

UCLV
Universidad Central
"Marta Abreu" de Las Villas



MFC
Facultad de Matemática
Física y Computación

Departamento de Matemática

TRABAJO DE DIPLOMA

Título:

**La Geometría Fractal en el proceso de
actualización cartográfica**

Autor: Hector Leandro González Fernández

Tutores: Dr. Lucía Argüelles Cortés

Ing. Michael Álvarez González

Santa Clara, junio 2018
Copyright©UCLV

Este documento es Propiedad Patrimonial de la Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas, y se encuentra depositado en los fondos de la Biblioteca Universitaria “Chiqui Gómez Lubian” subordinada a la Dirección de Información Científico Técnica de la mencionada casa de altos estudios.

Se autoriza su utilización bajo la licencia siguiente:

Atribución- No Comercial- Compartir Igual



Para cualquier información contacte con:

Dirección de Información Científico Técnica. Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas. Carretera a Camajuaní. Km 5½. Santa Clara. Villa Clara. Cuba. CP. 54 830
Teléfonos.: +53 01 42281503-1419

RESUMEN

La Geometría Fractal es una nueva manera de ver la matemática en la naturaleza. En la actualidad tiene un notable aumento en cuanto a su desarrollo teórico y aplicado. A pesar de ser ideal para describir los procesos naturales, no se explota a cabalidad todo su potencial. Por tanto, en el presente trabajo se presenta como una herramienta para agilizar el proceso de actualización cartográfica. A partir del algoritmo Box-Counting, se determina la dimensión fractal Box-Counting de los objetos naturales para utilizarla como un indicador de comparación en cuanto a la capacidad que tiene el objeto de ocupar espacio en el terreno, y poder determinar así la necesidad de llevar a cabo dicho proceso.

SUMMARY

Fractal Geometry is a new way of mathematics' nature behavior. At present, it has a remarkable increase in theoretical and applied development's theory. Although it's ideal for describing natural processes, its full potential is not fully exploited. Therefore, in this paper is presented as a tool to streamline process of cartographic updating criteria. From the Box-Counting algorithm, it calculates the fractal dimension of natural objects to be used as a comparison index in terms of the capacity of the spatial domain object in terrain surface, and thus determine the need for carry out this actualize process.

DEDICATORIA

A mi mamá, por ser lo que más quiero en este mundo,

A mi abuela Ramona por ser mi segunda madre,

A mi papá porque nunca dejó de ser padre,

A mis hermanos porque sencillamente los quiero,

A mí, porque la primera vez que fui valiente, decidí ser

MATEMÁTICO.

AGRADECIMIENTOS

Muchos creen que obtener un título es cuestión de estudiar en la universidad, y tienen razón, pero solo la mitad. Obtener un título es un objetivo que comienza con cinco años, cuando por primera vez nuestros padres nos dejan solos y comenzamos a ser independientes en nuestro primer día de clases. Es un camino largo, tedioso, lleno de buenos y malos momentos, y en ese camino hay muchas personas a las que agradecer. Mi mamá, porque yo soy su vida y ella es la mía. Mi abuela Ramona, solo dándole mi vida sería suficiente para agradecer. Mi papá, porque, aunque no estuvo siempre cerca, siempre supo estar a mi lado. Mis hermanos, porque son mi tesoro, son esa parte que te complementan pero que saben ser tu rival y te obligan a esforzarte. A toda mi familia, porque soy lo que soy, gracias a ellos. A mi tía Damaris, porque la supe amar desde la distancia, y hoy sin estar presente su cuerpo, sé que su alma se regocija. Mi abuelo Héctor, que, desde su extraña forma de ser distante y callado, me enseñó a ser hombre de bien.

Pero en este largo camino no solo está la familia, también aparecen profesores, maestros, como olvidar a Juan, Milagros, en distintos momentos todos supieron darme el impulso necesario. Y por supuesto, los amigos, sin ellos no sería yo, Osbel, Alejandro, Alberto, los de siempre, y los más recientes, Yamil, Luis Osiel, Landy, Renier, que, en los últimos cuatro años de esfuerzo final, han estado cerca.

Un lugar especial es sin duda para mis compañeros de aula, les agradezco a todos, por ser el mejor grupo que alguien puede pedir, Lili, Aisseli, Cabote, Bosch, Lorenzo, Dennis, y por supuesto, Luisi y Leo, mis dos profes, los que merecen un pedazo de mi título.

A Jorge David, por ser mi cómplice en las charlas de deportes, por estar cuando en apuros me encontré, y siempre saber dar la mano.

Y claro, como no agradecerle a Marien, el motivo por el que seguí, lo único que me hizo soportar estos años de trabajo, esfuerzo, cansancio, estrés, sin ti, no hubiera sido igual.

Y si parece que agradezco a muchos, consciente estoy de que son pocos, y se me quedan algunos, porque el título es el resultado final de una vida de luchas y conquistas, y le agradezco a Dios por haberme permitido vencer.

El autor

ÍNDICE

Introducción.....	1
Capítulo 1. Elementos teóricos de la dimensión fractal y el proceso de actualización cartográfica	9
1.1 Fractales, historia, belleza y actualidad	9
1.2 Comparación entre la Geometría Euclidiana y la Geometría Fractal	14
1.3 Análisis bibliométrico de la base de datos bibliográfica a partir del <i>software</i> Zotero+VUE.....	17
Conclusiones parciales	22
Capítulo 2. Fundamentos algorítmicos asociados a la determinación de la dimensión fractal.....	23
2.1 Particularidades de la dimensión fractal.....	23
2.1.1 Definición formal de fractal.	24
2.1.2 Principales ejemplos. La curva que llena el plano. El conjunto de Cantor. La curva de Koch. El triángulo de Sierpinski.....	26
2.2 Algoritmo Box-Counting	29
2.3 Análisis de la malla en el algoritmo Box-Counting.	34
Conclusiones parciales	38
Capítulo 3. Resultados sobre el proceso de cálculo de la dimensión fractal Box-Counting en objetos naturales.....	40
3.1 Análisis de un tramo del río Bélico de Santa Clara. Resultados	40
3.2 Análisis del Lago Poope. Resultados.....	45
3.3 Análisis del río Ebro. Resultados.	49
Conclusiones parciales	52
Conclusiones.....	53
Recomendaciones.....	54
Bibliografía	

Introducción

INTRODUCCIÓN

Los avances de la matemática vinculados a la geografía, así como a la complejidad de los fractales y su presencia constante en el entorno antrópico, son problemas abordados y carentes de respuestas en diversas ramas del saber. La presencia de leyes físico-matemáticas que sustentan los fundamentos básicos de la cartografía digital posee sus orígenes en la geometría euclidiana, la cual se considera poco recomendable para abordar fenómenos del tipo multi-escala, dimensiones fraccionarias; por citar algún ejemplo al medir con más exactitud, la longitud de una costa aumenta.

La geografía, desde sus principios ha estado relacionada de manera muy íntima con las matemáticas. Ambas han crecido de manera tan espectacular, que parecerían haberse alejado sin posibilidad de reconocerse mutuamente a punto de parecer dos ciencias independientes, pero a su vez dejando beneficios mutuos a ambas disciplinas.

La recopilación de datos acerca de la distribución espacial de la superficie del planeta y su representación cartográfica ha sido una necesidad vital de cualquier sociedad. Desde las primeras civilizaciones, como es el caso de los agrimensores romanos hasta los tiempos de la tecnología satelital, pasando por los navegantes y geógrafos, la recogida de datos espaciales ha sido continua y ha dado como resultado todo tipo de diversos mapas. En el siglo XVIII, los estados europeos alcanzaron un nivel de organización tan elevado que les permitió crear cuerpos encargados de la elaboración de mapas topográficos de todos sus territorios.

Los avances tecnológicos en el estudio científico de la superficie de la tierra, generó la necesidad de cartografiar nuevas regiones y cubrir mayores distancias. El desarrollo del conocimiento y de la gestión de los recursos naturales, tales como geológicos, geomorfológicos, edáficos, ecológicos, hidrológicos o de uso del suelo, que tuvo sus inicios en el siglo pasado, ha continuado aprovisionándonos de nuevas necesidades de cartografías temáticas (Dueñas & Álvarez, 2010). Surge entonces la definición de la cartografía como ciencia que se encarga de representar la forma de la superficie terrestre en un plano, basado en las leyes físico-matemáticas que fundamentan la validez de un sistema de proyección.

La tecnología de los Sistemas de Información Geográfica (SIG), constituye una de las herramientas comunes de manejo de información, ya que al usar el modelo de base de datos geoespaciales se asocia un conjunto de información gráfica en forma de planos o mapas a bases de datos digitales. Esto sintéticamente quiere decir que los SIG tienen como característica principal que el manejo de la información gráfica y alfanumérica se realiza de forma integrada, pudiendo abordar de este modo aspectos de alta complejidad relacional en el tema planteado .

Además, es cierto que uno de los principales problemas de los SIG es la Información Geográfica (IG) a partir de los elementos nativos (punto, línea, área, celdas) por los cuales se puede realizar cualquier representación del entorno. Si se considera lo voluminosa que es la IG en comparación con las bases de datos tradicionales que se gestionan, se requiere de un *hardware* más potente y plataformas informáticas de mayor desarrollo en cuanto a velocidad de cálculo y gestión de la información. Utilizando un enfoque fractal, es decir, la dimensión fractal de los objetos más relevantes en el terreno, el problema de la representación no solo se resume a una solución básica de geometría, sino que el factor escala se convierte en un elemento importante a considerar. (Álvarez & Gómez, 2008; Dueñas & Álvarez, 2010; Méndez J. & Rosales B., 2005; Ramos, 2001).

Los SIG generalmente son adimensionales, por lo que la noción del enfoque multiescala es una solución alternativa que posibilita la cartografía digital cuando se utiliza la teoría fractal. Lógicamente, no sólo la línea de costa, por citar un ejemplo, es fractal, también lo son otras líneas como los márgenes de los ríos, los bordes de lagos y pantanos, las vertientes de aguas, los perfiles que describen el relieve y también aquellos otros fenómenos que pueden ser considerados como superficies o volúmenes, tienen en ocasiones, en mayor o menor medida, un carácter fractal, es decir, presentan mayor riqueza de detalles al aumentar la escala: el relieve de las montañas, las cadenas montañosas, el fondo marino.

Es por ello que la información geográfica puede dividirse en dos grandes grupos: todo aquello cuya morfología se debe a fenómenos naturales, cuya

geometría es fractal; y todo aquello que ha sido construido por el hombre, cuya geometría no es fractal en el rango de escalas habituales.

La Geometría Euclidiana pudiera ser la herramienta que permita relacionar la cartografía y la matemática. Entonces, ¿por qué a menudo se describe la geometría como algo frío y seco? Una de las razones es su incapacidad de describir la forma de una nube, una montaña, una costa o un árbol. Ni las nubes son esféricas, ni las montañas cónicas, ni las costas circulares... (Mandelbrot, 1982). Las figuras comunes de la geometría clásica o euclidiana no son las más adecuadas para generar formas complejas como la hoja de un helecho o el perfil de una montaña.

Su limitación se debe a que tienden a perder su estructura cuando son ampliadas; un arco de círculo se transforma poco a poco en una recta; la superficie de una esfera se hace cada vez más plana. La Geometría Fractal ha llegado como la solución matemática al problema existente en la naturaleza que no se podía expresar mediante fórmulas o cartografiar en planos. En la naturaleza hay abundantes ejemplos de formas pertenecientes a la geometría euclidiana (hexágonos, cubos, tetraedros, cuadrados, etc.) pero en esta diversidad también existen objetos que eluden la descripción euclidiana. Los fractales permiten modelar, por ejemplo, objetos tales como una hoja de helecho o un copo de nieve.

La Geometría Fractal es bastante reciente en la matemática, su desarrollo se ha acelerado debido tanto a su gran cantidad de aplicaciones en diferentes campos de la ciencia y la tecnología como al desarrollo de las computadoras. Estudia figuras altamente irregulares generadas a través de procesos recursivos que tienen como característica fundamental autosimilaridad y dimensión no entera. Lo primero significa que poseen alguna propiedad invariante bajo el cambio de escala, por ejemplo, a veces la rama de un árbol está compuesta por pequeñas ramas que tienen una forma muy parecida a la totalidad de la rama. Lo segundo significa que no posee las dimensiones usuales: uno, la de la línea; dos, la del plano y tres, la del espacio. Es decir, son figuras que pueden habitar en espacios intermedios, por ejemplo, encontrarse en el plano y en el espacio. Lo fundamental es reconocer cada una de las características del fractal y de su construcción (Aguilera, 1995).

En la actualidad es de suma importancia la actualización cartográfica, si se considera que un mapa está envejecido cartográficamente en un periodo de 5 años según varios autores (Dalda, Cano, González, & Sánchez, 2003; Franco, 2000; Greenwalt & Shultz, 1962; Pellicer, 1980; Ramos, 2001; Salitchev, 1979). Se hace necesario actualizar los planos cartográficos nacionales a escala 1:25000 que fueron creados en una campaña fotogramétrica alrededor del 1980.

Este problema se ha logrado solucionar con fotos parciales de diferentes épocas en el mismo mosaico provenientes de diferentes fuentes aerosatelitales. Esta solución creó diversas situaciones problemáticas en las que los elementos a cartografiar no son continuos o desaparecen en la imagen contigua, de aquí el error o incertidumbre que existe asociada a este proceso; coloca al cartógrafo en el centro de todo proceso para definir con su experiencia vivencial qué es cierto y qué no. Es por ello que el mantener al día toda la información acerca de los terrenos, la distribución de las aguas y el desarrollo poblacional cobra mayor importancia.

Acontecimientos como el avance de la erosión, el progreso de los incendios forestales, la expansión de las ciudades o la invasión de una plaga forestal, pueden ser seguidos e interpretados espacialmente gracias a la incorporación de estas informaciones a bases de datos digitales computarizados. En Cuba es ampliamente utilizado el software *Google Earth* y el *SAS Planet* como proveedores de estas imágenes para llevar a cabo la actualización cartográfica en el país.

Dada la evidente relación entre la Geometría Fractal -conocida también como la geometría de la naturaleza- y la geografía, no sería descabellado tratar de usarla en el proceso de actualización cartográfica, pues a primera vista debería ser una herramienta poderosa en estos trabajos. El poder identificar objetos naturales por su dimensión fractal y garantizar geometrías cartográficamente complejas acorde a los fenómenos naturales, implica una solución práctica a la cual se enfrentan los dibujantes y cartógrafos en la confección de planos y mapas actualmente.

Teniendo como campo de estudio la Geometría Fractal y la cartografía digital, se ha podido evidenciar el poco aprovechamiento de la teoría que brinda la Geometría Fractal para la realización de las actualizaciones cartográficas.

Todas las problemáticas previamente comentadas, posibilitaron plantear el siguiente **problema científico**:

¿Cómo se puede utilizar la teoría matemática de fractales para actualizar los objetos lineales a cartografiar con la utilización de imágenes aereosatelitales?

Por tanto, se presenta como

Objetivo general:

1. Proponer la dimensión fractal Box-Counting como índice decisor en el proceso de actualización cartográfica de objetos naturales a partir de imágenes aereosatelitales.

Para ello se pretende llevar a cabo los siguientes

Objetivos Específicos:

1. Organizar la bibliografía especializada en la teoría de fractales y el proceso de actualización cartográfica a partir de imágenes aereosatelitales para la detección de los principales autores, tópicos y tendencias actuales en el tema de la investigación.
2. Seleccionar un algoritmo matemático que utilice la teoría de la fractalidad para identificar patrones lineales y su variación espacial.
3. Comprobar el uso de la dimensión fractal Box-Counting como índice espacial en el proceso de actualización cartográfica a partir de imágenes aereosatelitales a diversas escalas de objetos naturales.

Para cumplir estos objetivos, se proponen las **tareas de investigación** siguientes:

1. Determinación de los referentes teóricos en la teoría matemática de la Geometría Fractal relacionados con los elementos básicos sobre la actualización cartográfica.

2. Utilización del software SAS Planet y otras plataformas similares en la obtención de imágenes aereosatelitales.
3. Comprobación del posible uso de la dimensión fractal Box-Counting como índice decisor en la actualización cartográfica a partir de la comparación de las dimensiones de objetos naturales cartografiados anteriormente.
4. Valoración de los resultados teóricos y prácticos obtenidos al aplicar el proceso de comparación propuesto en una zona de estudio conveniente.

