

Universidad Central «Marta Abreu» de Las Villas

Facultad de Construcciones

Departamento de Ingeniería Civil



TRABAJO DE DIPLOMA

Análisis Modal Operacional en estructuras mediante el empleo de acelerómetros

Autor: Félix Daniel del Sol Companioni

Tutores: Ing. Alexis Claro Duménigo

Dr. Ernesto Chagoyén Méndez.

Santa Clara

2016

«Año 57 de la Revolución»

PENSAMIENTO

«La mente que se abre a una nueva idea nunca vuelve a su tamaño original»

Albert Einstein

DEDICATORIA

Esta tesis, se la dedico a TODA mi familia, los de cerca y los de lejos, por el orgullo que sentimos todos por tener al primer ingeniero civil en la estirpe.

AGRADECIMIENTOS

A mis profesores todos, desde la primaria hasta el nivel superior, que con su empeño y dedicación me permitieron llegar hasta este punto de mi vida.

A mi familia, que me ha guiado y acompañado para hacer de mi un hombre de bien.

A mis amigos y compañeros de estudio, con los que he compartido alegrías, tristezas, éxitos y fracasos.

A Liz Claudia, por sacar de mi lo mejor en el empeño de realizar esta tesis de grado.

RESUMEN

En la presente investigación se realiza una síntesis de la teoría acerca del Análisis Modal Operacional, el cual abarca desde la obtención de los datos en la estructura, el ajuste de los mismos con los métodos de identificación, la elaboración de un modelo matemático derivado de dicha identificación hasta la obtención de los parámetros modales que caracterizan a dicha estructura.

En la misma se analiza más a fondo los métodos de identificación estocásticos, sobre todo los que están incluidos en el software para el Análisis Modal: MACEC. Organizándolos en métodos paramétricos y no paramétricos; señalando a su vez sus potencialidades y limitantes.

Se realiza un acercamiento al software MACEC, desde su evolución histórica hasta abarcar algunas de sus potencialidades, sobre todo después de implementada la interfaz gráfica de usuario (GUI).

En última instancia, se le realiza un Análisis Modal Operacional a dos casos de estudio los cuales consistieron en una viga de hormigón armado, simplemente apoyada y un puente de ferrocarril de cuatro luces de 20m cada una; en las cuales se utilizaron acelerómetros piezo-eléctricos unidireccionales para la obtención de las señales las cuales se procesaron con el software anteriormente mencionado; a la vez que se describe una metodología básica con dicho programa.

Con los resultados obtenidos se llegaron a conclusiones y algunas recomendaciones son realizadas.

ABSTRACT

In the present research, a synthesis of the theory about the Operational Modal Analysis is made, from the obtaining of the data in the structure, the adjustment of the same with the methods of identification, the elaboration of a mathematical model derived from said Identification until obtaining the modal parameters that characterize this structure.

In the same it analyzes more in depth the methods of stochastic identification, especially those that are included in the software for the Modal Analysis: MACEC. Organizing them in parametric and non-parametric methods; Pointing to their potential and limitations.

MAC software is approached from its historical evolution to cover some of its potentialities, especially after the implementation of the GUI.

Ultimately, an Operational Modal Analysis was done to a couple study cases which consisted of a reinforced concrete beam, simply supported and a railroad bridge of 20m length each; in which unidirectional piezoelectric accelerometers were used to obtain the signals which were processed with the aforementioned software; while describing a basic methodology with this program.

With the results obtained conclusions were reached and some recommendations are made.

CONTENIDO

PENSAMIENTO	i
DEDICATORIA	ii
AGRADECIMIENTOS	iii
RESUMEN	iv
ABSTRACT	v
INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO I: Estado del conocimiento sobre el análisis modal y SUS modelos ASOCIADOS.	8
1.1 GENERALIDADES SOBRE EL ANÁLISIS MODAL.....	8
1.2 TÉCNICAS DE EXCITACIÓN DE ESTRUCTURAS.	11
1.3 INSTRUMENTOS UTILIZADOS PARA LA OBTENCIÓN DE DATOS.....	13
1.3.1 Acelerómetros	14
1.3.2 Galgas extensométricas (strain gages).....	17
1.3.3 Transductores	18
1.4 ANÁLISIS MODAL EXPERIMENTAL (EMA).	19
1.5 ANÁLISIS MODAL OPERACIONAL (OMA).....	20
1.6 GENERALIDADES SOBRE LOS DIFERENTES TIPOS DE MODELOS.....	22
1.6.1 Modelo de Elementos Finitos.....	25
1.6.2 Modelos Estado-Espacio.....	25
1.6.3 Modelos ARMA	29
1.6.4 Modelos en el dominio de la frecuencia	30
1.7 MÉTODOS UTILIZADOS EN LA IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS.....	31
1.8 PROCESAMIENTO DIGITAL DE LAS SEÑALES.....	32

1.8.1 Modelos Modales empleados por el software «MACEC»	36
1.8.2 Métodos de Identificación de Sistemas	37
1.9 CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO.	37
CAPÍTULO II: Identificación de sistemas estocásticos	39
2.1 GENERALIDADES DE LA IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS ESTOCÁSTICOS.	39
2.2 MÉTODOS DE IDENTIFICACIÓN NO-PARAMÉTRICA.....	41
2.2.1 Identificación No-Paramétrica en el dominio del tiempo	42
2.2.2 Identificación No-Paramétrica en el dominio de la frecuencia	42
2.3 MÉTODOS DE IDENTIFICACIÓN PARAMÉTRICAS.	43
2.3.1 Tipos de modelos paramétricos	44
2.3.2 Métodos para el ajuste de parámetros.....	46
2.4 TIPOS DE DATOS.	48
2.4.1 Datos en el dominio del tiempo.....	48
2.4.2 Estimaciones de covarianza	49
2.4.3 Estimaciones del espectro	51
2.5 MÉTODOS DERIVADOS DEL ESPECTRO EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA.	52
2.5.1 Peak Picking (PP)	52
2.5.2 Función de indicación de modo complejo (CMIF)	55
2.6 MÉTODOS DERIVADOS DE LA COVARIANZA EN EL DOMINIO DEL TIEMPO.	57
2.6.1 Identificación del sub-espacio estocástico derivado de la covarianza (SSI-COV)	57
2.7 MÉTODOS DERIVADOS DE LOS DATOS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO. ..	61

2.7.1 Identificación del sub-espacio estocástico derivado de los datos (SSI-DATA) .	61
2.8 UTILIZACIÓN DE SOFTWARE PARA LA IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS.	
MACEC.....	69
2.8.1 Consideraciones Generales	69
2.8.2 Funcionamiento de MACEC.....	72
2.8.3 Automatización del Análisis Modal	78
2.9 CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO.	79
CAPÍTULO III: Aplicación a un caso de estudio. Empleo del software MACEC.	82
3.1 CASO DE ESTUDIO # 1.	82
3.2 APLICACIÓN DEL SOFTWARE.	84
3.2.1 Modelación de la geometría	84
3.2.2 Pre-procesamiento de las señales	86
3.2.3 Identificación del sistema	88
3.2.4 Obtención de los parámetros modales.	88
3.2.5 Presentación de los resultados.....	91
3.2.6 Discusión de los resultados.....	94
3.3 CASO DE ESTUDIO # 2	95
3.4 APLICACIÓN DEL SOFTWARE	98
3.4.1 Modelación de la geometría.....	98
3.4.2 Pre-procesamiento de las señales	99
3.4.3 Identificación del Sistema.....	100
3.4.4 Obtención de los parámetros modales	100
3.4.5 Presentación de los resultados.....	100
3.4.6 Discusión de los resultados	102
3.3 CONCLUSIONES PARCIALES DEL CAPÍTULO.	103

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	105
Bibliografía.....	107
ANEXOS.....	110
A.1 Informe del análisis del primer setup de la identificación del sub-espacio derivado de la covarianza de la viga	110
A.2 Informe del análisis del segundo setup de la identificación del sub-espacio derivado de la covarianza de la viga.....	111
A.3 Informe del análisis del multisetup de la identificación del sub-espacio derivado de la covarianza de la viga	112
A.4 Informe del análisis del primer setup de la identificación del sub-espacio derivado de los datos de la viga	113
A.5 Informe del análisis del segundo setup de la identificación del sub-espacio derivado de los datos de la viga	114
A.6 Informe del análisis del multisetup de la identificación del sub-espacio derivado de los datos de la viga	115
A.7 Informe del análisis Setup 1 del Puente 560 Camaguey.....	116
A.8 Informe del análisis Setup 2 del Puente 560 Camaguey.....	117
A.9 Informe del análisis Setup 3 del Puente 560 Camaguey.....	118
A.10 Informe del análisis Setup 4 del Puente 560 Camaguey.....	119
A.11 Informe del análisis Setup 5 del puente 560 Camaguey.....	120
A.12 Informe del análisis Setup 6 Puente 560 Camaguey	121
A.13 Informe del análisis Setup 7 Puente 560 Camaguey	122
A.14 Informe del análisis Setup 8 Punte 560 Camaguey	123
A.15 Informe del análisis del Multi-setup del Puente 560 de Camaguey.	125

INTRODUCCIÓN

La caracterización modal de las construcciones, especialmente de los puentes, lleva siglos siendo un aspecto importante, puesto que la seguridad y comodidad de los usuarios depende en gran medida de una correcta identificación de las propiedades modales. Prueba de ello son las víctimas históricas de la falta de conocimientos al respecto, como el ejército napoleónico en el siglo XIX, el conocidísimo caso del puente Tacoma Narrows en Estados Unidos en la década de 1940 y más actualmente, el Puente del Milenio de Londres (Losa Miranda, 2015).

Una alternativa para el análisis de las estructuras en general, desde un enfoque dinámico, es a través del Análisis Modal. Este tiene como propósito la obtención de los parámetros modales (frecuencias naturales, factores de amortiguamiento y formas modales), a partir de la formulación de un modelo matemático que caracterice su comportamiento dinámico.

Dichos parámetros son de gran importancia para la calibración de modelos estructurales de puentes o de otras estructuras; resultan de gran valor para el estudio de las mismas en escenarios a los que no es posible llegar durante pruebas de cargas estáticas o dinámicas, sin poner en peligro la estructura; para el pronóstico del comportamiento de la misma en dichos escenarios; o para determinar el nivel de deterioro de la estructura, su nivel de daño, la localización de los daños, la factibilidad de su intervención o mantenimiento, entre otros aspectos. (Claro Duménigo, 2015)

El Análisis Modal consta de una serie de tres etapas: la primera es la obtención de los datos producidos por los diferentes tipos de excitación en la estructura: viento, autos, personas, terremotos o alguna excitación introducida en la estructura de manera consiente y medible, a partir de diferentes tipos de herramientas tratadas más adelante. La segunda es la Identificación del Sistema, tratándose esta de *un método experimental que permite obtener el modelo de un sistema a partir de datos reales recogidos de la planta bajo estudio* (López Guillén, s.f.). Entiéndase por sistema toda realidad en la que interactúan variables de diferentes tipos para producir señales observables y, por tanto, el Modelo de un Sistema es aquella herramienta que permite predecir el comportamiento de un sistema sin necesidad de experimentar sobre él (López Guillén, s.f.). Una vez identificado el sistema, es posible

INTRODUCCIÓN

identificar los parámetros modales que caracterizan la estructura en cuestión. Por otra parte, en la elaboración del modelo del sistema existen ciertas diferencias en relación a si se tiene control sobre las variables de entrada (entradas del sistema) o no.

De tenerse control sobre las mismas estaríamos en presencia del Análisis Modal Experimental, este busca la extracción de las propiedades modales de una estructura mediante las medidas de la respuesta dinámica (output) a una fuerza de excitación conocida (input) (Losa Miranda, 2015); a diferencia del Análisis Modal Operacional, en el cual las excitaciones se producen de manera arbitraria por el uso habitual de la estructura (viento, tráfico, etc.) y, mediante la toma de datos de la respuesta dinámica, pueden extraerse las características modales de la estructura (Losa Miranda, 2015). Por esta razón, los Modelos matemáticos generados en este tipo de análisis son del tipo estocásticos ya que poseen cierto grado de incertidumbre, definiéndose mediante conceptos probabilísticos o estadísticos (López Guillén, s.f.).

En cualquiera de los dos casos se requiere un grupo de instrumentos de medición y procesamiento de las señales. Estos equipos se encargan de la generación de excitaciones, sensores para captar las respuestas del sistema, aparatos para el procesamiento de los datos y otros encargados de amplificar las señales. Cabe destacar los que se utilizan para la obtención las respuestas: entre estos equipos se pueden mencionar los geo-radares (Geo-radar IBIS) que se basan en el principio de interferencia de las ondas y los acelerómetros. Un acelerómetro es un transductor destinado a medir las aceleraciones. Pueden medir las aceleraciones en un único eje (conocidos como acelerómetros uniaxiales) o en varios ejes a la vez (triaxiales) (Losa Miranda, 2015).

Para el procesamiento de las señales obtenidas pueden usarse varias herramientas y softwares, entre los que se encuentra el software MACEC. MACEC es una poderosa herramienta que se encarga de las etapas de la Identificación del Sistema y de la identificación de las características modales en el Análisis Modal. Las entradas del programa son los datos medidos y sin tratar extraídos de la estructura analizada. El software nos ofrece varias funcionalidades para la visualización y el procesamiento de los datos, la identificación de los sistemas y la determinación y la visualización de las características modales de la estructura.

INTRODUCCIÓN

El programa dispone de una interfaz de usuario gráfica, la cual lo hace muy intuitivo y fácil al momento de usarlo (Reynders, et al., 2014).

La presente investigación pretende profundizar en el Análisis Modal Operacional (OMA), las herramientas matemáticas que utiliza para la obtención de los parámetros modales de los elementos estructurales analizados, así como la correcta interpretación de los resultados obtenidos. Se contará, para lograr este propósito, con el empleo de varios tipos de acelerómetros y se procesarán las señales con el software o herramienta del Matlab: MACEC.

Problema de Investigación

Lograr un acercamiento a la teoría del Análisis Modal de manera general, desde el trabajo con los instrumentos y equipos necesarios para la obtención de los datos hasta las herramientas y softwares para el procesamiento digital de las señales y la obtención de los parámetros modales.

Objeto de estudio

Los métodos y procedimientos para realizar el Análisis Modal Operacional en vigas aisladas.

Campo de acción

Experimentación, Modelación y Análisis Modal en vigas.

Objetivo General

Realizar el Análisis Modal Operacional en los casos de estudio a partir de los datos obtenidos con el uso de acelerómetros, y el empleo de la herramienta MACEC para el procesamiento de las señales registradas.

Objetivos Específicos

- Definir el estado actual del conocimiento sobre la identificación de los sistemas y conceptos asociados a la modelación dinámica de los elementos estructurales, así como las funcionalidades que ofrece el software MACEC para el procesamiento de los datos.

INTRODUCCIÓN

- Presentar una metodología para el Análisis Modal Operacional con el empleo del software MACEC.
- Identificar las características modales en ambos casos de estudio utilizando el software MACEC a partir de los datos obtenidos mediante el uso de acelerómetros y comparar los resultados a partir de las particularidades de ambas.

Preguntas de la Investigación

¿En qué grado, el conocimiento de los conceptos asociados a la teoría del Análisis Modal es necesario para la comprensión de los métodos existentes para la identificación de sistemas y la identificación de sus parámetros modales?

¿Cuáles son las bases fundamentales de los métodos de identificación de sistemas en los que se ha medido solo la salida?

¿Cuál es la forma de implementar estos métodos en el MACEC?

¿Cuál es la interpretación física de los resultados obtenidos de la aplicación del MACEC a los casos de estudio?

Justificación de la Investigación

La necesidad de la aplicación en el país de los conocimientos sobre la dinámica estructural, sobre todo en el Análisis Modal Operacional para la obtención de los parámetros modales, así como la importancia de los mismos para la calibración de modelos y la evaluación y detección de daños en las estructuras.

Hipótesis

Los parámetros modales obtenidos a partir de la realización de un Análisis Modal Operacional, utilizando para el mismo el software para el procesamiento de las señales MACEC, son confiables y están dentro de los parámetros lógicos para el tipo de elemento analizado.

INTRODUCCIÓN

Métodos de Investigación

Métodos del Nivel Teórico

Método histórico lógico: para el establecimiento del estado actual del conocimiento sobre el Análisis Modal, los modelos utilizados para el mismo, los métodos para el procesamiento digital de las señales obtenidas de pruebas de cargas dinámicas, con vistas a la identificación de algunos de los parámetros del comportamiento dinámico de la estructura como son las frecuencias de oscilación natural, los modos o formas principales de oscilaciones propias, entre otros, mediante el cual se realizará un análisis histórico de la temática y se determinará cuáles han sido las tendencias; se definirán los conceptos claves sobre estas temáticas así como se elaborará una síntesis de las principales posiciones al respecto, identificando los aspectos positivos y realizando análisis críticos de las deficiencias.

Métodos del Nivel Empírico

Se utiliza como diseño el estudio de casos en vigas aisladas y puentes de ferrocarril, donde se realizará un monitoreo mediante ensayos modales, así como un levantamiento de todas las características del mismo, aplicándose el método de observación participante y la técnica de notas de campo.

Métodos del nivel matemático o estadístico

El análisis numérico (transformada rápida de Fourier, Transformada Z, Wavelet, etc.) de las señales obtenidas de experimentación modal de estructuras reales se utilizará para identificar los parámetros dinámicos del sistema estructural.

Del análisis comparativo de la respuesta modelada y medida de la estructura estudiada, se pueden inferir conclusiones sobre el comportamiento dinámico real, su nivel de daño estructural y localización de los mismos, etc.

Novedad Científica

INTRODUCCIÓN

Actualmente en Cuba se dispone de diferentes softwares para el procesamiento digital de las señales obtenidas de ensayos modales de estructuras como es el caso del software incluido en el Georradar IBIS y el MACEC. Con el presente trabajo se pretende validar y complementar los resultados obtenidos en los ensayos modales mediante el empleo del software MACEC a partir de datos obtenidos del uso de acelerómetros.

Valor Metodológico

Se presenta e implementa una metodología a seguir con vistas a identificar los principales parámetros que definen el comportamiento dinámico de la estructura, partiendo de los resultados de pruebas modales e incluyendo la manera de conducirse utilizando el software MACEC.

Valor Práctico

El desarrollo del presente trabajo constituye una contribución al conocimiento en el Análisis Modal para su aplicación por parte de las entidades que realizan estos servicios. La identificación de los sistemas dinámicos de forma correcta resulta ser el primer paso en la aplicación de los métodos para evaluar el estado de la estructura, si presenta o no daños y su localización, partiendo de ensayos modales cuya fuente de excitación puede ser hasta el ruido ambiental. Así mismo, dichos sistemas constituyen la base para la calibración de modelos dinámicos de estructuras, de ahí su importancia.

Relevancia Social

Al significar una contribución importante al conocimiento de los métodos que posibilitan interpretar correctamente el monitoreo de estructuras con pruebas modales no destructivas que posibilitarían una evaluación más acertada del estado de estructuras, en situaciones normales o de desastre, durante las labores de mantenimiento y conservación de los mismos.

INTRODUCCIÓN

Organización del Informe

La estructura general del trabajo será la siguiente

Resumen

Introducción

Capítulo I: Estado del conocimiento sobre el análisis modal y los modelos utilizados para el mismo.

Capítulo II: Identificación de Sistemas Estocásticos.

Capítulo III: Aplicación a un Casos de Estudio. Empleo del Software MACEC.

Conclusiones y Recomendaciones.

Bibliografía

Anexos

CAPÍTULO I: ESTADO DEL CONOCIMIENTO SOBRE EL ANÁLISIS MODAL Y SUS MODELOS ASOCIADOS.

1.1 GENERALIDADES SOBRE EL ANÁLISIS MODAL.

Como se ha señalado anteriormente, el análisis modal en estructuras permite caracterizar las mismas de manera más objetiva y realista dado que dicho análisis se basa en las características dinámicas de la estructura y en la respuesta que se genera bajo excitaciones de diferente índole.

Puesto que, actualmente, máquinas y estructuras forman parte de nuestro día a día, resulta del todo necesario contar con herramientas fiables para el análisis de las vibraciones presentes en estos elementos. El análisis modal no es más que una de estas herramientas imprescindibles, que trata de proporcionar al ingeniero información básica sobre la estructura diseñada como su comportamiento dinámico o la búsqueda de una solución a problemas dinámicos estructurales. (Losa Miranda, 2015)

El Análisis Modal es el proceso de determinar las características dinámicas inherentes de un sistema en forma de frecuencias naturales, factores de amortiguamiento y formas modales y utilizarlos en formular un modelo matemático para su comportamiento dinámico. El modelo matemático formulado al que se refiere es nombrado modelo modal del sistema y la información de sus características son conocidas como sus datos modales (He & Fu, 2001)

En muchos casos, la elección de un análisis modal es consecuencia de la búsqueda de un modelo matemático de la estructura, pero hoy en día, la aplicación de los análisis modales cubre un amplio campo de objetivos. (Losa Miranda, 2015). El mismo incluye técnicas tanto teóricas (He & Fu, 2001) como experimentales (Bilošová, 2011) (Reynders, 2012).

Tanto el análisis modal teórico como experimental llegan finalmente al modelo modal de un sistema dinámico. Comparado con el FRF o la respuesta de vibración, el modelo modal retrata explícitamente las características dinámicas de un sistema. Por lo tanto, las aplicaciones del análisis modal están estrechamente relacionadas con la utilización del modelo modal derivado en el diseño, la resolución de problemas y el análisis. (He & Fu, 2001)

CAPÍTULO I

Los análisis modales tratan de extraer las propiedades modales de una estructura (formas modales, frecuencias a las que se dan y factores de amortiguamiento) mediante la toma de medidas en la respuesta dinámica de la estructura a acciones externas. Estas acciones pueden ser inducidas, conociendo perfectamente las características de la excitación (EMA), o aleatorias, sin saber exactamente la magnitud de las acciones (OMA) (Losa Miranda, 2015)

El análisis modal se basa en la interpretación del movimiento oscilatorio de los sistemas estructurales como una combinación lineal tipo «suma ponderada» de patrones componentes de deflexiones globales que corresponden a movimientos armónicos simples, cada uno de los cuales posee una frecuencia, un período y un modo de oscilación propios. Este resultado puede ser analizado en el dominio del tiempo (análisis tiempo - historia), o en el dominio de las frecuencias (análisis espectral) (Claro Duménigo, 2015).

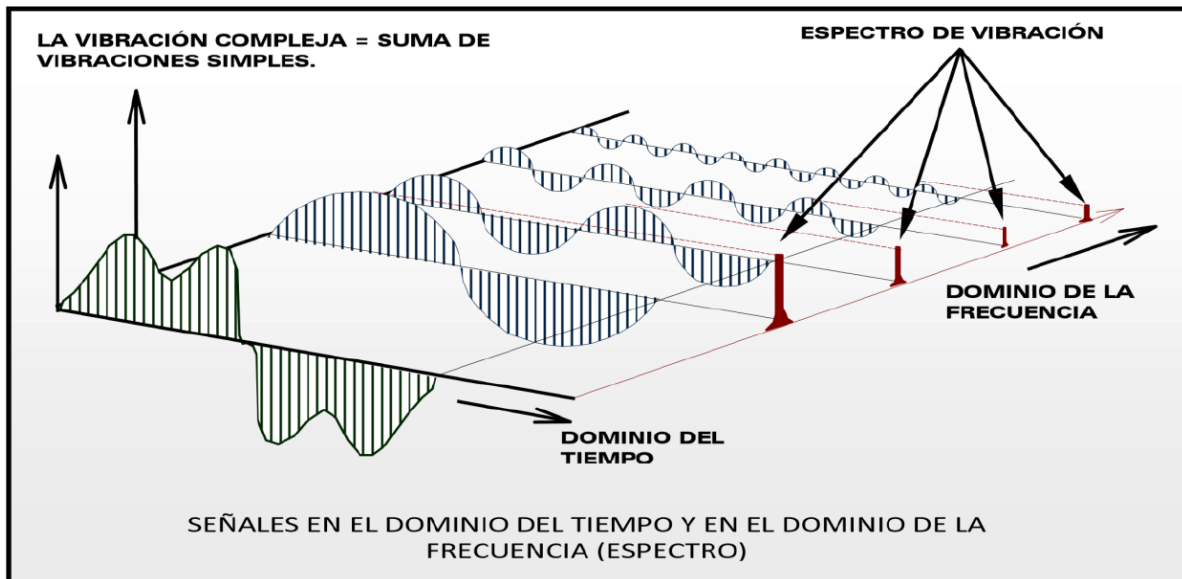


Fig. 1.1- *Espectro de las señales en el dominio de la frecuencia y en el dominio del tiempo* (Claro Duménigo, 2015)

Se puede decir que el análisis modal consta de tres etapas fundamentales:

1. Recolección de datos:

Para la adquisición de los datos que genera la estructura de estudio, primeramente, esta debe de ser excitada, ya sea mediante una excitación ambiental o controlada, también se deben recolectar los datos a través de instrumentos especializados al efecto, entre los que se pueden distinguir los cableados (acelerómetros; galgas, etc.)

CAPÍTULO I

y los inalámbricos (Georradar IBIS, etc.). Por último, se debe de contar con un software que se encargue del procesamiento de las señales obtenidas.

2. Identificación del sistema:

Se entiende por identificación de sistemas a la obtención de forma experimental de un modelo que reproduzca con suficiente exactitud, para los fines deseados, las características dinámicas del proceso objeto de estudio (López Guillén, s.f.).

3. Obtención de los parámetros modales (García O'Rally, 2016):

Período de Oscilaciones: Corresponde al tiempo en que la estructura demora en oscilar de un lado a otro, para una cierta forma de vibrar. En general las estructuras poseen más de una forma de vibrar, por lo que se mide para cada una de ellas un período asociado (T). Al valor inverso del período se le denomina frecuencia (f).

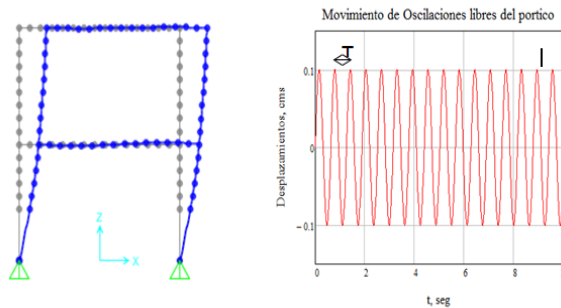


Fig. 1.2- *Período Oscilatorio* (García O'Rally, 2016)

Amortiguamiento: Las estructuras están sujetas a recibir solicitaciones de todo tipo. Estas solicitaciones pueden traducirse en que la estructura está constantemente recibiendo energía. El amortiguamiento corresponde a la capacidad de la estructura para disipar esta energía. Se mide como porcentaje respecto de un parámetro denominado amortiguamiento crítico.

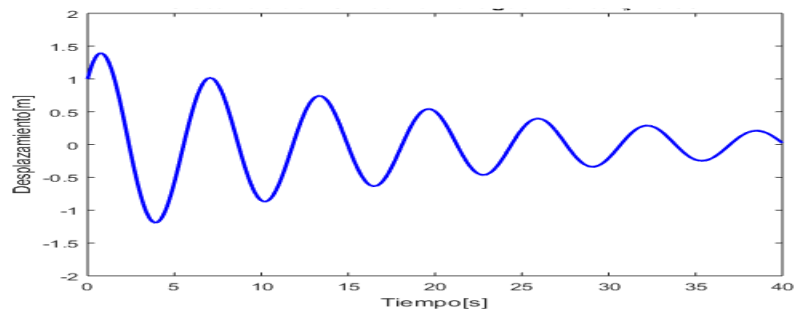


Fig. 1.3- *Sistema Amortiguado* (García O'Rally, 2016)

CAPÍTULO I

Formas modales: Son las formas en que se mueve una estructura cuando es sometida a vibraciones en uno de sus períodos naturales de oscilación.

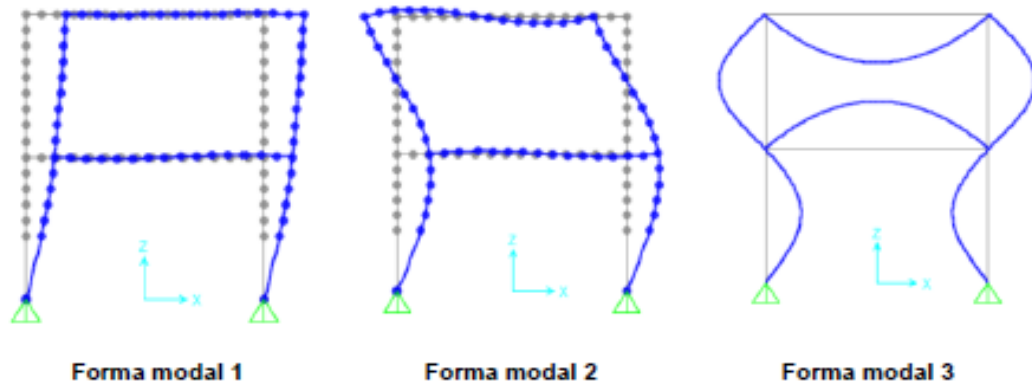


Fig. 1.4- *Formas Modales* (García O'Rally, 2016)

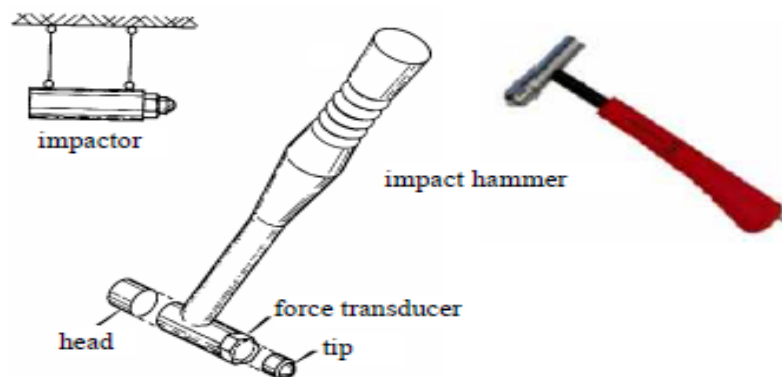
1.2 TÉCNICAS DE EXCITACIÓN DE ESTRUCTURAS.

Existen varias maneras de lograr la excitación de una estructura. Estas pueden ser divididas en tres grupos fundamentales (Bilošová, 2011):

1. Excitación por impacto:

- Usar los impactos de un martillo (hammer) modal. (La más usada)

El uso del martillo de impacto es la vía más simple y la manera más rápida de excitar una estructura. Esta no requiere de trabajos previos y sin embargo es muy recomendable en condiciones operacionales. También tienen la ventaja de que no influyen las estructuras como si lo hacen los excitadores adosados. Esto ya es una ventaja en sí.



CAPÍTULO I

Fig. 1.5- *Martillo de impacto* (Bilošová, 2011)

- Golpes de una masa en caída libre.
 - Uso de un péndulo impactante.
2. Excitación usando un excitador adosado:
- Excitador electromagnético (shaker); el método más común.

En este mecanismo la señal de entrada suministrada es convertida en un campo magnético alternativo donde una bobina es adosada al soporte y a la parte a medir. Es destacable que la frecuencia y la amplitud son controladas independientemente dando mayor flexibilidad operacional.



Fig. 1.6- *Adosado de un shaker* (Bilošová, 2011)

El uso de estos excitadores brinda las posibilidades de regular los tipos de señales de excitación. Estos tipos de excitación pueden ser clasificadas como sigue:

- Impulso
 - Impacto o pulso simple
 - Pulso Periódico
 - Impacto aleatorio
- Aleatorio
- Pseudo-aleatorio
- Swept sine

CAPÍTULO I

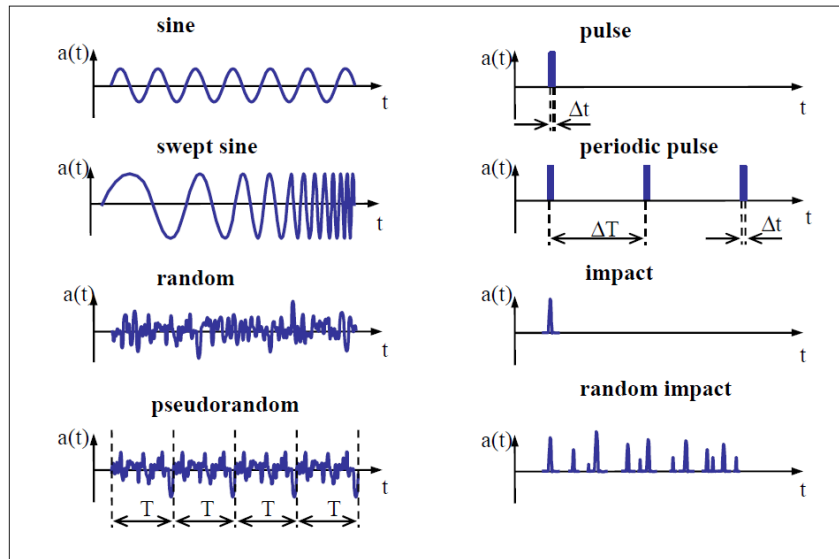


Fig. 1.7- *Tipos de excitación* (Bilošová, 2011)

- Excitador electro-hidráulico
- Excitador mecánico. (Masa excéntrica rotante)

3. Otros tipos:

- Usando las turbinas de un jet.
- Excitación ambiental

1.3 INSTRUMENTOS UTILIZADOS PARA LA OBTENCIÓN DE DATOS.

La primera etapa en la realización de un Análisis Modal es la obtención de los datos o respuesta de la estructura ante la excitación externa. Para lograr este objetivo se utilizan varios instrumentos que se encargan de detectar los cambios físico (aceleración, deformación, desplazamientos, etc.) y convertirlos en señales eléctricas con las cuales se pueda realizar todo el análisis posterior.

Para la medición de la vibración de estructuras se han empleado diferentes tipos de transductores, a partir de principios de operación diferentes. Sin embargo, los que han resultado ser más efectivos son los acelerómetros, las galgas extensométricas (Carrión Viramontes, et al., 1999) y los medidores de desplazamiento y velocidad (Carrión Viramontes, et al., 1999), siendo los primeros los de mayor uso actualmente. En las siguientes secciones se presenta una descripción y análisis de cada uno de estos. (Carrión Viramontes, et al., 1999)

CAPÍTULO I

1.3.1 Acelerómetros

Un acelerómetro es un transductor destinado a medir las aceleraciones. Pueden medir las aceleraciones en un único eje (conocidos como acelerómetros uniaxiales) o en varios ejes a la vez (triaxiales). En su interior pueden encontrarse diversos mecanismos que condicionan la precisión y nitidez que consiguen en las medidas. (Losa Miranda, 2015)

1.3.1.1 Acelerómetros mecánicos

En este tipo de acelerómetro, una o más galgas extensométricas hacen de puente entre la carcasa del instrumento y la masa inercial. La aceleración produce una deformación de la galga que se traduce en una variación en la corriente detectada por un puente de Wheatstone, la deformación es directamente proporcional a la aceleración aplicada al acelerómetro.

