

# *UNIVERSIDAD CENTRAL DE LAS VILLAS*



## *“Sistemas dinámicos y modelos de energía oscura quintasma”*

*TESIS PRESENTADA EN OPCIÓN AL TÍTULO ACADÉMICO DE MASTER EN  
MATEMÁTICA APLICADA*

**Autor: Lic. Genly León Torres**  
Departamento de Matemática  
Universidad Central de Las Villas

**Tutor: Dr. Rolando Cárdenas Ortiz**  
Departamento de Física  
Universidad Central de Las Villas

**Tutora: Dra. Ruth Lazkoz Sáez**  
Departamento de Física Teórica e Historia de la Ciencia  
Universidad del País Vasco

**2008**

## ***A mis padres.***

*“Los hombres son como los astros, que unos dan luz de sí y otros brillan con la que reciben.”*

José Martí,  
Político, periodista, filósofo y poeta cubano.

*“I consider that I understand an equation when I can predict the properties of its solutions, without actually solving it.”*

Paul Adrien Maurice Dirac,  
Físico inglés pionero en la física cuántica de la Universidad de Cambridge.

## ***Agradecimientos***

*A mi familia por el cariño brindado en todo momento.*

*A mi tutora, Ruth, por confiar en mí, y a mi tutor Rolando por aceptarme como estudiante suyo.*

*A ambos por conducirme por los caminos de la Ciencia.*

*A la dirección de mi Departamento por la confianza y el apoyo durante mi Carrera y después, durante mi breve vida profesional. La ayuda de ellos ha sido fundamental en mi formación. Así también, a los coordinadores de la Maestría en Matemática Aplicada del Departamento de Matemática de la Universidad Central “Marta Abreu” de las Villas por la acogida de este trabajo.*

*A la dirección del Departamento de Física Teórica e Historia de la Ciencia por su hospitalidad y apoyo financiero durante la terminación de parte de este trabajo.*

*A aquellos que nunca me abandonaron.*

*A los demás, gracias por ayudarme a mejorar científica, profesional y personalmente.*

## Abreviaturas usadas en la tesis

En la tesis usaremos las siguientes abreviaturas

Abreviatura	Significado
AdS	Anti-de Sitter
CC	Constante Cosmológica
CEND	Condición de Energía Nula Dominante (del inglés)
CESM	Campo Escalar Sin Masa
CMB	Radiación del Fondo Cósmico de Microondas (del inglés)
DGP	Dvali-Gabadadze-Porrati
EDO	Ecuación Diferencial Ordinaria
EDP	Ecuación Diferencial en Derivadas Parciales
EO	Energía Oscura
FL	Friedmann-Lemaître
FLRW	Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker
FRW	Friedmann-Robertson-Walker
ΛCDM	Modelo con Constante Cosmológica y Materia Oscura Fría (del inglés)
LSS	Estructuras en la Amplia Escala (del inglés)
MO	Materia Oscura
RSII	Randall-Sundrum tipo II
RW	Robertson-Walker
SNIa	Supernovas tipo Ia (del inglés)
TGR	Teoría General de la Relatividad
WIMP	Partícula Masiva de Interacción Débil (del inglés)
WMAP	Wilkinson Microwave Anisotropy Probe

Tabla 1: Abreviaturas

# Índice General

<b>Síntesis</b>	<b>1</b>
<b>Introducción</b>	<b>2</b>
Herramientas matemáticas de uso general en Cosmología Teórica . . . . .	3
Preguntas de investigación . . . . .	6
Objetivos de la presente tesis . . . . .	6
Objetivos específicos . . . . .	6
Novedad Científica . . . . .	7
Estado del arte del problema del cruce de la barrera fantasma . . . . .	8
Estructura de la tesis . . . . .	11
<b>1 Cosmología Moderna</b>	<b>13</b>
1.1 Teoría general de la Relatividad . . . . .	13
1.1.1 Coordenadas curvilíneas . . . . .	17
1.1.2 La ecuación geodésica . . . . .	18
1.1.3 Ecuaciones de Einstein en bases coordenadas . . . . .	21
1.1.4 Los modelos cosmológicos . . . . .	22
1.1.4.1 La estructura de las ecuaciones de campo . . . . .	25
1.1.4.2 Determinación y no linealidad. . . . .	26
1.2 Fundamentos de la cosmología . . . . .	27
1.2.1 Homogeneidad e isotropía: La métrica Robertson-Walker . . . . .	27
1.2.2 El Universo en expansión . . . . .	30
1.2.3 Composición del Universo . . . . .	33

1.2.4	Dinámica: Las ecuaciones de Friedmann . . . . .	34
1.2.5	Universos planos . . . . .	38
1.2.6	Incluyendo curvatura . . . . .	38
1.2.7	Geometría, Destino y Energía Oscura . . . . .	40
1.2.8	Los Campos Escalares y la Energía Oscura . . . . .	41
1.3	Resumen de resultados: fundamentos de cosmología . . . . .	43
<b>2</b>	<b>Sistemas dinámicos en cosmología</b>	<b>46</b>
2.1	Comportamiento local en las cercanías de los puntos críticos . . . . .	47
2.1.1	Comportamiento local en la cercanía de un atractor no lineal . . . . .	49
2.2	Comportamiento Asintótico y Conjuntos Límite . . . . .	51
2.2.1	Conjuntos invariantes . . . . .	52
2.2.2	Caracterización de los subespacios y variedades invariantes . . . . .	53
2.2.3	Puntos críticos no aislados . . . . .	55
2.2.4	Comportamiento asintótico en más de dos dimensiones . . . . .	55
2.3	Comportamiento intermedio . . . . .	56
2.4	Resumen de aspectos técnicos y/o herramientas más usadas en el análisis cualitativo de una cosmología concreta . . . . .	57
<b>3</b>	<b>Cosmología quintasma: potenciales exponenciales</b>	<b>60</b>
3.1	El modelo físico . . . . .	60
3.1.1	¿Es el signo del factor de Hubble invariante? . . . . .	61
3.2	Modelos con curvatura negativa . . . . .	62
3.2.1	Normalización y espacio de estados . . . . .	62
3.2.2	Sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer grado . . . . .	62
3.2.3	Invarianza ante transformaciones de coordenadas . . . . .	63
3.2.4	Funciones monótonas . . . . .	64
3.2.5	Análisis de la estabilidad local de los puntos críticos. . . . .	64
3.2.6	Bifurcaciones . . . . .	66
3.2.7	Comportamiento típico . . . . .	66
3.3	Caso Friedmann-Robertson-Walker plano . . . . .	67

3.3.1	El modelo físico . . . . .	67
3.3.2	Normalización y espacio de estados . . . . .	68
3.3.3	Sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer grado . . . . .	68
3.3.4	Conjuntos invariantes y funciones monótonas . . . . .	69
3.3.5	Análisis de estabilidad local de los puntos críticos. . . . .	70
3.3.6	Secuencias heteroclínicas . . . . .	73
3.3.7	Consecuencias cosmológicas: cruce de la barrera fantasma . . . . .	73
3.4	Modelos con curvatura positiva ( $k=+1$ ) . . . . .	74
3.4.1	Normalización y espacio de estados . . . . .	74
3.4.2	Sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer grado . . . . .	75
3.4.3	Invarianza ante transformaciones de coordenadas . . . . .	76
3.4.4	Conjuntos invariantes y funciones monótonas . . . . .	76
3.4.5	Análisis de estabilidad local de los puntos críticos. . . . .	77
3.4.6	Bifurcaciones . . . . .	78
3.4.7	Comportamiento típico . . . . .	79
3.5	Conclusiones parciales . . . . .	79
<b>4</b>	<b>Cosmología quintasma: potenciales arbitrarios</b>	<b>82</b>
4.1	Motivación del estudio de cosmologías quintasma con potenciales arbitrarios . . . . .	83
4.2	El modelo . . . . .	84
4.3	Espacio de Fase . . . . .	85
4.3.1	Soluciones dominadas por materia . . . . .	87
4.3.2	Soluciones de Sitter . . . . .	87
4.3.3	Comportamiento dinámico de los puntos críticos en $\Psi$ asociados a la fase de de Sitter . . . . .	88
4.3.4	Ejemplo: potencial de inflación híbrida . . . . .	89
4.4	Puntos críticos en $(\phi, \varphi)$ infinito . . . . .	89
4.5	Conclusiones parciales . . . . .	94
	<b>Conclusiones</b>	<b>95</b>

<b>Recomendaciones</b>	<b>97</b>
<b>A Historia térmica del Universo</b>	<b>109</b>
A.1 Densidad de energía y presión de un fluido perfecto isotrópico como función de la Temperatura. Entropía . . . . .	109
A.2 Distribución térmica y espectro de cuerpo negro . . . . .	111
A.3 Propiedades del fondo cósmico de microondas . . . . .	112
A.4 Historia térmica del Universo . . . . .	113
<b>B Gráficos y figuras</b>	<b>117</b>
<b>C Tablas</b>	<b>125</b>

# Índice de Figuras

B.1	En (a) se presentan las mediciones originales de Hubble en 1929, la medición original de $H_0$ arrojó el valor de $500 \text{ km sec}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ . En (b) se presenta el Diagrama de Hubble obtenido por el Proyecto Hubble Space Telescope Key Project ([3]) usando 5 diferentes medidas de distancia. El panel inferior muestra $H_0$ vs distancia con la línea horizontal igual al valor de mejor ajuste de $72 \text{ km sec}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ . . . . .	118
B.2	Izquierda: el satélite WMAP lanzado en el 2001; Derecha: Mapa del CMB obtenido por WMAP a 94 GHz . . . . .	119
B.3	Contornos de confianza en el plano $(\Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda,0})$ obtenidos a partir SNIa. . . . .	120
B.4	En (a), imagen de la galaxia espiral M33. La región interior más brillante tiene un radio de varios $kp$ ; en (b), curvas de rotación de M33 [126]. . . . .	120
B.5	En (a), modelo 2D de Universo isotrópico y homogéneo en expansión; en (b) modelo 3D del Universo en expansión desde la singularidad inicial. . . . .	121
B.6	Trayectorias en el espacio de fases para el modelo quintasma con $m = 0.5$ y $n = 0.6$ . . . . .	121
B.7	Trayectorias en el espacio de fases para el modelo quintasma con $m = 0.75$ y $n = 0.05$ . . . . .	121
B.8	Trayectorias en el espacio de fases para el modelo quintasma con $m = 0.9$ y $n = 0.4$ . . . . .	121
B.9	Trayectorias en el espacio de fases para el modelo quintasma con $m = 2$ y $n = 0.5$ . . . . .	121
B.10	Regiones en el plano $(n, m)$ representando los cuatro casos referidos a las condiciones de existencia y el carácter dinámico de los puntos críticos $T$ y $P$ . . . . .	122
B.11	Comportamiento típico de las densidades de energía fraccionales en el caso en el que el atractor fantasma existe. Las líneas gris oscura y gris clara se refieren a $\Omega_m$ y $\Omega_{de}$ respectivamente. . . . .	122
B.12	El colapso en cosmología quintasma con curvatura positiva. . . . .	123

B.13 Proyecciones sobre el hiperboloide de algunas órbitas en espacio de fase  $\Psi$  para diferentes valores de  $M$ ,  $m$ ,  $g$ , y  $\lambda$ :  $M = 4$ ,  $m = 3$ ,  $g = 2$ ,  $\lambda = 2$  (a);  $M = 2$ ,  $m = 1.5$ ,  $g = 2$ ,  $\lambda = 1.3$  (b) y  $M = 4$ ,  $m = 5$ ,  $g = 2$ , y  $\lambda = 3.5$  (c). El punto  $dS$  representa el atractor de de Sitter. Todas las órbitas representadas se obtuvieron fijando los valores iniciales de los campos escalares a:  $\phi(\tau = 0) = 0.20$  y  $\varphi(\tau = 0) = 0.19$ . . . . . 124

# Índice de Tablas

1	Abreviaturas . . . . .	ii
C.1	Resumen del comportamiento de las fuentes más importante de energía en Cosmología.	126
C.2	Modelos para la EO basados en campos escalares . . . . .	126
C.3	Puntos críticos del sistema 3.2.13. . . . .	126
C.4	Parámetros cosmológicos asociados a los puntos críticos del sistema 3.2.13. . . . .	127
C.5	Resumen de atractores del sistema sistema 3.2.13 para $1 \leq \gamma \leq 2$ . . . . .	127
C.6	Resumen de atractores del sistema 3.2.13 para $0 \leq \gamma \leq 2$ . . . . .	127
C.7	Localización, existencia y factor de desaceleración de los puntos críticos del sistema 3.3.25, para $m > 0$ , $n > 0$ y $y > 0$ . . . . .	128
C.8	Valores propios, carácter dinámico y ecuación del parámetro de estado del sistema 3.3.25, con $m > 0$ y $n > 0$ . . . . .	128
C.9	Puntos críticos del sistema 3.4.37. . . . .	128
C.10	Resumen de los atractores del sistema 3.4.37. . . . .	129
C.11	Hitos importantes en la evolución del Universo. . . . .	129

# Síntesis

Se investiga, desde el punto de vista cualitativo, un modelo relativista de energía oscura (EO) con dos campos escalares interactuando a través de un potencial (exponencial y arbitrario no exponencial) que hace cruce de la barrera fantasma, llamado cosmología quintasma. Con este propósito, se construyen cuatro sistemas dinámicos describiendo: i) la dinámica de los modelos cosmológicos Friedmann-Roberson Walker (FRW) con curvatura negativa que se expanden por siempre provistos de fluido perfecto con ecuación de estado  $p = (\gamma - 1)\rho$ ,  $1 \leq \gamma \leq 2$  y campo de energía quintasma con potencial exponencial; ii) la dinámica de los modelos cosmológicos FRW con curvatura negativa en contracción con igual contenido de materia; iii) la dinámica de los modelos cosmológicos FRW planos en expansión, provistos de fluido perfecto con ecuación de estado  $p = 0$  (polvo) y campo de energía quintasma con potencial exponencial; y iv) la dinámica de los modelos cosmológicos Friedmann-Roberson Walker (FRW) con curvatura positiva provistos de fluido perfecto con ecuación de estado  $p = (\gamma - 1)\rho$ ,  $\frac{2}{3} \leq \gamma \leq 2$  y campo de energía quintasma con potencial exponencial. Luego se estudian modelos con potenciales arbitrarios, diseñando dos sistemas dinámicos adaptados, respectivamente, a la region donde los campos escales son finitos y a la región donde ambos divergen. En cada caso se extienden resultados previos y se obtienen resultados novedosos. Por ejemplo, los atractores del futuro en i) son típicamente dominados por curvatura y en ausencia de estos, dominados por energía oscura; en ii) el comportamiento típico es el reverso temporal de i); en iii) el atractor del futuro típico es de tipo escalante por materia, y en ausencia de estos, es dominado por energía oscura; en el modelo iv) tenemos la existencia de soluciones comenzando en y terminando en una singularidad caracterizada por una cosmología con campo escalar sin masa; así como soluciones comenzando en un big-bang y terminando en un big-crunch. El estudio para modelos con potenciales arbitrarios indica que la existencia de atractores fantasmas no es genérica, sino que, pueden existir bien atractores de Sitter asociados con los puntos de ensilladura de potencial (en la región donde los dos campos son finitos), o, atractores escalantes (y otros comportamientos) en la región donde ambos campos divergen.

# Introducción

El desarrollo de varias áreas de la Matemática ha dejado una huella importante en el desarrollo de la Cosmología Teórica. Particularmente, la matemática subyacente en el análisis estadístico de los datos provenientes de numerosas fuentes: Supernovas I a (SNIa, sus siglas en inglés), formación de Estructuras en la Amplia Escala (LSS, sus siglas en inglés) y de la radiación <sup>1</sup> del Fondo Cósmico de Microondas (CMB, sus siglas en inglés; ver en el anexo A.3 algunas propiedades del CMB) [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10] combinado con la interpretación física de esas observaciones, ha propiciado una revolución en la Cosmología: el universo actual parece sufrir una fase de expansión acelerada y la explicación teórica de este fenómeno debe ser en última instancia provista.

Una de las explicaciones más populares a la aceleración observada es la existencia de una componente desconocida del contenido material del universo nombrada genéricamente: energía oscura (EO).

El tema de la EO es uno de los tópicos modernos más debatidos en la era de la Cosmología de Precisión, siendo la llamada Constante Cosmológica (CC) la más económica y sensiblemente discutible solución. Sin embargo, en este modelo sufre del bien conocido problema de la constante cosmológica, de acuerdo al cual existe una todavía inexplicada diferencia de orden de magnitud (de cerca de 120 órdenes) entre el valor cosmológicamente observado y el valor teórico obtenido de la Teoría de Campos. Por tanto, han sido propuestos modelos alternativos: quintaesencia, energía “fantasma”, campos de taquiones, gas de Chaplign y, recientemente, la energía oscura “quintasma” (de los términos QUINTaesencia y fanTASMA, por los tipos de campos que la componen) (revisar en las referencias [11, 12] la diversidad de modelos propuestos para la aceleración actual). Estas propuestas tienen sus propias deficiencias teóricas (lo que señala que la Física Teórica actual sufre un período de crisis), sin embargo sobre ellas se tiene un interés elevado, vistas como elementos para la construcción de modelos los cuáles podrían ayudar a descifrar muchos aspectos sobre la naturaleza de la Energía Oscura que permanecen siendo un enigma.

Idealmente, en los próximos decenios contaremos con argumentos más poderosos que nos permitan

---

<sup>1</sup>En el Apéndice A.2 se discute la física de la radiación.

acercarnos a un eventual desentrañamiento de los misterios más oscuros que la historia cósmica nos ha ido legando: la Materia Oscura y la Energía Oscura, las cuales son componentes de la densidad de energía del Universo que aún nos resultan parcialmente incomprensibles pero que dejan sentir sus efectos en la geometría del espacio-tiempo.

## Herramientas matemáticas de uso general en Cosmología Teórica

Por una gran variedad de razones, es deseable analizar la evolución de diferentes clases de modelos. Este problema primario ha conducido a los investigadores a aplicar la teoría de los sistemas dinámicos a la Cosmología Teórica.

En la literatura se pueden encontrar innumerables trabajos que explotan la fortaleza de la teoría de los sistemas dinámicos a la hora de dar una descripción cualitativa de modelos cosmológicos. En estos estudios, usualmente se introduce una variable temporal,  $\tau$  adimensional (logarítmica) para que los modelos sean válidos en todo el rango temporal (o sea,  $\tau$  se construye de tal manera que puede tomar todos los valores reales). Además se requiere introducir un conjunto de variables normalizadas entre otras razones porque normalmente conducen a un sistema dinámico compacto, son bien definidas y tienen una interpretación física directa y principalmente porque dada una simetría en las ecuaciones, una de ellas se desacopla del resto (en la Teoría General de la Relatividad (TGR) la expansión es utilizada para normalizar las variables en los modelos que se expanden eternamente, desacoplándose la ecuación de Raychaudhuri) y el sistema simplificado resultante es entonces estudiado.

De modo más preciso, usando la nueva variable temporal adimensional y un conjunto de variables normalizadas, las ecuaciones diferenciales que rigen la evolución del modelo cosmológico bajo estudio definen un flujo (éste es el caso si el sistema es autónomo) y las ecuaciones cosmológicas pueden ser analizadas mediante el estudio de las órbitas de dicho flujo en el espacio de estados físico el cual es un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ . Cuando el espacio de estados es compacto, cada órbita tendrá asociado un conjunto  $\alpha$  y  $\omega$ -límite no vacíos, así existirán atractores tanto del pasado como del futuro [13, 14, 15].

La conveniencia de considerar variables normalizadas en lugar de usar las mismas variables físicas radica en que, típicamente, en la vecindad de una singularidad inicial hipotética las variables físicas divergen, mientras que en tiempos recientes, ellas comúnmente tienden a cero [15].

Debido a consideraciones físicas, la normalización con el factor de Hubble es, en la mayoría de los casos, una selección apropiada. Además, se tiene bastante evidencia matemática que sugiere que las variables normalizadas con el factor de Hubble son acotadas hacia el pasado (esto es, cuando nos acercamos a la singularidad inicial), y si existe una constante cosmológica (o algo que la mimetice)

estas variables pueden ser acotadas hacia el futuro. Sin embargo, aún en el caso en que el espacio de las fases no sea acotado, es sensible esperar que las ecuaciones de evolución puedan admitir conjuntos  $\alpha$  y  $\omega$ -límite.

A modo de resumen, enumeraremos las diferentes perspectivas desde las cuales han sido examinados los modelos cosmológicos:

1. *Métodos topológicos.* Por esto entendemos el análisis global que conduce a teoremas sobre singularidades [16]. Estos teoremas establecen que, sujeto a condiciones muy generales las cuales parecen satisfacerse en el universo físico, un modelo cosmológico comienza en una singularidad en el espacio-tiempo (la cual representa una ruptura de la física clásica). Estos resultados no dependen de ninguna simetría ni de ninguna otra hipótesis simplificadora acerca de la geometría, ni de ningún análisis detallado de las ecuaciones del campo; sino que ellos se obtienen a partir de desigualdades geométrica y físicamente motivadas, en conjunto con un análisis cuidadoso de las propiedades de varias regiones causales en el espacio-tiempo y sus fronteras, basadas en propiedades genéricas de ecuaciones claves (específicamente la ecuación de Raychaudhuri y las ecuaciones de conservación).
2. *Métodos cualitativos.* Por esto entendemos los métodos para analizar las ecuaciones de Einstein del campo con vistas a deducir el comportamiento evolutivo de clases generales de modelos cosmológicos. El grueso de resultados hasta la fecha concierne a modelos espacialmente homogéneos. Han sido utilizados tres acercamientos diferentes:
  - (i) métodos de aproximación por partes,
  - (ii) métodos hamiltonianos,
  - (iii) métodos de sistemas dinámicos.

En el primer acercamiento, la evolución de un modelo cosmológico en el tiempo es aproximada mediante una sucesión de periodos durante los cuales ciertos términos en las ecuaciones del campo se desprecian, conduciendo a un sistema de ecuaciones más simple. Este acercamiento heurístico puede ser fundamentado sólidamente en las llamadas secuencias heteroclínicas en el acercamiento desde la perspectiva de los sistemas dinámicos.

El segundo acercamiento consiste en que las ecuaciones de Einstein son reducidas a un sistema hamiltoniano dependiente del tiempo para una partícula (universo puntual) en dos dimensiones. El sistema es analizado heurísticamente aproximando los potenciales dependientes del tiempo moviendo “paredes de dominio”, las cuales se asumen que reflejan la partícula en movimiento

instantáneamente. Este acercamiento ha sido utilizado principalmente para analizar la dinámica en las proximidades del Big-Bang.

El tercer acercamiento se basa en el hecho de que las ecuaciones de Einstein del campo para cosmologías espacialmente homogéneas se puede escribir como un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales de primer orden. Las curvas soluciones particionan  $\mathbb{R}^n$  en órbitas, las cuales a su vez definen un sistema dinámico en  $\mathbb{R}^n$ . Este acercamiento es el que utilizaremos en esta tesis.

3. *Métodos numéricos.* Con el desarrollo de las computadoras, los métodos numéricos han sido utilizados para investigar varios aspectos de la evolución de cosmologías, en especial de las inhomogéneas, con énfasis en el caso de un grado de libertad espacial (ecuaciones diferenciales parciales con una variable temporal y una espacial). Estos métodos son muy importantes en relación con los métodos de sistemas dinámicos, porque ellos permiten explorar el espacio de estados en situaciones en las cuales los métodos analíticos y las técnicas cualitativas no pueden implementarse totalmente. En esta tesis nos valdremos modestamente de estos métodos para obtener información inaccesible para las técnicas analíticas en todos los modelos que estudiaremos.
4. *Métodos perturbativos.* Los métodos de este tipo han sido, en general, usados para estudiar las perturbaciones de modelos Friedmann-Lemaître (FL) en conexión con el crecimiento de las perturbaciones de densidad. La teoría de las perturbaciones por otra parte permite estudiar modelos inhomogéneos mediante la reducción de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDP) a ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Desde la perspectiva de los sistemas dinámicos el método permite explorar el espacio de estados infinito-dimensional asociado con las EDP mediante la investigación del espacio de estados finito-dimensional asociado a la EDO aproximante.
5. *Soluciones exactas.* Sólo se puede esperar encontrar soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein del campo mediante la imposición de restricciones fuertes sobre la geometría del espacio-tiempo, en primer lugar suponiendo la existencia de simetrías, o imponiendo restricciones al tensor de Weyl u otras cantidades cinemáticas. A pesar de las propiedades especiales inherentes a su propia existencia, las soluciones exactas pueden jugar (casi siempre) un papel importante en la evolución de clases completas de modelos, actuando como estados asintóticos o intermedios en muchos espacios de fases.

## Preguntas de investigación

Aunque existe un amplio consenso sobre el comportamiento dinámico de la EO, un aspecto crucial del parámetro de la ecuación de estado ( $w = \text{densidad/presión}$ ) está aún bajo debate:

1. *¿Se ha transformado la energía oscura en energía fantasma, recientemente?*
2. Si este es el caso, *¿como podemos modelar dicha transición?* en otras palabras, *¿es posible modelar el cruce reciente de la barrera fantasma?* <sup>2</sup>

Para responder afirmativamente a estas preguntas de investigación presentaremos en esta tesis un modelo cosmológico en el que, para una selección apropiada de las constantes libres del potencial, la parámetro de la ecuación de estado,  $w$ , de la EO evoluciona en forma continua desde valores mayores a  $-1$  hasta (recientemente) valores menores que  $-1$  ocurriendo así el cruce la barrera fantasma.

## Objetivos de la presente tesis

En esta tesis nos hemos trazado como objetivos generales:

1. Proveer al investigador de herramientas de la Teoría de los Sistemas Dinámicos útiles para el estudio cualitativo de modelos cosmológicos. Estas herramientas son muy generales y de aplicación en otras áreas del conocimiento.
2. Aplicar conjuntamente técnicas cualitativas (de la Teoría de los Sistemas Dinámicos) y el uso de integradores numéricos para ecuaciones diferenciales para caracterizar el espacio de fase de modelos cosmológicos concretos con el propósito de esbozar conclusiones generales sobre los modelos objeto de estudio de esta tesis. Estas conclusiones nos permitirán inferir el comportamiento típico de nuestro Universo complementando la información que se obtiene a partir de las observaciones.

## Objetivos específicos

- i) Modelar el cruce de la barrera fantasma mediante un modelo relativista de energía oscura (EO) con dos campos escalares interactuando a través de un potencial exponencial. Investigar el papel de la curvatura espacial en la evolución de las cosmologías quintasma con potenciales

---

<sup>2</sup>El parámetro de la ecuación de estado de la EO tipo fantasma,  $w$ , es menor que  $-1$ , este último valor es el que corresponde la llamada constante cosmológica. Nos referiremos al valor  $w_{EO} = -1$  como la frontera fantasma.

exponenciales y la dinámica de los modelos tanto en contracción como la de los modelos que se expanden eternamente. Particularmente, investigar condiciones para la existencia de fases escalantes y fase de de Sitter en modelos con curvatura cero que se expanden por siempre.

- ii) Probar que la existencia de atractores fantasmas no es genérica en los modelos de EO con dos campos escalares: para potenciales generales pueden existir atractores de de Sitter en los puntos de ensilladura del potencial y atractores escalantes en el límite donde ambos campos escalares divergen.

## Novedad Científica

En esta tesis hemos obtenido varios resultados novedosos los cuales resumimos en lo siguiente. Hemos hallado que, para modelos con curvatura negativa en expansión (contracción), el atractor del futuro (del pasado) es la solución cosmológica dominada por curvatura. Bajo las condiciones que excluyen la existencia de estos atractores, los estados asintóticos (hacia el pasado y hacia el futuro) corresponde a soluciones dominadas por la EO. Que pueden ser soluciones fantasmas ( $w < -1$ ) o soluciones de de Sitter ( $w = -1$ ), o soluciones de quintaesencia. Esto representa una diferencia en relación con la situación en [17]. Debemos señalar, sin embargo, que si la solución escalante por materia existe, es el atractor del sistema para valores de  $\gamma$  en el intervalo  $0 < \gamma < 2/3$  (con esta restricción se excluye la posibilidad de que la solución dominada por curvatura sea el atractor del sistema). Mimetizando una componente adicional de EO. Para modelos en contracción el atractor del sistema corresponde a una cosmología de campo escalar sin masa (CESM). Hacia el pasado la situación típica es el reverso de la antes descrita. En el caso de los modelos con curvatura positiva: hemos extendido a nuestro contexto, resultados reportados en [18] sección VI.A tales como la existencia de órbitas comenzando desde y recolapsando a una singularidad (correspondiendo a cosmologías con campo escalar sin masa). También verificamos la existencia de soluciones Friedmann-Roberson-Walker (FRW) cerradas (curvatura positiva) comenzando desde una singularidad inicial (“big-bang” o gran explosión) y recolapsando hacia una singularidad de “big-crunch” (el reverso temporal de la singularidad inicial). Adicionalmente hemos diseñado algunas (nuevas) funciones monótonas las cuales garantizan la existencia de atractores globales, además de que nos permiten descartar órbitas periódicas, órbitas homoclínicas u órbitas recurrentes, lo que nos permite reforzar nuestra conjetura en [17] que establece que *la dinámica en el espacio de fases de las cosmologías quintasma está dominada por puntos críticos y órbitas heteroclínicas que los unen*.

Cuando nos restringimos al caso de los modelos FRW planos (curvatura cero) en expansión eterna, encontramos como resultado novedoso que la hipótesis en Zhang et al. [19], que plantea que *en*

*ausencia de interacciones, la solución dominada por el campo fantasma es el atractor del sistema y la interacción no afecta el comportamiento atractor de la fase dominada por el campo fantasma*, es correcta solo en los casos en que la existencia de la fase fantasma excluye la existencia de atractores escalantes (en los cuales las densidades de energía del campo quintasma y la materia oscura fría son proporcionales). La importancia de las soluciones escalantes reside en que sus efectos dinámicos mimetizan una constante cosmológica que se diluye con el tiempo. Tales soluciones pueden carecer de algunos de los problemas de ajuste fino que sufre la constante cosmológica precisamente por la independencia de las condiciones iniciales.

También, en esta tesis, hemos desarrollado una metodología para investigar modelos de energía quintasma con potenciales arbitrarios y curvatura cero. Usando esta metodología hemos obtenido condiciones generales para el potencial las cuales conducen a regímenes de de Sitter y escalante, lo cual es importante en relación con el destino final del Universo.

## Estado del arte del problema del cruce de la barrera fantasma

En esta sección haremos una breve reseña sobre el estado del arte del problema del *cruce de la barrera fantasma*, o sea, la posibilidad de que la parámetro de la ecuación de estado de la EO pueda cruzar continuamente por el valor  $w = -1$  (parámetro de la ecuación de estado de la CC).

En muchos de los análisis la mayor coincidencia con los datos observacionales es provista por los modelos los cuales, cuando el tiempo transcurre, la parámetro de la ecuación de estado de la EO  $w = p/\rho$  cruza la frontera  $w = -1$  (para hacerse aún más negativo). Sin embargo, dentro de los datos más recientes sobre SNIa, algunos sugieren la conveniencia de que el cruce sea solo una ilusión debido a los errores sistemáticos en las observaciones [20], mientras que otros concluyen que todas las clases de modelos de EO son válidos dentro del rango de observaciones [21]. Así, no existe un consenso completo sobre la preferencia del cruce de la barrera fantasma y, para añadir al problema, los resultados tienen una dependencia fuerte de la parametrización seleccionada para  $w$  en términos de corrimiento al rojo ( $w(z)$ ) [22].

Si la EO fuera de tipo fantasma (la EO fantasma tiene parámetro de ecuación de estado,  $w$ , menor  $-1$ ) en tiempos recientes, entonces, típicamente, nuestro universo (si estuviera siempre en expansión) puede evolucionar hacia una singularidad en el futuro cercano, caracterizada por las divergencias del factor de escala, el escalar de expansión de Hubble y su derivada temporal. Este es el caso si la densidad fraccional de energía dominante fuera de tipo fantasma.

Si fuera eventualmente corroborada (desde el punto de vista observacional) la posibilidad del cruce de

la barrera fantasma, entonces podríamos pensar en dos posibles explicaciones/implicaciones: o bien la EO consiste de múltiples componentes con (al menos) una componente fantasma (no canónica), o la Relatividad General (RG) tiene que ser modificada a escalas cosmológicas [23]. La posibilidad de tratar con varios campos escalares está sustentada, además, por la teoría efectiva (de baja energía) de la cuerda bosónica, donde varios campos como el dilatón, el axiÓN y otros campos módulo pueden encontrarse [24].

Algunos aspectos interesantes del cruce de la barrera fantasma han sido discutidos en [25], donde se analizaron la viabilidad del parámetro de la ecuación de estado y la velocidad del sonido. Aún cuando algunas realizaciones del cruce puedan tener un origen extradimensional, bien en la brana [26] como en el contexto de un gas de cuerdas [27], los modelos con campo escalar [28] (en la física estándar 4-dimensional) son las opciones más populares del inventario. También ha sido considerado un gas de Chaplign interactuante [29]. Debemos señalar que se han venido haciendo esfuerzos en la construcción de modelos de EO que hagan el cruce de la barrera fantasma, basados en teoría de campos. Se conoce que un solo campo escalar con energía cinética canónica (quintaesencia) o energía cinética no canónica (fantasma) no da el resultado esperado [30, 31, 32]. Sin embargo, para un teoría con campo escalar conteniendo operadores en derivadas superiores en el Lagrangiano [33], así como un solo campo escalar acoplado a priori a un campo vectorial no dinámico de fondo [34], si ocurre el cruce. En [35], por ejemplo, se ofrece una construcción explícita de un modelo inspirado en Teorías Escalares-Tensoriales que hace el cruce. La imposibilidad (en general) de modelar el cruce de la barrera fantasma, mediante un solo campo escalar, ha motivado la propuesta modelos con dos campos (quintaesencia y fantasma) y han sido nombrados modelos de energía quintasma [17, 19, 36]-[66]. Aquí nos mantendremos en la corriente principal y consideraremos estas cosmologías.

El modelo de energía quintasma es un híbrido de quintaesencia, usualmente modelada como un campo escalar mínimamente acoplado a la gravedad, y un campo fantasma: otro campo escalar real (mínimamente acoplado a la gravedad) con energía cinética negativa.<sup>3</sup> Este tipo de modelos puede conducir, de una manera muy simple, a un marco teórico en el que la quintaesencia domina en tiempos tempranos con  $w > -1$  y donde el campo fantasma domina más tarde, con  $w < -1$ . Estos modelos son totalmente diferentes de los de quintaesencia y energía fantasma que le dieron origen en relación con el destino final de nuestro universo y no sufren de los problemas de ajuste fino de los campos fantasmas: para que el universo actual sea bien descrito mediante un modelo fantasma, este debe ser severamente ajustado en tiempos tempranos porque la densidad de energía crece con la expansión.

---

<sup>3</sup>El comportamiento tipo quintasma (con cruce de  $w = -1$ ) ha sido hallado también en el contexto de la EO holográfica [65, 67, 68].

El modelo de energía quintasma preserva el carácter escalante de la quintaesencia, donde se requiere menos ajuste fino.