La **contribución teórica** de este trabajo está dada por la aplicación de fundamentos matemáticos de la teoría de la Geometría Fractal que aportan el cómo decidir si es necesario el proceso de actualización cartográfica a objetos fractales que requieren ser cartografiados sistemáticamente.

El **aporte práctico** consiste en presentar un índice fractal que permite decidir si es necesario o no llevar a cabo el proceso de actualización cartográfica a partir de calcular la dimensión fractal de un objeto natural cartográficamente complejo y compararlo con ese mismo objeto en otras escalas y en diferentes momentos.

Para el desarrollo coherente de las tareas son utilizados distintos **métodos de investigación**, los cuales han sido:

Métodos del nivel teórico

- **Análisis-síntesis**

Al realizar la revisión bibliográfica, para reconocer las características principales de la teoría fractal, la información geográfica (IG), la cartografía digital y los Sistemas de Información Geográficos (SIG).

- **Inducción-deducción**

Posibilitó realizar inferencias y deducciones de los principales sustentos teóricos que fundamentan la investigación, permitiendo la creación de nuevas ideas que condujeron a la solución de la problemática presentada, como fue la posible utilización de los fractales en la actualización cartográfica.

- **Histórico-lógico**

Se utilizó para ver la evolución del tema, principalmente en el proceso de evolución de la cartografía clásica a la cartografía digital expresada en SIG o Infraestructuras de datos espaciales, viendo así la necesidad de utilizar nuevas teorías matemáticas en el tema objeto de estudio para la aceleración del proceso de actualización cartográfica de los datos (IG).

Métodos del nivel empírico

- **Análisis documental**

Este método fue considerado para la revisión bibliográfica de un grupo relevante de documentos relacionados con el tema, el cual incluye artículos, libros, tesis, datos de la práctica y sitios de Internet. Los documentos más valiosos para la configuración del trabajo han sido:

- La Geometría de la Naturaleza. Benoit Mandelbrot. 4ta Edición. 1999
- Geometría Fractal y Geometría Euclidiana. Vera W. de Spinadel. 2002
- *Fractals Everywhere*. Michael Barnsley. 2000
- Introducción y Principio de Investigación de los SIG. M. Álvarez, A. Gómez. 2008

El trabajo de diploma se estructura de la siguiente forma:

Capítulo 1. Elementos teóricos de la dimensión fractal y el proceso de actualización cartográfica.

En este capítulo se dará una introducción a la terminología necesaria para entender el proceso investigativo, la definición de fractal, su representación en la naturaleza, el proceso histórico evolutivo del tema, así como su vigencia y necesidad. Además, se introducirá un análisis de la bibliografía consultada a partir del trabajo con procesadores bibliográficos.

Capítulo 2. Fundamentos algorítmicos asociados a la determinación de la dimensión fractal.

El algoritmo de Box-Counting será eje fundamental en el desarrollo de este capítulo, su origen, su evolución y la teoría que encierra serán

expuestas como preámbulo de las herramientas a utilizar en la creación del algoritmo para la actualización cartográfica mediante la teoría de fractales.

Capítulo 3. Propuesta de actualización cartográfica a objetos naturales a partir de un algoritmo de dimensión fractal.

La exposición de los resultados obtenidos y cómo se llegó a ellos será tratada en el tercer capítulo, todo el proceso de investigación práctico, así como los aportes alcanzados serán presentados e interpretados técnica y matemáticamente.

Como elementos de validación y presentación de los resultados alcanzados se listan los principales logros alcanzados por el autor en la participación en eventos nacionales e internacionales, premios y publicaciones:

1. Poster: Propuesta para introducir los conceptos básicos de la geometría fractal, 2016. CIFAC' 2016 Universidad Central "Marta Abreu" de la Villas, Cayo Santa María, Villa Clara, Cuba.
2. Fórum de Ciencia y Técnica Facultad de Matemática, Física y Computación, Destacado con: La Geometría Fractal en el proceso de actualización cartográfica, 2018. Universidad Central "Marta Abreu" de la Villas, Ciudad de Santa Clara, Villa Clara, Cuba.
3. Fórum de Ciencia y Técnica Empresa de Investigaciones y Proyectos hidráulicos de Villa Clara (IPH VC), presentando: La Geometría Fractal en el proceso de actualización cartográfica, 2018. Empresa de Investigaciones y Proyectos hidráulicos de Villa Clara (IPH VC), Universidad Central "Marta Abreu" de la Villas, Ciudad de Santa Clara, Villa Clara, Cuba.

Capítulo 1



**CAPÍTULO 1. ELEMENTOS TEÓRICOS DE LA DIMENSIÓN FRACTAL Y EL PROCESO DE
ACTUALIZACIÓN CARTOGRÁFICA**

1.1 FRACTALES. HISTORIA, BELLEZA Y ACTUALIDAD

Hace unos cuatro mil quinientos millones de años se formó el planeta sobre el que todos los seres humanos viven. En aquel pasado remoto la tierra caliente comenzó a enfriarse rápidamente y a la actividad volcánica se unió pronto el agua condensada sobre la superficie.

Empezó el juego del fuego y el agua, que junto con el viento dibujaron las formas de la naturaleza inanimada, del mundo mineral. Son formas complejas generadas por la repetición de simples mecanismos que machaconamente, segundo a segundo, van conformando una geometría en la que predomina la curva y la ramificación (Juan Manuel García Ruiz, 2009).



Figura 1 Imagen aérea de un río.



Figura 2 Pozo natural de agua.

A las fuerzas geológicas que dibujaban las formas de la tierra se le unió la vida hace unos tres mil millones de años. Lo hizo como el fiel aprendiz del taller mineral, copiando, retocando aquí y allá, pero sin romper el estilo del maestro. La geometría de la vida se funde con la geometría de la tierra en un único

CAPÍTULO 1. ELEMENTOS TEÓRICOS DE LA DIMENSIÓN FRACTAL Y EL PROCESO DE ACTUALIZACIÓN CARTOGRÁFICA

paisaje donde predominan las curvas y las ramificaciones, el paisaje natural (Juan Manuel García Ruiz, 2009) (Figura 1).

Hace menos de un par de millones de años apareció en este planeta el ser humano y, como una especie más de la evolución de la vida, dibujaba sobre la tierra sus senderos en busca de caza o de agua, senderos que se ajustaban suavemente al relieve mineral, o que se bifurcaban, como los que resultan del continuo paso de los animales que buscan en las mañanas del verano el agua. (Figura 2).

¿Por qué la humanidad dio la espalda a las formas sinuosas y ramificadas de la naturaleza y se decantó por la línea recta, el círculo y la esfera?

Cuando aparece sobre la Tierra, tan sólo tenía tres ejemplos de esa geometría en los que basarse, tres formas que eran distintas a todas las demás: la línea del horizonte, una recta interminable y los círculos perfectos en el ocaso del Sol y la Luna, y el iris de los ojos de sus congéneres cuando le miraban.

¿Por qué se ha roto el patrón natural que venía dibujando la piel de la tierra desde su formación hace cuatro mil quinientos millones de años?

La respuesta es: para medir.

La geometría euclidiana es un monumento intelectual. Uno de los hitos del pensamiento deductivo que basándose en cinco axiomas crea un sistema de descripción del mundo que colmó las necesidades de las ciencias de la naturaleza, de la Historia Natural, hasta bien entrado el siglo XIX (Amir Al-Majdalawi Álvarez, 2006).

Pero hoy en día, se ha llegado a un punto en el que esa abstracción que realiza la geometría euclidiana no es suficiente para entender la verdadera complejidad del mundo natural. Nuestra forma de ver el planeta ha cambiado, pero no fue fácil para geógrafos como Richardson o matemáticos como Mandelbrot convencer al mundo científico de que la geometría euclidiana que se usaba desde los tiempos clásicos no servía para describir la naturaleza; Benoit Mandelbrot propuso el uso de una nueva geometría, la Geometría Fractal, que describe mejor la complejidad de las formas naturales, porque esas formas son objetos fractales (Juan Manuel García Ruiz, 2009).

CAPÍTULO 1. ELEMENTOS TEÓRICOS DE LA DIMENSIÓN FRACTAL Y EL PROCESO DE ACTUALIZACIÓN CARTOGRÁFICA

La Geometría Fractal, cuyos primeros desarrollos datan de finales del siglo pasado, ha recibido durante los últimos cuarenta años, desde la publicación de los trabajos de Mandelbrot, una atención y un auge crecientes. Lejos de ser simplemente una herramienta de generación de impresionantes paisajes virtuales, la Geometría Fractal viene avalada por la teoría geométrica de la medida y por innumerables aplicaciones en ciencias tan dispares como la Física, la Química, la Economía o, incluso, la Informática.

Al mundo de los fractales muchos llegan (el autor incluido) atraídos por el estallido de color de alguna representación del conjunto de Mandelbrot o de un conjunto de Julia. Sin embargo, una vez que se profundiza en la magia de los fractales, no se sabe qué admirar más, si las cascadas multicolor o la belleza de las matemáticas que las engendran (Juan Antonio Perez Ortiz, 1998).

A pesar de que la historia de los fractales comienza en los últimos años del siglo XIX, gran parte del XX permanece ajena a ellos. En las últimas décadas de ese siglo, y casi paralelamente a la evolución de la investigación de los sistemas caóticos, los fractales van cobrando un auge creciente, hasta convertirse en un concepto cada vez más extendido en todas las ciencias.

A finales del siglo XIX, el matemático Charles Hermite tildaba de “plaga lamentable” (Juan Manuel García Ruiz, 2009) la fascinación que algunos otros matemáticos sentían por determinadas curvas que desafiaban los cimientos de la geometría de la época. Muchos como él consideraban patológico aquel tipo de curvas, desentendiéndose de sus insólitas propiedades. Uno de aquellos primeros monstruos geométricos era el denominado conjunto de Cantor. Su definición es muy sencilla: se toma un segmento de determinada longitud (por ejemplo, el intervalo $[0, 1]$ de la recta real) y se divide en tres subsegmentos de igual longitud, se suprime el segmento central y el proceso se repite con los dos nuevos segmentos resultantes. El resultado de iterar este proceso infinitas veces (paso al límite) es el conjunto de Cantor.

Ahora bien, ¿tiene elementos el conjunto de Cantor? Un espectador infinitesimal que contemplase la iteración anterior durante una eternidad, ¿no terminaría por ver desaparecer la totalidad de los puntos? El consolidado sistema de medidas de la época (medida Lebesgue) daba para dicho conjunto longitud nula.

CAPÍTULO 1. ELEMENTOS TEÓRICOS DE LA DIMENSIÓN FRACTAL Y EL PROCESO DE ACTUALIZACIÓN CARTOGRÁFICA

En 1890, Peano ideó otro de estos “monstruos”: una curva que rellenaba el plano. ¿Cómo podía una región cuadrada del plano ser una curva? Años más tarde, Hilbert ideó una curva con idéntica propiedad, pero de más sencilla elaboración.

Otro ejemplo lo constituye la curva ideada por el matemático sueco Helge von Koch en 1904. Un segmento se divide en tres partes iguales, sustituyendo la central por los dos segmentos que junto a dicha parte formarían un triángulo equilátero. El proceso se repite *ad infinitum* con los cuatro segmentos resultantes. La curva de Koch oculta otra característica sorprendente: un perímetro infinito aloja un área finita.

Todas estas formas que se retuercen sobre sí mismas terminaron por revolucionar muchos de los conceptos dados por válidos hasta el siglo pasado, desembocando en la denominada teoría geométrica de la medida desarrollada en las primeras décadas del siglo XX. Uno de los aspectos más relevantes surgidos de esta teoría es la redefinición del concepto de dimensión a cargo de Hausdorff, que permite que estas curvas tengan dimensión fraccionaria.

Así la curva de Koch tiene una dimensión de Hausdorff de 1,2618 lo cual indica que está más cerca de ser una recta (dimensión 1) que un área (dimensión 2). La curva de Hilbert, por tanto, tiene una dimensión de Hausdorff de 2. Los trabajos de Hausdorff fueron continuados durante la década de los años 20 por Besicovitch derivando en la teoría geométrica de la medida.

Hoy en día todas las curvas anteriores se incluyen dentro de una clase más amplia de objetos matemáticos denominados *fractales*. El término fue acuñado por Benoit Mandelbrot (descubridor de uno de los más bellos y complejos conjuntos matemáticos, que lleva su nombre) hace apenas cuarenta años como un neologismo derivado de la palabra latina *fractus*¹, estando aún por establecer una definición exacta y definitiva del término. Sin embargo, de algo no hay duda: las curvas descritas anteriormente son genuinamente fractales.

Básicamente los fractales se caracterizan por dos propiedades: autosemejanza (o autosimilitud) y autorreferencia. La autorreferencia determina que el propio

¹ Aunque Mandelbrot definió el sustantivo fractal con género femenino, son raras las referencias en castellano que se refieren a “las fractales”.

CAPÍTULO 1. ELEMENTOS TEÓRICOS DE LA DIMENSIÓN FRACTAL Y EL PROCESO DE ACTUALIZACIÓN CARTOGRÁFICA

objeto aparece en la definición de sí mismo, con lo que la forma de generar el fractal necesita algún tipo de algoritmo recurrente. La autosemejanza implica invariancia de escala, es decir, el objeto fractal presenta la misma apariencia independientemente del grado de ampliación con que se mire. Por más que se amplíe cualquier zona de un fractal, siempre hay estructura, hasta el infinito, apareciendo muchas veces el objeto fractal inicial, contenido en sí mismo.

De todas formas, no fue hasta los años 70 del siglo pasado que comenzaron a vislumbrarse las aplicaciones de los fractales. En su tan citada obra *The Fractal Geometry of Nature*, Mandelbrot razonó que la naturaleza entiende mucho más de Geometría Fractal que de geometría diferenciable. La Geometría Fractal aborda el estudio de formas geométricas no diferenciables o quebradas a cualquier escala que se miren.

La geometría diferenciable, por otra parte, asume que a pequeña escala formas que no lo son se suavizan, con lo que se pierde la perspectiva global del objeto. La Geometría Fractal ofrece un modelo alternativo que busca una regularidad en las relaciones entre un objeto y sus partes a diferentes escalas. El objeto se expresa como el límite de un proceso geométrico iterativo, el cual puede provocar en cada iteración una ruptura (fractura o quebramiento) de la suavidad que lleva a la ausencia de diferenciability en el objeto límite.

También fue crucial la publicación por Hutchinson en 1981 de un trabajo en el que se desarrolla el concepto de conjunto autosemejante, de gran trascendencia en el desarrollo posterior de la Geometría Fractal. A partir de ahí, muchos científicos se han encontrado fractales en sus campos de estudio (el título de uno de los libros sobre el tema es bastante sugerente, *Fractals Everywhere*). La distribución de las galaxias, los procesos físicos de ramificación, agregación y turbulencia, la aparición de ruido en señales eléctricas (precisamente una especie de conjunto de Cantor en su distribución) e incluso los fenómenos económicos o sociológicos son algunos de los lugares en los que se esconde el serpenteo incansable de los fractales.

Es muy común encontrar afirmaciones como “la naturaleza es fractal”. Sin embargo, es necesario advertir aquí que, realmente, “la naturaleza no es fractal”. Cuando se dice que un objeto real como una costa o la red capilar del

CAPÍTULO 1. ELEMENTOS TEÓRICOS DE LA DIMENSIÓN FRACTAL Y EL PROCESO DE ACTUALIZACIÓN CARTOGRÁFICA

sistema venoso es un fractal se quiere decir que existe un modelo fractal que aproxima con bastante precisión dicho objeto.

En el mundo real no existen fractales, como tampoco existen rectas ni esferas. Hablar de la dimensión fractal de una costa no es más absurdo que hablar del radio de la Tierra. La ciencia avanza gracias a todas estas aproximaciones, aunque probablemente las cosas no comprendan en su esencia los modelos matemáticos (Juan Antonio Perez Ortiz, 1998).

Los fractales, además, abren la puerta a numerosas conjeturas sobre la complejidad del mundo. Las pautas de generación de fractales son extremadamente sencillas si se comparan con los resultados obtenidos. Es posible que numerosos comportamientos de la naturaleza que hoy día se antojan extremadamente complicados respondan de igual forma a mecanismos de enorme sencillez. La Geometría Fractal es una rama muy joven cuyos progresos deben repercutir muy directamente en una creciente utilidad de la Geometría Fractal para el estudio de la realidad.