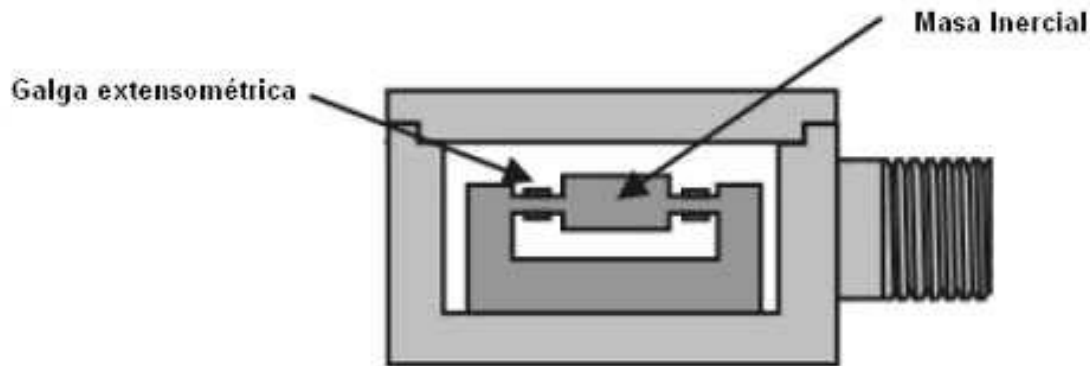


Fig. 1.8- *Representación de un acelerómetro mecánico*

1.3.1.2 Acelerómetros piezoeléctricos

Se trata sin duda del acelerómetro más popular y el más empleado para la medida de las aceleraciones en los análisis modales. El principio físico básico de su funcionamiento consiste en el uso de un pequeño cristal piezoeléctrico (tanto natural como artificial) que genera una corriente eléctrica tras aplicársele una fuerza. Son cuatro los elementos básicos que conforman un acelerómetro piezoeléctrico: una base, una carcasa, un cristal piezoeléctrico y una masa sísmica. La base del acelerómetro se mueve con las oscilaciones de la estructura sobre la que apoya, viéndose comprimido el elemento piezoeléctrico por medio de la masa sísmica. La ligera deformación del elemento ocasiona una pequeña carga eléctrica proporcional a la deformación y, por tanto, a la aceleración de masa sísmica y de la estructura. (Losa Miranda, 2015)

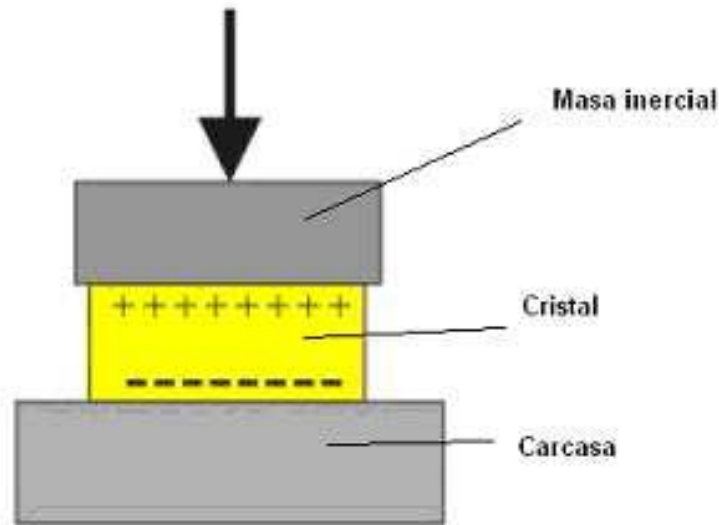


Fig. 1.9- *Representación de un acelerómetro piezoeléctrico*

Los sensores piezoeléctricos pre-amplificados van siendo cada vez más habituales por la comodidad de su uso, ya que producen un valor de tensión proporcional a la excitación aplicada en la salida del amplificador y su comportamiento resulta independiente del conexionado exterior puesto que la carga y resistencia de entrada del amplificador se mantienen constante siempre. Este tipo de sensores precisa alimentación.

1.3.1.3 Acelerómetros piezo-resistivos

Un acelerómetro piezo-resistivo, a diferencia de uno piezoeléctrico, utiliza un sustrato en vez de un cristal piezoeléctrico. En este, los elementos flexibles del semiconductor que soportan la masa sísmica, forman parte de lo que se conoce como puente de Wheatstone. Como estos elementos se deforman, el puente de Wheatstone se desequilibra, y la diferencia de potencial a la salida (proporcional a la deformación aplicada) es una medida de la aceleración. (Losa Miranda, 2015). La ventaja de esta tecnología respecto a la piezoeléctrica es que pueden medir aceleraciones hasta cero Hz de frecuencia.

CAPÍTULO I

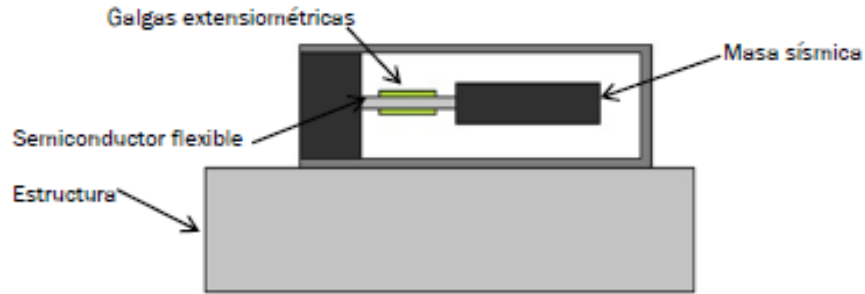


Fig. 1.10- *Acelerómetro Piezo-resistivo uniaxial*

1.3.1.4 Acelerómetros capacitivos

El dispositivo realmente trabaja en un lazo de control electrónico de fuerza/balanceo. Este lazo de control evita el movimiento de la masa en aceleración, por la aplicación de una fuerza igual pero opuesta creada por la aplicación de un voltaje en las placas del condensador. Este voltaje aplicado es directamente proporcional a la aceleración.

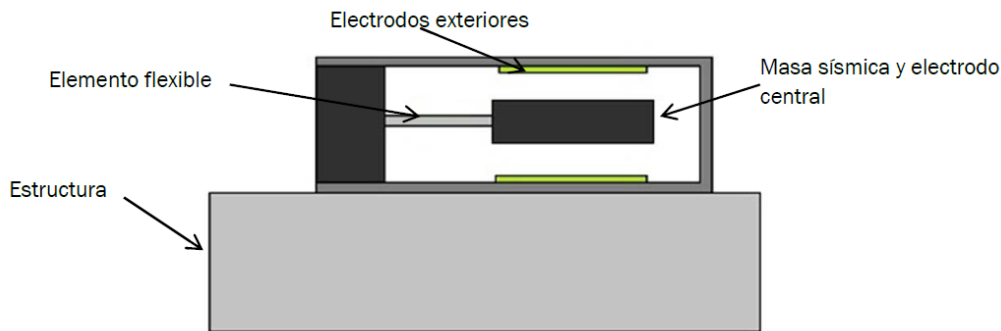


Fig. 1.11- *Acelerómetro Capacitivo Uniaxial*

En este tipo de acelerómetros el elemento que conecta la masa inercial con la carcasa es un condensador. Una de las paredes está fija, pegada a la carcasa y la otra a la masa. Cuando ocurre una aceleración la masa presiona el condensador variando el grosor entre pared y pared. Midiendo la capacitancia del condensador podemos calcular la aceleración. Este tipo de acelerómetros es extremadamente resistente, puede soportar aceleraciones de 30000g lo cual permite usarlo en mediciones de aceleración de proyectiles de cañón.

1.3.1.5 Acelerómetros térmicos

Se trata de un nuevo acelerómetro basado en la convección termal. Este tipo de acelerómetro posee un diseño de tecnología MENS muy simple y práctico al mismo tiempo. Simplemente

CAPÍTULO I

utilizando un sustrato de silicio en el cual se hace un hueco para meter una pequeña resistencia que hace de calentador, con dos termopares en los extremos. Con esta estructura conseguimos que se forme una cavidad de aire caliente, llamados burbuja, sobre los termopares.

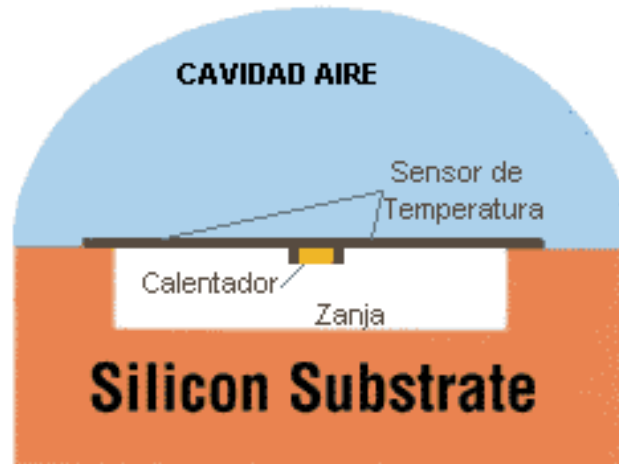


Fig. 1.12- *Representación de acelerómetro térmico*

La principal característica de estos dispositivos es que tienen sólo un elemento móvil, la burbuja diminuta de aire caliente, herméticamente sellada dentro de una cavidad existente en el encapsulado del sensor. Cuando una fuerza externa como el movimiento, la inclinación, o la vibración es aplicada, la burbuja de aire caliente se mueve de una forma análoga al mismo. El cambio de estado dentro de la cavidad del integrado, produce un voltaje que es función de la diferencia de temperatura y que, tras ser amplificado y condicionado, se proporciona como salida el valor de un voltaje absoluto.

1.3.2 Galgas extensométricas (strain gages)

Son dispositivos encargados de medir deformaciones puntuales del elemento estructural donde se instrumentan. Existen diferentes tipos de galgas, siendo las del tipo resistivo las más económicas y las más comúnmente empleadas. No obstante, presentan el inconveniente de su compleja instalación, dada la preparación superficial y el procedimiento de instrumentación que requieren. (Carrión Viramontes, et al., 1999)

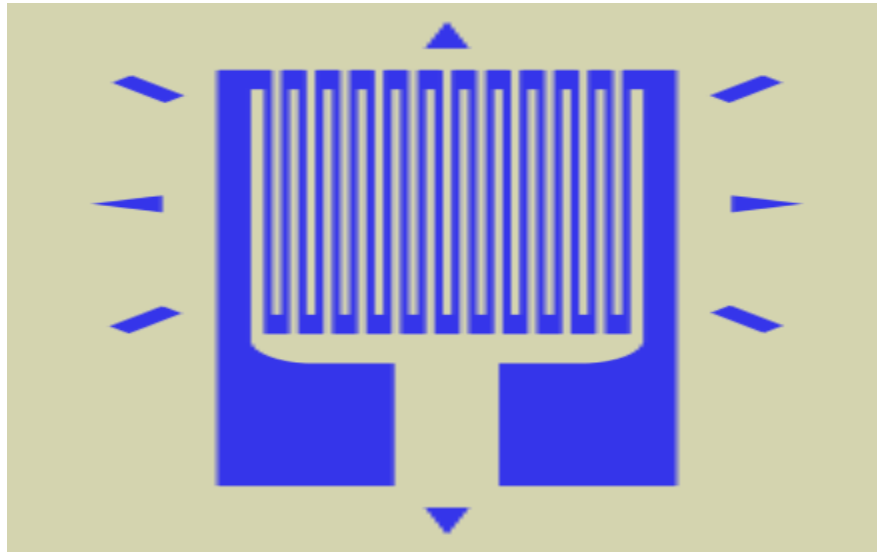


Fig. 1.13- *Representación de galga extensométrica*

1.3.3 Transductores

Un transductor es un dispositivo capaz de transformar o convertir una determinada manifestación de energía de entrada, en otra diferente a la salida, pero de valor muy pequeño en términos relativos con respecto a un generador.

1.3.3.1 Transductores de desplazamiento

En el estudio de las vibraciones en puentes, una buena opción de caracterización consiste en medir los desplazamientos dinámicos de sus estructuras, empleando para ello transductores de desplazamiento de alta precisión. Aunque este tipo de instrumentos es preciso y de alta resolución, tienen el inconveniente de que requiere una plataforma inercial, la cual normalmente es difícil o imposible de instalar. Una alternativa costosa pero efectiva es la de colocar transductores laser (Ewins, 2000), los cuales permiten instalar la plataforma inercial en puntos accesibles y relativamente lejos del puente. (Carrión Viramontes, et al., 1999)

1.3.3.2 Transductores de velocidad

Con estos es posible realizar el estudio de vibraciones dinámicas, midiendo para ello las velocidades de desplazamiento del punto instrumentado. Normalmente, estos instrumentos tienen rango de respuestas a frecuencias bajas, por lo que resultan ser adecuadas en estudios de puentes. Sin embargo, dado que el grado de precisión no es tan alto comparado con las respuestas de los acelerómetros, se utilizan cada vez menos. Es importante señalar que este

CAPÍTULO I

tipo de sensores están diseñados para trabajar mediante algún sistema mecánico de resorte, por lo que las frecuencias naturales del transductor deben de ser consideradas en la medición, con el objetivo de evitar que influyan en las mediciones realizadas. (Carrión Viramontes, et al., 1999)

1.4 ANÁLISIS MODAL EXPERIMENTAL (EMA).

El análisis modal experimental tradicional (EMA) utiliza mediciones de entrada (excitación) y de salida (respuesta) para estimar parámetros modales, que consisten en frecuencias modales, relaciones de amortiguación, formas modales y factores de participación modal. (Zhang, et al., s.f.)

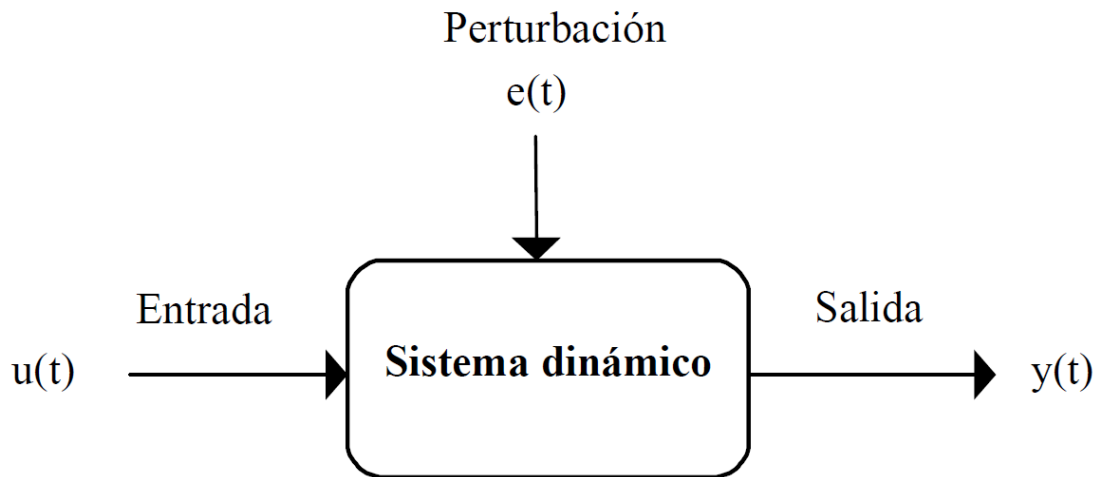


Fig. 1.14- Representación de un sistema dinámico con entrada, perturbación y salida.

(López Guillén, s.f.)

Este análisis requiere de la utilización de varios componentes para la toma de datos, que pueden enumerarse en tres bloques básicos: 1. *Mecanismo de excitación*; 2. *Captación de vibraciones*; 3. *Adquisición de datos* (Losa Miranda, 2015). No obstante a los beneficios que presenta esta técnica (He & Fu, 2001), también presenta algunas limitantes (Zhang, et al., s.f.) que hace que sea necesario la implementación de otros métodos.

CAPÍTULO I

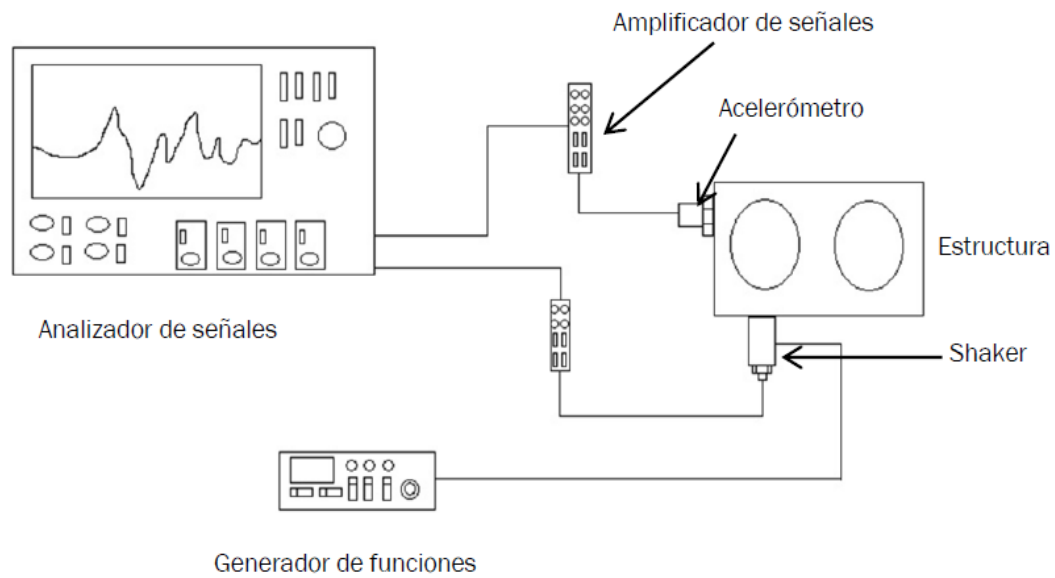


Fig. 1.15- *Esquema básico de instrumentos necesarios para la realización de un EMA*
(Losa Miranda, 2015)

1.5 ANÁLISIS MODAL OPERACIONAL (OMA).

El Análisis Modal Operacional (OMA) ha atraído gran atención en la comunidad de ingeniería civil con aplicaciones para plataformas petrolíferas, edificios, torres, puentes, etc. OMA, también llamado como ambiental, de excitación natural o análisis modal de solo salida, utiliza solo mediciones de salida de las estructuras en condiciones operativas sometidas a excitación ambiental o natural para identificar características modales (Zhang, et al., s.f.). Este procedimiento tiene una serie de ventajas (Bilošová, 2011) sobre el EMA que lo hace más útil y eficiente en determinadas condiciones, no queriendo decir esto que es mejor, ya que presenta sus limitaciones (Bilošová, 2011) al igual que el EMA.

CAPÍTULO I

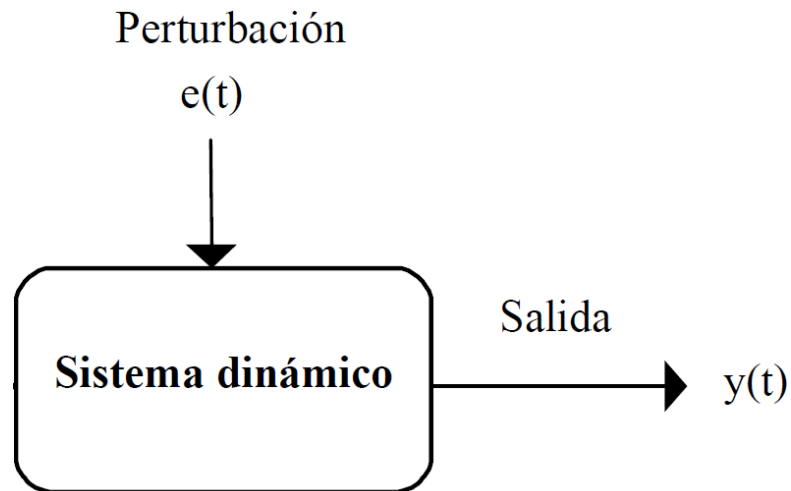


Fig. 1.16- Sistema dinámico con perturbación y salida

Las excitaciones se producen de manera arbitraria por el uso habitual de la estructura (viento, tráfico, ...) y, mediante la toma de datos de la respuesta dinámica, pueden extraerse las características modales de la estructura (formas modales, frecuencias a las que se dan y factores de amortiguamiento) (Losa Miranda, 2015).

Al igual que en el EMA, se requiere de diversos aparatos para medir las respuestas de la estructura. Puesto que NO es necesario inducir la excitación, se prescinde del «shaker», teniendo que emplear: 1. *Sensores de Medidas*; 2. *Aparatos de adquisición de datos* (Losa Miranda, 2015).

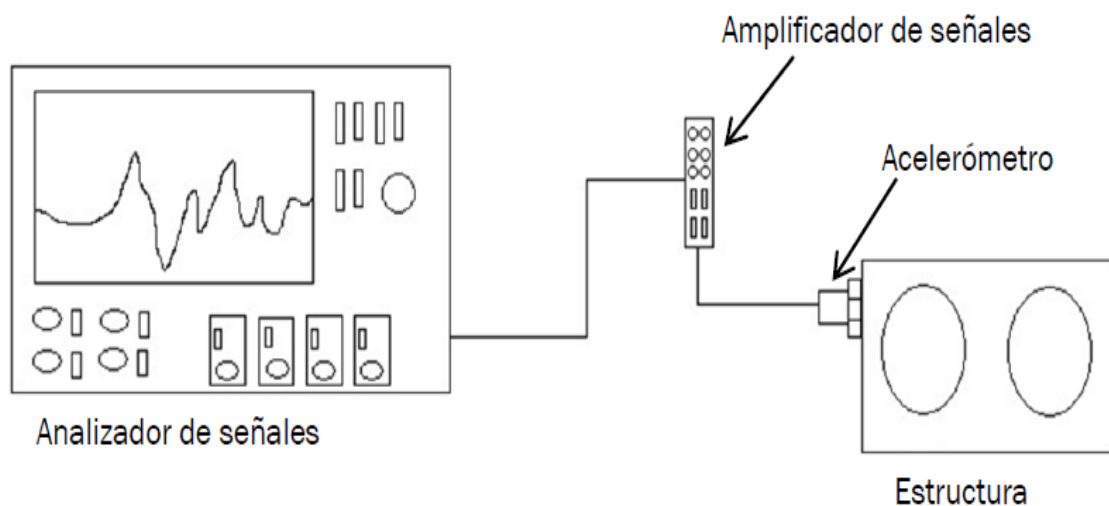


Fig. 1.17- Esquema básico de Instrumentos necesarios para la realización de un OMA (Losa Miranda, 2015)

CAPÍTULO I

Al pasar de los años, OMA ha evolucionado como una disciplina autónoma. Sin embargo, la mayoría de los métodos del OMA se derivan de los procedimientos del EMA, por lo que comparten una base teórica común con procedimientos de entrada-salida. La principal diferencia reside en la formulación de la entrada, la cual es conocida en el EMA y aleatoria y no medida en el OMA. Además, mientras que los procedimientos EMA se desarrollan en una estructura determinística, los métodos del OMA pueden ser vistos como su contraparte estocástica. (Rainieri & Fabbrocino, 2014)

A diferencia de las pruebas modales tradicionales donde la entrada es controlada, el OMA se basa en la respuesta dinámica de la estructura de prueba a cargas incontrolables e inmensurables como las cargas ambientales y operacionales. En consecuencia, es necesario hacer algunas suposiciones (Bilošová, 2011) acerca de la entrada. (Rainieri & Fabbrocino, 2014)

1.6 GENERALIDADES SOBRE LOS DIFERENTES TIPOS DE MODELOS.

Cuando se hace necesario conocer el comportamiento de un sistema en unas determinadas condiciones y ante unas determinadas entradas, se puede recurrir a la experimentación sobre dicho sistema y a la observación de sus salidas. Sin embargo, en muchos casos la experimentación puede resultar compleja o incluso imposible de llevar a cabo, lo que hace necesario trabajar con algún tipo de representación que se aproxime a la realidad, y a la que se conoce como modelo. (López Guillén, s.f.)

Básicamente, un modelo es una herramienta que permite predecir el comportamiento de un sistema sin necesidad de experimentar sobre él. (López Guillén, s.f.)

Los modelos de sistemas físicos pueden ser de muy diversos tipos. Una clasificación, en función del grado de formalismo matemático que poseen, es la siguiente (López Guillén, s.f.):

- Modelos mentales, intuitivos o verbales.
- Modelos no paramétricos:

Muchos sistemas quedan perfectamente caracterizados mediante un gráfico o tabla que describa sus propiedades dinámicas mediante un número no finito de parámetros. Por

CAPÍTULO I

ejemplo, un sistema lineal queda definido mediante su respuesta al impulso o al escalón, o bien mediante su respuesta en frecuencia.

- Modelos paramétricos o matemáticos:

Para aplicaciones más avanzadas, puede ser necesario utilizar modelos que describan las relaciones entre las variables del sistema mediante expresiones matemáticas como pueden ser ecuaciones diferenciales (para sistemas continuos) o en diferencias (para sistemas discretos).

En función del tipo de sistema y de la representación matemática utilizada, los modelos pueden clasificarse en:

- Determinísticos o estocásticos.

Se dice que un modelo es determinístico cuando expresa la relación entre entradas y salidas mediante una ecuación exacta. Por otra parte, un modelo es estocástico si posee un cierto grado de incertidumbre. Estos últimos se definen mediante conceptos probabilísticos o estadísticos.

- Dinámicos o estáticos.

Un sistema es estático cuando la salida depende únicamente de la entrada en ese mismo instante. En estos sistemas existe una relación directa entre entrada y salida, independiente del tiempo. Un sistema dinámico es aquél en el que las salidas evolucionan con el tiempo tras la aplicación de una determinada entrada. En estos últimos, para conocer el valor actual de la salida es necesario conocer el tiempo transcurrido desde la aplicación de la entrada.

- Continuos o discretos.

Los sistemas continuos trabajan con señales continuas, y se caracterizan mediante ecuaciones diferenciales. Los sistemas discretos trabajan con señales muestreadas, y quedan descritos mediante ecuaciones en diferencias

Para obtener estos modelos existen dos vías fundamentales:

1. Modelos Teóricos:

Se trata de un método analítico, en el que se recurre a leyes básicas de la física para describir el comportamiento dinámico de un fenómeno o proceso. (López Guillén, s.f.)

CAPÍTULO I

2. Identificación del Sistema:

Se entiende por identificación de sistemas a la obtención de forma experimental de un modelo que reproduzca con suficiente exactitud, para los fines deseados, las características dinámicas del proceso objeto de estudio.. (López Guillén, s.f.)

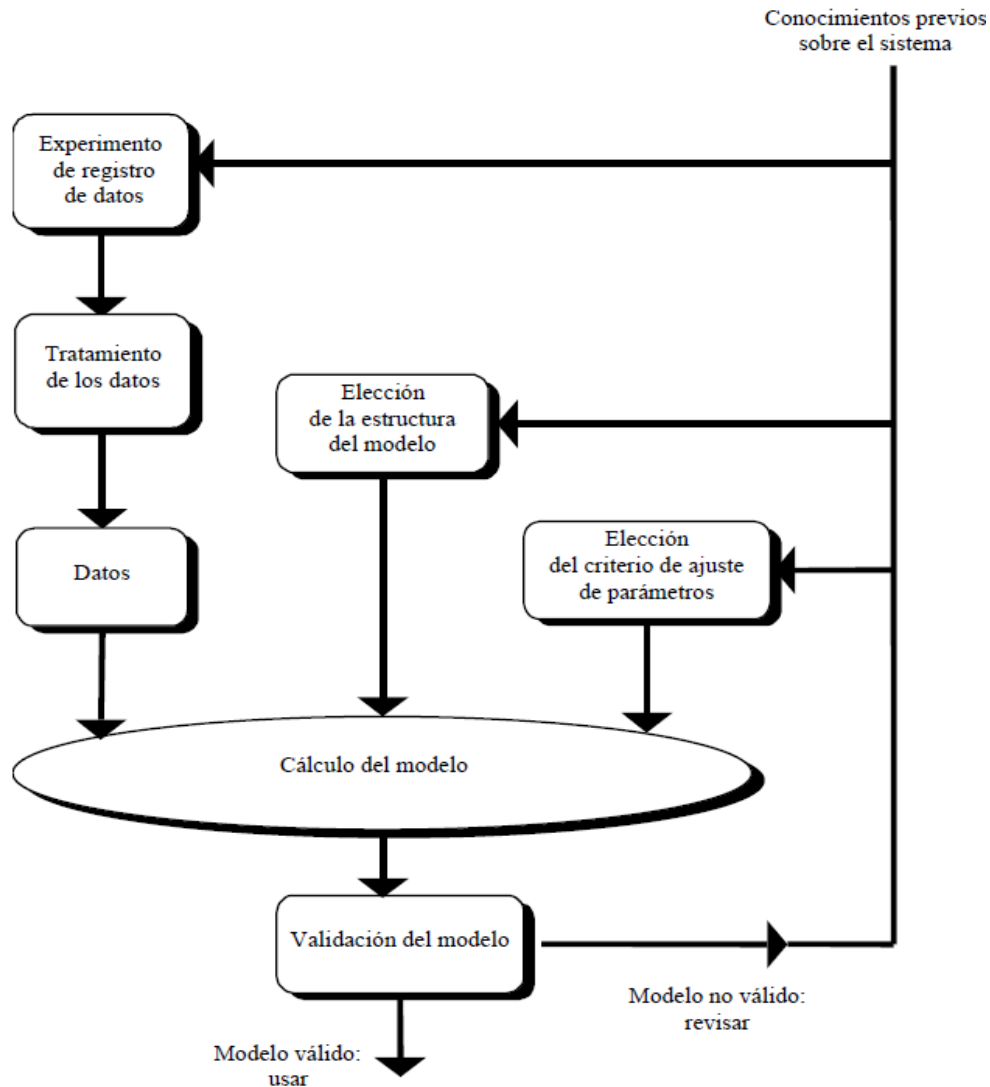


Fig.1.18- *Proceso de Identificación del Sistema* (López Guillén, s.f.)

En su tesis de doctorado, el Dr. Bart Peeters de la universidad de Leuven en Bélgica recoge las características matemáticas de 7 tipos de modelos que difieren entre sí en que pueden ser de tiempo-continuo o tiempo-discreto; de entrada-salida o solo salida o que se encuentran en el dominio del tiempo o de la frecuencia, los cuales son expuestos a continuación.

1.6.1 Modelo de Elementos Finitos

El método de los elementos finitos es un procedimiento numérico (*Paramétrico*) para resolver problemas de ingeniería y de física matemática. En los elementos con geometrías complejas, a los que se les aplican determinados sistemas de cargas y están constituidos por materiales diversos, generalmente no es posible obtener una solución matemática exacta de forma analítica (Pérez Flores, 2009).

El comportamiento dinámico de un sistema mecánico discreto consistente en n_2 masas conectadas a través de muelles y amortiguadores y se describe mediante la siguiente ecuación diferencial de matriz (Peeters, 2000) (Rainieri & Fabbrocino, 2014):

$$M\ddot{q}(t) + C_2\dot{q}(t) + Kq(t) = f(t) = B_2u(t) \quad (1.1)$$

donde $M, C_2, K \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ son las matrices de masa, amortiguación y rigidez; $q(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$ es el vector de desplazamiento en tiempo continuo t . Un punto sobre una función de tiempo denota la derivada con respecto al tiempo: $\dot{q}(t)$ que es el vector de velocidad y $\ddot{q}(t)$ el vector de aceleración. El vector $f(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$ es la fuerza de excitación. Este se factoriza en una matriz $B_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times m}$ que especifica las ubicaciones de las entradas y un vector $u(t) \in \mathbb{R}^m$ que describe las m entradas en el tiempo.

Dicho método consta de varios casos específicos como el problema del *valor propio no amortiguado* (Ewins, 1984), el de *la amortiguación proporcional* (Peeters, 2000) y *la amortiguación viscosa general* (Peeters, 2000).

1.6.2 Modelos Estado-Espacio

El modelo Estado-Espacio (*Paramétrico*) es una representación diferente de las relaciones de entrada-salida comparada con la aproximación de la función de respuesta de transferencia o frecuencia. Este modelo fue desarrollado en la década del 60 para satisfacer el incremento de los requerimientos rigurosos para el estudio de los sistemas dinámicos a gran escala con computadoras. El modelo se basa en el concepto de estado el cual ha existido en el campo de la dinámica clásica pero no ha sido usado de la misma manera para el modelo Estado-Espacio. (He & Fu, 2001)

CAPÍTULO I

Existen ventajas al usar un modelo Estado-Espacio para el estudio de sistemas dinámicos. Este modelo es capaz de representar las características internas. Formula ecuaciones de gran simplicidad de formas las cuales no son adecuadas para su computación. Además, es a menudo más fácil optimizar un sistema dinámico usando este modelo. (He & Fu, 2001)

1.6.2.1 Modelos Estado-Espacio de Tiempo-Continuo

El modelo Estado-Espacio de Tiempo-Continuo (Peeters, 2000) clásico se deriva a partir de *la ecuación de estado* (He & Fu, 2001) y *la ecuación de observación* (Rainieri & Fabbrocino, 2014).

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_c x(t) + B_c u(t) \\ y(t) &= C_c x(t) + D_c u(t)\end{aligned}\tag{1.2}$$

Partiendo del modelo clásico (1.2) pueden derivarse algunas transformaciones matemáticas del mismo, entre las que pueden destacarse la relación al *análisis modal clásico* (Peeters, 2000), *la descomposición modal de tiempo-continuo* (Peeters, 2000), *la reducción modal del tiempo-continuo* (Peeters, 2000).

También de este modelo se deriva un *caso especial de amortiguamiento proporcional*. El amortiguamiento proporcional fue introducido para la simplificación de las matemáticas relacionadas con la modelación de las estructuras vibrantes, debido a que el amortiguamiento viscoso (el cual incluye amortiguamiento proporcional como caso especial) es más general y realista (Peeters, 2000).

Considerando que los ensayos experimentales arrojan mediciones tomadas en instantes discretos del tiempo, mientras que las ecuaciones de estado y de observación se expresan en tiempo continuo, el modelo de Estado-Espacio de Tiempo-Continuo tiene que ser transformado en un modelo de Tiempo-Discreto (Rainieri & Fabbrocino, 2014). Además, otra razón por la cual mirar los modelos de Tiempo-Discreto es que estos son necesarios para la realización de simulaciones (Peeters, 2000).

1.6.2.2 Modelos Estado-Espacio de Tiempo-Discreto

Resulta útil comenzar por elegir un determinado período de muestreo Δt [s]. Las ecuaciones de tiempo continuo se discretizan y resuelven en todos los instantes de tiempo discreto k [-],

CAPÍTULO I

donde $t = k\Delta t, k \in \mathbb{N}$. Típico para el muestreo de ecuaciones de tiempo continuo es que un cierto comportamiento de las variables dependientes del tiempo entre dos muestras ha sido asumido. Una suposición de Retención de Orden Cero, *Zero-Order-Hold (ZOH)*, significa que la entrada es constante por partes durante el período de muestreo. Bajo este supuesto, el modelo de estado-espacio de tiempo continuo (1.2) se convierte en el modelo estado-espacio de tiempo discreto (Peeters, 2000):

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\y_k &= Cx_k + Du_k\end{aligned}\tag{1.3}$$

Donde $x_k = x(k\Delta t) = (q_k^T \dot{q}_k^T)^T$ es el vector de estado de tiempo discreto que contiene los desplazamientos y velocidades: u_k, y_k son la entrada y la salida muestreadas, A es la matriz de estado discreta, B es la matriz de entrada discreta, C es la matriz de salida discreta, D matriz de transmisión directa.

Al igual que en el modelo de tiempo-continuo, se presenta la *reducción del modelo de tiempo-discreto*. Esta reducción puede ser formalmente probada poniendo los siguientes estados (que tienen que eliminarse) iguales a los actuales estados. Este es el equivalente en tiempo discreto de establecer la derivada de los estados continuos a cero. (Peeters, 2000)

El modelo expresado por (1.3) es un modelo del tipo determinístico desde el momento en que el sistema se deriva de un método determinístico de solo-entrada. Los componentes estocásticos tienen que ser incluidos necesariamente para describir las mediciones actuales (Rainieri & Fabbrocino, 2014).

1.6.2.3 Modelos Estocásticos de Estado-Espacio

Puede demostrarse que, aplicando la reducción del modelo, el muestreo y el modelado del ruido en (1.1) puede ser convertido en el siguiente modelo estocástico de tiempo-discreto (Peeters & De Roeck, 2001):

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + w_k \\y_k &= Cx_k + Du_k + v_k\end{aligned}\tag{1.4}$$

En un contexto de ingeniería civil, la información de solo vibración que está disponible es la respuesta de una estructura excitada por alguna unidad inmensurable. Debido a la falta de

CAPÍTULO I

información de entrada no es posible (desde el punto de vista de identificación de sistema) el distinguir entre los términos de u y los términos de ruido en la ecuación (1.4). Entonces el modelo estocástico de estado-espacio de tiempo-discreto se lee (Peeters, 2000):

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + w_k \\ y_k &= Cx_k + v_k\end{aligned}\tag{1.5}$$

La entrada está ahora implícitamente modelada por los términos de ruido. Sin embargo, el ruido blanco asumido no puede omitirse de estos términos. La consecuencia es que si este ruido blanco asumido es violado, por ejemplo, si la entrada contiene ruido blanco algunos componentes de frecuencias dominantes lo tienen también, estos componentes de frecuencia no pueden ser formas separadas de las frecuencias propias del sistema y aparecerán como polos del estado matriz A . (Rainieri & Fabbrocino, 2014)

Es necesario destacar que los sistemas estocásticos presentan una serie de propiedades que no son objetivo de esta tesis de grado en abordar pero pueden ser brevemente resumidas de ser necesario su profundización en (Peeters, 2000).

