejemplos resueltos, 40 ejercicios propuestos, y 20 ejercicios propuestos pero con radicales en el denominador. Se ha revisado en el material que los ejercicios estén debidamente graduados con respecto al grado de dificultad.
- Ejercicios propuestos de radicales. Encontrarás 65 ejercicios propuestos pero con el objetivo de aplicar propiedades de los radicales.
- Ejercicios propuestos de ecuaciones con radicales, obtenidos de evaluaciones en pruebas de ingreso a la Educación Superior. Hace referencia al trabajo con expresiones que se representan a través de funciones.

## **Ecuaciones exponenciales y logarítmicas.**

### **Materiales que constituyen documentos**

Para el estudio y para la mejor comprensión de las ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

- ü Documento para reactivar conocimientos para las ecuaciones exponenciales y logarítmicas. En este documento puedes leer sobre los fundamentos matemáticos sobre las operaciones con exponentes y logaritmos, también encontrarás las propiedades de la potencia. Introduce los

logaritmos, logaritmos comunes o logaritmos decimales, y los logaritmos neperianos reglas y propiedades de los logaritmos.

- Û Ecuaciones exponenciales y logarítmicas. Se muestra una actividad donde se encuentra los conceptos de ecuación exponencial y logarítmica, como resolverlas, hacer sustituciones adecuadas, y expresar un logaritmo en base diferente, y resolver ejercicios de aplicación.
- Û Ecuaciones logarítmicas. Es un material ameno que comienza con las propiedades logarítmicas. Propone 5 ejercicios resueltos de ecuaciones logarítmicas aplicando propiedades y relaciona con el tema de manera más general. Proporciona la representación grafica de las soluciones de una ecuación y la resolución numérica. Insiste en la validez de las soluciones en una ecuación logarítmica pues es importante recordar la relación del conjunto solución con el dominio de definición. Se propone ejemplos de aplicación a sistemas.
- Û Carpeta Web ecuaciones exponenciales. Presenta 19 ejercicios de ecuaciones exponenciales que ofrece la posibilidad de desarrollar habilidades de trabajo independiente puesto que las respuestas se presentan si pinchas el número correspondiente a la ecuación.
- Û Carpeta Web ecuaciones logarítmicas. 11 ejercicios con respuesta de este tipo de ecuación con las mismas posibilidades que la anterior. Dichos ejercicios están graduados según el nivel de dificultad y proporcionan el razonamiento y el esfuerzo.
- Û Ejercicios con respuesta de ecuación logarítmica. Presenta una parte I con 40 ejercicios con la respuesta, una parte II con 10 ejercicios con respuesta con ecuaciones logarítmicas mas complejas.
- Û Ejercicios con respuesta de ecuaciones exponenciales. Propone 40 ejercicios con respuesta sobre ecuaciones exponenciales usando las leyes de los exponentes, y 40 ejercicios con respuesta sobre ecuaciones exponenciales usando las propiedades de los logaritmos.
- Û Ejercicios de exponencial y logarítmica. Propone 20 ejercicios de ecuaciones combinadas sin respuesta para el estudio independiente.

## **Ecuaciones trigonométricas**

### **Materiales que constituyen documentos**

Para el estudio y para la mejor comprensión de las ecuaciones trigonométricas.

Û **Documento para reactivar conocimientos** para las ecuaciones trigonométricas. En este documento puedes leer una actividad en la que se tratan los siguientes elementos de un sumario.

1. Relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo. Funciones trigonométricas  $\sin(x)$ ;  $\cos(x)$ ;  $\tan(x)$ ;  $\cot(x)$

2. Funciones trigonométricas inversas.
3. Funciones trigonométricas y resolución de triángulos rectángulos.
4. Identidades trigonométricas básicas Identidades trigonométricas especializadas

#### Ü **Métodos analíticos y métodos gráficos.**

Sumario: Ecuación trigonométrica y Métodos analíticos y métodos gráficos para resolver ecuaciones trigonométricas.

#### **Materiales para ejercicios**

Carpeta Web ecuaciones trigonométricas carpeta Web ecuaciones trigonométricas se puede observar por el estudiante una colección de ejercicios propuestos de ecuaciones trigonométricas para el trabajo independiente, pero con la posibilidad de que al pinchar en actividades obtendrá la respuesta de la ecuación deseada. (Propone 16 ejercicios).

Ejercicios propuestos sobre: resolución de ecuaciones trigonométricas, aplicación del concepto de función trigonométrica y propiedades de la función trigonométrica y demostración de igualdades utilizando identidades trigonométricas.

## CONCLUSIONES

1. El diagnóstico inicial desarrollado expresa que existe una insuficiencia que atenta contra la enseñanza y el aprendizaje para la comprensión de las ecuaciones en la Matemática Básica.
2. Un sistema integrado de medios se revela como un instrumento para apoyar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática y aunque en el mundo se analizan diferentes vías para su utilización en la enseñanza de esta asignatura ninguno de los estudiantes logran una integración al sistema de categorías didácticas: objetivos-contenido-medios.
3. La concepción tiene un efecto enriquecedor sobre la enseñanza de la Matemática pues permite profundizar en la comprensión de los elementos de las ecuaciones.
4. Aporta posibilidades en la activación del estudio independiente de los estudiantes ya que pueden participar en la búsqueda de su propio conocimiento unido a la atracción por el medio que permite aumentar la motivación de los alumnos por la Matemática.
5. La aplicación del sistema integrado de medios para la comprensión de las ecuaciones materializa elevar el trabajo que se realiza en la enseñanza de esta asignatura para el desarrollo del pensamiento lógico.
6. Los contenidos que se tratan están relacionados con elementos que pueden ser asimilados por los estudiantes y los materiales confeccionados pueden ser utilizados para su inclusión en el curriculum actual.

## **RECOMENDACIONES**

La realización de este trabajo ha permitido diseñar un sistema integrado de medios que favorezca la comprensión de las ecuaciones del proceso de enseñanza y aprendizaje de la asignatura Matemática Básica para ingenieros y permite recomendar que:

1. La propuesta realizada en esta investigación sea aplicada en el proceso docente educativo en la asignatura Matemática Básica para la carrera de Ingeniería y para la cual se propone incluir como objetivo de la asignatura el uso de un sistema integrado de medios que permita visualizar los objetos y conceptos matemáticos.
2. La propuesta sirva como modelo para el tratamiento de otros núcleos temáticos que se estudian en la carrera siempre que requieran de la visualización para un detallado análisis y comprensión de los conceptos a tratar.
3. La elaboración de un sitio donde el estudiante pueda autoprepararse, consolidar los conocimientos adquiridos en el aula, es decir cuente con un recurso donde aparezcan ayudas (contenidos, ejercicios resueltos y propuestos, manual de usuarios para el uso del software etc.) y además donde el estudiante pueda interactuar con el profesor para obtener una retroalimentación de lo aprendido.
4. La propuesta puede ser enriquecida y aplicada en el tratamiento de los contenidos que requieren de otras ecuaciones.

### Anexo 1 Diferencias que se presentan entre ambas modalidades de estudio

MODALIDAD PRESENCIAL	MODALIDAD SEMIPRESENCIAL
Propio para jóvenes que pueden dedicar todo su tiempo a los estudios	Sus características posibilitan que puedan estudiar en ella personas que no pueden dedicar al estudio todo su tiempo
Demandan plazos determinados para su culminación, lo que supone ritmos de progreso mayores y comunes para todos los estudiantes	Cada estudiante puede avanzar a su propio ritmo, sin límites de tiempo para culminar sus estudios
Se caracteriza por una mayor presencialidad y carga semanal, aunque pueden utilizarse igualmente métodos semipresenciales y no presenciales	Menos presencial como rasgo fundamental, su carga semanal es menor, pero pueden utilizar igualmente métodos presenciales y no presenciales
Responden a un plan de ingreso aprobado por el país, en respuesta a las demandas de fuerza de trabajo calificada	Se puede ofrecer a todas las personas que posean nivel medio superior vencido, sin límites de edad o de algún otro tipo. Aseguran que sea posible alcanzar el pleno acceso
Se garantiza una plaza al concluir los estudios por medio del proceso de ubicación laboral	En general no se garantiza una plaza, aunque para determinadas fuentes de ingreso puede suceder.
Se desarrolla fundamentalmente en las sedes Centrales, aunque algunas de sus partes pueden ofrecerse igualmente en las Sedes Universitarias Municipales y otras sedes Universitarias	Se desarrolla fundamentalmente en las Sedes Universitarias Municipales y otras Sedes Universitarias, aunque algunas de sus partes pueden ofrecerse en las Sedes Centrales

## Anexo 2

### Líneas directrices que se reconocen en los programas para la enseñanza de la Matemática

1. - Dominios numéricos.
2. - Cálculos con magnitudes y valores aproximados.
3. - Ecuaciones e inecuaciones. Sistemas. Optimización Lineal.
4. - Correspondencia, transformación, función.
5. - Geometría.
6. - Procesos de aproximación. Límite y Cálculo infinitesimal.
7. - Definir.
8. - Fundamentar y demostrar.
9. - Aspectos lógicos y lingüísticos.
- 10.-Base conjuntista.
- 11.-Trabajo con variables.
- 12.-Matematizar problemas extramatemáticos.
- 13.-Trabajo algorítmico.
- 14.-Trabajo combinatorio, pensamiento probabilístico.
- 15.-Técnicas de la actividad mental y práctica.
16. - Educación política y socialista.

### Anexo 3

#### Programas de Matemática décimo, undécimo y duodécimo grado

#### **PROGRAMA DE DÉCIMO GRADO**

#### **PLAN TEMÁTICO**

<u>Número</u>	<u>Unidad</u>	<u>Horas/clases</u>
1	Aritmética. Conjuntos. Radicales. Trabajo con variables.	60
2	Ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones. Funciones lineales y cuadráticas.	56
3	Relaciones de igualdad y semejanza entre figuras geométricas.	30
4	Trigonometría.	28
	Reserva y Evaluación	6
	Total	180

#### **Unidad 1.-Aritmética. Conjuntos. Radicales. Trabajo con variables.**

##### 1.1. Repaso y profundización. (10 horas clases)

Dominios numéricos (N, Z, Q+, Q y R). Operaciones de cálculo. Relaciones y propiedades de las operaciones. Potencias de exponente entero, fraccionario y racional. Raíz n-ésima de un número real. Resolución de problemas de la vida de carácter político - ideológico, económico – social y científico – ambiental donde integren las operaciones con números naturales, fracciones y expresiones decimales, racionales y reales en los que sea necesaria la conversión de una representación a otra y donde se combinen las diferentes operaciones, el tanto por ciento y tanto por mil y el trabajo con cantidades de magnitud, en las cuales sea necesario realizar conversiones de una unidad a otra de igual magnitud.

##### 1.2. Teoría de conjuntos. (4 horas clases)

Conjunto. Elemento. Inclusión de conjuntos. Operaciones con conjuntos (unión, intersección, diferencia y su caso particular, la complementación).