“La Geometría Fractal cambiará a fondo su visión de las cosas. Seguir leyendo es peligroso. Se arriesga a perder definitivamente la imagen inofensiva que tiene de nubes, bosques, galaxias, hojas, plumas, flores, rocas, montañas, tapices, y de muchas otras cosas. Jamás volverá a recuperar las interpretaciones de todos estos objetos que hasta ahora le eran familiares” (Barnsley, 2000).

Con estas rotundas palabras inicia el profesor *Michael Barnsley* su famoso libro sobre fractales. En efecto, una vez que se conoce esta nueva geometría es difícil contemplar la naturaleza, y el mundo que nos rodea, con los mismos ojos. La Geometría Fractal, no sólo es interesante por la belleza de las imágenes que crea, sino que en la actualidad es difícil encontrar una rama de conocimiento donde los fractales no estén presentes (Juan Navas Ureña & José María Quesada Teruel, 1998).

1.2 COMPARACIÓN ENTRE LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA Y LA GEOMETRÍA FRACTAL

Los elementos de la geometría euclidiana son puntos, líneas, curvas, etc., esto es, entes ideales concebidos por el hombre para modelizar los fenómenos naturales y cuantificarlos midiendo longitudes, áreas o volúmenes. Pero estos

CAPÍTULO 1. ELEMENTOS TEÓRICOS DE LA DIMENSIÓN FRACTAL Y EL PROCESO DE ACTUALIZACIÓN CARTOGRÁFICA

entes pueden ser tan complejos e irregulares que la medición usando la métrica euclidiana deja de tener sentido. Sin embargo, hay una manera de medir el grado de complejidad e irregularidad, evaluando cuán rápido aumenta la longitud, la superficie o el volumen, si se mide en escalas cada vez más pequeñas

La Geometría Fractal es, antes que todo, un nuevo lenguaje. Los elementos de la Geometría Fractal escapan a la percepción directa. Ello se debe a que son algoritmos que solamente la computadora puede trasladar a formas y estructuras.

La Geometría Fractal se aparta radicalmente de la geometría euclidiana tradicional, las nuevas formas de ver el mundo han separado la visión del hombre de la geometría clásica y lo han llevado a expandir horizontes en cuanto a la dimensión en la que vive.

Al enfrentarse a un problema por primera vez, se quiere comprender cómo funciona una cosa, normalmente se realizan simplificaciones. Es tan sencillo como considerar que, si se estudia el movimiento de un cuerpo, conviene despreocuparse de la fuerza de rozamiento; que, si la Tierra se desplaza alrededor del Sol, sería conveniente que su trayectoria forme un círculo. Si se mira por un instante el primer dibujo de un niño de un atardecer en la playa: se observa el Sol, redondo como un plato; las montañas, triángulos casi perfectos; las gaviotas, dos arcos circulares (Amir Al-Majdalawi Álvarez, 2006).

Esta forma de comenzar a entenderse con el mundo es muy útil tanto en el ámbito científico como en la vida cotidiana. Sin embargo, no siempre queda claro cuál es el mejor camino para lograrlo. Por ejemplo, empeñarse en reproducir con todo detalle un paisaje boscoso utilizando tan sólo elementos de la geometría clásica (círculos, triángulos, esferas, etc.) es una tarea ardua y muchas veces improductiva. Cuando se está interesado en descubrir cómo surgieron las formas y estructuras tan diversas y complejas que se encuentran en la naturaleza, es posible preguntarse si no habrá otras maneras de representarlas (Amir Al-Majdalawi Álvarez, 2006).

La geometría euclidiana tiene más de 2000 años, es la geometría tradicional que se imparte en los primeros niveles de enseñanza. Está basada en

CAPÍTULO 1. ELEMENTOS TEÓRICOS DE LA DIMENSIÓN FRACTAL Y EL PROCESO DE ACTUALIZACIÓN CARTOGRÁFICA

simetrías simples, reflexiones, rotaciones, transformaciones conformes, todas ideas básicas de esta geometría. Posee objetos que se caracterizan a partir de magnitudes significativas, la longitud de un segmento, el valor del área de una figura geométrica. Describe las formas presentes en la vida cotidiana del ser humano y que han sido creadas por él, una mesa se puede dibujar utilizando tres rectángulos, una casa con un cuadrado y un triángulo y una pelota mediante un círculo. Como dato característico principal, la geometría euclidiana es posible describirla mediante fórmulas algebraicas, teoría conocida como geometría algebraica.

Por otra parte, la Geometría Fractal es una rama de la matemática que se puede considerar moderna, surge a finales del siglo XIX, con las curvas que fueron denominadas “monstruos”, -ejemplo la curva de Weisstras, que contiene infinitos picos, siendo continua y no diferenciable, algo impensable en aquel tiempo- aunque su mayor desarrollo viene dado alrededor de 1970, a partir del propio avance de las computadoras.

Esta nueva geometría está caracterizada por la presencia de las simetrías homeométricas, que no sería más que el mantenimiento de la distancia a diferentes escalas; la auto semejanza estadística, donde solo se conservan algunas propiedades estadísticas durante el cambio de escala; la irregularidad en todas las magnitudes, pues no existe una longitud que permanezca estable en distintas escalas para dos puntos distintos.

La facilidad para describir procesos no lineales es otro de los aspectos que convierte a la Geometría Fractal en un mecanismo factible para la descripción de procesos naturales, siendo superior en este punto a la geometría euclidiana. El uso de fórmulas iteradas que devuelven figuras semejantes a los objetos que se aprecian día a día, nos indica que la naturaleza mantiene una estructura fractal dentro de su compleja formación. Dichos algoritmos, fáciles de representar mediante el uso de ordenadores, son el resultado del cambio de visión con respecto al mundo por parte de los matemáticos. En forma de resumen, se presenta la siguiente tabla como método conclusivo para una mejor comprensión de la comparación realizada.

Tabla 1 Comparación de la Geometría Fractal y la Geometría Euclidiana.

CAPÍTULO 1. ELEMENTOS TEÓRICOS DE LA DIMENSIÓN FRACTAL Y EL PROCESO DE ACTUALIZACIÓN CARTOGRÁFICA

GEOMETRÍA EUCLIDIANA:	GEOMETRÍA FRACTAL:
Tradicional; más de 2000 años.	Moderna. Fractales: 1970.
	"Monstruos" a comienzos del siglo XX.
Simetrías simples. Rotaciones.	Simetrías homeométricas.
	Auto- semejanza (estadística).
Objetos con magnitudes características.	Irregularidad en todas las magnitudes.
Adecuada para describir objetos fabricados por el hombre.	Adecuada para describir procesos no lineales en la Naturaleza.
Descrita por fórmulas algebraicas.	Descrita por algoritmos recursivos ideales para una computadora.

1.3 ANÁLISIS BIBLIOMÉTRICO DE LA BASE DE DATOS BIBLIOGRÁFICA A PARTIR DEL SOFTWARE ZOTERO+VUE.

Para el desarrollo de esta investigación en el proceso de la búsqueda y consulta bibliográfica, se opta por la utilización de índices bibliométricos que asociados a una prueba estadística valida la veracidad y actualidad de la información compilada por el autor y contenida en su base de datos o gestor bibliográfico.

Al realizar el análisis de la base de datos bibliográfica, se decide emplear la aplicación Zotero v5.0 como gestor bibliográfico, el cual es un complemento de *Firefox* con el *plugin VUE (Visual Understanding Environment)* para realizar los análisis de la bibliografía.

Esta selección de programas se basa en la posibilidad de emplear plataformas de código fuente libre acorde a las posibilidades tecnológicas mínimas sobre las cuales permita realizar una serie de análisis que impliquen un bajo costo computacional en el empleo del tiempo de cálculo y recursos físicos disponibles en el hardware (Michael Álvarez González & Lamberto Moisés Álvarez Gil, 2016).

Se persigue el propósito de la disminución del tiempo efectivo a la hora de realizar la revisión de los documentos más importantes, así como detectar los autores líderes en el tema.

CAPÍTULO 1. ELEMENTOS TEÓRICOS DE LA DIMENSIÓN FRACTAL Y EL PROCESO DE ACTUALIZACIÓN CARTOGRÁFICA

Se parte de obtener una nube de dispersión de la base de datos bibliográficos en la que están representados los cuarenta y ocho (48) documentos consultados y registrados en el gestor bibliográfico (Figura 3).

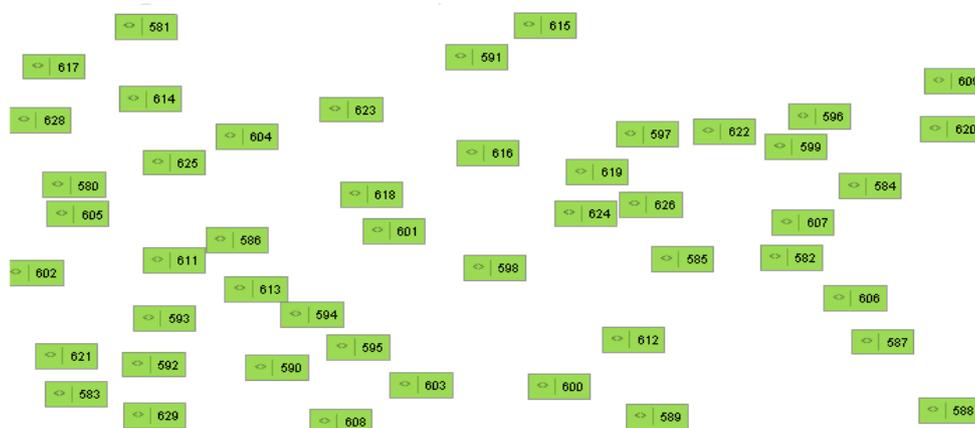


Figura 3 Nube de dispersión de base de datos bibliográficos.

Posteriormente se definen estrategias de consulta de la bibliografía, las cuales son relacionadas a continuación acorde a las propuestas realizadas por (Michael Álvarez González & Lamberto Moisés Álvarez Gil, 2016):

- **Análisis cronológico**

Para determinar la dispersión en el tiempo del volumen de información consultado y corroborar la actualidad o no del tema y el desarrollo que ha tenido en los últimos años.

- **Análisis de autoría**

Para determinar los autores líderes que han trabajado en el tema y que marcan pauta en la investigación internacional.

- **Análisis sobre la interrelación**

Para determinar cuán relacionados están los artículos, libros, revistas, etc., mediante las palabras claves o tópicos que los definen.

A partir de la herramienta Zotero+VUE se obtuvieron los siguientes resultados:

- **Análisis Cronológico**

CAPÍTULO 1. ELEMENTOS TEÓRICOS DE LA DIMENSIÓN FRACTAL Y EL PROCESO DE ACTUALIZACIÓN CARTOGRÁFICA

.....	⊙	2 Q1: 1,982-1,990
.....	⊙	10 Q2: 1,991-1,999
.....	⊙	18 Q3: 2,000-2,007
.....	⊙	18 Q4: 2,008-2,017
.....		Mean: 2005.1
.....		Std Dev: 8 x 4.6

Figura 4 Cuartiles por años de publicación de los elementos de la base de datos bibliográfico.

Se parte de la concepción estadística de los cuartiles, dividiendo así el tiempo a analizar en cuatro partes diferentes que darían el surgimiento de la temática, el enfoque clásico, el desarrollo y las tendencias actuales (Figura 4).

Teniendo como fecha inicial el año 1982, año en el que Mandelbrot publica la obra maestra “*The Fractal Geometry of Nature*”, libro que da comienzo al estudio intenso de la Geometría Fractal, quedaría teóricamente expresada de la siguiente manera la línea temporal:

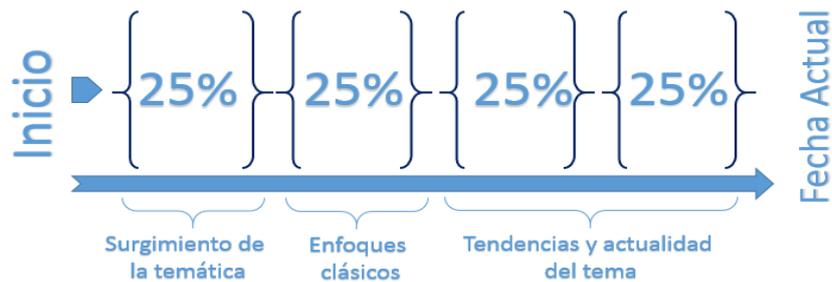


Figura 5 Línea temporal teórica.

Al contrarrestar el caso de estudio de la base de datos bibliográfica consultada, con el ejemplo teórico, se obtienen los siguientes resultados:

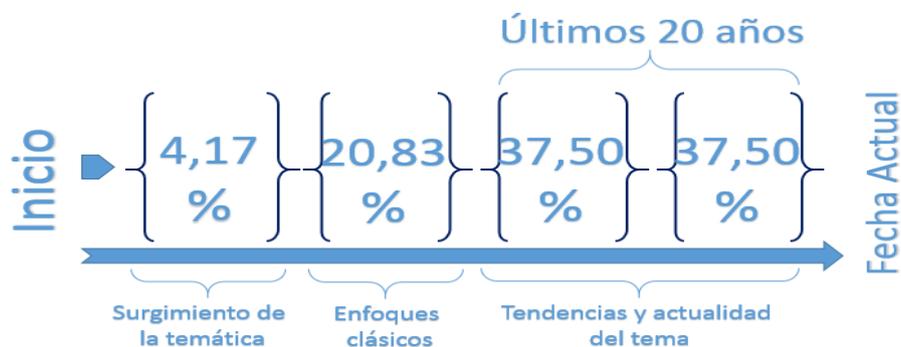


Figura 6 Línea temporal resultante luego del análisis.

CAPÍTULO 1. ELEMENTOS TEÓRICOS DE LA DIMENSIÓN FRACTAL Y EL PROCESO DE ACTUALIZACIÓN CARTOGRÁFICA

A partir de estos resultados podemos identificar como núcleo de la investigación dos elementos básicos del surgimiento de la temática, A partir de estos resultados podemos identificar como núcleo de la investigación dos elementos básicos del surgimiento de la temática, representando un 4.17% del total. Además, se observa cómo en la etapa de desarrollo del tema hubo un aumento en las publicaciones que representa un 20.83% del total. Por último, se aprecia cómo ha ocurrido un aumento en los últimos 20 años en cuanto a la cantidad de publicaciones, lo que trae como consecuencia el desarrollo del tema y la actualidad de la bibliografía consultada.

Este aumento de las publicaciones se puede apreciar mejor en el gráfico que se presenta a continuación, donde al observar la línea de tendencia, se ve el auge que a través del tiempo ha tenido la cantidad de publicaciones sobre el tema en cuestión.

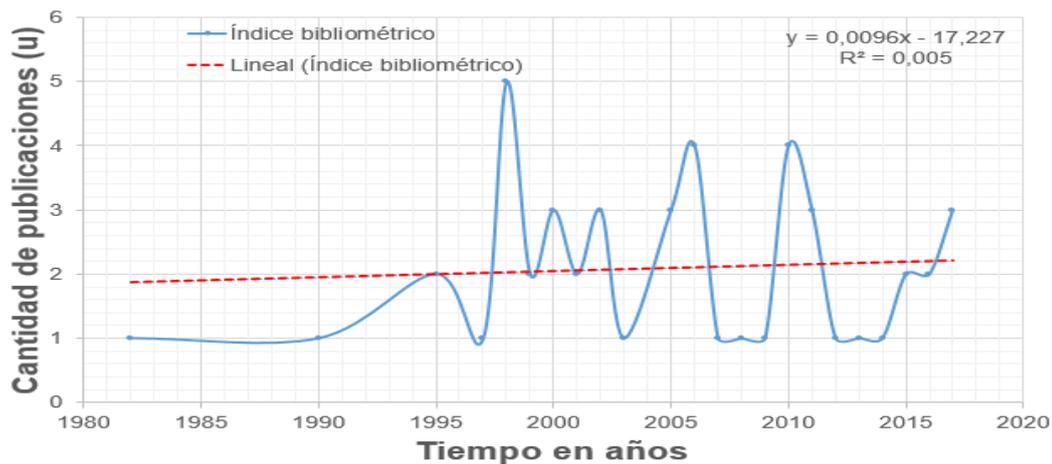


Figura 7 Gráfico de tendencia en el tiempo de la cantidad de publicaciones por año.