En [56] y [57, 17] ha sido estudiado, usando herramientas estándares de la teoría de los sistemas dinámicos, un universo homogéneo e isotrópico, conteniendo materia oscura (MO) y EO. La EO fue modelada mediante un modelo de energía quintasma con un potencial exponencial.<sup>4</sup> La diferencia entre [56] y [57, 17] está en que, en el segundo caso, el potencial describe la interacción entre el campo escalar convencional y el campo fantasma. Algunos aspectos cruciales de la interacción entre estos campos no fueron resueltos apropiadamente en [57] a consecuencia de las variables dinámicas propuestas por los autores. En la mencionada referencia fue probado que en ausencia de interacciones, la solución dominada por el campo fantasma es el atractor del sistema y que la interacción no afecta su carácter atractor. En [17] fue estudiado el caso en el que el término de interacción domina frente a los otros términos del potencial. Un conjunto de variables dinámicas mejor adaptadas a dicha situación (dominio del término de interacción) que aquellas en [57] fue diseñado. La diferencia sutil de nuestra selección tuvo consecuencias inesperadas. En primer lugar, existe la posibilidad de que la EO quintasma (con condiciones iniciales muy generales) escale a la MO, significando que la evasión del comportamiento escalante en modelos de energía quintasma no es genérico. Resultados similares han sido obtenidos en la referencia [53], donde fue mostrado que en el contexto de los modelos de EO tipo quintasma (modelos h-esencia) con potenciales exponenciales y con ley de potencia (inversa), pueden existir atractores estables los cuales son bien soluciones escalantes o soluciones dominadas por la h-esencia (aunque con ecuación de estado mayor o igual que  $-1$ ). En segundo lugar, en algunos casos en el que los valores de los parámetros del potencial se excluye la existencia de atractor escalante, el modelo podría tener un atractor puramente fantasma. Este comportamiento es contrario a lo que se observaba previamente para modelos de energía quintasma con potenciales exponenciales, en los cuales el comportamiento asintótico de tiempo reciente correspondía simplemente a  $w = -1$ , a pesar de la existencia transitoria de una época con  $w < -1$ .<sup>5</sup>

También hemos obtenido resultados similares en [58], sección 4. En dicha referencia fue estudiada una cosmología FRW plana con campo quintasma para potenciales arbitrarios (no exponenciales), y fue establecido bajo cuales condiciones sobre el potencial es posible la existencia de soluciones escalantes. En [58] fue probado que, para potenciales arbitrarios teniendo asintóticamente comportamiento exponencial, los regimenes escalantes están asociados con el límite donde ambos campos escalares divergen.

---

<sup>4</sup>Los potenciales exponenciales han sido considerados como fuente de la interacción entre campos escalares en cosmología convencional [69, 70, 71, 72, 73].

<sup>5</sup>En nuestra opinión, estos hallazgos muestran que la casuística del comportamiento evolutivo de los modelos de energía quintasma es de hecho más rica de lo que se conocía hasta la fecha, lo que hace que el tema valga la pena para futuras investigaciones.

Quizas, la más importante conclusión en [58] es la confirmación del resultado en la referencia [17] (la existencia de atractores fantasma no es genérica) en el contexto más general de modelos de EO quintasma con potenciales arbitrarios (no exponenciales) y consecuentemente las correspondientes soluciones cosmológicas carecen de singularidad de gran desgarro (big-rip).<sup>6</sup> Particularmente, en nuestro marco de trabajo, los atractores de de Sitter ( $w = -1$ ) están asociados solo con los puntos de ensilladura del (logaritmo natural del) potencial. Este estudio resulta, en este sentido, complementario al de las referencias [57, 56, 17]. Como es costumbre, este tipo de análisis descansa en una selección apropiada de variables, las cuales se construyen parcialmente de acuerdo a las consideradas en las referencias [17, 74].

En [66] han sido investigados elementos adicionales que complementan los resultados en las referencias [56, 57, 17] al removerse la restricción de considerar modelos con geometría FRW plana y considerarse modelos con curvatura tanto negativa como positiva. También fueron investigados modelos tanto en expansión eterna como en contracción y el posible recolapso. De esta manera fue posible generalizar resultados previos reportados en la literatura.

La existencia de funciones monótonas en el espacio de estados de las cosmologías quintasma permiten descartar la existencia de órbitas periódicas, órbitas homoclínicas, órbitas recurrentes y cualquier tipo de comportamiento complejo en conjuntos invariantes del flujo. Siendo así, la dinámica es dominada por puntos críticos (y posiblemente, órbitas heteroclínicas conectándolos). Especulamos que este comportamiento podría tenerse también para cosmologías con potenciales arbitrarios. Adicionalmente pueden obtenerse resultados globales. Un acercamiento similar al aquí propuesto (o sea, el diseño de funciones monótonas) para cosmologías con múltiples campos escalares convencionales con materia ha sido utilizado en [18, 69, 70]. Sin embargo, en dicho trabajo los autores no consideran campos fantasma, como aquí hacemos. En nuestra investigación hemos hallado una galería de funciones monótonas,<sup>7</sup> en cambio reportaremos solo aquellas que contienen la mayor información posible sobre los estados asintóticos de nuestro sistema.

## Estructura de la tesis

En la sección introductoria se comenta sobre el estado del arte del objeto de investigación y se plantea el problema de investigación.

---

<sup>6</sup>Cuando se incluye curvatura en el modelo se puede encontrar que, para modelos en expansión eterna, el comportamiento asintótico fantasma es genérico [66].

<sup>7</sup>Algunas de ellas son sencillamente reinterpretaciones de las funciones propuestas por otros autores a nuestro contexto (ver por ejemplo [18, 69, 70]).

En el capítulo 1, se enuncian los principios que sustentan la Teoría General de la Relatividad. Se presentan los fundamentos de la cosmología estándar, introduciendo evidencia para la homogeneidad y la isotropía y los modelos Friedmann-Robertson-Walker (FRW). Algunos aspectos importantes sobre la evolución del Universo, particularmente aquellos relacionados con la historia térmica del universo, se ofrecen en el Anexo A.

En el capítulo 2, se responde al primer objetivo general de la investigación. Se introducen algunos conceptos, teoremas y proposiciones de la Teoría de los Sistemas Dinámicos. Lejos de ser una lista de resultados, en el capítulo, se le plantea de manera coherente al investigador como proceder y que herramientas usar ante determinadas situaciones concretas. Se describe la metodología de trabajo que se sigue en la tesis. En el capítulo 3, se responde al primer objetivo específico (incluido en el tercer objetivo general). Investigamos cuatro sistemas dinámicos describiendo: i) la dinámica de los modelos cosmológicos Friedmann-Roberson Walker (FRW) con curvatura negativa que se expanden por siempre provistos de fluido perfecto con parámetro de la ecuación de estado  $p = (\gamma - 1)\rho$ ,  $1 \leq \gamma \leq 2$  y campo de energía quintasma con potencial exponencial; ii) la dinámica de los modelos cosmológicos FRW con curvatura negativa en contracción con igual contenido de materia; iii) la dinámica de los modelos cosmológicos FRW planos en expansión, provistos de fluido perfecto con ecuación de estado  $p = 0$  (polvo) y campo de energía quintasma con potencial exponencial; y iv) la dinámica de los modelos cosmológicos Friedmann-Roberson Walker (FRW) con curvatura positiva provistos de fluido perfecto con ecuación de estado  $p = (\gamma - 1)\rho$ ,  $\frac{2}{3} \leq \gamma \leq 2$  y campo de energía quintasma con potencial exponencial.

En el capítulo 4, se responde al segundo objetivo específico (incluido en el tercer objetivo general). Investigamos modelos con energía quintasma con potencial arbitrario. Se provee de elementos adicionales que fundamentan el interés en los modelos de energía quintasma mediante el estudio de casos con potenciales arbitrarios (no exponenciales) también desde la perspectiva de los sistemas dinámicos. En este sentido nuestro estudio complementa el estudio en las referencias.

Incluimos dos secciones finales con conclusiones generales, un resumen de los resultados de la tesis y hacemos algunas recomendaciones sobre como dar continuidad a esta investigación y se adelantan algunas ideas sobre nuestros proyectos futuros. En los anexos B y C se incluyen gráficos, figuras y tablas complementarias. Usamos los programas DSolver y Mathematica en las integraciones numéricas.

# Capítulo 1

## Cosmología Moderna

La corriente principal en Cosmología es el estudio de modelos relativistas, o sea, aquellos sustentados en la Teoría General de la Relatividad (TGR) de Albert Einstein.

El capítulo ha sido organizado en la siguiente forma: en la sección 1.1 se enuncian los principios que sustentan la TGR y se presentan las ecuaciones tensoriales del campo gravitatorio (ecuaciones de Einstein), por otra parte en la sección 1.1.4 se describe a grosso modo como construir modelos cosmológicos realistas, particularmente prestamos mayor interés a las cosmologías con campo escalar. En la sección 1.2, se presentan los fundamentos de la cosmología estándar, introduciendo evidencia para la homogeneidad y la isotropía y los modelos Friedmann-Robertson-Walker (FRW). Estos modelos son los modelos matemáticos más sencillos de la cosmología (satisfacen el Principio Copernicano) y se cree que son los que mejor describen el Universo reciente. Se estudian las ecuaciones cosmológicas para diferentes fuentes materiales y se comenta sobre el papel de la curvatura espacial en el destino del Universo. Consideramos el estado de nuestro universo actual, el cual conduce a una discusión sobre su más sorprendente rasgo problemático: la existencia de energía oscura. En la sección 1.2.8, se presentan y discuten algunos modelos teóricos para esta componente. En la sección 1.3 se ofrece un resumen sobre aspectos más notorios en relación a los modelos cosmológicos.

### 1.1 Teoría general de la Relatividad

La formulación de la Teoría de la Relatividad General (TGR) por Albert Einstein fue fundamental para el nacimiento de la Cosmología debido a dos hitos importantes: se contaba por primera vez con una nueva teoría de la gravedad compatible con la Relatividad Especial, y por que ésta nueva teoría relacionaba la energía-materia con la geometría del espacio-tiempo. En efecto, conjugando audazmente su principio de equivalencia con las novedosas técnicas matemáticas sobre espacios curvos

creada por Riemann, Einstein alcanzó la maravillosa conclusión de que la curvatura del espacio-tiempo era simple y llanamente una manifestación del mismísimo campo gravitatorio. Dicho de otra manera, no hay fuerza de gravedad, sino que las grandes masas deforman la geometría del espacio-tiempo y las partículas siguen las órbitas extremas naturales de dicha geometría.

El conjunto de principios fundamentales en los que la TGR se basa son:

- (i) El principio de covariancia general: *las leyes de la física deben tomar la misma forma en todos los sistemas de coordenadas.*
- Matemáticamente, el principio de covariancia implicaba que las leyes de la física deben ser leyes tensoriales en las que las magnitudes medidas por diferentes observadores se relacionan de acuerdo a la transformación de coordenadas de cada observador.
  - Físicamente, el principio de covariancia se basa en la observación de que, para diversas clases de sistemas de coordenadas de referencia, no existe procedimiento físico para distinguir entre ellos.

Influido por el principio de equivalencia y otras observaciones, Einstein y otros llegaron a teorizar que era posible construir una teoría donde todas las ecuaciones pudieran ser escritas en una forma suficientemente general como para tener la misma forma en cualquier sistema de coordenadas. Un ejemplo de esto era el equivalente relativista de la segunda ley de Newton que se escribe para cualquier sistema de coordenadas, en términos del tiempo propio, los símbolos de Christoffel del sistema de coordenadas y las componentes de la cuadrifuerza como:

$$m \left( \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} \right) = F^i \quad (1.1.1)$$

Así la distinción aparente entre sistemas inerciales y no inerciales de la mecánica newtoniana es ilusoria, ya que estos no son más que sistemas en los que los símbolos de Christoffel que aparecen en la expresión anterior se anulan, y por tanto, los sistemas inerciales son sólo un caso particular de sistema de referencia, y no un tipo privilegiado o de ningún modo destacado de sistema de referencia, una vez que las leyes se formulan en la forma covariante adecuada.

- (ii) El principio de equivalencia: *cualquier sistema de referencia no inercial es localmente equivalente a un sistema inercial con un cierto campo de gravitación, y viceversa, todo campo gravitatorio puede hacerse desaparecer localmente escogiendo un sistema de referencia adecuado.* De esta manera todas las leyes de la física deben ser las mismas para todos los observadores (inerciales

o no). Así, el principio de equivalencia en relatividad general establece que no hay experimentos locales que sean capaces de distinguir una caída no-rotacional en un campo gravitacional del movimiento uniforme en ausencia de un campo gravitatorio. Es decir, no hay gravedad en un sistema de referencia en caída libre.

- (iii) El principio de invariancia local de Lorentz: *las leyes de la relatividad especial se aplican localmente para todos los observadores inerciales*. En la teoría especial de la relatividad se asume que los sistemas de referencia pueden ser extendidos indefinidamente en todas las direcciones en el espacio-tiempo. Pero en la teoría general se reconoce que sólo es posible la definición de sistemas aproximados de forma local y durante un tiempo finito para regiones finitas del espacio. En relatividad general, las leyes de Newton son asumidas sólo en relación a sistemas de referencia locales. Las partículas libres viajan trazando líneas rectas en sistemas inerciales locales (Lorentz). Cuando esas líneas se extienden, no aparecen como rectas, siendo llamadas geodésicas. Entonces, la primera ley de Newton se ve reemplazada por la ley del movimiento geodésico.
- (iv) El movimiento inercial tiene lugar a través de órbitas geodésicas (circunferencias de radio máximo en una esfera): estas son las órbitas determinadas por la forma del espacio, que simplemente van por los caminos menos esforzados de un espacio que no es plano.
- (v) La curvatura del espacio tiempo, causada por la interacción entre la masa y la energía con el espacio-tiempo, permite explicar los efectos gravitacionales como movimientos inerciales en un espacio tiempo curvo. La curvatura del espacio-tiempo está creada por la tensión que la masa y la energía ejercen sobre el mismo. El sistema de referencia escogido es definido por elección particular. Por lo tanto, todo movimiento es definido y cuantificado relativamente a otro cuerpo.

El concepto básico de la teoría es el campo tensorial métrico fundamental  $\mathbf{g}$ , que es arbitrario y que siempre se puede expresar como

$$\mathbf{g} = \sum_{\alpha, \beta=0}^3 g_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta \equiv g_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta \quad (1.1.2)$$

(aquí hemos usado el convenio de sumación de Einstein) en una cierta carta local (sistema de coordenadas) de una variedad diferenciable 4-dimensional, donde  $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$  son funciones sobre la variedad

<sup>1</sup>. Un espacio con un tensor métrico fundamental tiene asociados automáticamente, una conexión

<sup>1</sup>Denotaremos los índices del espacio-tiempo y los índices espaciales con respecto a bases coordenadas respectivamente por  $\alpha, \beta, \dots = 0, 1, 2, 3$  y  $i, j, \dots = 1, 2, 3$ , respectivamente.

local  $\nabla$  –la conexión denominada de Levi-Civita, que satisface  $\nabla \mathbf{g} = 0$  y no tiene torsión, o sea,  $\nabla_{\vec{X}} \vec{Y} - \nabla_{\vec{Y}} \vec{X} = [\vec{X}, \vec{Y}]$ –, y la correspondiente curvatura  $\mathbf{R}$ :

$$\left( \nabla_{\vec{X}} \nabla_{\vec{Y}} - \nabla_{\vec{Y}} \nabla_{\vec{X}} - \nabla_{[\vec{X}, \vec{Y}]} \right) \vec{Z} \equiv \mathbf{R}(\vec{X}, \vec{Y}) \vec{Z}. \quad (1.1.3)$$

La curvatura define las órbitas geodésicas, que son a su vez extremales de la longitud  $L$  definida como

$$L = \int_{\lambda_i}^{\lambda_f} \sqrt{|\mathbf{g}(\vec{v}, \vec{v})|} d\lambda \quad (1.1.4)$$

para cualquier arco continuo de curva  $\gamma(\lambda)$ , que una los puntos  $p = \gamma(\lambda_i)$  y  $q = \gamma(\lambda_f)$ , sea diferenciable a trozos, y cuyo campo vectorial tangente en los trozos diferenciables es  $\vec{v}$  –naturalmente la suma se compone de la suma de los trozos diferenciables concatenados–. Estas geodésicas son las órbitas que describen los cuerpos de prueba, o sea, los no sometidos a influencia externa alguna, aparte de la gravedad. Y esto es tanto si  $\mathbf{g}$  describe un campo gravitatorio real, como si es la manifestación de fuerzas no inerciales. Observemos que hay curvas tales que  $L = 0$  (las curvas luminosas, por las que se mueve la radiación electromagnética de la luz), y que por ello es evidente que  $L$  no puede minimizarse para puntos con separación temporal. En este caso, no obstante,  $L$  puede maximizarse.

Por su parte el tensor de curvatura  $\mathbf{R}$  mide, a través de la ecuación de los campos de Jacobi

$$\left[ [\vec{X}, \vec{Y}], \vec{Z} \right] + \left[ [\vec{Z}, \vec{X}], \vec{Y} \right] + \left[ [\vec{Y}, \vec{Z}], \vec{X} \right] = 0, \quad (1.1.5)$$

o igualmente a través de la ecuación de Ricci (1.1.3), la aceleración o desviación relativa de geodésicas cercanas. De esta manera, si  $\mathbf{R} = 0$  no hay aceleración relativa, lo que sirve para describir los sistemas no inerciales, mientras que si  $\mathbf{R} \neq 0$  sí que la hay, y se tiene un modelo de un cierto campo gravitatorio real. Matemáticamente la condición

$$\mathbf{R} = 0$$

identifica el caso en el que el espacio tiempo es plano, o sea, sin curvatura, y un teorema fundamental de Riemann asegura que se pueden escoger localmente coordenadas cartesianas tales que  $\mathbf{g}$  adopta la forma

$$\mathbf{g} = -c^2 dt \otimes dt + dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$$

si y sólo si  $\mathbf{R} = 0$ .

Ahora bien, ¿cómo cuantificar la curvatura del espacio–tiempo, es decir, la deformación producida por una distribución de masa? ¿Cómo determinar el tensor métrico en casos de interés físico?

Las ecuaciones que propuso Einstein para describir los efectos gravitatorios en el espacio-tiempo, y aún vigentes hoy, fueron

$$\mathbf{Ric} - \frac{\text{tr } \mathbf{Ric}}{2} \mathbf{g} = \frac{8\pi G}{c^4} \mathbf{T}, \quad (1.1.6)$$

o usando notación de índices

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} R_{\gamma\delta} g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}$$

donde  $\mathbf{Ric} = \text{tr } \mathbf{R}$ , o bien

$$R_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\gamma\beta}^{\gamma},$$

donde  $R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha}$  representa el tensor de Riemann asociado a la curvatura  $\mathbf{R}$ .  $\mathbf{Ric}$  es un campo tensorial 2-covariante simétrico.  $\text{tr } \mathbf{Ric}$  denota la traza respecto de  $\mathbf{g}$  de  $\mathbf{Ric}$ , o sea, la curvatura espacial.  $\mathbf{G} \equiv \mathbf{Ric} - \frac{\text{tr } \mathbf{Ric}}{2} \mathbf{g}$  es un campo tensorial 2-covariante simétrico, llamado tensor de Einstein y  $\mathbf{T}$  (también un campo tensorial 2-covariante simétrico) es el tensor de energía-momento de la materia en el espacio tiempo. En virtud de las identidades de Bianchi para la curvatura,  $\mathbf{G}$  satisface idénticamente la propiedad

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = 0,$$

(donde  $\nabla \cdot$  denota la divergencia) recuperandose así de manera manifiesta la ley  $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$  en toda situación posible.

Como se puede apreciar, las ecuaciones de Einstein relacionan las propiedades métricas del espacio-tiempo junto con su deformación (en términos de la curvatura), con la cantidad y distribución energético-material que crea esa deformación. La fórmula (1.1.6) representa un sistema de diez ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, no lineales y acopladas de segundo orden, por lo que en general, el problema resultante es matemáticamente muy complicado. Desde el punto de vista físico este planteamiento supuso una tremenda revolución, ya que si bien las fuentes materiales crean un campo gravitatorio (que es una deformación de la geometría subyacente), la propia materia se tiene que mover según dicta esa geometría, y así sucesivamente.

### 1.1.1 Coordenadas curvilíneas

Al estudiar campos gravitatorios nos encontramos ante la necesidad de considerar fenómenos en coordenadas curvilíneas.

Consideremos el paso de un sistema de coordenadas  $x^0, x^1, x^2, x^3$  a otro  $x'^0, x'^1, x'^2, x'^3$

$$x^i = f^i(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3), \quad (1.1.7)$$

donde las  $f^i$  son ciertas funciones. Cuando transformamos las coordenadas, sus diferenciales se transforman de acuerdo con la relación:

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} dx'^j. \quad (1.1.8)$$

Todo conjunto de cuatro cantidades  $A^i (i = 0, 1, 2, 3)$ , que en una transformación de coordenadas se transforma como las diferenciales de las coordenadas, se llama cuadrivector contravariante. Así, en una transformación de coordenadas

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} A'^j. \quad (1.1.9)$$

Designaremos las componentes de los vectores contravariantes mediante un superíndice. También podemos definir el cuadrivector covariante como:

$$A_i = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} A'_j. \quad (1.1.10)$$

Designaremos los componentes de los vectores covariantes mediante un subíndice.

### 1.1.2 La ecuación geodésica

En el espacio de Minkowsky, las partículas viajan en línea recta a menos que sobre ellas actúe una fuerza. No nos sorprende, que las trayectorias de las partículas en espacio-tiempos más generales sean más complicadas. La noción de línea recta se generaliza a trayectoria geodésica, el camino seguido por una partícula en ausencia de fuerzas. Para expresar eso en forma de ecuaciones, debemos generalizar la ley de Newton sin considerar existencia alguna de fuerzas,  $d^2\vec{x}/dt^2 = 0$ , a un Universo en expansión.

La maquinaria matemática para generalizar  $d^2\vec{x}/dt^2 = 0$ , es quizás mejor introducida comenzando por un ejemplo simple: el movimiento de una partícula en el plano Euclideo 2D. En este caso, las ecuaciones del movimiento en coordenadas Cartesianas  $x^i = (x, y)$  son

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = 0. \quad (1.1.11)$$

No obstante si usamos coordenadas polares  $x'^i = (r, \theta)$ , las ecuaciones para una partícula en libre lucen significativamente diferentes. La fundamental diferencia entre los dos sistemas de coordenadas es que los vectores bases para las coordenadas polares  $\hat{r}, \hat{\theta}$  varían en el plano. Por tanto,  $d^2\vec{x}'/dt^2 = 0$  no implica que cada una de las coordenadas  $r$  y  $\theta$  satisfagan  $\frac{d^2 x'^i}{dt^2} = 0$ .

Para determinar las ecuaciones satisfechas en coordenadas polares debemos proceder por considerar la transformación infinitesimal de coordenadas dada por la ecuación (1.1.8).

$\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}$  es llamada matriz de transformación de una base a la otra. En el caso de las coordenadas polares en 2D,  $x^1 = x'^1 \cos x'^2$ ,  $x^2 = x'^1 \sin x'^2$ , y la matriz de transformación es:

$$\frac{\partial x^i}{\partial x'^j} = \begin{pmatrix} \cos x'^2 & -x'^1 \sin x'^2 \\ \sin x'^2 & x'^1 \cos x'^2 \end{pmatrix}. \quad (1.1.12)$$

Por tanto la ecuación geodésica se transforma en

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{dx^i}{dt} \right] = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \frac{dx'^j}{dt} \right] = 0. \quad (1.1.13)$$

La derivada con respecto al tiempo actúa en ambos miembros dentro de los corchetes. Si la transformación de la base Cartesianas a las nueva base fuera lineal, entonces la derivada actuando en la matriz de transformación se anularía, y las ecuaciones geodésicas en la nueva base serían invariantes de forma. Sin embargo, en el caso de las coordenadas polares la transformación no es lineal, y requerimos del hecho de que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \right) = \frac{\partial}{\partial x'^j} \left( \frac{dx^i}{dt} \right) = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^j \partial x'^k} \frac{dx'^k}{dt}. \quad (1.1.14)$$

La primera de las igualdades procede por que las derivadas conmutan y la segunda procede de insertar  $dx^i/dt$  de la ecuación (1.1.8) luego de hacer el cambio de índices “mudos”  $j \rightarrow k$ . La ecuación geodésica en las nuevas coordenadas es por tanto:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \frac{dx'^j}{dt} \right] = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \frac{d^2 x'^j}{dt^2} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^j \partial x'^k} \frac{dx'^k}{dt} \frac{dx'^j}{dt} = 0. \quad (1.1.15)$$

Notemos que el término multiplicando la segunda derivada con respecto al tiempo es la matriz de transformación. Si esta ecuación se multiplica por la inversa de la matriz de transformación, entonces la segunda derivada con respecto al tiempo queda libre y la ecuación anterior se re-expresa como:

$$\frac{d^2 x'^l}{dt^2} + \left[ \left( \left\{ \frac{\partial x}{\partial x'} \right\}^{-1} \right)_i^l \frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^j \partial x'^k} \right] \frac{dx'^k}{dt} \frac{dx'^j}{dt} = 0. \quad (1.1.16)$$

Es fácil verificar que esta expresión aparentemente complicada (1.1.16) da lugar a las ecuaciones correctas del movimiento en coordenadas polares. Lo más importante, dejenado las cosas generales, hemos derivado las ecuaciones geodésicas en bases no Cartesianas.

Es conveniente definir el símbolo de Christoffel,  $\Gamma_{jk}^l$ , como el coeficiente de  $\frac{dx'^k}{dt} \frac{dx'^j}{dt}$  en (1.1.16). Notar que por definición estos coeficientes son simétricos respecto de sus índices inferiores  $j$  y  $k$ .

En coordenadas Cartesianas, los símbolos de Christoffel se anulan y las ecuaciones de las geodésicas son simplemente  $d^2x^i/dt^2 = 0$ . Pero en general los símbolos de Christoffel no se anulan; su presencia describe las geodésicas en sistemas coordenados más complicados. La razón por la cual esta ecuación geodésica generalizada es tan poderosa es que para espacio-tiempos no triviales como lo es el Universo en expansión no es posible encontrar un sistema de coordenadas Cartesianas, de manera que necesitamos conocer como se mueven las partículas en el caso más general.

Cuando exportamos la ecuación geodésica (1.1.16) a la relatividad es necesario introducir dos pequeños cambios. El primero de ellos es trivial: dejar que los índices tomen valores desde 0 hasta 3 para incluir el tiempo y las tres coordenadas espaciales. La segunda que como el tiempo es ahora una coordenada, no suele ser utilizado como un parámetro de evolución. En su lugar se introduce un parámetro  $\lambda$  es cual crece monótonamente a lo largo de la trayectoria de la partícula.

La ecuación geodésica (1.1.16) se transforma entonces en

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}. \quad (1.1.17)$$

Para el modelo del Universo en expansión con elemento de línea (1.2.36) tenemos que los símbolos de Christoffel no nulos son:

$$\Gamma_{ij}^0 = \delta_{ij} \dot{a}, \quad \Gamma_{0j}^i = \delta_{ij} \frac{\dot{a}}{a} \quad (1.1.18)$$

donde  $\delta_{ij}$  es igual a 1 si  $i = j$  y cero en otro caso.

Consideremos ahora la ecuación geodésica correspondiente a una partícula. Particularmente investiguemos como cambia la energía de una partícula con la expansión del Universo. Comencemos por el 4-vector de momento energía  $P^\alpha = (E, \vec{P})$  cuya primera componente es la energía. Utilizaremos este 4-vector para definir el parámetro  $\lambda$  en la ecuación geodésica (1.1.17):

$$P^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}. \quad (1.1.19)$$

Esta es una definición implícita de  $\lambda$ . Afortunadamente no es necesario determinar  $\lambda$  explícitamente, esta puede ser eliminado notando que

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^0}{d\lambda} \frac{d}{dx^0} = P^0 \frac{d}{dt} = E \frac{d}{dt}. \quad (1.1.20)$$

La ecuación geodésica (1.1.17) se reescribe como

$$\frac{dP^\mu}{d\lambda} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu P^\alpha P^\beta. \quad (1.1.21)$$

Para el Universo FRW con factor de escala  $a(t)$  las componentes de la ecuación geodésica son

$$\begin{aligned} E \frac{dE}{dt} &= -\Gamma^0_{ij} P^i P^j = -\delta_{ij} \dot{a} a P^i P^j, \\ \frac{dP^i}{dt} &= -2\Gamma^i_{0\mu} P^\mu = -2\frac{\dot{a}}{a} P^i \end{aligned} \quad (1.1.22)$$

Que tienen por solución

$$P^i = \frac{P_0^i}{a^2}, \quad E = \frac{1}{a} \sqrt{\delta_{ij} P_0^i P_0^j - \left(-E_0^2 + \delta_{ij} P_0^i P_0^j\right) a^2}, \quad (1.1.23)$$

donde el subíndice cero significa el valor de la correspondiente magnitud en el tiempo  $t = t_0$  tal que  $a(t_0) = 1$  (en la unidades que hemos seleccionado en este curso esto corresponde al tiempo actual).

Teniendo en cuenta que la magnitud de  $P^\alpha$  está dada por  $P^2 \equiv g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = -E^2 + \delta_{ij} a^2 P^i P^j$  en valor de  $E$  se reescribe según

$$E = \frac{1}{a} \sqrt{\delta_{ij} P_0^i P_0^j - P^2|_{t=t_0} a^2}. \quad (1.1.24)$$

En el caso de una partícula sin masa el vector de energía-momento tiene magnitud  $P^2 = 0$  de modo que en este caso  $\delta_{ij} P_0^i P_0^j = E_0^2$  y por tanto  $E = E_0/a$ . Esto es consistente con el hecho de que la energía de una partícula sin masa (la cual es inversamente proporcional a su longitud de onda) decrece con la expansión del Universo dado que la longitud de onda se alarga con la expansión en proporción directa al factor de expansión  $a(t)$ .

En el caso de una partícula de masa  $m$  la magnitud del vector de energía-momento es  $P^2 = -m^2$ . En este caso  $\delta_{ij} P_0^i P_0^j = E_0^2 - m_0^2$  por tanto  $E = \frac{1}{a} \sqrt{E_0^2 - m_0^2 + m_0^2 a^2}$ .

### 1.1.3 Ecuaciones de Einstein en bases coordenadas

Las ecuaciones de Einstein se pueden escribir como:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R + g_{\alpha\beta}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^2}T_{\alpha\beta}, \quad (1.1.25)$$

donde  $R_{\alpha\beta}$  es el tensor de curvatura de Ricci,  $R$  es el escalar de curvatura de Ricci,  $g_{\alpha\beta}$  es el tensor métrico,  $\Lambda$  es la constante cosmológica,  $T_{\alpha\beta}$  es el tensor de energía,  $c$  es la velocidad de la luz y  $G$  es

la constante gravitatoria universal, de forma similar a lo que ocurre en la gravedad newtoniana. En lo siguiente usaremos unidades donde  $c = 1$ .

Las ecuaciones de Einstein (1.1.25) relacionan la curvatura del espacio (parte izquierda de la ecuación) con la masa-energía (parte derecha). Una masa cualquiera curva el espacio y esta curvatura modula la trayectoria de cualquier partícula en el espacio curvado alrededor de la masa.

Las derivadas parciales de la métrica respecto a las coordenadas permiten determinar los símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}(g_{\beta\mu,\gamma} + g_{\gamma\mu,\beta} - g_{\gamma\beta,\mu}) \quad (1.1.26)$$

donde  $g_{\beta\mu,\gamma} = \partial g_{\beta\mu}/\partial x^{\gamma}$ . Con ayuda de estos símbolos se puede expresar la derivada covariante de un vector arbitrario  $V_b$ , como  $\nabla_{\alpha}V_{\beta} = \partial V_{\beta}/\partial x^{\alpha} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}V_{\mu}$ . La derivada covariante del tensor métrico es nula:  $\nabla_{\alpha}g_{\beta\mu} = 0$ . Esta es la propiedad fundamental de la geometría de Riemann sobre la cual se sienta la TGR. A partir de la métrica y sus derivadas se pueden construir otros objetos covariantes de la geometría de Riemann como, por ejemplo, el tensor de Ricci:  $R_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta,\mu}^{\mu} - \Gamma_{\mu\alpha,\beta}^{\mu} + \Gamma_{\nu\mu}^{\mu}\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\mu}\Gamma_{\mu\beta}^{\nu}$ , que define las propiedades de curvatura del espacio-tiempo conjuntamente con el escalar de curvatura:  $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ .

La generalización de la ley de conservación de los momentos y la energía, en forma covariante se puede escribir como:

$$\nabla^{\mu}T_{\mu\alpha} = 0. \quad (1.1.27)$$

#### 1.1.4 Los modelos cosmológicos

Un modelo cosmológico representa el universo en una escala particular [75]. Se supone dentro de la visión más comúnmente aceptada que, en la macro-escala, la geometría del espacio-tiempo está descrita por la Relatividad General (ver por ejemplo [16, 77, 78, 79]).

Cada modelo cosmológico queda definido especificando ([80, 81]):

- (i) la *geometría del espacio-tiempo*, representada en una escala promedio específica y determinada por la métrica  $g_{\alpha\beta}(x^{\gamma})$ <sup>2</sup>;

---

<sup>2</sup>Debido al requerimiento de la compatibilidad con las observaciones, la métrica de un modelo cosmológico debe tener como límite regular una de las geometrías Robertson- Walker ('RW') en expansión, o si no, debe poder demostrarse que tiene propiedades observacionales compatibles con las que según las observaciones se infieren para la etapa del Universo que se pretenda que describa ese modelo.

- (ii) la *materia presente*, representada sobre una escala promedio, y su *comportamiento físico*<sup>3</sup>; y
- (iii) la *interacción entre la geometría y la materia* –cómo la materia determina la geometría, y a su vez, como la geometría determina el movimiento de la materia (ver [82])–. Suponemos que esta relación está dada por las *ecuaciones de Einstein del campo gravitatorio* (EEC) dadas por<sup>4</sup>

$$G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} - \Lambda g_{\alpha\beta} , \quad (1.1.28)$$

(aquí, a diferencia de lo explicado en la sección anterior, hemos considerado la posibilidad de introducir una constante cosmológica  $\Lambda$  no nula. Además  $R$  denota la traza  $g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$ ) lo cual, a través de las *identidades de Bianchi (contraídas dos veces)*, garantiza la conservación del tensor de energía-momento total

$$\nabla_{\beta} G^{\alpha\beta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla_{\beta} T^{\alpha\beta} = 0 , \quad (1.1.29)$$

suponiendo que *la constante cosmológica*  $\Lambda$  satisface la relación  $\nabla_{\alpha}\Lambda = 0$ , i.e., o sea, si es constante en el tiempo y en el espacio.

Todas ellas en conjunto, determinan la evolución combinada de la geometría y la materia en ella. La descripción debe ser suficientemente completa para determinar:

- (iv) las *relaciones observacionales* predichas por el modelo tanto para fuentes discretas<sup>5</sup> como para la radiación de fondo, implicando una teoría bien establecida del *crecimiento de estructuras* para la micro y la macro-escala física.

Prácticamente como en cualquier modelización de fenómenos físicos hay que comprometer un tanto la complejidad del modelo a fin de poder obtener algún resultado. Si nos referimos a un modelo cosmológico esto significa suponer la existencia de simetrías de uno u otro tipo. Las hipótesis usuales para la descripción de la materia serán que en su conjunto ésta se pueda idealizar mediante una combinación de fuentes de alguno de estos tipos:

<sup>3</sup>El comportamiento físico de la materia queda descrito especificando el tensor de energía-momento de cada componente material, las ecuaciones que gobernarían el comportamiento de cada componente, y los términos de interacción entre ellos. Idealmente, éste debe tener un interés físico plausible (explicando el contenido de materia en el Universo desde tiempos muy distantes en el pasado y hasta el presente, e incluyendo la mayoría de las interacciones descritas por la física de hoy día).

<sup>4</sup>En este curso emplearemos unidades naturales (geométricas) caracterizadas por  $c = 1 = 8\pi G/c^2$ . Consecuentemente, todas las variables geométricas que aparecerán tendrán dimensiones físicas que son potencias enteras de la dimensión [longitud].