##### 1.3. Radicales. (12 horas clases)

Radicales. Propiedades de los radicales. Su interpretación como casos particulares de la potenciación.

Simplificación de radicales. Reducción de radicales a un mismo índice. Radicales semejantes. Adición, sustracción, multiplicación y división de radicales.

Racionalización de denominadores monomios y binomios.

1.4. Trabajo algebraico. (20 horas clases)

Operaciones con polinomios. Adición, sustracción y multiplicación (se incluyen los 23 productos notables:  $(a \pm b)$ ,  $(a + b)(a - b)$ ,  $(a \pm b)^2$ ,  $(x + a)(x + b)$ ). Sistematización y profundización de la descomposición factorial: factor común, factor común por agrupamiento, diferencia de cuadrados, trinomio cuadrado perfecto, 2 2 completamiento cuadrático, trinomios de las formas  $x^2 + px + q$  y  $mx^2 + px + q$ . División de polinomios. Regla de Ruffini o Horner. Descomposición de polinomios que contengan divisores o factores de la forma  $(x + a)$   $x^2 - a$ ,  $a \neq 0$ . Suma y diferencia de cubos. Ejercicios combinados de descomposición en factores.

1.5. Fracciones algebraicas. (14 horas clases)

Concepto de fracciones algebraicas. Cambios de signos en una fracción que garantizan que su valor permanezca invariante. Simplificación de fracciones algebraicas. Multiplicación y división de fracciones algebraicas. Adición y sustracción de fracciones algebraicas. Operaciones combinadas con fracciones algebraicas.

## **Unidad 2.-Ecuaciones. Inecuaciones y sistemas de ecuaciones.**

2.1. Ecuaciones. (10 horas clases)

Definición de ecuación, dominio básico de una ecuación, solución de una ecuación, conjunto solución. Ecuaciones equivalentes, transformaciones que pueden realizarse en una ecuación. Ecuaciones: lineales, cuadráticas y fraccionarias. Despeje en fórmulas. Resolución de problemas que conducen a ecuaciones lineales y cuadráticas.

2.2. Función lineal. (4 horas clases)

Definición de función (como una correspondencia y como un conjunto de pares ordenados). Análisis de correspondencias dadas en distintas formas para decidir si son o no funciones. Variable independiente o pre imagen. Variable dependiente o imagen. Dominio y conjunto imagen de una función. Distintas formas de representar una función. Función numérica. Función lineal: casos particulares (función constante e idéntica). Representación gráfica. A partir de la función lineal formalizar las propiedades siguientes: dominio, imagen, cero, signo y monotonía.

2.3. Función cuadrática. (10 horas clases)

El concepto de función cuadrática como la correspondencia definida por la ecuación

$2^*y = ax + bx + c$  ( $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ). Representación gráfica, dominio, imagen, ceros, monotonía, signos y paridad. Traslación de una parábola en la dirección de los ejes coordenados. Deducción de la fórmula para calcular la abscisa del vértice de la parábola que representa gráficamente la función cuadrática. Ejercicios y problemas sencillos de optimización. Representación gráfica de datos sobre fenómenos naturales y sociales utilizando el concepto de función cuadrática.

#### 2.4. Intervalos. (14 horas clases)

Intervalos. Operaciones con intervalos (unión, intersección, diferencia y complementación). Definición de inequación, dominio básico de una inequación, solución de una inequación, conjunto solución. Inecuaciones equivalente, transformaciones que pueden realizarse en una inequación. Inecuaciones lineales, cuadráticas y fraccionarias.

#### 2.5. Sistemas de ecuaciones. (18 horas clases)

Definición de sistemas de ecuaciones lineales, solución y conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales, sistemas equivalentes. Transformaciones que pueden realizarse en un sistema. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables, Sistemas de tres ecuaciones lineales con tres variables. Sistemas cuadráticos. Problemas que conducen a sistemas de ecuaciones lineales y cuadráticas.

### **Unidad 3.-Relaciones de igualdad y semejanza entre figuras geométricas.**

#### 3.1. Repaso y profundización. (6 horas clases)

Repaso de los contenidos siguientes: Identificación y clasificación de figuras. Relaciones de posición entre puntos y rectas y entre rectas. Ángulos opuestos por el vértice, adyacentes y entre paralelas. Triángulos y cuadriláteros. Elementos. Clasificación y propiedades. Rectas y puntos notables del triángulo. Circunferencias y círculos. Elementos y propiedades. Ángulos de la circunferencia: ángulo central, ángulo inscrito y ángulo seminscrito. Construcción de la mediatriz de un segmento y de la bisectriz de un ángulo. Estimación y cálculo de perímetros y áreas.

#### 3.2. Igualdad de triángulos. (6 horas clases)

Sistematización sobre igualdad de triángulos, los criterios de igualdad de triángulos. Ejercicios de demostración y problemas donde se pongan de manifiesto propiedades de los cuadriláteros, polígonos, circunferencia y círculo.

#### 3.3. Semejanza de triángulos. (12 horas clases)

Sistematización de los conceptos: Razón, proporción y segmentos proporcionales. Teorema de las transversales. Semejanza de figuras geométricas. Definición de triángulos semejantes. Razón de

semejanza. Teorema fundamental de la semejanza de triángulos (demostración). Criterios de semejanza de triángulos. Ejercicios de demostración y problemas donde se pongan de manifiesto propiedades de los cuadriláteros, polígonos, circunferencia y círculo. Razón entre los perímetros y las áreas de dos triángulos semejantes.

#### 3.4. Grupo de teoremas de Pitágoras. (6 horas clases)

Teorema de la altura, teorema de los catetos (demostración de estos teoremas aplicando la semejanza de triángulos), teorema de Pitágoras y su recíproco con demostración. Ejercicios y problemas.

### **Unidad 4.-Trigonometría.**

#### 4.1. Razones trigonométricas en triángulos rectángulos. (8 horas clases)

Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo. Determinación de las razones trigonométricas de ángulos agudos. Razones trigonométricas de los ángulos notables ( $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ). Ejercicios y problemas de aplicación a la geometría (incluyendo el cálculo de cuerpos) y a la Física.

#### 4.2. Circunferencia trigonométrica. (8 horas clases)

Definición de circunferencia trigonométrica. Razones trigonométricas de ángulos cuya amplitud se encuentra en el intervalo  $[0^\circ, 360^\circ]$ . Razones trigonométricas de los ángulos axiales ( $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$ ,  $360^\circ$ ). Signos de las razones trigonométricas en los distintos cuadrantes. Fórmulas de reducción.

4.3. Razones trigonométricas de ángulos cualesquiera. (12 horas clases) Sistema circular de medida de ángulos. Definición de radián. Conversiones para expresar la amplitud de un ángulo del sistema sexagesimal al circular y viceversa.

Generalización del concepto de ángulo. Ángulos coterminales. Razones trigonométricas de ángulos cualesquiera. Uso de las tablas trigonométricas.

Resolución de ecuaciones sencillas.

### **PROGRAMA 11NO GRADO PLAN TEMATICO.**

Número	Unidad	Horas/clases 1
	Ecuaciones con radicales.	10
2	Funciones.	24
3	Ecuaciones y funciones trigonométricas.	50
4	Ecuaciones y funciones exponenciales y logarítmicas	.22

5	Geometría analítica de la recta en el plano.	34
6	Curvas de segundo grado. Secciones Cónicas.	30
	Reserva y Evaluación.	6
	Total.	180

**Unidad 1.-Ecuaciones con radicales. 1.1. Ecuaciones con radicales. (10 horas clases)**

Definición. Necesidad de realizar la comprobación en una ecuación con radicales, al elevar ambos miembros de la misma a una potencia de exponente par. Resolución de ecuaciones con radicales por reflexiones lógicas. Ecuaciones con radicales que requieran una sola elevación al cuadrado. ecuaciones con radicales que requieran más de una elevación al cuadrado. Ecuaciones con radicales fraccionarias.

**Unidad 2.-Funciones. 2.1. Repaso y profundización. (6 horas clases)**

Repaso del concepto función, formas de representación y propiedades de funciones numéricas. Dominio, conjunto imagen, ceros de las funciones numéricas. Repaso de las funciones  $y = ax + b$ ,  $y = ax^2 + bx + c$ .

2.2. Estudio de algunas funciones y de sus propiedades. (18 clases)

La función de proporcionalidad inversa. Las funciones  $y = x^3$ ,  $y = y = \frac{1}{x}$ . Operaciones racionales (suma, resta, producto y cociente) con funciones numéricas. Propiedades globales de las funciones numéricas (monotonía, paridad, inyectividad, sobreyectividad, biyectividad). Función compuesta, dominio de la compuesta. Concepto función inversa, su determinación.

**Unidad 3.-Ecuaciones y funciones trigonométricas.**

3.1. Repaso y profundización. (6 horas clases)

Repaso de las razones trigonométricas y las fórmulas de reducción, así como de su aplicación a la demostración de identidades y a la resolución de ecuaciones sencillas.

3.2. Funciones trigonométricas. (6 horas clases)

Definición de función seno, coseno y tangente. Representación gráfica y propiedades.

3.3. Identidades trigonométricas. (10 horas clases)

Identidades trigonométricas fundamentales y su aplicación a la demostración de identidades y a la resolución de ecuaciones sencillas.

3.4. Fórmulas de Adición. (6 horas clases)

Fórmulas del seno, coseno y tangente de la suma y diferencia de dos ángulos. Fórmulas del seno, coseno y tangente del ángulo duplo. Ejercicios.

#### 3.5. Identidades y Ecuaciones trigonométricas. (8 horas clases)

Resolución de ejercicios de demostración de identidades trigonométricas. Resolución de ecuaciones trigonométricas.

#### 3.6. Aplicaciones de la trigonometría. (14 horas clases)

Resolución de triángulos rectángulos y triángulos cualesquiera. Ley de los senos y de los cosenos. Expresión del área de un triángulo en función de las medidas de dos de sus lados y el ángulo comprendido entre estos. Polígonos regulares. Ejercicios y problemas donde se incluirán ejercicios de aplicación a la Geometría, la Física y el cálculo de cuerpos.

### **Unidad 4.-Ecuaciones y funciones.**

#### 4.1. Ecuaciones exponenciales. (8 horas clases)

Repaso de las propiedades de las potencias de base y exponente real. Igualdad de potencias. Monotonía de la potenciación, diferenciación de casos. Ecuaciones e inecuaciones exponenciales.

#### 4.2. Logaritmo. Propiedades. Aplicaciones (12 horas clases)

Definición de logaritmo de base  $a$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ). Identidad fundamental logarítmica. Cálculo de logaritmos aplicando la definición. Propiedades de los logaritmos. Aplicación. Monotonía de la logaritmicación, diferenciación de casos. Ecuaciones e inecuaciones logarítmicas.