- **Análisis de autoría**

Al realizar el análisis por autores se pueden identificar los líderes actuales en la temática que no son más que aquellos que dictan las direcciones a seguir en las investigaciones futuras. Con una revisión más detallada se puede observar cómo Mandelbrot se encuentra en lo más alto de la lista, lo que conlleva a decir que la investigación está sustentada en las ideas de los clásicos y fundadores del tema. En el caso de los autores que poseen similar cantidad de publicaciones fueron ordenados por el orden cronológico en el que publicaron.

Tabla 2 Cantidad de publicaciones por autor.

Autor	Publicaciones (u)
Benoit Mandelbrot	3
Carina Jovanovich	3
Rufino Iturriaga	3
Gilberto Arenas	2
Juan Antonio Perez Ortiz	2
Sonia Sabogal	2
Vera W. de Spinadel	2

- **Análisis sobre la interrelación**

El análisis sobre la interrelación de los elementos de la bibliografía revisada es uno de los más importantes. Pone de manifiesto cómo cada documento presenta una dependencia con algún otro que permite dar continuidad al estudio sin perder tiempo ni recursos. Este análisis es llevado adelante a partir de las palabras claves o temáticas fundamentales que trata cada artículo, libro, tesis de grado, etc., que se encuentra en la base de datos analizada. Se parte de una nube de datos donde cada punto representa un título y se pasa a unir, a partir de flechas unidireccionales, cada punto con aquellos con los que guarda relación en cuanto a título, palabras claves, resumen o idea central. Una red de flechas intensa demuestra la alta interrelación presente entre los elementos de la bibliografía consultada.

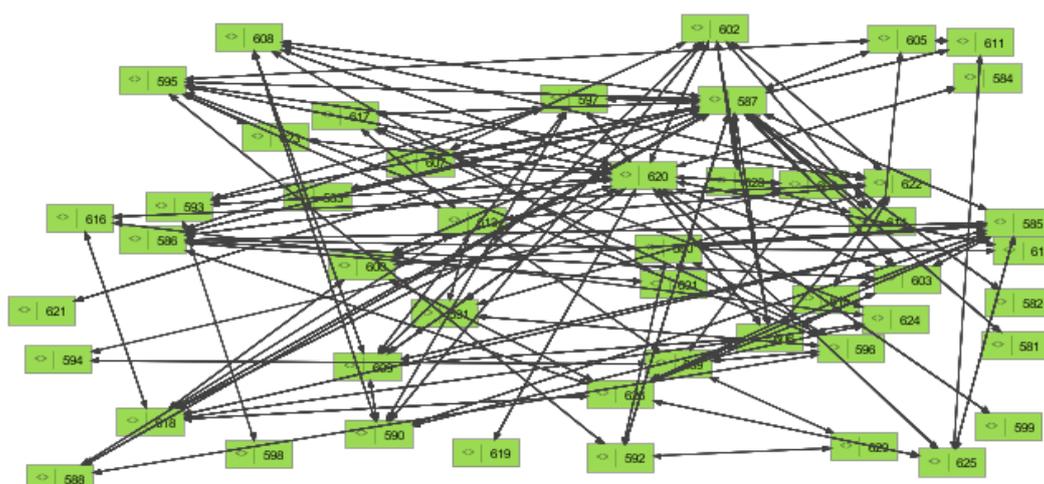


Figura 8 Interrelación entre los elementos de la base de datos bibliográfica.

Luego de concluido el proceso de aplicación del gestor bibliográfico con las herramientas bibliométricas, se puede afirmar que se ha abordado de forma

CAPÍTULO 1. ELEMENTOS TEÓRICOS DE LA DIMENSIÓN FRACTAL Y EL PROCESO DE ACTUALIZACIÓN CARTOGRÁFICA

objetiva la biblioteca sobre la cual se sustenta la investigación en curso, con lo cual se pueden resumir los siguientes elementos:

- Se logra probar que la base de datos analizada está actualizada, el aumento notable de publicaciones citadas en los últimos años sobre la temática demuestra la importancia del al tema.
- La investigación en curso está sustentada sobre las bases de los clásicos y sigue las líneas y tendencias más modernas de los principales autores en los últimos 20 años.
- Todos los elementos de la biblioteca en cuestión presentan un alto grado de interrelación, lo que proporciona un mayor aprovechamiento del tiempo y permite probar la homogeneidad en cuanto a la idea central en toda la bibliografía.

CONCLUSIONES PARCIALES

1. La Geometría Fractal como parte de la matemática es la mejor manera de describir los procesos de la naturaleza a partir de fórmulas sencillas. Es superior a la Geometría Euclidiana en cuanto a su uso para representar los elementos naturales
2. Quedó demostrado que la bibliografía consultada para el desarrollo de este trabajo está actualizada, acorde a las líneas actuales de investigación del tema tratado, basada en los autores más reconocidos y líderes en el tema, presentando una alta interrelación entre todos los elementos a partir del título, palabras claves, resumen y autores.

Capítulo 2



CAPÍTULO 2. FUNDAMENTOS ALGORÍTMICOS ASOCIADOS A LA DETERMINACIÓN DE LA DIMENSIÓN FRACTAL.

2.1 PARTICULARIDADES DE LA DIMENSIÓN FRACTAL

En este capítulo se presentarán los conceptos preliminares y necesarios para una lectura continua y comprensiva del contenido. Se presenta el concepto de fractal, algunas de las características principales, el algoritmo de Box-Counting y las nociones principales acerca de la actualización geográfica. En la Geometría Fractal es frecuente hablar de distintas dimensiones, por lo que a continuación se introduce de manera breve los conceptos de dimensión Euclídea, Topológica, de Hausdorff o Hausdorff-Besicovitch y fractal.

- **Euclídea:**

Es el máximo número de vectores linealmente independientes que se puede encontrar en el espacio.

Ejemplos: Un punto tiene dimensión uno, un plano dimensión dos y el espacio dimensión tres.

- **Topológica:**

La dimensión topológica (\mathcal{DT}) mide la habilidad para cubrir en un espacio topológico un objeto con conjuntos abiertos de radio pequeño. (Rivera Henao, Eduard; & Lopez Varona, Ricardo., 2011).

Entonces

$\mathcal{DT} = -1$ El vacío

$\mathcal{DT} = 0$ Un punto

$\mathcal{DT} = 1$ Un segmento

$\mathcal{DT} = 2$ Un cuadrado

$\mathcal{DT} = 3$ Un cubo

- **Hausdorff-Besicovitch:**

La dimensión de Hausdorff o dimensión de Hausdorff-Besicovitch es una generalización métrica del concepto de dimensión de un espacio topológico, que permite definir una dimensión fraccionaria (no entera) para un objeto fractal.

La medida fue introducida hacia 1917 por Félix Hausdorff, aunque fue estudiada mucho más extensivamente por Abram Besicovitch, a quien se deben la mayoría de los resultados teóricos y teoremas concernientes tanto a la medida de Hausdorff como a la dimensión fractal.

De la medida de Hausdorff (Valdés Vásquez, Patricio Alejandro, 2016) se tiene la dimensión de Hausdorff-Besicovitch o dimensión *Box-Counting*:

$$D = \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} \quad (1)$$

donde N es la cantidad de cajas que se superponen sobre el objeto al cual se le está calculando la dimensión y r el tamaño de las cajas con que se hace el recubrimiento de la malla².

- **Fractal:**

En un sentido genérico es un número que sirve para cuantificar el grado de irregularidad y fragmentación de un conjunto geométrico o de un objeto natural. La dimensión fractal no es necesariamente entera (Rivera Henao, Eduard; & Lopez Varona, Ricardo, 2011).

2.1.1 Definición formal de fractal.

Mandelbrot definió un “fractal” como un conjunto cuya dimensión de Hausdorff es estrictamente mayor que su dimensión topológica. (Benoit B. Mandelbrot, 1982)

El concepto de dimensión que usó Mandelbrot es una simplificación del de Hausdorff y corresponde exactamente a la definición establecida en 1958 por el matemático ruso Kolmogorov³ de la “capacidad” de una figura geométrica. Así, la capacidad de un conjunto E se define como:

$$d_E = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\log(N(r))}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} \right) \quad (2)$$

² El método de Box-Counting será explicado más adelante junto con el significado de caja y recubrimiento por una malla de razón r .

³ Andrei N. Kolmogorov (1903-1987). Matemático de la Unión Soviética que produjo notables avances en la teoría de la probabilidad.

CAPÍTULO 2. FUNDAMENTOS ALGORÍTMICOS ASOCIADOS A LA DETERMINACIÓN DE LA DIMENSIÓN FRACTAL

donde si el conjunto E es un subconjunto acotado de un espacio euclidiano p -dimensional, entonces $N(r)$ es el mínimo número de cubos p -dimensionales de lado r necesarios para cubrir E . Para un punto $N(r) = 1$; para una línea es $N(r) = \frac{1}{r}$ y para una superficie es $N(r) = \frac{1}{r^2}$. Aplicando la expresión (2) se puede comprobar que $d_E = 0, 1, 2$ para un punto, una línea y una superficie plana, respectivamente.

La definición de Mandelbrot tiene el inconveniente que excluye conjuntos que por su autosemejanza debieran ser reconocidos como fractales. Se han propuesto otras definiciones de fractales, pero no existe todavía una, suficientemente general. En principio, se acuerda en no definir un fractal sino enumerar sus propiedades características, a saber:

- Un fractal tiene una estructura fina; esto es, mayor detalle en escalas arbitrariamente pequeñas;
- Un fractal es demasiado irregular para ser descrito con la Geometría Euclidiana tradicional, tanto local como globalmente;
- Con frecuencia, un fractal tiene una cierta forma de auto-semejanza, quizás aproximada o estadística;
- En muchos casos interesantes, el fractal se define en forma muy simple, por lo general, recursiva.

En el caso de figuras geométricas construidas por procesos recursivos, si S es la cantidad de réplicas y r es el factor de reducción, entonces $L = \frac{1}{r}$ es el factor de ampliación o de escala. A partir de la relación $S = (L)^d = \left(\frac{1}{r}\right)^d$ se tiene que la dimensión de Hausdorff d viene dada de la manera siguiente:

$$\log S = d \log L$$

Despejando d quedaría:

$$d = \frac{\log S}{\log L} \tag{3}$$

2.1.2 Principales ejemplos. La curva que llena el plano. El conjunto de Cantor. La curva de Koch. El triángulo de Sierpinski.

- La curva que llena el plano

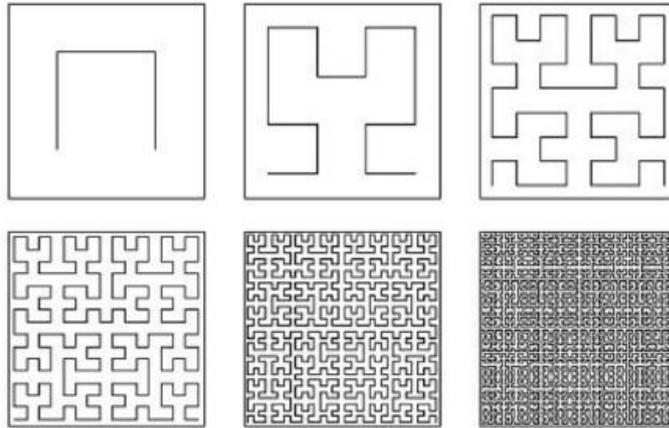


Figura 9 Curva de Hilbert que llena el plano.

Existen curvas llamadas de relleno de dimensión n , la cual puede llenar una superficie, una de estas es la curva de Hilbert, la cual tiene un patrón y se va uniendo hasta completar el plano.

Esta curva es una muestra de cómo un objeto que naturalmente debería tener dimensión uno es capaz de llenar el plano y tener dimensión 2.

- El conjunto de Cantor:

El matemático Georg Cantor⁴ es considerado como uno de los fundadores de la teoría de conjuntos. Pero en el presente contexto, su contribución radica en el hecho de haber introducido uno de los más antiguos fractales que se conocen, el llamado “conjunto ternario de Cantor”. En este conjunto, se parte de un segmento unitario que se divide en tres partes iguales, eliminando el tercio central. Y así sucesivamente, hasta llegar a tener solamente puntos discretos que constituyen el llamado “polvo de Cantor”.(Vera W. de Spinadel, 2002)

Construcción:

⁴ GEORG CANTOR (1845-1918) era un matemático alemán de ascendencia danesa, nacido en San Petersburgo. Su nombre está ligado con la nueva, rigurosa y brillante teoría de los números irracionales, pero más que esto, con la teoría general de conjuntos, creada por él y considerada como la base de toda la matemática moderna. Esta circunstancia le atrajo las críticas de muchos matemáticos conservadores de su época y nunca llegó a ser Profesor de la Universidad de Berlín en Alemania, aun cuando fue Profesor Titular de la Universidad de Halle de 1872 a 1905. Hoy en día, está considerado como uno de los más importantes pioneros de la ciencia.

**CAPÍTULO 2. FUNDAMENTOS ALGORÍTMICOS ASOCIADOS A
LA DETERMINACIÓN DE LA DIMENSIÓN FRACTAL**

Siendo la longitud inicial igual a la unidad, después de tres pasos se tendrán $2^3 = 8$ segmentos, cada uno de longitud $3^{-3} = \frac{1}{27}$. Tras n pasos se mantienen 2^n segmentos, cada uno de longitud 3^{-n} , la longitud total de los cuales es igual a $(2/3)^n$, que tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$.

Concretamente, el Polvo de Cantor parte del intervalo $[0,1]$, se divide en tres segmentos iguales, los cuales serían los intervalos $[0,1/3]$, $(1/3,2/3)$, $[2/3,1]$. Luego se debe eliminar el intervalo abierto intermedio, es decir, se quita el segmento $(1/3,2/3)$. Entonces C_1 sería la unión de los dos intervalos:

$$C_1 = [0; 1/3] \cup [2/3; 1]$$

Ahora, se toma cada intervalo y se realiza el mismo procedimiento anterior, dividir cada segmento en tres intervalos iguales y el intervalo abierto, o sea, el segmento intermedio, se elimina. Con ese proceso C_2 estaría compuesto así:

$$C_2 = [0; 1/9] \cup [2/9; 3/9] \cup [6/9; 7/9] \cup [8/9; 1]$$

Una iteración más, quedaría:

$$C_3 = [0, 1/27] \cup [2/27, 3/27] \cup [6/27, 7/27] \cup [8/27] \cup [9/27] \cup [18/27, 19/27] \cup [20/27, 21/27] \cup [24/27, 25/27] \cup [26/27, 1]$$

Este proceso sigue indefinidamente. Es decir, para obtener a C_n se debe conocer C_{n-1} . Como se puede observar en la Figura, su construcción se obtiene después de infinitas iteraciones de un algoritmo o patrón geométrico sencillo.

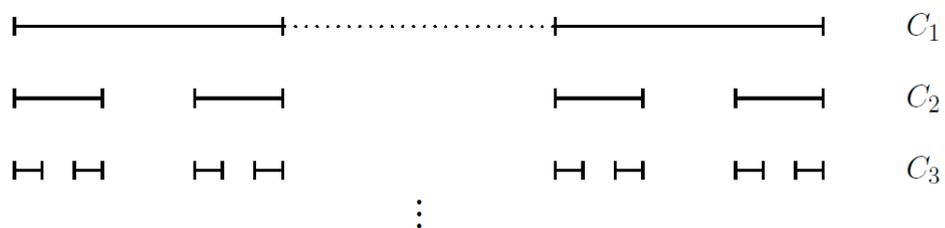


Figura 10 Conjunto de Cantor en las primeras 3 iteraciones.

Se destaca el hecho de que, si se toma a partir de cualquier iteración una sección del conjunto, la figura resultante es exactamente igual a la figura generadora, o figura del comienzo.