<sup>5</sup>Las observaciones de fuentes discretas (galaxias primordiales, fuentes de radio, fuentes infrarojas y cuasares) proporcionan información acerca de las estructuras del Universo en la época galáctica (por ejemplo para valores de corrimiento al rojo  $z < \sim 5$ ). Estas observaciones pueden agruparse en tres clases, cartografiados de conteo numérico (number count surveys), que proporcionan una evidencia directa sobre la isotropía alrededor de nuestra posición, cartografiados de corrimiento al rojo (redshift surveys), que proporcionan información sobre las inhomogeneidades en la distribución de galaxias, y cartografiados de velocidades peculiares (peculiar velocity surveys), que describen las desviaciones de un flujo de Hubble uniforme (ver referencia [14], pp 65-67).

- (v) un fluido con una ecuación de estado bien motivada físicamente: por ejemplo, un fluido perfecto con una ecuación de estado específica;
- (vi) una mezcla de fluidos, usualmente con diferentes 4-velocidades;
- (vii) un conjunto de partículas representadas por una descripción de teoría cinética;
- (viii) un campo escalar  $\phi$  ( o varios), con un potencial  $V(\phi)$  dado.

En la descripción fenomenológica de fluido de una fuente material, la descomposición estándar del tensor de energía–momento  $T_{\alpha\beta}$  con respecto a un campo vectorial temporal  $\vec{u}$  está dada por:

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta + 2q_{(\alpha} u_{\beta)} + p(g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta) + \pi_{\alpha\beta}, \quad (1.1.30)$$

En esta descomposición aparecen los siguientes campos materiales:  $\rho$  denota la densidad escalar de energía (densidad de energía) total,  $p$  es la presión escalar (presión) isotrópica,  $q^\alpha$  es el vector de flujo de densidad (corriente de densidad) de energía, y  $\pi_{\alpha\beta}$  es el tensor de presiones anisotrópicas. Tenemos que  $q_\alpha u^\alpha = 0$ ,  $\pi_{\alpha\beta} u^\beta = 0$ ,  $\pi_\alpha^\alpha = 0$ ,  $\pi_{\alpha\beta} = \pi_{\beta\alpha}$ . Los campos materiales deben vincularse mediante apropiadas ecuaciones de estado termodinámicas con el objetivo de proveer una representación coherente a la física subyacente al escenario geométrico de fluido del espacio-tiempo.

En este curso nos restringiremos a fuentes materiales del tipo fluido perfecto no inclinado y campo escalar. Estas fuentes materiales admiten, respectivamente, las descomposiciones siguientes:

1. Un *fluido perfecto no inclinado* es descrito por su 4-velocidad  $\vec{u}$  (la cual es la 4-velocidad fundamental), su densidad de energía  $\rho$  y su presión  $p$ , con ecuación de estado barotrópica  $p = p(\rho)$ . El tensor de energía–momento es

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta + p(g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta), \quad u_\alpha u^\alpha = -1, \quad (1.1.31)$$

donde la relación entre la densidad  $\rho$  y la presión  $p$  debe establecerse mediante una apropiada ecuación de estado termodinámica (más detalles en la sección 1.2.4).

2. Un *campo escalar* es descrito por un tensor de energía–momento de la forma

$$T_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi - \left[ \frac{1}{2} \nabla_\gamma \phi \nabla^\gamma \phi + V(\phi) \right] g_{\alpha\beta}, \quad (1.1.32)$$

donde el potencial  $V(\phi)$  tiene que ser especificado. Si  $\nabla_\alpha \phi$  es temporal, podemos definir un vector temporal  $\vec{u}$  normal a las superficies  $\phi = \text{const.}$  :

$$u^\alpha = \frac{\nabla^\alpha \phi}{(-\nabla_\gamma \phi \nabla^\gamma \phi)^{\frac{1}{2}}}.$$

Entonces,  $T_{\alpha\beta}$  tiene la forma algebraica de un fluido perfecto, con

$$\rho = -\frac{1}{2}\nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi + V(\phi), \quad p = -\frac{1}{2}\nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi - V(\phi).$$

La ecuación del movimiento del campo escalar es la ecuación de Klein-Gordon

$$\nabla^\alpha \nabla_\alpha \phi - V'(\phi) = 0.$$

#### 1.1.4.1 La estructura de las ecuaciones de campo

Antes de analizar las posibilidad de resolver las ecuaciones de campo (1.1.28) consideraremos algunas de las propiedades físicas y matemáticas mas importante.

Las ecuaciones de campo (en unidades geometrizadas) se pueden escribir como

$$G_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}.$$

Elas pueden ser interpretadas de tres formas diferentes [77]:

1. Las ecuaciones de campo son ecuaciones diferenciales para determinar el tensor métrico  $g_{\alpha\beta}$  para *una tensor de energía-momento dado*. O sea, primero se especifica la distribución de materia y luego se resuelven las ecuaciones para establecer la geometría resultante. El caso más importante es cuando  $T_{\alpha\beta} = 0$ , en este caso nos concentraríamos en las soluciones de vacío.
2. Las ecuaciones del campo son ecuaciones las cuales pueden resolverse para obtener el tensor de energía-momento *una vez dado el tensor métrico*. Se pensó originalmente que esta podría ser una forma productiva de determinar tensores de energía-momento. Simplemente se seleccionan diez funciones arbitrarias de las coordenadas, o sea, el tensor simétrico  $g_{\alpha\beta}$ , luego se calcula  $G_{\alpha\beta}$  y se obtiene  $T_{\alpha\beta}$  mediante las ecuaciones de campo. Rara vez esto funciona en la práctica por que el tensor  $T_{\alpha\beta}$  resultante usualmente no tiene sentido físico y puede violar las condiciones de energía. En particular, frecuentemente la densidad de energía se hace negativa en alguna región, la cuál se rechaza como física debido a que el carácter positivo de la densidad de energía domina las teorías de la gravitación.

3. Las ecuaciones de campo consisten de diez ecuaciones conectando veinte cantidades, las diez componentes del tensor métrico  $g_{\alpha\beta}$  y las diez componentes de  $T_{\alpha\beta}$ . Luego, desde este punto de vista, las ecuaciones del campo pueden verse como ligaduras sobre la selección simultánea de  $g_{\alpha\beta}$  y  $T_{\alpha\beta}$ . Este acercamiento se utiliza cuando especificamos parcialmente la geometría y la distribución de materia del universo a partir de consideraciones físicas. Así, las ecuaciones se utilizan para ensayar y completar ambas cantidades simultáneamente.

#### 1.1.4.2 Determinación y no linealidad.

En el caso más simple en el que consideramos resolver  $G_{\alpha\beta} = 0$  para  $g_{\alpha\beta}$ . A primera vista el problema parece bien planteado: existen diez ecuaciones y diez incógnitas  $g_{\alpha\beta}$ . Sin embargo, las ecuaciones no son todas independientes, sino que están conectadas por cuatro restricciones diferenciables, a saber, las identidades de Bianchi (1.1.29). De esta manera nos enfrentamos a un problema indeterminado, por que hay menos ecuaciones que incógnitas. No se puede, sin embargo, esperar que el sistema sea determinado para cualquier conjunto  $g_{\alpha\beta}$ , dado que ellas pueden transformarse de acuerdo a cuatro transformaciones coordenadas

$$x^\alpha \rightarrow x'^\alpha = x'^\alpha(x), \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3).$$

Podemos de hecho usar estos cuatro grados de libertad para imponer cuatro condiciones a  $g_{\alpha\beta}$ , llamadas condiciones coordenadas o de calibración. Por ejemplo podemos introducir coordenadas normales o Gaussianas en las cuales  $g_{00} = -1$ ,  $g_{0\alpha} = 0$ . Las restantes seis incógnitas pueden ser determinadas por las seis ecuaciones independientes.

Las ecuaciones de campo son muy difíciles de tratar debido a que son no lineales. Por tanto, no existe un Principio de Superposición; o sea, que dadas dos soluciones, no podemos sumarlas para obtener una tercera solución. Visto de esta manera esto significa que no es posible analizar el complicado problema físico separándolo en partes más simples. La no linealidad se revela físicamente a sí misma: si bien las fuentes materiales crean un campo gravitatorio, que es una deformación de la geometría subyacente, la propia materia se tiene que mover según dicta esa geometría, y así sucesivamente. Visto de otra manera, el campo gravitatorio se acopla a sí mismo. Esta no linealidad implica que las ecuaciones del campo, en general, son muy difíciles de resolver.

La mayoría de las soluciones exactas obtenidas hasta la fecha, se obtuvieron imponiendo condiciones de simetría, siendo la la simetría esférica la más simple de ellas.

Es conocido que las ecuaciones en derivadas parciales no lineales admiten una amplia clase de soluciones, muchas de las cuales son no físicas. Puede ser que un gran número de soluciones exactas sean no físicas también, dadas las hipótesis de simetría impuestas para obtenerlas.

Idealmente se quiere conocer que dice la teoría en situaciones físicas importantes. En los casos en que las simetrías están ausentes, o donde las hipótesis de simetría no son suficientemente fuertes para determinar una solución, entonces debemos recurrir a métodos aproximados. Estos métodos se basan en que la mayoría de los campos gravitacionales que se encuentran en la naturaleza son débiles. También podemos valernos de la debilidad de los campos gravitacionales lejos de las fuentes, para aplicar los métodos aproximados. También podemos aplicar métodos asintóticos a fuentes aisladas. La debilidad significa, desde el punto de vista matemático, que unas ecuaciones son más importantes que otras.

## 1.2 Fundamentos de la cosmología

### 1.2.1 Homogeneidad e isotropía: La métrica Robertson-Walker

La más clara evidencia del Principio Cosmológico son las mediciones de la radiación del fondo cósmico de microondas (CMB, del término en inglés: cosmic microwave background) <sup>6</sup> el cual es una imagen de los fotones emitidos en el Universo primordial. El estudio de esta radiación es una de las piezas de información más poderosas en apoyo del modelo del Big-Bang caliente, <sup>7</sup> en el cual la Cosmología moderna esta basada [76].

La radiación de fondo aparece a primera vista isótropa en cada punto, y por tanto, homogénea. Este hecho era de difícil explicación según el modelo original del Big Bang y fue una de las causas que llevó a la formulación del modelo inflacionario del Big Bang. Una de las predicciones de este modelo es la existencia de pequeñas variaciones en la temperatura del fondo cósmico de microondas. Estas anisotropías o inhomogeneidades fueron detectadas finalmente en los años 90 por varios experimentos, especialmente, por el satélite de la NASA, COBE (Cosmic Background Explorer) entre 1989 y 1996 que fue la primera experiencia capaz de detectar irregularidades y anisotropías en esta radiación. Las irregularidades se consideran variaciones de densidad del universo primitivo y su descubrimiento arroja indicios sobre la formación de las primeras estructuras de gran escala y la distribución de galaxias

---

<sup>6</sup>La Tierra está siendo bombardeada por radiación térmica de microondas (radiación de fotones que quedó libre después de que estos dejaron de interactuar con el resto de la materia) con un espectro de cuerpo negro a una temperatura de cerca de  $3K$ .

<sup>7</sup>Modelo que trata de explicar el desarrollo del Universo, postulando la existencia de una gran explosión en su origen que causó una altísima temperatura en todo el Universo. Este modelo adquirió gran aceptación en la comunidad científica pero al tratarse de un fenómeno de alta energía no se puede explicar con la relatividad general de Einstein, que sin embargo es aplicable para casi todo el rango temporal de la historia posterior de un universo surgido tras un Big-Bang.

del universo actual. En el 2001 la agencia espacial americana NASA lanzó el WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe), <sup>8</sup> un nuevo satélite capaz de estudiar con gran detalle la radiación cósmica de fondo, que consiguió el mapa más detallado hasta la fecha de las anisotropías en la radiación de fondo de microondas. En este mapa ha sido posible identificar variaciones muy pequeñas, solo de una parte en cien mil, entre las intensidades de las microondas provenientes de diferentes direcciones, lo cual representa la evidencia de que el Principio Cosmológico puede ser usado como fundamento de la Cosmología.

La forma exacta de las fluctuaciones de temperatura no es lo que importa ya que observadores en distintos lugares del Universo observan diferentes mapas de temperatura. Si bien los detalles cambiarán de observador a observador, los aspectos generales son los mismos. Lo que interesa son las propiedades estadísticas del CMB. La cantidad de importancia estadística es el espectro angular de fluctuaciones que se construye a partir de los datos del mapa del CMB.

Las observaciones astrofísicas muestran que el Principio Cosmológico se cumple en escalas mayores de  $150h^{-1}Mpc$ , donde  $1Mpc \approx 3 \times 10^{24}cm$  ( $\approx 3$  años luz) es una medida muy conveniente para la astronomía extragaláctica y  $h \approx 0.7$  [3, 4] es una medida adimensional del ritmo de expansión actual del Universo. <sup>9</sup>

Dentro de la visión ortodoxa, la dinámica del Universo es descrita mediante las ecuaciones de Einstein del campo gravitatorio, las cuales relacionan la geometría del espacio-tiempo y su contenido de energía-materia. <sup>10</sup>

Usando el Principio Cosmológico, las ecuaciones de Einstein del campo gravitatorio se simplifican notablemente, sobre todo, se reduce el número de ecuaciones independientes. Exactamente, en tal aproximación, la expansión del Universo es descrita mediante una función del tiempo  $a(t)$ , llamada factor de escala: podemos entonces aproximar el universo como un espacio 3-dimensional homogéneo e isótropo el cual puede expandirse (o, en principio, contraerse) como una función del tiempo (en la figura B.5 se muestra esquemáticamente un modelo 2D de Universo isotrópico y homogéneo en expansión). La métrica en tal espacio-tiempo es necesariamente en la forma Robertson-Walker (RW).

Isotropía espacial implica simetría esférica. Seleccionando un punto como el origen, y usando coorde-

---

<sup>8</sup>Los datos aportados por el WMAP en 2003 y 2006 revelan un universo en expansión formado por un 4% de materia bariónica, un 22% de materia oscura y un 74% de energía oscura.

<sup>9</sup>La distancia media entre galaxias es de cerca de  $1Mpc$  mientras que las dimensiones del universo visible es de cerca de  $3000h^{-1}Mpc$ .

<sup>10</sup>El tratamiento convencional en Cosmología separa el estudio de la dinámica del Universo en la macro-escala ( $l > \sim 150h^{-1}Mpc$ ) del estudio de la formación de estructuras en escalas menores. La primera es modelada como una distribución de densidad de energía homogénea e isótropa y la segunda es resuelta en términos de inestabilidades gravitacionales las cuales pueden amplificar las pequeñas perturbaciones iniciales en la densidad de energía, conduciendo a la formación de estructuras como las galaxias.

nadas  $(x, \vartheta, \varphi)$  alrededor de este punto, el elemento de línea espacial toma la forma

$$d\sigma^2 = dr^2 + f^2(r) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) , \quad (1.2.33)$$

donde  $f(r)$  es una función real, la cual, si la métrica es no singular en el origen, obedece la ley  $f(r) \sim r$  cuando  $r \rightarrow 0$ .

Se prueba, que el espacio-tiempo más general consistente con la homogeneidad y la isotropía es

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) [d\rho^2 + f^2(\rho) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] , \quad (1.2.34)$$

donde las tres posibilidades para  $f(\rho)$  son

$$f(\rho) = \{\sin(\rho), \rho, \sinh(\rho)\} . \quad (1.2.35)$$

Este es un hecho puramente geométrico, independiente de los detalles de la relatividad general [83]. Se usan coordenadas polares esféricas  $(\rho, \theta, \phi)$ , porque la isotropía espacial implica simetría esférica en un entorno de cada punto. La coordenada temporal  $t$ , la cual es el tiempo propio medido por un observador comóvil (uno con coordenadas espaciales constante), es llamado tiempo cósmico, y la función  $a(t)$  es llamado factor de escala.

Existen otras formas útiles de la métrica RW. Un simple cambio de variables de la coordenada radial conduce a

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dx^2}{1 - kx^2} + x^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right] , \quad (1.2.36)$$

donde

$$k = \begin{cases} +1 & \text{si } f(\rho) = \sin(\rho) \\ 0 & \text{si } f(\rho) = \rho \\ -1 & \text{si } f(\rho) = \sinh(\rho) \end{cases} . \quad (1.2.37)$$

Geoméricamente,  $k$  describe la curvatura de las secciones espaciales (secciones de tiempo cósmico constante).  $k = +1$  corresponde a secciones curvadas positivamente (localmente isométricas a 3-esferas);  $k = 0$  corresponde a planitud local, y  $k = -1$  corresponde a secciones espaciales curvadas negativamente (localmente hiperbólicas). Estos son hechos válidos localmente como se espera que sea de una teoría local como la TGR [83].

Un segundo cambio de variables, el cual puede aplicarse a (1.2.34) o a (1.2.36), es transformar a un *tiempo conforme*,  $\tau$ , a través de

$$\tau(t) \equiv \int^t \frac{dt'}{a(t')} . \quad (1.2.38)$$

Aplicando esto a (1.2.36) se obtiene

$$ds^2 = a^2(\tau) \left[ -d\tau^2 + \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] , \quad (1.2.39)$$

donde se ha escrito  $a(\tau) \equiv a[t(\tau)]$  como es convencional. El tiempo conforme no mide el tiempo propio para cada observador particular, se utiliza para simplificar los cálculos.

Una cantidad particularmente útil definida a partir del factor de escala es el *parámetro de Hubble* (en ocasiones llamado factor de Hubble), dado por

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}. \quad (1.2.40)$$

El parámetro de Hubble nos dice cuan rápido las galaxias distantes receden de nosotros en relación a su distancia.

### 1.2.2 El Universo en expansión

Si el Universo está en expansión (como muestra la figura B.5), entonces las galaxias deberían estar alejándose unas de otras. Por tanto deberíamos ver galaxias en recesión con respecto a nuestra posición en el Universo. A primera vista parecería que el Principio cosmológico es violado dado que observamos que todo se aleja de nosotros, como si aparentemente nos situáramos en el centro del Universo. De hecho, cada observador ve a todos los objetos en huida con una velocidad proporcional a la distancia como muestra el diagrama de Hubble (figura B.1). Esto se cumple cualquiera sea la galaxia que seleccionemos para imaginarnos situados en ella, de modo que la isotropía del Universo (en la macro-escala) no es violada.

Para un objeto en recesión la longitud de onda de la luz o del sonido emitido por dicho objeto se alarga de modo que el valor recibido es mucho mayor que el que se emite. Es conveniente definir el factor de alargamiento como el redshift (o corrimiento al rojo)  $z$  :

$$1 + z \equiv \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{emit}} = \frac{1}{a}. \quad (1.2.41)$$

Para corrimientos al rojo pequeños, se aplica la fórmula de Doppler y  $z \cong \frac{v}{c}$ . Así, midiendo la cantidad por la cual las líneas de emisión y/o absorción se corren al rojo, podemos medir directamente cuán rápido las estructuras en las cuáles ellos residen se alejan de nosotros.

El origen del redshift se debe la expansión del espacio (y de las ondas de luz) entre el momento de emisión y el instante de recepción, y no se debe interpretar como debido al movimiento de las galaxias en un espacio absoluto (efecto Doppler). Según los estudios de Slipher (1912-1925) las galaxias muestran un espectro corrido al rojo. No obstante no fue hasta 1929 que Hubble descubrió que el Universo estaba en expansión. Hubble logra resolver 24 Galaxias cercanas en estrellas individuales y medir distancias usando el método de las estrellas Cefeidas (1929) obteniendo que el redshift es

proporcional a la distancia (Hubble 1929):

$$v = cz = H_0 d.$$

$H_0$  es la famosa constante de Hubble (unidades de  $km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}$  y dimensiones de  $t^{-1}$ ).

Dentro de algunas de las implicaciones de la ley de Hubble es que el Universo no es estático sino que está en expansión. Esta ley satisface el Principio Cosmológico y es la única que satisface el Principio Cosmológico. Esta no implica que la Tierra esté en el centro de la expansión sino que todo el Universo se expande homogénea e isotrópicamente.

El diagrama de Hubble sigue siendo la más directa evidencia de que el Universo está en expansión. A partir de este diagrama se infiere la ley de Hubble que establece que la velocidad de recesión de las galaxias es proporcional a la distancia y se formula según la ecuación  $\vec{v} = H\vec{r}$ . La ley de Hubble permite identificar a la constante de proporcionalidad  $H$ , con la magnitud  $\dot{a}/a$ . El valor de  $H$  medido hoy día (o sea,  $\dot{a}(t_0)/a(t_0)$ ) suele denotarse  $H_0$  y nos referiremos a este valor como “constante de Hubble” mientras que al valor de  $H$  como función de  $t$  le llamaremos “parámetro de Hubble”. El hecho de que la constante de Hubble ha sido medida positiva y no negativa, confirma que el Universo hoy día, en lugar de contraerse se expande; o sea, que las galaxias lejanas se alejan unas de otras con la expansión del Universo.

En la actualidad se sigue usando el mismo principio que el original: encontrar la distancia y el corrimiento al rojo de objetos distantes. Medir el corrimiento al rojo es muy sencillo; la parte difícil es determinar las distancias a objetos con brillo intrínscico desconocido. La opción más popular es determinar una “candela estándar”, una clase de objetos de igual brillo intrínscico. La diferencia entre el brillo aparente de tales dos objetos es el resultado de las diferentes distancias a que se encuentran de nosotros. El método es en ocasiones extendido para encontrar la correlación entre los brillo intrínscicos y observables. Por ejemplo las estrellas Cefeidas son estrellas cuyo brillo intrínscico está relacionado con el período. El telescopio espacial Hubble ha medido los periodos de miles de estrellas Cefeidas en galaxias tan lejanas como  $20Mpc$ . Con las distancias a estas galaxias fijadas, se pueden utilizar cinco medidas diferentes de distancia para llevar el Diagrama hasta más allá de  $400Mpc$ . Estas observaciones convergen al valor  $H_0 = 72\ km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}$ .

Segun las observaciones originales de Hubble en 1929,  $H_0$  arrojó el valor de  $500\ km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}$  (ver parte superior de la figura B.1). Recientemente el Proyecto Hubble Space Telescope Key Project [3] ha obtenido (usando 5 diferentes medidas de distancia) que el valor de mejor ajuste de  $H_0$  es  $72\ km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}$ .

Como se muestra en la figura B.1 la candela estándar que puede verse a distancias mayores son las

supernovas de tipo Ia. Como ellas son muy luminosas, pueden usarse para extender el diagrama de Hubble a valores de corrimiento al rojo muy grandes ( $z \cong 1.7$ ), un regimen donde la ley Doppler estándar deja de ser válida. La expresión de la distancia depende del contenido material del Universo. La tres curvas representadas en la figura B.1 corresponden a los tres diferentes posibilidades: Universo plano dominado por materia; Universo abierto; Universo plano con constante cosmológica. Los datos actuales de alta precisión son suficientes para determinar dentro de estas posibilidades cuál es la más favorecida por las observaciones. En este caso ellas desfavorecen el caso de un Universo dominado por materia como era la creencia hasta finales de la década de 1990. Esta creencia fue desafiada cuando recientes observaciones de supernovas.<sup>11</sup> tipo Ia (SnIa), realizadas por los proyectos Supernovae Cosmology Project y High-Z Supernovae Search Team, mostraron que la expansión del universo se estaba acelerando [1, 2] Al chequear varios modelos teóricos con dichas observaciones el resultado fue impactante: *una cosmología con una constante cosmológica proveía de una mejor explicación a los datos (modelo LCDM, Lambda Cold Dark Matter).*<sup>12</sup> Así, fue descubierto que el ritmo de expansión del universo en el pasado reciente era más lento de como es ahora; o sea, parece que el Universo en la macro-escala se expande cada vez más rápido.

Para caracterizar la expansión (actual) del Universo puede utilizarse el factor de “desaceleración” medido hoy día,  $q_0$ , el cuál se identifica en la expansión en series de Taylor:

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = 1 + H_0(t - t_0) - \frac{q_0}{2}H_0^2(t - t_0)^2 + \dots \quad (1.2.42)$$

Esto define el parámetro de desaceleración como

$$q_0 = -\frac{\ddot{a}(t_0)}{a(t_0)} \frac{1}{H_0^2} = -\frac{a(t_0)\ddot{a}(t_0)}{\dot{a}(t_0)^2}, \quad (1.2.43)$$

donde los puntos denotan derivada con respecto al tiempo, el subíndice 0 se refiere a magnitudes medidas en el tiempo actual ( $a(t_0)$  es el valor del factor de escala hoy día). Cuanto más grande es  $q_0$ , tanto más grande es la desaceleración [76].

Si conocemos las propiedades de la materia en el Universo, entonces  $q_0$  no es independiente de los parámetros  $H_0$  y  $\Omega_0$  (que será definido más adelante y denota la contribución del contenido material total del Universo a la densidad crítica hoy día.<sup>13</sup>) Estos dos parámetros son suficientes (a primer

<sup>11</sup>Estrellas en implosión las cuales son normalmente más brillantes que la galaxia misma que las alberga (<http://www.astrophysicsspectator.com/topics/overview/DistanceExtragalactic.html>).

<sup>12</sup>Modelo del Universo que propone a la materia oscura fría para formar la estructura a gran escala del Universo; es decir las galaxias, los cúmulos de galaxias, etc., y a una constante cosmológica para que explique la expansión acelerada del Universo.

<sup>13</sup>La densidad crítica es la densidad límite entre un Universo que se recolapsa y otro que se expande para siempre, o sea es exactamente el valor de densidad para la cual el Universo tiene la geometría plana. Si la densidad del Universo es mayor que la crítica, el Universo se expandirá hasta un máximo y luego se volverá a encoger hasta un punto. Si es menor; se expandirá por siempre. Según las mediciones más recientes la densidad crítica es  $\rho_c(t_0) = 1.88h^2 \times 10^{-26} kg m^{-3}$ .

grado de aproximación) para describir todas las posibilidades. No obstante si no conocemos todas las propiedades de la materia en el Universo,  $q_0$  puede proveer una visión complementaria de este, ya que dicho valor puede medirse directamente haciendo observaciones de objetos muy distantes, tales como las galaxias distantes.

### 1.2.3 Composición del Universo

Es conveniente medir la densidad de energía de los distintos componentes en términos de la densidad de energía crítica  $\rho_c(t_0) = 3H_0^2/8\pi G$ , donde  $H_0 = (\dot{a}/a)_0$  es el ritmo de la expansión del Universo en el presente. El parámetro adimensional de la densidad (densidad fraccional) de energía  $\Omega_i = \rho_i/\rho_c$ , nos permite conocer la contribución de los diferentes componentes de nuestro Universo (donde  $i$  se utiliza para representar el  $i$ -ésimo componente, como por ejemplo materia oscura, energía oscura, radiación, etc.).

Los datos observacionales conducen a los resultados siguientes:

- (i) La densidad de energía total en nuestro Universo está acotada según  $0.98 < \sim \Omega_{total} < \sim 1.08$ . Este valor puede ser determinado por el espectro angular de potencias de la radiación del CMB (con la hipótesis razonable de que  $h > 0.5$ ). Estas observaciones muestran que vivimos en un universo con densidad crítica, o sea, en un Universo plano.<sup>14</sup>
- (ii) Las observaciones del deuterio primordial, que se originó en la nucleosíntesis del Big Bang<sup>15</sup>, así como las observaciones del CMB, muestran que la cantidad total de bariones<sup>16</sup> en nuestro Universo contribuyen con cerca de  $\Omega_B = (0.024 \pm 0.0012)h^{-2}$ . Dado que independientemente las observaciones sobre la constante de Hubble indican  $h = 0.72 \pm 0.007$ , concluimos que  $\Omega_B \cong 0.04 - 0.06$ . De aquí se puede concluir que vivimos en un Universo cuyo contenido material fundamental es no-bariónico.
- (iii) Las observaciones relacionadas con las estructuras en la macro-escala, así como con su dinámica (curvas de rotación<sup>17</sup> de las galaxias, estimado de la masa de los clusters de galaxias, lentes

---

<sup>14</sup>En el modelo cosmológico estándar la relación entre la densidad fraccional de energía-materia total,  $\Omega$ , y el índice de curvatura espacial,  $k$ , está dada por ecuación  $|\Omega(t) - 1| = |k|/a(t)^2 H(t)^2$ . Esta expresión se deduce a partir de la ecuación de Friedmann. Si  $\Omega \equiv 1$  entonces la curvatura espacial del universo, que es proporcional a  $k$ , es cero. A partir de las observaciones de SnIa combinada con las observaciones del espectro angular de potencias del CMB, se determinó que el parámetro de densidad total  $\Omega$  tiene un valor cercano a 1

<sup>15</sup>Proceso después del origen del Universo por el cual se formaron los primeros elementos, fundamentalmente hidrógeno y helio 4.

<sup>16</sup>Partículas que tienen interacción fuerte, nuclear. En el átomo estas partículas son los nucleones y tienen masas mucho mayores que los electrones, por lo que prácticamente toda la masa del átomo está concentrada en el núcleo, es decir, en los bariones.

<sup>17</sup>Gráfica de las velocidades tangenciales de un sistema de muchos cuerpos girando en torno a sí mismos.

gravitacionales <sup>18</sup>), sugieren que el universo presenta una componente de materia que no es luminosa (conocido como materia oscura <sup>19</sup>) compuesta por partículas masivas de débil interacción (WIMPs, Weakly Interacting Massive Particles) <sup>20</sup> las cuales se agrupan en escalas galácticas. Esta componente contribuye como  $\Omega_{MO} \cong 0.15 - 0.30$ .

- (iv) Combinando la última observación con la primera podemos concluir que existe (al menos) una componente de densidad de energía del Universo que contribuye con cerca de un 70% de la densidad crítica. El análisis inicial de algunas observaciones, indica que dicho componente (denominado energía oscura) no crea acumulaciones locales de materia, tiene presión negativa y contribuye al contenido del Universo como  $\Omega_{EO} \cong 0.7 - 0.85$ . Las observaciones sugieren que esta componente tiene parámetro de ecuación de estado  $w = p/\rho < \sim -0.78$
- (v) El Universo también contiene radiación contribuyendo a una densidad de energía  $\Omega_R h^2 = 2.56 \times 10^{-5}$  ( $\Omega_R \cong 4.84 - 5.03 \times 10^{-5}$ ), hoy mucha de esta radiación es debido a los fotones en la radiación del CMB. Esta contribución es dramáticamente irrelevante hoy día sin embargo, pudo haber sido la componente dominante en el Universo a valores de corrimiento al rojo mayores que  $z_e \cong \Omega_{MO}/\Omega_R \cong 4 \times 10^4 \Omega_{MO} h^2$ .
- (vi) A partir de las observaciones (i)-(v), podemos concluir que nuestro Universo hoy día tiene:

$$(\Omega_{EO}, \Omega_{MO}, \Omega_B, \Omega_R) \cong (0.7, 0.26, 0.04, 5 \times 10^{-5}).$$

De esta manera nos enfrentamos al hecho de que el 96% de nuestro Universo está formado por formas de energía, y/o materia, cuya naturaleza desconocemos y se trabaja arduamente en resolver ese enigma. De esa energía, y/o materia total, el 70% tiene carácter repulsivo y es responsable de la aceleración de la expansión. En la vasta literatura sobre el tema hay numerosas descripciones que tienen más o menos argumentos de interés a favor de ellas, sin que ninguna represente hoy día la respuesta definitiva.

#### 1.2.4 Dinámica: Las ecuaciones de Friedmann

Como ha sido mencionado, la métrica RW es una consecuencia puramente cinemática de requerir la homogeneidad e isotropía de nuestras secciones espaciales. Ahora vemos la dinámica, en la forma de ecuaciones diferenciales gobernando la evolución del factor de escala  $a(t)$ . Estas resultan de aplicar

---

<sup>18</sup>Efecto causado en una fuente luminosa debido a un objeto con un campo gravitacional que se interpone entre la fuente y el observador.

<sup>19</sup>Tipo de materia desconocida que determina la estructura a gran escala del Universo; es decir, la materia oscura es el principal contribuyente para la formación de las galaxias, los cúmulos y supercúmulos de galaxias, etc. En la actualidad, esta materia no interactúa con la materia bariónica.

<sup>20</sup>Partículas que interactúan debilmente. Han sido postuladas como candidatas a la materia oscura.

las ecuaciones de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (1.2.44)$$

a la métrica RW.

Primero veamos que tipo de tensores de energía-momento  $T_{\mu\nu}$  encontramos típicamente en cosmología. La manera más simple y consecuente con lo que se observa de modelar la materia/energía en el universo es asumir que el tensor de energía momento de la materia cosmológica es en la forma de un fluido perfecto. Esta forma es

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu} , \quad (1.2.45)$$

donde  $U^\mu$  es la 4-velocidad del fluido,  $\rho$  es la densidad de energía en el marco de reposo del fluido y  $p$  es la presión en el mismo marco. Por consistencia con la métrica RW, la presión es necesariamente isotrópica. De manera similar, los elementos del fluido serán comóviles en el marco de reposo cosmológico, de manera de la 4-velocidad en las coordenadas de (1.2.36) será

$$U^\mu = (1, 0, 0, 0) . \quad (1.2.46)$$

El tensor de energía-momento, toma por tanto la forma

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & pg_{ij} \end{pmatrix} \quad (1.2.47)$$

donde  $g_{ij}$  representa la métrica espacial (e incluye el factor de  $a^2$ ).

Con esta simplificada descripción para la materia, ya estamos listos para aplicar las ecuaciones de Einstein (1.2.44) a la cosmología. Usando (1.2.36) y (1.2.45), obtenemos dos ecuaciones. La primera es conocida como ecuación de Friedmann,

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \rho_i - \frac{k}{a^2} , \quad (1.2.48)$$

donde el punto denota derivada con respecto al tiempo cósmico  $t$  e  $i$  indica todos los posibles tipos diferentes de energía en el universo. Esta es una ecuación de restricción, en el sentido que no se puede especificar libremente la derivada  $\dot{a}$ ; esta está determinada en términos de la densidad de energía y la curvatura. La segunda ecuación, que es una ecuación de evolución, es

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -4\pi G \sum_i p_i - \frac{k}{2a^2} . \quad (1.2.49)$$

Es útil combinar (1.2.48) y (1.2.49) para obtener *la ecuación de aceleración*

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \sum_i (\rho_i + 3p_i) . \quad (1.2.50)$$

De hecho, si conocemos las magnitudes y la evolución de las diferentes componentes de energía  $\rho_i$ , la ecuación de Friedmann (1.2.48) es suficiente para resolver la ecuación de evolución unívocamente. La ecuación de aceleración es conceptualmente útil, pero rara vez usada en los cálculos [83].

La ecuación de Friedmann relaciona la razón de crecimiento del factor de escala, codificado por el parámetro de Hubble, a la densidad de energía de la materia total en el universo. Podemos usar la ecuación de Friedmann para definir, en un instante dado de tiempo, una densidad de energía crítica,

$$\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G} , \quad (1.2.51)$$

para la cual las secciones espaciales son precisamente planas ( $k = 0$ ). Podemos definir el parámetro de densidad

$$\Omega_{\text{total}} \equiv \frac{\rho}{\rho_c} , \quad (1.2.52)$$

el cual permite relacionar la densidad total de energía en el universo a su geometría local a través de

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{total}} > 1 &\Leftrightarrow k = +1 \\ \Omega_{\text{total}} = 1 &\Leftrightarrow k = 0 \\ \Omega_{\text{total}} < 1 &\Leftrightarrow k = -1 . \end{aligned} \quad (1.2.53)$$

Es en ocasiones conveniente definir la fracción de densidad de energía crítica en cada componente diferente

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c} . \quad (1.2.54)$$

La conservación de la energía se expresa en la nulidad de la divergencia covariante del tensor de energía-momento,

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0 . \quad (1.2.55)$$

Aplicando esto a nuestras hipótesis (la métrica RW (1.2.36) y un tensor de energía-momento de tipo fluido perfecto (1.2.45)) conduce a una única ecuación de conservación,

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 . \quad (1.2.56)$$

Esta ecuación realmente no es independiente de las ecuaciones de Friedmann y de aceleración, pero se requiere por consistencia. Esta implica que la expansión del universo (especificada por  $H$ ) puede conducir a cambios locales en la densidad de energía. Notemos que no existe una noción de conservación de la energía total, cuando puede haber intercambio entre la materia y la geometría del espacio-tiempo.