#### 4.3. Logaritmos decimales. (2 horas clases)

Logaritmos decimales: característica y mantisa. Uso de las tablas. Antilogaritmo. Cálculo aplicando logaritmos decimales y sus propiedades.

#### 4.4. Funciones exponenciales y logarítmicas. (4 horas clases)

Representación gráfica y propiedades. Las funciones exponencial y logarítmica como inversa una de la otra. Representación gráfica de datos sobre fenómenos naturales y sociales utilizando el concepto de función exponencial o función logarítmica.

### **Unidad 5.-Geometría analítica de la recta en el plano.**

5.1. Repaso y profundización. (6 horas clases). Repaso de Geometría Plana: Relaciones de posición entre puntos y rectas y entre rectas. Distancia de un punto a una recta. Triángulos y cuadriláteros. Elementos, clasificación y propiedades. Circunferencias y círculos. Propiedades. Grupo de teoremas

de Pitágoras: Teorema de la altura, teorema de los catetos y teorema de Pitágoras. Perímetros y área de figuras planas.

#### 5.2. Geometría Analítica. (28 horas clases)

Distancia entre dos puntos (con demostración). Pendiente de una recta determinada por dos puntos y su relación con el ángulo de inclinación. Condiciones de paralelismo y perpendicularidad de dos rectas en función de sus pendientes. Fórmulas para determinar las coordenadas del punto medio de un segmento. Aplicaciones geométricas de esta fórmula. Ecuación de un lugar geométrica. Ecuación general de la recta (con demostración), casos particulares. Punto de intersección de dos rectas. Distancia de un punto a una recta. Aplicaciones geométricas.

### **Unidad 6.-Curvas de segundo grado. Secciones cónicas.**

#### 6.1. Circunferencia. (6 horas clases)

Circunferencia de centro en el origen de coordenadas. Circunferencia de centro  $(h;k)$  y radio  $r$  (con demostración). Intersección entre una recta y una circunferencia y entre dos circunferencias. Tangente a una circunferencia. Aplicaciones geométricas.

#### 6.2. Elipse. (6 horas clases)

Definición de la elipse como lugar geométrico del plano. Elementos de la elipse: focos, vértices, excentricidad, ejes, relaciones. Ecuación de la elipse referida a su centro y ejes; ecuación de la elipse desplazada con ejes paralelos a los ejes coordenados. Intersección de una elipse con una recta o entre una elipse y otra cónica.

#### 6.3. Hipérbola. (6 horas clases)

Definición de la hipérbola como lugar geométrico del plano. Elementos de la hipérbola: focos, vértices, excentricidad, ejes, asíntotas, relaciones. Ecuación de la hipérbola referida a su centro y ejes; ecuación de la hipérbola desplazada con ejes paralelos a los ejes coordenados. Intersección de una hipérbola con una recta o entre una hipérbola y otra cónica.

#### 6.4. Parábola. (6 horas clases)

Caracterización de la parábola como lugar geométrico del plano. Elementos de la parábola: foco, vértice, parámetro y directriz de la parábola. Ecuación de la parábola referida a su centro y su directriz; ecuación de la parábola desplazada con ejes paralelos a los ejes coordenados. Intersección de una parábola con una recta o entre una parábola y otra cónica.

#### 6.5. Sistematización de secciones cónicas. (6 horas clases)

Ejercicios donde se combinen las cónicas estudiadas y se sistematice todo lo estudiado en la unidad.

## PROGRAMA DE duodécimo GRADO

### PLAN TEMÁTICO

#### PRIMERA PARTE

<u>Número</u>	<u>Unidad</u>	<u>Horas/clases</u>
1	Números complejos.	24
2	Geometría del Espacio.	36
	Reserva y Evaluación.	12
	Total.	72

#### SEGUNDA PARTE

1	Cálculo aritmético y algebraico.	9
2	Ecuaciones, sistemas de ecuaciones e inecuaciones.	16
3	Trigonometría.	13
4	Cálculo y demostraciones geométricas.	22
	Reserva y Evaluación.	6
	Total.	66

#### PRIMERA PARTE

##### Unidad 1.-Números complejos.

1.1. Cálculo aritmético y algebraico. (4 horas clases) Repaso de las operaciones con números racionales. Orden de las operaciones. Cálculo porcentual. Resolución de problemas aritméticos. Reducción de términos semejantes. Productos notables. Descomposición factorial. Resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas y de sistemas lineales y cuadráticos. Problemas.

1.2. Números complejos. (6 horas clases) Ampliaciones sucesivas de los dominios numéricos. Insuficiencias de los números reales. Unidad imaginaria. Número complejo. Forma binómica o

rectangular de un número complejo. Parte real e imaginaria de un número complejo. Números complejos imaginarios puros. Igualdad de números complejos.

1.3. Operaciones con números complejos. (6 horas clases) Adición, sustracción y multiplicación de números complejos en forma binómica. Propiedades de la adición y la multiplicación de números complejos. Potencias de exponente natural de la unidad imaginaria. Raíces de índice par de números reales negativos. Resolución de ecuaciones cuadráticas o de segundo grado, con coeficientes reales, en el conjunto  $C$  de los números complejos.

1.4. Representación geométrica de los números complejos. (8 horas clases) Interpretación geométrica de la adición y sustracción de números complejos. Números complejos conjugados. Propiedades. División de números complejos en forma binómica. Módulo o valor absoluto de un número complejo. Propiedades. Argumento de un número complejo. Forma trigonométrica de un número complejo. Multiplicación y división de números complejos en forma trigonométrica. Operaciones combinadas con números complejos en forma binómica y/o trigonométrica.

## **Unidad 2.-Geometría del espacio.**

2.1. Repaso y profundización. (10 horas) Repaso de Geometría Plana: Demostración de las relaciones de posición entre puntos y rectas y entre rectas. Distancia de un punto a una recta. Ángulos opuestos por el vértice, adyacentes y entre paralelas. Elementos y propiedades de los triángulos y los cuadriláteros. Elementos y propiedades de la circunferencia y el círculo. Grupo de teoremas de Pitágoras: Teorema de la altura, teorema de los catetos y teorema de Pitágoras. Perímetro y área de figuras planas. Resolución de triángulos cualesquiera.

2.2. Geometría sintética. (12 horas clases)

Conceptos primarios de la geometría plana (punto, recta y plano). Axiomas o postulados. Teorema: premisa, tesis y demostración. Axiomas y teoremas para la geometría del espacio. Determinación de un plano por dos rectas que se cortan (con demostración). Rectas paralelas (definición). Posiciones relativas de dos rectas en el espacio. Ángulo entre rectas. Paralelismo de recta y plano (definición). Criterio de paralelismo de recta y plano (con demostración). Perpendicular y oblicua a un plano. Criterio de perpendicularidad de recta y plano. Relación entre las perpendiculares y las oblicuas. Distancia de un punto a un plano (definición). Proyección de una oblicua sobre un plano, ángulo

entre recta y plano. Teorema sobre las rectas perpendiculares a un plano Teorema de las tres perpendiculares. Aplicaciones al cálculo.

### 2.3. Cuerpos. (14 horas clases)

Cuerpos geométricos (prisma, pirámide, cilindro, cono y esfera). Elementos. Representación aplicando la perspectiva caballera. Cálculo del área lateral, total y volumen, aplicando de forma integradora de los elementos precedentes de geometría plana y del espacio y la trigonometría.

## **SEGUNDA PARTE**

### **Unidad 1. Cálculo aritmético y algebraico.**

#### 1.1. Cálculo numérico.

Algoritmos básicos de las operaciones, la regla fundamental del cálculo aproximado y el orden de las operaciones. Ejercicios de cálculo. Valor numérico de expresiones algebraicas y del cálculo de imágenes de funciones racionales e irracionales. Uso de tablas. Ejercicios de cálculo y resolución de problemas aritméticos. Aplicaciones del cálculo porcentual.

#### 1.2. Cálculo algebraico.

Reducción de términos semejantes y la introducción de signos de agrupación. Productos notables y cálculo con expresiones algebraicas. Casos y procedimiento de descomposición factorial. Simplificación de fracciones algebraicas y de las operaciones con fracciones. Aplicación al cálculo.

### **Unidad 2. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Inecuaciones.**

2.1. Ecuaciones. Resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas; naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática. Introducción de raíces extrañas, necesidad de comprobar. Ecuaciones fraccionarias y con radicales. Ecuaciones logarítmicas, exponenciales y trigonométricas que se resuelven por reflexiones lógicas. Despejo de fórmulas. Ceros y polos de funciones. Resolución de problemas que se resuelven mediante ecuaciones.

#### 2.2. Sistemas de ecuaciones.

Resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas y de sistemas cuadráticos de dos ecuaciones con dos incógnitas. Su significado geométrico. Resolución de problemas que conducen a sistemas.

2.3. Inecuaciones. Inecuaciones lineales, cuadráticas y fraccionarias.

### **Unidad 3. Trigonometría**

3.1. Identidades trigonométricas. Identidades trigonométricas fundamentales. Demostración de identidades trigonométricas sencillas.

3.2. Ecuaciones trigonométricas. Resolución de ecuaciones que requieren la utilización de identidades.

### **Unidad 4. Cálculo y demostraciones geométricas.**

4.1. Propiedades geométricas elementales

4.1.1 Pares de ángulos. Ángulos formados por dos rectas al cortarse, sus propiedades. Ángulos formados por una secante al cortar dos rectas paralelas. Aplicación al cálculo y demostraciones simples.

4.1.2. Triángulos. Definiciones y propiedades relativas a triángulos. Clasificación, rectas y puntos notables; desigualdad triangular. Propiedades relativas a los ángulos interiores, y exteriores de un triángulo. Triángulo Rectángulo: Grupo de Teoremas de Pitágoras,. Relaciones entre los lados y ángulos de un triángulo (ley de los senos y ley de los cosenos). Aplicaciones al cálculo y demostraciones sencillas.

4.1.3. Cuadriláteros Clasificación y propiedades características de los cuadriláteros. Aplicación al cálculo y demostraciones sencillas.

4.1.4. Circunferencia. Definición, elementos y propiedades. Ángulos en la circunferencia. Propiedades. Aplicación al cálculo y demostraciones sencillas.

4.2. Igualdad y semejanza de triángulos. Criterios. Aplicación al cálculo y demostraciones simples.

4.3. Cálculo de perímetros, áreas y volúmenes. Fórmulas fundamentales de perímetros y áreas de figuras planas; así como de áreas y volúmenes en los cuerpos.

4.4. Geometría analítica de la recta en el Plano. Ecuación cartesiana de la recta; distancia entre dos puntos; pendiente de una recta determinada por dos puntos y su relación con el ángulo de inclinación. Condiciones de paralelismo y perpendicularidad de dos rectas en función de las pendientes. Aplicaciones al cálculo relacionado con figuras geométricas elementales en un plano coordenado.