A primera vista se diría que la dimensión del conjunto de Cantor es igual a cero, pues tiende a desaparecer el conjunto. Sin embargo, al calcularla se tiene $S=2, L=3$:

$$D = \frac{\log S}{\log(L)} = \frac{\log 2}{\log[3]} \cong 0,6309$$

- **La curva de Koch**

En 1904, el matemático sueco von Koch⁵ descubrió una curva “*patológica*”, que obtenía como límite de una sucesión de polígonos. El carácter patológico del copo de nieve está dado por el hecho de cubrir un área finita; siendo su perímetro infinito. Además, es una curva continua que no tiene tangente en ningún punto. Este fractal está estrechamente vinculado al conjunto de Cantor y es, a su vez, el prototipo de una extensa familia de fractales, basados en la repetición de una transformación geométrica sumamente simple.

Construcción:

Se forma partiendo de un segmento unidad K_0 , el cual se divide en tres partes iguales. La parte central se sustituye por dos segmentos del mismo tamaño que el eliminado, que junto con dicha parte anulada formarían un triángulo equilátero; se obtiene así la poligonal K_1 . A continuación, se repite el proceso por cada segmento formado y se obtiene entonces una sucesión $(K_j) j \in \mathbb{N}$. El “límite” de esta sucesión, denotado K , se llama curva de Koch.

Nuevamente se percibe la autosimilitud de la figura límite, se detectan cuatro copias o réplicas ($S=4$), y un factor de ampliación igual a tres ($L=3$), de modo que por (3) su dimensión de Hausdorff es:

$$D_H = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.26186 \tag{4}$$

mientras que la dimensión topológica es $\mathcal{DT} = 1$ (Barnsley, 2000).

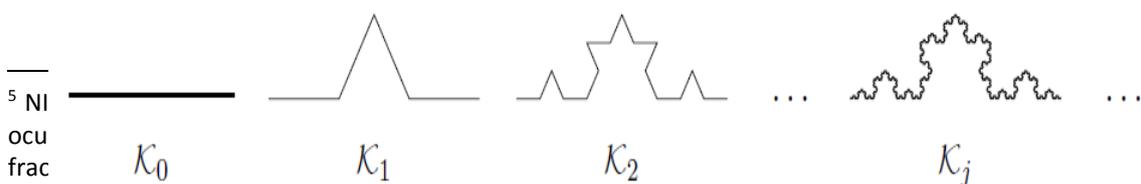


Imagen 11 Curva de Koch

⁵ NI
ocu
frac
han

Se destaca en esta curva las características de autosimilitud y recursividad, pues a cada segmento K_0 que aparece se sustituye por K_1 , y así cuando $n \rightarrow \infty$ aparece la figura límite K_j . Además K_2 se puede apreciar que está compuesta por tres veces K_1 .

- **La criba de Sierpinski**

En 1915, el matemático polaco Waclaw Sierpinski⁶, descubrió una variante del árbol ternario, que se conoce como “criba de Sierpinski”. Es un fractal que se obtiene partiendo de un triángulo equilátero que se divide en cuatro triángulos equiláteros iguales, de los cuales se elimina el del centro. De este modo se produce un agujero triangular. Con los tres triángulos equiláteros restantes se procede de igual modo. El triángulo de Sierpinski tiene una dimensión fractal correspondiente a $S=3$, $L=2$ (de Spinadel, Jorge H. Perera, & Jorge G. Perera, 2005):

$$D = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,5849 \quad (5)$$

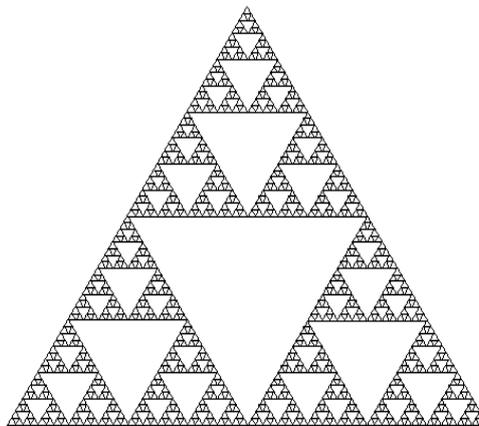


Figura 12 Criba de Sierpinski

2.2 ALGORITMO BOX-COUNTING

La dimensión fractal es presentada como una nueva forma de tratar aquellos objetos que no pueden ser analizados con la geometría euclidiana y que no son comunes encontrarlos en la matemática clásica. Los objetos autosimilares son de fácil manejo, la curva de Koch, el polvo de Cantor..., pero en la naturaleza

⁶ WACLAW SIERPINSKI (1882-1969). Fue uno de los más influyentes matemáticos de su época en su Polonia natal y logró reputación mundial. Uno de los cráteres de la Luna lleva su nombre. En 1916 introdujo dos fractales que actualmente son clásicos; la criba [5] y la carpeta [6] de Sierpinski.

existen objetos con alto grado de autosimilitud, que no son exactamente iguales, esto es lo que se denomina autosimilitud estadística (Benoit B. Mandelbrot, 1982). En estos casos también se puede hablar de una dimensión fractal en los objetos naturales.

El algoritmo de Box-Counting viene a generalizar en objetos naturales el método de cálculo de la dimensión fractal en objetos autosimilares, mediante generalizaciones apropiadas.

- **Dimensión de los objetos euclidianos**

A partir de un segmento de línea de longitud uno, se puede escalar el segmento por $\frac{1}{2}$ y observar 2 copias de longitud $\frac{1}{2}$, que cubren el segmento original. Se necesitan tres segmentos escalados por $\frac{1}{3}$, cuatro segmentos escalados por $\frac{1}{4}$, etc. Se debe tener en cuenta que $2 = 1/(1/2)$, $3 = 1/(1/3)$, y $4 = 1/(1/4)$. En general, representando la escala por r y el número de segmentos de escala r por $N(r)$, tenemos la relación $N(r) = 1/r$

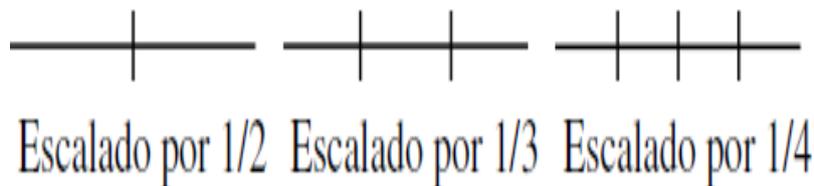


Figura 13 Escalado de un segmento.

Para cubrir un cuadrado de lado 1 se necesitan 4 copias del cuadrado escalado por $1/2$ a lo largo de sus lados. Similarmente necesitamos 9 cuadrados escalados por $1/3$, 16 cuadrados escalados por $1/4$, etc. Nótese que $4 = (1/(1/2))^2$, $9 = (1/(1/3))^2$, y $16 = (1/(1/4))^2$. En general, $N(r) = (1/r)^2$.

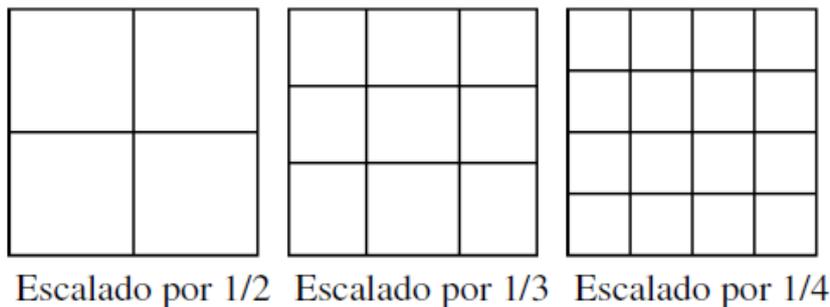


Figura 14 Escalado de un cuadrado

Para cubrir un cubo de lado 1 se necesitan 8 copias de cubos escalados por $\frac{1}{2}$ a lo largo de todos sus lados. Similarmente se necesitan 27 cubos escalados por $\frac{1}{3}$, 64 cubos escalados por $\frac{1}{4}$, etc. Nótese que $8 = (1/(1/2))^3$, $27 = (1/(1/3))^3$, y $64 = (1/(1/4))^3$. En general, $N(r) = (1/r)^3$.

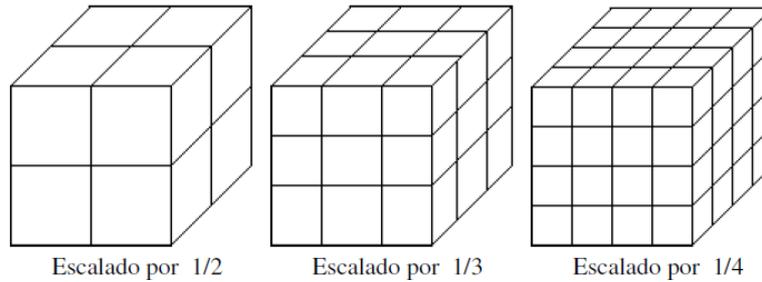


Figura 15 Escalado para un cubo.

Para líneas, cuadrados y cubos se ha visto que hay una relación entre un factor de escala r y el número $N(r)$ de copias de una forma similar, escalada por un factor r , necesitado para cubrir la forma original.

Representando por d la dimensión Euclidiana de estas formas, la relación es: $N(r) = (1/r)^d$. Ahora, se puede afirmar que, si esta relación de escala se mantiene para una forma, entonces el valor de d es la dimensión de dicha forma.

Se puede aplicar esta fórmula a cualquier objeto auto-similar, pero no a los fractales naturales, objetos físicos (no necesariamente exactamente auto-similares) que giran y giran tanto y en tantas escalas que se les puede considerar fractales. Para hacer frente a estos se necesita un método de aplicación más general para calcular las dimensiones.

- **Las Cajas del Box-Counting**

Una malla es un conjunto de polígonos (triángulos, cuadriláteros, pentágonos), que definen una superficie en el espacio tal que, si t_i y t_j son dos elementos de una malla T , entonces: $t_i \cap t_j$ es un vértice, una arista común, o una cara común, o el conjunto vacío. Una malla tiene asociado un conjunto de elementos geométricos tales como: vértices, aristas y caras poligonales.

Para elementos finitos con una definición formal, una malla es un conjunto de nodos, o puntos representativos de un elemento, junto a sus relaciones de

adyacencia [aristas, segmentos que unen nodos adyacentes de la malla (Ana García Domene, 2011)].

En el caso del Box-Counting se utilizarán mallas regulares compuestas por líneas paralelas y perpendiculares entre sí formando cuadrados o cajas.

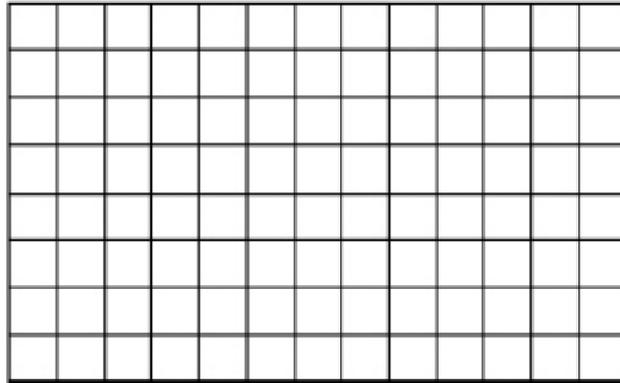


Figura 16 Malla que se utiliza en el algoritmo Box-Counting.

- **Dimensión Box-Counting**

Los fractales naturales no contienen copias similares de sí mismos. ¿Cómo se puede medir su dimensión si no hay aparentemente un factor de escala? La respuesta es motivada por las observaciones euclidianas anteriores.

- Se cubre la forma con una malla de cajas y se cuenta el número de cajas que tocan cualquier parte de la forma.
- Se repite para mallas con cajas más y más pequeñas.

Se denota por $N(r)$ el número de cajas de la malla de lado r tocando cualquier parte de la forma, se adopta la *suposición*, que

$$N(r) = k((1/r)^d) \quad (6)$$

donde k es la constante de proporcionalidad, 1 en los ejemplos previos. A partir de (6) tomando el \log en ambos miembros, se obtiene la forma

$$\log(N(r)) = d \log(1/r) + \log(k) \quad (7)$$

En (7) d y k son constantes, $\log(N(r))$ y $\log(1/r)$ varían con r , de modo que tiene la forma $y = mx + b$ de la ecuación de la línea recta con pendiente d donde la variable dependiente sería $\log(N(r))$ y la independiente $\log(1/r)$. Debido a que d es interpretado como una dimensión en la escala original, se

interpreta también como una dimensión en esta forma más general. Este d se llama dimensión Box-Counting.

Se realiza el proceso de conteo para las cajas de lado r_1, r_2, \dots, r_N . Para calcular d desde estos *box-counts*:

- se plotean los puntos $(\log(r_1), \log(N(r_1))), \dots, (\log(r_N), \log(N(r_N)))$,
- luego se traza la línea del mejor ajuste a través de esos puntos y se calcula su pendiente.

Para fractales naturales la relación (6) sólo es válida para una colección limitada de valores de r , el *rango de escalamiento*. La dimensión Box-Counting puede ser calculada para fractales matemáticos. En general, más detalles son revelados con valores de r más pequeños, tendiendo a 0, de modo que para fractales matemáticos se toma el límite:

$$d = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\log(N(r))}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} - \frac{\log(k)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} \right) \quad (8)$$

Debido a que k es una constante, y $\frac{\log(k)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$, (8) quedaría

$$d = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\log(N(r))}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} \right) \quad (9)$$

Para fractales naturales con un rango de escala limitada, este límite no es el enfoque más acertado debido a la no existencia de la autosimilitud exacta. De aquí que se pasa a trazar los puntos $(\log(1/r), \log(N(r)))$, identificando el rango de escalamiento, y encontrando la pendiente de la recta que mejor se ajusta a través de los puntos en el rango de escalamiento (Rodolfo Camacho Velázquez & Mario Vásquez Cruz, 2015).

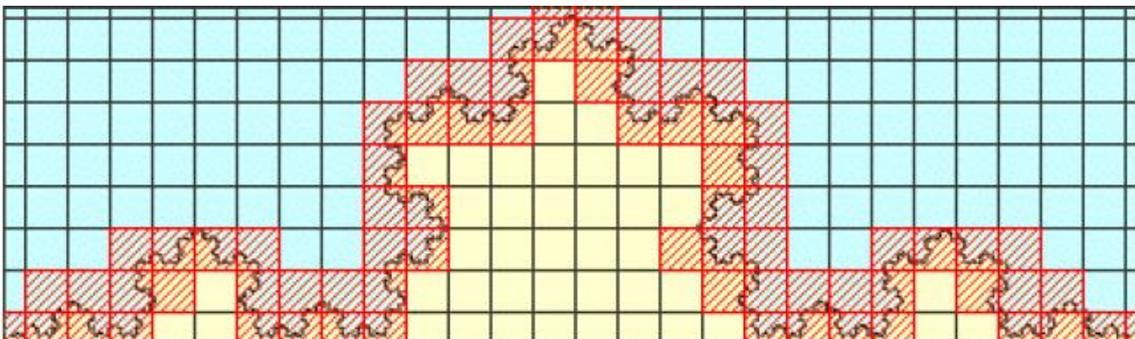


Figura 17 Selección de las cajas que contienen parte de la forma en el algoritmo Box-Counting

2.3 ANÁLISIS DE LA MALLA EN EL ALGORITMO BOX-COUNTING.

En diferentes literaturas se trata el tema de la colocación de la malla para el cálculo de la dimensión fractal y la influencia que presenta sobre el resultado final. (Ana García Domene, 2011) (Sonia Sabogal & Gilberto Arenas, 2011) (M. López-Martín & P. Fraile-Jurado, 2011). Se conoce que la colocación de la malla sobre la figura en análisis es muy importante, pues la elección realizada trae consigo variaciones importantes en el cálculo de los valores de $N(r)$, a partir de cada tamaño de caja r tomado. (Sonia Sabogal & Gilberto Arenas, 2011). Una colocación exacta sobre la figura permite que la dimensión fractal no pase de dos, manteniendo el sentido de la dimensión usada en este trabajo como la capacidad que posee el objeto de llenar el espacio en que vive (Figura 18).