Un modelo alternativo a los sistemas estocásticos es el que se conoce como *modelo de innovación avanzada*. Este se obtiene de aplicar el filtro Kalman (Aoki, 1987) a (1.5):

$$\begin{aligned}z_{k+1} &= AZ_k + Ke_k \\ y_k &= Cz_k + e_k\end{aligned}\tag{1.6}$$

A modo de resumen podemos afirmar que los modelos Estado-Espacio nos proveen de una amplia gama de posibilidades de modelación. Nos permite usar modelos físicos en tiempo-continuo con o sin la correspondiente descripción del ruido de tiempo-continuo para la obtención de estructuras con parámetros físicos Θ . Podemos usar parametrización física de las partes dinámicas combinadas con la parametrización *black-box* de las propiedades del ruido, así como en la parametrización directa de las formas de innovación y conseguimos arribar al modelado del ruido el cual también es una vía de parametrización física (Ljung, 1999).

CAPÍTULO I

Los métodos más clásicos de identificación de sistemas identifican modelos que no contienen el estado. En esta sección el vector de estado se elimina del modelo de innovación avanzada de estado-espacio (1.6) para dar paso al llamado modelo ARMA.

1.6.3 Modelos ARMA

Un modelo de ARMA (*Paramétrico*) se escribe como:

$$y_k + \alpha_1 y_{k-1} + \dots + \alpha_{n_a} y_{k-n_a} = e_k + \gamma_1 e_{k-1} + \dots + \gamma_{n_y} e_{k-n_y} \quad (1.7)$$

donde, como antes, y_k es el vector de salida y e_k una secuencia de vector de ruido blanco. El miembro izquierdo se llama la parte Auto-Regresiva (**AR**) y el miembro derecho parte del Promedio en Movimiento (**MA**), de ahí el nombre del modelo. Las matrices $\alpha_i \in \mathbb{R}^{l \times l}$ son los parámetros de la matriz AR; las matrices $\gamma_i \in \mathbb{R}^{l \times l}$ son los parámetros de matriz **MA**. A veces, en el caso de múltiples salidas, se habla de modelos ARMAV (Rainieri & Fabbrocino, 2014) como para destacar su carácter multi-variable. Está claro que el modelo ARMA, el cual está deducido del modelo estado-espacio, tiene el mismo orden AR n_a como el orden MA n_y (Peeters, 2000).

Los parámetros modales pueden ser calculados del modelo ARMA por la descomposición del valor propio de la matriz de compañía del polinomio AR (Peeters & De Roeck, 2001).

Se obtienen como soluciones homogéneas de las ecuaciones ARMA. En tiempo continuo, tales soluciones tienen la forma: $y(t) = v_i e^{\lambda_i t}$. El equivalente en tiempo discreto es:

$$y_k = v_i \mu_i^k \quad (1.8)$$

Donde $v_i \in \mathbb{C}^l (i = 1, \dots, pl)$ representa cualquiera de los vectores propios pl y $\mu_i = e^{\lambda_i \Delta t}$ es un valor propio discreto (Peeters, 2000).

En esta sección fue mostrado que un modelo **ARMA** de orden p-ésimo es una buena representación de una Estructura vibrante con pl modos. Obsérvese que un modelo **AR** de orden p-ésimo no es una representación equivalente de tal estructura. La parte **MA** también debe tenerse en cuenta. Puede mostrarse, sin embargo, que un modelo de **AR** con orden infinito es teóricamente equivalente a un Modelo **ARMA** de orden finito. Esto motivó el uso

CAPÍTULO I

de modelos **AR** en la identificación del sistema de estructuras vibratorias. Desafortunadamente, la asunción teórica de orden infinito, significa prácticamente que muchos polos numéricos necesitan ser introducidos para obtener un ajuste razonable de los datos en la identificación. (Ljung, 1999)

1.6.4 Modelos en el dominio de la frecuencia

Aunque los datos de medición suelen estar disponibles como muestras de las señales de tiempo de entrada y salida, es muy útil mirar la representación del dominio de la frecuencia de estas señales.

Muchas interesantes características de las señales se revelan en el dominio de la frecuencia. Por ejemplo, las frecuencias propias de una estructura ligeramente amortiguada emergen inmediatamente en una gráfica de los picos en el campo de frecuencia de una señal de medición. La herramienta matemática para convertir una señal en el tiempo al dominio de la frecuencia es la Transformada de Fourier. Junto al hecho de que proporciona información útil (*No Paramétrico*), otra razón para la popularidad de las representaciones del dominio de la frecuencia es que, desde hace unas décadas, existe un algoritmo muy eficiente que implementa la Transformada de Furier, conocido como el algoritmo Fast Fourier Transform (FFT)(Transformada Rápida de Fourier) (Cooley & Tukey, 1965).

1.6.4.1 Modelos de Tiempo-Continuo

Como el título lo indica, se van a estudiar modelos que son el equivalente al dominio de la frecuencia de los modelos continuos. La principal razón para mirar estos modelos es que existen muchos métodos de identificación que identifican un modelo de tiempo-continuo en el dominio de frecuencia a partir de muestras de la *transformada de Fourier* de las señales. Una clase especial de estos métodos asume un modelo que está parametrizado en términos de los parámetros modales de la estructura en lugar de las matrices de estado-espacio más bien abstractas.

Primero introduciremos la *Transformada de Laplace*, la cual nos conduce a la *función de transferencia* y esta a su vez puede derivarse en la *Función de Respuesta en Frecuencia* la cual, desde un punto de vista práctico, es más importante. Finalmente el espectro es

CAPÍTULO I

introducido, lo cual es más relevante en caso de datos de sólo salida (y donde los datos de entrada son supuestos a ser ruido blanco) (Peeters, 2000).

1.6.4.2 Modelos de Tiempo-Discreto

Al igual que en el modelo anterior, el modelo de tiempo-discreto trabaja con la transformada- z que es análoga a la transformada de Laplace (Peeters, 2000).

A partir de dicha transformada y mediante un desarrollo matemático que puede profundizar en (Peeters, 2000) puede obtenerse la siguiente expresión del espectro estocástico:

$$S_y(e^{j\omega\Delta t}) = C(zI - A)^{-1}G + R_0 + G^T(z^{-1}I - A^T)^{-1}C^T|_{z=e^{j\omega\Delta t}} \quad (1.9)$$

Por otra parte también es posible obtener un modelo en tiempo discreto partiendo del modelo de innovación avanzada mediante el filtrado del ruido blanco (Ljung, 1999) o por la introducción de la función de transferencia. (Peeters, 2000)

1.7 MÉTODOS UTILIZADOS EN LA IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS.

Para la identificación de sistemas existen gran cantidad de algoritmos los cuales parten de algunas ideas fundamentales (He & Fu, 2001):

1. Métodos de identificación en el dominio de la frecuencia:

- Método de un solo grado de libertad. (SDoF)
 - “Peak Picking”
 - Círculo de Nyquist
 - FRF inversa
 - Mínimos Cuadrados
- Método de varios grados de libertad. (MDoF)
 - Polinomios de fracción racional
 - Estructuras ligeramente amortiguadas

2. Métodos de identificación de Sistemas en el dominio del tiempo:

- Método de los mínimos cuadrados.
- Método Ibrahim.
- Método del decrecimiento aleatorio.
- Método del tiempo seriado ARMA

CAPÍTULO I

- Método de los mínimos cuadrados exponenciales complejos. (LSCE)
3. Métodos Multi-entrada multi-salida:
- Método poli-referencia en el dominio de la frecuencia
 - Método global en el dominio del tiempo
 - Método del algoritmo de la realización de los sistemas propios

Es útil hacer una distinción entre los métodos de identificación no paramétricos y los paramétricos. **La identificación no paramétrica** involucra la estimación de una función de respuesta en impulso (IRF), una función de respuesta en frecuencia (FRF), función de correlación (CF) o de densidad de potencia espectral (PSD), no como alguna función matemática dependiente de algunos parámetros sino como un conjunto de valores tabulados para cada intervalo de tiempo o frecuencia observado. Aunque los modelos no paramétricos son usados en ocasiones directamente para el análisis modal, son mayormente utilizados como datos pre-procesados para la identificación paramétrica dado que el nivel de exactitud de esta es mucho mayor que la de la identificación no paramétrica. (Reynders & de Roeck, 2014)

La identificación paramétrica de sistemas lineales como disciplina originada en la década de 1960 se ha desarrollado siguiendo dos líneas fundamentales. La primera línea es la estructura de predicción de errores, la cual se apoya en el principio de máximo parecido (ML) (Ljung, 1999). La segunda línea pretende la identificación del sistema modal explotando la correlación estructural de las señales de respuesta (y, de ser relevante, las señales de entrada). Esta línea comenzó con los trabajos de Ho y Kalman de 1966 y (Akaike, 1974) en la realización de sistemas, la cual fue generalizada en el también llamado aproximación del sub-espacio (Van Overshee & De Moor, 1996). Ambos métodos tienen sus respectivas ventajas siendo los métodos del sub-espacio más robustos, estadísticamente más acertados y computacionalmente menos demandantes. (Reynders & de Roeck, 2014)

1.8 PROCESAMIENTO DIGITAL DE LAS SEÑALES.

Existen varios softwares que se encargan del procesamiento de las señales digitales. En el caso específico de esta Tesis de Grado se profundizará en el software MACEC.

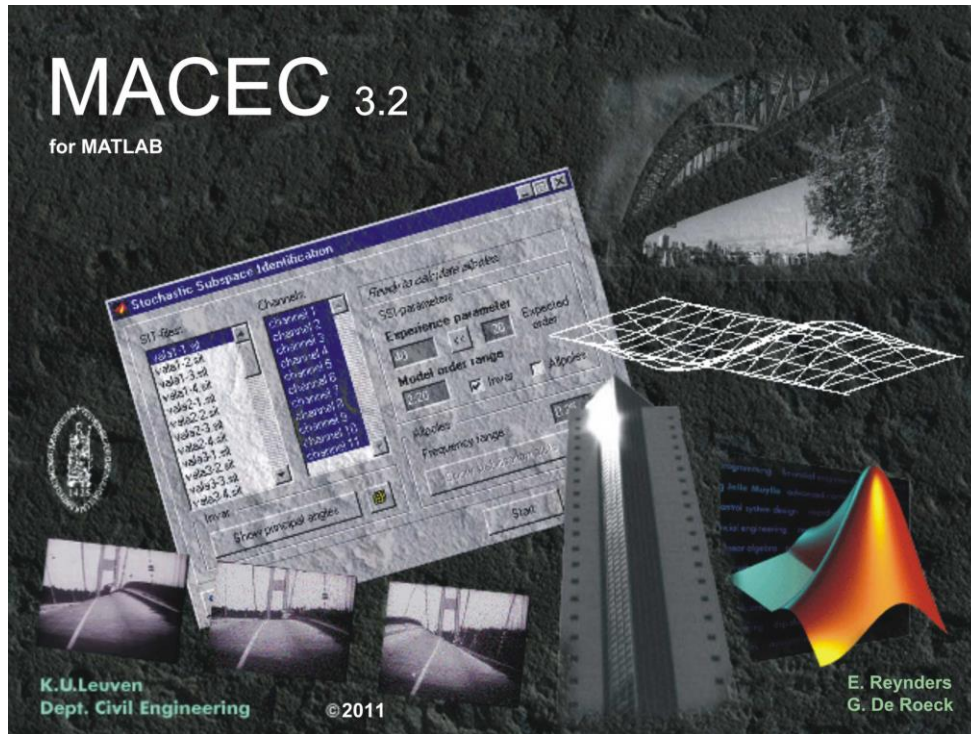


Fig.1.19- Portada del MACEC v3.2 (Reynders, et al., 2014)

MACEC es parte del «toolbox» de MATLAB: SPICE, y este hace uso de otro «toolbox» de MATLAB desarrollada en la Sección de Mecánica Estructural de KU Leuven: SIGFUN. Los «toolboxes» de MACEC son un grupo de funciones de MATLAB que sirven a un propósito específico (Reynders, et al., 2014):

- SPICE contiene funciones que permiten al usuario identificar un modelo matemático de sistema de los datos obtenidos (identificación del sistema), para desarrollar un análisis modal con la descripción del sistema identificado y para desarrollar un análisis espectral de ondas de superficie de la medición de datos;

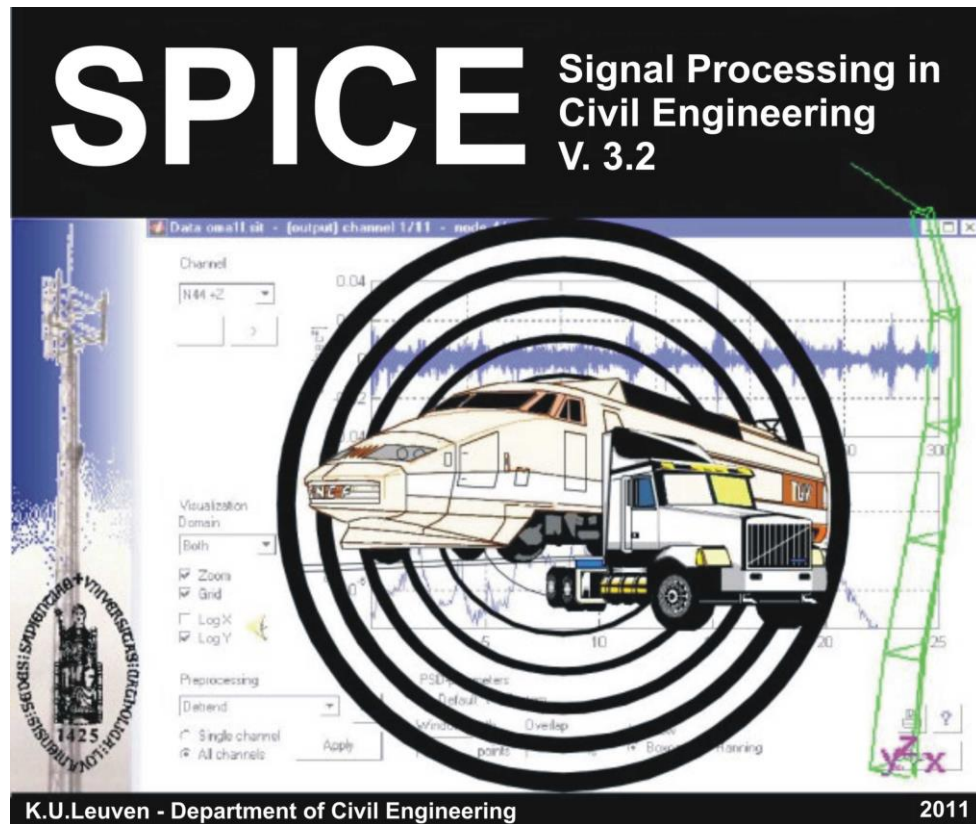


Fig.1.20- Portada de la herramienta *SPICE* (Reynders, et al., 2014)

- SIGFUN contienen funciones que son de utilidad en el procesamiento de las señales medidas.

Para un buen entendimiento de la terminología, es importante hacer una distinción entre identificación del sistema y análisis modal. Un análisis modal experimental, operacional o una combinación de ambos consiste en tres etapas diferentes:

1. Obtención de datos y pre-procesamiento.
2. Identificación del sistema.
3. Determinación de las características modales del modelo del sistema identificado.
(Análisis Modal)

Entonces el término «análisis modal» está definido en dos niveles diferentes: (i) todo el proceso de obtención de las características modales de las mediciones (etapas 1; 2 y 3) y (ii) la determinación de las características modales del modelo del sistema identificado (etapa 3). Esto a menudo tiende a confundir la identificación del sistema con el análisis modal de la segunda etapa, específicamente cuando la diferencia es sutil. Por lo tanto, la herramienta

CAPÍTULO I

MACEC claramente diferencia entre identificación del sistema y el análisis modal del segundo nivel, ambos en la definición de las funciones y en la interfaz de usuario gráfica (GUI) (Reynders, et al., 2014).

La interfaz gráfica de usuario del software es construida alrededor de una ventana principal, dividida en diferentes secciones. En cada sección, se lidia con una parte específica del proceso del análisis modal, la mayoría de las veces por botones los cuales sacan otras ventanas.

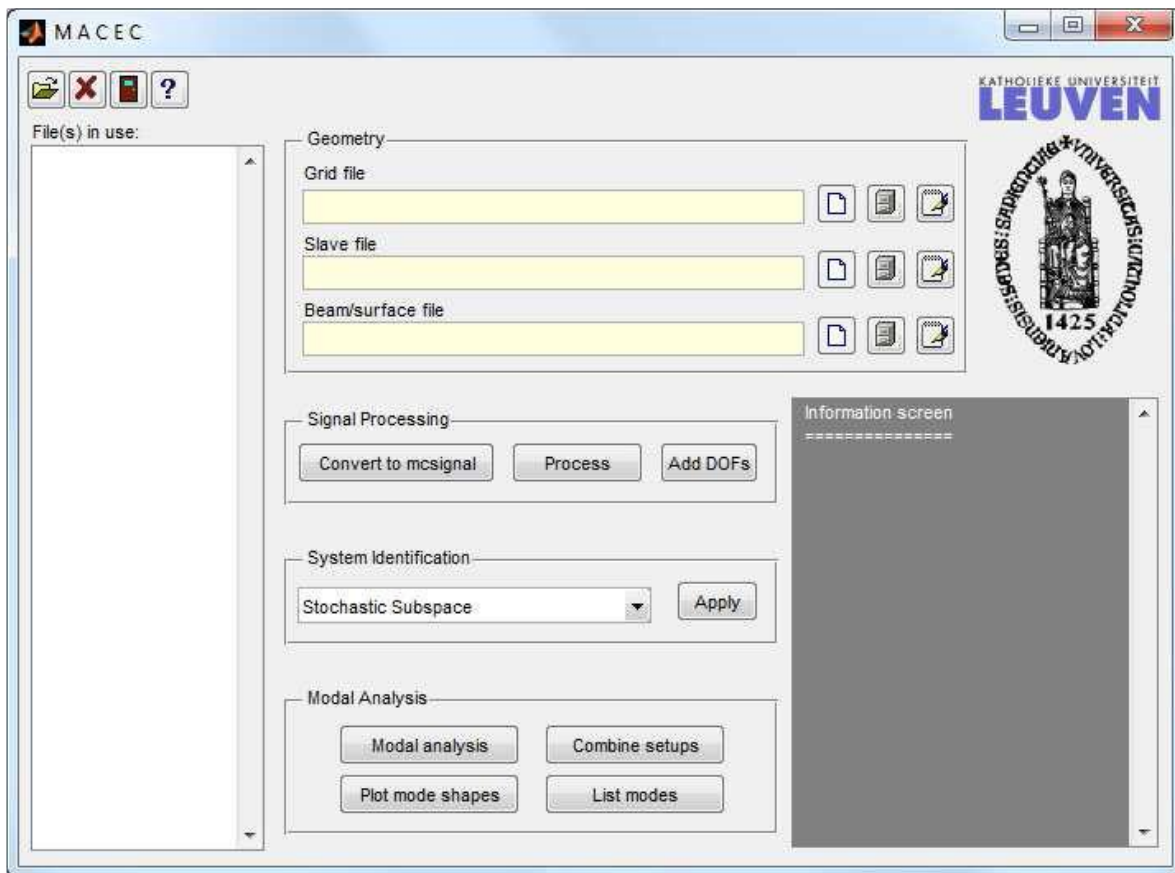


Fig.1.21- *Ventana principal del MACEC* (Reynders, et al., 2014)

En la figura 5 se puede apreciar una generalidad de la GUI y también indica la interacción entre las figuras de la GUI y los ficheros de los cuales son creados al interactuar con esta.

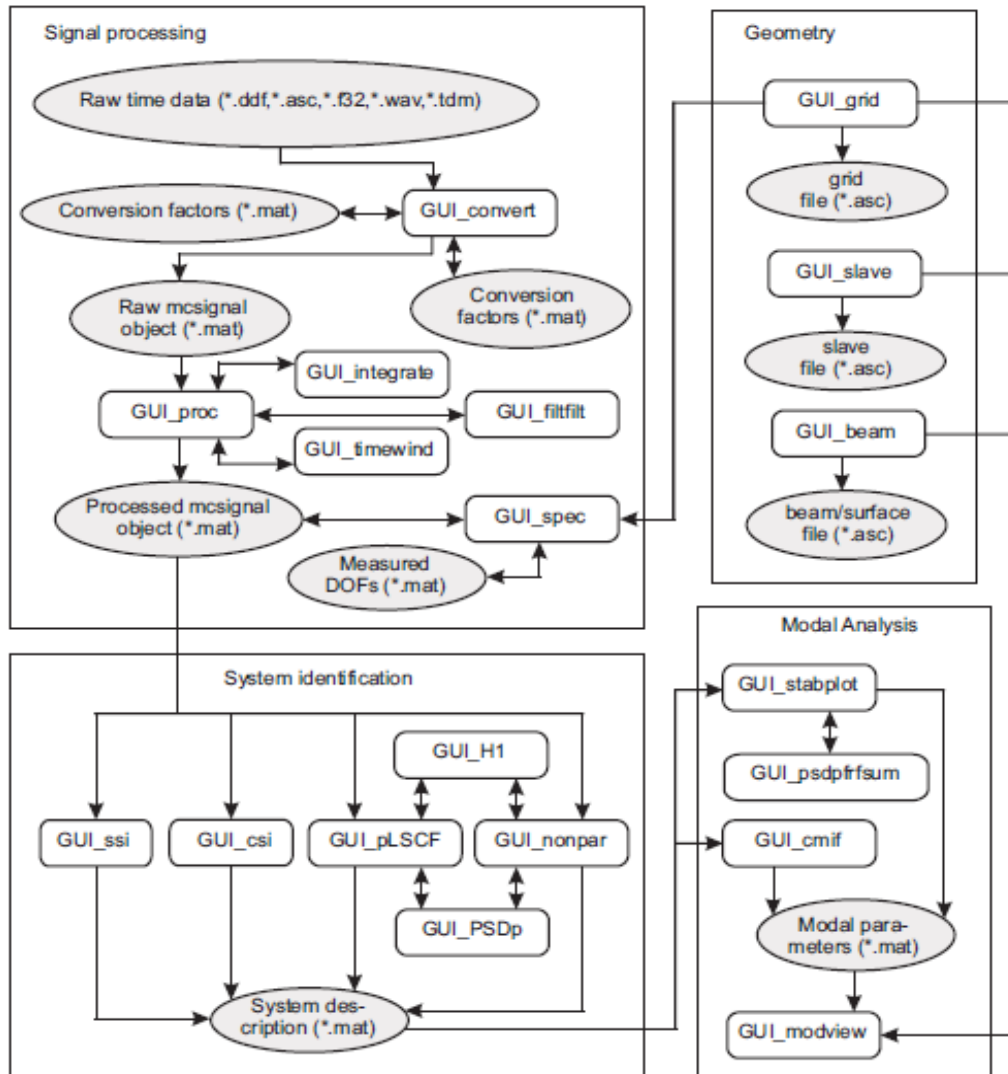


Fig.1.22- *Ficheros creado a partir de la interacción con el software* (Reynders, et al., 2014)

1.8.1 Modelos Modales empleados por el software «MACEC»

El software emplea 5 tipos de Modelos:

1. Un modelo no-paramétrico PSD⁺ (positive power spectral density);
2. Modelo estado-espacio estocástico identificado con datos-SSI de órdenes 2, 4, 6, ..., 60;
3. Modelo estado-espacio estocástico identificado con datos/ref-SSI de órdenes 2, 4, 6, ..., 30;
4. Modelo estado-espacio estocástico identificado con cov-SSI de órdenes 2, 4, 6, ..., 60;

CAPÍTULO I

5. Modelos de descripción de fracción de matriz derecha identificado con pLSCF operacional de órdenes 4, 8, 12, ..., 60.

1.8.2 Métodos de Identificación de Sistemas

1. Estimación No-paramétrica PSD+ usando las aproximaciones de correlograma o periodograma;
2. Identificación del subespacio estocástico basado en referencia derivado de los datos (SSI-data/ref);
3. Identificación de subespacio estocástico basado en referencia derivado de la covarianza (SSI-cov/ref);
4. Identificación operacional poli-referencia de los mínimos cuadrados complejos en el dominio de la frecuencia (pLSCF).

1.9 CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO.

- A pesar de la generalización realizada sobre los métodos o mecanismos de excitación de los sistemas, en el caso de estudio de los posteriores capítulos no será necesario el uso de ninguno de estos ya que se tratará de un Análisis Modal Operacional donde no se miden las entradas del sistema.
- Existen varios tipos de instrumentos de detección de señales, algunas incluso inalámbricas, pero sigue siendo el grupo integrado por los acelerómetros los más utilizados en los ensayos actuales y los cuales muestran muy buenos resultados, no queriendo decir esto que no presenten inconvenientes.
- El conocimiento que se tenga sobre las señales de entrada en el sistema nos ubica ante un Análisis Modal Experimental (EMA) u Operacional (OMA).
- Existe gran cantidad de modelos modales que responde a la mayoría de los sistemas dinámicos existentes, de los cuales los modelos estocásticos serán los que den respuesta al caso de estudio de la presente investigación.
- Al igual que los modelos, existe gran cantidad de métodos para la identificación de sistemas; siendo los métodos encargados de la identificación de sistemas estocásticos los que serán más efectivos en el caso de estudio de la presente investigación.
- Es la herramienta de MATLAB: «MACEC» un poderoso instrumento para el procesamiento digital de las señales en condiciones operacionales dado por su amplio

CAPÍTULO I

campo de posibilidades en la identificación de sistemas estocásticos, así como las herramientas matemáticas empleadas al efecto, desarrolladas por los investigadores a la vanguardia, en lo que al campo de la dinámica estructural se refiere.

CAPÍTULO II: IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS ESTOCÁSTICOS

El presente capítulo aborda temas acerca de la base matemática detrás de los métodos de identificación de sistemas estocásticos empleados por la herramienta de MATLAB: MECEC.

2.1 GENERALIDADES DE LA IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS ESTOCÁSTICOS.

Llevado al contexto de la Ingeniería Civil, se refiere a *sistema* a cualquier tipo de estructuras: puentes, torres, vigas, etc.; la estimación de los parámetros modales es el tipo específico de *identificación y estocástico* se refiere a que la estructura es excitada por una fuerza de entrada sobre la cual no se tiene conocimiento ni control y solo se miden las salidas del sistema (aceleración, desplazamiento, etc.). En este tipo de métodos el conocimiento determinístico de la entrada es remplazado por el supuesto de que las entradas son parte de un proceso estocástico, también conocido en la literatura como *Ruido Blanco*.

En términos generales, el proceso de identificación comprende los siguientes pasos:

1. *Obtención de datos de entrada - salida.* Para ello se debe excitar el sistema mediante la aplicación de una señal de entrada y registrar la evolución de sus entradas y/o salidas durante un intervalo de tiempo.
2. *Tratamiento previo de los datos registrados.* Los datos registrados están generalmente acompañados de ruidos indeseados u otro tipo de imperfecciones que puede ser necesario corregir antes de iniciar la identificación del modelo. Se trata, por tanto, de «preparar» los datos para facilitar y mejorar el proceso de identificación.
3. *Elección de la estructura del modelo.* Si el modelo que se desea obtener es un modelo paramétrico, el primer paso es determinar la estructura deseada para dicho modelo. Este punto se facilita en gran medida si se tiene un cierto conocimiento sobre las leyes físicas que rigen el proceso.
4. *Obtención de los parámetros del modelo.* A continuación se procede a la estimación de los parámetros de la estructura que mejor ajustan la respuesta del modelo a los datos de entrada-salida obtenidos experimentalmente.
5. *Validación del modelo.* El último paso consiste en determinar si el modelo obtenido satisface el grado de exactitud requerido para la aplicación en cuestión. Si se llega a

CAPÍTULO II

la conclusión de que el modelo no es válido, se deben revisar los siguientes aspectos como posibles causas:

- a) El conjunto de datos de entrada-salida no proporciona suficiente información sobre la dinámica del sistema.
- b) La estructura escogida no es capaz de proporcionar una buena descripción del modelo.
- c) El criterio de ajuste de parámetros seleccionado no es el más adecuado.

Existen diversos métodos de identificación, que pueden clasificarse según distintos criterios, siendo estos algunos de las clasificaciones más generales:

Dependiendo del tipo de modelo obtenido:

1. *Métodos no paramétricos*, que permiten obtener modelos no paramétricos del sistema bajo estudio. Algunos de estos métodos son: análisis de la respuesta transitoria, análisis de la respuesta en frecuencia, análisis de la correlación, análisis espectral, análisis de Fourier, etc.
2. *Métodos paramétricos*, que permiten obtener modelos paramétricos. Estos métodos requieren la elección de una posible estructura del modelo, de un criterio de ajuste de parámetros, y por último de la estimación de los parámetros que mejor ajustan el modelo a los datos experimentales.

Dependiendo de la aplicación:

1. *Métodos de identificación off-line (a posteriori)*, utilizados en aquellas aplicaciones en que no se requiera un ajuste continuado del modelo. En estos casos, se realiza la identificación previa de la planta, considerándose que la validez de los parámetros obtenidos no se verá alterada con el paso del tiempo.
2. *Métodos de identificación on-line (identificación recursiva)*, en los que los parámetros se van actualizando continuamente a partir de los nuevos datos de entrada-salida obtenidos durante la evolución del proceso. Estos métodos son muy utilizados en sistemas de control adaptativo.

2.2 MÉTODOS DE IDENTIFICACIÓN NO-PARAMÉTRICA.

Los métodos de identificación no paramétricos permiten obtener modelos o representaciones no paramétricas de la planta bajo estudio.

Supóngase el siguiente sistema:

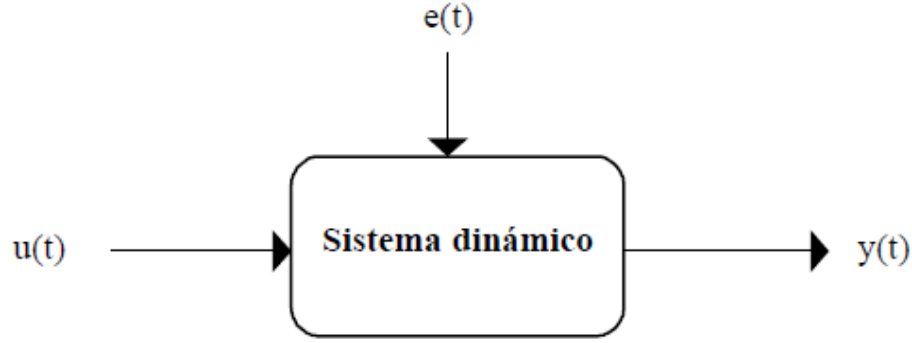


Figura 2.1: Señales de interés para el modelado no paramétrico (López Guillén, s.f.)

Suponiendo que el sistema es lineal, la relación entre la salida del sistema $y(t)$, su entrada $u(t)$ y el ruido $e(t)$ puede expresarse del siguiente modo:

$$y(t) = G(q^{-1}) * u(t) + e(t) \quad (2.1)$$

donde q^{-1} es el operador retardo y el producto $G(q^{-1}) * u(t)$ representa la siguiente secuencia:

$$G(q^{-1}) * u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)u(t-k) \quad (2.2)$$

y por tanto:

$$G(q^{-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)q^{-k} \quad (2.3)$$

La secuencia $g(k)$ se conoce como *respuesta al impulso* del sistema, y coincide con la salida del mismo cuando a la entrada se aplica un impulso unitario. Por otro lado, la función $G(z)$ es la *función de transferencia* del sistema. Evaluando esta última a lo largo del círculo unidad ($z = e^{j\omega}$) se obtiene la llamada *respuesta en frecuencia* del sistema, $G(e^{j\omega})$.

CAPÍTULO II

La respuesta al impulso es un modelo no paramétrico que se define en el dominio del tiempo, mientras que la respuesta en frecuencia es una descripción no paramétrica en el dominio de la frecuencia.

2.2.1 Identificación No-Paramétrica en el dominio del tiempo

Mediante esta técnica de identificación se pretende obtener la respuesta al impulso del sistema, o bien la respuesta al escalón del mismo (pudiendo obtenerse esta última mediante una integración de la primera). Para ello, debe registrarse la evolución temporal de la salida del sistema tras la aplicación de una señal de impulso o escalón. Obviamente, la imposibilidad de conseguir este tipo de señales en la práctica lleva a utilizar un método indirecto para obtener la respuesta impulsiva, conocido como análisis de la correlación.

Si se escoge como entrada al sistema $u(t)$ un ruido blanco, cuya función de covarianza es:

$$R_u(\tau) = E[u(t + \tau)u(t)] = \begin{cases} \lambda & \text{si } \tau = 0 \\ 0 & \text{si } \tau \neq 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

entonces la correlación cruzada entre la entrada y la salida puede ponerse del siguiente modo:

$$R_{yu}(\tau) = E[u(t + \tau)u(t)] = \lambda g(\tau) \quad (2.5)$$

por tanto la respuesta al impulso puede obtenerse a partir de las N muestras registradas de la entrada y la salida del sistema del siguiente modo:

$$g(\tau) = \frac{1}{\lambda N} \sum_{t=1}^N y(t + \tau)u(t) \quad (2.6)$$

Si la entrada al sistema no es un ruido blanco puro, puede considerarse como el resultado de la aplicación de un filtro $L(q^{-1})$ a un ruido blanco. Aplicando dicho filtro a los datos de salida del sistema puede realizarse la misma operación indicada anteriormente para obtener los coeficientes de $g(k)$.

Este método es muy apropiado para obtener una idea rápida de la relación entre distintas señales del sistema, retardos, constantes de tiempo y ganancias estáticas del mismo.

2.2.2 Identificación No-Paramétrica en el dominio de la frecuencia

En este caso, el modelo resultante es una representación de la respuesta en frecuencia del sistema, obtenida mediante la aplicación de señales de entrada sinusoidales de distintas

CAPÍTULO II

frecuencias. Cuando no sea posible aplicar este tipo de entradas, puede recurrirse a la aplicación de un ruido blanco, que permite obtener la respuesta en frecuencia mediante el conocido *análisis espectral*. Este análisis se basa en la realización de la transformada de Fourier de las funciones de covarianza de la entrada y la salida y la correlación entre la entrada y la salida. Por tanto, definiendo las siguientes funciones de correlación:

$$\begin{aligned} R_u(\tau) &= E[u(t + \tau) * u(t)] = \frac{1}{N} * \sum_{t=1}^N u(t + \tau) * u(t) \\ R_{yu}(\tau) &= E[y(t + \tau) * u(t)] = \frac{1}{N} * \sum_{t=1}^N y(t + \tau) * u(t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

y sus transformadas de Fourier:

$$\begin{aligned} \Phi_u(\omega) &= \sum_{-\infty}^{\infty} R_u(\tau) * e^{-j\omega\tau} \\ \Phi_{yu}(\omega) &= \sum_{-\infty}^{\infty} R_{yu}(\tau) * e^{-j\omega\tau} \end{aligned} \quad (2.8)$$

se demuestra que puede obtenerse la respuesta en frecuencia del sistema mediante la siguiente expresión:

$$G(e^{j\omega}) = \frac{\Phi_{yu}(\omega)}{\Phi_u(\omega)} \quad (2.9)$$

Las principales ventajas de este método son el no requerir un procesamiento complejo de los datos, ni ningún tipo de conocimiento previo sobre la planta, a excepción de que ésta sea lineal. Además, permite concentrar los datos obtenidos en torno al margen de frecuencias de interés. El principal inconveniente es que el modelo resultante no puede usarse directamente para simulación.

2.3 MÉTODOS DE IDENTIFICACIÓN PARAMÉTRICAS.

Los modelos paramétricos, a diferencia de los anteriores, quedan descritos mediante una estructura y un número finito de parámetros que relacionan las señales de interés del sistema (entradas, salida y perturbaciones). En muchas ocasiones es necesario realizar la identificación de un sistema del cual no se tiene ningún tipo de conocimiento previo. En estos

CAPÍTULO II

casos, se suele recurrir a modelos estándar, cuya validez para un amplio rango de sistemas dinámicos ha sido comprobada experimentalmente. Generalmente estos modelos permiten describir el comportamiento de cualquier sistema lineal. La dificultad radica en la elección del tipo de modelo (orden del mismo, número de parámetros, etc.) que se ajuste satisfactoriamente a los datos de entrada - salida obtenidos experimentalmente.

2.3.1 Tipos de modelos paramétricos

Generalmente los modelos paramétricos se describen en el dominio discreto, puesto que los datos que sirven de base para la identificación se obtienen por muestreo. En el caso de que se requiera un modelo continuo, siempre es posible realizar una transformación del dominio discreto al continuo.