4.5. Geometría del espacio. Posiciones relativas de dos rectas en el espacio. Paralelismo entre recta y plano. Perpendicular y oblicua a un plano. Relación entre las perpendiculares y las oblicuas. Distancia de un punto a un plano. Proyección de una oblicua sobre un plano, ángulo entre una recta y un plano. Teorema sobre las rectas perpendiculares a un plano. Teorema de las tres perpendiculares. Aplicaciones al cálculo

Nota: La distribución de las horas clases de cada una de las unidades temáticas asociadas a las unidades 1, 2, 3 y 4 la hará el profesor de acuerdo al diagnóstico y características de sus grupos

## Anexo 4

### Programas de las Matemáticas en la Universidad

#### Programa de la asignatura: MATEMÁTICA BÁSICA

**Modalidad:** Semipresencial

#### **I.- DATOS GENERALES**

- **Disciplina:** Matemática General

- **Asignatura:** Matemática Básica

- **Horas totales:** 80 horas

- **Año académico:** Primer año

- **Semestre:** Primero

#### **Total de horas por actividad docente:**

<b>Formas de enseñanza:</b>	<b>Cantidad de horas</b>
Clases	32 – (64 horas)
Clases de ejercitación	6 – (12 horas)
Evaluaciones parciales	2 - ( 4 horas)
Total	40 - (80 horas)

#### **II.- OBJETIVOS GENERALES EDUCATIVOS E INSTRUCTIVOS**

##### **Objetivos generales educativos**

Contribuir a ampliar la madurez matemática y la capacidad de trabajo con la abstracción en los estudiantes que inician estudios de Ingeniería.

Contribuir al desarrollo del pensamiento lógico y algorítmico, en particular en lo referente a las habilidades de identificar conceptos, demostrar propiedades matemáticas, así como establecer y desarrollar secuencias de operaciones matemáticas, con el fin de dar solución a problemas propios de la asignatura.

Contribuir al desarrollo intelectual, ético y estético de los estudiantes; a través del desarrollo de habilidades en el lenguaje lógico verbal y escrito en las operaciones mentales propias de la matemática, en la defensa de sus valoraciones y en el uso de la crítica y la autocrítica.

Contribuir a desarrollar en los estudiantes la habilidad de trabajo independiente, consultando sistemáticamente los libros de texto que se ajustan al contenido del programa, incentivando la constancia y el hábito de proceder reflexivamente.

### **Objetivos generales instructivos**

Identificar, caracterizar las propiedades básicas y resolver: ecuaciones lineales y cuadráticas, sistemas de ecuaciones y desigualdades, así como modelar problemas prácticos sencillos utilizando tales conceptos.

Definir, identificar, interpretar sus propiedades más generales y graficar las funciones: polinomiales, racionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y trigonométricas inversas.

Definir, identificar e interpretar propiedades más generales de los lugares geométricos: rectas, círculos, parábolas, elipses e hipérbolas así como representarlos en diferentes formas analíticas y sistemas coordenados.

## **III.- CONTENIDO**

### **Sistema de conocimientos**

Elementos de Lógica. Elementos de teoría de conjuntos. Ecuaciones lineales y cuadráticas, reducibles a cuadráticas y lineales. Inecuaciones lineales, cuadráticas y racionales. Valor absoluto en ecuaciones y desigualdades. Herramientas básicas para la graficación. El círculo. La línea recta en el plano. Funciones. Definiciones relacionadas con el concepto de función:

$y = mx + n$ ,  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $y = x^3$ ,  $y = |x|$   $y = \sqrt{x}$ . Gráfica de funciones, incluyendo funciones por tramos. Combinación de funciones. Funciones inversas. Funciones polinomiales y sus gráficas. Determinación de raíces racionales de polinomios. Aproximación de raíces reales de polinomios. Funciones racionales. Fracciones parciales. Funciones exponencial y logarítmica. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas. Relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo. Funciones trigonométricas ( $\text{sen}(x)$ ,  $\text{cos}(x)$ ,  $\text{tan}(x)$ ,  $\text{cot}(x)$ ) Funciones trigonométricas inversas. Funciones trigonométricas y resolución de triángulos rectángulos. Identidades trigonométricas básicas. Identidades trigonométricas especializadas. Ecuaciones trigonométricas. Vectores geométricos en el plano y el espacio. Coordenadas Polares. Secciones cónicas. La Parábola, la elipse y la hipérbola. Traslación de ejes. Ecuaciones paramétricas.

### **Sistemas de habilidades**

Definir los diferentes conjuntos numéricos (desde los naturales hasta los complejos)

Identificar y resolver ecuaciones lineales, sistemas de dos ecuaciones lineales e inecuaciones lineales sobre los diferentes conjuntos numéricos

Modelar problemas sencillos que conduzcan a ecuaciones lineales o no, sistemas de dos ecuaciones lineales, inecuaciones lineales y a funciones elementales.

Resolver ecuaciones e inecuaciones sencillas que contienen valor absoluto.

**Identificar y resolver ecuaciones cuadráticas o reducibles a cuadráticas.**

	14	Funciones inversas.	Clase	PPT
Sem	15	Funciones polinomiales y sus gráficas.	Clase	PPT
an	7	Actividad	Recursos	Recursos
	16	Contenido	actividad	didácticos
1	1	Determinación de raíces racionales de polinomios. Aproximación de raíces reales de polinomios.	Clase	PPT
	2	Elementos de Lógica	Clase	PPT
	3	Funciones racionales.	Clase	PPT
	4	Elementos de teoría de conjuntos	Clase	PPT
	5	Fraciones parciales.	Clase	PPT
2	6	Funciones exponenciales.	Clase	PPT +
	7	Ecuaciones lineales y cuadráticas	Clase	PPT
	8			<b>Video</b>
	9	Ecuaciones reducibles a cuadráticas y lineales	Clase	PPT
3	10	Inecuaciones Lineales, cuadráticas y racionales	Clase	PPT
	11	Valor absoluto en ecuaciones y desigualdades.	Clase	PPT
4	12	Ejercitación de los contenidos de 1 a 7	Clase de Ejercitación	
	13	Herramientas básicas para la graficación. El círculo.	Clase	PPT
	14	La línea recta en el plano.	Clase	PPT
5	15	Funciones. Definiciones relacionadas con el concepto de función: $y = mx + n$ , $y = ax^2 + bx + c$ , $y = x^3$ , $y =  x $ , $y = \sqrt{x}$	Clase	PPT + <b>Video</b>
	16	Gráfica de funciones. Incluyendo funciones por tramos	Clase	PPT
6	17	Combinación de funciones.	Clase	PPT

	20	Funciones logarítmicas.	Clase	PPT
	21	Ecuaciones exponenciales y logarítmicas.	Clase	PPT
	22	Ejercitación de los contenidos de 1 a 21	Clase de Ejerci tación	

	23	PRUEBA PARCIAL No. 1.	Evaluación	
	24	Relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo. Funciones trigonométricas ( $\text{sen}(x), \text{cos}(x), \text{tan}(x), \text{cot}(x)$ )	Clase	PPT + <b>Video</b>
	25	Funciones trigonométricas inversas.	Clase	PPT
	26	Funciones trigonométricas y resolución de triángulos rectángulos.	Clase	PPT
	27	Identidades trigonométricas básicas.	Clase	PPT
	28	Identidades trigonométricas especializadas.	Clase	PPT
	29	Ecuaciones trigonométricas.	Clase	PPT
	30	Ejercitación de los contenidos de 24 a 29	Clase de Ejercitación	
	31	Vectores geométricos en el plano y el espacio	Clase	PPT
	32	Coordenadas Polares	Clase	PPT
	33	Secciones cónicas. La Parábola. Traslación de ejes.	Clase	PPT + <b>Video</b>
	34	La Elipse Traslación de ejes.	Clase	PPT
	35	La Hipérbola. Traslación de ejes.	Clase	PPT
	36	Ecuaciones paramétricas.	Clase	PPT
	37	Ejercitación de los contenidos de 31 a 36	Clase de Ejercitación	
	38	Ejercitación de los contenidos de 24 a 36	Clase de Ejercitación	
	39	Ejercitación de los contenidos de 24 a 36	Clase de Ejercitación	
	40	PRUEBA PARCIAL No. 2	Evaluación	

Escribir las ecuaciones de una línea recta y circunferencia, conociendo la información necesaria. Representar gráficamente.

Interpretar el concepto de función en forma general y sus variantes concretas. Reconocer la existencia de una función.

**Describir el concepto de función inversa.**

Hallar la inversa de una función, si existe. Obtener la gráfica de una función a partir de la de su inversa.

Identificar, enunciar las propiedades fundamentales y graficar las funciones: polinomiales, racionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y trigonométricas inversas. Realizar transformaciones sencillas en sus gráficos.

Reconocer las ventajas que brindan los sistemas de coordenadas cartesiano y polar (aspectos comunes y diferencias)

Representar gráficamente y discutir las principales propiedades de las secciones cónicas. La Parábola, la elipse y la hipérbola.

**IV.- TEXTOS BÁSICOS**

**Título:** Precálculo, funciones y gráficas. Autor(es): Barnett, Ziegler y Byleen.

**Editorial:** Mc.Graw-Hill. Año de edición: 2000.

**Cantidad de páginas:** Volumen 1: páginas 1 a 503.

**Volumen 2:** Capítulo 7 (páginas 505 a 579), Capítulo 11 (páginas 777 a 835) y Apéndices: A-1 al A-3.

**V.- INDICACIONES METODOLÓGICAS Y DE ORGANIZACIÓN**

Para el desarrollo de este programa se recomienda la planificación calendaria que se muestra en la página siguiente. Una característica importante es el volumen de ejercitación sobre los contenidos que

se estudian, para evitar que la cantidad de información tienda a limitar su comprensión y el desarrollo de las habilidades previstas.

Para la elaboración de estas orientaciones nos hemos apoyado en el material “Matemática Básica” elaborado por Dr. Ing. Manuel Álvarez Blanco y que se ha utilizado durante el primer semestre del curso 2002-2003 en los planes de Ingeniería Informática, el cual es de aproximadamente 300 páginas y brinda una detallada orientación de las clases temáticas, con valiosas e inestimables indicaciones.

Examen final escrito de una duración máxima de 4 horas

### **Programa de la asignatura: MATEMÁTICA I**

**Horas totales:** 96 horas (70 horas) **Año académico:** Primer año **Semestre:** Segundo

**Título:** Cálculo con Geometría Analítica **Autor(es):** Swokowski, Earl W

**Editorial:** Grupo Editorial Iberoamérica **Año de edición:** 1989

**Cantidad de páginas:** Tomos I y II: páginas 51 a 678 y Apéndices: II, III y IV, (páginas 1027 a 1097).

#### **OBJETIVOS GENERALES DE LA ASIGNATURA. Objetivos generales educativos.**

Contribuir a ampliar la madurez matemática y la capacidad de trabajo con la abstracción en los estudiantes que inician estudios de Ingeniería.