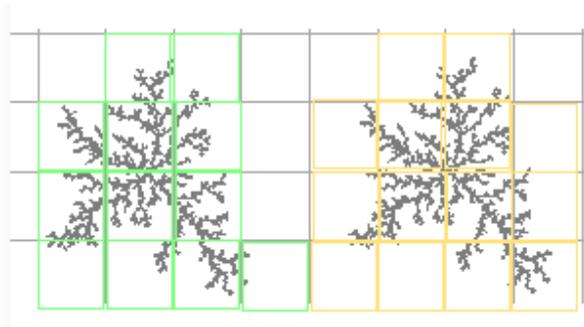


Figura 18 Se aprecia como la colocación influye en el conteo de cajas. De color verde 10 cajas y de color amarillo 12 cajas.

Por otra parte, un tópico muy mencionado, pero poco trabajado es el de la elección del tamaño de caja y el rango de escalamiento de estas para poder llevar a cabo el conteo necesario, siendo esto otro punto importante en la elaboración del algoritmo Box-Counting. La pregunta sería, ¿cuál es el tamaño ideal para usar, y en qué razón debería disminuir dicho tamaño?

Se presenta como objeto de análisis para dar solución a esta pregunta, un fotograma a partir de la imagen aerosatelital del río Bélico ubicado en la ciudad de Santa Clara (Figura 19). Este río posee la característica de ser confinado por las construcciones urbanas que se han desarrollado a todo lo largo de su ribera, elemento este que implica poca variabilidad espacial de su cauce en el tramo objeto de estudio. Además, se posee una amplia cartografía a diferentes escalas y años de mapificación para aplicar los elementos previamente comentados.

CAPÍTULO 2. FUNDAMENTOS ALGORÍTMICOS ASOCIADOS A LA DETERMINACIÓN DE LA DIMENSIÓN FRACTAL

La Figura resultante de la zona geográfica en cuestión presenta un tamaño de 18,14cm X 16,52cm.



Figura 19 Imagen aerossatelital de un tramo del Río Bélico utilizado para realizar el análisis de la malla en el algoritmo Box-Counting.

A partir de las necesidades de los softwares computacionales utilizados – *Imaje J*, software libre muy utilizado para el cálculo de la dimensión fractal Box-Counting con un algoritmo ya implementado y que se utilizó como verificación de los resultados obtenidos del código creado por el autor implementado con una cuenta gratuita en la nube del software *Wolfram Mathematics*- se realizó un trabajo de edición de imagen como preparación al uso de los algoritmos antes mencionados, donde se transformó la imagen aerossatelital en una imagen binaria, es decir, el objeto a analizar, el río, se coloreó de negro y el resto de la imagen se transformó en color blanco.



Figura 20 Resultado del proceso de edición de imagen realizado a la foto aerossatelital del tramo de Río Bélico en análisis.

Para llevar a cabo el algoritmo Box-Counting se utilizaron los píxeles de la imagen como malla, tomando los píxeles de color negro como las cajas que se

**CAPÍTULO 2. FUNDAMENTOS ALGORÍTMICOS ASOCIADOS A
LA DETERMINACIÓN DE LA DIMENSIÓN FRACTAL**

superponían sobre el río. Por tanto, se realizaron varias pixelaciones de la imagen, desde 5 píxel por centímetro, que equivale a 25 píxeles por centímetro cuadrado, hasta 1000 píxel por centímetro que equivale a 1000000 de píxeles por centímetro cuadrado. Como resultado se obtuvo la siguiente relación:

Tabla 1 Resultado del conteo de cajas. $N(r)$ representa las cajas de la malla sobre el río y r el tamaño de caja.

Píxel por cm	Tamaño en cm	Tamaño en píxeles	r	log 1/r	N(r)	log N(r)
5ppcm	18,14x16,52	{90, 82}	0,2000000	0,69897000	677	2,830588669
10ppcm	18,14x16,52	{181, 165}	0,1000000	1,00000000	29865	4,475162519
25ppcm	18,14x16,52	{453, 412}	0,0400000	1,39794001	86636	4,937698393
50ppcm	18,14x16,52	{907, 826}	0,0200000	1,69897000	749182	5,874587334
100ppcm	18,14x16,52	{1814, 1652}	0,0100000	2,00000000	2996728	6,476647326
150ppcm	18,14x16,52	{2721, 2478}	0,0066666	2,17609126	6742638	6,828829844
200ppcm	18,14x16,52	{3628, 3304}	0,0050000	2,30103000	11986912	7,078707317
500ppcm	18,14x16,52	{9070, 8260}	0,0020000	2,69897000	74918200	7,874587334
600ppcm	18,14x16,52	{10884, 9912}	0,0016666	2,77815142	10788220	8,03294982
700ppcm	18,14x16,52	{12698, 11564}	0,0014285	2,8450981	14683967	8,16684340
800ppcm	18,14x16,52	{14512, 13216}	0,0012500	2,9030899	19179059	8,2828273
1000ppcm	18,14x16,52	{18140, 16520}	0,0010000	3,0000000	29967280	8,47664732

A partir de esta tabla y como siguiente paso del algoritmo se continuó con el proceso de graficación logaritmo-logaritmo, que no es más que la representación gráfica de los pares ordenados $(\log \frac{1}{r}, \log N(r))$, a los cuales se les calcula la recta de regresión y cuya pendiente es la dimensión fractal Box-Counting.

CAPÍTULO 2. FUNDAMENTOS ALGORÍTMICOS ASOCIADOS A LA DETERMINACIÓN DE LA DIMENSIÓN FRACTAL

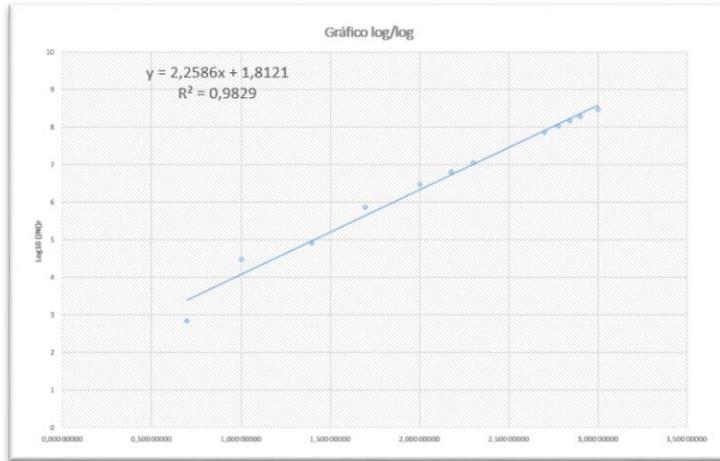


Figura 22 Gráfico log-log. Recta de regresión.

Luego de llevado a cabo el proceso se obtiene como resultado la recta $y = 2,2586x + 1,8121$. Por tanto, la dimensión fractal Box-Counting del río en análisis sería 2,2586. Pero si se toma en cuenta la definición con que se está trabajando, -la capacidad del objeto para llenar el espacio en que vive-, ¿cómo es posible que la dimensión entonces sea mayor que 2? No es posible, se está incurriendo en un error teórico. Pero, ¿dónde está ese error?

Las mallas utilizadas para este proceso, como se aprecia en la Tabla 1, llevan a disminuir el tamaño de la caja, pero de forma desproporcionada, -no existe un valor k de proporción-, por lo que el rango de escala se ve afectado y el algoritmo no devuelve el resultado correcto.

A partir de estos resultados se llevaron a cabo modificaciones en el algoritmo. Se realizó una primera pixelación de la imagen donde el tamaño de la caja se tomó como la unidad. Luego cada nueva pixelación sería el doble de la anterior, lo que conllevaría a que la caja siguiente sería la mitad de la anterior. Por tanto, los tamaños de caja fueron los siguientes:

Tabla 2 Primeras seis pixelaciones teniendo como valor de proporción de caja $k=1/2$.

1ra pixelación	2da pixelación	3ra pixelación	4ta pixelación	5ta pixelación	6ta pixelación
1 unidad	½ unidad	¼ unidad	1/8 unidad	1/16 unidad	1/32 unidad

Con estas nuevas mallas, se procedió a realizar de nuevo todo el proceso del algoritmo, es decir, el cálculo de los nuevos valores de $N(r)$ a partir de los valores de r de la Tabla 1, donde se obtuvieron los siguientes resultados:

Primero el gráfico log-log y su recta de regresión.

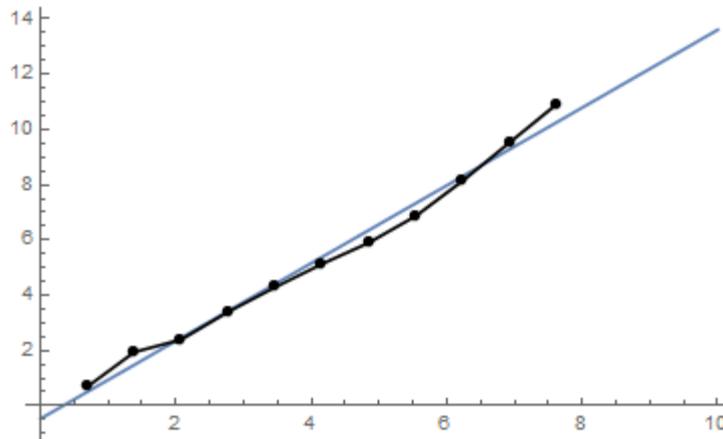


Figura 23 Gráfico log-log para los valores de r de la Tabla 1.

La ecuación de la recta de regresión obtenida es: $y = 1,4078x - 0,46776$. Por tanto, la dimensión fractal Box-Counting sería 1,4078. Este resultado es correcto y verificado por los dos *softwares* mencionados anteriormente. Además, teóricamente también es correcto, pues es menor que dos, que no es más que la dimensión del plano donde “vive” el río analizado.

CONCLUSIONES PARCIALES

1. En el proceso de estudio y selección de los diferentes algoritmos de análisis matemático para la estimación de un índice fractal se opta por el principio de Box-Counting dada la fácil adecuación
2. El algoritmo Box-Counting proporciona un mejor resultado para el cálculo de la dimensión fractal de objetos naturales teniendo como base la definición utilizada de dimensión fractal –capacidad de un objeto para llenar el espacio en que vive- pues mantiene la dimensión fractal siempre inferior a la dimensión topológica del objeto.
3. En el uso del algoritmo Box-Counting se evidenció la necesidad de mantener la razón de escalado de la malla para poder tener un resultado matemáticamente correcto, es por ello, que al utilizar el algoritmo Box-Counting la primera malla puede tener la cantidad de cajas que el usuario considere necesarias. Sin importar el tamaño real del objeto o

CAPÍTULO 2. FUNDAMENTOS ALGORÍTMICOS ASOCIADOS A LA DETERMINACIÓN DE LA DIMENSIÓN FRACTAL

fenómeno que se estudiase, se asume como valor r_0 la dimensión real en el terreno, o sea, valor inicial de r , 1 unidad, y a partir de ahí utilizando un factor k de proporción ir disminuyendo el tamaño de la caja.

Capítulo 3



**CAPÍTULO 3. RESULTADOS SOBRE EL PROCESO DE CÁLCULO
DE LA DIMENSIÓN FRACTAL BOX-COUNTING EN OBJETOS NATURALES**

**CAPÍTULO 3. RESULTADOS SOBRE EL PROCESO DE CÁLCULO DE LA DIMENSIÓN
FRACTAL BOX-COUNTING EN OBJETOS NATURALES**

3.1 ANÁLISIS DE UN TRAMO DEL RÍO BÉLICO DE SANTA CLARA. RESULTADOS

En este capítulo se hará la presentación de los resultados obtenidos en el proceso de investigación. Los datos utilizados fueron proporcionados por el Instituto Nacional de Recursos Hidráulicos (INRH) en Villa Clara. Además, con el uso del *software* libre SAS Planet, se obtuvieron imágenes aereosatelitales utilizadas para realizar el cálculo de la dimensión fractal a objetos naturales por cartografiar.

En un primer momento se realizó el análisis del mismo sector del río Bélico utilizado en el Epígrafe 2 del Capítulo anterior, seleccionado debido a la característica de confinamiento a la que está expuesto por ser un río ubicado dentro de la ciudad. Esto debía traer como consecuencia que la dimensión fractal Box-Counting no variara mucho, pues su posición en el terreno no lo hacía.

- Año 1984



**Figura 24 Río Bélico 1984 Técnicas fotogramétricas 1-25 000.
Resaltado en verde.**

En (Figura 24) se muestra un primer momento del río Bélico en el año 1984, siendo este el punto de partida para el cálculo de su dimensión fractal Box-Counting.

CAPÍTULO 3. RESULTADOS SOBRE EL PROCESO DE CÁLCULO DE LA DIMENSIÓN FRACTAL BOX-COUNTING EN OBJETOS NATURALES

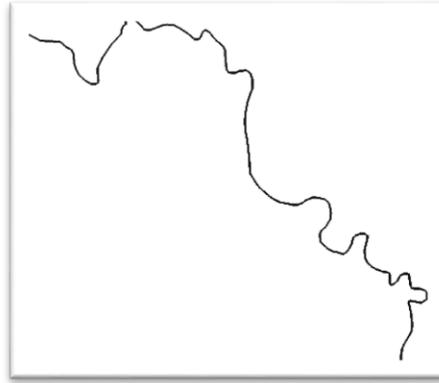


Figura 25 Resultado del procesamiento de imagen del río Bético en 1984.

En (Figura 25) se muestra el resultado luego del procesamiento de (Figura 24) para poder calcular la dimensión Box-Counting. El resultado obtenido fue:

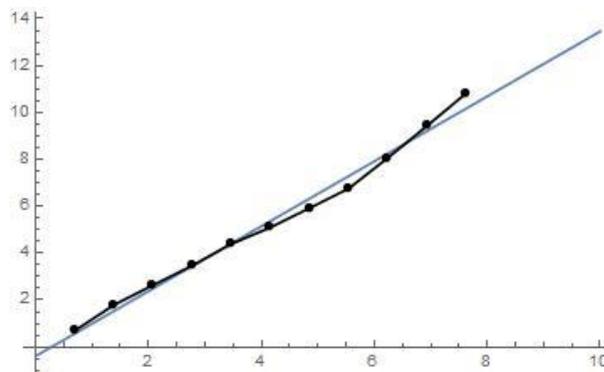


Figura 26 Gráfico log-log para (Imagen 2)

A partir del uso del algoritmo y la obtención del gráfico anterior la dimensión fractal obtenida fue: 1.38442.

- Año 1990

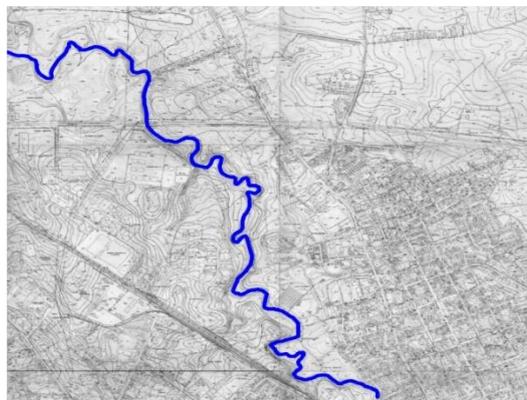


Figura 27 Técnica de levantamiento con plancheta antes del 1990 de la ciudad de Santa Clara, resaltado el río Bético, Zona Norte, de la ciudad. para la escala 1:2 000.

CAPÍTULO 3. RESULTADOS SOBRE EL PROCESO DE CÁLCULO DE LA DIMENSIÓN FRACTAL BOX-COUNTING EN OBJETOS NATURALES

En (Figura 27) se muestra un segundo momento del río Bélico en el año 1990, siendo este el primer punto de comparación en el cálculo de su dimensión fractal Box-Counting.

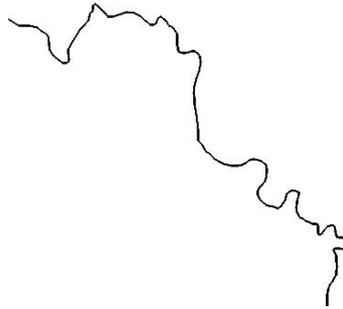


Figura 28 Resultado del procesamiento de imagen del río Bélico en 1990.

En (Figura 28) se muestra el resultado luego del procesamiento de (Figura 27) para poder calcular la dimensión Box-Counting. El resultado obtenido fue:

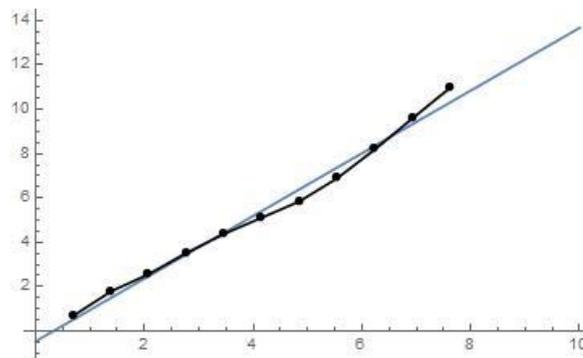


Figura 29 Gráfico log-log para (Figura 5).