La expresión más general de un modelo discreto es del tipo:

$$s(t) = \eta(t) + w(t) \quad (2.10)$$

donde $w(t)$ es el término que modela la salida debida a las perturbaciones, $\eta(t)$ la salida debida a la entrada, y $s(t)$ la salida medible del sistema. Cada uno de estos términos puede desarrollarse de la siguiente forma:

$$\eta(t) = G(q^{-1}, \theta) * u(t) \quad (2.11)$$

$$w(t) = H(q^{-1}, \theta) * e(t) \quad (2.12)$$

$$s(t) = A(q^{-1}, \theta) * y(t) \quad (2.13)$$

donde q^{-1} es el operador retardo, θ representa un vector de parámetros, $u(t)$ y $e(t)$ son la entrada al sistema y el ruido de entrada al mismo respectivamente y $y(t)$ es la salida de interés del sistema (que puede no coincidir con la salida medible). Tanto $G(q^{-1}, \theta)$ como $H(q^{-1}, \theta)$ son cocientes de polinomios del tipo:

$$G(q^{-1}, \theta) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})} = \frac{b_1 * q^{-nk} + b_2 * q^{-nk-1} + \dots + b_{nb} * q^{-nk-nb+1}}{1 + f_1 * q^{-1} + \dots + f_{nf} * q^{-nf}} \quad (2.14)$$
$$H(q^{-1}, \theta) = \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})} = \frac{1 + c_1 * q^{-1} + \dots + c_{nc} * q^{-nc}}{1 + d_1 * q^{-1} + \dots + d_{nd} * q^{-nd}}$$

$$\text{y } A(q^{-1}, \theta) \text{ un polinomio del tipo: } A(q^{-1}, \theta) = 1 + a_1 * q^{-1} + \dots + a_{na} * q^{-na} \quad (2.15)$$

El vector de parámetros θ contiene los coeficientes a_i , b_i , c_i , d_i y f_i de las funciones de

CAPÍTULO II

transferencia anteriores. La estructura genérica de estos modelos es por tanto:

$$A(q^{-1}) * y(t) = G(q^{-1}, \theta) * u(t) + H(q^{-1}, \theta) * e(t) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})} * u(t) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})} * e(t) \quad (2.16)$$

Para elegir la *estructura* de este tipo de modelos hay que determinar el orden de cada uno de los polinomios anteriores, es decir na , nb , nc , nd , nf y el retardo entre la entrada y la salida nk . Una vez elegidos estos valores, sólo queda determinar el vector de coeficientes $\theta(a_i, b_i, c_i, d_i \text{ y } f_i)$ que hacen que el modelo se ajuste a los datos de entrada - salida del sistema real.

En muchos casos, alguno de los polinomios anteriores no se incluye en la descripción del modelo, dando lugar a los siguientes casos particulares, entre otros:

Tipo de modelo	Condición	Estructura resultante
Modelo ARX	$F(q^{-1}) = D(q^{-1}) = C(q^{-1}) = 1$	$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + e(t)$
Modelo Output Error (OE)	$C(q^{-1}) = D(q^{-1}) = A(q^{-1}) = 1$	$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})}u(t) + e(t)$
Modelo ARMAX	$F(q^{-1}) = D(q^{-1}) = 1$	$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + C(q^{-1})e(t)$
Modelo Box Jenkins (BJ)	$A(q^{-1}) = 1$	$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})}u(t) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}e(t)$

Tabla 2.1: *Diferentes estructuras de modelos paramétricos.*

La anulación de alguno de los polinomios, resultando estructuras simplificadas, facilita el proceso de ajuste de parámetros. Cada una de las estructuras (ARX, ARMAX, OE o BJ) tiene sus propias características y debe ser elegida fundamentalmente en función del punto en el que se prevé que se añade el ruido en el sistema. En cualquier caso, puede ser necesario ensayar con varias estructuras y con varios órdenes dentro de una misma estructura hasta encontrar un modelo satisfactorio.

CAPÍTULO II

2.3.2 Métodos para el ajuste de parámetros

Una vez elegida la estructura del modelo (tanto el tipo - ARX, ARMAX, BJ, OE...- como los órdenes de cada polinomio), es necesario determinar el valor de los parámetros del mismo que ajustan la respuesta del modelo a los datos de entrada - salida experimentales. Es importante destacar, sin embargo, que esta etapa del proceso de identificación se ve facilitada por la existencia de herramientas software que proporcionan diferentes algoritmos para el ajuste de parámetros. Una de estas herramientas es el *Toolbox de Identificación* de Matlab.

Existen varios métodos o criterios para realizar este ajuste de parámetros, los cuales pueden ser organizados en dos clases fundamentales: *el Método de Predicción de Errores* y el *Método de Variables Instrumentales*, los cuales tienen sus casos específicos.

- Errores de predicción o residuos de un modelo

Todo modelo matemático es capaz de predecir el valor de la salida del sistema en función de las entradas y salidas en instantes anteriores. Se llama error de predicción $e(t,q)$ a la diferencia entre la salida estimada por el modelo y la salida real del sistema en un determinado instante de tiempo:

$$\varepsilon(t, \theta) = y(t) - y_e(t, \theta) \quad (2.17)$$

donde $y_e(t, \theta)$ es la salida estimada por el modelo en el instante t .

- Regresión lineal

Se dice que una estructura posee regresión lineal cuando la salida estimada puede expresarse como:

$$y_e(t, \theta) = \varphi^T(t) * \theta \quad (2.18)$$

Donde $\varphi^T(t)$ es un vector columna formado por las salidas y entradas anteriores (conocido como *vector de regresión*), y θ es el vector de parámetros del modelo.

- Método de mínimos cuadrados (LSE)

CAPÍTULO II

Aplicando los criterios fijados en los dos apartados anteriores, la expresión del error de predicción es:

$$\varepsilon(t, \theta) = y(t) - \varphi^T(t) * \theta \quad (2.19)$$

Se define la siguiente función del error:

$$V_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \frac{1}{2} * [y(t) - \varphi^T(t) * \theta]^2 \quad (2.20)$$

conocida como *criterio de mínimos cuadrados* para una regresión lineal.

$$\theta_{LSE} = \text{sol} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \frac{1}{2} \varphi^T(t) * [y(t) - \varphi^T(t) * \theta] = 0 \right\} \quad (2.21)$$

Para este vector de parámetros, la función de error V_N toma su valor mínimo, siendo éste la *función de pérdidas* del modelo estimado. Una variante del método anterior, conocido como *Criterio de Akaike* consiste en minimizar otra función de pérdidas distinta a la anterior, que puede obtenerse a partir de ésta del siguiente modo:

$$V_{AIC}(\theta) = V_N(\theta) * \left(1 + 2 \frac{d}{N} \right) \quad (2.22)$$

siendo d el número de parámetros del modelo y N el número de muestras de los datos de entrada-salida utilizados para su identificación.

- Método de variables instrumentales

Mediante este método, el vector de parámetros debe cumplir la relación:

$$\theta_{IV} = \text{sol} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \frac{1}{2} \xi(t) * [y(t) - \varphi^T(t) * \theta] = 0 \right\} \quad (2.23)$$

donde los elementos del vector $\xi(t)$ son las llamadas *variables instrumentales*, que resultan de aplicar algún tipo de filtro lineal al vector de regresión lineal $\varphi^T(t)$. Este método es en realidad una generalización del método de mínimos cuadrados, que proporciona mejores resultados en aquellos casos en que existe algún tipo de correlación entre el ruido y la salida del sistema.

CAPÍTULO II

2.4 TIPOS DE DATOS.

En principio los datos y_k están disponibles como muestras discretas de la señal de tiempo. Esta sección trata de la transformación de datos de tiempo en covarianza o espectros. También son introducidas algunas notaciones.

2.4.1 Datos en el dominio del tiempo

Las mediciones para aplicaciones de análisis modal típicamente contienen algo de redundancia. Dado que la resolución espacial de las formas modales experimentales está determinada por la posición y el número de los sensores, normalmente se utilizan muchos sensores (principalmente acelerómetros) en un experimento de análisis modal. Teóricamente, si ninguno de los sensores se coloca en un nodo de un modo, todas las señales llevan la misma información sobre frecuencias propias y relaciones de amortiguación. Para disminuir esta redundancia, algunas señales son parcialmente omitidas en el proceso de identificación, dando lugar a algoritmos que son más rápidos y requieren menos memoria de la computadora sin perder mucha precisión. Al final, los sensores omitidos se incluyen de nuevo para producir las formas modales "completas". Asumiendo que las salidas l están divididas en subsecciones de sensores de referencia r bien definidos y una subsección de otros sensores $l-r$, los cuales se encuentran bajo un arreglo de tal manera que se presenten las referencias primero:

$$y_k = \begin{pmatrix} y_k^{ref} \\ y_k^{\sim ref} \end{pmatrix}, \quad y_k^{ref} = L y_k, \quad L = (I_r \quad 0) \quad (2.24)$$

Donde $y_k^{ref} \in \mathbb{R}^r$ son las salidas de referencia y $y_k^{\sim ref} \in \mathbb{R}^{l-r}$ son las otras; $L \in \mathbb{R}^{r \times l}$ es la matriz de selección que selecciona las referencias. La elección de los sensores de referencia en el análisis modal operacional corresponde a la selección de los lugares de entrada en el análisis modal experimental tradicional.

Es útil en el desarrollo de algunos de los métodos de identificación reunir las mediciones de salida en un bloque de matriz de Hankel con $2i$ bloques de filas y N columnas. Los primeros bloques i tienen r filas, los últimos i tienen l filas. Para las pruebas estadísticas de los métodos, se supone que $N \rightarrow \infty$. La matriz de Hankel $H^{ref} \in \mathbb{R}^{(r+l)i \times N}$ puede dividirse en una referencia pasada y una parte futura:

CAPÍTULO II

$$H^{ref} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} y_0^{ref} & y_1^{ref} & \dots & y_{N-1}^{ref} \\ y_1^{ref} & y_2^{ref} & \dots & y_N^{ref} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{i-1}^{ref} & y_i^{ref} & \dots & y_{i+N-1}^{ref} \\ y_i & y_{i+1} & \dots & y_{i+N-1} \\ y_{i+1} & y_{i+2} & \dots & y_{i+N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{2i-1} & y_{2i} & \dots & y_{2i+N-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{0 \ i-1}^{ref} \\ Y_{i \ 2i-1}^{ref} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_p^{ref} \\ Y_f \end{pmatrix} \begin{matrix} \Downarrow ri \\ \Downarrow li \end{matrix} \begin{matrix} "past" \\ "future" \end{matrix} \quad (2.25)$$

Obsérvese que los datos de salida son escalados por un factor $1/\sqrt{N}$. Los subíndices de $Y_{i|2i-1} \in \mathbb{R}^{li \times N}$ son los subíndices del primer y último elemento en la primera columna de la matriz de Hankel del bloque. Los subíndices p y f representan el pasado y el futuro. Las matrices Y_p^{ref} y Y_f se definen dividiendo H^{ref} en dos partes de i filas de bloques. Otra división se obtiene añadiendo una fila de bloques a las referencias pasadas y omitiendo la primera fila de bloques de las salidas futuras. Debido a que las referencias son sólo un subconjunto de las salidas, se conservan las filas en esta nueva división. Estas filas se indican con $Y_{i|i}^{\sim ref} \in \mathbb{R}^{(l-r) \times N}$:

$$H^{ref} = \begin{pmatrix} \frac{Y_{0 \ i}^{ref}}{Y_{i \ i}^{\sim ref}} \\ \frac{Y_{i+1 \ 2i-1}}{Y_f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Y_p^{ref+}}{Y_{i \ i}^{\sim ref}} \\ \frac{Y_f^-}{Y_f} \end{pmatrix} \begin{matrix} \Downarrow r(i+1) \\ \Downarrow l-r \\ \Downarrow l(i-1) \end{matrix} \quad (2.26)$$

2.4.2 Estimaciones de covarianza

Las covarianzas de salida se definen como:

$$R_i = E[y_{k+i} y_k^T] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_{k+i} y_k^T$$

La segunda igualdad se deduce de la hipótesis de la ergodicidad. Las covarianzas reducidas entre todas las salidas y las referencias se definen como las primeras r columnas de las matrices de covarianza completas:

$$R_i^{ref} = E[y_{k+i} (y_k^{ref})^T] = R_i L^T \in \mathbb{R}^{l \times r} \quad (2.27)$$

CAPÍTULO II

De manera similar, la matriz de covarianza reducida «estado próximo - salida» G^{ref} se define como:

$$G^{ref} = E \left[x_{k+i} (y_k^{ref})^T \right] = GL^T \in \mathbb{R}^{n \times r} \quad (2.28)$$

Y para $i = 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} R_i^{ref} &= R_i L^T = CA^{i-1} G^{ref} \\ (R_i^{ref})^T &= LR_{-i} = (G^{ref})^T (A^{i-1})^T C^T \end{aligned} \quad (2.29)$$

Estas ecuaciones son equivalentes a las propiedades de factorización de las matrices de covarianza completas (Peeters, 2000).

Las covariancias de salida se recogen en un bloque de matriz Toeplitz $T_{1 \ i}^{ref} \in \mathbb{R}^{li \times ri}$ que se puede calcular a partir del bloque de datos de la matriz de Hankel. De hecho, para $N \rightarrow \infty$ y asumiendo ergodicidad, tenemos:

$$T_{1 \ i}^{ref} = Y_f (Y_p^{ref})^T = \begin{pmatrix} R_i^{ref} & R_{1-1}^{ref} & \dots & R_1^{ref} \\ R_{1+1}^{ref} & R_1^{ref} & \dots & R_2^{ref} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{2i-1}^{ref} & R_{2i-2}^{ref} & \dots & R_i^{ref} \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Por supuesto, en realidad un número finito N de datos está disponible y un estimado de covarianza \hat{R}_i se obtiene simplemente por la caída del límite:

$$\hat{R}_i = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_{k+i} y_k^T \quad (2.31)$$

En lugar de calcular la estimación de covarianza mediante la multiplicación y la suma de muestras de tiempo, es posible una implementación a alta velocidad de la convolución en la ecuación (2.31) aplicando la FFT a las señales de tiempo, multiplicando-cruzado las transformadas de Fourier y aplicando la FFT inversa de los productos cruzados. La FFT inversa da como resultado una estimación de la función de covarianza periódica. El error de polarización debido a esta convolución circular se evita mediante el relleno-nulo de las señales originales. Una desventaja de usar covarianzas como datos primarios en la identificación es que encuadra los datos, lo cual puede afectar la exactitud numérica.

CAPÍTULO II

2.4.3 Estimaciones del espectro

Otro formato de datos útil es el espectro $S_y \in \mathbb{C}^{l \times l}$, es definido como la transformada de Fourier de tiempo discreto de la secuencia de covarianza:

$$S_y(e^{j\omega\Delta t}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_k e^{-j\omega k\Delta t} \quad (2.32)$$

Al introducir los sensores de referencia (2.24) se obtiene una matriz de espectro complejo $l \times r$ que consta de las primeras r columnas de la matriz de espectro completa.

De nuevo, sólo se dispone de un número finito de datos: las covarianzas se calculan como en (2.31) y no se pueden calcular hasta un intervalo de tiempo infinito. Existe toda una literatura sobre la estimación de espectros a partir de datos. Dos estimados de espectro no paramétricos populares son el *periodograma promedio ponderado* (también conocido como periodograma de Welch modificado) y el *correlograma ponderado*. Ponderación significa que la señal es ponderada por una de las ventanas clásicas (Bartlett, Hamming, Hanning, ...) para reducir las fugas.

El método de Welch comienza con el cálculo de la Transformada de Fourier Discreta (DFT) de la señal de salida ponderada:

$$Y(e^{j\omega\Delta t}) = \sum_{k=0}^{N-1} w_k y_k e^{-j\omega k\Delta t} \quad (2.33)$$

Donde w_k denota la función de ventana en este contexto. Si N es una potencia de 2, el DFT se puede calcular eficientemente en las frecuencias discretas

$$\omega = \frac{l}{N} \frac{2\pi}{\Delta t}, \quad l = 0, \dots, N-1$$

utilizando la FFT. Una estimación imparcial del espectro es el periodograma ponderado, i.e. la DFT de (2.33) multiplica su transpuesta conjugada compleja y escalado por la norma cuadrada de la ventana:

$$\hat{S}_y(e^{j\omega\Delta t}) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{N-1} |w_k|^2} Y(e^{j\omega\Delta t}) Y^T(e^{-j\omega\Delta t}) \quad (2.34)$$

CAPÍTULO II

La varianza de la estimación se reduce dividiendo la señal en segmentos, calculando los periodogramas ponderados de todos los segmentos y tomando el promedio. La estimación del espectro en (2.34) produce una matriz de rango uno (un vector de columna multiplicado por un vector de fila). El promedio del segmento aumenta el rango de la estimación debido a que se añaden varias estimaciones de rango uno.

El método del correlograma ponderado comienza por el cálculo de las estimaciones de covarianza como en (2.31).

El correlograma ponderada se define como la DFT de las estimaciones de covarianza ponderadas:

$$\hat{S}_y(e^{j\omega\Delta t}) = \sum_{k=-L}^L w_k \hat{R}_k e^{-j\omega k\Delta t} \quad (2.35)$$

donde L es el número máximo de retrasos de tiempo.

2.5 MÉTODOS DERIVADOS DEL ESPECTRO EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA.

Un método de identificación basado en el espectro estima los parámetros de un modelo de espectro a partir de muestras «medidas» de la matriz del espectro. Como se explicó en la sección anterior, estas muestras se obtienen aplicando un método de identificación no paramétrico a las mediciones del dominio del tiempo. El espectro se puede parametrizar en términos de los parámetros modales o en términos de matrices, a partir de la cual los parámetros modales pueden ser extraídos en una segunda etapa. La visión general comienza con el método de selección de picos (Peak Picking) que parece ser muy relevante para la práctica de ingeniería civil. En más del 90% de los casos, se utiliza una variante del peak picking para estimar los parámetros modales de una estructura excitada por una carga ambiental. A continuación, se discute una extensión de *descomposición de valor singular* para el peak picking que supera algunos de los inconvenientes. Una sección final revisa algunos métodos recientes y más avanzados que resuelven el problema de identificación derivados del espectro.

2.5.1 Peak Picking (PP)

El método más simple para estimar los parámetros modales de una estructura sometida a carga ambiental es el denominado método Peak-Picking (PP). El método lleva dicho nombre debido al paso clave del método: la identificación de las frecuencias propias como los picos

CAPÍTULO II

de un diagrama de espectro. Probablemente por su simplicidad es el método más utilizado en ingeniería civil.

En el caso de mediciones de aceleración, se obtiene la siguiente expresión para el espectro modalmente descompuesto:

$$S_y(s) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{s^2}{\lambda_i^2(s-\lambda_i)} \{v_{c_i}\} \langle l_{c_i}^T \rangle \right) R_u \left(\sum_{i=1}^n \frac{(s^*)^2}{\lambda_i^2(s^*-\lambda_i)} \{l_{c_i}\} \langle v_{c_i}^T \rangle \right) \quad (2.36)$$

Esta expresión es el producto de dos sumas en las que cada término representa la contribución de un cierto modo. Un término del factor izquierdo es proporcional a $(s - \lambda_i)^{-1}$ y alcanza un máximo si s se acerca a $\lambda_i = -\xi_i \omega_i + j(1 - \xi_i^2)^{1/2} \omega_i$. Para relaciones de amortiguación bajas, esto se logra alrededor de $s = j\omega_i$. Si además se supone que los modos tienen frecuencias bien separadas, el espectro en cualquier frecuencia propia ω_i está dominado por un solo modo y puede ser aproximado por:

$$S_y(j\omega_i) = \frac{\{v_{c_i}\} \langle l_{c_i}^T \rangle R_u \{l_{c_i}^*\} \langle v_{c_i}^H \rangle}{(\xi_i \omega_i)^2}$$

Al definir el complejo escalar a_i como:

$$a_i = \frac{1}{(\xi_i \omega_i)^2} \langle l_{c_i}^T \rangle R_u \{l_{c_i}^*\}$$

el espectro aproximado en la resonancia puede ser reescrito como:

$$S_y(j\omega_i) = a_i \{v_{c_i}\} \langle v_{c_i}^H \rangle \quad (2.37)$$

La interpretación de esta ecuación es que en resonancia, cada columna (o equivalentemente cada fila) de la matriz del espectro puede considerarse como una estimación de la forma modal observada v_{c_i} hasta algún factor de escala. Por supuesto, si la columna (o fila) corresponde a un DOF de la estructura que está situada en un nodo de un cierto modo, este modo no puede ser identificado.

Las relaciones de amortiguación quedan por determinar. Supongamos que ω_1 y ω_2 son frecuencias a la izquierda y a la derecha de, lo más cerca posible, la frecuencia propia ω_i , donde la magnitud de un cierto elemento de la matriz del espectro es la mitad de la magnitud de la resonancia.

CAPÍTULO II

Una estimación de amortiguación se obtiene entonces como:

$$\xi_i = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_i}$$

Sin embargo, se cree que esta estimación no es muy precisa.

Refinamientos y cuestiones prácticas

Existen algunos refinamientos del método PP. La función de coherencia entre dos canales tiende a ir a una en las frecuencias de resonancia debido a la alta relación señal-ruido en estas frecuencias. Por consiguiente, la inspección de la función de coherencia puede ayudar a seleccionar las frecuencias propias. También son útiles los ángulos de fase de los espectros cruzados: si se esperan modos reales, los ángulos de fase deben ser tanto de 0° o 180° en las frecuencias de resonancia.

Una implementación práctica del método del PP fue realizada por Felber. A fin de obtener una imagen global de las frecuencias propias, sugirió calcular un espectro de potencia normalizado promediado a partir de los elementos diagonales de la matriz del espectro. Sumando y restando señales de puntos simétricos de la estructura puede destacarse la «naturaleza» de un modo (por ejemplo, torsión versus flexión).

Si un buen sensor de referencia (2.24) es elegido solo, el espectro entre todos los sensores y el sensor de referencia único necesitan de ser estimados de los datos en el dominio del tiempo y no la matriz del espectro completa. Esto simplifica el trabajo en (2.34) o (2.35). Esto es debido a que, teóricamente, una columna (o una fila) de la matriz del espectro es suficiente para obtener las formas modales estimadas (2.37).

Discusión

El método asume que el amortiguamiento es bajo y que los modos están bien separados. Una violación de estas suposiciones conduce a resultados erróneos. De hecho, el método identifica *formas de deflexión operacionales* en lugar de formas modales y para modos estrechamente espaciados como una forma deflexión operacional será la superposición de modos múltiples. Otras desventajas son que la selección de las frecuencias propias puede convertirse en una tarea subjetiva si los picos de espectro no son muy claros y que las frecuencias propias tienen

CAPÍTULO II

que ser un subconjunto de los valores discretos de frecuencia de la DFT (esto no es problema si la resolución de frecuencia es lo suficientemente buena).

2.5.2 Función de indicación de modo complejo (CMIF)

Un método más avanzado consiste en calcular la descomposición del valor propio o la descomposición del valor singular (SVD) de la matriz del espectro. Este «método basado en la diagonalización de la matriz de densidad espectral» (como se llamaba) ya se utilizaba a principios de los ochenta para obtener los modos de un sistema vibratorio sometido a excitación natural. Algunos años más tarde, el método también se aplicó a la FRFs y se conoció como la Función de Indicación del Modo Complejo (CMIF). Como sugiere el nombre, el CMIF fue originalmente pensado como una herramienta para contar el número de modos que está presente en los datos de medición. Como un subproducto útil, el CMIF también identifica los parámetros modales de FRFs. Recientemente, el método basado en el espectro recibió de nuevo la atención como una alternativa para el método PP en aplicaciones de ingeniería civil (este método es también conocido como el método FDD).

El método se basa en el hecho de que la función de transferencia o matriz de espectro evaluada a una cierta frecuencia sólo está determinada por unos pocos modos. El número de modos que contribuyen significativamente determina el rango de la matriz del espectro. El SVD se usa típicamente para estimar el rango de una matriz: el número de valores singulares no nulos es igual al rango. La matriz del espectro se relaciona con la matriz de la función de transferencia H_c y la matriz de covarianza de la entrada R_u como:

$$S_y(s) = H_c(s)R_u H_c^T(s^*)$$

Supongamos que R_u es de rango completo. Dado que el rango de un producto de matrices es igual al rango más bajo de cualquiera de sus factores, basta con discutir el rango de la función de transferencia H_c que, en el caso de las mediciones de aceleración, se descompone de forma modal como:

$$H_c(s) = \sum_{i=1}^n \frac{s^2}{\lambda_i^2(s - \lambda_i)} \{v_{c_i}\} \langle l_{c_i}^T \rangle$$

Como ya se indicó en la sección anterior, a cierta frecuencia sólo unos pocos modos están determinando la respuesta. En la resonancia la función de transferencia alcanza un máximo

CAPÍTULO II

local y en el caso de modos bien separados sólo un modo es importante. Esto significa que el rango de H_c es aproximadamente uno en resonancia. Si dos o más modos tienen aproximadamente las mismas frecuencias propias, el rango será dos o más a esa frecuencia.

Como se ha dicho, el rango de H_c transporta al rango de la matriz de espectro S_y . El SVD de matriz se puede escribir como:

$$S_y(s) = U(s)\Sigma(s)U^H(s) = \sum_{v=1}^l \sigma_v(s) \{u_v(s)\}\langle u_v^H(s) \rangle \quad (2.38)$$

donde $U(s)$, $V(s)$ son matrices complejas unitarias. La matriz diagonal $\Sigma(s)$ contiene en su diagonal los valores singulares reales positivos en orden descendente. En la resonancia, el número de valores singulares que alcanzan un máximo local es igual al número de modos estrechamente espaciados. La función $\Sigma(s)$ es el CMIF real.

Si sólo un modo es importante a una determinada frecuencia de resonancia ω_i , el espectro se aproxima a una matriz de rango uno y puede descomponerse como (2.38):

$$S_y(j\omega_i) = \sigma_1^2(j\omega_i) \{u_1(j\omega_i)\}\langle u_1^H(j\omega_i) \rangle \quad (2.39)$$

Al comparar esta expresión con (2.37) se concluye que el primer vector singular en resonancia es una estimación de la forma modal a esa frecuencia. En caso de multiplicidad de modos a una frecuencia de resonancia, cada vector singular que corresponde a un valor singular distinto de cero arroja una estimación de forma modal, si las formas modales son ortogonales entre sí. Esta última condición es sólo aproximadamente verdadera.

Discusión

El método CMIF puede ser considerado como una extensión SVD al método PP. El SVD es capaz de resolver multiplicidad de modo. El método también se puede aplicar a la matriz de espectro reducido $S_y^{ref} = S_y L^T \in \mathbb{C}^{l \times r}$. En este caso, el número máximo de polos detectables múltiples no puede exceder r , la dimensión más pequeña de S_y^{ref} . Otro límite en la multiplicidad máxima de polos es el número de promedios de rango uno que constituye la estimación de espectro (2.34).

Son posibles extensiones del método CMIF que estimen las frecuencias propias y las relaciones de amortiguamiento de manera diferente como en el método PP. Después de aplicar la SVD a la matriz del espectro, esta matriz se descompone de hecho en sistemas de

CAPÍTULO II

DOF individuales. Para tal sistema, se podrían aplicar métodos de estimación de parámetros modales DOF simples.

2.6 MÉTODOS DERIVADOS DE LA COVARIANZA EN EL DOMINIO DEL TIEMPO.

2.6.1 Identificación del sub-espacio estocástico derivado de la covarianza (SSI-COV)

Al igual que el método CMIF puede ser considerado como un método de PP mejorado por SVD, el sub-espacio de la covarianza puede (un tanto irrespetuoso) ser considerado como un método mejorado por SVD de variable instrumental (IV). Mientras que en el método IV (Peeters, 2000), las propiedades de factorización de las covarianzas de salida (2.29) son usadas solamente en una segunda etapa para la obtención de las formas modales, esta es realmente la base del método del sub-espacio. El método de identificación del sub-espacio estocástico impulsado por covarianza (SSI-COV) está abordando el llamado *problema de realización estocástica*, es decir, el problema de identificar un modelo de estado-espacio estocástico a partir de datos de sólo salida.

El método SSI-COV identifica un modelo de estado-espacio estocástico a partir de datos de sólo salida. El modelo estocástico de espacio-estado, introducido en la subsección 1.4.2.3, tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + w_k \\ y_k &= Cx_k + v_k\end{aligned}\tag{2.40}$$

donde w_k y v_k son señales vectoriales asumidas como nulas, blancas y con matrices de covarianza:

$$E \left[\begin{pmatrix} w_p \\ v_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_q^T & v_q^T \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix} \delta_{pq}\tag{2.41}$$

Teoría de la realización estocástica

En esta sección se presenta una versión modificada del algoritmo clásico de realización estocástica impulsada por covarianza. La modificación consiste en reformular el algoritmo de modo que sólo necesita las covarianzas entre las salidas y un conjunto limitado de salidas de referencia en lugar de las covarianzas entre todas las salidas. Esto corresponde al análisis modal clásico, donde las matrices de respuesta de impulso h_k son matrices rectangulares que tienen l filas (es decir, el número de salidas) y m columnas (es decir, el número de entradas).

CAPÍTULO II

En los casos de sólo salida, las respuestas de impulso son sustituidas por covarianzas de salida y las entradas por las salidas de referencia. Como en el método IV, las covarianzas de salida se recogen en una matriz de bloque Toeplitz $T_{1\ i}^{ref}$ (2.30). La aplicación de la propiedad de factorización (2.29) a $T_{1\ i}^{ref}$ produce:

$$T_{1\ i}^{ref} = \begin{pmatrix} R_i^{ref} & R_{i-1}^{ref} & \dots & R_1^{ref} \\ R_{i+1}^{ref} & R_i^{ref} & \dots & R_2^{ref} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{2i-1}^{ref} & R_{2i-2}^{ref} & \dots & R_i^{ref} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{i-1} \end{pmatrix} (A^{i-1} \quad G^{ref} \quad \dots \quad AG^{ref} \quad G^{ref}) \uparrow \quad n = O_i \Gamma_i^{ref} \quad (2.42)$$

$\begin{matrix} \leftrightarrow \\ n \end{matrix}$

donde las definiciones de la *matriz de observabilidad extendida* $O_i \in \mathbb{R}^{li \times n}$ y la *matriz de controlabilidad estocástica extendida invertida* $\Gamma_i^{ref} \in \mathbb{R}^{n \times ri}$ son evidentes a partir de (2.42). Para $ri \geq n$, y si el sistema es observable y controlable, el rango de la matriz de Toeplitz $li \times ri$ es igual a n , ya que es el producto de una matriz con n columnas y una matriz con n filas. El SVD es una herramienta numéricamente confiable para estimar el rango de una matriz. La aplicación de la SVD al bloque Toeplitz produce rendimientos:

$$T_{1\ i}^{ref} = USV^T = (U_1 \quad U_2) \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} = U_1 S_1 V_1^T \quad (2.43)$$

Donde $U \in \mathbb{R}^{li \times li}$ y $V \in \mathbb{R}^{ri \times ri}$ son matrices ortonormales ($U^T U = U U^T = I_{li}$ y $V^T V = V V^T = I_{ri}$ y $S \in (\mathbb{R}^+)^{li \times ri}$ es una matriz diagonal que contiene los valores singulares positivos en orden descendente. El rango de una matriz se encuentra como el número de valores singulares no nulos. En la última igualdad de (2.43) se omiten los valores cero singulares y los vectores singulares correspondientes: $U_1 \in \mathbb{R}^{li \times n}$, $S_1(\mathbb{R}_0^+)^{n \times n}$. Al comparar (2.42) a (2.43), las matrices O_i y Γ_i^{ref} pueden calcularse dividiendo la SVD en dos partes:

$$\begin{aligned} O_i &= U_1 S_1^{1/2} T \\ \Gamma_i^{ref} &= T^{-1} S_1^{1/2} V_1^T \end{aligned} \quad (2.44)$$

CAPÍTULO II

donde $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es una matriz no singular. Esta matriz T puede ser considerada como una transformación de similitud que se aplica al modelo de estado-espacio identificado. En otras palabras, cualquiera que sea la elección de T , resultará en modelos estado-espacio similares-equivalentes y podemos simplemente establecer: $T=I$. La solución del problema de identificación es ahora directa. De las definiciones de la matriz de observabilidad extendida O_i y de la matriz de controlabilidad estocástica extendida invertida Γ_i^{ref} (2.42), sabemos que C es igual a las primeras l filas de O_i y G^{ref} es igual a las últimas r columnas de Γ_i^{ref} ; o escrito en la notación MATLAB:

$$\begin{aligned} C &= O_i(1:l,:) \\ G^{ref} &= \Gamma_i^{ref}(:, r(i-1) + 1:ri) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Una primera vía posible para calcular la matriz de transición de estado A se sigue de la propiedad de descomposición de un bloque desplazado de la matriz de Toeplitz:

$$T_{2 \ i+1}^{ref} = O_i A \Gamma_i^{ref} \quad (2.46)$$

Donde la matriz desplazada $T_{2 \ i+1}^{ref}$ tiene una estructura similar a $T_{1 \ i}^{ref}$ (2.30), pero está compuesta de covarianzas R_k^{ref} del retardo 2 a $2i$. La matriz A se encuentra introduciendo (2.44) en (2.46) y resolviendo para A :

$$A = O_i^\dagger T_{2 \ i+1}^{ref} (\Gamma_i^{ref})^\dagger = S_1^{1/2} U_1^T T_{2 \ i+1}^{ref} V_1 S_1^{1/2} \quad (2.47)$$

Donde $(\cdot)^\dagger$ denota la pseudo-inversa de Moore-Penrose de una matriz.

Alternativamente, la matriz A también podría ser calculada explotando la estructura de desplazamiento de la matriz de observabilidad extendida O_i :

$$A = O_i(1:l(i-1),:)^\dagger O_i(l+1:li,:) \quad (2.48)$$

Podría derivarse una expresión de mínimos cuadrados equivalente que haga uso de la matriz de control de estocástico extendida inversa en su lugar. Sin embargo, puesto que $r < l$, hay menos sobre-determinación en este caso.

En este punto el problema de identificación se resuelve teóricamente: el orden del sistema n se encuentra como el número de valores singulares no nulos en (2.43) y las matrices del sistema A , G^{ref} , C , R_0^{ref} pueden ser calculadas como en las ecuaciones (2.45) y (2.47) o

CAPÍTULO II

(2.48). La cuarta matriz del sistema R_0^{ref} es simplemente la matriz de covarianza de salida de retardo nulo. Las dos matrices A , C son suficientes para calcular los parámetros modales. Los polos discretos Λ_d y las formas modales observadas V se calculan como:

$$\begin{aligned} A &= \Psi \Lambda_d \Psi^{-1} \\ V &= C \Psi \end{aligned} \quad (2.49)$$

Implementación y estabilización

En realidad, el número de mediciones no es infinito y las covarianzas de salida tienen que ser estimadas \hat{R}_i (2.31). Dado que estas covarianzas de salida forman la base del método (2.42), es evidente que las matrices del sistema identificadas también tienen que ser consideradas como estimaciones: \hat{A} , \hat{G}^{ref} , \hat{C} , \hat{R}_0^{ref} .

Otra observación es que, en teoría, el orden del sistema n puede determinarse inspeccionando el número de valores singulares no nulos de T_1^{ref} (2.43). En la práctica, sin embargo, la matriz de Toeplitz de covarianza estimada \hat{T}_1^{ref} se ve afectada por «ruido» que conduce a valores singulares que son todos diferentes de cero. Como fuentes de ruido típicas tenemos:

- Inexactitudes del modelado. Es posible que el verdadero sistema que generó los datos no puede ser modelado exactamente como un modelo de estado-espacio estocástico. Un intento de modelar este sistema por un modelo de espacio de estado introduce un error en estos casos.
- Ruido en las mediciones: introducido por los sensores y la electrónica del hardware de medición.
- Ruido computacional debido a la precisión finita de cualquier computadora.
- El número finito de datos. Las covarianzas tienen que ser estimadas, de modo que la propiedad de factorización (2.29) no se mantenga exactamente. Como consecuencia, el rango de la covarianza de la matriz de Toeplitz no será exactamente n ; ver la ecuación (2.42).

En la práctica, el orden puede determinarse mirando una «apertura» entre dos valores singulares consecutivos. El valor singular en donde la apertura máxima ocurre conduce al orden del modelo. Este criterio debería, sin embargo, no ser aplicado de una manera tan dogmática. Para estructuras reales grandes, generalmente no hay una apertura bien definida.