#### **OBJETIVOS GENERALES INSTRUCTIVOS.**

Identificar, caracterizar las propiedades básicas y resolver: ecuaciones lineales y cuadráticas, sistemas de ecuaciones y desigualdades, así como modelar problemas prácticos sencillos utilizando tales conceptos.

**CONTENIDO. Sistema de conocimientos.**

<b>Tema</b>	<b>Cantidad de horas como Empleo</b>	<b>Cantidad de horas En activo</b>
Tema 1	8 horas	8 horas
Tema 2	12 horas	12 horas
Tema 3	10 horas	8 horas
Tema 4	12 horas	10 horas
Tema 5	12 horas	10 horas
Tema 6	8 horas	6 horas
Tema 7	18 horas	10 horas
Tema 8	8 horas	6 horas
Pruebas parciales	8 horas	
Total general	96 horas	70 horas

Introducción al Cálculo. Límite y continuidad de funciones racionales de una variable real. Definición de derivada e interpretación geométrica. Reglas de derivación básicas. La derivada como razón de cambio. Incrementos y diferenciales. Regla de la cadena. Derivación implícita. Potencias y derivadas de orden superior. Método de Newton. Máximos y mínimos locales de funciones de una variable real. Teoremas de Rolle y del Valor Medio. Criterio de la primera derivada. Concavidad y criterio de la segunda derivada. Aplicaciones de los máximos y mínimos. Límites al infinito y límites infinitos. Anti derivadas. El problema de la determinación del área. La integral definida. Propiedades de la integral definida. Teorema fundamental del Cálculo. Integral definida y cambio de variable. Integración numérica. Aplicaciones de la integral definida. Función inversa. Funciones exponencial y logarítmica: su derivación e integración. Funciones trigonométricas directas e inversas: su derivación e integración. Funciones hiperbólicas directas e inversas: su derivación e integración. Métodos de integración. Formas indeterminadas. Integrales impropias. Fórmula de Taylor. Curva plana. Rectas tangentes y longitud de arco. Coordenadas polares e integrales en coordenadas polares.

Total de horas por tema:

## P-1 MATEMÁTICA II

Encuentro	Duración	Contenidos
1	3 horas	Función real de varias variables. Dominio e imagen. Límite y continuidad de funciones de varias variables .Ejercicios. Uso del video
2	3 horas	Derivadas parciales. Interpretación geométrica. Derivadas de orden superior .derivadas de funciones compuestas, ejercitación.
3	3 horas	Ejercitación encuentro 1,2 y3 Prueba parcial 1
4	3 horas	Diferencial total. Aplicaciones .Ejercitación
5	3 horas	Derivadas de funciones implícitas .Derivada Dirigida, Gradiente. Ejercitación
6	3 horas	Extremos locales y globales de funciones de varias variables .Ejercitación
7	3 horas	Extremos condicionados .multiplicadores de La Grange. Problemas de optimización.
8	4 horas	Ejercitación de los encuentros del 4 al 7.prueba parcial 2
9	3 horas	Vectores en $R^n$ .rectas y planos .Uso del video. Función vectorial. Curvas en el espacio.
10	3 horas	Limite, continuidad y derivadas de funciones vectoriales .Interpretación física. ejercitación
11	4 horas	.Integrales dobles. Coordenadas polares y aplicaciones
12	3 horas	Superficies cuádricas y representación de sólidos.
13	3 horas	Integrales triples Definición y propiedades. Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas aplicaciones .Ejercitación.
14	3 horas	Integrales de línea. Teorema de Green.

		Aplicaciones. Ejercitación.
15	3 horas	Integrales de superficie. Teorema de la divergencia y teorema de Stoke .Aplicaciones. Ejercitación
16	3 horas	Ejercitación sobre integrales de línea y de superficie .Prueba parcial 3

### **Tipo de Actividad- Encuentro**

- Bibliografía
- Cálculo con Geometría Analítica. Swokowski. Earl W
- Integrales múltiples

### **Sistema de Evaluación**

- Prueba Parcial # 1. Funciones reales de varias variables. Derivadas Parciales
- Prueba Parcial # 2. Diferencial total. Función implícita y extremos de funciones de varias variables

### **Anexo5**

#### **Tipos de medios y materiales de enseñanza**

<b>Tipos de medios y materiales</b>	<b>Modalidad simbólica medios y materiales incluidos</b>	<b>Modalidad simbólica medios y materiales incluidos</b>
Medios manipulativos	Estos medios serían el conjunto de recursos y materiales que se caracterizarían por ofrecer a los sujetos un modo de representación del conocimiento de naturaleza inactiva. Es decir,	<i>Objetos y recursos reales</i>  · Los materiales del entorno (minerales, animales, plantas, etc.)

	<p>la modalidad de experiencia de aprendizaje que posibilitan estos medios es contingente. Para ser pedagógicamente útil la misma debe desarrollarse intencionalmente bajo un contexto de enseñanza.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>. Materiales para la psicomotricidad (aros, pelotas, cuerdas,)</li> <li>. Materiales de deshecho <i>Medios manipulativos simbólicos</i> los bloques lógicos, regletas, figuras geométricas y demás material lógico-matemático,</li> <li>. Los juegos y juguetes</li> </ul>
<p>Medios textuales o impresos</p>	<p>Esta categoría incluye todos los recursos que emplea principalmente los códigos verbales como sistema simbólico predominante</p> <p>En su mayor parte son los materiales que están producidos por algún tipo de mecanismo de impresión.</p>	<p><i>Material orientado al profesor:</i> Guías del profesor o didácticas;; otros materiales de apoyo curricular</p> <p><i>Material orientado al alumno:</i> Libros de texto; .Material de lecto-escritura; el cartel, comic.</p> <p>Otros materiales textuales</p>
<p>Medios audiovisuales</p>	<p>Son todo ese conjunto de recursos que predominantemente codifican sus mensajes a través de representaciones icónicas. La imagen es la principal modalidad simbólica a través de la cual presentan el</p>	<p><i>Medios de imagen fija:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>. Retroproyector de transparencias</li> <li>. Proyector de diapositivas</li> </ul>

	conocimiento.	<ul style="list-style-type: none"> <li>. Episcopio</li> </ul> <p><i>Medios de imagen en movimiento:</i> el proyector de películas, televisión, vídeo</p>
Medios auditivos	Emplean el sonido como la modalidad de codificación predominante. La música, la palabra oral, los sonidos reales, representan los códigos más habituales de estos medios.	<ul style="list-style-type: none"> <li>. El cassette</li> <li>. El tocadiscos</li> <li>. La radio</li> </ul>
Medios informáticos	Se caracterizan porque posibilitan desarrollar, utilizar y combinar indistintamente cualquier modalidad de codificación simbólica de la información.	<ul style="list-style-type: none"> <li>. Ordenador</li> <li>. CD-ROM</li> <li>. Telemática</li> <li>. CD-I</li> </ul>

## Anexo 6

¿Qué es la guía de estudio?

En correspondencia con lo anterior, **la guía de estudio es un material didáctico importante que orienta y facilita el aprendizaje de los estudiantes que desarrollan sus estudios en la modalidad semipresencial**, reforzando la actividad del profesor en las condiciones de menor tiempo de contacto con el alumno que caracteriza a esta modalidad.

Para garantizar que la guía de estudio sea asequible a los estudiantes en los diferentes escenarios donde pueda realizar el estudio individual, debe estar en formato impreso, aunque en los casos que los recursos tecnológicos disponibles lo posibiliten, debe existir además en formato digital, acompañando en la orientación del aprendizaje, a los otros materiales didácticos contenidos en los soportes de CD, DVD o en la plataforma de tele formación.

**Entre las principales funciones que debe jugar la guía de estudio están las siguientes:**

- Contiene indicaciones sobre cómo abordar la bibliografía básica y los otros materiales de estudio, así como, sobre la forma de relacionar las distintas fuentes de información, por lo que ejerce una función articuladora del sistema de medios de enseñanza.
- Debe contribuir a orientar el aprendizaje de los estudiantes, desarrollar la capacidad de aprender, enseñar al alumno a pensar, a orientarse independientemente, despertar su creatividad y a desenvolverse en el aprendizaje colaborativo, lo que la convierte en un medio fundamental de comunicación pedagógica entre los profesores y los estudiantes. Tal condición exige un cuidadoso diseño y elaboración.
- Es importante que propicie la formación integral del estudiante, el fortalecimiento de sus valores, su educación patriótica y humanista, su desarrollo como activista de nuestra Revolución socialista, así como la orientación profesional de los estudios que realiza.
- Entre sus funciones figuran también, estimular el proceso de aprendizaje suscitando motivaciones que animen a emprender el esfuerzo y a renovarlo en cada etapa, permitir que en el educando se despierte el espíritu de búsqueda e indagación, así como facilitar el autocontrol del proceso por el estudiante posibilitando la retroalimentación y la autoevaluación.
- Debe responder en su organización a los distintos momentos del proceso de aprendizaje que tiene que realizar el estudiante para favorecer el estudio independiente, por lo que facilita de forma concreta, tema a tema, dicho proceso.

- La guía de estudio debe tener en cuenta el amplio acceso de la matrícula, la diversidad de las fuentes de ingreso, los diferentes escenarios educativos que caracterizan a la modalidad semipresencial y ofrecer la posibilidad de que el alumno marche a su propio ritmo.

¿Qué elementos tener en cuenta para la elaboración de la guía?

1. **El plan de estudio de la carrera o del programa de postgrado.** Ayuda al profesor a ubicar la asignatura o curso dentro del plan de estudio de la carrera o del programa de postgrado según sea el caso y a establecer las relaciones interdisciplinarias que debe contemplar en la elaboración de la guía de estudio.

2. **El programa de la asignatura o curso,** documento rector para que el autor estructure y desarrolle el contenido de la guía de estudio. En el mismo aparecen los objetivos, las habilidades y los valores que se necesitan desarrollar, lo que resulta imprescindible para la elaboración de la guía de estudio.

3. **Las fuentes de información básica y en particular el libro texto en el caso de los estudios de pregrado,** pues de su calidad didáctica y actualización dependerá el tratamiento de los contenidos en la propia guía de estudio, y la cantidad de materiales complementarios que se orienten consultar al estudiante.

4. **Tener una clara concepción del resto de los medios didácticos y materiales complementarios,** para que la guía de estudio juegue el papel articulador que le corresponde en el sistema de medios de enseñanza.

5. **El nivel y grado de madurez del alumnado,** así como su capacidad de comprensión lógica y conocimientos previos, necesario para poder modelar el proceso de aprendizaje.

6. **La estimulación del estudiante** para que realice las actividades que lo llevarán a la consecución de los objetivos.

7. **La motivación del autor para escribir la guía,** modelando el aprendizaje paso a paso.

8. **Las vías mediante las cuales organizará la comprobación del aprendizaje** de forma continúa por parte del estudiante.