A partir del uso del algoritmo y la obtención del gráfico anterior la dimensión fractal obtenida fue: 1.41385.

- Año 2014



Figura 30 Río Bélico 2014 Técnicas fotogramétricas 1-2 000.

CAPÍTULO 3. RESULTADOS SOBRE EL PROCESO DE CÁLCULO DE LA DIMENSIÓN FRACTAL BOX-COUNTING EN OBJETOS NATURALES

En (Figura 30) se muestra un tercer momento del río Bélico en el año 2014, siendo este el segundo punto de comparación en el cálculo de su dimensión fractal Box-Counting.

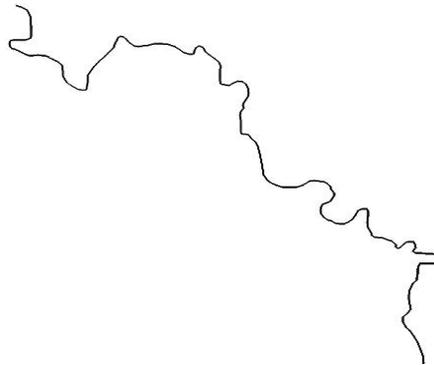


Figura 31 Resultado del procesamiento de imagen del río Bélico en 2014.

En (Figura 31) se muestra el resultado luego del procesamiento de (Figura 30) para poder calcular la dimensión Box-Counting. El resultado obtenido fue:

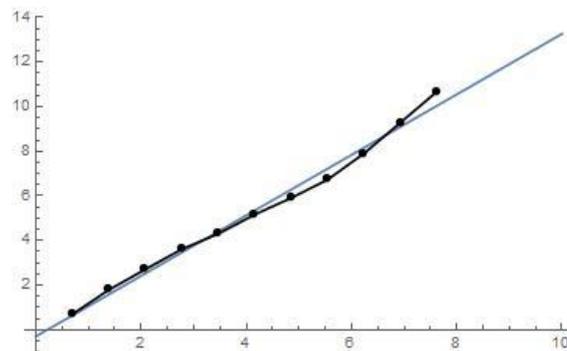


Figura 32 Gráfico log-log para (Figura 8).

A partir del uso del algoritmo y la obtención del gráfico anterior la dimensión fractal obtenida fue: 1.35626.

- Año 2018



Figura 33 Río Bélico imagen satelital del 2018.

CAPÍTULO 3. RESULTADOS SOBRE EL PROCESO DE CÁLCULO DE LA DIMENSIÓN FRACTAL BOX-COUNTING EN OBJETOS NATURALES

En (Figura 33) se muestra un cuarto momento del río Bélico en el año 2018, siendo este el primer punto de comparación en el cálculo de su dimensión fractal Box-Counting.

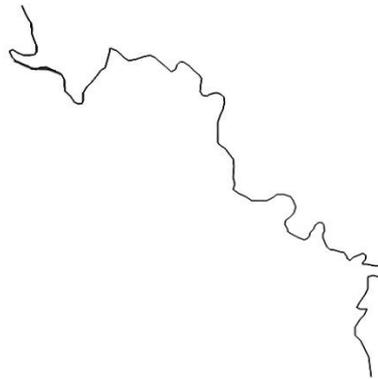


Figura 34 Resultado del procesamiento de imagen del río Bélico en 2018.

En (Figura 34) se muestra el resultado luego del procesamiento de (Figura 33) para poder calcular la dimensión Box-Counting. El resultado obtenido fue:

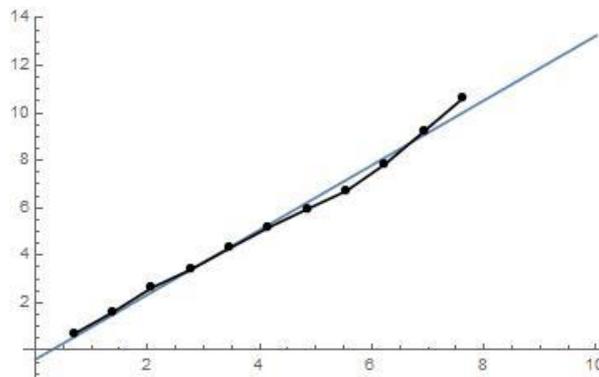


Figura 35 Gráfico log-log para (Figura 11).

A partir del uso del algoritmo y la obtención del gráfico anterior la dimensión fractal obtenida fue: 1.36531.

En modo resumen, se presenta la siguiente tabla:

Tabla 3 Resumen de la dimensión fractal B-C del río Bélico en los distintos momentos.

Año	Escala	Dimensión Fractal B-C
1984	1:25000	1,38442
1990	1:2000	1,41385
2014	1:10000	1,35626
2018	Imagen Satelital	1,36531

Se puede apreciar que todos los valores obtenidos se aproximan a 1.4, por lo que se puede garantizar que la dimensión fractal del río Bélico es este valor.

CAPÍTULO 3. RESULTADOS SOBRE EL PROCESO DE CÁLCULO DE LA DIMENSIÓN FRACTAL BOX-COUNTING EN OBJETOS NATURALES

Pero a qué se debe la pequeña variación en los dígitos después de la coma. A pesar de ser un río confinado dentro de la ciudad con el pasar de los años sufre leves cambios (Figura 36), lo que queda ejemplificado en dicha variación numérica.

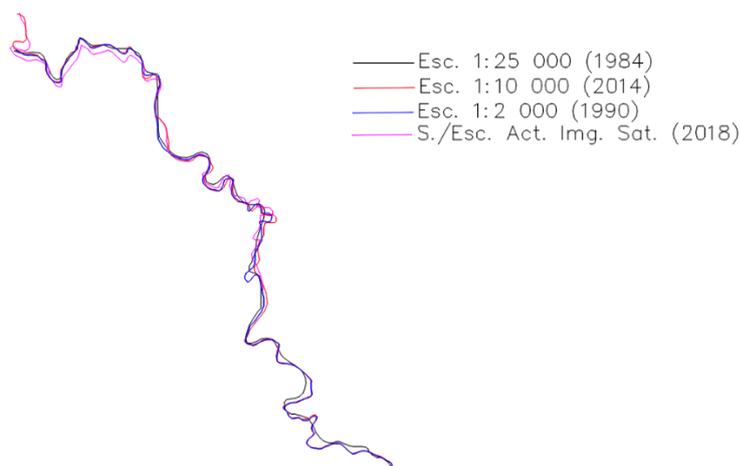


Figura 36 Río Bético multiescala en el tiempo.

3.2 ANÁLISIS DEL LAGO POOPE. RESULTADOS.

El lago Poope es un lago de agua salada, el segundo más grande de Bolivia después del lago Titicaca. Ambos están conectados por el río Desaguadero. De los lagos ubicados exclusivamente en territorio boliviano es el de mayor tamaño. El 16 de diciembre de 2015 desapareció tras un acelerado proceso de desertificación, sin embargo, con las lluvias que se registraron los meses de diciembre de 2016 y los primeros meses de 2017 pudo recuperar un tercio del agua perdida. Normalmente este lago sufre grandes crecidas, por lo que el espacio que ocupa en el terreno es muy variante. A partir de esto se esperarían cambios un poco más significativos en cuanto a la dimensión fractal, razón por la cual fue seleccionado para realizar un análisis teórico-práctico.

- Lago Poope en tiempo de sequía

En (Figura 37) se observa como el lago Poope disminuye su volumen de agua en tiempo de sequía. Se puede apreciar las tierras que en tiempo de lluvias terminan siendo ocupadas por el agua.

CAPÍTULO 3. RESULTADOS SOBRE EL PROCESO DE CÁLCULO DE LA DIMENSIÓN FRACTAL BOX-COUNTING EN OBJETOS NATURALES



Figura 37 Lago Poopó en tiempo de sequía.

Después del procesamiento de la imagen para su uso el resultado fue el siguiente.



Figura 38 Resultado del procesamiento de imagen del lago Poopó en tiempo de sequía.

En este caso al aplicar el algoritmo la posición de la malla es de suma importancia a la hora de poder comparar con otro momento del lago, pues es necesario utilizar el mismo terreno que se utilizaría cuando el lago se encuentra con mayor volumen.

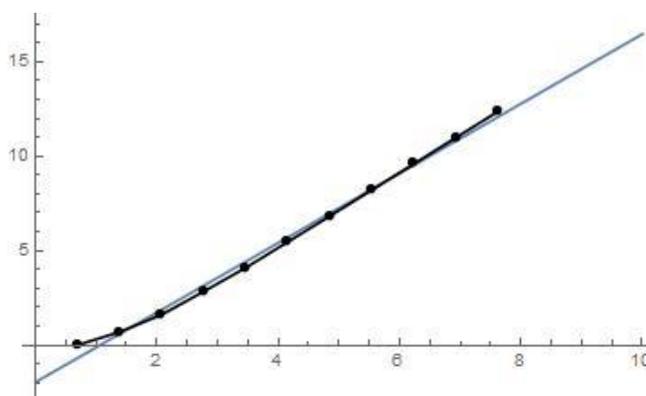


Figura 39 Gráfico log-log para (Figura 38).

CAPÍTULO 3. RESULTADOS SOBRE EL PROCESO DE CÁLCULO DE LA DIMENSIÓN FRACTAL BOX-COUNTING EN OBJETOS NATURALES

A partir del uso del algoritmo y la obtención del gráfico anterior la dimensión fractal obtenida fue: 1.81232.

- Lago Poope crecido.



Figura 40 Lago Poope crecido.

En (Figura 40) se observa cómo aumenta el volumen del agua notablemente en comparación con (Figura 37). Por tanto, se esperaría un cambio en la dimensión fractal. Es importante tener en cuenta que en este caso -lago Poope- todo lo que está cubierto por agua entra dentro del análisis, no solo el contorno del lago.

Después del procesamiento de la imagen para su uso el resultado fue el siguiente.

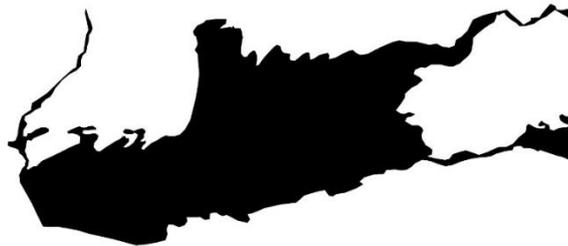


Figura 41 Resultado del procesamiento de imagen del lago Poope crecido.

Se mantuvo la posición de la malla para ocupar la misma cantidad de terreno que en (Figura 38).

CAPÍTULO 3. RESULTADOS SOBRE EL PROCESO DE CÁLCULO DE LA DIMENSIÓN FRACTAL BOX-COUNTING EN OBJETOS NATURALES

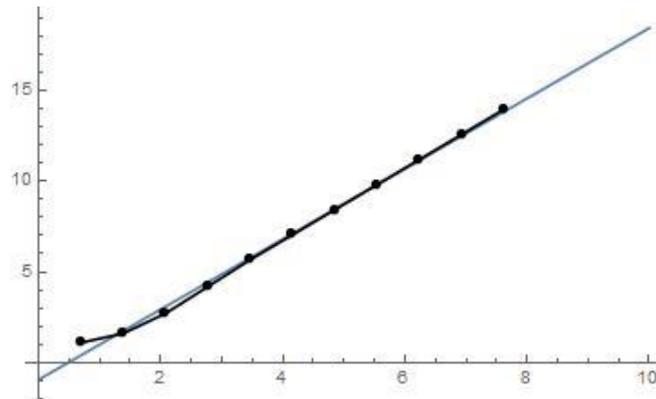


Figura 42 Gráfico log-log para (Figura 41).

A partir del uso del algoritmo y la obtención del gráfico anterior la dimensión fractal obtenida fue: 1.93688.

Resumiendo, se realizaron las siguientes comparaciones:

- Imagen:

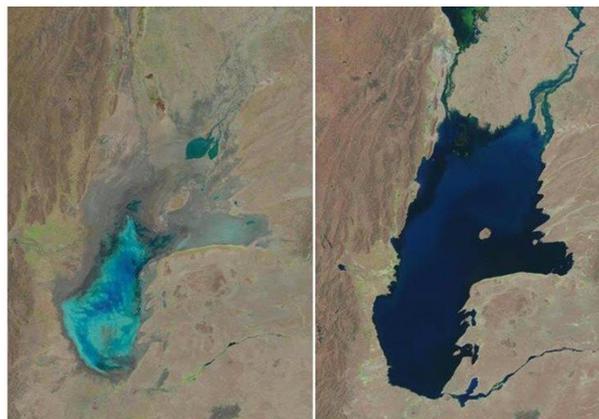


Figura 43 Lago Poopé. Antes y después.

- Tabla Resumen:

Tabla 4 Resumen de la dimensión fractal del lago Poopé.

Objeto natural	Dimensión Fractal B-C
Lago Poopé crecido	1,93688
Lago Poopé tiempo sequía	1,81232

Como se puede apreciar, existió un cambio en la posición en el espacio que ocupa el lago, lo que provocó que existiera una variación en la dimensión fractal del objeto lineal. Si se aproximan los valores quedarían 1,9 y 1,8; un punto decimal completo de diferencia.

3.3 ANÁLISIS DEL RÍO EBRO. RESULTADOS.

El Ebro es el río más caudaloso de España, segundo de la península ibérica después del Duero. Es, además, el más largo de España y también el segundo de la península, solo por detrás del Tajo. Discurre enteramente por España, donde ocupa la primera posición entre los ríos que nacen y desembocan netamente en el país, tanto por su longitud como por su caudal.

- El río Ebro en un día con caudal normal.



Figura 44 Río Ebro. Día con caudal normal.

En (Figura 44) se aprecia cómo en un día normal el río Ebro presenta un caudal no muy llamativo, es un río tranquilo que pasa por dentro de la ciudad de Zaragoza en España. Sin embargo, cuando comienza el deshielo de las montañas luego del invierno, el caudal del río aumenta de manera notable ocasionando cambios en su trayecto.

Después del procesamiento de la imagen para su uso el resultado fue el siguiente.

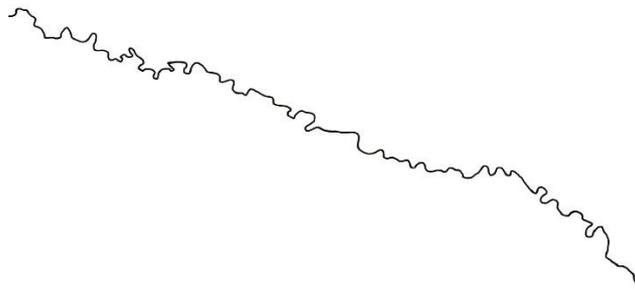


Figura 45 Resultado del procesamiento de imagen del río Ebro con caudal normal.

CAPÍTULO 3. RESULTADOS SOBRE EL PROCESO DE CÁLCULO DE LA DIMENSIÓN FRACTAL BOX-COUNTING EN OBJETOS NATURALES

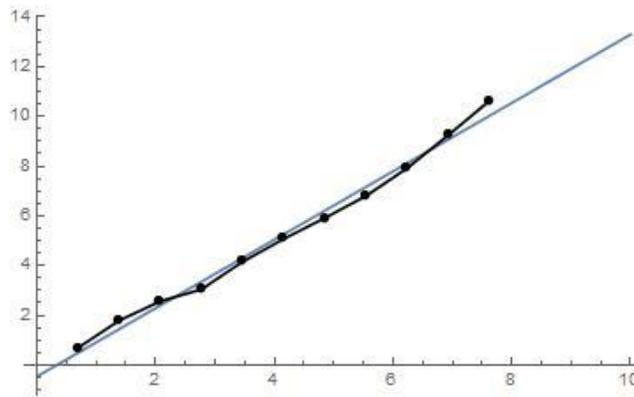


Figura 46 Gráfico log-log para (Figura 45).

Luego del uso del algoritmo Box-Counting y el análisis del gráfico anterior la dimensión fractal obtenida fue 1,37578.