Se requiere una pieza final de información antes de tratar de resolver las ecuaciones cosmológicas, y es, ¿como la presión y la densidad de energía se relaciona una con la otra? Dentro de la aproximación de fluido utilizada aquí, podemos asumir que la presión es una función de la densidad de energía  $p = p(\rho)$ . Es conveniente definir el parámetro de ecuación de estado,  $w$ , por

$$p = w\rho . \tag{1.2.57}$$

Muchas fuentes de materia cosmológica obedecen esta relación con  $w$  constante. Por ejemplo,  $w = 0$  corresponde a materia sin presión, o polvo (cualquier colección de partículas masivas no relativistas califica). Similarmente,  $w = 1/3$  que corresponde a un gas sin presión, sean fotones reales u otras especies altamente relativistas. En ocasiones se utiliza la parametrización  $w = \gamma - 1$ , para  $w$  constante. Desde el punto de vista físico, destacan entre los valores más interesantes los de  $\gamma = 1$  (polvo), y  $\gamma = 4/3$  (radiación), especialmente para etapas tempranas del Universo. El valor  $\gamma = 0$  corresponde a la Constante Cosmológica (CC) y el valor  $\gamma = 2$  es en ocasiones considerado, correspondiendo a un fluido “rígido”. Supondremos que  $0 \leq \gamma \leq 2$ , ya que valores de  $\gamma > 2$  corresponden a fluidos con propagación supralumínica.

Un valor constante de  $w$  conduce a una gran simplicación en la resolución de las ecuaciones. En particular, usando (1.2.56), podemos ver que la densidad de energía evoluciona con el factor de escala de acuerdo a

$$\rho(a) \propto \frac{1}{a(t)^{3(1+w)}} . \tag{1.2.58}$$

Notemos que no es necesario incluir la constante cosmológica  $\Lambda$  en las ecuaciones gravitacionales. Esto se debe a que es equivalente tratar la constante cosmológica como una componente más de la densidad de energía del universo. De hecho, adicionando la constante cosmológica  $\Lambda$  a las ecuaciones de Einstein es equivalente a introducir un tensor de energía-momento de la forma

$$T_{\mu\nu} = -\frac{\Lambda}{8\pi G}g_{\mu\nu} . \tag{1.2.59}$$

Que es sencillamente un fluido perfecto con tensor de energía momento (1.2.45) con

$$\begin{aligned} \rho_\Lambda &= \frac{\Lambda}{8\pi G} \\ p_\Lambda &= -\rho_\Lambda , \end{aligned} \tag{1.2.60}$$

así que el parámetro de ecuación de estado es

$$w_\Lambda = -1 . \tag{1.2.61}$$

Lo que implica que la densidad de energía es una constante,

$$\rho_\Lambda = \text{constante} . \tag{1.2.62}$$

Por tanto, esta energía es constante en todo el espacio-tiempo; decimos que la constante cosmológica equivale a la *energía de vacío*.

De manera similar, es en ocasiones útil pensar en una componente no nula de curvatura espacial como otra componente del sector energético, obedeciendo

$$\begin{aligned}\rho_k &= -\frac{3k}{8\pi G a^2} \\ p_k &= \frac{k}{8\pi G a^2},\end{aligned}\tag{1.2.63}$$

de modo que

$$w_k = -1/3.\tag{1.2.64}$$

Esta no es por supuesto una densidad de energía en el sentido estricto de la palabra;  $\rho_k$  es simplemente una forma conveniente de saber cuanta densidad de energía está perdida, en comparación al universo plano.

### 1.2.5 Universos planos

Es mucho más fácil encontrar soluciones exactas a las ecuaciones cosmológicas de movimiento si hacemos  $k = 0$ . Afortunadamente para nosotros, hoy día podemos apelar más que a la sencillez matemática para hacer esta elección. Las observaciones cosmológicas modernas, en particular las medidas de precisión de la radiación del fondo cósmico de microondas, muestran que el universo hoy día es extremadamente plano.

En el caso de secciones espacialmente planas y parámetro de ecuación de estado constante  $w$ , se puede resolver exactamente la ecuación de Friedmann (1.2.58) para obtener

$$a(t) = a_0 \left( \frac{t}{t_0} \right)^{2/3(1+w)},\tag{1.2.65}$$

donde  $a_0$  es el factor de escala hoy día, a menos que  $w = -1$ , en cuyo caso tenemos  $a(t) \propto e^{Ht}$ . Aplicando este resultado a las fuentes más usadas en cosmología tenemos los resultados que se muestran en la tabla C.1.

### 1.2.6 Incluyendo curvatura

Es cierto que sabemos observacionalmente que el universo actual es plano con un alto grado de exactitud. Sin embargo, es instructivo, y útil cuando se considera cosmología de tiempos tempranos, considerar como las soluciones ya identificadas cambian cuando se incluye curvatura. Discutiremos algunos ejemplos de la referencia [83] en los que se trabaja con el tiempo conforme  $\tau$ .

Primero suponemos que la densidad de energía está dominada por materia ( $w = 0$ ). Las ecuaciones de Einstein, en términos del tiempo conforme se escriben

$$\begin{aligned} 3(k + h^2) &= 8\pi G\rho a^2 \\ k + h^2 + 2h' &= 0, \end{aligned} \quad (1.2.66)$$

donde la prima denota derivada con respecto al tiempo conforme  $h(\tau) \equiv a'/a$ . Estas ecuaciones se resuelven con facilidad para  $h(\tau)$  dando como resultado

$$h(\tau) = \begin{cases} \cot(\tau/2) & k = 1 \\ 2/\tau & k = 0 \\ \coth(\tau/2) & k = -1 \end{cases}. \quad (1.2.67)$$

Esto conduce a

$$a(\tau) \propto \begin{cases} 1 - \cos(\tau) & k = 1 \\ \tau^2/2 & k = 0 \\ \cosh(\tau) - 1 & k = -1 \end{cases}. \quad (1.2.68)$$

Podemos usar estos resultados para establecer una conexión entre el tiempo cósmico y el tiempo conforme, la cual es

$$t(\tau) \propto \begin{cases} \tau - \sin(\tau) & k = 1 \\ \tau^3/6 & k = 0 \\ \sinh(\tau) - \tau & k = -1 \end{cases}. \quad (1.2.69)$$

Consideremos modelos dominados por radiación ( $w = 1/3$ ). En términos del tiempo conforme, las ecuaciones de Einstein se escriben

$$\begin{aligned} 3(k + h^2) &= 8\pi G\rho a^2 \\ k + h^2 + 2h' &= -\frac{8\pi G\rho}{3}a^2. \end{aligned} \quad (1.2.70)$$

Resolviéndolas como hicimos antes obtenemos

$$h(\tau) = \begin{cases} \cot(\tau) & k = 1 \\ 1/\tau & k = 0 \\ \coth(\tau) & k = -1 \end{cases}, \quad (1.2.71)$$

$$a(\tau) \propto \begin{cases} \sin(\tau) & k = 1 \\ \tau & k = 0 \\ \sinh(\tau) & k = -1 \end{cases}, \quad (1.2.72)$$

y

$$t(\tau) \propto \begin{cases} 1 - \cos(\tau) & k = 1 \\ \tau^2/2 & k = 0 \\ \cosh(\tau) - 1 & k = -1 \end{cases}. \quad (1.2.73)$$

Es muy sencillo interpretar estas soluciones examinando el comportamiento del factor de escala  $a(\tau)$ ; los rasgos cualitativos son los mismos para el universo dominado por materia o por radiación. En ambos casos, los universos con curvatura positiva ( $k = +1$ ) se expanden desde una singularidad inicial

con  $a = 0$ , y posteriormente recolpazan de nuevo. La singularidad inicial es el Big-Bang, mientras que la singularidad final es llamada Big-Crunch. Los universos con curvatura cero o negativa comienzan el Big Bang y se expanden por siempre. Este comportamiento no es evitable, sin embargo; como veremos más adelante esto se altera por la presencia de la energía de vacío (o sus equivalentes dinámicos, por ejemplo, energía quintasma, como veremos en el Capítulo 3 de esta tesis).

### 1.2.7 Geometría, Destino y Energía Oscura

Sabemos que con polvo y radiación como las fuentes de densidad de energía, los universos con densidad mayor que la crítica colapsan en última instancia, mientras que aquellos con densidad menor que la crítica se expanden por siempre, con los modelos planos estando en la frontera de los otros dos. Para los modelos provistos de polvo únicamente esto se ve fácilmente de (1.2.68) and (1.2.72).

La conexión entre geometría y destino fue bastante razonable en el pasado donde los únicos tipos de energía relevantes son el polvo y la radiación.

En años recientes se ha hecho claro que la componente de densidad de energía dominante del universo en el presente no es ni polvo ni radiación, sino energía oscura. Esta componente se caracteriza por que su parámetro de ecuación de estado satisface la desigualdad  $w < -1/3$ .

Por simplicidad, nos concentraremos en que sucede si se considera como única fuente de densidad de energía en el universo la constante cosmológica, con  $w = -1$ . En este caso, la ecuación de Friedmann puede resolverse para cualquier valor de la curvatura espacial  $k$ . Si  $\Lambda > 0$  entonces las soluciones son

$$\frac{a(t)}{a_0} = \begin{cases} \cosh\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\right) & k = +1 \\ \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\right) & k = 0 \\ \sinh\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\right) & k = -1 \end{cases}, \quad (1.2.74)$$

Ya el caso con  $k = 0$  lo habíamos resuelto antes. Es claro inmediatamente, en el límite  $t \rightarrow \infty$ , que todas las soluciones se expanden exponencialmente, independientemente de la curvatura espacial. De hecho, estas soluciones describen exactamente el mismo espacio-tiempo, el *espacio de de Sitter*, sólo que en diferentes sistemas coordenados. Este aspecto del espacio de de Sitter es crucial en la discusión de la inflación. El punto medular es que el universo se expande por siempre, independientemente de la curvatura espacial. Notemos, sin embargo, que no todas las soluciones en (1.2.74) cubren realmente todo el espacio de de Sitter; las soluciones con  $k = 0$  y  $k = -1$  representan sistemas coordenados válidos localmente los cuales cubren solo una parte de la variedad. Por completitud, completemos la descripción de los espacios provistos de constante cosmológica, considerando el caso  $\Lambda < 0$ . Este

espacio-tiempo es llamado *espacio Anti-de Sitter* (AdS) y es claro, de las ecuaciones de Friedmann, que este espacio puede existir solo para valores de curvatura espacial  $k = -1$ . La solución correspondiente para el factor de escala es

$$a(t) = a_0 \sin \left( \sqrt{-\frac{\Lambda}{3}} t \right). \quad (1.2.75)$$

De igual modo, esta solución no cubre todo el espacio AdS.

### 1.2.8 Los Campos Escalares y la Energía Oscura

La energía oscura es uno de los temas más debatidos en la era de la cosmología de precisión (ver las recientes revisiones del tema: [11, 12]), siendo la propuesta de la constante cosmológica (CC) el más simple candidato a la EO. Esta propuesta sufre, no obstante, del bien conocido problema de que existe una (todavía) inexplicada discrepancia (de cerca de 120 órdenes de magnitud), entre el valor cosmológicamente observado y el valor predecido por la teoría cuántica de campos (precisamente este problema ha sido bautizado como el problema de la constante cosmológica). A causa de dicho obstáculo, han sido propuestas varias rutas alternativas como vía para eludir ese grave problema teórico.

Una lista incompleta incluye (ver referencias en [12]): modelos de quintaesencia los cuales invocan la existencia un campo escalar canónico con un potencial de naturaleza “escalante” evolucionando en presencia de otros campos materiales de fondo; modelos con campos escalares; campos “camaleón” en los cuales el campo escalar se acopla a la densidad de energía de los bariones, el cual es homogéneo y varía a través del espacio, desde la escala del sistema solar hasta escalas cosmológicas; un campo escalar con un término cinético no canónico llamado K-esencia, basado en un trabajo anterior de K-inflación; gravedad modificada tanto inspirada en teoría de cuerdas, así como haciendo uso de acciones relativísticas modificadas más generales, ambas teniendo el efecto de introducir correcciones a escalas de longitud grandes, y modificar la evolución del Universo en tiempos recientes; las implicaciones cosmológicas de considerar no linealidades en las ecuaciones del campo, las cuales cambian significativamente la evolución de fondo y conducen a la aceleración en tiempos recientes sin introducir nueva materia; gases de Chaplygin, los cuales unifican la EO y la MO bajo una misma componente “exótica”; taquiones que tiene su origen en la teoría de cuerdas; un mismo campo escalar responsable tanto de la inflación en el Universo primordial y de nuevo hoy día, conocida como inflación quintaesencial; EO fantasma y otras, todas las cuales son soluciones, más o menos exóticas, al problema de la EO.

En la tabla C.2 enumeraremos algunas de las diferentes densidades lagrangianas que se han propuesto para describir los diferentes escenarios con campo escalar que se han utilizado para modelar la energía

oscura.<sup>21</sup> Adicionalmente presentaremos las correspondientes ecuaciones del movimiento para el campo escalar las cuales se obtienen mediante un principio de mínima acción.

Los modelos más populares para la EO han sido los campos escalares con “rodar lento” por su potencial de autointeracción, llamados campos escalares de “quintaesencia” [84, 85, 86]. Estos modelos se describen mediante un campo escalar ordinario  $\phi$  mínimamente acoplado a la gravedad. Una selección adecuada de los potenciales de autointeracción conduce a la expansión acelerada de tiempo reciente.

La acción para la quintaesencia está dada por:

$$S = \int d^4x \sqrt{|g|} \mathcal{L}_\phi \quad (1.2.76)$$

(ver definición de  $\mathcal{L}_\phi$  en la tabla C.2).

El tensor de energía-momento del campo (que se obtiene variando la acción (1.2.76) respecto de  $g^{\alpha\beta}$  y teniendo en cuenta que  $\delta\sqrt{|g|} = -(1/2)\sqrt{|g|}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}$ ) está dado por:

$$T_{\alpha\beta} \equiv -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}} = \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - g_{\alpha\beta} \left[ \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} \partial_\gamma \phi \partial_\delta \phi + V(\phi) \right]. \quad (1.2.77)$$

En el caso espacialmente homogéneo la densidad y presión del campo escalar son, respectivamente  $\rho = -T_0^0 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)$ ,  $p = T_i^i = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$ . Se asume que  $w \equiv \frac{p}{\rho} \in [-1, -\frac{1}{3}]$ .

Recientemente se ha argumentado que las observaciones astrofísicas combinadas (de las SNIa y de las fluctuaciones de densidad del CMB) parecen favorecer la existencia de una componente de EO con parámetro de ecuación de estado  $\omega = p/\rho < -1$  [87, 88], donde  $p$  es la presión y  $\rho$  la densidad de energía del fluido. Las fuentes de materia que comparten esta propiedad violan la Condición de Energía Nula Dominante (CEND).<sup>22</sup> Estas fuentes han sido investigadas como posibles candidatos para la EO y han sido nombradas: componentes “fantasma” [92, 93].

Debido a que la violación de la CEND presupone inestabilidades en el vacío, los modelos fantasmas son intrínsecamente inestables.<sup>23</sup> Sin embargo, si consideramos a los campos fantasmas como una teoría efectiva, o sea, el límite de bajas energías de una teoría fundamental, por ejemplo, la teoría de cuerdas, estos modelos podría ser viables fenomenológicamente [95].

La EO fantasma puede describirse por un campo escalar ordinario  $\phi$  mínimamente acoplado a la

---

<sup>21</sup>Aunque la mayoría de estos modelos son de índole fenomenológico es posible tratarlos como teorías efectivas inspiradas en teorías escalares-tensoriales.

<sup>22</sup>Que las fuentes que violan la CEND puedan existir se ha discutido décadas atrás, por ejemplo ver en las referencias [89, 90, 91].

<sup>23</sup>Otra característica muy extraña de los universos con energía fantasmas es que su entropía (ver apéndice A) es negativa [94].

gravedad. La acción para este campo material está dada por:

$$S = \int d^4x \sqrt{|g|} \mathcal{L}_\phi \quad (1.2.78)$$

(ver definición de  $\mathcal{L}_\phi$  en la tabla C.2).

El tensor de energía–momento se define de manera análoga (1.2.77) mediante la identificación

$$\partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi \rightarrow -\partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi. \quad (1.2.79)$$

Hasta el momento no existe consenso alguno sobre la idea de considerar un fluido material con el signo “errado” de la densidad de energía cinética, luego la motivación de estudiar estos modelos, como en la mayoría de los trabajos en los campos fantasma, está dada principalmente por las observaciones.

El argumento más usado para considerar la materia fantasma a un nivel clásico se basa en la idea de que a grandes distancias la teoría del campo de la partículas fantasmas es una teoría efectiva [96].

Algunos autores han encontrado que las bajas energías efectivas (a las que pudieran originarse los campos fantasmas) pueden obtenerse en una nueva física más allá de la escala de TeV.<sup>24</sup> Una posibilidad, también vista en [96], es que las excitaciones masivas de los campos fantasma pudieran provenir de un sector de poca energía que está oculto totalmente del modelo estándar de las partículas, a excepción de un acoplamiento gravitacional. En nuestra opinión los mundos branas, en particular los escenarios de Randall-Sundrum tipo II (RSII) (estos modelos se proponen en la referencia [97]), pudieran ser la fuente de los campos fantasma que se requieren para llevar a cabo la hipótesis de la energía fantasma. Además, la naturaleza fantasma de la energía oscura se puede reinterpretar como surgida del apantallamiento dinámico de la constante cosmológica correspondiente a la brana en los modelos de mundos branas de Dvali-Gabadadze-Porrati (DGP) (estos modelos se proponen en la referencia [98]) en donde se considera una constante cosmológica estándar en la brana [99].

### 1.3 Resumen de resultados: fundamentos de cosmología

- La ley de Hubble satisface el Principio Cosmológico y es la única que satisface el Principio Cosmológico. La ley de Hubble no implica que la Tierra esté en el centro de la expansión sino que todo el Universo se expande homogénea e isotrópicamente.
- La expansión implica que el Universo no ha existido por siempre sino que en algún momento en el pasado toda las galaxias estuvieron concentradas en un pequeño volumen (indicativo del

---

<sup>24</sup>La teoría de cuerda, en particular, no es recomendable como una fuente posible para los campos fantasmas [96].

Big-bang). Asumiendo que la expansión ha sido uniforme el tiempo transcurrido desde que dos galaxias estuvieron juntas es  $1/H_0$ . Esta cantidad se denomina el tiempo de Hubble (y es  $\sim 14$  Giga años).

- La distancia  $c/H_0$  se llama distancia de Hubble. En un Universo con expansión uniforme esta es la distancia máxima que un fotón ha podido recorrer desde el Big Bang. Desde el punto de vista del observador, este es un horizonte ya que los fotones emitidos por objetos más lejanos aún no han tenido tiempo para llegar al observador. Se llama horizonte porque el observador no puede ver más lejos de esta distancia. Para  $H_0 = 70$  la distancia de Hubble es de  $4300 Mpc$ .
- La interacción gravitacional de las galaxias introduce movimientos con respecto al flujo de Hubble los que reciben el nombre de “velocidades peculiares” y que alcanzan valores típicos de  $300 km s^{-1}$ . La ley de Hubble no es válida a distancias (redshifts) pequeñas.
- Usando una antena de microondas Penzias y Wilson descubrieron por casualidad en 1965 un fondo isotrópico de radiación. En 1992 el satélite COBE reveló que el CMB tiene un espectro de cuerpo negro con  $T = 2.73K$ ,  $n = 4 \times 10^8 m^{-3}$ ,  $\lambda_{peak} = 1.9mm$ ,  $\langle E \rangle \sim 3k_B T \sim 6.34 \times 10^{-4} eV$ .
- El CMB es muy isotrópico con  $\Delta T/T \sim 10^{-5}$
- Fuerte evidencia en favor  $T \sim 3000K$  y los electrones y protones se combinaron para formar átomos neutros. En ese momento el Universo se hizo transparente.
- Desde la época de combinación el CMB ha mantenido su espectro de cuerpo negro pero la temperatura es 1000 veces menor, lo cual es consecuencia directa de la expansión. En un Universo en expansión  $T \propto a^{-1}$  por lo cual el CMB corresponde a una foto del Universo cuando el factor de escala era 1000 veces menor al actual.
- El principio de equivalencia: *cualquier sistema de referencia no inercial es localmente equivalente a un sistema inercial con un cierto campo de gravitación, y viceversa, todo campo gravitatorio puede hacerse desaparecer localmente escogiendo un sistema de referencia adecuado.*
- El movimiento inercial tiene lugar a través de órbitas geodésicas (circunferencias de radio máximo en una esfera): estas son las órbitas determinadas por la forma del espacio, que simplemente van por los caminos menos esforzados de un espacio que no es plano.
- La curvatura del espacio tiempo, causada por la interacción entre la masa y la energía con el espacio-tiempo, permite explicar los efectos gravitacionales como movimientos inerciales en un

espacio tiempo curvo. La curvatura del espacio-tiempo está creada por la tensión que la masa y la energía ejercen sobre el mismo.

- Principio Cosmológico de Einstein: El Universo es homogéneo e isótropo a gran escala. En los estudios sobre el Universo, este se ve reflejado en el uso de la métrica máximamente simétrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[ \frac{1}{1 - kr} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \right].$$

- Partículas:
  - Bariones: Protones ( $938.3MeV$ ), Neutrones ( $939.6MeV$ ): 71% H, 28% He, 1% C, 0.3% O, + ...
  - Electrones ( $0.5MeV$ )
  - Neutrinos: posiblemente con masa distinta de cero (medido a partir de oscilaciones, i.e, mutaciones de  $\nu_s$  en otros tipos de  $\nu_s$ )  $\sim 10^{-3} - 10^{-5}eV$ .
  - Fotones
  - Materia oscura bariónica: Enanas Blancas, Estrellas de neutrones, Agujeros Negros, Enanas Cafés
  - Materia oscura no bariónica: Neutrinos, partículas hipotéticas (WIMPS)
  - Energía oscura: Energía del vacío, Constante Cosmológica, Quintesencia

## Capítulo 2

# Sistemas dinámicos en cosmología

La necesidad de analizar cualitativamente la evolución cósmica en un escenario específico viene dada por la no linealidad característica de las ecuaciones diferenciales que describen el modelo cosmológico y por la imposibilidad de formular un problema de frontera adecuado para la descripción del Universo, lo que hace casi imposible obtener soluciones exactas suficientemente generales y/o representativas. Los estudios cualitativos basados en técnicas de la teoría de los sistemas dinámicos nos permiten obtener información relevante sobre el sistema cosmológico sin necesidad de especificar condiciones iniciales y por tanto constituye una subárea de la Cosmología con identidad propia. En este capítulo hacemos una revisión sobre las herramientas de la teoría cualitativa de la Teoría de los Sistemas Dinámicos de aplicación en Cosmología y en otras áreas de investigación.

El capítulo está organizado de la manera siguiente. En la sección 2.1, se introducen algunos conceptos básicos y se enuncia el Teorema de Hartman-Grobman (Teorema 2.1.1) el cual establece el nexo entre el flujo no lineal y el flujo linealizado en una vecindad de un punto crítico. En la sección 2.2, se introduce el concepto fundamental de conjunto invariante y en particular los conceptos de conjunto  $\alpha$  y  $\omega$ -límite. En esta sección enunciamos la Proposición 2.2.3, la cuál se utiliza en la tesis para la identificación de conjuntos invariantes simples (y en muchas ocasiones no triviales). Se enuncian el Principio de Invariancia de LaSalle (teorema (2.2.6)) y el Principio de Monotonía (teorema (2.2.7)), los cuales se utilizan en la tesis de manera combinada para obtener información acerca de los conjuntos  $\alpha$  y  $\omega$ -límite y así, los atractores del pasado y el futuro. Una cuestión de mucho interés en el estudio cualitativo del flujo asociado a un sistema dinámico es conocer de antemano si es posible descartar la existencia de puntos críticos, órbitas periódicas, órbitas recurrentes u órbitas homoclínicas en un conjunto invariante dado. La existencia de funciones monótonas en dicho conjunto conduce a la conclusión anterior como sigue de la Proposición 2.2.4. También se enuncian resultados relacionados con los llamados variedades estables, inestables y centro asociados a un punto crítico. Estos conjuntos

invariantes forman una partición del espacio de fase. En la sección 2.3 se hacen algunos comentarios sobre el comportamiento intermedio de los modelos, particularmente se define el concepto de secuencia heteroclínica. En la sección 2.4 y final, se ofrece una metodología para el análisis cualitativo del flujo asociado a un sistema dinámico.

## 2.1 Comportamiento local en las cercanías de los puntos críticos

El primer paso para obtener información cualitativa sobre las soluciones de una ecuación diferencial

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{f} : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (2.1.1)$$

(que representa la evolución de un modelo del universo en un espacio de estados  $X$ ) es estudiar el flujo asociado a la ecuación diferencial en una vecindad de los puntos críticos [18, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107]. La idea esencial es linealizar la ecuación diferencial (2.1.1) en cada *punto crítico hiperbólico*  $a$ <sup>1</sup> y usar entonces el teorema de Hartman-Grobman, el cual establece que en una vecindad de cada punto crítico hiperbólico  $a$ , el flujo de la ED no lineal (2.1.1) es topológicamente equivalente<sup>2</sup> al flujo de su linealización  $u' = \mathbf{A}u$ . Esto nos permite caracterizar la estabilidad del sistema analizando cualitativamente el flujo de su linealización.

El flujo asociado a la ecuación diferencial (2.1.1) se define (ver la definición 4.1, [100], pp 88) como sigue:

**Definición 2.1.1** Dada la ED (2.1.1) donde  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es de clase  $C^1(\mathbb{R}^n)$ , tal que sus órbitas están definidas para todo  $t \in \mathbb{R}$ .<sup>3</sup> Sea  $\psi_a(t) : (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  la única solución maximal que satisface  $\psi_a(0) = a \in \mathbb{R}^n$ , donde  $(\alpha, \beta)$  denota el intervalo máximo de definición. El flujo de la ED se define como un grupo monoparamétrico de aplicaciones  $\{\Phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  tales que  $\Phi_t : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\Phi_t(a) = \psi_a(t)$  para todo  $a \in X \subset \mathbb{R}^n$ .<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Un punto crítico  $a$  de una ED no lineal se dice que es *hiperbólico* si todos los valores propios de la matriz  $\mathbf{A} = Df(a)$ , donde  $Df(a)$  denota la matriz de derivadas parciales (matriz Jacobiana) evaluada en el punto crítico  $a$ , satisfacen  $Re(\lambda) \neq 0$ .

<sup>2</sup>Dos flujos  $\Phi_t$  y  $\bar{\Phi}_t$  sobre  $\mathbb{R}^n$  se dicen que son topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  el cual mapea órbitas de  $\Phi_t$  en órbitas de  $\bar{\Phi}_t$  preservando la dirección del parámetro  $t$ .

<sup>3</sup>Siempre es posible modificar la ecuación dada (2.1.1) con  $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$  de manera tal que las órbitas no se modifiquen, pero tal que todas las soluciones estén definidas para todo  $t \in \mathbb{R}$ . La idea es reescalar el campo vectorial  $f$  (la velocidad del estado  $x$ ):  $f(x) \rightarrow \lambda(x)f(x)$ , donde  $\lambda(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función escalar de clase  $C^1(\mathbb{R}^n)$  la cual es positiva sobre  $\mathbb{R}^n$  (para preservar la dirección del tiempo). Este reescalamiento no cambia la dirección del campo vectorial por tanto las órbitas no cambian. Entonces podemos escoger  $\lambda$  de manera que  $\|\lambda f\|$  sea acotada; por ejemplo, seleccionando  $\lambda(x) = \frac{1}{1 + \|f(x)\|}$ .

<sup>4</sup>El flujo correspondiente a una ED satisface las propiedades:  $\Phi_0 = id$ ,  $\Phi_t \Phi_s = \Phi_{t+s}$ , donde  $id$  representa la aplicación idéntica y la segunda propiedad está referida a la composición de funciones. Estrictamente hablando, el flujo asociado a una ecuación diferencial autónoma (lineal o no) forma un grupo continuo monoparamétrico con la operación de composición de funciones.

La diferencia conceptual entre  $\psi_a(t)$  y  $\Phi_t(a)$  es que:

- Para  $a \in \mathbb{R}^n$ , fijo,  $\psi_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  representa el estado del sistema  $\psi_a(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , con  $\psi_a(0) = a$  inicialmente.
- Para  $t \in \mathbb{R}$  fijo,  $\Phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  representa el estado del sistema  $\Phi_t(a)$  en el tiempo  $t$  para todos los estados iniciales  $a$ .

La función solución  $\psi_a(t)$  satisface  $\psi'_a(t) = f(\psi_a(t))$ ,  $\psi_a(0) = a$ . Por tanto  $\psi'_a(0) = f(a)$ . Luego, por la definición de flujo

$$\frac{d}{dt}(\Phi_t(a))|_{t=0} = f(a), \quad (2.1.2)$$

lo cual es simplemente consecuencia del hecho de que el campo vectorial  $f$  es tangente a las órbitas de la ED.

En general, para un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales (2.1.1), es sumamente difícil determinar explícitamente el flujo asociado dado que no existen métodos de solución generales. El propósito de aplicar técnicas de la teoría cualitativa de los sistemas dinámicos es precisamente describir propiedades del flujo no lineal sin conocerlo explícitamente.

Si  $a \in \mathbb{R}^n$  es un punto crítico de (2.1.1) (o sea  $f(a) = 0$ ) entonces, con el objetivo de enfrentar esta cuestión es necesario estudiar el comportamiento de las órbitas de la ED en una vecindad de  $a$ . La idea es considerar la aproximación lineal del campo vectorial  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  en  $a$ . Por tanto suponemos que  $f$  es de clase  $C^1(\mathbb{R}^n)$  (o sea, que las derivadas parciales de  $f$  existen y son funciones continuas en  $\mathbb{R}^n$ ). La aproximación lineal de  $f$  es escrita en términos de la matriz de derivadas

$$\mathbf{A} = Df(a) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) |_{x=a}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (2.1.3)$$

(donde  $f_i$  son las funciones componentes de  $f$ ) según:

$$f(x) = f(a) + \mathbf{A}(x - a) + R(x, a), \quad (2.1.4)$$

donde  $\mathbf{A}(x - a)$  denota la matriz  $n \times n$  de derivadas evaluada en  $a$  actuando sobre el vector  $x - a$ , y  $R(x, a)$  es el término residual. Un importante resultado del Análisis Matemático real en varias variables es que si  $f$  es de clase  $C^1(\mathbb{R}^n)$ , entonces la magnitud del error  $\|R(x, a)\|$  tiende a cero más rápido que la magnitud del desplazamiento  $\|x - a\|$  ( $\|\dots\|$  denota la norma euclídeana en  $\mathbb{R}^n$ ). Esto significa que en general que en (2.1.4) el término  $R(x, a)$  es pequeño en comparación con el término  $\mathbf{A}(x - a)$  para  $x$  suficientemente cercano a  $a$ .

Si  $a \in \mathbb{R}^n$  es un punto crítico de (2.1.1), podemos usar (2.1.4) para escribir (2.1.1) en la forma

$$(NL) : \dot{x} = \mathbf{A}(x - a) + R(x, a) \quad (2.1.5)$$

suponiendo que  $f$  es de clase  $C^1(\mathbb{R}^n)$ . Haciendo  $u = x - a$  podemos asociar a la ED no lineal (NL) la ED lineal

$$(L) : \dot{u} = \mathbf{A}u \quad (2.1.6)$$

la cual es llamada *la linealización de (NL) en el punto crítico  $a \in \mathbb{R}^n$* .

El sistema de ecuaciones diferenciales lineales (L) tiene asociado el flujo  $\{\bar{\Phi}_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  definido por

$$\bar{\Phi}_t : \bar{a} \in \bar{U} = V(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n; \bar{a} \rightarrow \bar{a} e^{t\mathbf{A}} \quad (2.1.7)$$

el cual es (localmente) topológicamente equivalente al flujo del sistema (NL) si  $a$  es un punto crítico hiperbólico. Este resultado es conocido como teorema de Hartman-Grobman y se formula de la manera siguiente:

**Teorema 2.1.1 (Hartman-Grobman [106])** *Sea  $a$  un punto crítico de la ED  $x' = f(x)$  en  $\mathbb{R}^n$ , donde  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una aplicación de clase  $C^1(\mathbb{R})$ . Si todos los valores propios  $\lambda_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , de la matriz  $\mathbf{A} = Df(a)$  satisfacen  $Re(\lambda_i) \neq 0$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$  entonces existe un homeomorfismo  $h : \bar{U} \rightarrow U$  de una vecindad  $\bar{U}$  de  $\mathbf{0}$  sobre una vecindad  $U$  de  $a$  que mapea órbitas del flujo lineal  $\{e^{t\mathbf{A}}\}_{t \in \mathbb{R}}$  sobre órbitas del flujo no lineal  $\Phi_t$  de la ED (2.1.1), preservando la dirección del parámetro  $t$ .*

### 2.1.1 Comportamiento local en la cercanía de un atractor no lineal

Supongamos que  $a$  es un punto crítico de una ED no lineal  $x' = f(x)$  en  $\mathbb{R}^2$ . Supongamos también que todos los valores críticos de la matriz  $\mathbf{A}$  satisfacen  $Re(\lambda) < 0$ , (o sea,  $a$  es un atractor). El teorema de Hartman-Grobman asegura que en una vecindad de  $a$  el flujo de la ED no lineal es topológicamente equivalente al flujo de la linealización  $u' = \mathbf{A}u$ , donde  $u = x - a$ . En esta sección daremos una descripción más detallada de las órbitas cercanas a un atractor.

Sea  $a = (a_1, a_2)$ , introduciremos coordenadas polares

$$\begin{aligned} x_1 - a_1 &= r \cos \theta \\ x_2 - a_2 &= r \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Como  $a$  es asintóticamente estable,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0 \quad (2.1.9)$$

si  $r(0)$  es suficientemente cercano a cero. Decimos que el punto  $a$  es un espiral no lineal si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \pm\infty \quad (2.1.10)$$

para cada solución  $(r(t), \theta(t))$  para la cual se cumpla (2.1.9).

**Proposición 2.1.2 (Teorema 2.2, [107], pp 376)** *Consideremos la ED*

$$(NL) : x' = f(x) \quad (2.1.11)$$

en  $\mathbb{R}^2$ , donde  $f$  es de clase  $C^1(\mathbb{R}^n)$ . Consideremos la linealización

$$(L) : u' = Au \quad (2.1.12)$$

en un punto crítico  $a$ . Si  $\mathbf{0}$  es un atractor espiral de  $(L)$ , entonces  $a$  es un atractor espiral de  $(NL)$ .

**Proposición 2.1.3 (Teorema 2.1, [107], pp 384)** *Si  $\mathbf{0}$  es un nodo atractor de  $(L)$  entonces  $a$  es un nodo atractor de  $(NL)$ .*

Un resultado similar se tiene para los nodos de Jordan ([107], pp 387).

Un punto crítico  $a$  asintóticamente estable se dice que es un *foco atractor no lineal* si todas las órbitas suficientemente cercanas a  $a$  tienden a  $a$  en una dirección definida cuando  $t \rightarrow \infty$ , y dada cualquier dirección existe una órbita la cual tiende a  $a$  en esta dirección.

Si  $\mathbf{0}$  es un foco de  $(L)$ , en general, no necesariamente  $a$  es un foco no lineal de  $(NL)$ .

**Proposición 2.1.4 (Ref. [107], pp 377)** *Supongamos que el campo vectorial  $f$  es de clase  $C^2$ . Si  $\mathbf{0}$  es un foco atractor de  $(L)$  entonces  $a$  es un foco atractor de  $(NL)$ .*

Un punto crítico  $a$  estable se dice que es un *centro no lineal* si en alguna vecindad de  $a$ , las órbitas son órbitas periódicas las cuales encierran a  $a$ .