Otro material lo constituye la guía formativa.

### **¿Qué es la guía formativa?**

Cuando hablamos de una guía formativa para el proceso de formación del profesional en las sedes universitarias, nos estamos refiriendo a **una elaboración didáctica del profesor que centrada en los objetivos como transferencia didáctica del problema profesional y el diagnóstico de los alumnos sea contentiva de la base orientadora para la realización del proceso de acciones y operaciones de las tareas para el trabajo independiente que debe realizar el alumno mediante su autoaprendizaje y el trabajo con el tutor en la sede para alcanzar los objetivos formativos propuestos.**

Algunas de las características de la guía formativa.

- Debe ser potenciadora del autoaprendizaje del alumno como forma de organización del espacio semipresencial que se gesta en la sede universitaria aprovechando a plenitud las potencialidades que ofrece ésta y los recursos y fuentes de las nuevas tecnologías y la informática que ha puesto a su haber los programas de la revolución educacional.
- Potenciar la integración de la unidad de lo instructivo, lo educativo y lo desarrollador en la formación profesional del alumno dado que la guía es formativa y no solo instructiva, ellas deben contribuir a la formación de un profesional revolucionario, con una cultura general que le permita en el futuro contribuir al desarrollo científico técnico de la sociedad.

## Anexo 7

### Encuesta a profesores y estudiantes.

**Encuesta realizada a estudiantes y profesores.**

**Encuesta a estudiantes de la tarea Álvaro Reinoso del primer año de las carreras de Ingeniería Industrial y Agronomía.**

Como parte de una investigación acerca de las incidencias del trabajo con variable en la Matemática Básica recibida durante el primer año de tu carrera necesitamos de tu colaboración para el logro de un resultado eficiente de este proceso.

Gracias.

1. ¿Cómo evalúas tus resultados en el aprendizaje de la Matemática Básica?

B\_\_\_\_\_ R\_\_\_\_\_ M\_\_\_\_\_.

2. De los contenidos recibidos en Matemática Básica marque con una cruz en los que tuviste dificultades:

\_\_\_\_ Sistemas de ecuaciones lineales.

\_\_\_\_ Desigualdades polinomiales y racionales.

\_\_\_\_ Ecuaciones lineales y cuadráticas.

\_\_\_\_ Ecuaciones reducibles a la forma cuadrática.

\_\_\_\_ Funciones polinomiales, racionales exponenciales y logarítmicas. Operaciones, análisis de las propiedades. Determinación de raíces racionales de polinomios. Gráficos.

\_\_\_\_ Descomposición de funciones racionales en fracciones parciales.

\_\_\_\_ Ecuaciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

\_\_\_Números complejos. Definición. Operaciones.

3. De los elementos del Álgebra que te ofrecemos a continuación cuales consideras que son los que con más fuerza inciden en el aprendizaje de los contenidos anteriores.

\_\_\_Teoría de conjuntos.

\_\_\_Relaciones y estructuras.

\_\_\_Dominios numéricos.

\_\_\_Potenciación, radicación, y logaritmación.

\_\_\_Operaciones con expresiones algebraicas.

\_\_\_Descomposición factorial.

\_\_\_Ecuaciones.

\_\_\_ Gráficos y propiedades.

\_\_\_ Sistemas de Ecuaciones.

4. ¿Qué medios utilizaste para el estudio independiente?
5. Consideras que es importante la utilización de un sistema de medios que contribuya a la autopreparación del trabajo con variable. Argumenta tu respuesta

## **Encuesta a profesores que imparten o han impartido la Matemática Básica.**

Estimado colega,

Necesitamos de su colaboración para nuestro trabajo en torno a la preparación de los estudiantes en los elementos del Álgebra para su utilización en el aprendizaje de la Matemática Básica en función de podemos nutrir para establecer estrategias pedagógicas para la elaboración de un sistema de medios integrados que sirvan de apoyo al proceso de enseñanza aprendizaje de diversos temas de la Matemática.

Gracias por su ayuda.

Municipio: \_\_\_\_\_

En las tres primeras preguntas valora el grado de dificultad encontrado referente a cada aspecto con los siguientes valores

**1** -Ninguno. **2** –Muy poco. **3** –Poco. **4** Mucho.

1. Los contenido(s) matemático(s) del Álgebra con dificultades en el aprendizaje de los estudiantes.
  - ( ) Propiedades de la inclusión y de la igualdad en la Teoría de Conjuntos..
  - ( ) En el sistema de Numeración de los Reales. Operaciones.
  - ( ) Calculo del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo.
  - ( ) Multiplicación, división de monomios y polinomios.
  - ( ) Suma y Resta de monomios y polinomios.
  - ( ) Regla para la factorización de un binomio, trinomio y polinomio.
  - ( ) Simplificación de expresiones algebraicas.

Propiedades de los logaritmos.

Propiedades de la potenciación.

Racionalización.

Radicales semejantes.

Ecuaciones

Inecuaciones.

Sistemas de ecuaciones.

2. Dificultades por usted encontrada para enseñar matemática en cuanto al nivel de actuación.

Falta de preparación psicológica en los estudiantes.

Falta de base educacional (aprendizaje) de los estudiantes.

Desinterés en los estudiantes.

Poca preparación por parte de Ud. como profesor.

Falta de materiales o bibliografías para el estudio independiente.

Insuficientes habilidades para el razonamiento lógico.

Métodos inadecuados de estudio y falta de estudio.

Otros.

3. Contenidos de la Matemática Básica donde sus estudiantes presentaron dificultades.

Ecuaciones lineales y cuadráticas.

Sistemas de ecuaciones lineales.

- ( ) Desigualdades lineales.
  - ( ) Operaciones con números Complejos.
  - ( ) Ecuaciones con radicales o ecuaciones reducibles a cuadráticas.
  - ( ) Desigualdades polinomiales y desigualdades racionales.
  - ( ) Determinación de raíces racionales de polinomios.
  - ( ) Descomposición de funciones racionales en fracciones parciales.
  - ( ) Ecuaciones exponenciales.
  - ( ) Ecuaciones logarítmicas.
  - ( ) Ecuaciones trigonométricas.
4. En su opinión cuales son las causas de las dificultades en el aprendizaje en sus estudiantes de Primer Año de Ingeniería en las Sede Universitaria de su Municipio.
- ¿Qué solución sugiere para tal problemática en el caso que la considere?

## **Anexo 8**

### **Entrevista individual semiestructurada a estudiantes de Ingeniería Industrial y Agropecuaria**

#### **Entrevista individual semiestructurada a profesores**

1. ¿En qué contenidos de la Matemática Básica presentan mayores dificultades sus estudiantes?
2. Conocimiento real de la preparación que tienen alumnos y profesores para el estudio de las ecuaciones en la Matemática Básica
3. Necesidades de conocimientos pedagógicos y didácticos para resolver las dificultades que se le presentan en el proceso docente educativo

### **Entrevista individual semiestructurada a estudiantes de Ingeniería Industrial y Agropecuaria**

1. Cuáles son los contenidos del Álgebra que en la Matemática Básica te han resultado de mayor complejidad?
2. Que ha incidido en que tengas dificultades con la comprensión de las ecuaciones en la Matemática Básica?
3. Manifiesta tu opinión o consideraciones sobre las posibilidades que te pueden ofrecer un sistema de varios medios para el estudio de las ecuaciones de la Matemática Básica

## Anexo 9

### Ejercicios evaluados en pruebas de diagnóstico.

1. Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas por el método más apropiado.

a.  $x^2 - 5x = -6$

b.  $x^2 + 6x = 0$

c.  $25x^2 + 16 = 0$

d.  $x^2 - 5x = -3$

2. Hallar el conjunto solución de la ecuación irracional:

$$\sqrt{5x-1} - 3\sqrt{x} = -1$$

3. Resolver las ecuaciones que especifican:

**a)**  $\sqrt{2x+5} - \sqrt{x-3} = 2$

**b)**  $\frac{5x+2}{7x-1} = \frac{3x}{x-4}$

4. Resolver:

**a)**  $\log_2 x + \log_2(x-4) = 5 + \log_2(x-7)$

**b)**  $\sqrt{6-x} + \sqrt{x+7} - \sqrt{12x+1} = 0$

**c)**  $\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10$

**d)**  $\sqrt{x} + \sqrt{x+8} = 2\sqrt{x}$

**e)**  $\log_4(\log_2(\log_3(2x-1))) = \frac{1}{2}$

**f)**  $\log_{\frac{1}{5}}(\log_5 \sqrt{5x}) = 0$

**Anexo 10**

**Pruebas de Matemática Básica en cursos del periodo que se**

Examen de Matemática Básica. Curso 2006-2007

Tarea Álvaro Reynoso. Especialidad Ingeniería Industrial y Agronomía

Nombre: \_\_\_\_\_

Seed: \_\_\_\_\_ Calificación: \_\_\_\_\_

I) Dos fábricas deben producir uniformes escolares y entre ambas deben hacer 240. La sexta parte de la producción de la primera de ellas excede en 20 a la cuarta parte de la producción de la segunda. ¿Cuántos uniformes escolares produjo cada fábrica?

II) Efectuar  $\frac{4-2i}{1-3i} + (6 + \frac{4}{3}i)(3-5i)$

III) Resolver la desigualdad  $\frac{x^3 - x^2 + 3x - 3}{x^2 + x - 20} > 0$

IV) Descomponer en fracciones parciales

$$g(x) = \frac{x^2 + 3x}{x^3 - 2x^2 - 24x}$$

V) Dadas las ecuaciones  $x^2 + y^2 - 4y - 8 = 0$  ;  
 $2x - 4y - 3 = 0$

- a) Determine el centro y el radio de la circunferencia.
- b) Represente gráficamente cada ecuación.

Examen de Matemática Básica. Curso 2006-2007  
Tarea Álvaro Reynoso. Especialidad Ingeniería Industrial y Agronomía

Nombre: \_\_\_\_\_

Sede: \_\_\_\_\_ Calificación: \_\_\_\_\_

I) Efectuar  $(2 + 3i)(4 - \frac{5}{2}i) + \frac{2 - 3i}{4 - 2i}$

II) Diga para qué valores de  $x$  está definida la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 4x + 4}{2x^2 + 5x + 2}}$$

III) Resolver la desigualdad  $\frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 7x + 12} \leq 0$

IV) Descomponer en fracciones parciales

$$g(x) = \frac{x^2 + x}{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}$$

V) Dadas las ecuaciones  $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 16$  ;  
 $x - y + 1 = 0$

a) Represente gráficamente cada ecuación.

b) Obtenga la ecuación de otra recta que pasa por el centro de la circunferencia y sea perpendicular a la recta dada.

## Anexo 11

### Resultados docentes según las actas de exámenes finales de Ingeniería Agropecuaria y de Procesos Agroindustriales en los últimos 4 cursos escolares.