- El río Ebro en 2015 luego de una gran crecida.



Figura 47 Gran crecida del río Ebro en 2015.

Luego del deshielo del invierno de 2015 se puede notar un gran cambio en el caudal del río lo que provocó grandes cambios en su trayectoria.

Luego del procesamiento de la imagen el resultado fue el siguiente:

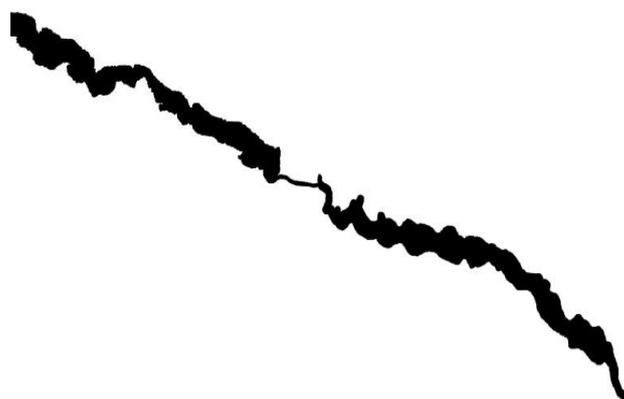


Figura 48 Resultado del procesamiento de imagen del río Ebro crecido.

CAPÍTULO 3. RESULTADOS SOBRE EL PROCESO DE CÁLCULO DE LA DIMENSIÓN FRACTAL BOX-COUNTING EN OBJETOS NATURALES

Al aplicar el algoritmo se obtiene:

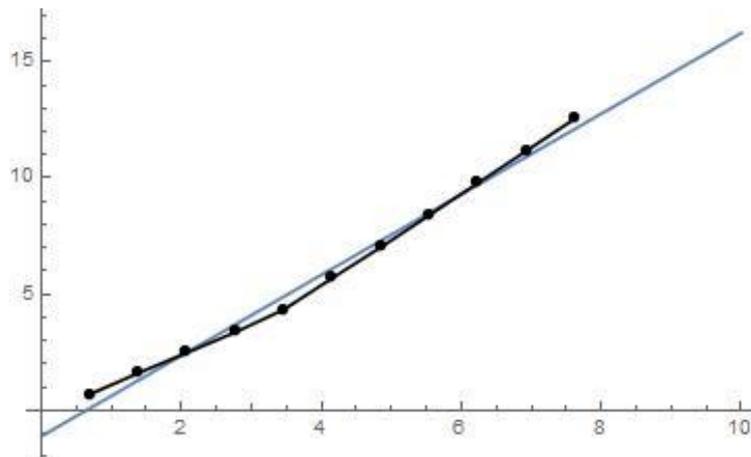


Figura 49 Gráfico log-log para (Figura 25).

De aquí la dimensión fractal es 1,73584.

Resumiendo, se realizaron las siguientes comparaciones para poder llegar a conclusiones:

- Imagen



Figura 50 Río Ebro. Antes y después de una gran crecida.

- Tabla Resumen:

**CAPÍTULO 3. RESULTADOS SOBRE EL PROCESO DE CÁLCULO
DE LA DIMENSIÓN FRACTAL BOX-COUNTING EN OBJETOS NATURALES**

Tabla 5 Resumen de la dimensión fractal del río Ebro.

Objeto Lineal	Dimensión Fractal B-C
Río Ebro crecido	1,73584
Río Ebro tiempo sequía	1,37578

Como se puede apreciar, a partir de las grandes variaciones ocurridas en el terreno debido al aumento del volumen de agua del río, dichos cambios se pueden apreciar en la dimensión fractal calculada, existiendo una diferencia superior a 0,3.

CONCLUSIONES PARCIALES

1. El índice calculado para estimar el valor de fractalidad para los diferentes objetos de estudio muestra el proceso de variación espacial y su relación numérica directa en correspondencia a la precisión del valor fractal calculado. Es por ello que se comentan los siguientes principios:
 - a. A pequeños cambios en el terreno de un objeto natural se aprecian pequeños cambios en el valor de la dimensión fractal del objeto.
 - b. A grandes cambios en el terreno de un objeto natural se aprecian grandes cambios en el valor de la dimensión fractal del objeto.

Conclusiones y recomendaciones

CONCLUSIONES

Al concluir con la investigación, se presentan una serie de conclusiones que resumen los principales aspectos contenidos en la memoria descriptiva, los cuales se enumeran a continuación:

1. El análisis bibliográfico realizado para definir los núcleos teóricos a partir de las diversas fuentes bibliográficas consultadas y compiladas por el autor, evidencian una correcta actualización del tema y acertada panorámica de las tendencias, líderes y cronologías en la que se ha desarrollado el campo en el cual versa la presente investigación.
2. Fueron evidenciados los principales métodos de análisis y cálculo de índices de fractalidad, principalmente aplicado a fenómenos en condiciones ideales y teóricas, donde se evidencia la carencia de estas aplicaciones a fenómenos naturales y con mayor contradicción a las implicaciones de la cartografía en el proceso de representar las variaciones espaciales de los objetos lineales y de superficie que fueron previamente seleccionados.
3. La selección del método Box-Counting resulta numéricamente adecuado para la geometría espacial y la fuerte variación espacio-temporal de los objetos de estudio, razón por la cual se opta utilizar este método en el proceso investigativo.
4. La utilización de diversas fuentes cartográficas y su comparación variación espacio-temporal a partir de los valores fractales indizados para su análisis espacial, se logra cuantificar numéricamente la magnitud en la que se manifiesta este cambio a pesar de poseer valores fractales inalterables o propios de identidad para cada objeto, manifestándose esta variabilidad numérica en precisiones superiores a 10^{-3} .

RECOMENDACIONES

Como posibles campos de desarrollo en los cuales se vislumbró potencialidad de implementación del método y los análisis utilizados en la presente investigación se recomiendan los siguientes aspectos:

1. Implementar el algoritmo con diferentes valores fractales indizados a otros niveles de precisión numérica para la detección y reconocimiento de patrones en los fenómenos y objetos de la naturaleza.
2. Vincular los índices fractales ante las fuertes variaciones espaciales de los objetos de estudio en la implementación de análisis de amenaza, vulnerabilidad y riesgo (AVR) ante eventos hidro-meteorológicos en el territorio nacional.

Bibliografía



BIBLIOGRAFÍA

Álvarez M, Gómez A. (2008). *Introducción y Principio de Funcionamiento de los SIG Taller especial sobre el uso del S.I.G./G.I.S en las Investigaciones Aplicadas*. Empresa Recursos Hidráulicos.

Alexander Torres, & Edisa Lozada. (s. f.). *Aplicación de fractales en la ingeniería ambiental*. Conjunto de Mandelbrot, 4.

Amir Al-Majdalawi Álvarez. (2006). *Fractales de la vida cotidiana*.

Ana García Domene. (2011). *Box Counting*.

Antonio Rodríguez Pascial, & Pedro Muñoz. (2002). *Sistemas de información geográfica*. Guatemala.

Arenas, G., Isaacs, R., Méndez, H., & Sabogal, S. (s. f.). *Sistemas dinámicos discretos y fractales*. Vínculos Matemáticos, 87.

Barnsley, M. F. (2000). *Fractals everywhere* (2. ed., [Nachdr.]). San Diego, Calif.: Morgan Kaufmann [u.a.].

Benoit B. Mandelbrot. (1982). *The Fractal Geometry of Nature*. (1ra Edición). New York: W. H. FREEMAN AND COMPANY.

Benoit B. Mandelbrot. (1998). *Selected works of Benoit B. Mandelbrot* (Vol. N). Springer.

Benoit B. Mandelbrot. (1999). *La Geometría Fractal de la Naturaleza* (4ta edición). España: Tusquets Editores S.A.

Bernard H Lavenda. (s. f.). *El Movimiento Browniano*.

Carlos Paredes Bartolomé. (1995). *Aplicación de la Geometría Fractal en la ciencia de la tierra* (Tesis Doctoral). Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Mina.

Dalda M, Cano M, González F, & Sánchez J. (2003). *IV Curso GPS para Geodesia y Cartografía*. Colombia: AECI.

Darío Domínguez Cajeli, Luis E Palacio Duque, Julia Sierra, Watson Vargas, & Antonio Mora. (1998). *Cálculo de la dimensión fractal en señales de origen caótico*. Revista de la facultad de Ingeniería, Universidad Militar Nueva Granada, 6.

David Antonio Arévalo. (2016, enero). *Análisis de la utilización de la dimensión fractal y multifractal para la clasificación del uso y la cobertura del suelo en una imagen de radar de apertura sintética SAR, en una zona urbana*. (PARA OPTAR POR EL TITULO DE: INGENIERO CATASTRAL Y GEODESTA). UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSE DE CALDAS, BOGOTA D.C.

de Spinadel, V. W., Jorge H. Perera, & Jorge G. Perera. (2005). *Geometría fractal* (2da edición). Buenos Aires: Nueva Librería.

- Dueñas R, & Álvarez M. (2010). *Teledetección y Sistemas de Información Geográfica para Ingenieros Agropecuarios y Mecanizadores* Apuntes para un Folleto-Texto (Primera Edición). Cuba: Samuel Feijó.
- Fabián Vitabar. (2010, diciembre). *Imágenes fractales con GeoGebra*. UNION, Numero 24, 16.
- Franco J. (2000). *Nociones de Topografía, Geodesia y Cartografía*. Barcelona.
- Gacel Iborra Rodríguez. (2017, junio). *Cálculo de la dimensión fractal de objetos 3D* (Tesis de Grado). Universidad de Alicante, Alicante, España.
- Gerardo G. Naumis. (2002). *Los fractales: una nueva geometría para describir el espacio geográfico*. (p. 28). Presentado en La reurbanización de la Ciudad de México, México.
- Greenwalt C, & Shultz M. (1962). *Principles of error theory and cartographic applications*.
- Gustavo D. Buzai. (2006). *Geografía y sistemas de información geográficos*. Universidad Nacional de Luján, 44.
- J. Grau, M.A. Flores, J. Massons, & J.M. Redondo. (2000). *Introducción al Cálculo de Dimensiones Fractales y su Posible Aplicación a los Estudios del Clima*. Tecnologías Geográficas para el Desarrollo Sostenible, 8.
- J. R. Busch, & S.C. Gabbanelli. (1998). *Cálculo de Índices Fractales y Multifractales: Límites y alcances*. Anales AFA, 10, 4.
- Javier Rodríguez, Signed Prieto, Liliana Ortiz, Carolina Wiesner, Martha Díaz, & Catalina Correa. (2006). *Descripción matemática con dimensiones fractales de células normales y con anormalidades citológicas de cuello uterino*. Rev. Cienc. Salud. Bogotá Colombia, 6.
- Joher, A. B., & Montoro, S. G. (s. f.). *Fractales en los mercados financieros*.
- José Manuel Gutiérrez. (1998). *Sistemas no lineales. Conceptos, algoritmos y aplicaciones*. (p. 28). Presentado en V CONFERENCIA NACIONAL DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN, Potosí.
- Juan Antonio Pérez Ortiz. (1998). *Codificación Fractal de Imágenes* (única, Vol. único). Alicante, España.
- Juan Antonio Pérez Ortiz. (2000). *Música fractal, el sonido del Caos.*, 47.
- Juan L. Varona. (2005). *Representación gráfica de fractales mediante un programa de cálculo simbólico*. La Gaceta, 17.
- Juan Manuel García Ruiz. (2009). *Fractales, que, por que, para qué. Una introducción al mundo de los fractales* (mayo, 2009). Parque de las Ciencias.
- Juan Navas Ureña, & José María Quesada Teruel. (1998). *Fractales: la frontera entre el arte y las matemáticas*. Universidad de Jaén.

Karen Castelblanco. (2015). *Álgebra de las Dimensiones Fractales* (Tesis de Grado). UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL, BOGOTÁ, COLOMBIA.

Kenneth Falconner. (1990). *Fractal Geometry. Mathematical foundations and applications*. New York, NY, USA: John Wiley and Sons Ltd.

Len, Q., & Osvaldo, A. (2006). *Fractales en el estudio de la psicología*. Tema del mes.

Luis Ulloa Meneses, Fausto Orozco Iguasnia, Jaime Orozco Iguasnia, Frankz, & Carrera Calderón. (2017). *Sistema de información geográfica para la integración de información Geo referenciada de entidades públicas y privadas en la ciudad de Santo Domingo*. Revista Científica y Tecnológica UPSE, IV, 15.

M. López-Martín, & P. Fraile-Jurado. (2011). *Análisis preliminar del cálculo de la dimensión fractal de diferentes tipos de costa en el litoral andaluz.*, 40.

Manuel Alfaro A, Manuel Murillo T., & Alberto Soto A. (2010). *Fractales* (1ra edición). Costa Rica: Revista Digital Matemática Educación e Internet.

Méndez J, & Rosales B. (2005). *Principios y aplicaciones de SIG y TE* Curso de Postgrado.

Michael Álvarez González, & Lamberto Moisés Álvarez Gil. (2016). *Índices bibliométricos, una herramienta para analizar el estado del arte en la investigación científica, caso: Cuba*. TLATEMOANI Revista Académica de Investigación, (No. 23 – diciembre 2016), 21.

José García Vivas Miranda. (2001). *SOILH: Un programa para el cálculo de la dimensión fractal del relieve.*, 29.

Pablo Montesdeoca Pérez. (2005). *Longitud y Área de Curvas Fractales*. Dimensión Fractal, 15.

Pellicer J. (1980). *Cartografía* (Primera edición). Cuba: Pueblo y Educación.

Ramos A. (2001). *Los Sistemas de Información Geográfica (SIG) Cartografía*. Presentado en Cátedra de Geografía y Geodesia, Cuba.

Raúl Rodríguez Miranda. (1995, agosto). *La Teoría de Fractales: Aplicación experimental e implicaciones en la metodología de la ciencia*. Universidad autónoma de Nuevo Leon, Monterrey, NL, México.

Ricardo Dueñas Garcías, & Michael Álvarez González. (2010). *Apuntes para un Libro de Texto de Teledetección y Sistemas de Información Geográfica*. Santa Clara Cuba.

Rivera Henao, Eduard; & Lopez Varona, Ricardo. (2011). *Geometría fractal y transformada de Fourier*. (Vol. XVI). Colombia: Scientia ET Technica.

Robert Ramírez-Hernández, Alina Rodríguez-Infante, & Alexis Ordaz-Hernández. (2017). *Dimensión fractal de redes de drenaje controladas estructuralmente en cuencas hidrográficas de Pinar del Río, Cuba*. Minería y Geología, 14.

Rodolfo Camacho Velázquez, & Mario Vásquez Cruz. (2015, diciembre). *Geometría fractal, Teoría del caos, y sus aplicaciones en la Industria Petrolera*, Volumen 55 No. 12, 12.

Rodolfo Fantes. (2003). *Material, métodos y conceptos teóricos. Análisis fractal y multifractal*.

Rubén Germán Almanza Rodríguez, Ramsés Jiménez Castañeda, & Elifalet López González. (2011). *Dinámica fractal en modelos de economía* (Primera Edición). Ciudad Juárez, Chihuahua, México: Dirección General de Difusión Cultural y Divulgación Científica.

Rufino Iturriaga, & Carina Jovanovich. (2012). *Geometría Fractal: Organización y mercados*. TRIM, 5, 15.

Rufino Iturriaga, & Carina Jovanovich. (2014). *Fractales, economía y empresas*. UNNE, Resistencia, Argentina, 19.

Salitchev K. (1979). *Cartografía* (Primera edición). Pueblo y Educación.

Sonia Sabogal, & Gilberto Arenas. (2011). *Una introducción a la geometría fractal*. Universidad Industrial de Santander Bucaramanga.

Valdés Vásquez, Patricio Alejandro. (2016). *Introducción a la Geometría Fractal*. Chile: Universidad del Bío-Bío. Sistema de Bibliotecas – Chile.

Vera W. de Spinadel. (2002, julio). *Geometría Fractal y Geometría Euclidiana*. REVISTA EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA, Volumen XV No. 35, 10.

Vivas Miranda J. García, Chomiczak S., & Paz González A. (199d. C.). *Teoría fractal y efecto de cambio de escala: aplicación al estudio de la porosidad del suelo* (p. 21).