CAPÍTULO II

Para obtener un buen modelo para aplicaciones de análisis modal, es probablemente una mejor idea construir un diagrama de estabilización (Peeters, 2000), identificando un conjunto completo de modelos con órdenes diferentes. En el caso del método SSI-COV, se consigue una construcción eficiente del diagrama de estabilización calculando la SVD de la matriz de covarianza Toeplitz (2.43) sólo una vez. El número de filas de bloques y columnas i de T_{1i}^{ref} debe ser tal que $ri > n_{max}$, el orden máximo del modelo. Los modelos de orden diferente se obtienen mediante la inclusión de un número diferente de valores y vectores singulares en el cálculo de O_i y Γ_i^{ref} (2.44), de los cuales se deducen las matrices del sistema y los parámetros modales como se describe en la subsección anterior.

2.7 MÉTODOS DERIVADOS DE LOS DATOS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO.

La principal ventaja de los algoritmos derivados de los datos es que no se requiere ningún pre-procesamiento futuro para la obtención de covarianzas del espectro. Estos métodos identifican modelos directamente de las señales. El primero de estos métodos es el método del sub-espacio derivado de los datos, el cual está relacionado al método del sub-espacio derivado de la covarianza.

2.7.1 Identificación del sub-espacio estocástico derivado de los datos (SSI-DATA)

A diferencia de SSI-COV, el método de identificación de sub-espacio estocástico (SSI-DATA) derivado de los datos (DATA) evita el cálculo de covarianzas entre las salidas. Se sustituye por la proyección del espacio de fila de salidas futuras en el espacio de fila de salidas pasadas. De hecho, las nociones de covarianzas y proyecciones están estrechamente relacionadas. Ambos tienen como objetivo anular el ruido (no correlacionado). En el libro de Van Overschee y De Moor (Van Overshee & De Moor, 1996) se proporciona una visión general de la identificación sub-espacial basada en datos (tanto determinista como estocástica). Aunque algo más abarcador en comparación con los métodos anteriores, también es posible con SSI-DATA reducir las dimensiones de las matrices introduciendo la idea de los sensores de referencia.

La derivación de SSI-DATA se da para el caso del sensor de referencia. El algoritmo original se recupera simplemente considerando todos los sensores como referencias. En primer lugar, los estados del filtro de Kalman se introducirán debido a su importancia en la identificación

CAPÍTULO II

del sub-espacio. A continuación, se explican los principios de SSI-DATA. Y finalmente, se discute la implementación de la proyección en términos de la factorización QR.

Como método SSI-COV, el método SSI-DATA identifica un modelo estocástico de estado-espacio (2.40), (2.41) a partir de datos de sólo salida.

Estados del filtro de Kalman

El filtro de Kalman juega un papel importante en SSI-DATA. En esta sección, se introduce el filtro de Kalman no estacionario. El objetivo del filtro de Kalman es producir una predicción óptima para el vector de estado x_k haciendo uso de observaciones de las salidas hasta el tiempo $k-1$ y las matrices del sistema disponibles junto con las covarianzas de ruido conocidas. Estas predicciones óptimas se indican con un sombrero: \hat{x}_{k-1} . Cuando se da la estimación inicial del estado $\hat{x}_0 = 0$, la covarianza inicial de la estimación de estado $P_0 = E[\hat{x}_0 \hat{x}_0^T]$ y las mediciones de salida y_0, \dots, y_{k-1} , las estimaciones de estado de filtro de Kalman no estacionario \hat{x}_k se obtienen las fórmulas recursivas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\hat{x}_k &= A\hat{x}_{k-1} + K_{k-1}(y_{k-1} - C\hat{x}_{k-1}) \\ K_{k-1} &= (G - AP_{k-1}C^T)(R_0 - CP_{k-1}C^T)^{-1} \\ P_k &= AP_{k-1}A^T + (G - AP_{k-1}C^T)(R_0 - CP_{k-1}C^T)^{-1}(G - AP_{k-1}C^T)^T\end{aligned}\tag{2.50}$$

expresando la estimación del estado de Kalman, la matriz de ganancia del filtro de Kalman y la matriz de covarianza del estado de Kalman. La secuencia de estado del filtro de Kalman $\hat{X}_i \in \mathbb{R}^{n \times N}$ se define como:

$$\hat{X}_i = (\hat{x}_i \quad \hat{x}_{i+1} \quad \dots \quad \hat{x}_{i+N-1})\tag{2.51}$$

La interpretación correcta de la $(q+1)^{ésima}$ columna de esta matriz es que este estado \hat{x}_{i+q} es estimado de acuerdo con la Ecuación (2.50) usando sólo i salidas anteriores: y_q, \dots, y_{1+q-1} . Por consiguiente, dos elementos consecutivos de \hat{X}_i no pueden considerarse como iteraciones consecutivas de (2.50). *Más detalles se pueden encontrar en* (Van Overshee & De Moor, 1996). Es importante observar que existe una expresión de forma cerrada para esta secuencia de estado del filtro de Kalman y que es esta secuencia la que será recuperada por el algoritmo SSI-DATA.

CAPÍTULO II

Teoría de identificación del sub-espacio estocástico basada en datos

El algoritmo SSI-DATA comienza proyectando el espacio en fila de las salidas futuras en el espacio de filas de los sensores de referencia pasados. La idea detrás de esta proyección es que conserva toda la información en el pasado que es útil para predecir el futuro. La notación y definición de esta proyección es:

$$\mathcal{P}_i^{ref} = Y_f / Y_P^{ref} = Y_f (Y_P^{ref})^T (Y_P^{ref} (Y_P^{ref})^T)^{\dagger} Y_P^{ref} \quad (2.52)$$

Las matrices $Y_f \in \mathbb{R}^{li \times N}$ y $Y_P^{ref} \in \mathbb{R}^{li \times N}$ son particiones de los datos de la matriz de Hankel $H^{ref} \in \mathbb{R}^{(r+l)i \times N}$, como se indica en la ecuación (2.25). De la definición (2.52), está claro que las proyecciones y covarianzas están estrechamente relacionadas. De hecho, los productos matriciales $Y_f (Y_P^{ref})^T$ y $Y_P^{ref} (Y_P^{ref})^T$ son de hecho matrices en bloques de Toeplitz que contienen covarianzas entre salidas (de referencia); véase también la ecuación (2.30). Tenga en cuenta que la expresión (2.52) es sólo la definición de \mathcal{P}_i^{ref} ; no indica cómo se calcula la proyección. Como veremos más adelante, es computado por la factorización numéricamente robusta de la QR.

El teorema principal de la identificación del sub-espacio estocástico establece que la proyección \mathcal{P}_i^{ref} puede ser factorizada como el producto de la matriz de observabilidad extendida O_i (2.42) y la secuencia de estado del filtro de Kalman \hat{X}_i (2.51):

$$\mathcal{P}_i^{ref} = O_i \hat{X}_i = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{pmatrix} (\hat{x}_i \quad \hat{x}_{i+1} \quad \dots \quad \hat{x}_{i+N-1}) \updownarrow \quad n \quad (2.53)$$

$\begin{matrix} \leftrightarrow \\ n \end{matrix}$

En el presente caso, donde sólo se han utilizado las salidas de referencia pasadas, la prueba es casi la misma, excepto para la significación de la secuencia de estado del filtro de Kalman obtenida \hat{X}_i . El filtro de Kalman de estado no estacionario se aplica a modelo estado espacio reducido que incluye sólo las salidas de referencia. Las sustituciones siguientes tienen que hacerse en la ecuación (2.50):

CAPÍTULO II

$$\begin{aligned} y_k &\rightarrow y_k^{ref} = Ly_k \\ G &\rightarrow GL^T \\ C &\rightarrow LC \\ R_0 &\rightarrow LR_0L^T \end{aligned}$$

A primera vista, la elección de los sensores de referencia parece no tener importancia: para todas las elecciones se encuentra la factorización (2.53). De hecho, teóricamente, el estado interno de un sistema no depende de la elección y el número de salidas observadas. Sin embargo, en los problemas de identificación en los que los estados se estiman sobre la base de observaciones, la elección y el número de resultados importan: salidas de referencia diferentes conducirán a diferentes estimaciones del estado del filtro de Kalman \hat{X}_i .

Dado que la matriz de proyección es el producto de una matriz con n columnas y una matriz con n filas (2.53), su rango es igual a n (si $l_i \geq n$). El SVD es una herramienta numéricamente confiable para estimar el rango de una matriz. Después de omitir los valores cero y singulares y los vectores singulares correspondientes, la aplicación de la SVD a la matriz de proyección produce:

$$\mathcal{P}_i^{ref} = U_1 S_1 V_1^T \quad (2.54)$$

Donde $U_1 \in \mathbb{R}^{l_i \times n}$, $S_1 \in (\mathbb{R}_0^+)^{n \times n}$ y $V_1 \in \mathbb{R}^{N \times n}$. La matriz de observabilidad extendida y la secuencia de estado del filtro de Kalman se obtienen dividiendo la SVD en dos partes:

$$\begin{aligned} O_i &= U_1 S_1^{1/2} T \\ \hat{X}_i &= O_i^\dagger \mathcal{P}_i^{ref} \end{aligned} \quad (2.55)$$

En lo que sigue, estableceremos la matriz de transformación de similitud $T = I$

Hasta ahora encontramos el orden del sistema n (como el número de valores singulares no nulos en la ecuación (2.54)), la matriz de observabilidad O_i y la secuencia de estado \hat{X}_i . Sin embargo, el problema de identificación es recuperar las matrices del sistema A , G , C , R_0 . Si la separación entre la referencia anterior y las salidas futuras en la matriz de Hankel se desplaza una fila de bloques hacia abajo, como se indica en la ecuación (2.18), se puede definir otra proyección:

$$\mathcal{P}_{i-1}^{ref} = Y_f^- / Y_p^{ref+} = O_{i-1} \hat{X}_{i+1}$$

CAPÍTULO II

donde la prueba de la segunda igualdad es similar a la demostración del teorema del sub-espacio principal (2.53). La matriz de observabilidad extendida O_{i-1} se obtiene simplemente después de suprimir las últimas l filas de O_i :

$$O_{i-1} = O_i(1:l(i-1), :)$$

La secuencia de estado \hat{X}_{i+1} puede ahora calcularse como:

$$\hat{X}_{i+1} = O_{i-1}^+ \mathcal{P}_{i-1}^{ref}$$

En este momento las secuencias de estado de Kalman \hat{X}_i , \hat{X}_{i+1} se calculan utilizando solamente los datos de salida. Las matrices del sistema ahora se pueden recuperar del siguiente conjunto sobredeterminado de ecuaciones lineales obtenido, apilando los modelos de estado-espacio para los instantes de tiempo i a $i + N - l$:

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{i+1} \\ Y_{i+l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \hat{X}_i + \begin{pmatrix} W_i \\ V_i \end{pmatrix}$$

Donde $Y_{i+l} \in \mathbb{R}^{l \times N}$ es una matriz de Hankel con sólo una fila de bloques (2.17) y $W_i \in \mathbb{R}^{n \times N}$, $V_i \in \mathbb{R}^{l \times N}$ son los residuos. Dado que las secuencias de estado de Kalman y las salidas son conocidas y los residuos no están correlacionados con \hat{X}_i , el conjunto de ecuaciones puede resolverse para A , C en un sentido menos cuadrado:

$$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{X}_{i+1} \\ Y_{i+l} \end{pmatrix} \hat{X}_i^+ \quad (2.56)$$

Las covariancias de ruido Q , R y S se recuperan como las covarianzas de los residuos de mínimos cuadrados:

$$\begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_i \\ V_i \end{pmatrix} (W_i^T \quad V_i^T) \quad (2.57)$$

A partir de las propiedades de los sistemas estocásticos, es fácil ver cómo las matrices A , C , Q , R , S pueden transformarse en A , G , C , R_0 . Primero la ecuación de Lyapunov se resuelve para Σ :

$$\Sigma = A \Sigma A^T + Q$$

después de lo cual G y R_0 se pueden calcular como:

CAPÍTULO II

$$\begin{aligned} R_0 &= C\Sigma C^T + R \\ G &= A\Sigma C^T + S \end{aligned} \quad (2.58)$$

En este punto se resuelve teóricamente el problema de identificación: basándose en las salidas, se encuentran el orden del sistema n y las matrices del sistema A, G, C, R_0 .

Las matrices A, C son suficientes para calcular los parámetros modales. Como se discute en la subsección 1.4.2.2, los polos discretos Λ_d y las formas de modo observadas V se calculan como:

$$\begin{aligned} A &= \Psi \Lambda_d \Psi^{-1} \\ V &= X \Psi \end{aligned}$$

Realidad positiva

El cálculo de Q, R, S según (2.57) sólo conduce a estimaciones asintóticamente imparciales si el número de filas de bloques en las matrices de Hankel va al infinito: $i \rightarrow \infty$. Así que, en la práctica, ya que $i \neq \infty$, se introducirá un sesgo en Q, R, S (y por lo tanto también en G, R_0).

Existen otros algoritmos que calculan estimados asintóticamente imparciales. Desafortunadamente, estos algoritmos no garantizan la realidad positiva de la secuencia de covarianza identificada. Importante para esta tesis es que sólo las secuencias reales positivas tienen una matriz de espectro correspondiente que es positiva definida para todas las frecuencias ω . Si una matriz es positiva definida, entonces todas sus entradas diagonales son positivas. Un espectro de potencia es una entrada diagonal de la matriz del espectro y por lo tanto esta matriz no puede ser definida positiva. El modelo se identificó de hecho con el método SSI-COV, un método que no garantiza la realidad positiva de la secuencia de covarianza identificada.

También es importante que sólo las secuencias reales positivas puedan convertirse en un modelo de estado-espacio de innovación. Tal modelo es a veces útil, como veremos más adelante. La conversión comienza resolviendo la ecuación de Riccati para P :

$$P = APA^T + (G - APC^T)(R_0 - CPC^T)^{-1}(G - APC^T)^T$$

La matriz de covarianza de las innovaciones se calcula como:

$$R_e = R_0 - CPC^T$$

CAPÍTULO II

Y finalmente la ganancia de Kalman se obtiene como:

$$K = (G - APC^T)R_e^{-1}$$

Implementación

Realmente crucial en la implementación exitosa de los algoritmos sub-espaciales basados en datos en general es la factorización RQ de las matrices Hankel de datos. Tal factorización aplicada a la matriz de Hankel de salida de la ecuación (2.17), (2.18) conduce a:

$$H^{ref} = \begin{pmatrix} Y_p^{ref} \\ Y_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_p^{ref+} \\ \frac{Y_{ii}^{ref}}{Y_f} \end{pmatrix} = RQ^T \quad (2.59)$$

donde $Q \in \mathbb{R}^{N \times N}$ es una matriz ortonormal: $Q^T Q = Q Q^T = I_N$ y $R \in \mathbb{R}^{(r+l)i \times N}$ es una matriz triangular inferior. Puesto que $(r+l)i < N$, es posible omitir los ceros en R y las filas correspondientes en Q^T :

$$H^{ref} = \begin{matrix} & \begin{matrix} ri & r & l-r & l(i-1) & N \rightarrow \infty \end{matrix} \\ & \begin{matrix} \leftrightarrow & \leftrightarrow & \leftrightarrow & \leftrightarrow & \leftrightarrow \end{matrix} \end{matrix} \begin{pmatrix} R_{11} & 0 & 0 & 0 \\ R_{21} & R_{22} & 0 & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & 0 \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \\ Q_4^T \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \end{matrix} \begin{matrix} ri \\ r \\ l-r \\ l(i-1) \end{matrix}$$

La división en filas y columnas de bloques se hace de tal manera que las sub-matrices en (2.59) puedan expresarse en términos de las sub-matrices R y Q . Es fácil demostrar que la factorización RQ produce siguiendo expresiones muy simples para las proyecciones de futuros espacios de fila en espacios de filas pasadas:

$$\mathcal{P}_i^{ref} = \begin{pmatrix} R_{21} \\ R_{31} \\ R_{41} \end{pmatrix} Q_1^T, \quad \mathcal{P}_{i-1}^{ref} = (R_{41} \quad R_{42}) \begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{pmatrix}$$

También $Y_{ii} \in \mathbb{R}^{l \times N}$, la secuencia de salida que está presente en las ecuaciones de mínimos cuadrados en A, C (2.56) se escribe fácilmente en términos de los factores RQ:

CAPÍTULO II

$$Y_i = \begin{pmatrix} R_{21} & R_{22} & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \end{pmatrix}$$

Puesto que $\hat{X}_i = O_i^\dagger \mathcal{P}_i^{ref}$ y $\hat{X}_{i+1} = O_{i+1}^\dagger \mathcal{P}_{i+1}^{ref}$, todas las cantidades del miembro derecho de la ecuación de mínimos cuadrados (2.56) pueden expresarse en términos de los factores RQ. Debido a su ortonormalidad, los factores Q se anulan en esta ecuación. Así que en este primer paso (2.59) la matriz Q no debe ser calculada. La función MATLAB `qr`, por ejemplo, permite el cálculo del factor R solamente. Como típicamente $(r + l)i \ll j$, se obtiene una importante reducción de datos reemplazando los datos $(r + l)i \times N$ de la matriz de Hankel H^{ref} por su factor R de dimensión $(r + l)i \times (r + l)i$.

El cálculo de este factor R es el paso más exigente del algoritmo SSI-DATA. El número de caídas o flops (fl) es proporcional al número de columnas y al cuadrado del número de filas de los datos de la matriz de Hankel:

$$fl = ((r + l)i)^2 N$$

Asumiendo el mismo número de filas de bloques i y el mismo número de puntos de datos N , se puede expresar la ganancia en eficiencia computacional introduciendo los sensores de referencia (subíndice 'ref') en lugar de usar todos los sensores como referencias (subíndice 'all') como:

$$\frac{fl_{all}}{fl_{ref}} = \left(\frac{2l}{r+l} \right)^2 \quad (2.60)$$

lo cual es significativo en el análisis modal donde a menudo se usan muchos sensores l y sólo pocos de ellos necesitan ser considerados como referencias r .

Evidentemente, debido a la longitud de datos finitos, el modelo de estado-espacio identificado es sólo una estimación del verdadero modelo de estado-espacio subyacente que generó los datos. Esto se denomina \hat{A} , \hat{G} , \hat{C} , \hat{R}_0 para un modelo de covarianza y como \hat{A} , \hat{K} , \hat{C} , \hat{R}_e para un modelo de innovación avanzada. Las matrices \hat{A} , \hat{C} son asintóticamente estimaciones no sesgadas, pero como se dijo antes, un pequeño sesgo se introdujo en las estimaciones de las otras matrices.

CAPÍTULO II

La misma observación que en el método SSI-COV con respecto a la determinación del orden del modelo n se aplica aquí. Debido al ruido (inexactitudes de modelado, ruido de medición y ruido computacional) ninguno de los valores singulares de la ecuación (2.54) es exactamente cero y el orden sólo puede determinarse mirando una «brecha» entre dos valores singulares sucesivos. El valor singular donde se produce el intervalo máximo produce el orden del modelo. Sin embargo, en muchos casos prácticos, no hay hueco visible. Como anteriormente, el problema de la determinación del orden se resuelve mejor construyendo un diagrama de estabilización (2.38). El número de filas de bloques i de H^{ref} debe ser tal que $ri \geq n_{max}$, el orden máximo del modelo. Los modelos de orden diferente se obtienen mediante la inclusión de un número diferente de valores y vectores singulares en el cálculo de O_i y \hat{X}_i (2.55), a partir de los cuales se deducen las matrices del sistema y los parámetros modales como se ha descrito anteriormente.

2.8 UTILIZACIÓN DEL SOFTWARE PARA LA IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS. MACEC.

2.8.1 Consideraciones Generales

Existen varios paquetes de software de análisis modal. Originalmente desarrollado en ingeniería mecánica para la identificación basada en datos de entrada-salida (FRFs o respuestas de impulso), hoy en día algunos de estos paquetes tienen también módulos para el análisis modal de sólo salida; por ejemplo: la revisión reciente del sistema CADA-X LMS. Sin embargo, la mayoría de los paquetes de software comerciales tienen algunos inconvenientes en un ambiente de investigación: es imposible revisar la implementación de un algoritmo y no suele ser sencillo agregar desarrollos propios a estos paquetes. MATLAB, por otro lado, es un entorno abierto que ofrece herramientas de computación, visualización y programación. El paquete básico consta de funciones de propósito general que se pueden utilizar para crear más cajas de herramientas específicas de la aplicación. La mayoría de las funciones son archivos ASCII accesibles que se compilan en su primera convocatoria en una sesión; para que el usuario pueda aprender de su implementación o incluso modificarla.

Tanto la Caja de Herramientas de Identificación de Sistemas como la Caja de Herramientas de Identificación de Sistemas en el Dominio de la Frecuencia ofrecen herramientas de pre-procesamiento, identificación y validación de modelos. El primero identifica modelos en el dominio de tiempo a partir de los datos, mientras que el último opera en el dominio de la

CAPÍTULO II

frecuencia. Estas cajas de herramientas han sido escritas por personas con experiencia en ingeniería eléctrica, pero como pueden identificar cualquier sistema dinámico lineal a partir de mediciones, también pueden ser usadas en ingeniería mecánica y civil. Al final ambas cajas de herramientas ofrecen un modelo matemático que coincide con los datos. Sin embargo, es evidente que algún tipo de post-procesamiento es necesario para nuestros propósitos: la extracción de parámetros modales del modelo, la construcción de diagramas de estabilización y la visualización de la geometría de la estructura y formas modales.

A partir de esta revisión de los paquetes de software existentes, KU Leuven tuvo la necesidad de desarrollar un programa propio para el análisis modal experimental y operacional. El nombre del programa es MACEC (Modal Analysis for Civil Engineer Constructions) (Análisis Modal de Construcciones de Ingeniería Civil).

Desarrollo del software

En una etapa inicial, los métodos de identificación de sistemas descritos con anterioridad eran implementados como líneas de comandos de MATLAB. Dichas funciones eran ejecutadas tecleando su nombre junto con las variables de entrada y de salida. Por ejemplo:

```
>> [invar] = ssi_data (y, i, 'cva' , ref) ;
```

aplicando la variante CVA de la identificación del sub-espacio estocástico derivado de los datos a la matriz de los datos y . La mitad de los números de los bloques de fila en la matriz de datos Hankel (2.17) es especificado por la variable i . Los sensores de referencia son especificados como números de columnas de y en la variable ref . La variable de salida $invar$ contiene resultados intermedios después de la aplicación de la factorización QR y del SVD. Un modelo estocástico estado-espacio en forma de innovación avanzada $[A,K,V,Re]$ es entonces identificado en una segunda corrida del mismo comando:

```
>> [A,K,V,Re] = ssi_data (y, i, 'cva' , ref) ;
```

cuando n es del orden del modelo deseado.

La dificultad con todas estas funciones es que uno debe de conocer la sintaxis y seguir el rastro de las variables. Es por ello que en un proyecto de maestría se configuró una Interfaz Gráfica de Usuario (GUI) la cual incorpora la mayoría de las funciones existentes para la conversión de los datos, identificación de sistemas y la adición de funciones para las

CAPÍTULO II

animaciones de las formas modales. En lugar de escribir comandos, el usuario solo tiene que clicar botones (Figura 2.2):

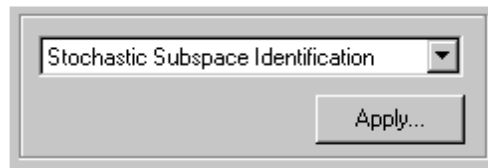


Fig. 2.2- Implementación de la Interfaz Gráfica de Usuario (Peeters, 2000)

Puede que existan ambientes más flexibles para la creación de un GUI, pero lo más probable es que ninguno de estos tenga las posibilidades de trabajo matricial y visualización en dos y tres dimensiones como MATLAB. De igual forma, el desarrollo de algoritmos es muy sencillo en MATLAB, debidos a la interacción entre las funciones en desarrollo y el espacio de trabajo: el programador puede controlar en todo momento el estado de las variables.

Dos preguntas son muy importantes en el diseño de un GUI:

- ¿Sabe el usuario siempre dónde está?
- ¿Sabe el usuario siempre donde ir después?

Para dar respuestas positivas a estas preguntas MACEC fue diseñado alrededor de una ventana principal (Figura 2.3). Esta se puede dividir en tres categorías: pre-procesamiento; identificación del sistema y visualización. Al trabajar en alguna categoría se abre una nueva ventana y al terminar el trabajo con esta se cierra y regresa siempre a la ventana principal.

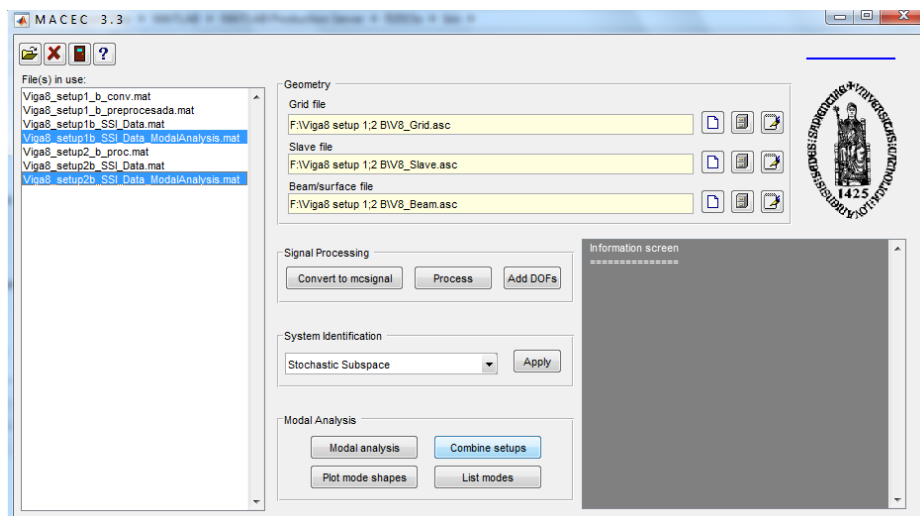


Fig. 2.3- Ventana Principal del MACEC

2.8.2 Funcionamiento de MACEC

A continuación, se presentan las principales funciones del software. En pos de lograr una mayor organización esta se divide en tres categorías: *pre-procesamiento*; *identificación de sistemas* y *visualización*.

2.8.2.1 Pre-procesamiento

Los datos medidos en el dominio del tiempo se pueden importar al programa en formato ASCII o un formato binario más eficiente. Al cargar en el programa, los datos se escalan a las unidades de ingeniería y la información sobre la ubicación del sensor se agrega a los canales. Si los datos originales se almacenan en Volts [V], se escala para obtener aceleraciones [m / seg^2]. Escalar los datos es sencillo, una vez que el usuario ha creado un archivo ASCII que contiene las sensibilidades de todos sus sensores (Figura 2.4).

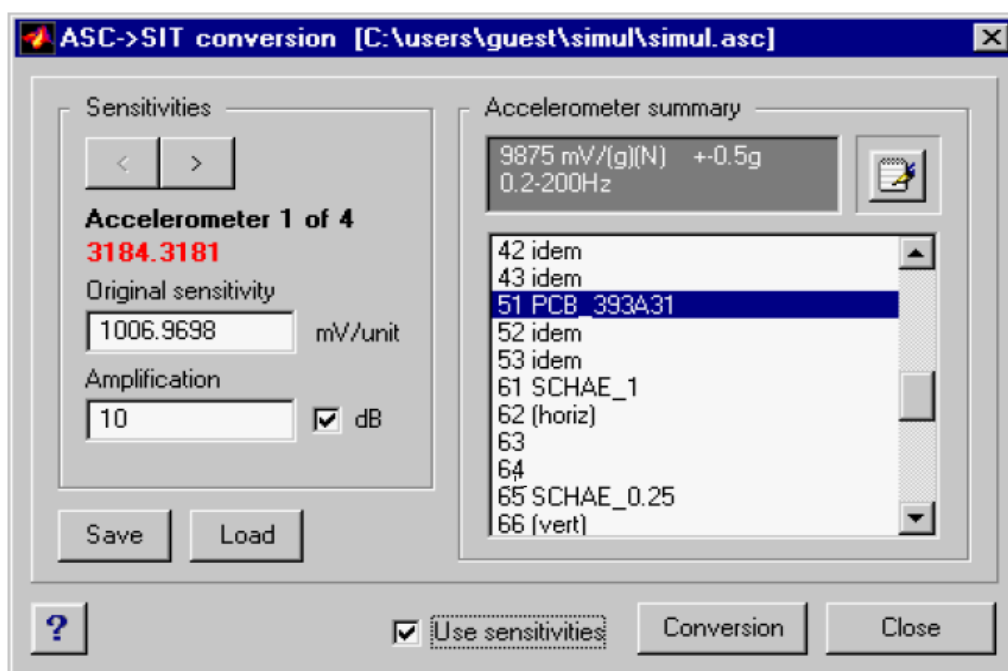


Fig. 2.4-*Especificando la localización y la sensibilidad por eje de los canales* (Peeters, 2000)

Para la interpretación de los canales es esencial incorporar las ubicaciones físicas de los puntos de medición y el eje (número de nodo y DOF) en el formato de datos interno. En caso de que un eje de sensibilidad de un sensor no coincida con uno del eje global, se puede definir

CAPÍTULO II

con dos ángulos: $\alpha \in [-180^\circ, 180^\circ]$, el ángulo en el plano XY; y $\beta \in [-90^\circ, 90^\circ]$, el ángulo perpendicular al plano XY (Figura 2.5).

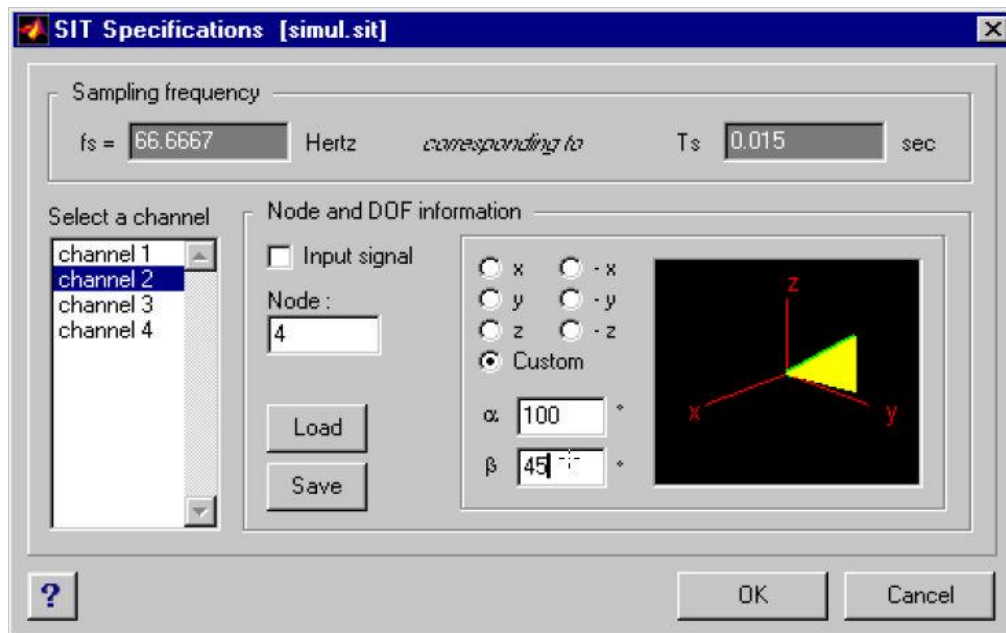


Fig. 2.5-*Escala de mediciones sin procesar de Voltios a aceleraciones [m / sec²] seleccionando el sensor utilizado y el factor de amplificación (Peeters, 2000)*

A continuación, el verdadero pre-procesamiento puede comenzar. El pre-procesamiento es el tratamiento de los datos antes de la identificación del sistema y tiene una gran influencia en el resultado de la identificación. Se implementan las siguientes posibilidades:

- Diezmado: los datos se filtran en paso bajo y se vuelven a muestrear a una velocidad menor. La identificación puede concentrarse en una banda de frecuencia limitada.
- Detrend: el mejor ajuste de línea recta se elimina de los datos. Esto elimina el componente CD que puede influir negativamente en los resultados de la identificación.
- No Elec: eliminación de frecuencias espurias (por ejemplo, a 60 Hz debido a la alimentación de CA). Esta operación no es lo mismo que el filtro de banda de parada, pero realmente elimina sólo el componente a una cierta frecuencia.
- Borrar canal: eliminación de un canal completo. Por ejemplo, un canal muy ruidoso se puede quitar mejor para mejorar los resultados de la identificación.
- Ventana de tiempo: se puede seleccionar un segmento de tiempo de alta calidad para un análisis posterior.

CAPÍTULO II

El efecto de un procedimiento de pre-procesamiento se puede ver inmediatamente, tanto en el tiempo como en el dominio de la frecuencia (Figura 2.6). También existe una posibilidad de «deshacer».

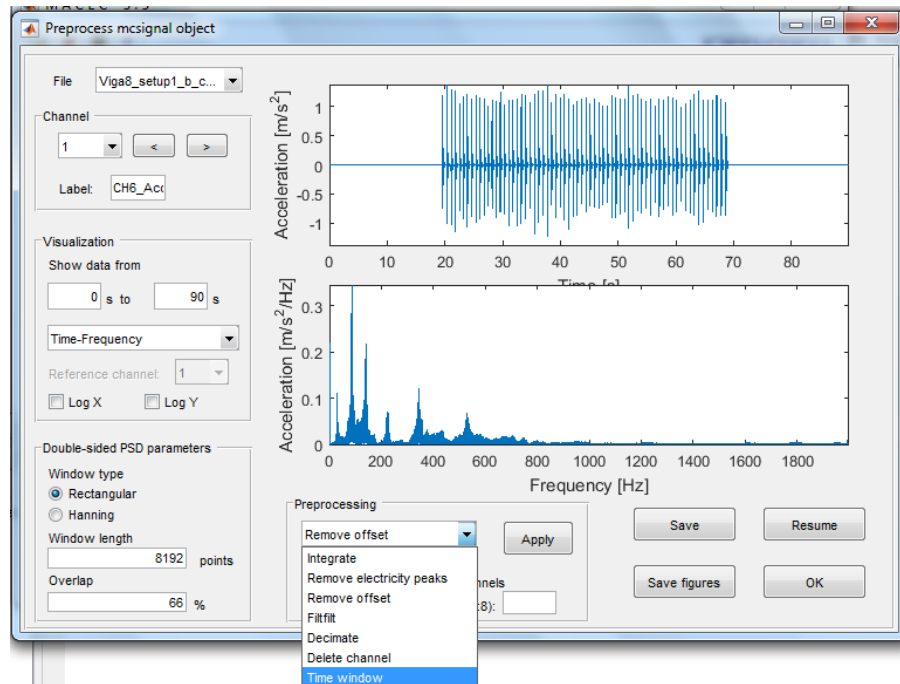


Fig. 2.6- Ventana de pre-procesamiento de la Viga del caso de estudio en MACEC con representaciones de las señales en el dominio del tiempo y la frecuencia. (Reynders, et al., 2014)

2.8.2.2 Identificación del Sistema

Actualmente se implementan dos métodos complementarios: el método de Peak Picking (PP) y el método de identificación del sub-espacio estocástico impulsado por datos (SSI-DATA). Si el usuario selecciona el método PP, se abre una ventana con el promedio de los espectros de potencia, el puntero del ratón cambia a una cruz y el usuario puede seleccionar los picos (Figura 2.7). Las deformadas operacionales se determinan en las frecuencias seleccionadas.

El segundo método es el método SSI-DATA. Primero el usuario tiene que especificar algunos parámetros de entrada del algoritmo: la selección de los canales de referencia, el orden máximo del modelo y el rango del orden del modelo. Después de algunos cálculos (factorización QR y SVD), se construye un diagrama de estabilización (Figura 2.8). El

CAPÍTULO II

usuario puede cambiar los criterios de estabilización (los valores por defecto son 1% para las frecuencias propias, 5% para las relaciones de amortiguación y 1% para las correlaciones de forma de modo). Cuanto mejor sea la calidad de los datos, más estrictas serán estas tolerancias. El diagrama se representa junto con el promedio de los espectros de potencia para la referencia visual. Los polos estables se seleccionan gráficamente.

2.8.2.3 Visualización

Las formas modales identificadas se representan gráficamente como deformaciones de la estructura. Los DOFs ya se atribuyeron a los canales en la etapa de pre-procesamiento (Figura 2.5). Antes de la visualización, es necesario definir una rejilla de nodos y las conexiones entre los nodos en términos de vigas o superficies. Esto se realiza al cargar dos archivos ASCII en el programa: un archivo de cuadrícula y un archivo de viga o superficie. El archivo de cuadrícula contiene 4 columnas: número de nodo y coordenadas X, Y, Z. El archivo de viga contiene 2 columnas: un objeto de línea MATLAB está definido por 2 nodos; mientras que el archivo de superficie tiene 4 columnas: 4 nodos definen un objeto de parche MATLAB. Estos archivos se pueden generar fácilmente dentro de MACEC con el «beam / surface-generator». La visualización de DOFs que no se midieron puede realizarse en un procedimiento de «esclavización»: los DOF esclavos no medidos están relacionados con DOF master medidos.