#### **Carrera Ingeniería Agropecuaria**

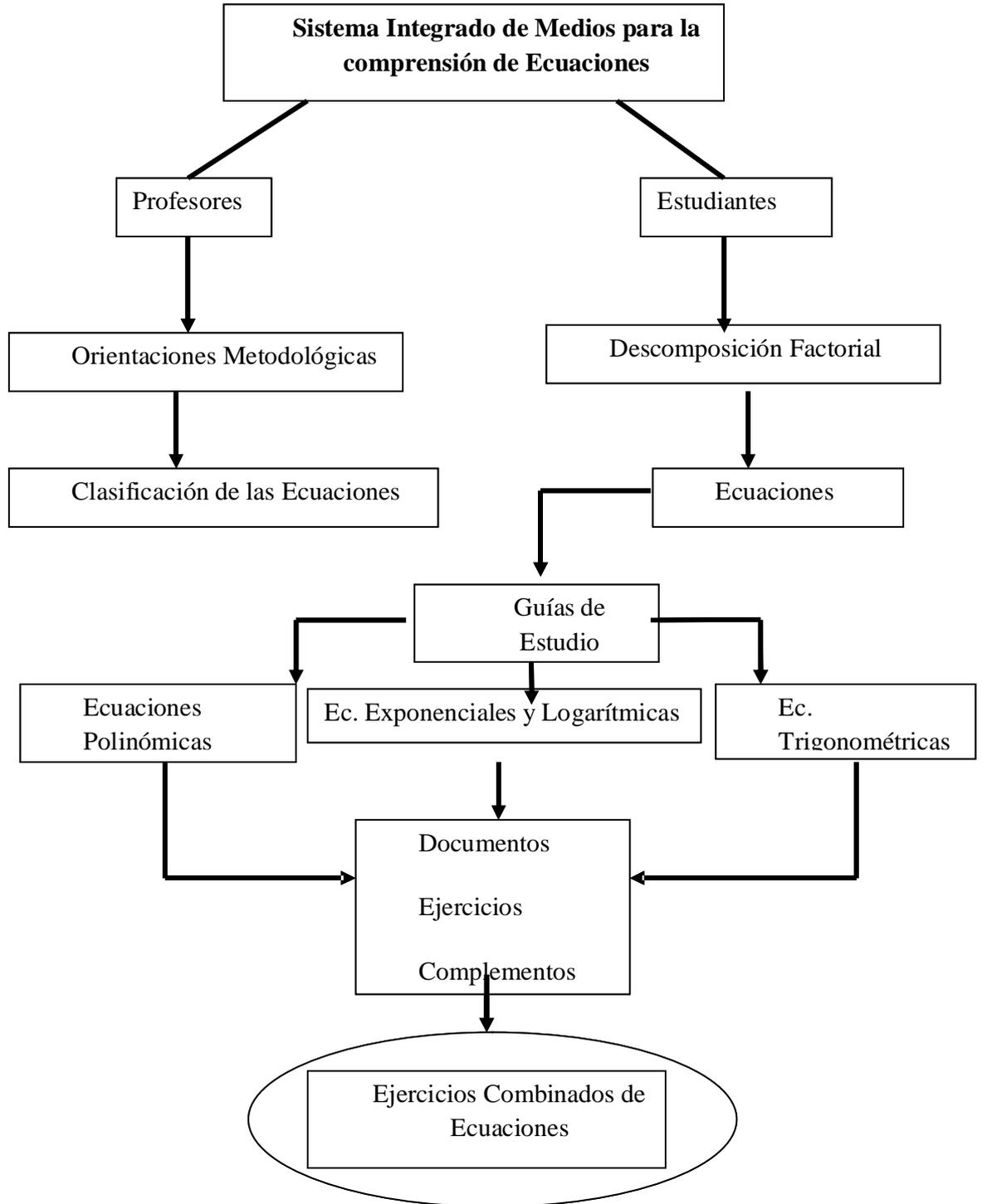
	<b>2004-05</b>	<b>2005-06</b>	<b>2006-07</b>	<b>2007-08</b>
<b>Matrícula</b>	21	31	27	19
<b>Presentados</b>	14	13	12	14
<b>Aprobados</b>	12	10	9	4
<b>%</b>	57,1	32,3	37,3	21,1

#### **Carrera de Procesos Agroindustriales**

	<b>2004-05</b>	<b>2005-06</b>	<b>2006-07</b>	<b>2007-08</b>
<b>Matrícula</b>	24	33	39	10
<b>Presentados</b>	15	21	26	7
<b>Aprobados</b>	14	18	21	4
<b>%</b>	58,3	54,5	53,8	40

**Anexo 12**

**Esquema del sistema integrado de medios:**



## **BIBLIOGRAFÍAS.**

Baldor, D, A, (1944) Algebra Elemental con gráficos y 6523 ejercicios y problemas.Habana. Cuba. Editorial Cultural, S, A

BALDOR, A.:Algebra elemental, 16 ed., Imprenta Nacional de Cuba, La Habana.

Ballester Pedroso, Sergio y coautores: Metodología de la enseñanza de la Matemática Tomo I. Editorial Pueblo y Educación. La Habana, 1992.

Ballester Pedroso, Sergio y coautores: El transcurso de las líneas directrices en los programas de Matemática y la planificación de la enseñanza. Editorial Pueblo y Educación, La Habana, 2002.

Barnett, R. A. Ziegler, M .R. y Byleen, K. E. (2003) PRECÁLCULO Funciones y gráficas Vol. I, primera, segunda y tercera parte. Ed. Félix Varela C. de la Habana Cuba.

CAMPISTROUS P. L. ET. AL: Matemática 10mo grado, Ed. Pueblo y Educación,  
338 pp., Ciudad de La Habana., 1989.

-----: Matemática 11no grado, Ed. Pueblo y Educación, 416 pp., Ciudad de La Habana, 1990.

-----: Matemática 12do grado, Ed. Pueblo y Educación, (Partes I y II), Ciudad de La Habana, 1991.

Campistrous Pérez, L. Cuadrado González, Z. Rivero Álvarez, H. Naredo Castellanos, R. Durán Jorrín, A. Palacios Peña, J. y Cabrera Rizo, C (2002) Matemática Onceno grado La Habana Cuba. Editorial Pueblo y Educación.

Campistrous Pérez, L. Miyar Echemendía, O. Naredo Castellanos, R. Rivero Álvarez, H. Montes de Oca Méndez, E. y Durán Jorrín, A (2003) Matemática Décimo grado La Habana Cuba. Editorial Pueblo y Educación

Campistrous Pérez, L. Rivero Álvarez, H. Durán Jorrín, A y Sandoval Torres, A (2003) Matemática Duodécimo grado Parte 1La Habana Cuba. Editorial Pueblo y Educación

Castro Ruz, Fidel: “Discurso pronunciado el 16 de Septiembre del 2002 en la inauguración del curso escolar 2002-2003 en la Plaza de la Revolución”. Tomado de la página digital del periódico Granma, en la sección “Discursos de Fidel”.

Colectivo de autores (1984). "Pedagogía". Ed. Pueblo y Educación. La Habana.

Colectivo de autores: Colección Futuro. Software educativo "Eureka".

Colectivo de autores: Colección Futuro. Software educativo "Pedagogía a tu alcance".

Colectivo de autores. S/A. Enciclopedia Autodidáctica Interactiva Océano. Tomo 3. Océano grupo editorial. Barcelona. España

Cuadrado González, Z. Laredo Castellanos, R. y Cabrera Rizo, C (2003) Matemática Duodécimo grado Parte 2 La Habana Cuba. Editorial Pueblo y Educación.

Dirección de Informatización-MES. 2006. Centro Virtual de Recursos libres en la Red Nacional del MES. Ciudad de La Habana, <http://peri.mes.edu.cu/cvr/>

GONZALEZ M. O.: Álgebra elemental moderna, en M. O. González y J. D. Mancill, ed. 5. 2t, Ed. Pedagógica, 1967.

GUNTER p. ET. Al.: Conferencia sobre metodología de la enseñanza de la Matemática 3, 302 pp. , Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1982.

JUNGK, W.: Conferencias sobre metodología de la enseñanza de la Matemática 1 ,199 pp. , Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1979.

LITVINENKO, V.: Prácticas para resolver problemas matemáticos: Algebra y Trigonometría, 316 pp. En V. Litvinenko, A. Mordkovich, Ed. Mir, Moscú, 1989.

MUÑOZ B. F.: Problemas de Matemática elemental: 10 y 11 grados, 178 pp. , En F. Muñoz y L. Campistrous, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1964.

MUÑOZ B. F. ET. Al: Matemática 7mo grado, 206 pp. Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1989.

-----: Matemática 8vo grado, 213 pp. Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1989

-----: Matemática 9no. Grado, 286 pp., Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1989.

Ministerio de Educación. 2000: Seminario nacional para el personal docente. En impresión ligera. Editorial pueblo y educación. Ciudad de La Habana.

Ministerio de Educación. 2001: Seminario nacional para educadores. En impresión ligera. Editorial pueblo y educación. Ciudad de La Habana.

Ministerio de Educación. 2002: III Seminario nacional para educadores. En impresión ligera. Editorial pueblo y educación. Ciudad de La Habana.

Ministerio de Educación. 2004: V Seminario nacional para el personal docente. En impresión ligera. Editorial pueblo y educación. Ciudad de La Habana.

Ministerio de Educación. 2004: Programa de Matemática 10<sup>mo</sup> grado. En impresión ligera. Ciudad de La Habana.

Ministerio de Educación. 2005: Prioridades para el curso escolar 2005-2006. Editorial pueblo y educación. Ciudad de La Habana.

## **Referencias Bibliográficas.**

Addine Fernández, Fátima. 2004: Didáctica: Teoría y práctica. “El PEA: Un reto para el cambio educativo. Editorial pueblo y educación. Ciudad de La Habana.

Álvarez, C. (1999) *La escuela en la vida*, Ciudad de La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación

Álvarez Pérez Marta y coautores: Cuba Interdisciplinaria: “Una aproximación desde la enseñanza aprendizaje de las ciencias. Editorial Pueblo y Educación. La Habana, 2004.

Ander-Egg, Ezequiel. 1991: El taller, una alternativa para la renovación pedagógica. Edición Argentina

Babanski, Yu. K. 1982: Optimización del proceso de enseñanza. Editorial pueblo y educación. Ciudad de La Habana.

Benítez-Cárdenas, Francisco y Estrada-Sentí, Vivian 2005. La gestión del conocimiento en la nueva universidad cubana. *Pedagogía Universitaria* 11 (2).

Cabero J. y cols (1997). La piedra angular para la incorporación de los medios audiovisuales, informáticos y nuevas tecnologías en los contextos educativos: la formación y el perfeccionamiento del profesorado. *EDUTEC. Revista electrónica de Tecnología Educativa*. Núm. 8. noviembre 1997

Castellanos, D. y cols (2001). *Hacia una concepción del aprendizaje desarrollador*. Colección Proyectos. ISPEJV, La Habana, 2001.