Recordemos que el teorema de Hartman-Grobman no se aplica si  $\mathbf{0}$  es un centro de  $(L)$ , o sea, no podemos concluir que  $a$  es un centro de  $(NL)$ .

**Proposición 2.1.5 (Teorema 4.1, [107], pp 382)** *Si  $\mathbf{0}$  es un centro de  $(L)$  entonces,  $a$  es o un centro, o un atractor espiral, o un repulsor espiral de  $(NL)$ .*

## 2.2 Comportamiento Asintótico y Conjuntos Límite

Consideremos el sistema físico con vector inicial  $x \in \mathbb{R}^n$ , cuya evolución está descrita por la ED  $x' = f(x)$ , la cual determina el flujo  $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ . Una cuestión fundamental es: ¿cual es el comportamiento asintótico del sistema cuando  $t \rightarrow \infty$ , comenzando en un estado inicial  $a$  cuando  $t = 0$ ?

El comportamiento más simple es que el sistema, comenzando en el estado  $a$ , tienda a un punto crítico cuando  $t \rightarrow \infty$ , o sea,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(a) = p$ . En este caso decimos que el conjunto  $\omega$ -límite del estado inicial  $a$  es el punto crítico  $p$ , y lo denotamos por

$$\omega(a) = \{p\}. \quad (2.2.13)$$

El siguiente comportamiento más simple es que el sistema, comenzando en el estado  $a$ , tienda a una evolución periódica; o sea, la órbita se aproxime a una órbita periódica  $\gamma$ . En esta situación,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(a)$  no existe porque la órbita no tiende a un único punto. No obstante, para cada punto  $p \in \gamma$ , podemos seleccionar una sucesión de valores de tiempo  $\{t_n\}$ , con  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ , tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{t_n}(a) = p$ . En este caso decimos que el conjunto  $\omega$ -límite del estado inicial  $a$  es la órbita periódica  $\gamma$ , y lo denotamos por

$$\omega(a) = \gamma. \quad (2.2.14)$$

Estos ejemplos sirven de motivación a la definición siguiente.

**Definición 2.2.1 (Conjunto  $\omega$ -límite [18, 101])** *Consideremos la ED  $x' = f(x)$  en  $\mathbb{R}^n$ , y el flujo asociado  $\{\Phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ . Dado un punto inicial  $a \in \mathbb{R}^n$ , se dice que un punto  $p \in \mathbb{R}^n$  es un punto  $\omega$ -límite de  $a$  si existe una sucesión  $\{t_n\}$ , con  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ , tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{t_n}(a) = p$ . El conjunto de todos los puntos  $\omega$ -límites de  $a$  es llamado conjunto  $\omega$ -límite de  $a$ , y se denota  $\omega(a)$ .*

Para identificar el conjunto  $\omega$ -límite de un estado inicial  $a$ , podemos considerar la interrogante siguiente: ¿qué subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  pueden ser  $\omega$ -límites del flujo  $\{\Phi_t\}$ ? Ésta es una cuestión muy difícil y no ha sido resuelta para  $n > 2$ . Sin embargo existen condiciones necesarias las cuales son indispensables para identificar  $\omega(a)$ .

**Proposición 2.2.1 (Refs. [18, 101])** *Un conjunto  $\omega$ -límite,  $\omega(a)$ , de un flujo  $\{\Phi_t\}$  es una órbita completa del flujo, o es la unión de una o varias órbitas completas.*

Es importante saber que los conjuntos  $\omega$ -límite son no triviales (o sea, no son el conjunto vacío).

**Proposición 2.2.2 (Refs. [18, 101])** *Si la órbita positiva pasando por  $a$ ,*

$$\gamma^+(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \Phi_t(a), \forall t \geq 0\} \quad (2.2.15)$$

*es acotada, entonces  $\omega(a) \neq \emptyset$ .*

### 2.2.1 Conjuntos invariantes

En ocasiones la órbita de un punto bajo  $f$  o  $\Phi$  permanece dentro de una región particular del espacio de las fases para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Esta noción se puede formalizar en el concepto de conjunto invariante. En esta subsección definiremos el concepto de conjunto invariante. Para identificar algunos tipos especiales de conjuntos invariantes, la proposición 2.2.3 resulta de utilidad. Este resultado será utilizado frecuentemente en esta tesis.

**Definición 2.2.2 ( Ref. [104])** *Un conjunto  $\Lambda \subset M$  se dice que es invariante bajo el flujo  $\Phi$  si  $\Phi_t(x) \in \Lambda$  para todo  $x \in \Lambda$  y para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Los conjuntos invariantes se dicen que son positivamente (negativamente) invariantes si las órbitas de sus elementos permanecen dentro del conjunto invariante para  $t \geq 0$  ( $t \leq 0$ ).*

Los puntos críticos, ciclos, órbitas cerradas y órbitas correspondientes a cada punto regular son ejemplos de conjuntos invariantes. En particular los puntos críticos y las órbitas cerradas atraen o repelen órbitas del espacio de fase que no están contenidos en ellos.

Con el objetivo de determinar un conjunto  $\omega$ -límite, es útil conocer cuando una órbita entra a un conjunto acotado  $S$  y nunca lo abandona. Tal conjunto es llamado conjunto atrapante (trapping set). Se dice que un conjunto  $S$  es un conjunto atrapante si es un conjunto cerrado, acotado y *positivamente invariante* (ver definición 2.2.2). La utilidad de los conjuntos atrapantes descansa en el resultado siguiente: *si  $S$  es un conjunto atrapante de una ED  $x' = f(x)$ , entonces para todos los  $a \in S$ , el conjunto  $\omega$ -límite  $\omega(a)$  es no vacío y está contenido en  $S$ .*

**Proposición 2.2.3 (Proposición 4.1 de [100], pp 92)** *Consideremos la EDO  $x' = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  con flujo  $\Phi_t$ . Sea  $Z : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1(\mathbb{R}^n)$  la cual satisface  $Z' = \alpha Z$ , donde  $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua. Entonces los subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  definidos por  $Z > 0$ ,  $Z = 0$ ,  $Z < 0$  son conjuntos invariantes del flujo  $\Phi_t$ .*

Adicionalmente, la existencia de funciones monótonas<sup>5</sup> en varios conjuntos invariantes es muy importante y conduce a una considerable simplificación de la dinámica: pueden no existir órbitas periódicas, recurrentes u homoclínicas en el correspondiente espacio de estados. Este resultado se formula en la forma de la proposición

**Proposición 2.2.4 (Ref. [100], pp 93)** *Sea  $S \subset \mathbb{R}$  un conjunto invariante del flujo  $\Phi_t$ . Si existe una función monótona  $Z : S \rightarrow \mathbb{R}$  sobre  $S$ , entonces  $S$  no contiene puntos críticos, órbitas periódicas, órbitas recurrente u órbitas homoclínicas.*

Además la monotonía puede utilizarse para determinar los atractores del pasado y del futuro.

## 2.2.2 Caracterización de los subespacios y variedades invariantes

Para la ecuación diferencial  $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$  definida en  $\mathbb{R}^n$  podemos determinar los valores de la matriz  $\mathbf{A}$  (complejos en general y no necesariamente diferentes) y los vectores propios asociados los cuales generan tres subespacios de  $\mathbb{R}^n$  (los cuales dependen de la naturaleza de los valores propios asociados):  $E^s$ ,  $E^u$  y  $E^c$ . Estos subespacios contienen órbitas disjuntas las cuales particionan el espacio de estados, o sea,

$$E^s \otimes E^u \otimes E^c = \mathbb{R}^n. \quad (2.2.16)$$

Existen, respectivamente, el subespacio estable (generado por los vectores propios cuyos valores propios asociados tienen parte real negativa), el subespacio inestable (generado por los vectores propios cuyos valores propios asociados tienen parte real positiva) y los subespacios centrales generados por los vectores propios cuyos valores propios asociados tienen parte real nula.

Los subespacios estable e inestable están caracterizados, respectivamente, por las propiedades:

$$\mathbf{x} \in E^s \Rightarrow \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{x} = 0 \quad (2.2.17)$$

y

$$\mathbf{x} \in E^u \Rightarrow \lim_{\tau \rightarrow -\infty} e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{x} = 0. \quad (2.2.18)$$

---

<sup>5</sup>Dado el flujo  $\Phi_t$  sobre  $\mathbb{R}^n$ , si  $S$  un conjunto invariante de  $\Phi_t$ , y  $Z : S \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua entonces  $Z$  es una función monótona decreciente (creciente) para el flujo sobre  $S$  (ver definición en la referencia [100], pp 93) si para todo  $x \in S$ ,  $Z(\Phi_t(x))$  es una función monótona decreciente (creciente) de  $t$ .

Esto describe el comportamiento asintótico: todos los estados iniciales en el subespacio estable son atraídos por el punto crítico  $\mathbf{x} = 0$  y todos los estados iniciales en el subespacio inestable son repelidos por  $\mathbf{x} = 0$ . Si el sistema  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  no es lineal, podemos usar el teorema Hartman-Grobman.

En el caso que el sistema sea no lineal se pueden definir las variedades  $\mathcal{E}^{(s,u,c)}$  (variedad estable, inestable y centro, respectivamente) en el punto crítico, estas variedades son tangentes a los correspondientes subespacios  $E^{(s,u,c)}$  de la linealización en el punto crítico (subespacio estable, inestable y centro, respectivamente). Todos los puntos en  $\mathcal{E}^s$  convergen asintóticamente al punto crítico cuando el tiempo transcurre ( $\tau \rightarrow \infty$ ), mientras que todas las órbitas en  $\mathcal{E}^u$  convergen asintóticamente al punto fijo cuando  $\tau \rightarrow -\infty$ . La variedad  $\mathcal{E}^c$  contiene todas las órbitas cuyo comportamiento asintótico no puede deducirse mediante el análisis lineal.

Veamos por ejemplo como procede la caracterización de las variedades  $\mathcal{E}^{(s,u,c)}$  para el caso en que  $a$  es (sin perder generalidad) un punto silla <sup>6</sup> de la ED (2.1.1) (con  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $C^1(\mathbb{R}^n)$ ).

**Definición 2.2.3 (Variedad local estable, [18], pp 20)** *Sea  $a$  un punto silla de la ED  $x' = f(x)$  en  $\mathbb{R}^n$ , y sea  $U$  una vecindad de  $a$ . La variedad local estable de  $a$  en  $U$  está definida por*

$$\mathcal{E}^s(a, U) = \left\{ x \in U \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(x) = a, \Phi_t(x) \in U, \forall t \geq 0 \right\}. \quad (2.2.19)$$

Análogamente se define la variedad inestable:

$$\mathcal{E}^u(a, U) = \left\{ x \in U \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi_t(x) = a, \Phi_t(x) \in U, \forall t \leq 0 \right\}. \quad (2.2.20)$$

Un teorema muy importante el cual permite caracterizar las variedades estables e inestables es el siguiente (ver por ejemplo el **Teorema de la variedad estable** en [18], pp 20 y **Teorema 4.8** en [100], pp 97):

**Teorema 2.2.5 (Teorema de la variedad estable (inestable), [18], pp 20)** *Sea  $a$  un punto silla de la ED  $x' = f(x)$  en  $\mathbb{R}^n$ , donde  $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ , y sea  $E^s$  ( $E^u$ ) el subespacio estable (inestable) de la linealización en  $a$ . Entonces existe una vecindad  $U$  de  $a$  tal que la variedad local estable (inestable)  $\mathcal{E}^s(a, U)$  ( $\mathcal{E}^u(a, U)$ ) es una curva suave ( $C^1$ ) la cual es tangente a  $E^s$  ( $E^u$ ) en  $a$ .*

---

<sup>6</sup>Un punto silla es un punto hiperbólico,  $a$ , (todos los  $Re(\lambda) \neq 0$ ) el cual no es ni un atractor (todos los  $Re(\lambda) < 0$ ) ni una fuente (todos los  $Re(\lambda) > 0$ ). Siendo  $\lambda$  un valor propio de la matriz  $\mathbf{A} = Df(a)$ .

### 2.2.3 Puntos críticos no aislados

Estamos también interesados en el caso en que la ED  $x' = f(x)$  en  $\mathbb{R}^n$  admite puntos críticos no aislados, por ejemplo, una curva  $C$  de puntos críticos, llamada conjunto crítico. En el caso de una curva de puntos críticos, la matriz  $n \times n$ ,  $Df(x_0)$ , necesariamente tiene un valor propio cero en cada punto  $x_0$  del conjunto crítico ( $r$  valores propios nulos si el conjunto tiene dimensión  $r$ ). Aunque los puntos críticos en un conjunto crítico son necesariamente no hiperbólicos, podemos aplicar el Teorema de la Variedad Invariante (**Teorema 4.8** en [100], pp 97; ó, como caso particular, el teorema 2.2.5 de esta sección). Supongamos que cada punto crítico del conjunto crítico  $C$  (suponiendo que es una curva) tiene una variedad estable de dimensión  $n_s$ . La unión de estas variedades forma un conjunto  $n_s + 1$  dimensional cuyas órbitas se aproximan a un punto de  $C$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ . A este conjunto se le refiere como conjunto estable del conjunto crítico  $C$ . Similarmente se puede definir el conjunto inestable de  $C$  de dimensión  $n_u + 1$ , con  $n_u + n_s \leq n - 1$ . Si  $n_s = n - 1$  decimos que el conjunto crítico  $C$  es un atractor local para la ED, y si  $n_u = n - 1$ , entonces decimos que  $C$  es una fuente local.

### 2.2.4 Comportamiento asintótico en más de dos dimensiones

Dada la ecuación diferencial  $x' = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ , si  $f \in C^2$  y existe a lo sumo un número finito de puntos críticos. Entonces cualquier conjunto límite compacto es: i) un punto crítico, ii) una órbita periódica o, iii) la unión de puntos críticos, órbitas heteroclínicas y órbitas homoclínicas. Este resultado es conocido como teorema generalizado de Poincaré–Bendixson (Teorema 4.10 [100], pp 101).

Para dar una descripción cualitativa de una ED en un conjunto compacto, primero se procede a hallar los puntos críticos del sistema, analizar la estabilidad local, y determinar cuando es una fuente o un atractor local. Si los experimentos numéricos sugieren que no existen órbitas periódicas, se procede a intentar determinar una función monótona que pruebe la no existencia de órbitas periódicas. Entonces uno puede construir un esbozo del espacio de fase consistente de las órbitas que forman la frontera y las órbitas heteroclínicas uniendo los puntos silla. Con esta información, tendríamos la posibilidad de usar el teorema generalizado de Poincaré–Bendixson para encontrar los conjuntos  $\alpha$  y  $\omega$ -límite e identificar los atractores del pasado y el futuro. Por supuesto que puede ser posible que este procedimiento no pueda ser implementado completamente, y estaríamos forzados a sustentar los resultados en la investigación numérica.

Desafortunadamente, el mencionado teorema no se aplica si la dimensión del espacio de fase es superior a 2. Las órbitas en el espacio de fase podrían ser de gran complejidad incluyendo fenómenos como recurrencia y caos. No obstante, en los estudios de modelos cosmológicos se han encontrado una

variedad de funciones monótonas las cuales simplifican la dinámica dramáticamente.

En particular, es posible obtener información acerca de los conjuntos  $\alpha$  y  $\omega$ -límite y los atractores del pasado y el futuro utilizando de manera combinada el Principio de Invariación de LaSalle (teorema (2.2.6)) y el Principio de Monotonía (teorema (2.2.7)).

**Teorema 2.2.6 (Principio de Invariación de LaSalle [100], pp 103)** *Consideremos la ED:  $x' = f(x)$  definida sobre  $\mathbb{R}^n$ , con flujo  $\Phi_t$ . Sea  $S$  un conjunto cerrado, acotado y positivamente invariante (conjunto atrapante) de  $\Phi_t$  y sea  $Z$  una función monótona  $C^1$ . Entonces, para todo  $x_0 \in S$ ,*

$$\omega(x_0) \subset \{x \in S \mid Z' = 0\},$$

donde  $Z' = \nabla Z \cdot f$ .

El siguiente teorema puede ser considerado como una generalización del teorema (2.2.6).

**Teorema 2.2.7 (Principio de Monotonía [100], pp 103)** *Sea  $\Phi_t$  un flujo sobre  $\mathbb{R}^n$  y  $S$  un conjunto invariante. Sea  $Z : S \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1(\mathbb{R}^n)$  cuyo rango es el intervalo  $(a, b)$  donde  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ,  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ,  $a < b$ . Si  $Z$  es decreciente sobre órbitas en  $S$ , entonces para todo  $x \in S$ ,  $\omega(x) \subset \{s \in \bar{S} - S \mid \lim_{y \rightarrow s} Z(y) \neq b\}$  y  $\alpha(x) \subset \{s \in \bar{S} - S \mid \lim_{y \rightarrow s} Z(y) \neq a\}$ , siendo  $\omega(x)$  ( $\alpha(x)$ ) el conjunto de los atractores del pasado (atractores del futuro) correspondientes al punto  $x$ .*

## 2.3 Comportamiento intermedio

Adicionalmente al interés en estudiar el comportamiento asintótico típico del sistema cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ , el cual queda descrito por los atractores del pasado y el futuro, el estudio del comportamiento intermedio podría ser de igual interés.

En general, no es posible obtener una información sobre estos estadios tan completa, como podría ser posible acerca del comportamiento asintótico. Una posibilidad muy simple es que exista un intervalo de tiempo finito durante el cual el sistema se mantenga cerca de un punto crítico. Esta posibilidad ocurre cuando la órbita que describe la evolución entra y permanece en una  $\epsilon$ -vecindad de un punto crítico de tipo silla. Durante este periodo de tiempo de la evolución, el sistema físico se ralentiza dado que la velocidad  $f(x)$  en el espacio de estados es cercana a cero, y el estado físico puede ser aproximado mediante dicho punto crítico. A esta época se le refiere como *época de cuasi-equilibrio*.

Una órbita que describe una época de cuasi-equilibrio en el punto crítico  $E_1$  será inicialmente atraída hacia  $E_1$  siguiendo (sombreado) un órbita en la variedad estable de  $E_1$  y entonces será subsecuentemente repelida por una órbita en la variedad inestable de  $E_1$ . Si esta variedad inestable intersecta

la variedad estable de otro punto crítico,  $E_2$ , entonces existe la posibilidad de una segunda época de cuasi-equilibrio asociada con el punto crítico  $E_2$ . En general podemos tener una secuencia finita de épocas cuasi-estables, descrita por una órbita que sombrea una secuencia heteroclínica.<sup>7</sup>

## 2.4 Resumen de aspectos técnicos y/o herramientas más usadas en el análisis cualitativo de una cosmología concreta

El primer paso es introducir un conjunto de variables dinámicas normalizadas convenientemente (además de introducir una variable temporal que tome todos los valores reales). En esta tesis los sistemas dinámicos resultantes del proceso de normalización tendrán en cuenta (a lo sumo) la evolución de cinco variables dinámicas  $x^i$ ,  $i = 1 \dots 5$ . Las ecuaciones diferenciales gobernando la dinámica (en el espacio de fase), se podrán escribir simbólicamente:

$$x^{i'} = f^i(x^1, x^2, \dots, x^5), \quad (2.4.21)$$

donde la prima denota derivada con respecto a una variable temporal  $\tau$  la cual se escoje convenientemente.

El siguiente paso que daremos será el de intentar descubrir ante que transformaciones de coordenadas las ecuaciones (2.4.21) son invariantes de forma. Este punto es muy importante por que nos permitirá determinar, dentro del espacio de fase, cual sería el subespacio (de menor dimensión posible) de interés investigar. Acá se combinan criterios matemáticos y criterios físicos (por ejemplo cuando nos restringimos al estudio fuentes materiales satisfaciendo determinadas condiciones de energía, esto impone restricciones adicionales a las variables de fase que describen las mencionadas fuentes). De los resultados obtenidos en este subespacio se podrá inferir conclusiones sobre la dinámica en otras regiones del espacio de fase aplicando las transformaciones de coordenadas inversas.

El próximo paso para estudiar la evolución de un sistema particular es encontrar sus puntos críticos  $(x^{1*}, x^{2*}, \dots, x^{5*})$ , los cuales se definen como las soluciones de las ecuaciones

$$f^i(x^{1*}, x^{2*}, \dots, x^{5*}) = 0. \quad (2.4.22)$$

La estabilidad de los puntos críticos  $(x^{1*}, x^{2*}, \dots, x^{5*})$  es entonces analizada estudiando el sistema dinámico linealizado que se obtiene al considerar la serie de Taylor de primer orden del sistema

---

<sup>7</sup>Una secuencia heteroclínica finita (ver por ejemplo la referencia [100], pp 104) es un conjunto de puntos críticos  $E_0, E_1, \dots, E_n$ , donde  $E_0$  es una fuente local,  $E_n$  es un atractor local y el resto son puntos de ensilladura, tales que existe una órbita heteroclínica que une los puntos críticos  $E_{i-1}$  y  $E_i$ , para  $i = 1, \dots, n$ .

original en una vecindad de cada punto crítico. Luego, se ensayan soluciones de la aproximación lineal en la forma

$$(x^1, x^2, \dots, x^5) = (c_1, c_2, \dots, c_5) e^{\lambda t}, \quad (2.4.23)$$

y se encuentra que los exponentes característicos  $\lambda$  y el vector constante  $(c_1, c_2, \dots, c_5)$  deben ser respectivamente un valor propio y un vector propio de la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^5} \\ \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^5} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial x^{5'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{5'}}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial x^{5'}}{\partial x^5} \end{pmatrix}_{(x^1, x^2, \dots, x^5) = (x^{1*}, x^{2*}, \dots, x^{5*})}. \quad (2.4.24)$$

El carácter de los puntos críticos depende de los valores de los exponentes característicos como sigue: si la parte real de todos los exponentes característicos es negativa, el punto fijo es asintóticamente estable, o sea, un atractor. Por otra parte, es suficiente que (al menos) un exponente característico tenga parte real positiva para que el punto crítico sea inestable: siendo un repulsor si todas las partes reales son positivas; en cambio, si al menos uno de estos exponentes tiene parte real negativa, será un punto de ensilladura (silla), en cuyo caso existe, aparte de la variedad inestable, una variedad estable conteniendo las órbitas excepcionales que convergen al punto. Adicionalmente, cuando uno de los exponentes es nulo el punto es no hiperbólico y por tanto la estabilidad estructural no puede garantizarse (la forma geométrica de las órbitas puede cambiar bajo perturbaciones pequeñas). Luego, el caso en el cual la mayor parte real es precisamente cero debe ser analizado usando otros métodos. En este caso el análisis lineal no es concluyente (el teorema de Hartman-Grobman no se aplica).

En el caso de que el sistema dinámico bajo estudio sea 3-dimensional, la forma geométrica de las órbitas cerca de los puntos críticos está determinada por la parte imaginaria de los (tres) exponentes característicos. Si los tres son reales (partes imaginarias nulas) el punto crítico es un nodo. Un par de exponentes conjugados conducen, salvo en los casos degenerados, a un centro espiral, un foco o una silla espiral (las órbitas son hélices en las cercanías del punto crítico). El primero de los casos ocurre cuando las partes reales de los exponentes complejos se anulan, mientras que el segundo y tercer caso ocurren si el signo del exponente real y la parte real de los exponentes complejos son respectivamente iguales o diferentes.

Una vez determinados los puntos críticos del sistema y analizado la estabilidad local y determinado

en que casos es una fuente o un atractor local, podemos proceder a intentar obtener información de los atractores globales del sistema (cuestión que no es siempre posible).

Si los experimentos numéricos sugieren que no existen órbitas periódicas, se procede a intentar determinar una función monótona definida en el interior del espacio de fase que pruebe la no existencia de puntos críticos (los cuales se localizan generalmente en la frontera del espacio de fase), órbitas periódicas, recurrentes u homoclínicas, por lo que la dinámica estará dominada por puntos críticos en la frontera y posible órbitas heteroclínicas conectándolos. Entonces uno puede construir un esbozo del espacio de fase consistente de las órbitas que forman la frontera y las órbitas heteroclínicas uniendo los puntos silla. Así también, es posible obtener resultados globales a partir del análisis local de puntos críticos.

En los siguientes capítulos aplicaremos esta metodología para el estudio del espacio de estados de las cosmologías quintasma.

## Capítulo 3

# Cosmología quintasma: potenciales exponenciales

En este capítulo investigamos cuatro sistemas dinámicos describiendo: i) la dinámica de los modelos cosmológicos Friedmann-Roberson Walker (FRW) con curvatura negativa que se expanden por siempre provistos de fluido perfecto con ecuación de estado  $p = (\gamma - 1)\rho$ ,  $1 \leq \gamma \leq 2$  y campo de energía quintasma con potencial exponencial; ii) la dinámica de los modelos cosmológicos FRW con curvatura negativa en contracción con igual contenido de materia; iii) la dinámica de los modelos cosmológicos FRW planos en expansión, provistos de fluido perfecto con ecuación de estado  $p = 0$  (polvo) y campo de energía quintasma con potencial exponencial; y iv) la dinámica de los modelos cosmológicos Friedmann-Roberson Walker (FRW) con curvatura positiva provistos de fluido perfecto con parametrización de la ecuación de estado  $p = (\gamma - 1)\rho$ ,  $\frac{2}{3} \leq \gamma \leq 2$  y campo de energía quintasma con potencial exponencial. El capítulo está organizado como sigue: en la sección 3.1, ofrecemos los detalles del modelo cosmológico objeto de estudio. En la sección 3.2, investigamos los sistemas dinámicos i) y ii). En 3.3, investigamos el sistema iii). En 3.4, investigamos el sistema iv). Ofrecemos conclusiones parciales en la sección 3.5.

### 3.1 El modelo físico

Las cosmologías quintasma con materia pueden obtenerse formalmente de una teoría de campo con dos campos escalares con acción:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{R}{2} - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 - V_{\text{eff}} \right\} + S_m, \quad (3.1.1)$$

donde  $S_m$  denota la acción para la materia ordinaria (en nuestro modelo, un fluido perfecto comóvil).

Como en [17] consideraremos un potencial efectivo de dos campos

$$V_{\text{eff}} = V_0 e^{-\sqrt{6}(m\phi+n\varphi)}, \quad (3.1.2)$$

donde el campo escalar  $\phi$  representa la quintaesencia y  $\varphi$  denota el campo fantasma (recordemos que la energía quintasma la estamos modelando como un híbrido entre un campo de quintaesencia y un campo fantasma los cuáles interactúan a través de su potencial efectivo). Por simplicidad, asumiremos que  $m > 0$  y  $n > 0$ .

Consideraremos la geometría dada por el elemento de línea de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW):

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left( \frac{dx^2}{1 - kx^2} + x^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right), \quad (3.1.3)$$

donde  $k = 1, 0, -1$ , identifica los tres tipos de universos FRW: cerrado, plano, y abierto, respectivamente.

Las ecuaciones de campo para el elemento de línea (3.1.3), son

$$H^2 - \frac{1}{6} (\dot{\phi}^2 - \dot{\varphi}^2) - \frac{1}{3} V_{\text{eff}} - \frac{1}{3} \rho = -\frac{k}{a^2}, \quad (3.1.4)$$

$$\dot{H} = -H^2 - \frac{1}{3} (\dot{\phi}^2 - \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{3} V_{\text{eff}} - \frac{1}{6} (3\gamma - 2)\rho, \quad (3.1.5)$$

$$\dot{\rho} = -3\gamma H \rho, \quad (3.1.6)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \sqrt{6}mV_{\text{eff}} = 0, \quad (3.1.7)$$

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \sqrt{6}nV_{\text{eff}} = 0, \quad (3.1.8)$$

donde  $H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$  denota el escalar de expansión de Hubble. El punto denota derivada con respecto a la coordenada temporal  $t$ . El índice barotrópico de la materia de fondo está se denota por  $\gamma$ , y se asume que toma valores en el intervalo  $0 \leq \gamma \leq 2$ .

### 3.1.1 ¿Es el signo del factor de Hubble invariante?

Antes de proceder a la siguiente sección, comentaremos sobre algunas consecuencias de la estructura de las ecuaciones (3.1.4-3.1.8). Primero, de la ecuación (3.1.4), y del requerimiento de no negatividad de las densidades de energía del campo quintasma y de la MO (o sea, de  $\frac{1}{2} (\dot{\phi}^2 - \dot{\varphi}^2) + V_{\text{eff}} \geq 0$  y  $\rho \geq 0$ ), se deduce que  $H^2 \geq -k/a^2$ . Esta última desigualdad implica que  $H$  no puede ser cero para modelos con curvatura negativa (y para valores finitos de  $a$ ). En cambio, para modelos con curvatura no negativa esta posibilidad puede ocurrir. Consideremos por un momento el caso plano. La pregunta que surge es: ¿es  $H = 0$  un conjunto invariante de semiflujo positivo (o sea, el flujo para  $t \geq 0$ ) del sistema de EDOs de primer orden que se obtiene del sistema (3.1.4-3.1.8), en el espacio de fase  $\Sigma = \left\{ (H, \phi, \varphi, \dot{\phi}, \dot{\varphi}, \rho) : 3H^2 = \frac{1}{2} (\dot{\phi}^2 - \dot{\varphi}^2) + V_{\text{eff}} + \rho \right\}$ ?

Observar que, si eventualmente  $H = 0$ , entonces, de la ecuación (3.1.4) sigue que  $\rho = 0$  y  $V = -\frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 - \dot{\varphi}^2)$ , eventualmente. Evaluando el miembro derecho de (3.1.5) hallamos que, eventualmente,

$$\dot{H}|_{H=0} = -\frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 - \dot{\varphi}^2) = V \geq 0.$$

Esto implica que la subvariedad  $H = 0$  de  $\Sigma$  es invariante solo si  $\rho = 0$ ,  $V = -\frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 - \dot{\varphi}^2) = 0$  inicialmente. Esto corresponde a la solución de vacío estática de Einstein, la cual no es de interés en este estudio. En cambio, si  $V = -\frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 - \dot{\varphi}^2) > 0$ , inicialmente, entonces, la subvariedad  $H = 0$  actúa como una membrana ( $\dot{H}|_{H=0} > 0$ ). En este caso, las órbitas en  $\Sigma$  pueden cruzar el valor  $H = 0$ .

## 3.2 Modelos con curvatura negativa

En esta sección investigamos modelos con curvatura negativa. Consideraremos el rango  $1 \leq \gamma \leq 2$  como la región paramétrica de interés físico. Los valores  $\gamma = 1$  (polvo) y  $\gamma = 4/3$  (radiación) son de interés primario.

### 3.2.1 Normalización y espacio de estados

Para la investigación de modelos con curvatura negativa nos valdremos de la elección de variables normalizadas:  $(x_\phi, x_\varphi, y, \Omega)$ , defined by

$$x_\phi = \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{6}H}, \quad x_\varphi = \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{6}H}, \quad y = \frac{\sqrt{V}}{\sqrt{3}H}, \quad \Omega = \frac{\rho}{3H^2}. \quad (3.2.9)$$

Esta selección de variables permite reescribir la ecuación de Friedmann como

$$1 - (x_\phi^2 - x_\varphi^2 + y^2 + \Omega) = \Omega_k \geq 0, \quad (3.2.10)$$

donde

$$\Omega_k = -\frac{k}{a^2 H^2}, \quad k = -1, 0. \quad (3.2.11)$$

Entonces,

$$0 \leq x_\phi^2 - x_\varphi^2 + y^2 + \Omega \leq 1. \quad (3.2.12)$$

### 3.2.2 Sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer grado

Por la discusión al final de la sección previa tenemos que  $H$  no puede ser cero para modelos con curvatura negativa (a menos que el factor de escala diverga en un tiempo finito). Esto significa que

el signo de  $H$  es invariante, o sea,  $H < 0$  (modelos en contracción) o  $H > 0$  (modelos en expansión) todo el tiempo. Por tanto, podemos definir un sistema dinámico para cada selección de signo de  $H$ . Primero es necesario introducir una nueva variable temporal,  $\tau$ , tal que  $\tau \rightarrow -\infty$  cuando  $t \rightarrow 0$  y  $\tau \rightarrow +\infty$  as  $t \rightarrow +\infty$ . Como la dirección del tiempo debe preservarse podemos escoger  $d\tau = 3\epsilon H dt$  (o  $\tau = \ln\left(\frac{a}{a_0}\right)^{3\epsilon}$ ) donde  $\epsilon = \pm 1 = \text{sign}(H)$ .

Las ecuaciones de evolución para (3.2.9) son

$$\begin{aligned} x'_\phi &= \epsilon \left( \frac{1}{3} (q - 2) x_\phi + m y^2 \right), \\ x'_\varphi &= \epsilon \left( \frac{1}{3} (q - 2) x_\varphi - n y^2 \right), \\ y' &= \epsilon \left( \frac{1}{3} (1 + q) - m x_\phi - n x_\varphi \right) y, \\ \Omega' &= \epsilon \left( \frac{2}{3} (1 + q) - \gamma \right) \Omega. \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

En (3.2.13) hemos introducido el parámetro de desaceleración  $q = -\ddot{a}a/\dot{a}^2$  en términos de las variables de fase (3.2.9):

$$q = 2 (x_\phi^2 - x_\varphi^2) - y^2 + \frac{1}{2} (3\gamma - 2) \Omega.$$

La ecuación del parámetro de ecuación de estado de la EO,  $w$ , puede reescribirse, también en términos de las variables de fase, como

$$w = \frac{x_\phi^2 - x_\varphi^2 - y^2}{x_\phi^2 - x_\varphi^2 + y^2}. \quad (3.2.14)$$

Observar que la ecuación (3.2.13 c) es invariante de forma ante la transformación de coordenadas  $y \rightarrow \epsilon y$ . Luego, el signo de  $\epsilon y$  es invariante en virtud de la Proposición 2.2.3, de modo que podemos asumir sin perder generalidad que, para  $\epsilon$  fijo,  $\epsilon y \geq 0$ . Así, para cada selección del signo de  $\epsilon$ , las ecuaciones (3.2.13) definen un flujo en el espacio de fase

$$\Psi^\pm = \{(x_\phi, x_\varphi, y, \Omega) : 0 \leq x_\phi^2 - x_\varphi^2 + y^2 + \Omega \leq 1, x_\phi^2 - x_\varphi^2 + y^2 \geq 0, \Omega \geq 0, \epsilon y \geq 0\}. \quad (3.2.15)$$

### 3.2.3 Invarianza ante transformaciones de coordenadas

Comecemos por recordar que a “rama” positiva ( $\epsilon = +1$ ) describe la dinámica de los modelos que se expanden por siempre y la “rama” negativa ( $\epsilon = -1$ ) describe la dinámica para modelos en contracción.

De tabla C.3 puede observarse que los valores propios correspondientes a las curvas  $+K_{\pm}$  así como los correspondientes a los puntos críticos aislados  $+M$ ,  $+F$ ,  $+SF$ ,  $+CS$  y  $+MS$ , tienen todos signos opuestos a los correspondientes valores propios de  $-K_{\pm}$ ,  $-M$ ,  $-F$  y  $-SF$ , respectivamente. De este análisis simple puede deducirse que el sistema admite un tipo de invarianza especial ante el cambio  $\epsilon \rightarrow -\epsilon$ . Esta consiste en que, para determinar el comportamiento dinámico de los puntos críticos en la rama “negativa” (o sea, el carácter de  $-K_{\pm}$ ,  $-M$ ,  $-F$  y  $-SF$  en el espacio de fases  $\Psi^-$ ), debemos intercambiar los términos “comportamiento de tiempo reciente”, “atractor del futuro”, “estable” y “en expansión” por los términos “comportamiento de tiempo temprano”, “atractor del pasado”, “inestable” y “en contracción”, respectivamente. En relación con las condiciones de hiperbolicidad/ o no hiperbolicidad de todos los puntos críticos del sistema son las mismas para tanto la rama “negativa” como la rama “positiva”. Así, de este modo basta caracterizar la estabilidad en el espacio de fase  $\Psi^+$ .