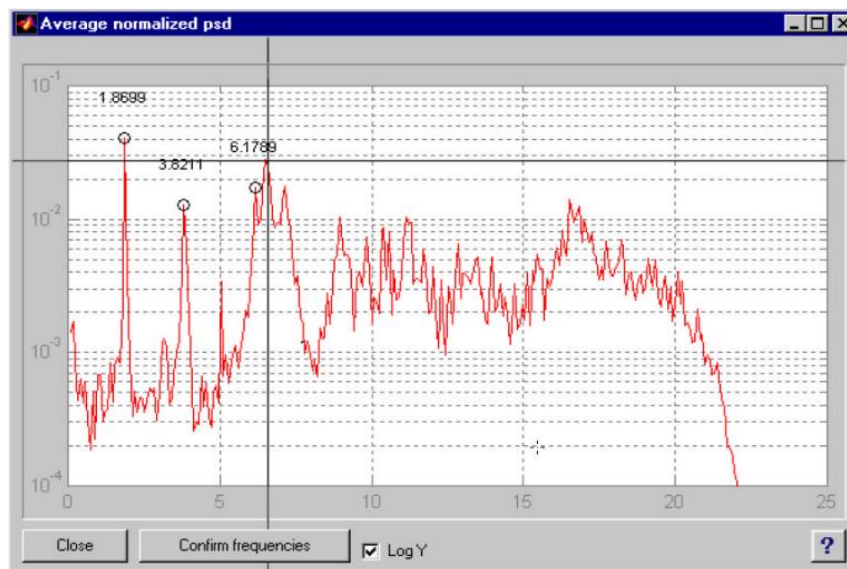
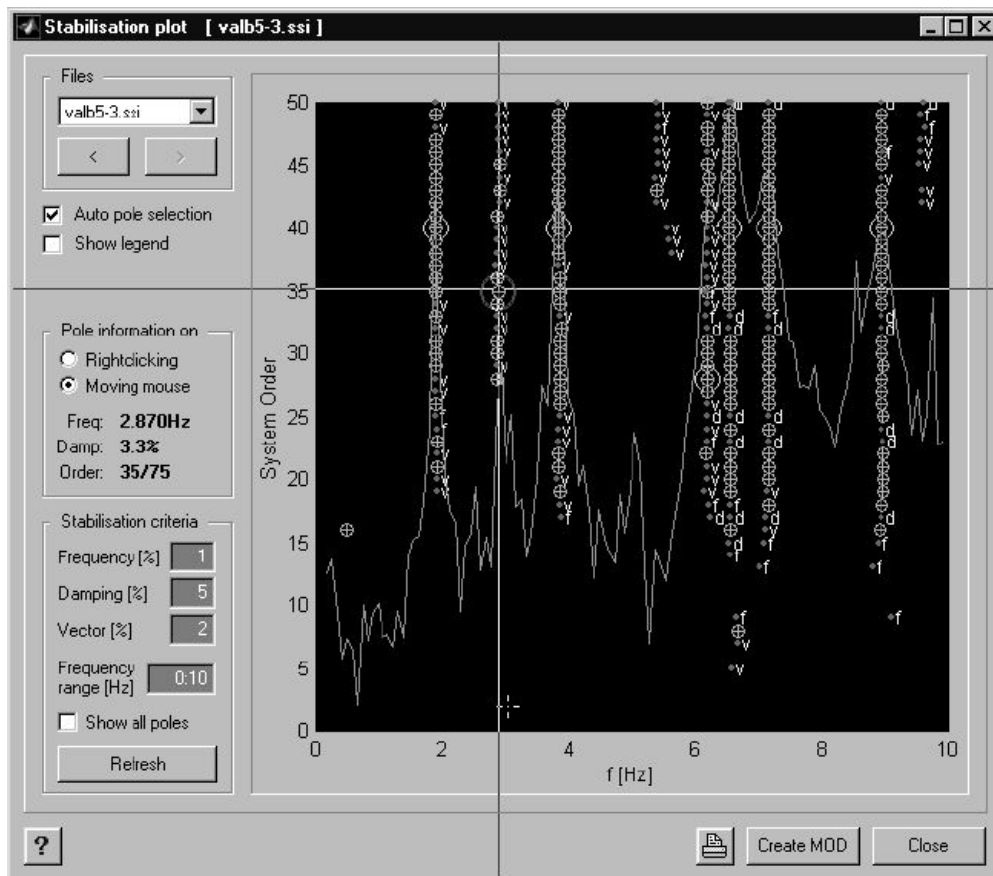


Fig. 2.7-Procedimiento del Peak Picking. (Peeters, 2000)

CAPÍTULO II

Cada configuración de mediciones de canales simultáneos arroja después de la identificación una parte de la forma modal global. Estas partes son adheridas juntas con la ayuda de sensores de referencia, comunes para todas las configuraciones. Estos sensores comunes son detectados automáticamente por MACEC. Como se ilustra en la figura 2.9, la aproximación de los mínimos cuadrados es usada para determinar el factor de escala de cierto modo entre dos configuraciones. El factor de escala es diferente de 1 si la excitación (desconocida)



cambia de una configuración a otra, lo cual es generalmente el caso.

Fig. 2.8-Diagrama de estabilización por selección de polos en el método de SSI-DATA
(Peeters, 2000)

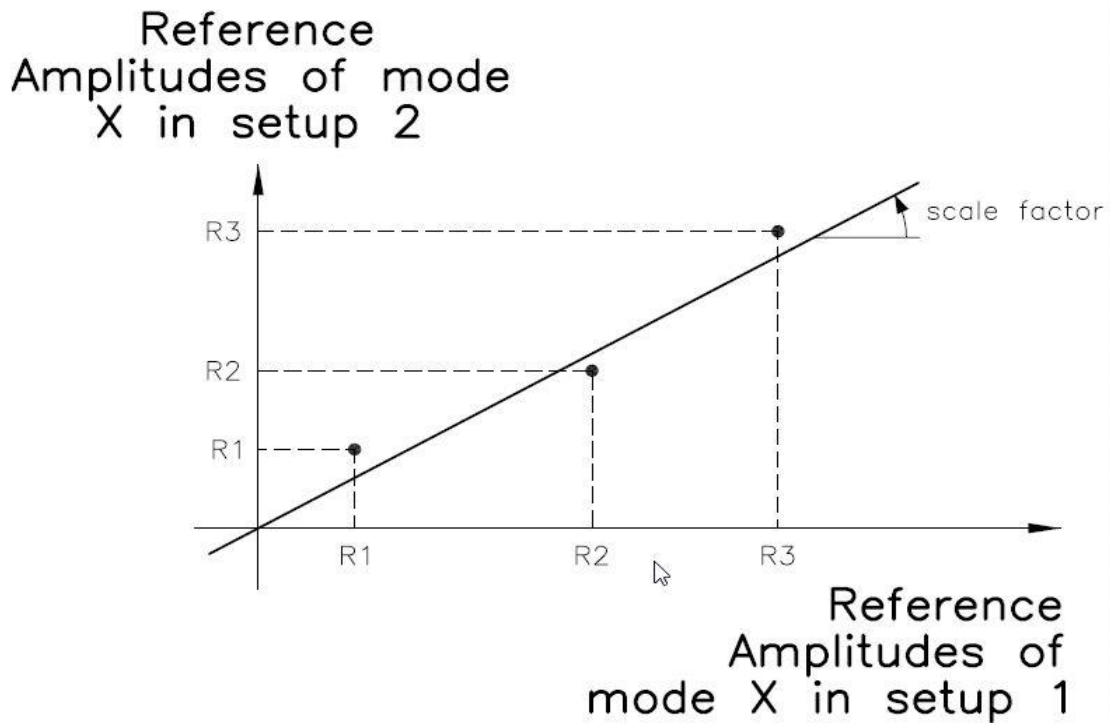


Fig. 2.9-*Uso de sensores de referencia para acoplar las partes de las formas modales*
(Peeters, 2000)

Ahora estamos en condiciones de visualizar las formas modales. La ventana de visualización (Figura 2.10) ofrece una gran cantidad de posibilidades: desplazarse sobre todos los modos, representación de la estructura no deformada y los números de los modos, visualización en 3D con la posibilidad de cambiar el punto de referencia, animación de las formas modales, etc.

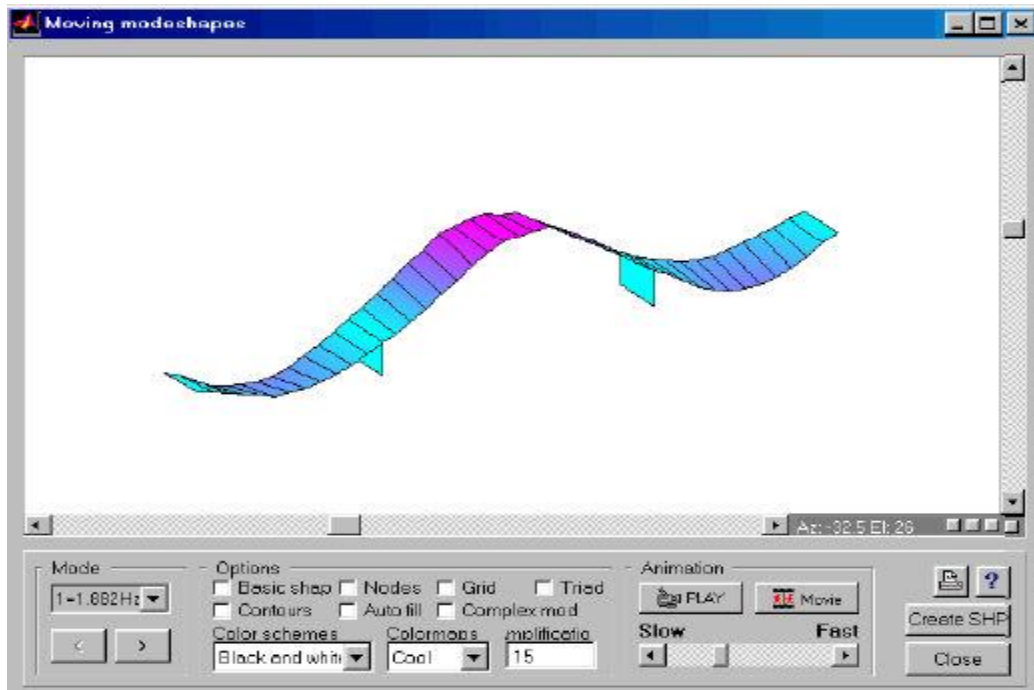


Fig. 2.10-Ventana de visualización de formas modales (Peeters, 2000)

2.8.3 Automatización del Análisis Modal

Existen algunos casos en los cuales la interacción del usuario no es deseada. Ejemplo de esto se puede encontrar en el Capítulo 3 de (Peeters, 2000), donde 100 simulaciones Monte-Carlo se desarrollaron para el estudio de las propiedades estadísticas de los métodos de identificación de sistemas estocásticos. En cada corrida de las simulaciones, los diagramas estabilizadores de los métodos IV, SSI-COV y SSI-DATA necesitaban de ser interpretados para encontrar los polos estables. Otro ejemplo, es el monitoreo continuo de estructuras. En este caso, el monitoreo de los sistemas vibratorios genera grandes cantidades de datos. Los parámetros modales deben de ser extraídos de estos datos.

Es por ello que es evidente que un sistema de monitoreo realista debe de incorporar un procedimiento de *análisis modal automatizado* que excluya cualquier interacción del usuario. Sin embargo, la idea de un diagrama estabilizador no debe de desecharse debido a que está probado que el mismo es esencial al distinguir sistemas polares reales de los polos numéricos. Para reconciliar estos requerimientos, se desarrolló un procedimiento que recae sobre la interpretación automática de los diagramas de estabilización. El mismo consta de tres etapas:

CAPÍTULO II

1. Un conjunto simple representativo de los datos es usado para desarrollar la identificación clásica (en donde interviene el usuario). Dicho análisis da una idea acerca de la calidad de los datos y de los criterios de estabilización seleccionados para las frecuencias propias, relaciones de amortiguamiento y formas modales.
2. El procedimiento automatizado entra en juego. El diagrama de estabilización es escaneado y son identificados columnas de polos estables. Los elementos de esas columnas tienen correlaciones de frecuencias cercanas y de altas formas modales. Para excluir polos estables accidentales, una columna debe de poseer un mínimo de polos estables, de otra manera es rechazada. Como representación de una columna, el polo que posea las frecuencias propias más ajustadas al promedio de la columna es seleccionado. El procedimiento se repite para cada conjunto de datos.
3. No existe garantía alguna de que cada conjunto de datos arroje los mismos polos estables. Por tanto, la entrada debe cambiar de un conjunto de datos a otro. En ocasiones falta algún polo debido a que no se excitó correctamente o exista un polo adicional (como un armónico de la entrada). Por ello, el acercamiento a la estabilización es traído nuevamente en este paso para parear los polos entre dos conjuntos de datos. En ocasiones, los requerimientos de estabilización por frecuencias tienen que ser reducidos.

2.9 CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO.

- Los datos empleados en la identificación de sistemas se presentan de tres maneras diferentes (dominio del tiempo, estimaciones de covarianza y estimación de espectro); siendo cada uno de estos formatos necesarios para el posterior desarrollo de los métodos de identificación de sistemas.
- El método básico de selección de picos (PP) encuentra las frecuencias propias como los picos de estimados no-parámétricos del espectro. Este procedimiento de selección de frecuencia se convierte en una tarea subjetiva en caso de datos ruidosos de ingeniería civil, modos débilmente excitados y frecuencias propias relativamente estrechas. El método relacionado de estimación de amortiguamiento del ancho de banda de media potencia es poco fidedigno; y se identifican deformadas operativas en lugar de formas modales. La ventaja de este método basado en FFT es su velocidad de procesamiento, aunque el tiempo total de análisis puede

CAPÍTULO II

aumentar considerablemente por la cantidad de interacción necesaria del usuario para mejorar los resultados: inspección de la forma del espectro de señales añadidas y restadas, interpretación de funciones de coherencia, prueba de diferentes sensores de referencia para obtener formas modales razonables, ...

- La función de indicación de modo complejo (CMIF) es una extensión SVD del método PP, permitiendo una selección objetiva de las frecuencias propias y la identificación modos estrechamente espaciados. Parece, sin embargo, que la calidad de la estimación de formas modales depende del vector singular seleccionado alrededor de la resonancia (y que no siempre es el vector en resonancia que da las mejores estimaciones). Las respuestas modales pueden ser más o menos computadas en el método CMIF mediante la transformación de las líneas de frecuencia alrededor de la resonancia en el espectro descompuesto volviendo al dominio el tiempo.
- Los métodos paramétricos (IV, SSI-COV, SSI-DATA) comparten la ventaja de que los diagramas de estabilización se pueden construir mediante la identificación de modelos paramétricos de orden creciente. Estos diagramas son muy valiosos para separar los verdaderos polos del sistema de los falsos polos numéricos.
- Tanto la covarianza (SSI-COV) como los métodos subespaciales basados en datos (SSI-DATA) parecen desempeñarse igual de bien en lo que respecta al rendimiento de la estimación de parámetros. Teóricamente el comportamiento numérico de SSI-DATA debería ser mejor que el de SSI-COV ya que evita encuadrar los datos. El método SSI-COV es considerablemente más rápido que el SSI-DATA ya que su paso de reducción de datos se puede implementar con la FFT, mientras que SSI-DATA requiere un paso de factorización QR más lento. Evidentemente, porque sólo utiliza algoritmos numéricos lineales, el método SSI-DATA sigue siendo mucho más rápido que el método no lineal de predicción de errores que a veces se proponen para estimar los parámetros modales en estructuras de ingeniería civil. Cuando se trata de herramientas de postprocesamiento como el análisis del espectro y el cálculo de las respuestas modales, es preferible la implementación de SSI-DATA
- También en el presente capítulo se describió el desarrollo del GUI en MATLAB del software para el análisis modal operacional MACEC. El mismo se concibió como un paquete completo y amigable para la realización del OMA pensado, sobre todo, para su aplicación en ingeniería civil. Fue seleccionado MATLAB como ecosistema de desarrollo debido a sus amplias

CAPÍTULO II

posibilidades de computación y visualización además de permitirle al programador acceder a la mayor parte del código fuente, el cual posibilita la modificación o la adición de nuevos recursos. La herramienta cuenta con posibilidades de pre-procesamiento, identificación de sistema y visualización el cual posibilita tanto el rápido revisado de calidad de los datos in situ (método PP) como un análisis más acertado después (método SSI-DATA).

- Adicionalmete se propuso un procedimiento de análisis modal automatizado el cual es capaz del manejo de grandes cantidades de datos sin la intervención del usuario. Esta automatización es la clave fundamental para el monitoreo continuo de sistemas el cual se basa en los parámetros modales del mismo.

CAPÍTULO III: APLICACIÓN A CASOS DE ESTUDIO. EMPLEO DEL SOFTWARE MACEC.

En el presente capítulo se muestra la aplicación de la herramienta de Matlab «MACEC» para el procesamiento digital de las señales haciendo uso de sus potencialidades para desarrollar un Análisis Modal Operacional en una viga de prueba aislada simplemente apoyada y un puente de ferrocarril. Se demuestra la validez y las potencialidades de dicha herramienta para el procesamiento digital de las señales y toda la paleta de opciones con la que cuenta.

3.1 CASO DE ESTUDIO # 1.

La viga en estudio (Fig. 3.1) es una de varias que forman parte de una investigación realizada por la Empresa Nacional de Investigaciones Aplicadas (ENIA) para la determinación de daños en estructuras a partir de ensayos modales.

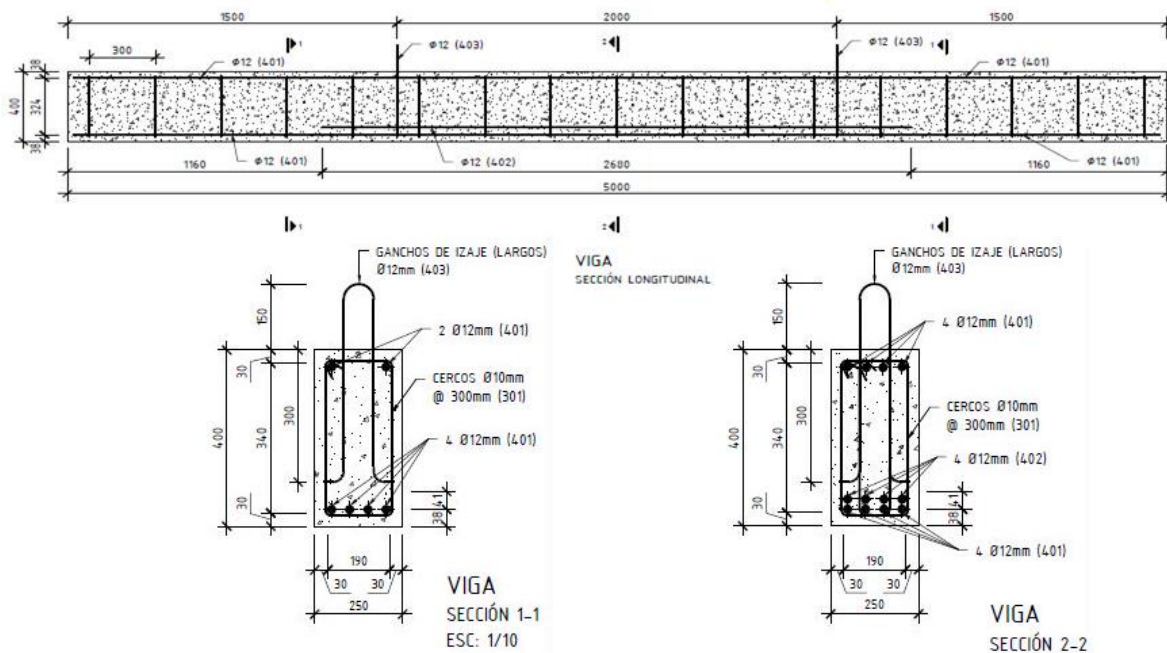


Fig. 3.1-*Características de viga Caso de Estudio*

La viga presentó las siguientes dimensiones: 25 X 40 X 500 cm y su fabricación es de hormigón armado. La colocación de los acelerómetros responde al interés de lograr captar señales que arrojaran la mayor cantidad de modos posibles a partir de la teoría de la dinámica

CAPÍTULO III

clásica. La siguiente tabla recoge la posición de los mismos con respecto a un extremo de la viga.

Acelerómetro	A_1^{S2}	A_4^{S2}	A_5^{S2}	A_2^R	A_1^{S1}	A_4^{S1}	A_5^{S1}
Posición (mm)	102	657	1644	2342	3582	4272	4944

Tab. 3.1-*Posición de los acelerómetros*

Para la obtención de las señales se utilizaron cuatro acelerómetros piezo-eléctricos uniaxiales los cuales cuentan con sensibilidad de hasta 50G las cuales fueron calibradas por personal capacitado de la CUJAE para disminuir su sensibilidad hasta 1G que es la necesaria para la magnitud de la respuesta esperada en la estructura.

La medición se realizó en dos setups (Fig. 3.2) (el superíndice en la numeración de los acelerómetros); tres acelerómetros fueron colocados en la parte derecha de la viga y el cuarto se situó en el centro el cual sirvió de referencia para el segundo setup el cual situó los tres acelerómetros móviles en la parte derecha de la viga para así conseguir medir toda la luz sin necesidad de una gran cantidad de instrumentos.

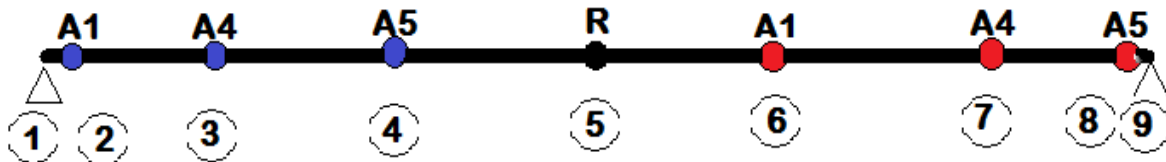


Fig. 3.2-*Organización de los Setups*

(Los puntos rojos corresponde al Setup 1, los azules al Setup 2 y el negro corresponde al acelerómetro no. 2 de referencia entre los dos setups.)

SETUP NO.	CANAL (CH)	TIPO DE ACC.	NO. ACC	DIRECCIÓN	NO. NODO
1	6(1)	Rov	04	Z	7
	7(2)	Rov	05	Z	8

CAPÍTULO III

2	8(3)	Ref	02	Z	5
	9(4)	Rov	01	Z	6
	6(1)	Rov	04	Z	3
	7(2)	Rov	05	Z	4
	8(3)	Ref	02	Z	5
	9(4)	Rov	01	Z	2

Tab. 3.2-*Resumen de organización de los setups*

3.2 APLICACIÓN DEL SOFTWARE.

Como ya se ha planteado con anterioridad, se utilizará la herramienta de Matlab MACEC para el procesamiento de las señales, o sea, para la obtención de los parámetros modales que caracterizan dicha estructura. Para ello nos auxiliaremos de todos los conceptos y conocimientos básicos del mismo los cuales fueron tratados previamente en el epígrafe 2.8.2 del presente trabajo.

3.2.1 Modelación de la geometría

El primer paso para la realización del análisis modal con el empleo del MACEC es la correcta modelación de la geometría del elemento o estructura en cuestión. Esta etapa puede realizarse directamente en el MACEC o en cualquier otro software de modelación. En nuestro caso, dado la sencillez de nuestra estructura, modelamos la misma con la propia herramienta insertando las coordenadas de los nodos manualmente (Fig. 3.3).

NODO	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X	0	0.102	0.657	1.644	2.342	3.582	4.272	4.944	5.02
Y	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Z	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tab. 3.3-*Modelación de la geometría en el software*

CAPÍTULO III

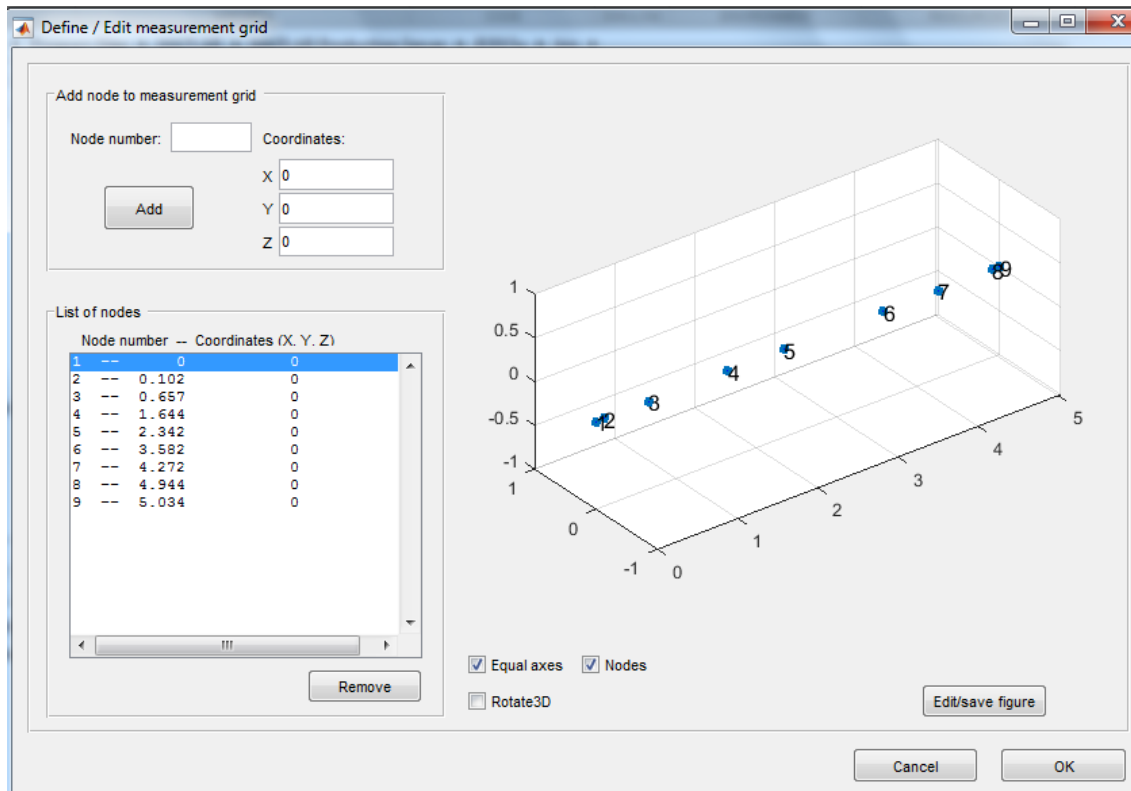


Fig. 3.3-*Ubicación de los nodos en el software*

No se definieron nodos «Master» y los «Slaves» ya que los apoyos en los extremos de la viga tienen el movimiento restringido en la dirección solo hacia abajo. En el caso hipotético de «esclavizar» dichos nodos (1 y 9) estaríamos omitiendo el movimiento horizontal hacia arriba de dichos apoyos lo cual ocurre en ciertos modos

Como paso final se unen todos los nodos de dos en dos formando «beams» debido a las características de nuestra estructura. Las mismas se unieron utilizando las ventajas del propio Matlab (Fig. 3.4).

CAPÍTULO III

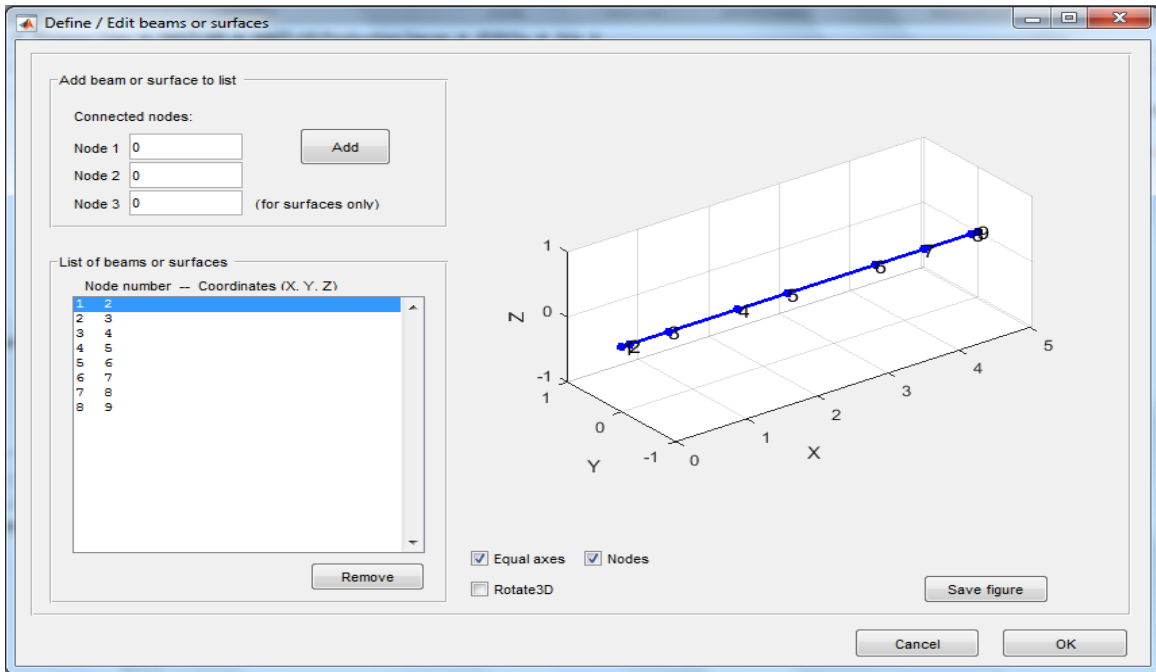


Fig. 3.4-Unión de los nodos de a dos como «Beams»

3.2.2 Pre-procesamiento de las señales

Este paso es de gran importancia para una correcta identificación del sistema ya que permite un refinamiento de las señales obtenidas directamente. A continuación, se organiza de manera secuenciada las sub-etapas de dicho proceso:

- Se modifican los parámetros de la Potencia de Densidad Espectral (PSD). Se fija un solapamiento de un 66% correspondiente a un 33% de solape con las frecuencias inmediatas inferiores y otro 33% con las inmediatas superiores (Fig. 3.5).

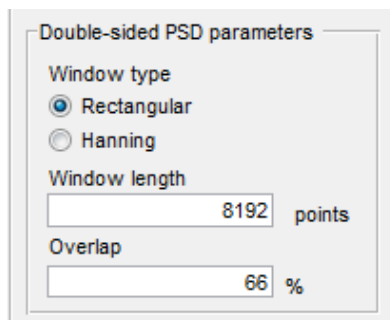


Fig. 3.5-Ventana de pre-procesamiento de modificación de los parámetros PSD

- Se realiza un *Time Window*; primero (19:71) s y después (0:51) s, con el objetivo de desechar los tiempos iniciales y finales en donde no había comenzado la excitación o donde ya el tiempo de amortiguamiento había finalizado (Fig. 3.6).

CAPÍTULO III

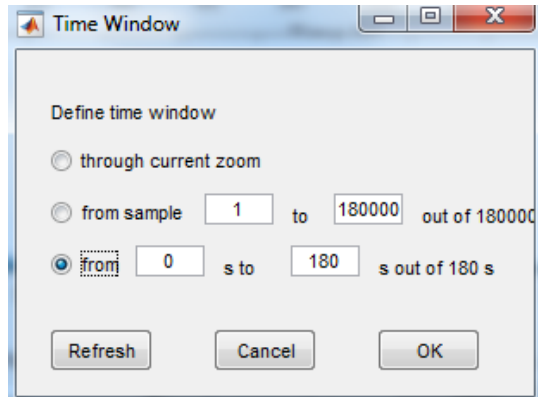


Fig. 3.6-*Ventana de pre-procesamiento de Time Window*

- Se le aplica un factor decimate igual a 8; su funcionamiento es filtrar las frecuencias bajas de los datos y remuestrearlos en un ritmo inferior. (Fig. 3.7)

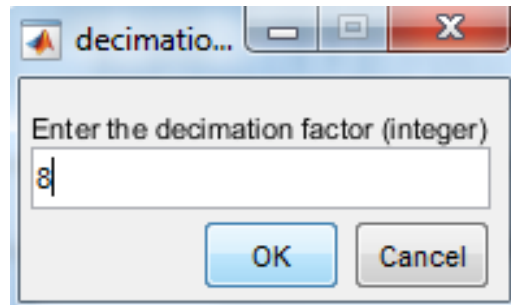


Fig. 3.7-*Factor de pre-procesamiento «Decimate»*

- Por último, se aplica el FiltFilt, el cual se encarga de limpiar las frecuencias que se encuentren por debajo o por encima de lo que se considera normal. En nuestro caso, aplicamos un filtro de paso alto de 0.5Hz el cual elimina todas las frecuencias menores a esta las cuales pueden considerarse ruido (Fig. 3.8).

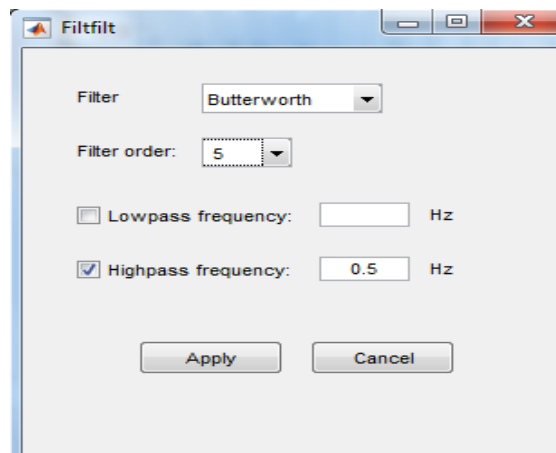


Fig. 3.8-*Ventana de pre-procesamiento “FiltFilt”*

3.2.3 Identificación del sistema

Como algoritmo para identificar el sistema elegimos la Identificación del Sub-espacio Estocástico basado tanto en la covarianza (SSI-COV) como en los datos (SSI-DATA), entre todos los métodos de identificación (Fig. 3.7), debido a que este método es el método de identificación paramétrico más robusto y acertado con que cuenta el software.

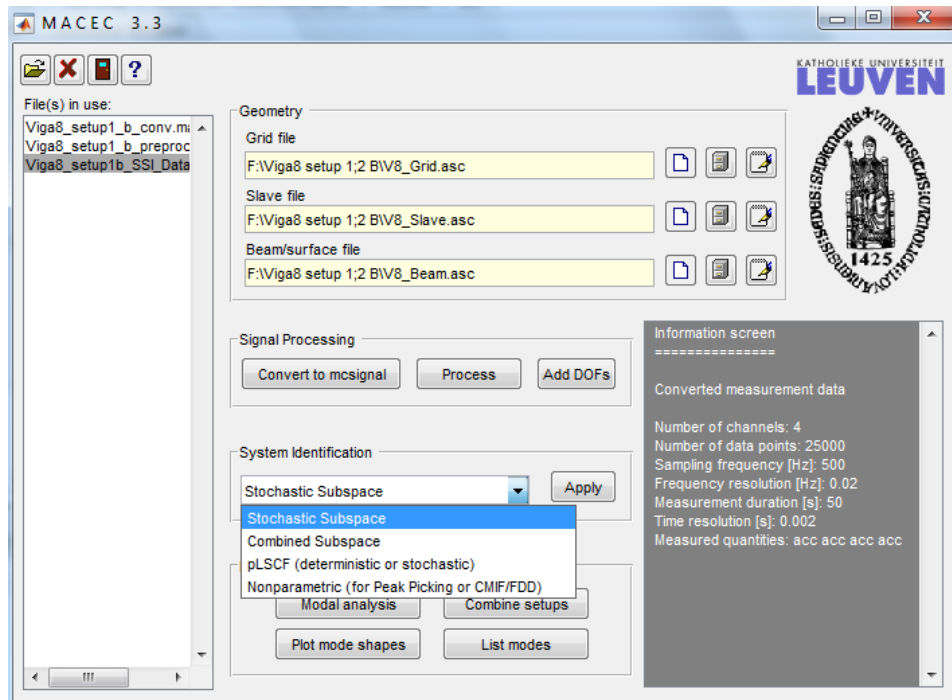


Fig. 3.9-Variantes de Identificación de sistema usadas por el software

Se le indicó al software el canal de referencia (3) para el posterior multisetup; se le indicó un orden del sistema esperado de 10, el cual es el doble de los modos esperados, y se procedió al cálculo (Fig. 3.10).