Cabrera-Ramos, Juan Francisco, Ariane Alvarez-Alvarez., Osmel Lorenzo-Morera., y Elsa Herrero-Tunis. 2006. Manual instructivo para el uso del Centro Virtual de Recursos: Soporte de las Comunidades Virtuales de la Educación Superior Cubana. Ciudad de La Habana: Centro de Referencia para la Educación Superior de Avanzada (CREA), <http://revistas.mes.edu.cu/CeVRA/Members/SuperAdministrador/crea-manual-cvr.pdf/view>.

Castellanos Simons, Doris y otros. 2001: Hacia una concepción del aprendizaje desarrollador. Centro de Estudios Educativos. En impresión ligera. ISP “Enrique José Varona”. Ciudad de La Habana.

Castro Ruz, Fidel. 2005: La educación constituye un reto invencible. Recopilación de discursos sobre la educación del 2001 al 2003. Oficina de publicaciones del Consejo de Estado de la República de Cuba. Ciudad de La Habana.

Casañas Díaz, Mirta. 2005: El cambio educativo: un reto de las políticas nacionales ante el nuevo milenio. Ediciones imprenta universitaria de la Universidad Bolivariana de Venezuela. Venezuela.

Chevallard, Y. Bosh, M. y Gascón, J. (1997): Estudiar matemáticas: *El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona, España: Editorial Horsori .Coll, C. (1997). *Aprendizaje escolar y construcción del conocimiento*. México D.F., México: Editorial Paidós.

Colectivo de autores. S/A. Enciclopedia Autodidáctica Interactiva Océano. Tomo 3. Océano grupo editorial. Barcelona. España

Córdova Llorca, María D. 2002: Aprendizaje creativo. En impresión ligera. Centro de Estudios Educativos. ISP "Enrique José Varona". Ciudad de La Habana.

Crespo Borges, Tomás P. y otros. 2004: Rendición de cuentas" La aplicación de las NTIC a la enseñanza de la matemática". En impresión ligera. Departamento Ciencias Exactas. ISP "Félix Varela. Villa Clara.

.Delgado Rubí, Juan R. 2003: La enseñanza de la matemática en el umbral del siglo XXI. En impresión ligera. Grupo BETA de investigación en educación matemática. Instituto Superior Politécnico "José A. Echeverría". Ciudad de La Habana.

Dirección de Tecnología Educativa-MES. (2006). Manual para la elaboración de la guía de estudio de la asignatura de la modalidad semipresencial de la Educación Superior cubana (versión 7.0). Ciudad de La Habana, Cuba.  
[http://revistas.mes.edu.cu/infopedagogia/Members/mercedes\\_gonzalez/manual-de-la-guia-de-estudio-version-7-de-noviembre-doc.doc/view](http://revistas.mes.edu.cu/infopedagogia/Members/mercedes_gonzalez/manual-de-la-guia-de-estudio-version-7-de-noviembre-doc.doc/view)

Fernández Gutiérrez, Manuel J. 2003: Ventajas e inconvenientes (luces y sombras) de la utilización del ordenador en la enseñanza-aprendizaje de la Matemática: programa Derive. En impresión ligera. Departamento de Matemática. Universidad de Oviedo. España.

Font, V. (2000) Algunos puntos de vista sobre las representaciones en Didácticas de las Matemáticas, artículo extraíble en: [www.ugr.es/seiem/Documentos/Font-Representaciones.PDF](http://www.ugr.es/seiem/Documentos/Font-Representaciones.PDF)

Gallardo, J. (2004): *Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. El caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales*. Tesis Doctoral. Málaga: Universidad de Málaga.

Godino, J. D.(1996): Significado y comprensión de los objetos matemáticos. En L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20<sup>th</sup> PME Conference*, Vol. 2, pp. 417-424. Valencia, España.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros. Universidad de Granada, España. Recuperado el 14 de diciembre del 2004, de <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/>.

Gómez Gutiérrez, Luis I. 2005: Conferencia especial “Cuba: Una revolución en el educación. En Pedagogía. Editorial pueblo y educación. Ciudad de La Habana.

González Castro, Vicente. 1986: Teoría y práctica de los medios de enseñanza. Editorial pueblo y educación. Ciudad de La Habana.

González Concepción, Jorge. 2003: Manual para la utilización del auxiliar Geómetra. En impresión ligera. Departamento Ciencias Exactas. ISP“Félix Varela”. Villa Clara.

González Rodríguez, Nidia y otros.1997: Técnicas participativas de educadores cubanos. En tres tomos. Asociación de Pedagogos de Cuba. Editorial Centro de Intercambio Educativo “Graciela Bustillos”. Ciudad de la Habana.

Guzmán, de M (1996). *El papel de la visualización*. Recuperado el 12 de enero del 2005, de <http://www.sectormatematica.cl/articulos.htm>

Hernández-Medina, C.A.(2004). La universalización de la enseñanza superior en Cuba. Criterios de un soldado de filas. *Pedagogía Universitaria* 10 (4).

Herrero, E, & Cabrera F. Modalidades de acceso a la información en distintos entornos tecnológicos. *Didáctica y Tecnología Educativa para una universidad en un mundo digital*. 2001

Hitt, F. (1998) Visualización matemática, nuevas representaciones, nuevas tecnologías y currículo. *Revista de Educación Matemática*. Vol. 10. 1998, 23-45.

Horrutinier, P. (2006) La Universidad Cubana: Modelo de formación. Ciudad de La Habana, Cuba: Editorial Félix Varela

Labañino Rizzo, César A. 2002: Multimedia para la educación. Editorial pueblo y educación. Ciudad de La Habana.

Llivina Lavigne Miguel J. y otros. 2000: Aproximación al aprendizaje desarrollador de la Matemática. En impresión ligera. Centro de Estudios Educativos. ISP "Enrique José Varona". Ciudad de La Habana  
Martínez, D.(2001). Estrategia para el logro de la significatividad didáctica en la formación del concepto de función en la Matemática para Licenciatura en Economía. Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Universidad Central de Las Villas. Santa Clara. Cuba.

Martínez D, Aida T (2005) Las concepciones curriculares para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática en la universalización de la educación superior. CD Memorias del COMPUMAT 2005, Ciudad de la Habana, Cuba, Diciembre, 2005, ISSN: 17286042.

Martínez D, Aida T (2007) Estrategia didáctica para flexibilizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la Universalización de la Educación Superior. Acta de la XVI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, ISBN: 978970-9971-13-2

Martínez D, Idelfonso R (2007) Propuesta didáctica para la enseñanza de la geometría analítica con el uso del cabri - geómetra en la licenciatura en matemática. CD de las memorias del COMPUMAT 2007, Holguín, Cuba, ISSN 1728 – 6042.

Pardo-Gómez, M. E y cols. (2006). La dinámica del proceso docente educativo en la Educación Superior con el empleo de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones. *Pedagogía Universitaria* 10 (5).

Perkins, D. (2000). La escuela inteligente, Ediciones Gedisa, México.

Pérez Rodríguez, Gastón y otros. 2001: Metodología de la investigación educacional. En dos tomos. Editorial pueblo y educación. Ciudad de La Habana.

Periódico Granma. 13 de mayo del 2005: la educación cubana y el uso de las tecnologías de la información. Ciudad de la Habana.

Ruiz, M. (2003). *¿Qué es un currículo flexible?*. México: Ediciones Euterpe.

\_\_\_\_\_ (2004). *Arcadia: La competencia pedagógica didáctica para aprender con sencillez y significatividad*. México: Ediciones Norma.

Ramos Lozano, Adrián y Yuleidys Vergel Faife. 2003: Posibilidades de utilizar el derive en la enseñanza de temas relacionados con fracciones algebraicas en preuniversitario. Tesis en opción al título de Licenciado en Educación. Especialidad Matemática- Computación. ISP "Félix Varela". Villa Clara.

Rebollar Morote, Alfredo. 2000: Una variante para la estructuración del PEA de la matemática, a partir de una nueva forma de organizar el contenido, en la escuela media cubana. Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Departamento de Ciencias Exactas. ISP "Frank País García". Santiago de Cuba.

Rodríguez Bueno, Osvaldo. 2005: El asistente Geómetra: una alternativa para perfeccionar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la disciplina Matemática en el nivel medio superior. Trabajo de Curso. Departamento Ciencias Exactas. ISP "Félix Varela". Villa Clara.

Salinas, J. (1999). ¿Qué se entiende por una institución de educación superior flexible? En Cabero, J. (Ed.). *Las Nuevas tecnologías para la mejora educativa*, (pp.451-466). Sevilla, España: Kronos.

SALINAS, J. (1999). "El rol del profesorado universitario ante los cambios de la era digital". *Actas del I Encuentro Iberoamericano de Perfeccionamiento Integral del Profesor Universitario*. Caracas: Universidad Central de Venezuela.

SALINAS, J. (2002, enero-junio). "Modelos flexibles como respuesta de las universidades a la sociedad de la información". *Acción Pedagógica* (vol. 11, n.º 1).

Sigalés, Ch.(2005) El potencial interactivo de los entornos virtuales de enseñanza y aprendizaje en la educación a distancia consultada en mayo 2005:

Talízina, N. (1987). *Conferencias de la Educación Superior*. Ciudad de La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Torres Lima, Pastor G. 2005: Didáctica de las TIC en la educación presencial y a distancia. Pedagogía. Ciudad de La Habana.

Torres Lima, Pastor G. 1997: Influencias de la computación en la enseñanza de la Matemática. Tesis en opción al título de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Instituto Central de Ciencias Pedagógicas. Ciudad de La Habana.

Tellería A y cols. (2007). *Universimat*, entorno para la comprensión de la matemática en el proceso de universalización de la educación superior. Acta de la XVI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, ISBN: 978970-9971-13-2

Torres A, Martínez D. (2007) Usando internet en el logro de la comprensión matemática universitaria. Memorias en CD del Primer Congreso Internacional y Segundo Simposium de Orientación Educativa y Vocacional “Aprendizaje significativo: un reto más allá de las aulas”, UABC, México, ISBN 970-735-071-7.

Torres A, Martínez D. (2007). Entornos virtuales para el logro de la comprensión de objetos matemáticos. Acta de la XVI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, ISBN: 978970-9971-13-2

Torres A, Martínez D. (2007). Diagnóstico de la comprensión matemática en los estudiantes universitarios. CD de las memorias del COMPUMAT 2007, Holguín, Cuba, ISSN 1728 – 6042

Villanueva Armenteros, Yanet: Tendencias actuales en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y la utilización de las nuevas tecnologías de la información y las comunicaciones en la educación. Universidad de Ciencias Informáticas. Ciudad de La Habana. (<http://www.ilustrados.com/publicaciones>). 17 de marzo del 2005.

Vygotski, I. S. (1934) *Pensamiento y lenguaje*. la pléyade, Buenos Aires.