### 3.2.4 Funciones monótonas

Sea definida en el espacio de fase  $\Psi^+$  (o  $\Psi^-$ , dependiendo de la selección de  $\epsilon$ ) la función

$$M = \frac{(n x_{\phi} + m x_{\varphi})^2 \Omega^2}{(1 - x_{\phi}^2 + x_{\varphi}^2 - y^2 - \Omega)^3}, \quad M' = -2\epsilon\gamma M. \quad (3.2.16)$$

Esta función es monótona para  $\Omega > 0$  y  $n x_{\phi} + m x_{\varphi} \neq 0$ . Luego, la existencia de esta función monótona descarta órbitas periódicas, recurrentes, u homoclinicas del espacio de fase y son posibles resultados globales del análisis de estabilidad (local) de los puntos críticos. Adicionalmente, de la expresión para  $M$  se puede ver inmediatamente que  $\Omega \rightarrow 0$ , or  $n x_{\phi} + m x_{\varphi} \rightarrow 0$  o  $|n x_{\phi} + m x_{\varphi}| \rightarrow +\infty$  (implicando que  $x_{\phi}$  o  $x_{\varphi}$  o ambos divergen) o que  $\Omega_k \rightarrow 0$  asintóticamente.

### 3.2.5 Análisis de la estabilidad local de los puntos críticos.

En la tabla C.3, se ofrece información sobre las coordenadas, condiciones de existencia y valores propios asociados a los puntos críticos de sistema (3.2.13) en el espacio de estados (3.2.15) (para cada selección de signo, o sea, del valor de  $\epsilon$ ). En dicha tabla hemos usado las notaciones  $\delta = m^2 - n^2$ ,  $\lambda^{\pm} = -\frac{1}{4} \left( (2 - \gamma)\epsilon \pm \sqrt{(2 - \gamma) \left( 2 - 9\gamma + \frac{4\gamma^2}{\delta} \right)} \right)$ . [ $\times s$ ] significa que el correspondiente valor propio tiene multiplicidad  $s$ . Los subíndices en la etiqueta que identifica el punto crítico tienen el siguiente significado: el subíndice a la izquierda (denotado por  $\epsilon = \pm 1$ ) indica cuando el modelo cosmológico está en expansión (+) o en contracción (-); el subíndice a la derecha denota el signo de  $x_{\phi}$  (o sea, el signo de  $\dot{\phi}$ ) y es representado por el símbolo  $\pm$ . Los puntos  $\pm K_{\pm}$ ,  $\pm F$ ,  $\pm SF$ ,  $\pm MS$  son puntos críticos asociados a modelos FRW planos ( $k = 0$ ) el cual constituye un conjunto invariante de este caso más

general. Para el caso  $k = 0$ , los valores propios de estos puntos críticos coinciden con los mostrados en la tabla salvo el primero de la izquierda.

De acuerdo a la discusión sobre la invarianza del sistema, es suficiente caracterizar el comportamiento dinámico de  ${}_+K_{\pm}$ ,  ${}_+M$ ,  ${}_+F$ ,  ${}_+SF$ ,  ${}_+CS$  y  ${}_+MS$ , en el espacio de fase  $\Psi^+$ .

A continuación, estudiaremos la estabilidad local de los puntos (y curvas de puntos) críticos. Caracterizaremos las soluciones cosmológicas asociadas. En la tabla C.4, se presentan los valores de algunos parámetros cosmológicos, como son, el parámetro de ecuación de estado de la energía oscura,  $w$ , el parámetro de desaceleración,  $q$  y las densidades fraccionales de energía,  $\Omega_{m,de,k}$ , correspondientes a las soluciones cosmológicas asociadas a los puntos críticos de la tabla C.3.

Los conjuntos de puntos críticos  ${}_{\pm}K_{\pm}$  y los puntos críticos aislados  ${}_{\pm}M$  se localizan en el conjunto invariante de las cosmologías con campos escalares sin masa (CESM) sin materia. Los puntos críticos aislados  ${}_{\pm}F$  se localizan en el conjunto de las cosmologías CESM con materia.

Los arcos de hipérbola  ${}_{\pm}K_{\pm}$  parametrizados por el valor real  $x_{\phi}^*$  denotan modelos cosmológicos dominados por la densidad de energía de la EO ( $\Omega_{de} \rightarrow 1$ ), particularmente por su energía cinética. La EO mimetiza una solución de fluido rígido. Como estos son conjuntos de puntos críticos entonces, necesariamente, un valor propio es cero. Estos constituyen las fuentes locales de trayectorias (y en general constituyen el atractor del pasado en el espacio de fase  $\Psi^+$ ) si se verifica que  $nx_{\phi}^* \pm m\sqrt{1 + x_{\phi}^{*2}} < 1$ .

Los puntos críticos  ${}_{\pm}M$  denotan el universo de Milne. Estos son hiperbólicos.<sup>1</sup> Los puntos críticos  ${}_{\pm}F$  representan soluciones FRW planas. Son no hiperbólicos si  $\gamma = 2$ . Para estos puntos el campo quintom se anula, de modo que los parámetros cosmológicos asociados a la EO no tienen sentido (no son aplicables) a estos puntos.

La variedad estable de  ${}_+M$  es 3-dimensional y es tangente en el punto al espacio  $(x_{\phi}, x_{\phi}, \Omega)$  mientras que la inestable es 1-dimensional y es tangente al eje  $y$ . Esto significa que el punto crítico  ${}_+M$  es inestable a perturbaciones en  $y$ . El punto crítico  ${}_+F$  tiene asociados una variedad estable 2-dimensional que es tangente en el punto al plano  $(x_{\phi}, x_{\phi})$  y una variedad inestable 2-dimensional tangente al plano  $(y, \Omega)$  sin  $1 \leq \gamma < 2$ .

Los puntos críticos aislados  ${}_{\pm}SF$  y  ${}_{\pm}CS$  denotan soluciones dominadas por la energía quintasma y soluciones escalantes energía cinética-curvatura espacial, respectivamente. Estas se localizan en el conjunto invariante de las cosmologías con campo escalar con masa (CECM) sin materia de fondo ( $\Omega = 0$ ). Los puntos críticos  ${}_{\pm}MS$  (pertenecientes al conjunto invariante de las cosmologías con

---

<sup>1</sup>Si la condición  $1 \leq \gamma \leq 2$  se relaja esto deja de ser cierto. En lo que sigue, los argumentos sobre la hiperbolicidad/estabilidad de los puntos críticos pueden cambiar si abandonamos esta condición.

campo escalar con masa (CECM) con materia de fondo ( $\Omega > 0$ ) representan soluciones escalantes planas MO-EO.

La variedad estable de  ${}_+SF$  en  $\Psi^+$  es 4-dimensional si  $\delta < 1/3$  y  $1 \leq \gamma \leq 2$  en cuyo caso  ${}_+SF$  es el atractor global en  $\Psi^+$ .  ${}_+SF$  es una silla con una variedad estable 3-dimensional si  $1 \leq \gamma \leq 2$  y  $\frac{1}{3} < \delta < \frac{\gamma}{2}$  o 2-dimensional si  $1 \leq \gamma \leq 2$  y  $\frac{\gamma}{2} < \delta < 1$ .

Los puntos críticos aislados  $\pm CS$  son no hiperbolicos si  $\delta = \frac{1}{3}$ .<sup>2</sup> Por otra parte, los puntos críticos  $\pm MS$  son no hiperbolicos si  $\gamma = 2$ , o si  $\delta = \frac{\gamma}{2}$ .

${}_+CS$  es estable (con variedad estable 3-dimensional) y por tanto un atractor global si  $1 \leq \gamma \leq 2$  y  $\frac{1}{3} < \delta \leq \frac{4}{9}$  (en cuyo caso todos los valores propios son reales) o si  $1 \leq \gamma \leq 2$  y  $\delta > \frac{4}{9}$  (en cuyo caso existen dos valores propios complejos conjugados de forma tal que las órbitas inicialmente el subespacio generado por los correspondientes vectores propios forman espirales que convergen al punto crítico).

Si suponemos que  $1 \leq \gamma < 2$  entonces el punto crítico  ${}_+MS$  es un punto silla. Tiene una variedad estable 3-dimensional si  $\frac{\gamma}{2} < \delta \leq \frac{4\gamma^2}{-2+9\gamma}$  (en cuyo caso todos los valores propios son reales) o si  $1 \leq \gamma \leq 2$  y  $\delta > \frac{4\gamma^2}{-2+9\gamma}$  (en cuyo caso existen dos valores propios complejos conjugados de forma tal que las órbitas inicialmente el subespacio generado por los correspondientes vectores propios forman espirales que convergen al punto crítico). Debemos señalar, sin embargo, que  ${}_+MS$  puede ser el atractor global del sistema (lo que equivale a decir que la variedad estable es 4-dimensional) si se verifica que  $0 < \gamma < \frac{2}{3}$ ,  $\delta > \frac{\gamma}{2}$ .

### 3.2.6 Bifurcaciones

Observar que los puntos críticos  $\pm MS$  y  $\pm SF$  coinciden cuando  $\delta \rightarrow \frac{\gamma^+}{2}$ .  ${}_+SF$  ( ${}_+SF$ ) coincide con un punto en el arco  ${}_+K_+$  ( ${}_+K_+$ ) cuando  $\delta \rightarrow 1^-$ . Estos valores de  $\delta$  donde los puntos críticos coinciden corresponden a bifurcaciones dado que cambia la estabilidad en el espacio de fase.<sup>3</sup>

### 3.2.7 Comportamiento típico

Una vez que han sido identificados los atractores del modelo (asumiendo que  $1 \leq \gamma \leq 2$ ), podemos dar una descripción cualitativa del comportamiento físico de una cosmología quintasma abierta ( $k = -1$ ) típica.<sup>4</sup> Por ejemplo, para cosmologías que se expanden por siempre, el modelo cerca de la singularidad inicial se comporta como un modelo FRW plano con fluido rígido (o sea, la EO mimetiza

<sup>2</sup>Estos resultados pueden cambiar ligeramente si relajamos la restricción  $\gamma \geq 1$ .

<sup>3</sup>Si relajamos la condición  $1 \leq \gamma \leq 2$  se tienen otros valores de bifurcación para el parámetro  $\delta$ :  $\pm CS$  y  $\pm SF$  coinciden cuando  $\delta \rightarrow \frac{1}{3}^+$ .

<sup>4</sup>En la tabla C.6, se resumen todos los posibles atractores tanto hacia al pasado como hacia el futuro sin consideramos a  $0 \leq \gamma \leq 2$ , en lugar de la hipótesis  $1 \leq \gamma \leq 2$  (que es la que adoptamos como regla general en esta tesis).

un fluido rígido) representado por un punto crítico en  $+K_+$  o en  $+K_-$ , dependiendo de la selección de los valores de los parámetros libres  $m, n$  y  $x_\varphi^*$  (ver tabla C.5). Siempre que exista  $+CS$  (o sea, si  $\delta > \frac{1}{3}$ ) es el atractor global del sistema. En ausencia de este tipo de atractores, o sea, si se verifica que  $\delta < \frac{1}{3}$ , la dinámica de tiempo reciente está determinada por el punto crítico  $+SF$ , o sea, el modelo es acelerado, cerca de la planitud ( $\Omega_k \rightarrow 0$ ) y dominado por EO ( $\Omega_{de} \rightarrow 1$ ). El modelo de EO se comporta como quintaesencia ( $-1 < q < 0$ , o sea,  $-1 < w < -\frac{1}{3}$ ) o como campo fantasma ( $q < -1$ , o sea,  $w < -1$ ) si  $\delta > 0$  o  $\delta < 0$ , respectivamente. Esto significa que, típicamente, los modelos quintasmas abiertos siempre en expansión cruzan la barrera fantasma (su parámetro de la ecuación de estado toma valores menores que  $-1$ ).<sup>5</sup> La dinámica intermedia estará gobernada en gran medida por los puntos críticos  $+CS$ ,  $+MS$ , y  $+M$ , los cuáles tienen la variedad estable de dimensión inferior de mayor dimensionalidad.

Para modelos en contracción, el comportamiento típico es, en un sentido, el reverso del anterior. Si  $\delta < \frac{1}{3}$  la dinámica de tiempos tempranos estará dominada por  $-CS$ . En otro caso, si  $\delta > \frac{1}{3}$ , el atractor del pasado es  $-SF$ , o sea, el modelo es acelerado, cerca de la planitud ( $\Omega_k \rightarrow 0$ ) y dominado por EO. La dinámica intermedia está dominada en gran medida por los puntos críticos  $-CS$ ,  $-MS$ , y  $-F$ , los cuales tienen la variedad estable de dimensión inferior de mayor dimensionalidad. Un modelo típico se comporta en tiempos recientes como un modelo plano FRW con fluido de fondo (o sea, la EO mimetiza un fluido rígido) representada por el conjunto  $-K_+$  o por  $-K_-$ , dependiendo de la selección de los valores de los parámetros libres  $m, n$  y  $x_\varphi^*$ .

### 3.3 Caso Friedmann-Robertson-Walker plano

En esta sección especializamos el sistema de EDOs (3.1.4), (3.1.5), (3.1.6), (3.1.7), (3.1.8) a caso de un modelo FRW plano. Nos restringimos también al caso de modelos que se expanden eternamente ( $H > 0$  todo el tiempo). Como contenido material del modelo consideramos un campo de energía quintasma con potencial exponencial dado por (3.1.2) y un fondo de materia tipo polvo ( $\gamma = 1$ ). El modelo resultante representa un contraejemplo del comportamiento típico en modelos de energía quintasma porque admite atractores escalantes ( $w = 0$ ), o atractores fantasma ( $w < -1$ ).

#### 3.3.1 El modelo físico

Las correspondientes ecuaciones de campo se obtienen de las EDOs (3.1.4), (3.1.5), (3.1.6), (3.1.7), (3.1.8), sustituyendo los valores  $\gamma = 1$  and  $k = 0$ . El sistema resultante es

---

<sup>5</sup>Para modelos planos, es conocido que, siempre que exista (o sea si  $\delta > \frac{2}{3}$ ) el atractor es  $+MS$  (denotado por  $T$  en [17] en el caso particular que  $\gamma = 1$ ).

$$3H^2 = \rho_m + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\phi, \varphi) \quad (3.3.17)$$

$$-2\dot{H} = \rho_m + \rho_{de} + p_{de}. \quad (3.3.18)$$

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = 0, \quad (3.3.19)$$

y las ecuaciones (3.1.7) y (3.1.8).

En la siguiente sección estudiaremos este modelo cosmológico desde la perspectiva de los sistemas dinámicos. Hallaremos y caracterizaremos los puntos críticos del sistema y analizaremos las consecuencias cosmológicas de los resultados obtenidos. Prestaremos especial atención a la posibilidad que ofrecen estos modelos de explicar el cruce de la barrera fantasma.

### 3.3.2 Normalización y espacio de estados

Comenzaremos por presentar las ecuaciones (3.3.17), (3.3.18), (3.3.19), (3.1.7) y (3.1.8) como un sistema dinámico. Para hacer esto haremos uso del conjunto de variables: <sup>6</sup>

$$x_\phi = \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{6}H}, \quad x_\varphi = \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{6}H}, \quad y = \frac{\sqrt{V}}{\sqrt{3}H}, \quad z = \frac{\sqrt{\rho_m}}{\sqrt{3}H}. \quad (3.3.20)$$

las cuales de acuerdo a la ecuación de Friedmann (3.3.17), satisfacen

$$x_\phi^2 - x_\varphi^2 + y^2 + z^2 = 1. \quad (3.3.21)$$

La restricción (3.3.21) nos permite considerar solo la solución de solo tres variables (la evolución de la cuarta de ellas queda determinada de la evolución del resto de ellas). En nuestro caso la variable descartada será  $z$ .

Las variables  $x_\phi$ ,  $x_\varphi$  y  $y$  están definidas en el espacio de fase

$$\Psi = \{(x_\phi, x_\varphi, y) : 0 \leq x_\phi^2 - x_\varphi^2 + y^2 \leq 1\}. \quad (3.3.22)$$

Como veremos a continuación, las correspondientes ecuaciones de evolución forman un sistema dinámico 3-dimensional cuyas órbitas “viven” en un hiperboloide.

### 3.3.3 Sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer grado

En esta sección nos concentraremos solo en la evolución de modelos en expansión, o sea, en lo que sigue asumiremos que  $H \geq 0$  y que  $y \geq 0$ . Combinando las expresiones (3.3.17), (3.3.18), (3.3.19),

<sup>6</sup>Estas variables no están bien definidas cuando  $H \rightarrow 0$ . Sin embargo, serán suficientes para la discusión en esta sección.

(3.1.7), (3.1.8) y (3.3.20), se obtienen las ecuaciones de evolución:

$$x'_\phi = \frac{1}{3} (3my^2 + (q-2)x_\phi) \quad (3.3.23)$$

$$x'_\varphi = -\frac{1}{3} (3my^2 - (q-2)x_\varphi) \quad (3.3.24)$$

$$y' = \frac{1}{3} (1 + q - 3(mx_\phi + nx_\varphi))y \quad (3.3.25)$$

Donde la prima denota diferenciación con respecto a la nueva variable temporal  $\tau = \log a^3$  y  $q \equiv -\ddot{a}a/\dot{a}^2$  denota el parámetro de desaceleración. Explícitamente

$$q = \frac{1}{2} (3(x_\phi^2 - x_\varphi^2 - y^2) + 1). \quad (3.3.26)$$

### 3.3.4 Conjuntos invariantes y funciones monótonas

Para modelos con curvatura cero puede probarse que los conjuntos  $x_\phi^2 - x_\varphi^2 + y^2 < 1$  y  $x_\phi^2 - x_\varphi^2 + y^2 = 1$  son conjuntos invariantes del flujo (si se verifica que  $x_\phi^2 - x_\varphi^2 - y^2 \neq 0$ ). De hecho, la función  $Z = x_\phi^2 - x_\varphi^2 + y^2 - 1$  tiene derivada en la dirección del flujo dada por  $Z' = \alpha Z$  donde  $\alpha$  es una función continua de valores reales no nula sobre  $\mathbb{R}^3$  definida por  $\alpha = x_\phi^2 - x_\varphi^2 - y^2$ . Luego, aplicando la Proposición 2.2.3, sigue el resultado deseado. En la misma manera se prueba que  $y = 0$  es un conjunto invariante para el flujo definiendo  $\alpha = 1 + q - 3(mx_\phi + nx_\varphi)$  (si se verifica que  $\alpha \neq 0$ ). Combinando los resultados previos se puede probar que el conjunto 2-dimensional

$$\Gamma = \{(x_\phi, x_\varphi, y) : 0 < x_\phi^2 - x_\varphi^2 < 1, y = 0\}$$

es invariante bajo el flujo.

El análisis lineal nos dice que el sistema 3D bajo consideración tiene a lo sumo tres puntos críticos aislados (dependiendo de los valores de  $m$  y  $n$ ). Los denotaremos por  $O$ ,  $T$  y  $P$ . Además, existen dos curvas (hipérbolas) de puntos críticos no aislados, y las denotaremos por  $C_\pm$ .

Notemos que los puntos críticos  $O$  y  $C_\pm$  estudiados en [17] están en la frontera de  $\Gamma$  (denotada por  $\partial\Gamma$ ).

Es posible introducir en el conjunto  $\Gamma$ , la función monótona  $\mathcal{K}$ , definida por

$$\mathcal{K} = \frac{x_\phi^4}{(1 - x_\phi^2 + x_\varphi^2)^2}, \quad (3.3.27)$$

la cuál satisface

$$\mathcal{K}' = -2\mathcal{K}, \quad (3.3.28)$$

de modo que cuando la expansión procede  $\mathcal{K}$  decrece. Esta función monótona toma sus valores máximo y mínimo en  $x_\phi^2 - x_\varphi^2 = 1$  y  $x_\phi = 0$ , de modo que, típicamente, las órbitas transitan entre  $C_\pm$

y  $O$ , y podemos decir que las órbitas  $C_{\pm}$  son fuentes locales de trayectorias. Esta apreciación queda sustentada por las cuatro figuras representando el espacio de fase para diferentes valores de  $m$  y  $n$ .

También es posible construir otras funciones monótonas las cuales nos permiten obtener información de los estados asintóticos del sistema. Por ejemplo, sea definida en  $\Gamma$ , la función

$$R = \frac{(nx_{\phi} + mx_{\varphi})^4}{(1 - x_{\phi}^2 + x_{\varphi}^2)^2}.$$

Esta función tiene derivada en la dirección del flujo dada por

$$R' = \frac{4(q-2)}{3(1 - x_{\phi}^2 + x_{\varphi}^2)} R.$$

Observar que en este caso  $q = \frac{1}{2} \left( 3(x_{\phi}^2 - x_{\varphi}^2) + 1 \right) < 2$  dado que  $y = 0$  y  $0 < x_{\phi}^2 - x_{\varphi}^2 < 1$ . Luego, esto implica que  $R$  es monótona decreciente en  $\Gamma$ . Luego, aplicando el Principio de Monotonía, Teorema (2.2.7), encontramos que el futuro asintótico del modelo está en el conjunto invariante  $nx_{\phi} + mx_{\varphi} = 0$ , mientras que, el pasado asintótico del modelo está en la hipérbola  $C : x_{\phi}^2 - x_{\varphi}^2 = 1$  (si se verifica que  $nx_{\phi} + mx_{\varphi} \neq 0$ ). La función monótona  $R$  nos permite concluir que (para modelos con curvatura cero y en expansión eterna) las órbitas comienzan inicialmente cerca de las hipérbolas y tienden asintótica o bien a la solución escalante (MS) (punto crítico  $T$  para el caso de MO tipo polvo) o (en ausencia de soluciones escalantes) a la solución con ley de potencia (punto crítico  $P$ ).

La existencia de estas funciones monótonas definidas sobre el conjunto invariante  $\Gamma$  nos permite garantizar que  $\Gamma$  no contiene órbitas periódicas, recurrentes y/o homoclínicas. El hecho de que la dinámica en este subconjunto este dominada solo por puntos críticos y trayectorias heteroclínicas puede ser verificado en las simulaciones numéricas que hemos hecho (ver las figuras B.6-B.9). Más adelante presentaremos algunas de las secuencias heteroclínicas en el espacio de estados.

### 3.3.5 Análisis de estabilidad local de los puntos críticos.

En las tablas C.7 y C.8, se presenta una información (parcial) sobre el carácter dinámico de estos puntos, a saber, la localización en el espacio de fase, las condiciones de existencia y el parámetro de desaceleración,  $q$ , los valores propios del sistema linealizado en una vecindad del punto, el carácter dinámico y el valor del parámetro de la ecuación de estado de la energía oscura,  $w$ . Mas adelante completaremos esta información identificando los modelos cosmológicos representados por los puntos críticos de nuestro sistema dinámico, y en el caso de los puntos críticos aislados; también comentaremos acerca de su geometría. Finalmente presentaremos algunas simulaciones numéricas que soportan nuestros hallazgos. Notemos que en el caso de los sistemas dinámicos 3D es en general difícil de extraer información suficiente del sistema sin recurrir a la investigación numérica [100]. La necesidad

de utilizar herramientas numéricas se manifiesta particularmente en el problema que no interesa tratar, dado que los estados asintóticos e intermedios tienen la misma relevancia en nuestro estudio. Con esto en mente, no solo deseamos mostrar que nuestro sistema admite soluciones con parámetro de ecuación de estado  $w > -1$  y otro con  $w < -1$ , sino que también queremos mostrar como puede ocurrir la transición sin necesidad de ajustar finamente las condiciones iniciales. En nuestro caso

$$w = \frac{x_\phi^2 - x_\varphi^2 - y^2}{x_\phi^2 - x_\varphi^2 + y^2}, \quad (3.3.29)$$

el cual evaluaremos luego en cada punto crítico.

Luego, si alguno de los límites asintóticos de nuestro modelo debe describir adecuadamente el universo actual, esta debe ser una solución acelerada. Por tanto las soluciones no aceleradas deben ser asintóticamente inestables, o dicho de otra manera, ellas no deben ser favorecidas por las condiciones iniciales. En este sentido solo los casos en que  $P$  es estable son satisfactorios.

Como puede deducirse de las tablas C.7 y C.8, muchas de las características de nuestro sistema dinámico dependen del valor de la cantidad  $\delta \equiv m^2 - n^2$ . Nos podemos dar cuenta casi inmediatamente de la relevancia de esta magnitud al notar que

$$6\delta = 6(m^2 - \tilde{n}^2) = \left(\frac{V_{,\phi}}{V}\right)^2 - \left(\frac{V_{,\varphi}}{V}\right)^2, \quad (3.3.30)$$

o sea, la cantidad que indica la existencia de un atractor o el otro compara la pendiente del potencial en dos direcciones diferentes, o equivalentemente, ella compara cuan rápido los campos escalares liberan (adquieren) energía potencial cuando ellos ruedan hacia abajo (escalán) el potencial. A diferencia del caso con un solo campo escalar con potencial exponencial, en el caso de dos campos escalares, podemos tener una expansión acelerada aún si el potencial no es suficientemente plano. Lo que interesa aquí no es exactamente cuán plano el potencial es, sino que lo que importa, esencialmente, es cuanto más plano es en una dirección que en la otra.

Después de estas aclaraciones preliminares, seremos más específicos sobre el carácter de los puntos críticos aislados y no aislados de nuestro sistema.

El punto  $O$  representa una solución desacelerada dominada por materia. Es una silla, y su carácter inestable (ver las figuras B.6-B.9) coincide con lo que ya habíamos anticipado. Tales soluciones se espera que sean relevantes en la caracterización del universo temprano (específicamente para la época de desacople materia–radiación). Las variables que hemos utilizado no nos permiten conocer el valor del parámetro de la ecuación de estado correspondiente a este caso (por que no conocemos los valores de las diferentes razones entre  $x_\phi$ ,  $x_\varphi$  y  $y$ ). Para esta tarea posiblemente requeriremos el uso de un

conjunto alternativo de variables más adecuadas para la descripción del universo temprano, pero esto es de poco interés en el contexto de esta sección.

Las curvas  $C_{\pm}$  representan soluciones en las cuáles la contribución de la materia y la energía potencial a la densidad de energía total es despreciable. Estas soluciones son entonces de tipo fluido rígido (stiff-fluid,  $w = 1$ ), las cuales a su vez corresponden a universos desacelerados. El carácter inestable de estas soluciones significa que ellas no son favorecidas desde el punto de vista de las condiciones iniciales y por tanto es improbable que ellas representen el estadio final en la evolución de nuestro universo.

El punto  $T$  representa una solución para la cual la EO quintasma escala con la MO (la ecuación de estado del quintasma es de tipo polvo), y cuando este punto crítico existe es un atractor. Este estado asintótico de tiempo reciente representa un modelo cosmológico desacelerado en el cual la razón entre las densidades de energía de la materia y de la EO son proporcionales. De acuerdo a la estructura de valores propios de esta solución esta puede ser o bien una silla o un nodo espiral. Como estas soluciones no son compatibles con el universo actual, los modelos de energía quintasma con este tipo de atractor no son satisfactorios. Curiosamente, la existencia de esta solución es completamente inherente a la interacción entre los dos campos escalares. Su existencia, al menos en nuestro marco de trabajo, indica que los modelos de energía quintasma pueden admitir otros atractores diferentes que los usuales atractores fantasma y atractores de de Sitter, un hecho que no había sido señalado en la literatura con anterioridad (hasta donde conocemos).

El punto  $P$  representa una solución en la cual la EO quintasma domina sobre la materia (la ecuación de estado del fluido quintasma corresponde a un fluido es cual se corre al rojo más rápido que el polvo). Este estado asintótico de tiempo reciente no necesariamente representa un modelo cosmológico acelerado, eso depende de la cantidad  $\delta = m^2 - n^2$ . Debido a la naturaleza de sus valores propios, esta solución es o bien una silla o un nodo estable. Las soluciones aceleradas asociadas a este punto crítico pueden proporcionar un buena representación del universo actual. El potencial que hemos seleccionado nos permite caracterizar a este punto por su valor del parámetro de la ecuación de estado  $w < -1$ , mientras que en los modelos de energía quintasma estudiados en [56, 57] el atractor satisfacía  $w = -1$  necesariamente.

De acuerdo a sus valores propios, en principio los puntos críticos  $T$  y  $P$  pueden tener tres o dos comportamientos dinámicos diferentes.<sup>7</sup> No obstante, en algunos casos que un punto crítico tenga determinado tipo de comportamiento fuerza la no existencia del otro punto. Adicionalmente, las

---

<sup>7</sup>El punto  $T$  puede ser bien una silla, un nodo espiral, o un nodo estable. El punto crítico  $P$  puede ser una silla o un nodo estable.

condiciones de existencia de estos puntos por un lado y los experimentos numéricos por otro lado, nos permiten identificar las secuencias heteroclínicas de estos modelos.

### 3.3.6 Secuencias heteroclínicas

Bajo las hipótesis  $m > 0$  y  $n > 0$ , pueden distinguirse cuatro casos (ver figura. B.10):

- Caso i) Para  $m < \sqrt{n^2 + 1/2}$ , el punto  $P$  es un nodo estable, mientras que el punto  $T$  no existe. La secuencia heteroclínica en este caso es  $C_{\pm} \rightarrow O \rightarrow P$  (ver figura (B.6)).
- Caso ii) Para  $\sqrt{n^2 + 1/2} < m \leq \sqrt{n^2 + 4/7}$ , el punto  $T$  es un nodo estable y el punto  $P$  es una silla. Para estas condiciones la secuencia heteroclínica es  $C_{\pm} \rightarrow O \rightarrow P \rightarrow T$  (ver figura (B.7)).
- Caso iii) Para  $\sqrt{n^2 + 4/7} < m < \sqrt{1 + n^2}$ , el punto  $T$  es un nodo espiral y el punto  $P$  es una silla. Para estas condiciones la secuencia heteroclínica es la misma que en el caso anterior (ver Fig. (B.8)).
- Caso iv) Para  $m > \sqrt{1 + n^2}$  el punto  $T$  es un nodo espiral mientras que el punto  $P$  no existe. La secuencia heteroclínica en este caso es  $C_{\pm} \rightarrow O \rightarrow T$  (ver Fig. (B.9)).

### 3.3.7 Consecuencias cosmológicas: cruce de la barrera fantasma

Antes de finalizar esta sección queremos hacer algunos comentarios sobre las densidades adimensionales  $\Omega_m = \rho_m/3H^2$  y  $\Omega_{de} = \rho_{de}/3H^2$ . No es difícil mostrar que

$$\left(\frac{\Omega_m}{\Omega_{de}}\right)' = w \frac{\Omega_m}{\Omega_{de}}. \quad (3.3.31)$$

Este resultado puede verse como una prueba de consistencia de algunos de nuestros resultados previos en el sentido de que en el curso de la evolución, la EO se convierte en la componente dominante cuando  $w < 0$ , por que en este caso la densidad de EO corre al rojo más rápido que la densidad de MO.

Notemos también que, salvo en el caso de la EO puramente fantasma, ambas densidades fraccionales de energía son no despreciables durante un período de tiempo suficientemente grande, como se muestra en la Fig. (B.11). Así al menos este problema el cual invalida los modelos más simples con un atractor de tiempo reciente de tipo fantasma [108] está ausente de nuestro modelo.

Es necesario decir que las órbitas que hemos representado muestran que, para un amplio rango de valores de las condiciones iniciales para las cuales  $w \sim 1$  (cerca de las hipérbolas), se alcanza la región  $w < -1$  si  $m^2 - n^2 < 0$ , de esta manera ocurre el cruce de la frontera fantasma.

En los modelos de energía quintasma propuestos en esta sección de la tesis es posible tener, dependiendo de la selección que se haga de las constantes del potencial, uno u otro tipo de atractor de tiempo reciente con propiedades más o menos compatibles con el tipo de comportamiento que se espera para el modelo cosmológico que definitivamente describa el futuro asintótico de nuestro Universo.

En este sentido las técnicas de sistemas dinámicos pueden ser utilizadas en última instancia para restringir (ajuste fino) el espacio de parámetros de un determinado modelo cosmológico. Por ejemplo si escogemos las constantes libres del potencial (3.1.2) de modo que  $m < \sqrt{n^2 + 1/2}$ , el atractor del sistema será una solución de tipo fantasma -y el destino último de nuestro universo estaría signado por una singularidad catastrófica de gran desgarro (dado que en este caso la expansión del Universo es eterna)-, en cambio si escogemos estas constantes de modo que  $m > \sqrt{1 + n^2}$ , el atractor del sistema será de tipo escalante (solución no acelerada) -la EO mimetiza un fluido de tipo polvo, conduciendo en última instancia a una singularidad de Big-Crunch, dado que toda la materia/energía del universo tendría características de gravedad atractiva-. Este último caso no es viable para la descripción de nuestro Universo, por que las soluciones típicas en el espacio de fase (cada una describiendo una evolución típica del Universo) no contienen una época de expansión acelerada.

En los restantes dos casos analizados la sección 3.3, la etapa de expansión acelerada es transitoria (correspondiendo a una solución de cuasi-equilibrio). El universo actual podría estar en su evolución muy cerca de esta etapa y en un futuro asintótico el comportamiento pudiera ser de tipo escalante.

### 3.4 Modelos con curvatura positiva ( $k=+1$ )

Para investigar modelos con curvatura positiva haremos uso de variable similares a las definidas en [18] sección VI.A. Asumiremos que  $\frac{2}{3} \leq \gamma \leq 1$ .

#### 3.4.1 Normalización y espacio de estados

Introduzcamos el factor de normalización

$$\hat{D} = 3\sqrt{H^2 + a^{-2}}. \quad (3.4.32)$$

Observar que

$$\hat{D} \rightarrow 0 \Leftrightarrow H \rightarrow 0, a \rightarrow +\infty$$

(o sea, en una singularidad). Esto significa que no es posible que  $\hat{D}$  se anule en un tiempo finito.

Introduzcamos las variables normalizadas

$(Q_0, \hat{U}_\phi, \hat{U}_\varphi, \hat{W}, \hat{\Omega})$ , dadas por

$$Q_0 = \frac{3H}{\hat{D}}, \hat{U}_\phi = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\dot{\phi}}{\hat{D}}, \hat{U}_\varphi = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\dot{\varphi}}{\hat{D}}, \hat{W} = \frac{\sqrt{3}V}{\hat{D}}, \hat{\Omega} = \frac{3\rho}{\hat{D}^2}. \quad (3.4.33)$$

De la ecuación de Friedmann resulta

$$0 \leq \hat{U}_\phi^2 - \hat{U}_\varphi^2 + \hat{W}^2 = 1 - \hat{\Omega} \leq 1 \quad (3.4.34)$$

y por definición

$$-1 \leq Q_0 \leq 1. \quad (3.4.35)$$

Por las restricciones (3.4.34, 3.4.35), las variables de estado están definidas en el espacio de estados

$$\hat{\Psi} = \left\{ (Q_0, \hat{U}_\phi, \hat{U}_\varphi, \hat{W}) : 0 \leq \hat{U}_\phi^2 - \hat{U}_\varphi^2 + \hat{W}^2 \leq 1, -1 \leq Q_0 \leq 1 \right\}. \quad (3.4.36)$$

Como antes, el espacio de estados es no compacto.