3.2.4 Obtención de los parámetros modales.

Como fase final se procede a la identificación de los modos detectados, el cual se hace de manera sencilla, utilizando los diagramas de estabilización. Es importante señalar que todo este procedimiento se hace tanto para el primer setup como para el segundo, los cuales se combinan posteriormente mediante la opción del multisetup. En las siguientes imágenes se muestran la detección de los modos del primer y el segundo setup.

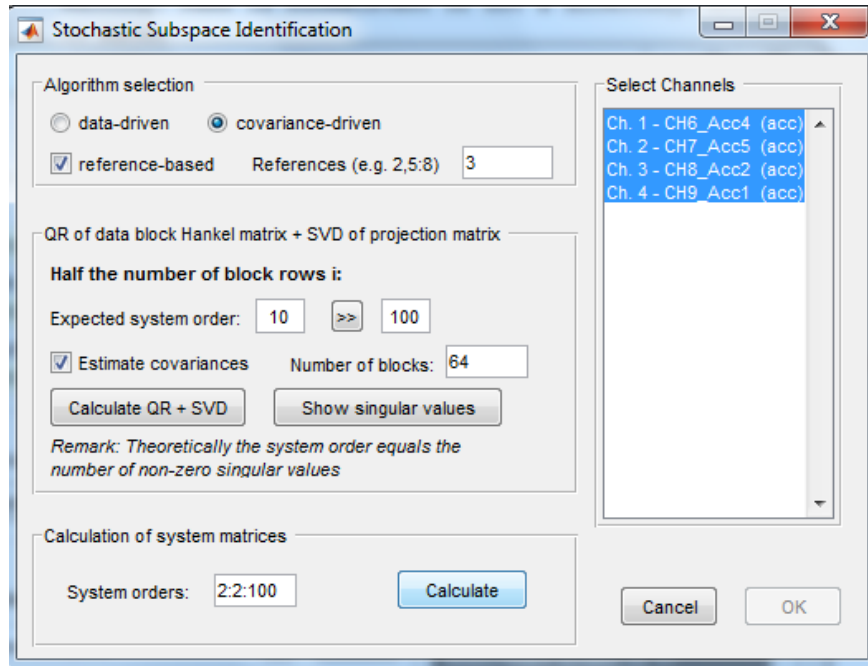


Fig. 3.10-Ventana de identificación del sub-espacio estocástico

Para la elección de los modos (Fig. 3.11) (Fig. 3.12) se tuvieron en cuenta varios criterios: primeramente, que el modo estuviera en la abscisa donde hubiese un número considerable de polos estables y que coincidieran con los picos de la descomposición espectral; también es necesario que el valor de MPC fuera lo más próximo a 1 y que los de MPD y «Mean Phase» se acercaran lo más posible a cero. Este parámetro se puede apreciar con claridad en los puntitos rojos en la parte derecha de la ventana, los cuales tienen que estar lo más alineados horizontalmente posible y lo más coincidente con el eje de los reales (R). Por último, es necesario que los modos de todos los setups sean semejantes, de lo contrario, es indicio de que la medición no se realizó correctamente.

CAPÍTULO III

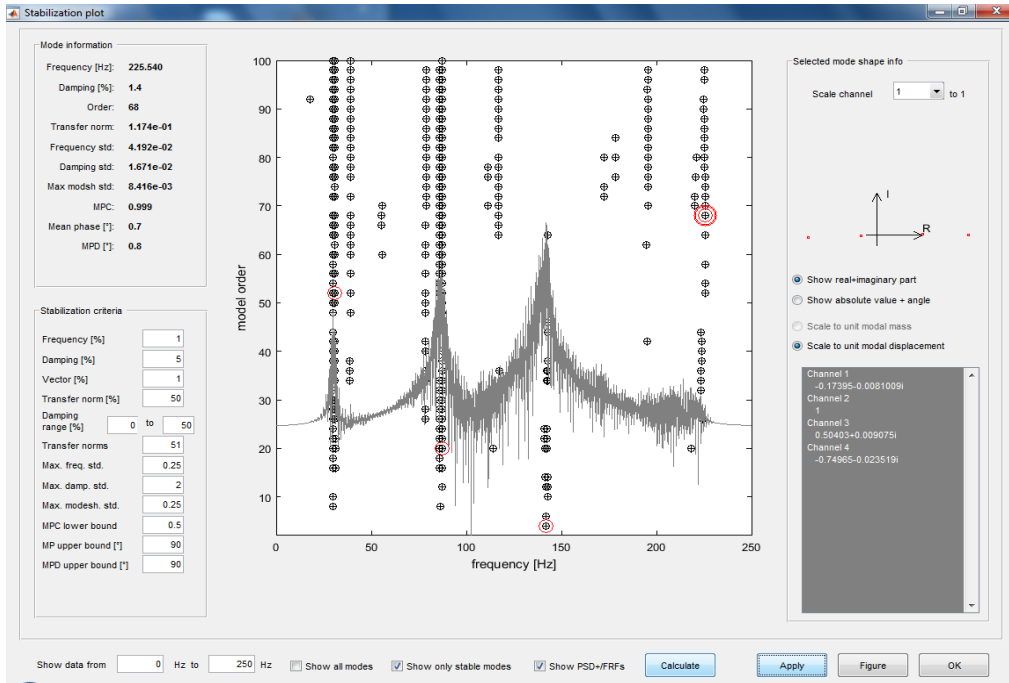


Fig. 3.11-Diagrama de estabilización del primer setup en la viga del caso de estudio

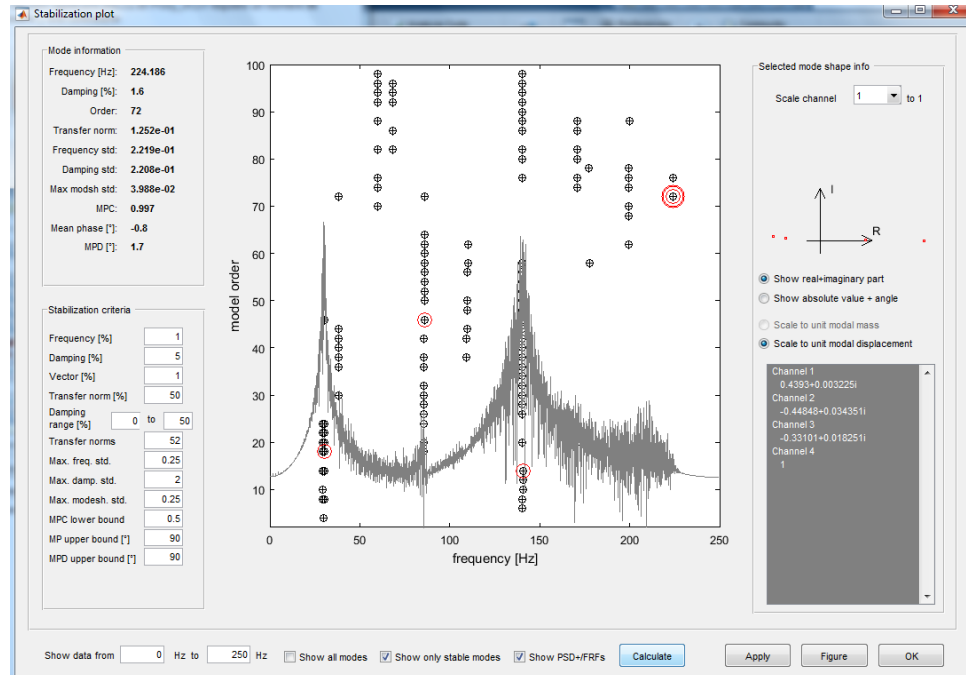


Fig. 3.12-Diagrama de estabilización del segundo setup de la viga del caso de estudio

CAPÍTULO III

3.2.5 Presentación de los resultados

A continuación, se tabulan los principales parámetros obtenidos en el setup 1, setup 2 y el multisetup, tanto para el modelo identificado con los datos como con la covarianza. Los resultados completos pueden ser consultados en los Anexos (A.1 al A.6).

Resultados obtenidos de la identificación derivados de la Covarianza

SETUP 1	MODOS			
	I	II	III	IV
	FRECUENCIAS NATURALES f (Hz)			
	30.80926	87.25863	141.7321	225.5397
	FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO (%)			
	0.85471	1.161	1.5878	1.4141

Tab. 3.4-Resultados del primer setup derivado de la covarianza

SETUP 2	MODOS			
	I	II	III	IV
	FRECUENCIAS NATURALES f (Hz)			
	30.3193	86.05574	140.7126	224.1856
	FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO (%)			
	0.94145	1.7389	1.4143	1.6309

Tab. 3.5- Resultados del segundo setup derivado de la covarianza

CAPÍTULO III

MULTI SETUP	MODOS			
	I	II	III	IV
	FRECUENCIAS NATURALES $f(\text{Hz})$			
	30.56428	86.65718	141.2223	224.8626
	FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO (%)			
	0.89808	1.4499	1.5011	1.5225

Tab. 3.6- Resultados del multisetup derivado de la covarianza

Resultados obtenidos de la identificación derivados de los Datos

SETUP 1	MODOS			
	I	II	III	IV
	FRECUENCIAS NATURALES $f(\text{Hz})$			
	28.98478	86.2265	141.1247	223.926
	FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO (%)			
	6.7338	1.8735	1.5085	1.659

Tab. 3.7- Resultados del primer setup derivado de los datos

SETUP 2	MODOS			
	I	II	III	IV
	FRECUENCIAS NATURALES $f(\text{Hz})$			
	28.69409	85.89237	140.6354	210.8285
	FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO (%)			
	4.0006	1.6141	1.4264	5.513

Tab. 3.8- Resultados del segundo setup derivado de los datos

CAPÍTULO III

MULTI SETUP	MODOS			
	I	II	III	IV
	FRECUENCIAS NATURALES $f(\text{Hz})$			
	28.83943	86.05943	140.88	217.3772
	FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO (%)			
	5.3672	1.7438	1.4674	3.586

Tab. 3.9- Resultados del multisetup derivado de los datos

Formas modales identificadas

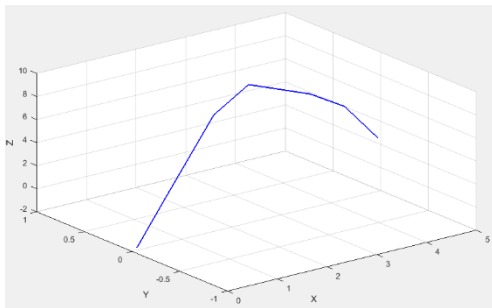


Fig. 3.13- Modo 1 f (28.98 Hz) SSI_DATA

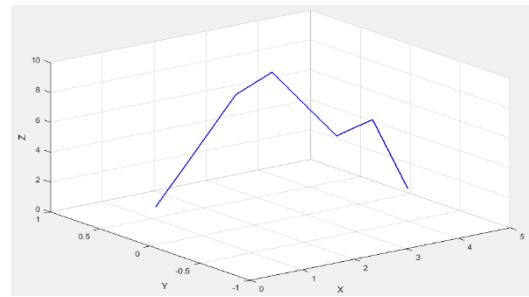


Fig. 3.14- Modo 1 f (30.56 Hz) SSI_COV

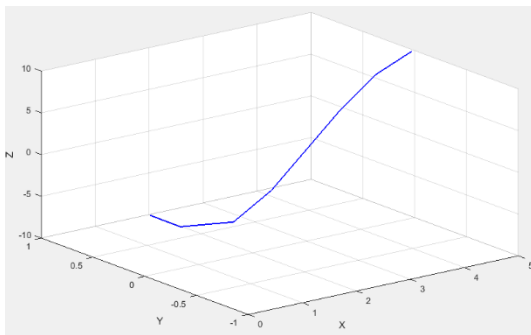


Fig. 3.15- Modo 2 f (86.06 Hz) SSI_DATA

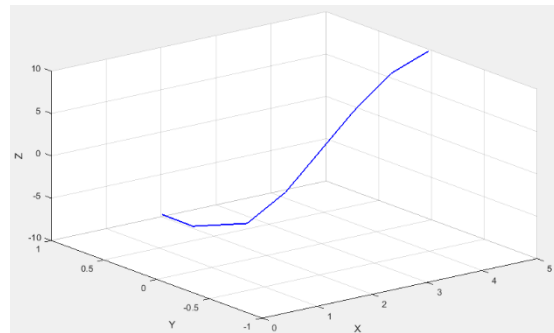


Fig. 3.16- Modo 2 f (86.66 Hz) SSI_COV

CAPÍTULO III

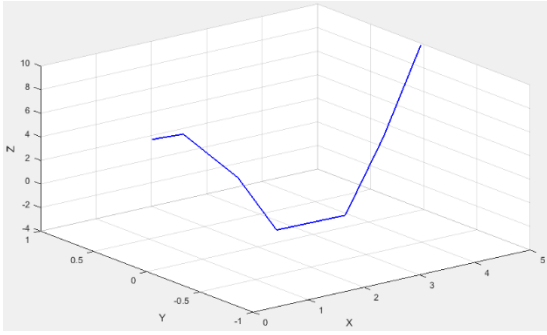


Fig. 3.17- *Modo 3 f (140.88 Hz) SSI_DATA*

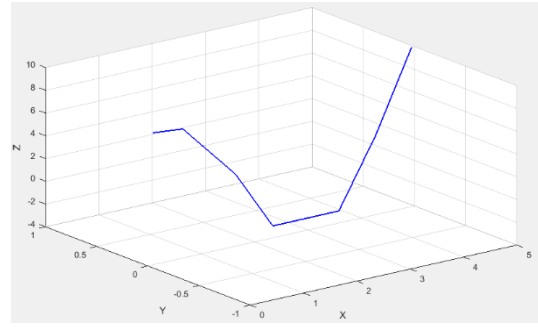


Fig. 3.18- *Modo 3 f (141.22 Hz) SSI_COV*

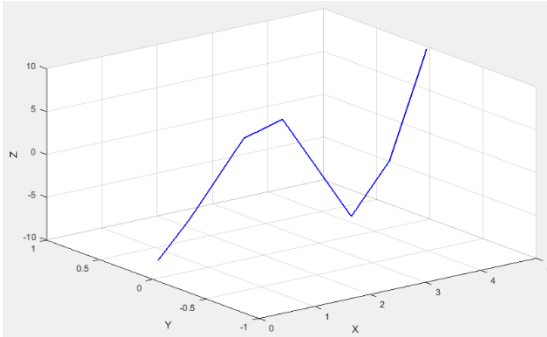


Fig. 3.19- *Modo 4 f (217.38 Hz) SSI_DATA*

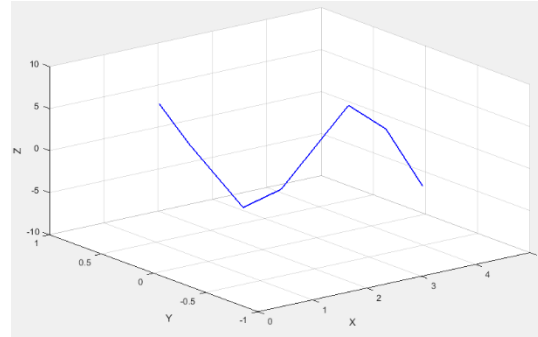


Fig. 3.20- *Modo 4 f (224.86 Hz) SSI_COV*

3.2.6 Discusión de los resultados

En el presente caso estudio, se realizó el análisis modal para cada los dos setups, tanto para el sistema identificado con los datos como el identificado con la covarianza, y el posterior multisetup de estos. De este análisis fueron identificados cuatro modos para ambas identificaciones los cuales estuvieron alrededor de: 29.0 Hz (Modo 1), 86.30 Hz (Modo 2), 141.0 Hz (Modo 3), 220.0 Hz (Modo 4). Las formas modales en ambos casos fueron muy parecidas y se ajustan a los conceptos de la Dinámica Clásica (ningún cruce para el primer modo, un cruce para el segundo modo, etc.). Las mayores diferencias residieron en los factores de amortiguamiento los cuales en el sistema derivado de los datos mostró resultados lógicos para estructura de hormigón armado (5-10%), mientras que en el sistema derivado de la covarianza los factores de amortiguamiento fueron muy bajos (en el orden del 1%).

CAPÍTULO III

3.3 CASO DE ESTUDIO # 2

El presente caso de estudio consiste en un puente de ferrocarril ubicado en el km 560 de la carretera central. El mismo presenta cuatro luces de 20m cada una. Cada luz está constituida por dos vigas tipo T distanciadas a 1.475 m. Sus dimensiones son 60 cm de peralto, 45 cm el alma y 20 cm el ala.



Fig. 3.21- *Puente Caso de Estudio # 2*

La instrumentación en el puente contó con cuatro acelerómetros piezoeléctricos unidireccionales y un equipo para recoger las señales emitidas por este. La colocación de los acelerómetros estuvo en función de abarcar toda la longitud del puente, aunque estos fueron colocados por la cara Sur en la primera luz (Luz- AB) y en el resto de las luces (Luces BC, CD, DE) se colocaron en la cara Norte.

La excitación del puente se consiguió al hacer pasar un tren por encima de este en ambas direcciones (Las Tunas-Camagüey; Camagüey-Las Tunas) y a velocidades variables, esto con el objetivo de excitar la mayor cantidad de modos en la estructura y para contar con una cantidad de señales considerables para seleccionar de estas las que mostraran mejor calidad.

La ubicación de los acelerómetros en el puente, así como el setup al que responde se resumen en las siguientes tablas y en la figura 3.22:

CAPÍTULO III

Acelerómetro	A_5^{S1}	A_2^{S1}	A_1^{S1}	A_4^{S1}	A_4^{S2}	A_1^{S2}	A_2^{S2}	A_5^{S2}	A_4^{S3}	A_2^{S3}	A_5^{S3}	A_1^{S3}
Posición (m)	0	2.5	5.0	7.5	7.5	10	12.5	15	7.5	12.5	17.5	20

Tab. 3.10- Ubicación de los acelerómetros tramo AB cara Sur.

Acelerómetro	A_1^{S4}	A_5^{S4}	A_2^{S4}	A_4^{S4}	A_5^{S5}	A_2^{S5}	A_4^{S5}	A_1^{S5}
Posición (m)	20	25	30	32.5	25	30	35	40

Tab. 3.11- Ubicación de los acelerómetros tramo BC cara Norte.

Acelerómetro	A_4^{S6}	A_5^{S6}	A_1^{S6}	A_2^{S6}	A_5^{S7}	A_2^{S7}	A_1^{S7}	A_4^{S7}
Posición (m)	40	45	50	55	45	55	60	65

Tab. 3.12- Ubicación de los acelerómetros tramo CD cara Norte.

Acelerómetro	A_4^{S8}	A_5^{S8}	A_2^{S8}	A_1^{S8}
Posición (m)	65	70	75	80

Tab. 3.13- Ubicación de los acelerómetros tramo DE cara Norte.

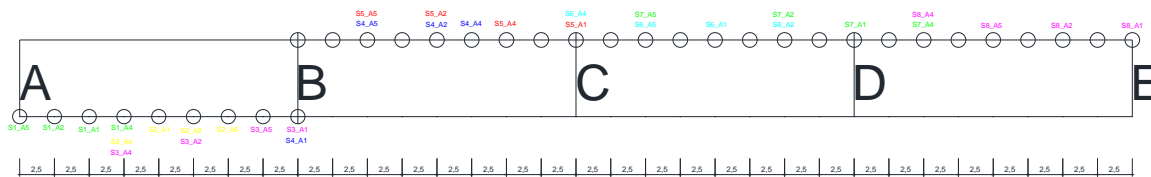


Fig. 3.22- Esquema de ubicación de los setups Puente 560

Los cuatro acelerómetros están acoplados por «canales» a un dispositivo el cual se encarga de la recolección de las señales emitidas por los acelerómetros en Volts y la transforma directamente a aceleración. La distribución de los canales y los acelerómetros, así como la dirección de medición de los acelerómetros, la función que desempeña y el nodo en el que están colocados (necesario para la posterior modelación de la geometría en el software de procesamiento de las señales), se condensan en la siguiente tabla resumen:

CAPÍTULO III

Setup No.	Canal (CH)	No. Acc	Dirección	No. Nodo
1	9(4)	5	Z	1
	8(3)	2	Z	2
	7(2)	1	Z	3
	6(1)	4	Z	4
2	6(1)	4	Z	4
	7(2)	1	Z	5
	8(3)	2	Z	6
	9(4)	5	Z	7
3	5(1)	4	Z	4
	8(3)	2	Z	6
	9(4)	5	Z	8
	7(2)	1	Z	9
4	7(2)	1	Z	9
	9(4)	5	Z	31
	8(3)	2	Z	32
	6(1)	4	Z	33
5	9(4)	5	Z	31
	8(3)	2	Z	33
	6(1)	4	Z	34
	7(2)	1	Z	35
6	6(1)	4	Z	35
	9(4)	5	Z	36
	7(2)	1	Z	37
	8(3)	2	Z	38
7	9(4)	5	Z	36
	8(3)	2	Z	38
	7(2)	1	Z	39
	6(1)	4	Z	40
8	6(1)	4	Z	40

CAPÍTULO III

	9(4)	5	Z	41
	8(3)	2	Z	42
	7(2)	1	Z	43

Tab. 3.14- *Resumen de organización de los setups*

3.4 APLICACIÓN DEL SOFTWARE

Como ya se ha planteado con anterioridad, se utilizará la herramienta de Matlab MACEC para el procesamiento de las señales, o sea, para la obtención de los parámetros modales que caracterizan dicha estructura. Para ello nos auxiliaremos de todos los conceptos y conocimientos básicos del mismo los cuales fueron tratados previamente en el epígrafe 2.8.2 del presente trabajo. La metodología que se utilizó fue la misma que la del caso de estudio anterior.

3.4.1 Modelación de la geometría

Como fue analizado en el caso de estudio anterior, se procede a la colocación de los nodos con sus respectivas coordenadas.

Nodo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
X	0	2.5	5	7.5	10	12.5	15	17.5	20	25	30	32.5	35	40	45	50
Y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Z	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5

Tab. 3.15- *Modelación de la geometría en el software*

Nodo	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
X	52.5	55	60	65	70	72.5	75	80	0	5	10	12.5	15	20	25	30
Y	0	0	0	0	0	0	0	0	5	5	5	5	5	5	5	5
Z	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5

Tab. 3.16- *Modelación de la geometría en el software*

Nodo	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
X	32.5	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	20	20	40	40	60	60
Y	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	0	5	0	5	0	5
Z	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	2.1	2.1	0	0	1.65	1.65

CAPÍTULO III

Tab. 3.17- Modelación de la geometría en el software

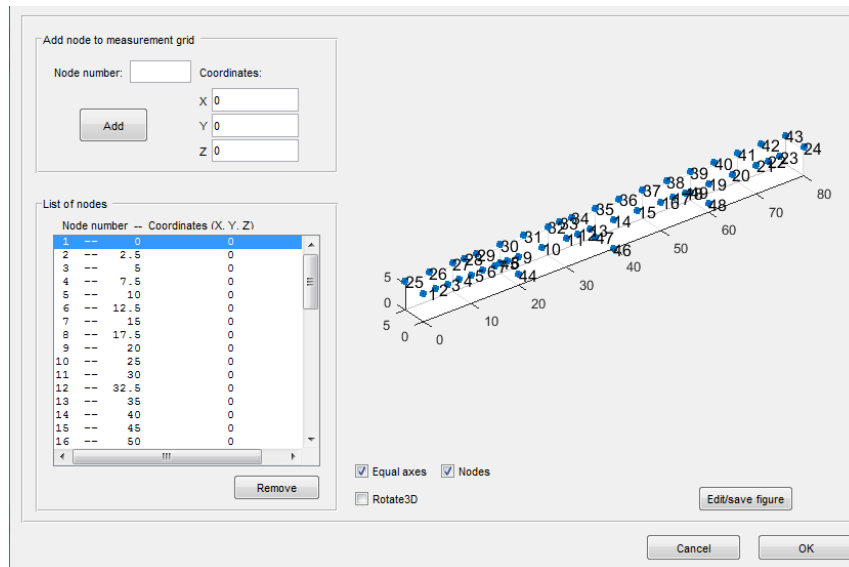


Fig. 3.23- Ubicación de los nodos en el software

A continuación, se procedió a la unión de dichos nodos de tres en tres para formar superficies.

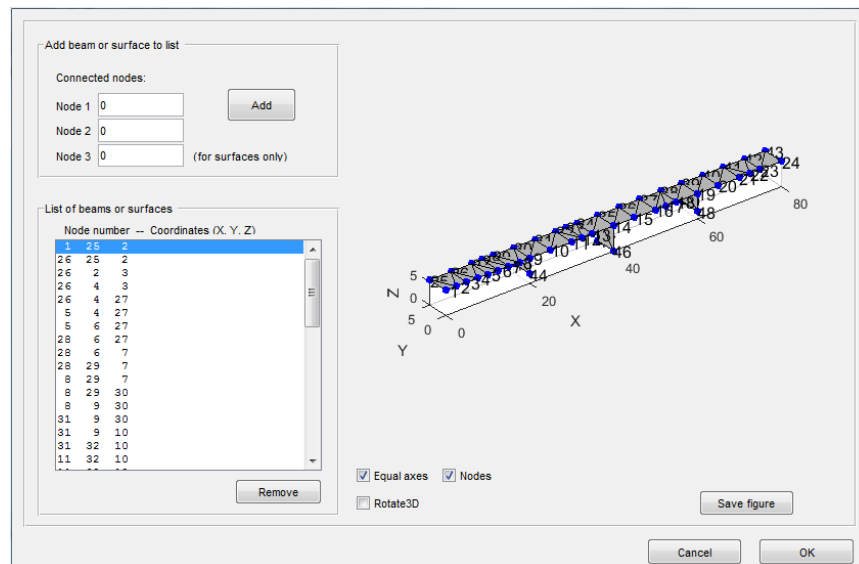


Fig. 3.24- Unión de los nodos mediante superficies.

3.4.2 Pre-procesamiento de las señales

El procedimiento para el pre-procesamiento de las señales para cada setup fue similar al del caso de estudio de la viga aislada. Se le realizó un time window específico para cada setup, los parámetros de la PSD fueron los mismos, al igual que el factor Decimate y el filtfit.

CAPÍTULO III

3.4.3 Identificación del Sistema

El caso de la identificación del sistema fue similar al caso anterior, a diferencia que la identificación del sistema fue realizada solamente derivada de la covarianza.

3.4.4 Obtención de los parámetros modales

Para la obtención de los parámetros modales hubo que hacer una selección entre todas las señales procesadas para cada setup y elegir aquellas que mostraban resultados más coherentes según mi criterio (Tabla 3.18). Esto debido a que no todas tenían la calidad necesaria para identificar modos estables ni todas contaban con la misma cantidad de modos los cuales son una condición indispensable para la realización de un multisetup (Figura 3.25 y 3.26).

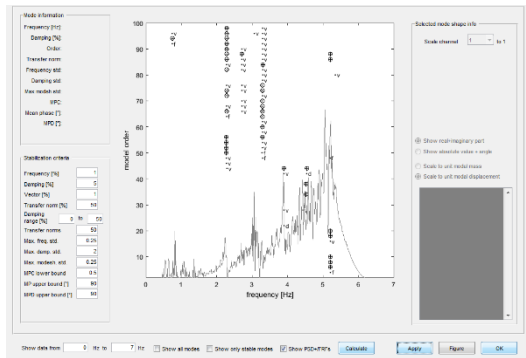


Fig. 3.25- Diagrama de estabilización Tramo AB, excitación Camagüey-Tunas, 20 km/h, Setup 2

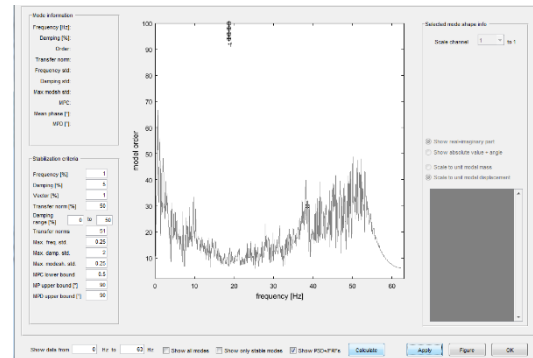


Fig. 3.26- Diagrama de Estabilización Tramo BC, excitación Tunas-Camagüey, 45 km/h, Setup 1

3.4.5 Presentación de los resultados

A continuación, se presentan los resultados del análisis del multi-setup y los resultados de los setups individuales que también se recogen en los anexos (A7-A14).

Setup	Luz	Excitación	Modo1 f (Hz)	Amort. (%)	Modo2 f (Hz)	Amort. (%)	Modo3 f (Hz)	Amort. (%)
1	AB	Cam-Tun 30 km/h	8.13	1.64	38.56	1.25	51.32	0.72
2	AB	Tun-Cam 80 km/h	9.799	1.396	39.53	0.87	50.577	0.217
3	AB	Cam-Tun 70 km/h	8.987	0.632	26.65	0.673	50.48	0.02
4	BC	Cam-Tun	9.527	1.586	25.435	0.253	45.56	0.5

CAPÍTULO III

		60 km/h						
5	BC	Cam-Tun 20 km/h	10.75	1.14	33.36	0.315	49.36	1.19
6	CD	Tun-Cam 60 km/h	8.18	0.315	20.8	2.9	42.72	0.33
7	CD	Cam-Tun 60 km/h	9.35	0.6	21.79	0.24	44.03	0.17
8	DE	Cam-Tun 60 km/h	8.87	0.83	33.95	0.13	44.206	0.128
M	AE	-	9.236	1.11	29.504	0.766	47.089	0.414

Tab. 3.18- Frecuencias y amortiguamientos de los setups seleccionados y el multisetup

Formas modales identificadas

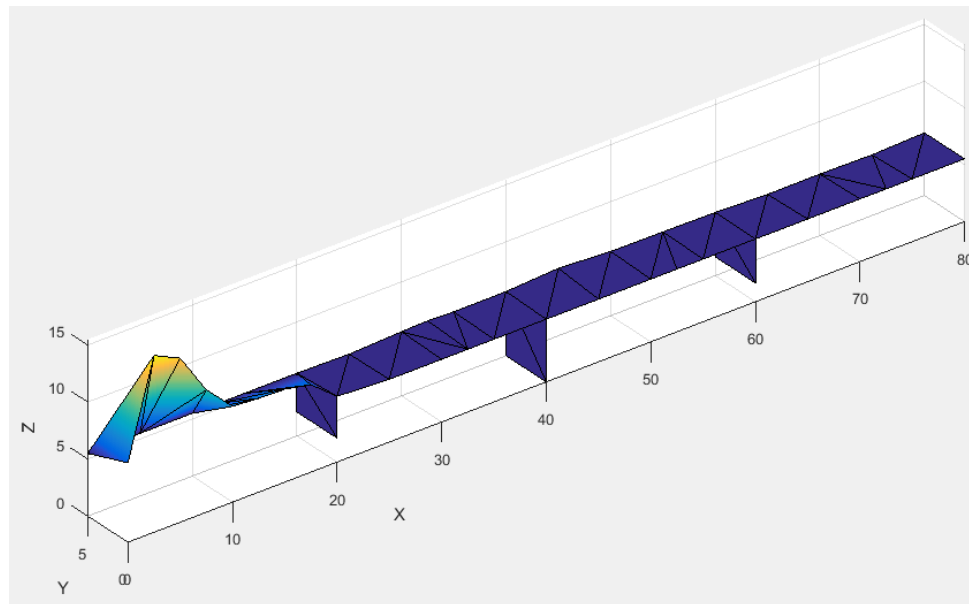


Fig. 3.27- Modo 1 (9.236 Hz) *SSI_COV*

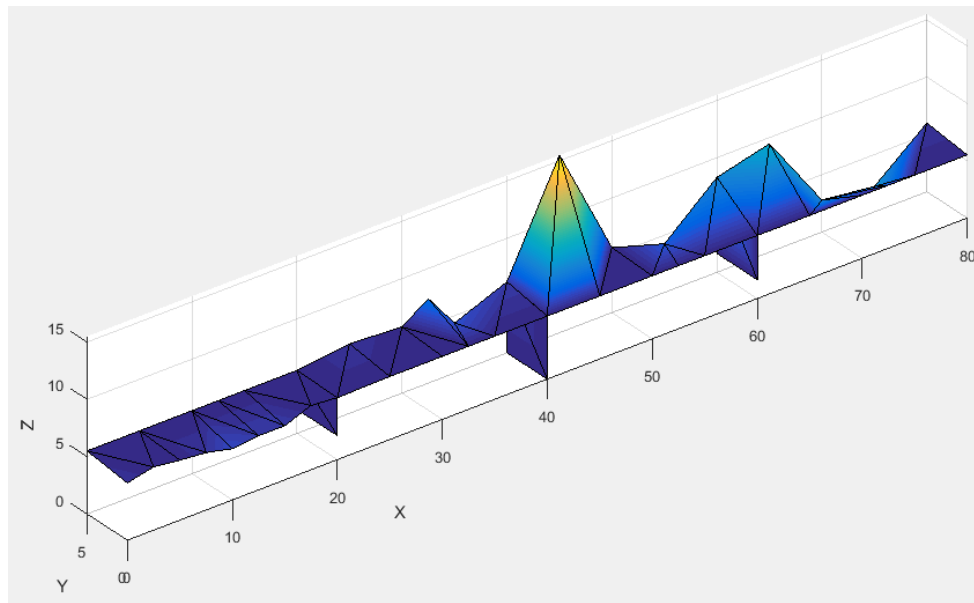


Fig. 3.28- *Modo 2 (29.5037 Hz) SSI_COV*

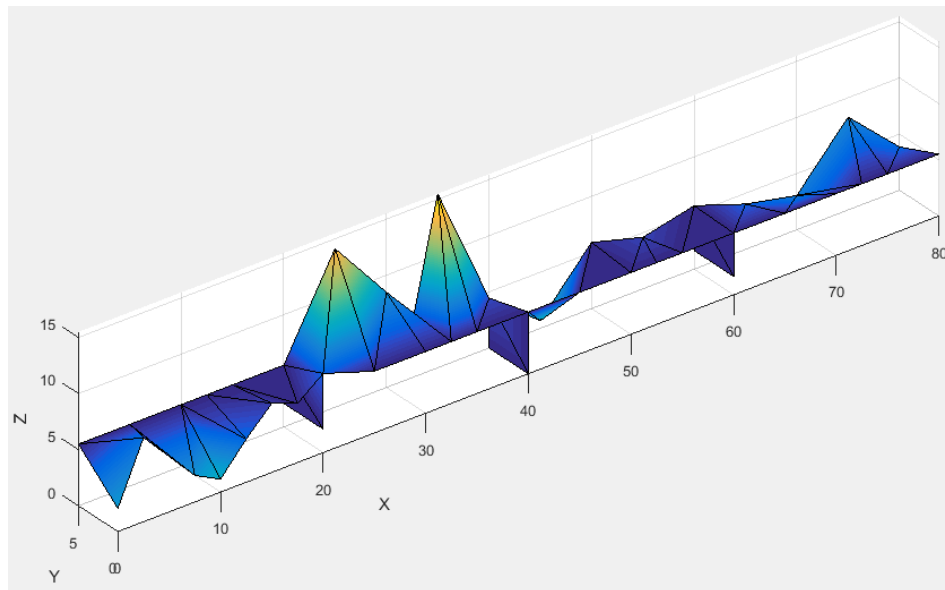


Fig. 3.29- *Modo 3 (47.089 Hz) SSI_COV*

3.4.6 Discusión de los resultados

En el caso de estudio correspondiente al puente 560 Camagüey, se realizó el análisis modal a varias versiones de cada setup, de las cuales se seleccionaron para realizar el multisetup las que mostraron modos más estables y frecuencias naturales que se aproximaran por cada modo seleccionado, debido a que el software de procesamiento de las señales necesita de la misma cantidad de modos en cada setup para realizar un multisetup. Es importante señalar que la

CAPÍTULO III

calidad de las señales no era buena y no todos los modos seleccionados fueron lo suficientemente estables que se hubieran deseado.