### 3.4.2 Sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer grado

Introduzcamos la coordenada temporal

$$' \equiv \frac{d}{d\hat{\tau}} = \frac{3}{\hat{D}} \frac{d}{dt}.$$

$\hat{D}$  tiene ecuación de evolución

$$\hat{D}' = -3Q_0\hat{D} \left( \hat{U}_\phi^2 - \hat{U}_\varphi^2 + \frac{\gamma}{2}\hat{\Omega} \right)$$

donde

$$\hat{\Omega} = 1 - \left( \hat{U}_\phi^2 - \hat{U}_\varphi^2 + \hat{W}^2 \right).$$

Esta ecuación se desacopla del resto de las ecuaciones de evolución. Luego, se obtiene un conjunto reducido de ecuaciones de evolución dado por

$$\begin{aligned} Q_0' &= (1 - Q_0^2) \left( 1 - 3 \left( \hat{U}_\phi^2 - \hat{U}_\varphi^2 + \frac{\gamma}{2}\hat{\Omega} \right) \right), \\ \hat{U}_\phi' &= 3m\hat{W}^2 + 3Q_0\hat{U}_\phi \left( -1 + \hat{U}_\phi^2 - \hat{U}_\varphi^2 + \frac{\gamma}{2}\hat{\Omega} \right), \\ \hat{U}_\varphi' &= -3n\hat{W}^2 + 3Q_0\hat{U}_\varphi \left( -1 + \hat{U}_\phi^2 - \hat{U}_\varphi^2 + \frac{\gamma}{2}\hat{\Omega} \right), \\ \hat{W}' &= -3\hat{W} \left( m\hat{U}_\phi + n\hat{U}_\varphi - Q_0 \left( \hat{U}_\phi^2 - \hat{U}_\varphi^2 + \frac{\gamma}{2}\hat{\Omega} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.4.37)$$

Disponemos también de una ecuación de evolución auxiliar

$$\hat{\Omega}' = -Q_0 \left( -2 \left( \hat{U}_\phi^2 - \hat{U}_\varphi^2 \right) + \gamma \left( 1 - \hat{\Omega} \right) \right) \hat{\Omega}. \quad (3.4.38)$$

Es útil expresar los parámetros cosmológicos de interés en términos de nuestras variables de estado.

$$(\Omega_m, \Omega_{de}, \Omega_k, q) = \left( \hat{\Omega}, 1 - \hat{\Omega}, Q_0^2 - 1, 1 - 3 \left( \hat{U}_\phi^2 - \hat{U}_\varphi^2 + \frac{\gamma}{2} \hat{\Omega} \right) \right) / Q_0^2,$$

y

$$w = \frac{\hat{U}_\phi^2 - \hat{U}_\varphi^2 - \hat{W}^2}{\hat{U}_\phi^2 - \hat{U}_\varphi^2 + \hat{W}^2}.$$

donde hemos definido  $\Omega_k \equiv \frac{k}{a^2 H^2} = \frac{1}{a^2 H^2}$ .

### 3.4.3 Invarianza ante transformaciones de coordenadas

Observar que el sistema (3.4.37, 3.4.38) es invariante bajo la transformación de coordenadas

$$\left( \hat{\tau}, Q_0, \hat{U}_\phi, \hat{U}_\varphi, \hat{W}, \hat{\Omega} \right) \rightarrow \left( -\hat{\tau}, -Q_0, -\hat{U}_\phi, -\hat{U}_\varphi, \hat{W}, \hat{\Omega} \right). \quad (3.4.39)$$

Por tanto, es suficiente discutir el comportamiento dinámico en una parte del espacio de estados. La dinámica en la otra parte puede obtenerse a través de la transformación de coordenadas (3.4.39).

En relación con los posibles atractores del sistema caracterizaremos solo aquellos correspondiendo a la rama “positiva”. El comportamiento dinámico de los puntos críticos en la rama “negativa” puede obtenerse aplicando la transformación (3.4.39). Cuando pasamos de la rama “positiva” a la “negativa”, debemos intercambiar los términos “comportamiento de tiempo reciente”, “atractor del futuro”, “estable” y “en expansión” por los términos “comportamiento de tiempo temprano”, “atractor del pasado”, “inestable” y “en contracción”, respectivamente. Como antes, las condiciones de hiperbolicidad y/o no hiperbolicidad es la misma para ambas ramas.

### 3.4.4 Conjuntos invariantes y funciones monótonas

La función

$$N = \frac{\left( n \hat{U}_\phi + m \hat{U}_\varphi \right)^2 \hat{\Omega}^2}{\left( 1 - Q_0^2 \right)^3}, \quad N' = -6\gamma Q_0 N \quad (3.4.40)$$

es monótona en las regiones  $Q_0 < 0$  y  $Q_0 > 0$  para  $Q_0^2 \neq 1$ ,  $n\hat{U}_\phi + n\tilde{U}_\varphi \neq 0$ ,  $\hat{\Omega} > 0$ . Luego, no existen órbitas periódicas, orbitas homoclínicas u órbitas recurrentes en el interior del espacio de estados. Además, es posible obtener resultados globales. De la expresión de  $N$  podemos ver inmediatamente que asintóticamente  $Q_0^2 \rightarrow 1$  o  $n\hat{U}_\phi + m\tilde{U}_\varphi \rightarrow 0$  o  $\hat{\Omega} \rightarrow 0$ .

### 3.4.5 Análisis de estabilidad local de los puntos críticos.

En la tabla C.9, se resume la localización, condiciones de existencia y valores propios del sistema linealizado en una vecindad de cada punto crítico. En lo siguiente caracterizaremos el comportamiento dinámico de las soluciones cosmológicas asociadas a estos. En dicha tabla, usamos el mismo convenio de signos y la misma notación que en la tabla C.3. Usamos etiquetas con sombrero para distinguir del caso  $k = -1, 0$ . Si  $\gamma = \frac{2}{3}$ , el conjunto de puntos críticos,  $S_\pm$ , corresponde a soluciones estáticas. Cuando el flujo se restringe a los conjuntos  $Q_0 = \pm 1$ , los valores propios asociados a los puntos  $\pm\hat{F}$ ,  $\pm\hat{S}F$  y  $\pm\hat{M}S$  y a los conjuntos de puntos críticos  $\pm\hat{K}_\pm$ , son, en cada caso, los mismos mostrados, salvo el primero desde la izquierda.

Los puntos críticos  $\pm\hat{K}$ ,  $\pm\hat{F}$ ,  $\pm\hat{S}F$  y  $\pm\hat{M}S$  representan soluciones FRW planas. Los valores del parámetro de la ecuación de estado de la energía oscura, el parámetro de desaceleración y los valores de las densidades fraccionales de energía de los anteriores puntos son los mismos que los asociados a los puntos sin sombrero en la tabla C.4.

Existen puntos de equilibrio  $S_\pm$  correspondiendo a soluciones estáticas análogas a las soluciones estáticas de Einstein. Estos tienen sentido físico solo cuando  $0 < \gamma < \frac{2}{3}$ .

El conjunto de puntos críticos  $+\hat{K}_\pm$  parametrizados por el valor real  $U_\varphi^*$  representa una solución cosmológica de fluido rígido (la EO mimetiza un fluido rígido). Este es el atractor del pasado para modelos cerrados en expansión eterna si  $nU_\varphi^* \pm m\sqrt{1 + U_\varphi^{*2}} < 1$ . Como procedimos antes, una simple aplicación de la simetría (3.4.39), permite la identificación de los atractores del futuro para modelos en contracción: Las órbitas típicas tienden asintóticamente a  $-\hat{K}_\pm$  cuando  $\hat{\tau} \rightarrow \infty$  si se verifica  $nU_\varphi^* \pm m\sqrt{1 + U_\varphi^{*2}} > -1$ , y  $-1 \leq Q_0 < 0$ . Este hecho tiene interesantes consecuencias. Si  $U_\varphi^*$  es un valor fijo y  $n$  y  $m$  son tales que  $-1 < nU_\varphi^* + m\sqrt{1 + U_\varphi^{*2}} < 1$ , entonces, existe una órbita del tipo  $+\hat{K}_+ \rightarrow -\hat{K}_+$ . Si  $n$  y  $m$  son tales que  $-1 < nU_\varphi^* - m\sqrt{1 + U_\varphi^{*2}} < 1$ , entonces, existe una órbita del tipo  $+\hat{K}_- \rightarrow -\hat{K}_-$ . estas son soluciones comenzando en y recolapsando a una singularidad dada por una cosmología de campo escalar sin masa (CESM) (ver figura B.12 (b)).

Los puntos críticos  $\pm\hat{F}$  representan soluciones FRW planas. Ellos son no hiperbólicos si  $\gamma = \frac{2}{3}$  o si  $\gamma = 2$ . Para estos puntos el campo escalar se anula, de modo que los parámetros cosmológicos asociados

a la EO no se aplican a estos puntos. Si  $\delta > \frac{2}{3}$ , la variedad inestable (estable) de  $+\hat{F}$  ( $-\hat{F}$ ) es tangente al punto crítico y paralela al plano  $\hat{W} - Q_0$ . esto significa que existe una órbita conectando  $+\hat{F}$  y  $-\hat{F}$  apuntando hacia  $-\hat{F}$  en la dirección del eje  $Q_0$ . Esta representa una solución FRW cerrada sin campo quintasma comenzando en una singularidad de big-bang en  $+\hat{F}$  y recolapsando en un “big-crunch” en  $-\hat{F}$  (ver figura B.12 (a)).

El punto crítico  $+\hat{S}\hat{F}$  representa una solución dominada por el campo quintasma (con potencial diferente de cero). Puede ser el atractor global en los conjuntos  $0 < Q_0 < 1$  o  $Q_0 = 1$  (o sea, para modelos simple en expansión, o para modelos planos) para los valores de los parámetros mostrados en la tabla C.10. Este puede representar una solución dominada por el campo fantasma si se verifica que  $\delta < 0$ . También puede representar quitaesencia o solución de de Sitter.

La solución escalante EO-curvatura  $\pm\hat{C}\hat{S}$  existe para  $0 < \delta < \frac{1}{3}$ . Los valores de sus parámetros son los mismos que para  $\pm\hat{C}\hat{S}$  (mostrados en la tabla C.4), pero representa una solución cosmológica diferente con curvatura positiva en lugar de curvatura negativa. Para  $0 < \delta < \frac{1}{3}$  existen los puntos críticos  $\pm\hat{C}\hat{S}$  para los cuales la materia no es importante, pero la curvatura es diferente de cero ( $Q_0^2 \neq 1$ ) y escala al campo escalar. Estas son llamadas soluciones escalantes curvatura-energía cinética. Estos puntos críticos son, típicamente, puntos silla.

El punto crítico  $+\hat{M}\hat{S}$  existe si  $\delta > \frac{\gamma}{2}$ . Este representa una solución plana escalante MO-EO, para la cual tanto el fluido como el campo quintasma son dinámicamente importantes. Bajo nuestra hipótesis sobre  $\gamma$ , es en general, un silla. Si  $0 < \gamma < \frac{2}{3}$  entonces es un atractor. Para modelos con curvatura cero (o sea, con  $Q^2 = 1$ ) se obtiene un resultado similar para  $+\hat{M}\hat{S}$  pero para valores  $0 < \gamma < 2$  (ver la tabla C.10 para más detalles. En dicha tabla ofrecemos un resumen de los atractores del modelo quintom para  $k = 1$ ).

### 3.4.6 Bifurcaciones

Observar que los puntos críticos  $\pm\hat{M}\hat{S}$  y  $\pm\hat{S}\hat{F}$  coinciden cuando  $\delta \rightarrow \frac{\gamma}{2}^+$ . En cuyo caso, la materia desestabiliza al punto crítico  $+\hat{S}\hat{F}$  en el valor de bifurcación  $\delta = \frac{\gamma}{2}$ .

$\pm\hat{C}\hat{S}$  y  $\pm\hat{S}\hat{F}$  coinciden cuando  $\delta \rightarrow \frac{1}{3}^-$ . Adicionalmente,  $+\hat{S}\hat{F}$  ( $-\hat{S}\hat{F}$ ) coincide con un punto en el arco  $+\hat{K}_+$  ( $-\hat{K}_-$ ) cuando  $\delta \rightarrow 1^-$ . Estos valores de  $\delta$  donde los puntos críticos coinciden corresponden a bifurcaciones. Un ejemplo interesante de bifurcación ocurre cuando  $\gamma = \frac{2}{3}$ . Si  $\gamma = \frac{2}{3}$ , el conjunto de puntos críticos,  $S_{\pm}$ , se reduce a dos conjuntos de puntos críticos  $V_{1,2}$  con las propiedades

Nombre	Coordenadas:	Existencia	Valores propios
	$(Q_0, \hat{U}_\phi, \hat{U}_\varphi, \hat{W})$		
$V_1$	$(0, -U_\varphi^*, U_\varphi^*, 0)$	Todo $m$ y $n$	$0[\times 4], (m - n)U_\varphi^*$
$V_2$	$(0, U_\varphi^*, U_\varphi^*, 0)$	Todo $m$ y $n$	$0[\times 4], -(m + n)U_\varphi^*$

lo que indica un cambio de estabilidad cuando  $S_\pm$  abandonan el espacio de estados físico.

### 3.4.7 Comportamiento típico

Una vez que los atractores han sido identificados es posible dar una descripción del comportamiento dinámico típico de las cosmologías quintasma cerradas (o sea, con curvatura positiva). Por ejemplo, para modelos en expansión eterna, cerca de la singularidad de big-bang un modelo típico se comporta como un modelo FRW plano con fluido rígido representado por los conjuntos de puntos críticos  $+\hat{K}_+$  o por  $+\hat{K}_-$  (cosmologías CESM), dependiendo de la selección de valores de los parámetros libres  $m, n$  y  $U_\varphi^*$ . Si  $\frac{2}{3} \leq \gamma \leq 2, \delta < \frac{1}{3}$  o  $0 \leq \gamma \leq \frac{2}{3}, \delta < \frac{\gamma}{2}$ , y  $0 < Q_0 < 1$  la dinámica de tiempo reciente está determinada por  $+\hat{S}F$ , (con la mismas propiedades que  $+SF$ ). La dinámica intermedia queda determinada en gran medida por los puntos críticos  $+\hat{C}S, +\hat{M}S$ , y  $+\hat{F}$ , que tiene el subespacio estable de dimensión inferior d emayor dimensión posible. Para modelos planos en expansión (o sea, en el conjunto invariante  $Q_0 = 1$ ), la dinámica de tiempo reciente está determinada por el punto crítico  $+\hat{S}F$  si se verifica que  $\delta < \frac{\gamma}{2}$  (con  $0 \leq \gamma \leq 2$ ).

Para modelos en contracción, el comportamiento típico, es en un sentido, el reverso del anterior. Si  $\frac{2}{3} \leq \gamma \leq 2, \delta < \frac{1}{3}$  o  $0 \leq \gamma \leq \frac{2}{3}, \delta < \frac{\gamma}{2}$ , y  $-1 < Q_0 < 0$  la dinámica de tiempo temprano está determinada por  $-\hat{S}F$ . La dinámica intermedia está determinada en gran medida por los puntos críticos  $-\hat{C}S, -\hat{M}S$ , y  $-\hat{F}$ , los cuales tienen el subespacio estable de dimensión inferior de mayor dimensionalidad posible. Para modelos planos (o sea, en el conjunto invariante  $Q_0 = -1$ ), la dinámica de tiempo temprano está determinada por el punto crítico  $-\hat{S}F$  si se verifica  $\delta < \frac{\gamma}{2}$  (con  $0 \leq \gamma \leq 2$ ). Un modelo típico se comporta en tiempos recientes como un modelo FRW plano con fluido rígido (o sea, la energía oscura mimetiza un fluido rígido) representados por el conjunto de puntos críticos  $-\hat{K}_+$  o por  $-\hat{K}_-$  dependiendo de la selección de los valores de los parámetros libres  $m, n$  y  $U_\varphi^*$ .

## 3.5 Conclusiones parciales

El análisis matemático de los modelos cosmológicos usando técnicas propias de la teoría de los sistemas dinámicos nos permite extraer información valiosa sobre los estados asintóticos del modelo.

Estas técnicas son muy poderosas cuando queremos obtener información sobre la dinámica del modelo sin conocer soluciones exactas y las condiciones iniciales. Estas técnicas se pueden usar para estudiar cosmologías quintasma (con potenciales tanto exponenciales como generales).

Como ya hemos mencionado, la construcción de posibles realizaciones del cruce fantasma  $w = -1$  en una época reciente en modelos de EO, se ha convertido en un área activa de investigación. Algunos de los estudios toman en cuenta el acercamiento desde la perspectiva de los sistemas dinámicos para mostrar que el cruce es posible para una familia de modelos cosmológicos los cuales han sido nombrados cosmologías quintasma. Estas son configuraciones con dos campos escalares y en estas investigaciones han sido tomados en cuenta potenciales exponenciales simples, dándoles alguna motivación física, por la tratabilidad matemática de las propuestas. Aquí también hacemos una selección simple, hemos seleccionado un potencial de la forma  $V = V_0 e^{-\sqrt{6}(m\phi+n\varphi)}$  con  $V_0$ ,  $m$  y  $\bar{n}$  constantes positivas, mientras que (siguiendo nuestra notación por simplicidad) los artículos relacionados utilizan  $V = V_{01} e^{-2\sqrt{6}m\phi} + V_{02} e^{-2\sqrt{6}n\varphi}$  [56] o  $V = V_{01} e^{-2\sqrt{6}m\phi} + V_{02} e^{-2\sqrt{6}n\varphi} + V_0 e^{-\sqrt{6}(m\phi+n\varphi)}$  (en lo siguiente Zhang et al.) [57], con  $V_{01}$ ,  $V_{02}$  y  $V_0$  constantes positivas también.

Hemos considerado modelos FRW planos y con curvatura. Hemos investigado elementos adicionales que sustentan los resultados previos en [56, 57, 17]. Hemos construido dos sistemas dinámicos adecuados para la investigación de modelos con curvatura negativa, adaptados al conjunto invariante de los modelos que se expanden por siempre ( $\epsilon = \text{sign } H > 0$ ) y al conjunto invariante de los modelos en contracción ( $\epsilon = \text{sign } H < 0$ ), respectivamente. Hemos construido un sistema dinámico adaptado al caso plano (por simplicidad hemos elegido modelos que se expanden por siempre), el cual hemos investigado de manera independiente principalmente por que es posible la reducción de la dimensionalidad. También, hemos construido otro adaptado a modelos con curvatura positiva. Hemos caracterizado los puntos críticos de cada sistema. Mediante el diseño de funciones monótonas bien definidas hemos podido obtener resultados globales para modelos que se expanden eternamente y modelos en contracción para las diferentes elecciones de la curvatura espacial.

Para modelos con curvatura negativa y siempre en expansión ( $\epsilon = \text{sign } H > 0$ ) (y bajo las hipótesis  $1 \leq \gamma \leq 2$ ), hemos hallado que, cuando las condiciones de existencia de los atractores escalantes dominados por curvatura (sin materia) no se verifican (o sea si  $\delta < \frac{1}{3}$ ) los atractores corresponden a soluciones dominadas por EO. Que pueden ser soluciones fantasmas ( $w < -1$ ) o soluciones de de Sitter ( $w = -1$ ), o soluciones de quintaesencia. Esto representa una diferencia en relación con la situación en [17]. Debemos señalar, sin embargo, que si se verifica que  $0 < \gamma < \frac{2}{3}$ ,  $\delta > \frac{\gamma}{2}$ , la solución escalante por materia es el atractor del sistema. Esta última mimetiza una componente adicional de EO. Para modelos en contracción ( $\epsilon = \text{sign } H < 0$ ) el atractor del sistema corresponde a una cosmología de

campo escalar sin masa (CESM). Hacia el pasado la situación típica es el reverso de la antes descrita. Para modelos planos hemos hallado que cuando las condiciones de existencia de los atractores escalantes dominados por materia no se verifican, tenemos en su lugar, atractores fantasmas ( $w < -1$ ) o atractores de de Sitter ( $w = -1$ ). Esto re-presenta una diferencia en relación con la situación en [56] y [57], dado que en los casos mencionados los atractores son solo de tipo de Sitter, a pesar de que algunas trayectorias toman de manera transiente el valor  $w < -1$ , antes de terminar en una fase de Sitter.

Para modelos con curvatura positiva (geometría cerrada) hemos hallado, bajo condiciones apropiadas sobre los valores de los parametros órbitas del tipo  $+\hat{K} \rightarrow -\hat{K}$ . Estas son soluciones comenzando en y recolapsando hacia una singularidad (dada por una cosmología CESM). También hallamos soluciones FRW cerradas comenzando en una singularidad de big-bang  $+F$  y recolapsando en un “big-crunch” en  $-F$ . Estos resultados los ilustramos mediante integraciones numéricas de las EDOs que describen estos modelos cosmológicos. Hemos determinado condiciones para la existencia de diferentes tipos de atractores globales. Aunque hemos ofrecido, aquí, solo un análisis cualitativo simplificado (a diferencia del análisis dinámico en [18] páginas 69-73), nuestro estudio puede verse como complementario de este trabajo mencionado, dado que nosotros hemos añadido un campo fantasma en la dinámica. Debemos reiterar, sin embargo, que pero nuestro trabajo no es tan detallado como el anterior. El análisis cualitativo de cosmologías con múltiples campos con potenciales exponenciales (en el contexto de inflación asistida) fue hecho en la misma referencia, sección VII, y en [69, 70], particularmente para dos campos. Pero ellos no consideran campo fantasma como hacemos nosotros.

Nuestras funciones monótonas permiten descartar la existencia de órbitas periódicas, órbitas homoclínicas u órbitas recurrentes. Por tanto se refuerza nuestra conjetura, la cual establece que la dinámica de los modelos de energía quintasma está dominada por puntos críticos y órbitas heteroclínicas que los unen.

El modelo analizados es criticable desde el punto de vista de nuestra selección del potencial es muy específica, pero como sucede con frecuencia en los modelos de quintaesencia (por ejemplo), los resultados aquí obtenidos podrían tener aplicación para modelos similares con potenciales arbitrarios.

Otro aspecto del problema es que el problema de la coincidencia no ha sido resuelto en este modelo; quizás la manera de resolverlo es considerar interacciones entre los campos escalares y la materia, lo cual aplazamos para futuros proyectos.

## Capítulo 4

# Cosmología quintasma: potenciales arbitrarios

En este capítulo investigamos modelos con energía quintasma con potencial arbitrario. El propósito de este capítulo es, precisamente, proveer de elementos adicionales que fundamentan el interés en los modelos de energía quintasma mediante el estudio de casos con potenciales arbitrarios (no exponenciales) también desde la perspectiva de los sistemas dinámicos. En este sentido nuestro estudio complementa el estudio en las referencias [56, 57, 17]. Como es usual, el análisis descansa en una apropiada selección de variables, las cuáles complementan las variables (3.2.9) definidas anteriormente.

Quizás el resultado más importante de esta sección es que en un marco más general (con potenciales arbitrarios no exponenciales) se puede probar que la existencia de atractores fantasmas no es genérica: particularmente, en nuestro escenario, existen atractores de de Sitter ( $w = -1$ ) los cuáles están asociados solo a los puntos de ensilladura del (logaritmo natural del) potencial.

El capítulo está organizado como sigue. En la sección 4.1 establecemos la motivación de estudiar modelos de energía quintasma para potenciales arbitrarios. En la sección 4.2 damos los detalles del modelo cosmológico bajo investigación. En la sección 4.3 hacemos un estudio desde la perspectiva de los sistemas dinámicos de este modelo tan general para valores finitos de los campos escalares componentes. Con propósitos ilustrativos, seleccionamos una clase de potenciales los cuales tienen su origen en la literatura de inflación. Luego, y con el objetivo de complementar el análisis en la sección 4.3, escogemos en la sección 4.4 un sistema de coordenadas diferente, el cuál nos permite estudiar la region donde ambos campos escalares divergen. Las conclusiones parciales las ofrecemos en la sección 4.5.

## 4.1 Motivación del estudio de cosmologías quintasma con potenciales arbitrarios

Los modelos de energía quintasma con potenciales exponenciales y geometría FRW plana han sido examinados en la sección 3.3, desde la perspectiva de los sistemas dinámicos. Al considerar este tipo de potenciales, la dimensionalidad del espacio de fase estudiado es la mínima posible, preservando además la autonomía del correspondiente sistema de ecuaciones diferenciales.

El estudio del espacio de fases arrojó los siguientes resultados:

1. La ley exponencial asumida para el potencial, el cual a su vez representa la interacción entre los dos campos escalares considerados, permitió llegar a la conclusión de que el comportamiento escalante no se excluye del marco de las cosmologías quintasma. El sistema bajo estudio puede admitir atractores con comportamiento “escalante” y en ausencia del mencionado comportamiento “escalante” pueden existir atractores “fantasma” ( $w < -1$ ), o alternativamente, atractores de Sitter ( $w = -1$ ).
2. Se demostró que los puntos críticos con comportamiento “stiff” ( $w = 1$ ; hipérbolas en los diagramas de fase) pueden ser fuentes locales de órbitas de fase. Este resultado fue demostrado analíticamente mediante la construcción de una función monótona adecuada y esto fue corroborado además mediante simulaciones numéricas.

En esta sección pretendemos estudiar desde la perspectiva de los sistemas dinámicos las consecuencias de considerar potenciales arbitrarios, generalizando a su vez los resultados enumerados anteriormente.

Haremos una selección de coordenadas la cual permite analizar en principio cualquier potencial. Estudiaremos dos regiones por separado: la región donde los campos escalares toman valores finitos y la región donde los campos escalares divergen. Para ello construiremos dos sistemas dinámicos a partir de las ecuaciones de campo, cada uno de ellos adaptado a cada región particular.

Para estudiar la región donde los campos escalares divergen se requerirá hacer una nueva selección de variables, pero que arroja al resultado interesante de la existencia de comportamiento “escalante” en esta región. Como resultado adicional se presenta una clase general de potenciales que conduce a este tipo de comportamiento, los cuales se comportan asintóticamente como potenciales “exponenciales”. Por otra parte, para estudiar el caso en que los campos escalares toman valores finitos se requerirá una selección estándar de variables (variables normalizadas con el escalar de expansión) las cuales permiten una configuración interesante en el espacio de fase. Particularmente probaremos que la existencia de

atractores “fantasma” no es genérica cuando se consideran potenciales que no son de tipo exponencial. Peculiarmente, en nuestro marco de trabajo los atractores de Sitter sólo tienen lugar para potenciales que tienen, como funciones de dos variables, puntos de ensilladura. Éste es un hallazgo inusual porque en cosmologías con campos escalares la creencia general es que sólo es posible obtener fases estables para campos escalares que ruedan o escalan lentamente la pendiente del potencial.

Es conocido que si la EO tiene un comportamiento fantasma en tiempos recientes (recordemos que una componente de energía oscura fantasma tiene un parámetro de ecuación de estado  $w$  menor que  $-1$ ) entonces, típicamente, nuestro universo (suponiendo que se expande eternamente) puede evolucionar hacia una singularidad catastrófica de gran desgarro (caracterizada por la divergencia del factor de escala, del escalar de expansión de Hubble así como de su derivada en un tiempo finito hacia el futuro). Este es el caso si la densidad de energía fraccional es de tipo fantasma. Hemos visto que la solución de tiempo reciente de tipo fantasma aparece en el contexto de la cosmología quintasma con potenciales exponenciales cuando recurrimos a técnicas estándares de la teoría de sistemas dinámicos para investigar esos modelos como ha sido mostrado en [56, 57, 17].

## 4.2 El modelo

El marco que utilizaremos para describir nuestro modelo de energía quintasma es la teoría general de la relatividad de Einstein, supondremos como es usual las hipótesis de isotropía y homogeneidad del Universo, por lo que la geometría (gravedad) será descrita mediante un elemento de línea FRW (plano). La materia será descrita mediante dos fluidos: polvo (MO) y un modelo de energía quintasma para la EO el cual está acoplado minimamente a la MO.

Hacemos entonces la hipótesis de que la EO contiene la contribución de dos campos escalares interactuando a través de su energía potencial (arbitrario, no exponencial)  $V(\phi, \varphi)$ , y satisfaciendo ecuaciones de conservación separadas dadas por:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \partial_{\phi}V(\phi, \varphi) = 0, \quad (4.2.1)$$

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} - \partial_{\varphi}V(\phi, \varphi) = 0. \quad (4.2.2)$$

Luego, la evolución de nuestro modelo cosmológico queda determinada por las ecuaciones (3.3.17), (3.3.18), (3.3.19), (4.2.1) y (4.2.2).

### 4.3 Espacio de Fase

Al igual que antes, con el objetivo de construir un sistema dinámico que sea autónomo, tenga la menor dimensión posible y que describan una configuración físicamente interesante y razonable dentro del marco de las cosmologías quintasma tenemos que (como ya ha sido mencionado con anterioridad) introducir un conjunto de variables dinámicas adecuadas (generalmente normalizadas con la expansión [15]) las cuales permitan reescribir las ecuaciones de conservación y la ecuación de evolución para  $H$  como un sistema dinámico sujeto a una restricción que se obtiene a partir de la ecuación de Friedmann (3.3.17).

Como queremos estudiar potenciales arbitrarios (tan arbitrarios como sea posible pero excluyendo los potenciales de tipo exponencial), se requerirá un mínimo de seis variables para construir un sistema dinámico autónomo. No obstante, el problema se simplifica un poco más –al menos en relación con su dimensionalidad– si usamos la restricción que se obtiene a partir de la ecuación (3.3.17) como definición de una de las variables. Luego, el número mínimo de dimensiones de nuestro sistema dinámico será cinco.

Luego de reescribir el modelo como un sistema dinámico debemos encontrar sus puntos críticos. La estabilidad es entonces analizada estudiando el sistema linealizado que se obtiene de expandir las ecuaciones de evolución en las cercanías de estos puntos críticos.

Volviendo al primer paso, obtenemos que las ecuaciones (3.3.17), (3.3.18), (3.3.19), (4.2.1) y (4.2.2) se escriben en la forma de un sistema dinámico haciendo la selección de variables siguiente:  $(x_\phi, x_\varphi, y, z, \phi, \varphi)$ , donde  $x_\phi, x_\varphi, y$  y  $z$  se definen como en (3.2.9) y hemos considerado también a los propios campos escalares,  $\phi$  y  $\varphi$  como variables de fase.

La restricción (3.3.21) que surge de Eq. (3.3.17) nos permite, como se ha hecho notar con anterioridad, a considerar la evolución de todas las variables salvo  $z$  (cuya evolución se determina a partir de la evolución de las restantes).

En lo que sigue nos restringiremos al caso en el que  $y \geq 0$  y  $H \geq 0$  porque el principal interés de esta sección es estudiar modelos que se expanden eternamente.<sup>1</sup> Combinando las expresiones (3.1.7-3.2.9), se obtienen las ecuaciones de evolución siguientes:

---

<sup>1</sup>Notemos que las ecuaciones (4.3.3-4.3.7) son invariantes ante el cambio de coordenadas  $y \rightarrow -y$ .

$$x'_\phi = \frac{1}{3} \left( -\frac{\sqrt{6}}{2} y^2 \partial_\phi \ln V + (q-2)x_\phi \right), \quad (4.3.3)$$

$$x'_\varphi = \frac{1}{3} \left( \frac{\sqrt{6}}{2} y^2 \partial_\varphi \ln V + (q-2)x_\varphi \right), \quad (4.3.4)$$

$$y' = \frac{1}{3} \left( 1 + q - \frac{\sqrt{6}}{2} (x_\phi \partial_\phi \ln V + x_\varphi \partial_\varphi \ln V) \right) y, \quad (4.3.5)$$

$$\phi' = \frac{\sqrt{6}}{3} x_\phi, \quad (4.3.6)$$

$$\varphi' = \frac{\sqrt{6}}{3} x_\varphi. \quad (4.3.7)$$

Igual que en el caso anteriormente estudiado, las primas denotan derivada con respecto a  $\tau = \log a^3$  y  $q \equiv -\ddot{a}a/\dot{a}^2$  es el parámetro de desaceleración. Explícitamente

$$q = \frac{1}{2} (3(x_\phi^2 - x_\varphi^2 - y^2) + 1). \quad (4.3.8)$$

La evolución de las variables  $x_\phi$ ,  $x_\varphi$ ,  $y$ ,  $\phi$  y  $\varphi$  forman un sistema dinámico 5D definido en el espacio de estados (espacio de fase):

$$\Psi = \{(x_\phi, x_\varphi, y) : 0 \leq x_\phi^2 - x_\varphi^2 + y^2 \leq 1\} \times \{(\phi, \varphi) \in \mathbb{R}^2\}. \quad (4.3.9)$$

El espacio  $\Psi$  no es acotado por que las variables  $x_\varphi$ ,  $\phi$ ,  $\varphi$  pueden alcanzar valores infinitos. No obstante la proyección del espacio de fase  $\Psi$  sobre el subespacio  $(x_\phi, x_\varphi, y)$  está limitado por la hipersuperficie que define el hiperboloide.

En general el espacio de fases se puede dividir en dos regiones dependiendo de los valores de  $\phi$  y  $\varphi$ . La primera región está definida por la condición de que ambos campos escalares tomen valores finitos. Esta región contiene soluciones dominadas por materia y soluciones de de Sitter. En la segunda región ambos campos escalares divergen (no es de nuestro interés estudiar el caso complementario en el que solo uno de los campos escalres diverge). Como veremos es la última región aquella que puede acomodar soluciones fantasma a diferencia de la primera región donde no es posible, o sea, el comportamiento fantasma está relacionado con el límite en el que los campos escalares no está definidos (divergen). Teniendo en cuenta este hecho, las anteriores variables de fase (4.3.3-4.3.7) no son adecuadas para estudiar esta última región, de manera que se hace necesario una selección diferente de variables de fase. Este caso ( $(\phi, \varphi)$  infinito) será estudiado en la sección (4.4).

### 4.3.1 Soluciones dominadas por materia

El sistema dinámico (4.3.3-4.3.7) admite una clase biparamétrica de puntos críticos no hiperbólicos  $(x_\phi, x_\varphi, y) = (0, 0, 0)$ , para cada selección de valores  $(\phi, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ . Estos puntos críticos, los cuáles denotaremos genéricamente por  $O$  representan soluciones cosmológicas dominadas por materia. Típicamente, el factor de escala y la densidad de materia evolucionan, respectivamente, como  $a \propto t^{2/3}$  y  $\rho_m \propto t^{-2}$ . Esta clase de soluciones es relevante desde el final de la época de dominio de la radiación hasta la muy reciente época en que la contribución de la energía oscura iguala a la de la materia oscura.

Haciendo un análisis local obtenemos que los valores propios de la linearización en una vecindad de estos puntos críticos (con  $\phi$  y  $\varphi$  fijos) son  $(-1/2, -1/2, 1/2, 0, 0)$ . Debido a la existencia de dos valores propios nulos, como hemos ya mencionado, estos puntos críticos son no hiperbólicos de modo que el análisis lineal no es concluyente en este caso. Alternativamente, podemos determinar analíticamente las variedades estables, inestable y centro de estos puntos críticos.

### 4.3.2 Soluciones de Sitter

El sistema dinámico (4.3.3-4.3.7) admite soluciones con  $(x_\phi, x_\varphi, y) = (0, 0, 1)$ , para cada  $(\phi^*, \varphi^*) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $\partial_\phi \ln V(\phi^*, \varphi^*) = \partial_\varphi \ln V(\phi^*, \varphi^*) = 0$ , o sea,  $(\phi^*, \varphi^*)$  son puntos estacionarios (extremos o puntos de ensilladura) de  $\ln V$ .<sup>2</sup>

Para  $\phi^*$  y  $\varphi^*$  fijos la correspondiente solución está dominada por la energía potencial del campo quintasma, por lo tanto son soluciones de de Sitter. Esta clase de puntos críticos la denotaremos por  $dS$ . El factor de escala evoluciona siguiendo la ley exponencial  $a \propto \exp \left[ \sqrt{V(\phi^*, \varphi^*)/3} t \right]$ . Se espera que estas soluciones sean importantes en los tiempos recientes de la evolución cósmica. Para estas soluciones, la energía potencial mimetiza una constante cosmológica efectiva y la evolución procede sin evento de gran desgarro.