Para el primer modo, en todos los setups seleccionados, las frecuencias naturales estuvieron en el orden de 8-11 Hz, todas con amortiguamientos bajos que no sobrepasaron el 1.5% y tuvieron mínimos de 0.3% (Setup 6). En el segundo modo la diferencia entre los valores máximos y mínimos es más marcada que en el primer modo identificado, rondando valores que van desde los 20.8 Hz (Setup 6) hasta los 39.53 Hz (Setup 2) y, al igual que en el anterior con factores de amortiguamiento muy bajos. El tercer modo identificado osciló entre 42 Hz y 51 Hz para los 8 setups realizados presentando este los menores factores de amortiguamiento los cuales, excepto el setup 5 con 1.19%, los demás no sobrepasaron el 0.7%, incluso aproximándose a 0% (Setup 3). En el caso del multisetup los modos obtenidos fueron de 9.24 Hz, 29.5 Hz y 47.1 Hz respectivamente cuyos amortiguamientos tuvieron un comportamiento decreciente de 1.11%, 0.766% y 0.414% respectivamente. Las formas modales correspondientes a los modos identificados en el multisetup mostraron un comportamiento oscilatorio ascendente a mediada que aumentaron los valores de frecuencias naturales, aunque en el primer modo identificado (9.236 Hz) las oscilaciones considerables se realizaron en la luz AB del puente mientras que en el resto de la estructura el comportamiento fue casi nulo, esto pudiera deberse a la colocación de los acelerómetros en la organización de los setups.

3.3 CONCLUSIONES PARCIALES DEL CAPÍTULO.

- A partir de la etapa de pre-procesamiento, seguido por el correspondiente análisis modal de los setups se hizo evidente la marcada diferencia en la calidad de las señales obtenidas en ambas estructuras. En las señales del puente procesadas se pueden observar una gran cantidad de ruido, y en los diagramas de estabilización los modos que se obtenían no eran de gran calidad (Fig. 3.24 y Fig. 3.25), todo lo contrario, con la viga en la cual se observa una señal con gran limpieza (Fig. 2.6) y modos de gran calidad (Fig. 3.11 y Fig. 3.12).
- Las frecuencias naturales de los modos identificados en la viga objeto de estudio, tanto con datos como con covarianza, son similares en cada caso. De igual manera las formas modales fueron casi idénticas; la mayor diferencia entre ambas identificaciones reside

CAPÍTULO III

en los valores adoptados por los factores de amortiguamiento. En la identificación derivada de los datos esta adoptó valores coherentes para este tipo de elemento de hormigón armado, los cuales oscilan entre 4~10%. Mientras que en la identificación derivada de la covarianza los amortiguamientos fueron bajos (0.8~1.6%).

- Las formas modales identificadas en el caso de las vigas son muy cercanas a las clásicas (1er Modo sin cruce, 2do Modo con un cruce, etc), lo cual corresponde con el estado no dañado de los elementos ensayados, aunque la forma de los apoyos empleada (con comportamiento no lineal, semejante al “compression only” que se usa en los softwares y sin restricción horizontal) siempre introdujo cierto nivel de incertidumbre en los resultados de la identificación.
- En el caso del puente en el km 560, solamente se realizó la identificación derivada de la covarianza. En este análisis se obtuvieron 3 modos, con amortiguamientos muy bajos para este tipo de elementos y sus formas modales correspondientes. Estas no representan con suficiente exactitud la realidad del mismo debido a que la instrumentación no fue uniforme en toda la estructura y la calidad de las señales no eran buenas en todos los casos.
- Aparentemente las formas modales obtenidas en este caso se corresponden con modos torsionales, cuando realmente corresponden a modos flexionales. La causa fundamental para esto es la forma de colocar los acelerómetros en los distintos setup, en los que no se usan posiciones que no estén alineadas a lo largo de una viga, con lo cual no hay información para identificar las formas en la 2da viga del puente.
- A partir de las experiencias de la Dinámica Clásica, se debe esperar una frecuencia en el primer modo de aproximadamente de $100/Luz$ que en el caso de la viga sería de 20 Hz, una diferencia de aproximadamente 9 Hz, y en el puente se espera una frecuencia de 5 Hz y se obtuvieron frecuencias que rondan los 9 Hz (diferencia de 4 Hz). En ambos casos hubo cierta aproximación, independientemente de la diferencia que existe entre la calidad de las señales obtenidas de ambas estructuras.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

- Es necesario el conocimiento de la evolución histórica de la teoría sobre el análisis modal para una correcta implementación e interpretación de los softwares de procesamiento de señales y obtención de los parámetros dinámicos de las estructuras.
- La metodología presentada para la realización del Análisis Modal Operacional con el software MACEC, además de las potencialidades con que cuenta este en la identificación de sistemas estocásticos (mediante la aplicación de métodos de identificación paramétricos y no paramétricos), la cual fue implementada en ambos casos de estudio, resultó un factor fundamental para la obtención de parámetros modales acertados, atendiendo a las condiciones específicas de cada caso.
- Para el caso de estudio de la viga aislada, partiendo de un correcto diseño del experimento, sumado a condiciones externas favorables (laboratorio) se obtuvieron señales con calidad. Esto sumado a un pre-procesamiento de la señal condujo a la obtención de modos estables, cuyas frecuencias se aproximaban en los dos setups realizados y para ambos tipos de datos (datos y covarianza), con formas modales semejantes y lógicas, con factores de amortiguamiento razonables (derivado de los datos) se puede inferir que la calidad del análisis modal fue buena.
- En el puente del km 560 en Camagüey, a partir de un diseño del experimento deficiente más condiciones operacionales difíciles, se obtuvieron señales de mala calidad que independientemente del pre-procesamiento realizado condujeron a modos inestables, con factores de amortiguamiento muy bajos y formas modales incongruentes (debido también a la colocación de los acelerómetros); aunque en los setups seleccionados (los de mejor calidad) las frecuencias naturales fueron semejantes, puede derivarse que la calidad del análisis modal fue mala.
- A partir de un análisis comparativo en ambos casos de estudio, puede observarse que: en el primer caso de estudio partiendo un buen diseño del experimento y la obtención de señales de calidad, se obtuvieron modos semejantes para todos los casos, formas modales lógicas y correctos factores de amortiguamiento (con covarianza); mientras que en el segundo caso donde el diseño del experimento no se realizó correctamente

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

y las señales no fueron buenas, se obtuvieron modos inestables que condujeron a factores de amortiguamiento bajos y formas modales incongruentes.

- Para ambos casos de estudio, los factores de amortiguamiento en la identificación derivada de la covarianza resultaron muy bajos para los tipos de elementos analizados, siendo generalmente menores a 1.5% mientras que se esperaba que estuvieran en el rango de 4~10%.

Una vez definida las conclusiones del trabajo, podemos ofrecer las siguientes recomendaciones:

- Profundizar en la teoría del Análisis Modal en general, sobre todo en la preparación del diseño del experimento y el mejoramiento de los procedimientos de obtención de las señales, para lograr una mejor identificación del sistema y obtención de parámetros modales, con las consecuentes ventajas que esto procura en la calibración de modelos, detección de daños, etc.
- Es recomendable una preparación previa en el manejo del software de identificación de sistemas que se utilice, así como la teoría que rige su funcionamiento; sus potencialidades y deficiencias.
- Procurar la obtención de señales de calidad para estar más cerca de lograr un análisis modal más exacto y una mejor representación de la realidad.
- Contribuir a la difusión de la aplicación del Análisis Modal entre los profesionales competentes con el objetivo de lograr una mayor versatilidad y profesionalidad en la modelación de las estructuras, así como una mejor interpretación de sus características estructurales actuales.

BIBLIOGRAFÍA

Afonso Aspiro, Y., 2016. *Estimación de parámetros estructurales en puentes usando la OAPI SAP2000 - MATLAB*. Santa Clara(Villa Clara): s.n.

Akaike, H., 1974. *Markovian representation of stochastic processes and its application to the analysis of autoregressive moving average processes*. s.l.:s.n.

Aoki, M., 1987. *State Space Modeling of Time Series*. Los Angeles: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Bilošová, A., 2011. *Modal Testing*. Ostrava: s.n.

Carrión Viramontes, F. J. y otros, 1999. Evaluación de Puentes Mediante el Análisis de Vibraciones. Investigaciones Recientes. *Publicación Técnica*, Issue 132.

Claro Duménigo, A., 2015. *Métodos para la modelacion y el análisis experimental de puentes frente a cargas dinámicas*. Santa Clara(Villa Clara): s.n.

Clough, R. W. & Penzien, J., 2003. *Dynamics of Structures*. Tercera ed. Berkeley: Computers & Structures, Inc..

Cooley, J. W. & Tukey, J. W., 1965. *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series*. s.l.:s.n.

Ewins, D. J., 1984. *Modal Testing: Theory and Practice*. s.l.:Research Studies Press Ltd..

Ewins, D. J., 2000. *Modal Testing theory, practice and aplicaciones*. Segunda ed. Baldock: Research Studies Press LTD..

G.H., G. & C.F., V. L., 1996. *Matrix Computations*. Baltimore: s.n.

García O'Rally, I. B., 2016. *Métodos para la detección, localización y evaluación de daños en estructuras de puentes a partir de parámetros modales*.. Santa Clara: s.n.

He, J. & Fu, Z.-F., 2001. *Modal Analysis*. Primera ed. s.l.:Butterworth-Heinemann.

Heylen, W., Lammens, S. & Sas, P., 2013. *Modal Analysis Theory and Testing*. Segunda ed. Leuven: PMA.

BIBLIOGRAFÍA

James, G., s.f. *Development of Operational Modal Analysis Techniques for Launch Data*. s.l.:s.n.

Juang, J. -N., 1994. *Applied System Identification*. New Jersey: s.n.

Ljung, L., 1999. *System Identification: Theory for the User*. New Jersey: s.n.

Ljung, L., 2007. System Identification. *Wiley Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering*, 29 Junio.

López Guillén, M. E., s.f. *Identificación de Sistemas. Aplicación al modelado de un motor de continua..* s.l.:s.n.

Losa Miranda, G., 2015. *Tecnologías de sensorización e identificación modal. Aplicación a la determinación del amortiguamiento estructural..* Valladolid: s.n.

Peeters, B., 2000. *SYSTEM IDENTIFICATION AND DAMAGE DETECTION IN CIVIL ENGINEERING STRUCTURES*. Leuven: s.n.

Peeters, B. & De Roeck, G., 2001. Stochastic System Identification for Operational Modal Analysis: A Review. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Diciembre.Volumen 123.

Pérez Flores, G. E., 2009. *Modelado y Análisis Vibracional y de Desplazamiento de las Máquinas de Simulación de Fallos*. Madrid: s.n.

Rainieri, C. & Fabbrocino, G., 2014. *Operational Modal Analysis of Civil Engieniering Structures. An introduction and guide for applications*. Primera ed. Termoli: Springer.

Reynders, E., 2012. System identification methods for (operational) modal analysis: review and comparison. *Archives of Computational Methods in Engineering*.

Reynders, E. & de Roeck, G., 2014. Operational Modal Analysis in Civil Engineering: An Overview. *Encyclopedia of Earthquake Engineering*.

Reynders, E., Schevenels, M. & de Roeck, G., 2014. *MACEC 3.3. A MatLab Toolbox for Experimental and Operational Modal Analysis*. Lovania(Brabante Flamenco): s.n.

Rodrigues Leite de Magalhães, F. M., 2013. *OPERATIONAL MODAL ANALYSIS FOR TESTING AND MONITORING OF BRIDGES AND SPECIAL STRUCTURES*. Porto: s.n.

BIBLIOGRAFÍA

Solano Guerra, A., 2016. *Identificación de sistemas estructurales a partir de pruebas modales*. Santa Clara(Villa Clara): s.n.

Van Overshee, P. & De Moor, B., 1996. *Subspace Identification for Linear*. Dordrecht: s.n.

Verboven, P., 2002. *FREQUENCY-DOMAIN SYSTEM IDENTIFICATION FOR MODAL ANALYSIS*. Bruselas: s.n.

Zhang, L., Brincker, R. & Andersen, P., s.f. *An Overview of Operational Modal Analysis: Major Development and Issues*. s.l.:s.n.

ANEXOS

A.1 INFORME DEL ANÁLISIS DEL PRIMER SETUP DE LA IDENTIFICACIÓN DEL SUB-ESPACIO DERIVADO DE LA COVARIANZA DE LA VIGA

=====
Identified modes
=====

Eigenfrequencies [Hz]

30.80926 87.25863 141.7321 225.5397

Standard deviations of the eigenfrequencies [Hz]

0.042102 0.059076 0.019147 0.04192

Damping ratios [%]

0.85471 1.161 1.5878 1.4141

Standard deviations of the damping ratios [%]

0.23747 0.063695 0.0040222 0.016705

Mode shapes (scaled to unit modal displacement)

0.54776-0.0082573i	0.83482+0.0011601i	0.29752+0.0074716i	-0.17395-0.0081009i
0.0272-0.030441i	1+0i	1+0i	1+0i
1+0i	-0.30168-0.0026335i	-0.29554+0.0020446i	0.50403+0.009075i
0.48414-0.037251i	0.4813+0.004916i	-0.2941+0.0018966i	-0.74965-0.023519i

Standard deviations of the real part of the mode shapes (scaled to unit modal displacement)

0.0042273	0.0014334	0.00025091	0.0035987
0.028361	0	0	0
0	0.0012111	0.00018713	0.0033522
0.056913	0.001316	0.00045791	0.004522

Standard deviations of the imaginary part of the mode shapes (scaled to unit modal displacement)

0.0034955	0.00062307	8.6271e-05	0.0063317
0.030043	0	0	0
0	0.00075888	0.00024922	0.0052543

ANEXOS

0.058032 0.001257 0.00014611 0.0084157

Modal phase collinearities [-]

0.99474 0.99995 0.9998 0.99914

Mean phases and mean phase deviations [°]

-0.87389 0.11714 0.048156 0.73294
2.1812 0.18691 0.37948 0.83111

Node numbers, azimuths and elevations, and mode shape quantities (SI units)

7 0 90 acc
8 0 90 acc
5 0 90 acc
6 0 90 acc

A.2 INFORME DEL ANÁLISIS DEL SEGUNDO SETUP DE LA IDENTIFICACIÓN DEL SUB-ESPACIO DERIVADO DE LA COVARIANZA DE LA VIGA

=====
Identified modes
=====

Eigenfrequencies [Hz]

30.3193 86.05574 140.7126 224.1856

Standard deviations of the eigenfrequencies [Hz]

0.1716 0.17113 0.072893 0.22194

Damping ratios [%]

0.94145 1.7389 1.4143 1.6309

Standard deviations of the damping ratios [%]

0.51175 0.27514 0.040587 0.22085

Mode shapes (scaled to unit modal displacement)

0.48246-0.023817i 0.81582+0.0082895i 0.96635-0.0038979i 0.4393+0.003225i
0.89823-0.0049821i 1+0i 0.30594+0.013338i -0.44848+0.034351i
1+0i 0.52839-0.0015704i -0.38884-0.0077051i -0.33101+0.018251i

ANEXOS

0.25171+0.02445i 0.4385+0.0054222i 1+0i 1+0i

Standard deviations of the real part of the mode shapes (scaled to unit modal displacement)

0.018603	0.034806	0.0025592	0.0083873
0.0065164	0	0.0029945	0.007175
0	0.039492	0.00093121	0.011941
0.037859	0.050156	0	0

Standard deviations of the imaginary part of the mode shapes (scaled to unit modal displacement)

0.012532	0.042713	0.0031036	0.022305
0.0040197	0	0.0033239	0.039876
0	0.036725	0.0014954	0.015757
0.024396	0.042497	0	0

Modal phase collinearities [-]

0.99783 0.99987 0.99955 0.99666

Mean phases and mean phase deviations [°]

-0.26746	0.22282	0.087055	-0.76381
1.1462	0.33659	0.57859	1.6678

Node numbers, azimuths and elevations, and mode shape quantities (SI units)

3	0	90	acc
4	0	90	acc
5	0	90	acc
2	0	90	acc

A.3 INFORME DEL ANÁLISIS DEL MULTISSETUP DE LA IDENTIFICACIÓN DEL SUB-ESPACIO DERIVADO DE LA COVARIANZA DE LA VIGA

=====
Identified modes
=====

Eigenfrequencies [Hz]

30.56428 86.65718 141.2223 224.8626

ANEXOS

Damping ratios [%]

0.89808 1.4499 1.5011 1.5225

Mode shapes (scaled to unit modal displacement)

0.54776-0.0082573i	0.83482+0.0011601i	0.29752+0.0074716i	0.11448-0.0030399i
0.0272-0.030441i	1+0i	1+0i	-0.65586+0.048018i
1+0i	-0.30168-0.0026335i	-0.29554+0.0020446i	-0.33101+0.018251i
0.48414-0.037251i	0.4813+0.004916i	-0.2941+0.0018966i	0.49279-0.020572i
0.48246-0.023817i	-0.46572-0.010183i	0.734-0.022589i	0.4393+0.003225i
0.89823-0.0049821i	-0.57093-0.0066809i	0.23267+0.003918i	-0.44848+0.034351i
0.25171+0.02445i	-0.25032-0.0060252i	0.75964-0.020311i	1+0i

Modal phase collinearities [-]

0.99523 0.99979 0.99896 0.99544

Mean phases and mean phase deviations [°]

-0.72182	0.30981	-0.70769	-1.6239
2.0196	0.41094	0.92078	1.8202

Node numbers, azimuths and elevations

7	0	90
8	0	90
5	0	90
6	0	90
3	0	90
4	0	90
2	0	90

A.4 INFORME DEL ANÁLISIS DEL PRIMER SETUP DE LA IDENTIFICACIÓN DEL SUB-ESPACIO DERIVADO DE LOS DATOS DE LA VIGA

=====
Identified modes
=====

Eigenfrequencies [Hz]

28.98478 86.2265 141.1247 223.926

ANEXOS

Damping ratios [%]

6.7338 1.8735 1.5085 1.659

Mode shapes (scaled to unit modal displacement)

0.60535-0.04238i	0.81295-0.0033694i	0.2932+0.0055125i	-0.21664-0.01157i
0.26148+0.0045463i	1+0i	1+0i	1+0i
1+0i	-0.30207-0.0088675i	-0.29407-0.0026579i	0.53825-0.01218i
0.78682+0.031161i	0.45867-0.007632i	-0.29896-0.0028677i	-0.76967-0.039611i

Modal phase collinearities [-]

0.99459 0.99971 0.99988 0.99692

Mean phases and mean phase deviations [°]

0.0014497	-0.10397	0.14781	0.78581
1.6859	0.44356	0.34419	1.609

Node numbers, azimuths and elevations, and mode shape quantities (SI units)

7	0	90	disp
8	0	90	disp
5	0	90	disp
6	0	90	disp

A.5 INFORME DEL ANÁLISIS DEL SEGUNDO SETUP DE LA IDENTIFICACIÓN DEL SUB-ESPACIO DERIVADO DE LOS DATOS DE LA VIGA

=====
Identified modes
=====

Eigenfrequencies [Hz]

28.69409 85.89237 140.6354 210.8285

Damping ratios [%]

4.0006 1.6141 1.4264 5.513

Mode shapes (scaled to unit modal displacement)

0.18217-0.025528i	0.85937-0.0021886i	0.98023-0.010315i	0.50669-0.02445i
-------------------	--------------------	-------------------	------------------

ANEXOS

0.81137+0.0086743i	1+0i	0.31482-0.0021347i	-0.52574-0.0027558i
1+0i	0.52026-0.0026645i	-0.41322-0.0077942i	-0.68162-0.019774i
-0.17428-0.017332i	0.49133-0.0023776i	1+0i	1+6.9758e-17i

Modal phase collinearities [-]

0.99766 0.99998 0.99974 0.99801

Mean phases and mean phase deviations [°]

0.18006 -0.11291 -0.19424 0.072847
1.3797 0.11005 0.43674 0.99976

Node numbers, azimuths and elevations, and mode shape quantities (SI units)

3	0	90	disp
4	0	90	disp
5	0	90	disp
2	0	90	disp

A.6 INFORME DEL ANÁLISIS DEL MULTISSETUP DE LA IDENTIFICACIÓN DEL SUB-ESPACIO DERIVADO DE LOS DATOS DE LA VIGA

=====
Identified modes
=====

Eigenfrequencies [Hz]

28.83943 86.05943 140.88 217.3772

Damping ratios [%]

5.3672 1.7438 1.4674 3.586

Mode shapes (scaled to unit modal displacement)

0.60535-0.04238i	0.81295-0.0033694i	0.2932+0.0055125i	-0.21664-0.01157i
0.26148+0.0045463i	1+0i	1+0i	1+0i
1+0i	-0.30207-0.0088675i	-0.29407-0.0026579i	0.53825-0.01218i
0.78682+0.031161i	0.45867-0.007632i	-0.29896-0.0028677i	-0.76967-0.039611i
0.18217-0.025528i	-0.49893-0.015932i	0.69739-0.01419i	-0.39852+0.039923i
0.81137+0.0086743i	-0.58053-0.020018i	0.22399-0.0037191i	0.41466-0.019248i
-0.17428-0.017332i	-0.28528-0.008455i	0.71153-0.0069887i	-0.78849+0.040744i

Modal phase collinearities [-]

ANEXOS

0.99453 0.99887 0.99958 0.99285

Mean phases and mean phase deviations [°]

0.11286 0.40143 -0.30946 -0.5892
1.9361 0.99651 0.60732 2.2439

Node numbers, azimuths and elevations

7	0	90
8	0	90
5	0	90
6	0	90
3	0	90
4	0	90
2	0	90

A.7 INFORME DEL ANÁLISIS SETUP 1 DEL PUENTE 560 CAMAGUEY

=====
Identified modes

=====
Eigenfrequencies [Hz]
8.12975 38.5634 51.3219

Standard deviations of the eigenfrequencies [Hz]
0.10913 0.086482 0
.23695

Damping ratios [%]
1.6401 1.2461 0.72628

Standard deviations of the damping ratios [%]
1.2737 1.2498 0.15343

Mode shapes (scaled to unit modal displacement)
0.52067-0.037805i 0.98718+0.029963i 0.91222-0.0011994i
0.88743+0.021513i 0.53948+0.018739i 0.14609-0.081419i
1+0i -0.02627-0.018631i -0.56175-0.13674i
0.14722-0.0046086i 1+0i 1+0i

Standard deviations of the real part of the mode shapes (scaled to unit modal displacement)
0.031055 0.071214 0.0821
0.1705 0.070874 0.086148
0 0.018859 0.032483
0.02103 0 0

ANEXOS

Standard deviations of the imaginary part of the mode shapes (scaled to unit modal displacement)

0.01643	0.074312	0.047131
0.11117	0.18246	0.056768
0	0.22023	0.067836
0.035094	0	0

Modal phase collinearities [-]

0.99633	0.99844	0.95775
---------	---------	---------

Mean phases and mean phase deviations [°]

-0.035036	1.0161	1.7039
1.4499	1.3129	5.7979

Node numbers, azimuths and elevations, and mode shape quantities (SI units)

4	0	90	acc
3	0	90	acc
2	0	90	acc
1	0	90	acc

A.8 INFORME DEL ANÁLISIS SETUP 2 DEL PUENTE 560 CAMAGÜEY

=====
Identified modes
=====

Eigenfrequencies [Hz]

9.79851	39.5351	50.5766
---------	---------	---------

Standard deviations of the eigenfrequencies [Hz]

0.026889	0.14376	0.096575
----------	---------	----------

Damping ratios [%]

1.396	0.87093	0.21672
-------	---------	---------

Standard deviations of the damping ratios [%]

0.91577	0.74948	0.0953
---------	---------	--------

Mode shapes (scaled to unit modal displacement)

1+0i	0.45518+0.14625i	0.71999+0.035392i
0.55656+0.00023522i	1+0i	1+0i
0.52059-0.033403i	0.71504-0.22907i	0.3698-0.092446i
0.50593+0.039483i	0.76-0.00206i	-0.0038469-0.14891i

ANEXOS

Standard deviations of the real part of the mode shapes (scaled to unit modal displacement)

0	0.031104	0.11023
0.011321	0	0
0.025663	0.10712	0.12066
0.05541	0.10482	0.20292

Standard deviations of the imaginary part of the mode shapes (scaled to unit modal displacement)

0	0.19709	0.1026
0.067875	0	0
0.066911	0.053071	0.10707
0.071013	0.15481	0.061484

Modal phase collinearities [-]

0.9942	0.88617	0.92573
--------	---------	---------

Mean phases and mean phase deviations [°]

0.084885	-2.5404	-0.28703
1.6628	8.5359	9.3256

Node numbers, azimuths and elevations, and mode shape quantities (SI units)

4	0	90	acc
5	0	90	acc
6	0	90	acc
7	0	90	acc

A.9 INFORME DEL ANÁLISIS SETUP 3 DEL PUENTE 560 CAMAGÜEY

=====

Identified modes

=====

Eigenfrequencies [Hz]

8.98748	26.6522	50.4793
---------	---------	---------

Standard deviations of the eigenfrequencies [Hz]

0.077081	0.14161	0.038811
----------	---------	----------

Damping ratios [%]

0.63285	0.67276	0.021326
---------	---------	----------

Standard deviations of the damping ratios [%]

1.522	0.6351	0.073313
-------	--------	----------

ANEXOS

Mode shapes (scaled to unit modal displacement)

1+0i	1+0i	-0.75277+0.09425i
0.039051-0.029176i	0.12918-0.050521i	1+0i
0.18908+0.0035341i	0.26535-0.079462i	0.60086-0.06618i
0.34889+0.17126i	-0.17201-0.018641i	-0.072542-0.14148i

Standard deviations of the real part of the mode shapes (scaled to unit modal displacement)

0	0	0.24437
0.019402	0.20462	0
0.073944	0.076642	0.062479
0.10366	0.047863	0.17552

Standard deviations of the imaginary part of the mode shapes (scaled to unit modal displacement)

0	0	0.021514
0.01726	0.10302	0
0.061227	0.18839	0.08099
0.18197	0.094772	0.17955

Modal phase collinearities [-]

0.91096	0.96941	0.94388
---------	---------	---------

Mean phases and mean phase deviations [°]

2.9979	-1.2618	-3.0184
8.79	6.0465	7.371

Node numbers, azimuths and elevations, and mode shape quantities (SI units)

4	0	90	acc
9	0	90	acc
6	0	90	acc
8	0	90	acc

A.10 INFORME DEL ANÁLISIS SETUP 4 DEL PUENTE 560 CAMAGUEY

=====

Identified modes

=====

Eigenfrequencies [Hz]

9.52726	25.4352	45.5558
---------	---------	---------

Standard deviations of the eigenfrequencies [Hz]

0.1129	0.065979	0.034091
--------	----------	----------

Damping ratios [%]

ANEXOS

1.5859 0.25305 0.46972

Standard deviations of the damping ratios [%]

1.7019 0.13113 0.20933

Mode shapes (scaled to unit modal displacement)

0.73615+0.10098i	1+0i	-0.085651-0.016938i
1+0i	-0.036983+0.030679i	0.17586-0.035899i
0.41153-0.22074i	0.14166-0.040568i	0.089382-0.33455i
0.12194-0.27607i	0.30061+0.050562i	1+0i

Standard deviations of the real part of the mode shapes (scaled to unit modal displacement)

0.03469	0	0.23892
0	0.14788	0.14285
0.039049	0.063808	0.04433
0.0063926	0.041768	0

Standard deviations of the imaginary part of the mode shapes (scaled to unit modal displacement)

0.043461	0	0.059586
0	0.026824	0.049645
0.10136	0.015683	0.018749
0.22875	0.12305	0

Modal phase collinearities [-]

0.73358 0.98189 0.65045

Mean phases and mean phase deviations [°]

-1.80441 0.430613 -2.13155
16.2051 5.03603 18.7405

Node numbers, azimuths and elevations, and mode shape quantities (SI units)

33 0 90 acc
9 0 90 acc
32 0 90 acc
31 0 90 acc

A.11 INFORME DEL ANÁLISIS SETUP 5 DEL PUENTE 560 CAMAGÜEY

=====

Identified modes

=====

Eigenfrequencies [Hz]

10.7546 33.3623 49.3614

Standard deviations of the eigenfrequencies [Hz]

ANEXOS

0.09389 0.12992 0.19655

Damping ratios [%]

1.1396 0.31545 1.1924

Standard deviations of the damping ratios [%]

1.0227 0.33186 0.33826

Mode shapes (scaled to unit modal displacement)

0.86422-0.0091728i -0.98368+0.15122i 1+0i
1+0i 0.50717+0.3417i -0.046165+0.094878i
0.71734-0.24877i 0.35634-0.35768i 0.034129-0.17998i
0.80961+0.019576i 1-5.9828e-17i 0.81984-0.042465i

Standard deviations of the real part of the mode shapes (scaled to unit modal displacement)

0.11696 0.15301 0
0 0.047349 0.043999
0.048573 0.046575 0.016369
0.061398 2.4045e-16 0.10065

Standard deviations of the imaginary part of the mode shapes (scaled to unit modal displacement)

0.0553 0.082392 0
0 0.12228 0.037249
0.04246 0.04905 0.030176
0.019483 1.6298e-17 0.06426

Modal phase collinearities [-]

0.93114 0.63932 0.90477

Mean phases and mean phase deviations [°]

-3.40672 -2.81973 -1.58983
6.30326 16.8914 11.1576

Node numbers, azimuths and elevations, and mode shape quantities (SI units)

34 0 90 acc
35 0 90 acc
33 0 90 acc
31 0 90 acc

A.12 INFORME DEL ANÁLISIS SETUP 6 PUENTE 560 CAMAGUEY

=====

Identified modes

=====

Eigenfrequencies [Hz]

ANEXOS

8.1806 20.8068 42.719

Standard deviations of the eigenfrequencies [Hz]

0.077434 0.033001 0.10443

Damping ratios [%]

0.61457 2.9105 0.33537

Standard deviations of the damping ratios [%]

1.6071 1.4069 0.65181

Mode shapes (scaled to unit modal displacement)

0.20171-0.24188i	0.033385+0.06184i	0.20272+0.081087i
0.06177-0.30555i	0.014616+0.0073587i	0.036408-0.072844i
0.11117-0.19342i	-0.10242+0.072845i	-0.11154+0.15306i
1+0i	1+0i	1-5.8367e-17i

Standard deviations of the real part of the mode shapes (scaled to unit modal displacement)

0.053719	0.040307	0.052082
0.20767	0.062134	0.026059
0.10248	0.17916	0.029662
0	0	1.637e-17

Standard deviations of the imaginary part of the mode shapes (scaled to unit modal displacement)

0.12762	0.044089	0.21037
0.22427	0.030435	0.12816
0.21241	0.049174	0.20916
0	0	2.0205e-17

Modal phase collinearities [-]

0.5052 0.96445 0.87468

Mean phases and mean phase deviations [°]

-5.80768	-0.30223	-0.184628
29.5055	7.8455	13.6406

Node numbers, azimuths and elevations, and mode shape quantities (SI units)

35	0	90	acc
37	0	90	acc
38	0	90	acc
36	0	90	acc

A.13 INFORME DEL ANÁLISIS SETUP 7 PUENTE 560 CAMAGÜEY

=====

Identified modes

=====

ANEXOS

Eigenfrequencies [Hz]

9.35502 21.7964 44.0257

Standard deviations of the eigenfrequencies [Hz]

0.017434 0.10273 0.054608

Damping ratios [%]

0.60593 0.24068 0.16824

Standard deviations of the damping ratios [%]

0.43733 0.051585 0.055624

Mode shapes (scaled to unit modal displacement)

-0.38305-0.22232i	-0.72414-0.03332i	1+0i
0.078264+0.071584i	-0.5087-0.037556i	0.075285+0.068663i
-0.52282-0.216i	1+0i	0.86152+0.090638i
1+0i	-0.76733+0.061501i	-0.10265+0.0039713i

Standard deviations of the real part of the mode shapes (scaled to unit modal displacement)

0.090201	0.080791	0
0.0329	0.080275	0.18471
0.13058	0	0.10711
0	0.050169	0.073112

Standard deviations of the imaginary part of the mode shapes (scaled to unit modal displacement)

0.064275	0.04234	0
0.049185	0.11357	0.054943
0.055443	0	0.15079
0	0.24173	0.061199

Modal phase collinearities [-]

0.82366 0.98944 0.97973

Mean phases and mean phase deviations [°]

8.5453 -0.0958525 2.71139
13.9812 2.57306 4.8829

Node numbers, azimuths and elevations, and mode shape quantities (SI units)

40 0 90 acc
39 0 90 acc
38 0 90 acc
36 0 90 acc

A.14 INFORME DEL ANÁLISIS SETUP 8 PUNTE 560 CAMAGÜEY

=====

ANEXOS

Identified modes

=====

Eigenfrequencies [Hz]

8.86706 33.9462 44.206

Standard deviations of the eigenfrequencies [Hz]

0.030478 0.0087453 0.07071

Damping ratios [%]

0.83137 0.13319 0.12768

Standard deviations of the damping ratios [%]

0.99282 0.16714 0.0054078

Mode shapes (scaled to unit modal displacement)

0.75462-0.0060817i	1+0i	-0.52889-0.0086381i
0.071537+0.012336i	0.034808-0.12236i	-0.53567+0.25883i
1+0i	-0.82858+0.029291i	1+0i
0.60614-0.047226i	-0.67466+0.12488i	-0.87452-0.14159i

Standard deviations of the real part of the mode shapes (scaled to unit modal displacement)

0.027554	0	0.014394
0.0055601	0.21807	0.043766
0	0.24485	0
0.017715	0.050659	0.16579

Standard deviations of the imaginary part of the mode shapes (scaled to unit modal displacement)

0.047176	0	0.097858
0.0093179	0.023872	0.0081652
0	0.08338	0
0.010827	0.1392	0.07248

Modal phase collinearities [-]

0.99613 0.95379 0.86118

Mean phases and mean phase deviations [°]

-0.95478	-3.0488	-0.26189
1.7389	6.828	8.1274

Node numbers, azimuths and elevations, and mode shape quantities (SI units)

40	0	90	acc
43	0	90	acc
42	0	90	acc
41	0	90	acc

ANEXOS

A.15 INFORME DEL ANÁLISIS DEL MULTI-SETUP DEL PUENTE 560 DE CAMAGÜEY.

=====
Identified modes
=====

Eigenfrequencies [Hz]

9.23639 29.5037 47.089

Damping ratios [%]

1.1147 0.76618 0.41416

Mode shapes (scaled to unit modal displacement)

0.52067-0.037805i	-0.046931+0.014174i	-0.2642+0.16898i
0.88743+0.021513i	-0.025684+0.0076344i	-0.027296+0.050607i
1+0i	0.0015304+0.00046209i	0.18811-0.064209i
0.14722-0.0046086i	-0.047061+0.015786i	-0.28987+0.18486i
0.28979-0.020918i	-0.084388+0.058252i	-0.35456+0.25213i
0.2698-0.037073i	-0.046997+0.060982i	-0.10781+0.12601i
0.26492+0.0014308i	-0.064015+0.044445i	0.038908+0.051827i
0.02026-0.017826i	-0.0064591+0.0062085i	0.15058-0.035837i
0.20009+0.079089i	0.010724-0.0031404i	-0.015994-0.018705i
0.016714-0.011077i	0.18595-0.013623i	-0.074297-0.012216i
0.0044025-0.011808i	0.025789-0.0094734i	0.067732-0.29085i
-0.0024507-0.0077666i	0.056587+0.0053069i	0.86194-0.027827i
0.008768-0.0071262i	-0.10818-0.037098i	1+0i
0.010232-0.0081372i	0.033385+0.06184i	-0.046165+0.094878i
0.0050785-0.011901i	0.014616+0.0073587i	0.033838+0.020093i
0.0061443-0.0069284i	-0.10242+0.072845i	-0.069877-0.059106i
0.040649+0.0084031i	1-4.1799e-17i	-0.034935+0.48199i
-0.0090493-0.010432i	0.39571+0.013039i	-0.07892-0.12343i
0.0015843+0.0029031i	0.27808+0.016887i	0.0025334-0.014711i
-0.00067811-0.0011423i	0.01537-0.047965i	-0.14171-0.08407i
-0.01188-0.01392i	-0.32826+0.00078708i	0.15299+0.23087i
-0.0078581-0.0078765i	-0.2686+0.040621i	-0.1011-0.22356i

Modal phase collinearities [-]

0.98083 0.93606 0.33591

Mean phases and mean phase deviations [°]

-0.031615 -0.705732 -7.08172

5.28924 10.3993 33.0085

Node numbers, azimuths and elevations

4 0 90

ANEXOS

3 0 90
2 0 90
1 0 90
5 0 90
6 0 90
7 0 90
9 0 90
8 0 90
33 0 90
32 0 90
31 0 90
34 0 90
35 0 90
37 0 90
38 0 90
36 0 90
40 0 90
39 0 90
43 0 90
42 0 90
41 0 90