Los valores propios de la linealización alrededor de estos puntos críticos son

$$\lambda_1 = -1, \tag{4.3.10}$$

$$\lambda_2^\pm = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{2}{3} \left( \Delta_1 - \sqrt{\Delta_2} \right)}, \tag{4.3.11}$$

$$\lambda_3^\pm = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{2}{3} \left( \Delta_1 + \sqrt{\Delta_2} \right)} \tag{4.3.12}$$

donde

---

<sup>2</sup>Los puntos estacionarios de  $\ln V$  coinciden en general con los puntos estacionarios de  $V$  salvo si son ceros del potencial.

$$\Delta_1 = \left[ \frac{\partial^2 \ln V}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 \ln V}{\partial \phi^2} \right]_{\phi=\phi^*, \varphi=\varphi^*}, \quad (4.3.13)$$

$$\Delta_2 = \left[ \left( \frac{\partial^2 \ln V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \ln V}{\partial \varphi^2} \right)^2 - 4 \left( \frac{\partial^2 \ln V}{\partial \varphi \partial \phi} \right)^2 \right]_{\phi=\phi^*, \varphi=\varphi^*}. \quad (4.3.14)$$

Si el punto  $(\phi^*, \varphi^*)$  es un extremo de  $\ln V$  entonces la cantidad  $\Delta$  definida por

$$\Delta = \left[ \frac{\partial^2 \ln V}{\partial \varphi^2} \frac{\partial^2 \ln V}{\partial \phi^2} - \left( \frac{\partial^2 \ln V}{\partial \varphi \partial \phi} \right)^2 \right]_{\phi=\phi^*, \varphi=\varphi^*} \quad (4.3.15)$$

es positiva; si es un mínimo (máximo) entonces  $\partial^2 \ln V / \partial \phi^2 > 0$  ( $< 0$ ) y  $\partial^2 \ln V / \partial \varphi^2 > 0$  ( $< 0$ ). Si  $\Delta < 0$ , entonces  $(\phi^*, \varphi^*)$  es un punto de ensilladura de  $\ln V$ .

Del análisis anterior se sigue que el comportamiento dinámico de los puntos críticos en  $\Psi$  depende de la clasificación de los puntos críticos de  $\ln V$ :  $(\phi^*, \varphi^*)$ .

### 4.3.3 Comportamiento dinámico de los puntos críticos en $\Psi$ asociados a la fase de de Sitter

Si  $(\phi^*, \varphi^*)$  es un extremo de  $\ln V(\phi, \varphi)$ , entonces la condición  $\Delta > 0$  implica que  $\Delta_2 > \Delta_1^2$ . En este caso el correspondiente punto crítico en  $\Psi$  es una silla; o sea, las partes reales de todos los valores propios de la matriz  $\mathbf{A}$  evaluada en el correspondiente punto crítico son diferentes de cero y al menos dos de ellas tienen signos diferentes.

Si  $(\phi^*, \varphi^*)$  es un punto de ensilladura de  $\ln V(\phi, \varphi)$ , entonces la condición  $\Delta < 0$  implica  $\Delta_2 < \Delta_1^2$ . En este caso el correspondiente punto crítico en el espacio de fase  $\Psi$  es un atractor en los siguientes tres casos <sup>3</sup>:

- Caso i) Todos los valores propios tiene parte real negativa .

Este es el caso si  $0 \leq \Delta_2 < 9/16$ ,  $-3/2 + \sqrt{\Delta_2} < \Delta_1 < -\sqrt{\Delta_2}$ .

- Caso ii)  $\lambda_2^\pm$  son valores propios complejos conjugados y  $\lambda_3^\pm$  son valores propios reales negativos.

Este es el caso si  $0 < \Delta_2 < 9/16$ , y  $-3/2 - \sqrt{\Delta_2} < \Delta_1 \leq -3/2 + \sqrt{\Delta_2}$ ;

ó si  $\Delta_2 \geq 9/16$ , y  $-3/2 - \sqrt{\Delta_2} < \Delta_1 < -\sqrt{\Delta_2}$ .

---

<sup>3</sup>El punto crítico es un atractor si las partes reales de todos los puntos críticos de la matriz  $\mathbf{A}$  evaluados en el correspondiente punto crítico son negativas.

- Caso iii)  $\lambda_2^\pm$  y  $\lambda_3^\pm$  son respectivamente valores propios complejos conjugados.

Este es el caso si  $\Delta_2 \geq 0$  and  $\Delta_1 \leq -3/2 - \sqrt{\Delta_2}$ .

#### 4.3.4 Ejemplo: potencial de inflación híbrida

Para ilustrar los resultados enumerados anteriormente utilizaremos un potencial dado por

$$V(\phi, \varphi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{2}g^2\phi^2\varphi^2 + \frac{(M^2 - \lambda\varphi^2)^2}{4\lambda}, \quad (4.3.16)$$

donde  $m, g, M, \lambda$  son constantes reales no negativas .

El potencial (4.3.16) ha sido formalmente considerado en [109]-[115] en el contexto de la inflación híbrida. Como nuestro contexto es el universo reciente, las virtudes de este potencial relacionadas con la inflación primordial no son de interés para nosotros, lo hemos seleccionado porque su forma funcional es adecuada para ilustrar algunas características peculiares de la evolución reciente en nuestro modelo de energía oscura quintasma.

Se puede demostrar fácilmente que  $\ln V(\phi, \varphi)$  tiene un único punto estacionario real en  $(\phi^*, \varphi^*) = (0, 0)$  el cual es un punto de ensilladura de  $\ln V$  porque  $\Delta(0, 0) = -16\lambda^2 m^2 / M^6 < 0$  (ver la ecuación. (4.3.15)). Esto significa que la fase de de Sitter es un atractor en  $\Psi$ . Realmente, como la función  $\ln V$  (con  $V$  dado por (4.3.16)) tiene solo un punto de ensilladura (no tiene mínimo), el punto crítico (en el espacio de fase  $\Psi$ ) asociado con  $(\phi^*, \varphi^*)$  es estable en los siguientes tres casos como sigue del análisis anterior (ver los casos i), ii), y iii) en la subsección anterior):

- Caso i)  $0 < M < m$ , y  $0 < \lambda < 3M^4/16m^2$  ó  $0 < m \leq M$ , y  $0 < \lambda < 3M^2/16$  (ver Fig. (B.13 a)).
- Caso ii)  $0 < M < m$ , y  $3M^4/16m^2 \leq \lambda < 3M^2/16$  ó si  $0 < m \leq M$ , y  $3M^2/16 \leq \lambda < 3M^4/16m^2$  (ver Fig. (B.13 b)).
- Caso iii)  $0 < M < m$ , y  $\lambda \geq 3M^2/16$  ó si  $0 < m \leq M$ , y  $\lambda \geq 3M^4/16m^2$  (ver Fig. (B.13 c)).

#### 4.4 Puntos críticos en $(\phi, \varphi)$ infinito

En la bibliografía referida a las cosmologías con campo escalar autointeractuante ha sido reportado que solo los potenciales exponenciales pueden ser responsables de la fase escalante: por ejemplo, los potenciales exponenciales han sido considerados como fuente de interacción entre los campos escalares

en cosmologías convencionales [72]-[71] y no convencionales [56, 57, 17]. Por ejemplo, en [17] se dio un paso hacia adelante con respecto a lo que se había hecho en [56, 57] en el sentido de que el potencial usado en [17]

$$V = V_0 e^{-\sqrt{6}(m\phi+n\varphi)}, \quad (4.4.17)$$

conduce a la existencia de un régimen escalante; o sea, *fue probado que las cosmologías quintasma con potenciales exponenciales no están exentas de la existencia de una fase escalante en el futuro asintótico.*

Este resultado motiva (parcialmente) la pregunta siguiente: *¿Pueden existir fases escalantes en modelos de energía quintasma con potenciales arbitrarios?*

Esta pregunta también está parcialmente motivada por el hecho de que el comportamiento escalante puede existir en modelos con un solo campo escalar cuyo potencial tiende asintóticamente a un potencial exponencial [74]; así también, este podría ser el caso (en nuestro contexto) para una familia general de potenciales satisfaciendo algún requerimiento particular relacionado con su forma funcional asintótica.

La existencia de fases escalantes en la región donde  $\phi$  y  $\varphi$  son finitos está descartada (genéricamente) por nuestro análisis previo. Así que limitaremos nuestro análisis a la región donde  $\phi = \pm\infty$  y  $\varphi = \pm\infty$ . Luego, nuestro propósito será investigar la posible existencia de soluciones escalantes en cosmologías quintasma con potenciales arbitrarios (con la exclusión de los potenciales exponenciales) concentrándonos en la región donde los campos escalares divergen. Esto lo haremos siguiendo un método desarrollado en [74]. Debemos señalar que el estudio de esta región se hará en todo detalle. Aunque haremos énfasis en las soluciones escalantes, se reportarán otros posibles estados asintóticos en caso que existan. Este análisis es complementario al estudio dinámico de la sección (4.3).

Para este propósito haremos una selección diferente de variables de fase (relacionadas con los campos escalares):  $u = \phi^{-1}$ ,  $v = \varphi^{-1}$ . Para complementar estas variables, preservaremos las variables usuales  $x_\phi$ ,  $x_\varphi$  y  $y$  definidas por las ecuaciones (3.2.9).

Haciendo uso de las transformaciones de coordenadas requeridas el sistema original (4.3.3-4.3.7) puede reescribirse como:

$$x'_\phi = \frac{1}{3} \left( (-2 + q)x_\phi + 3\tilde{M}y^2 \right), \quad (4.4.18)$$

$$x'_\varphi = \frac{1}{3} \left( (-2 + q)x_\varphi - 3\tilde{N}y^2 \right), \quad (4.4.19)$$

$$y' = \frac{1}{3}y \left( 1 + q - 3 \left( \tilde{M}x_\phi + \tilde{N}x_\varphi \right) \right), \quad (4.4.20)$$

$$u' = -\frac{\sqrt{6}}{3}u^2x_\phi, \quad (4.4.21)$$

$$v' = -\frac{\sqrt{6}}{3}v^2x_\varphi, \quad (4.4.22)$$

donde  $\tilde{V}$ ,  $\tilde{M}$  y  $\tilde{N}$  son funciones arbitrarias de  $u$  y  $v$  definidas, respectivamente, por:

$$\tilde{V}(u, v) = V(u^{-1}, v^{-1}), \quad (4.4.23)$$

$$\sqrt{6} \left( \tilde{M}, \tilde{N} \right) = \left( u^2 \frac{\partial \ln \tilde{V}}{\partial u}, v^2 \frac{\partial \ln \tilde{V}}{\partial v} \right). \quad (4.4.24)$$

Asumimos que  $\tilde{V}$  es tal que

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \left( u^2 \frac{\partial \ln \tilde{V}}{\partial u}, v^2 \frac{\partial \ln \tilde{V}}{\partial v} \right) = \sqrt{6}(m, n). \quad (4.4.25)$$

Esta condición general sobre el potencial  $V$ , nos permite estudiar las órbitas de fase en el subconjunto invariante  $(u, v) = (0, 0)$  tomando el límite  $(u, v) \rightarrow (0, 0)$  en las ecuaciones (4.4.18-4.4.22). Por continuidad, el sistema dinámico reducido en el conjunto invariante  $(u, v) = (0, 0)$  es

$$x'_\phi = \frac{1}{3} (3my^2 + (q - 2)x_\phi), \quad (4.4.26)$$

$$x'_\varphi = -\frac{1}{3} (3ny^2 - (q - 2)x_\varphi), \quad (4.4.27)$$

$$y' = \frac{1}{3} (1 + q - 3(mx_\phi + nx_\varphi))y \quad (4.4.28)$$

Las ecuaciones (4.4.26-4.4.28) son las mismas que en [17], pero el punto sutil acá es que el sistema dinámico (4.4.26-4.4.28) describe el comportamiento dinámico de un modelo de energía quintasma con potencial arbitrario (asintóticamente exponencial) en un subconjunto invariante de  $\mathbb{R}^5$ . Así la dinámica es más rica que en [17]. No obstante, los resultados en [17] son aplicables a este caso más general.

Ahora, resumiremos los resultados en [17] los cuáles son aplicables a este marco más general. Como hemos hecho notar con anterioridad, la primera tarea en el análisis del comportamiento dinámico del sistema de ecuaciones diferenciales asociado a un modelo cosmológico (desde la perspectiva de la teoría

de los sistemas dinámicos) es encontrar los puntos críticos del sistema que se obtiene a partir de las ecuaciones del campo el cual describe la evolución de variables de fase apropiadas algunas de las cuáles tienen alguna interpretación física razonable. Particularmente, en el conjunto invariante  $(u, v) = (0, 0)$  existen representantes de los puntos críticos  $O$ ,  $C_{\pm}$ ,  $P$  y  $T$  estudiados en [17]. En la tabla C se muestra la localización, la existencia y el parámetro de desaceleración de estos puntos críticos para  $m > 0$ ,  $n > 0$  y  $y > 0$ .

Primero que todo, en esta región encontramos un representante de la clase  $O$ . La interpretación en la sección (4.3.1), es aplicable aquí también.

La existencia de un régimen escalante está representada en [17] por el punto crítico  $T$  (y por su representante en nuestro marco más general) para valores de  $m$  y  $n$  tales que  $m^2 - n^2 \geq 1/2$ . Ella representa una solución en la cual la ecuación de estado del fluido quintasma es tipo polvo ( $w = 0$ ), y cuando tal punto existe es un atractor. Esta solución de tiempo reciente representa un universo desacelerado donde las densidades de energía y materia oscura son proporcionales. Particularmente,  $\Omega_{de}$  y  $\Omega_m$  están dados por  $\Omega_{de} = (2m^2 - 2n^2)^{-1}$ , y  $\Omega_m/\Omega_{de} = -1 + 2m^2 - 2n^2 \geq 0$ . El carácter dinámico de  $T$  depende del valor de  $\Omega_{de}$ : es un foco estable o un nodo estable si  $\Omega_{de} < 7/8$ , o  $7/8 \leq \Omega_{de} < 1$  respectivamente.

En general el potencial  $\tilde{V}$  responsable de tal fase escalante puede reconstruirse a partir de las funciones  $n$  y  $m$  satisfaciendo:

$$v^{-2} \frac{\partial \tilde{N}}{\partial u} = u^{-2} \frac{\partial \tilde{M}}{\partial v}, \quad \lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} (\tilde{M}, \tilde{N}) = (m, n)$$

por

$$\tilde{V}(u, v) = V_0 \exp \left[ \int_1^u \frac{\sqrt{6} \tilde{M}(\mu, v)}{\mu^2} d\mu + \int_1^v \left( \frac{\sqrt{6} \tilde{N}(u, \nu)}{\nu^2} - \int_1^u \frac{\sqrt{6} \partial_\nu \tilde{M}(\mu, \nu)}{\mu^2} d\mu \right) d\nu \right]. \quad (4.4.29)$$

Notemos que se debe satisfacer la restricción

$$\frac{\partial^2 \ln \tilde{V}}{\partial u \partial v} = \frac{\sqrt{6}}{v^2} \frac{\partial \tilde{N}}{\partial u}.$$

También en esta región tenemos soluciones donde domina la energía oscura las cuáles denotaremos (si existen) por  $P$ . Ellas representan soluciones en las cuáles domina la energía quintasma, y cuando tal punto existe es un atractor (si sus condiciones de existencia prohíben la existencia del punto  $T$ ). Esta solución de tiempo reciente no necesariamente representa una solución acelerada, ello depende de la cantidad  $\delta = m^2 - n^2$ . La soluciones aceleradas asociadas con este punto crítico pueden proveer de un buen representante para el universo que se observa actualmente. Un potencial satisfaciendo

(4.4.25) permite obtener modelos específicos de energía oscura los cuáles están representados por  $P$  (dependiendo de los valores de  $m$  y  $n$ ) como sigue:  $w < -1$  (energía oscura fantasma) si  $m^2 < n^2$ ,  $w = -1$  (solución de de Sitter) si  $m = n$ , o  $-1 < w < -1/3$  (quintaesencia) si  $0 < m^2 - n^2 < 1/3$ .

Para concluir, esta región del espacio de estados admite una clase de puntos críticos no aislados los cuales conforman las hipérbolas  $C_{\pm}$ , cuyo papel en la evolución ha sido estudiado para el caso con potenciales exponenciales. Determinar exactamente qué papel representan en este contexto es un análisis no trivial, por lo que no lo discutiremos en esta tesis.

En esta subsección hemos reforzado nuestro análisis en [17], como hemos mostrado las soluciones escalantes pueden existir en las cosmologías quintasma. Hemos identificado que las soluciones de clase  $T$  y  $P$  (si existen) deben encontrarse en la región donde  $\phi = \pm\infty$  y  $\varphi = \pm\infty$  (esto es válido si el potencial no es exponencial). Este rasgo había sido notado en [74] pero en el marco de modelos con un solo campo escalar.

## 4.5 Conclusiones parciales

En este capítulo hemos aplicado técnicas propias de la teoría de los sistemas dinámicos a una clase de modelos de energía quintasma con potenciales arbitrarios (no exponenciales). Hemos elegido variables de fase apropiadas que nos han permitido estudiar regiones del plano  $(\phi, \varphi)$  para valores en los que ambos campos escalares  $\phi, \varphi$  son tanto finitos como infinitos.

Los resultados del presente estudio indican que la existencia de atractores fantasma no es genérica; ello depende de las características del (logaritmo natural del) potencial. Para los modelos de energía quintasma, en la región en que  $(\phi, \varphi)$  es finito, pueden existir atractores de Sitter asociados con los puntos de ensilladura de  $\ln V$ ; o atractores escalantes en la región donde  $(\phi, \varphi)$  es infinito. Para el ejemplo estudiado en la sección (4.3) (potencial (4.3.16)) la fase de Sitter representa una solución atractora en el espacio de fase  $\Psi$ .

Queremos señalar que el presente estudio no es adecuado para estudiar potenciales que sean sumas de productos de funciones exponenciales con respecto a cada campo escalar. La razón es que en estos casos la reducción del sistema dinámico es posible (y fuertemente recomendable). Por otro lado, nuestro estudio puede considerarse como complementario a los estudios en las referencias [57, 56, 17] y en la sección (3.3).

# Conclusiones

En esta tesis hemos aplicado algunas de las técnicas de la teoría de los sistemas dinámicos al estudio de modelos cosmológicos que describen la aceleración actual del Universo. Hemos modelado el cruce de la barrera fantasma mediante un modelo relativista de energía oscura (EO) con dos campos escalares interactuando a través de un potencial exponencial. Hemos investigado el papel de la curvatura espacial en la evolución de las cosmologías quintasma con potenciales exponenciales y la dinámica de los modelos tanto en contracción como la de los modelos que se expanden eternamente. Particularmente, hemos hallado condiciones para la existencia de fases escalantes y fase de de Sitter en modelos con curvatura cero que se expanden por siempre. Hemos probado que la existencia de atractores fantasmas no es genérica en los modelos de EO con dos campos escalares, potencial arbitrario, y curvatura cero. Para potenciales arbitrarios pueden existir atractores de de Sitter en los puntos de ensilladura del potencial y atractores escalantes en el límite donde ambos campos escalares divergen.

A continuación enumeramos los resultados más importantes de nuestra investigación.

1. Encontramos que, para modelos con curvatura negativa en expansión (contracción) el atractor del futuro (del pasado) es la solución cosmológica dominada por curvatura. Bajo las condiciones que excluyen la existencia de estos atractores, los estados asintóticos (hacia el pasado y hacia el futuro) estará determinada por soluciones dominadas por la EO.
2. En el caso de modelos con curvatura positiva: se extienden a nuestro contexto, resultados reportados en [18] section VI.A tales como la existencia de órbitas comenzando desde y recolapsando a una singularidad (correspondiendo a cosmologías con campo escalar sin masa). También verificamos la existencia de soluciones Friedmann-Roberson-Walker (FRW) cerradas (curvatura positiva) comenzando desde una singularidad inicial (“big-bang” o gran explosión) y recolapsando hacia una singularidad de “big-crunch” o gran contracción (el reverso temporal de la singularidad inicial).
3. Adicionalmente hemos diseñado algunas funciones monótonas las cuales garantizan la existencia

de atractores globales, además de que nos permiten descartar órbitas periódicas, órbitas homoclinicas u órbitas recurrentes, lo que nos permite reforzar nuestra conjetura en [17] que establece que *la dinámica en el espacio de fases de las cosmologías quintasma está dominada por puntos críticos y órbitas heteroclinicas que los unen.*

Cuando nos restringimos al caso de los modelos FRW planos (curvatura cero) en expansión eterna encontramos el siguiente resultado novedoso:

4. En Zhang et al. [19] se había probado que en ausencia de interacciones, la solución dominada por el campo fantasma es el atractor del sistema y la interacción no afecta el comportamiento atractor de la fase dominada por el campo fantasma.

En esta tesis se prueba que la hipótesis de Zhang et al., es correcta solo en los casos en que la existencia de la fase fantasma excluye la existencia de atractores escalantes (en los cuales las densidades de energía del campo quintasma y la materia oscura fría son proporcionales).

Para los modelos de energía quintasma con potenciales arbitrarios y curvatura cero hemos obtenido los siguientes resultados novedosos:

5. Los atractores de de Sitter ( $w = -1$ ) están asociados solo a los puntos de ensilladura del (logaritmo natural del) potencial.
6. Los atractores escalantes (entre otras posibilidades) están asociados con el límite en el que los campos escalares divergen simultáneamente.

# Recomendaciones

1. Un aspecto que no ha sido resuelto en el capítulo 3 y del que padecen los modelos de esta tesis es el problema de la coincidencia. Este problema se establece en forma de la pregunta: ¿Por que las densidades de energía de la energía oscura y de la materia de fondo son del mismo orden de magnitud hoy día?

Este problema ha sido investigado por el autor y colaboradores en la referencia [35] en el contexto de las cosmologías con campos fantasmas (basados en teorías escalares tensoriales). Estos resultados pueden generalizarse al caso de cosmologías con dos campos escalares, particularmente a la cosmología quintasma.

Otro enfoque podría ser considerar la interacción entre el campo quintasma y la energía oscura desde el punto de vista fenomenológico. En la literatura ha sido investigado:

- (1) un modelo simple donde la materia oscura decae en radiación [116],
- (2) un modelo simple donde el campo curvaturón decae en radiación [117],
- (3) un caso especial donde partículas superpesadas de materia oscura decaen en un campo de quintaesencia [118].

Modelos donde la materia oscura decae en energía oscura, permiten que sea posible que no exista el campo de energía oscura en el universo temprano, sino que la energía oscura se “condense” como el resultado del lento decaer de la materia oscura [119].

En una investigación en curso, nos hemos planteado como objetivo extender estos resultados (particularmente los de [119]) al contexto de las cosmologías quintasma mediante el uso de las técnicas usadas en esta tesis.

2. Aunque en el marco de la TGR la energía oscura es un ingrediente fundamental para explicar la aceleración de la expansión, han sido consideradas propuestas alternativas a la energía oscura y que constituyen modificaciones (ad hoc) de la TGR y no requieren postular la existencia de la enigmática energía oscura: bastaría con que el universo estuviera lleno de polvo cósmico (materia oscura fría sin presión) y a lo sumo radiación para modelizar un universo con aceleración

de origen geométrico. En esta clase entra la llamada cosmología cardasiana [121]. Estos modelos han sido investigados por el autor y colaboradores en [120] para potenciales exponenciales. Las técnicas usadas en el capítulo 4 pueden ser usadas para investigar estos modelos considerando potenciales arbitrarios.

3. En esta tesis hemos investigados modelos con campos escalares basados en TGR y hemos prestado más atención a la descripción del Universo reciente. En una investigación en curso, el autor aplica técnicas de la teoría de los sistemas dinámicos para investigar modelos cosmológicos basados en teorías escalares-tensoriales escritas en el marco de Einstein con mayor interés en el comportamiento asintótico hacia el pasado. En particular, se ha construido un sistema dinámico (adecuado para investigar la dinámica cerca de la singularidad inicial). Se ha encontrado la existencia de soluciones escalantes. Los resultados se han ilustrado mediante integraciones numéricas de las ecuaciones diferenciales que definen el modelo. Han sido presentadas también, expansiones asintóticas válidas en una vecindad de la singularidad inicial extendiendo en varios aspectos los resultados reportados en [122].
4. Los modelos investigados en esta tesis corresponden a cosmologías espacialmente homogéneas, que constituyen a su vez una clase con menor jerarquía dentro de la clase de todos los posibles modelos cosmológicos. Denotando por  $\mathcal{M}$  la clase de todos los modelos cosmológicos, cuyo estado en el tiempo  $t$  pueda ser representado por un elemento  $\mathbf{X}$  en un espacio de estados  $\mathcal{S}$ , la evolución de un modelo cosmológico queda determinada por la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales más restricciones. La situación más general en cosmología queda descrita mediante el modelo

$$\partial_t \mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, \partial_i \mathbf{X}, \dots), \quad \mathbf{C}(\mathbf{X}, \partial_i \mathbf{X}, \dots) = \mathbf{0}$$

donde  $\partial_i$  denota derivada parcial con relación a  $x^i$ , y  $\dots$  denota posibles derivadas de orden superior. El aparato matemático apropiado para investigar esta clase de modelos es el Formalismo Ortonormal 1 + 3 [123], el cual describe los grados de libertad esenciales del campo gravitacional de manera independiente del sistema coordenado, y expresan directamente las ecuaciones de Einstein del campo como un sistema de ecuaciones diferenciales (parciales) autónomo de primer orden (en la variable temporal). Se requiere introducir un proceso de normalización para obtener, siempre que sea posible, variables de estado acotadas. En la referencia [124] el autor y colaboradores usan este formalismo para escribir las ecuaciones de evolución para modelos esféricamente simétricos como un sistema bien planteado de ecuaciones en derivadas parciales en dos variables, apropiado para análisis numéricos y cualitativos. Nos hemos propuesto como objetivo futuro continuar esta investigación.

# Bibliografía

- [1] A. G. Riess *et al.* [Supernova Search Team Collaboration], “Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant”, *Astron. J.* **116**, 1009 (1998) [arXiv:astro-ph/9805201].
- [2] B. P. Schmidt *et al.* [Supernova Search Team Collaboration], “The High-Z Supernova Search: Measuring Cosmic Deceleration and Global Curvature of the Universe Using Type Ia Supernovae”, *Astrophys. J.* **507**, 46 (1998) [arXiv:astro-ph/9805200].
- [3] W. L. Freedman *et al.* [HST Collaboration], “Final Results from the Hubble Space Telescope Key Project to Measure the Hubble Constant”, *Astrophys. J.* **553**, 47 (2001) [arXiv:astro-ph/0012376].
- [4] J. R. Mould *et al.*, “The HST Key Project on the Extragalactic Distance Scale. XXVIII. Combining the Constraints on the Hubble Constant”, *Astrophys. J.* **529**, 786 (2000) [arXiv:astro-ph/9909260].
- [5] P. Astier, “Cosmology and dark energy”, *J. Phys. Conf. Ser.* **110**, 012005 (2008); P. Astier, “Cosmology with type Ia supernovae”, *Prepared for 12th International Workshop on Neutrinos Telescopes: Twenty Years after the Supernova 1987A Neutrino Bursts Discovery, Venice, Italy, 6-9 Mar 2007*; P. Astier *et al.* [The SNLS Collaboration], “The Supernova Legacy Survey: Measurement of  $\Omega_M, \Omega_\Lambda$  and  $w$  from the First Year Data Set”, *Astron. Astrophys.* **447**, 31 (2006) [arXiv:astro-ph/0510447].
- [6] A. G. Riess *et al.* [Supernova Search Team Collaboration], “Type Ia Supernova Discoveries at  $z > 1$  From the Hubble Space Telescope: Evidence for Past Deceleration and Constraints on Dark Energy Evolution”, *Astrophys. J.* **607**, 665 (2004) [arXiv:astro-ph/0402512].
- [7] J. Dunkley *et al.* [WMAP Collaboration], “Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Likelihoods and Parameters from the WMAP data”, arXiv: 0803.0586 [astro-ph]; D. N. Spergel *et al.* [WMAP Collaboration], “Wilkinson Microwave Anisotropy Probe

- (WMAP) three year results: Implications for cosmology”, *Astrophys. J. Suppl.* **170**, 377 (2007) [arXiv: astro-ph/0603449]; D. N. Spergel *et al.* [WMAP Collaboration], “First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters”, *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 175 (2003) [arXiv: astro-ph/0302209].
- [8] A. C. S. Readhead *et al.*, “Extended Mosaic Observations with the Cosmic Background Imager”, *Astrophys. J.* **609**, 498 (2004) [arXiv:astro-ph/0402359].
- [9] J. H. Goldstein *et al.*, “Estimates of Cosmological Parameters Using the CMB Angular Power Spectrum of ACBAR”, *Astrophys. J.* **599**, 773 (2003) [arXiv:astro-ph/0212517].
- [10] J. K. Adelman-McCarthy *et al.* [SDSS Collaboration], “The Sixth Data Release of the Sloan Digital Sky Survey”, *Astrophys. J. Suppl.* **175**, 297 (2008) [arXiv:0707.3413 [astro-ph]]; J. K. Adelman-McCarthy *et al.* [SDSS Collaboration], “The Fourth Data Release of the Sloan Digital Sky Survey”, *Astrophys. J. Suppl.* **162**, 38 (2006) [arXiv:astro-ph/0507711]; M. Tegmark *et al.* [SDSS Collaboration], “Cosmological Constraints from the SDSS Luminous Red Galaxies”, *Phys. Rev. D* **74**, 123507 (2006) [arXiv:astro-ph/0608632]; M. Tegmark *et al.* [SDSS Collaboration], “Cosmological parameters from SDSS and WMAP”, *Phys. Rev. D* **69**, 103501 (2004) [arXiv:astro-ph/0310723].
- [11] V. Sahni and A. Starobinsky, “Reconstructing dark energy”, *Int. J. Mod. Phys. D* **15**, 2105 (2006) [arXiv:astro-ph/0610026].
- [12] E. J. Copeland, M. Sami and S. Tsujikawa, “Dynamics of dark energy”, *Int. J. Mod. Phys. D* **15**, 1753 (2006) [arXiv:hep-th/0603057].
- [13] T. Kapitaniak and S. R. Bishop, “The illustrated dictionary of nonlinear dynamics y chaos”, *John Wiley and Sons, (1999)*.
- [14] J. Wainwright y G.F.R. Ellis, “Dynamical Systems in Cosmology”, *Cambridge University Press, Cambridge, (1997)*.
- [15] J. Wainwright and W. C. Lim, “Cosmological models from a dynamical systems perspective”, *J. Hyperbol. Diff. Equat.* **2**, 437 (2005) [arXiv:gr-qc/0409082].
- [16] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, “The Large scale structure of space-time”, *Cambridge University Press, Cambridge, 1973*
- [17] R. Lazkoz and G. Leon, “Quintom cosmologies admitting either tracking or phantom attractors”, *Phys. Lett. B* **638**, 303 (2006) [arXiv:astro-ph/0602590].

- [18] Coley A. A., “Dynamical systems and cosmology”, *Kuwer Academic Publishers*, (2003).
- [19] X. Zhang, “An Interacting Two-Fluid Scenario For Quintom Dark Energy”, *Commun. Theor. Phys.* **44** (2005) 762.
- [20] S. Nesseris and L. Perivolaropoulos, “Comparison of the Legacy and Gold SnIa Dataset Constraints on Dark Energy Models”, *Phys. Rev. D* **72**, 123519 (2005) [arXiv:astro-ph/0511040]; H. K. Jassal, J. S. Bagla and T. Padmanabhan, “The vanishing phantom menace”, arXiv: astro-ph/0601389.
- [21] V. Barger, E. Guarnaccia and D. Marfatia, “Classification of dark energy models in the  $(w(0), w(a))$  plane”, *Phys. Lett. B* **635**, 61 (2006) [arXiv:hep-ph/0512320].
- [22] M. Doran and G. Robbers, “Early dark energy cosmologies”, *JCAP* **0606**, 026 (2006) [arXiv:astro-ph/0601544].
- [23] S. Nesseris and L. Perivolaropoulos, “Crossing the phantom divide: Theoretical implications and observational status”, *JCAP* **0701**, 018 (2007) [arXiv:astro-ph/0610092].
- [24] J. E. Lidsey, D. Wands and E. J. Copeland, “Superstring cosmology”, *Phys. Rept.* **337**, 343 (2000) [arXiv:hep-th/9909061].
- [25] R. R. Caldwell and M. Doran, “Dark-energy evolution across the cosmological-constant boundary”, *Phys. Rev. D* **72** (2005) 043527 [arXiv:astro-ph/0501104].
- [26] R. G. Cai, H. S. Zhang and A. Wang, “Crossing  $w = -1$  in Gauss-Bonnet brane world with induced gravity”, *Commun. Theor. Phys.* **44** (2005) 948 [arXiv:hep-th/0505186]; V. Sahni, “Cosmological surprises from braneworld models of dark energy”, arXiv:astro-ph/0502032; V. Sahni and Y. Shtanov, “Braneworld models of dark energy”, *JCAP* **0311**, 014 (2003).
- [27] B. McInnes, “The phantom divide in string gas cosmology”, *Nucl. Phys. B* **718** (2005) 55. [arXiv:hep-th/0502209].
- [28] E. Elizalde, S. Nojiri and S. D. Odintsov, “Late-time cosmology in (phantom) scalar-tensor theory: Dark energy and the cosmic speed-up”, *Phys. Rev. D* **70** (2004) 043539 [arXiv:hep-th/0405034]; L. Perivolaropoulos, “Reconstruction of extended quintessence potentials from the SnIa gold dataset”, *JCAP* **0510** (2005) 001 [arXiv:astro-ph/0504582].
- [29] H. S. Zhang and Z. H. Zhu, “Interacting Chaplygin gas”, *Phys. Rev. D* **73**, 043518 (2006) [arXiv:astro-ph/0509895].

- [30] A. Melchiorri, L. Mersini-Houghton, C. J. Odman and M. Trodden, “The State of the Dark Energy Equation of State”, *Phys. Rev. D* **68**, 043509 (2003) [arXiv:astro-ph/0211522].
- [31] A. Vikman, “Can dark energy evolve to the phantom?”, *Phys. Rev. D* **71**, 023515 (2005) [arXiv:astro-ph/0407107].
- [32] A. A. Sen, “Reconstructing K-essence”, *JCAP* **0603**, 010 (2006) [arXiv:astro-ph/0512406].
- [33] M. Z. Li, B. Feng and X. M. Zhang, “A single scalar field model of dark energy with equation of state crossing -1”, *JCAP* **0512** (2005) 002 [arXiv:hep-ph/0503268].
- [34] C. G. Huang and H. Y. Guo, “A new single-dynamical-scalar-field model of dark energy”, arXiv:astro-ph/0508171.
- [35] R. Curbelo, T. Gonzalez G Leon and I. Quiros, “Interacting phantom energy and avoidance of the big rip singularity”, *Class. Quant. Grav.* **23**, 1585 (2006) [arXiv:astro-ph/0502141].
- [36] M. R. Setare and E. N. Saridakis, “Quintom model with  $O(N)$  symmetry”, arXiv:0809.0114 [hep-th].
- [37] Y. F. Cai and X. Zhang, “Evolution of Metric Perturbations in Quintom Bounce model”, arXiv:0808.2551 [astro-ph].
- [38] M. R. Setare and E. N. Saridakis, “Quintom Cosmology with General Potentials”, arXiv:0807.3807 [hep-th].
- [39] M. R. Setare, J. Sadeghi and A. Banijamali, “Bouncing Universe with Non-minimally Coupled Quintom Matter”, arXiv:0807.0077 [hep-th].
- [40] S. Zhang and B. Chen, “Reconstructing a String-Inspired Quintom Model of Dark Energy”, arXiv:0806.4435 [hep-ph].
- [41] Y. F. Cai and J. Wang, “Dark Energy Model with Spinor Matter and Its Quintom Scenario”, *Class. Quant. Grav.* **25**, 165014 (2008) [arXiv:0806.3890 [hep-th]].
- [42] M. R. Setare and P. Moyassari, “Quintom dark energy in DGP braneworld cosmology”, arXiv:0806.2418 [gr-qc].
- [43] M. R. Setare and J. Sadeghi, “First-order formalism for the quintom model of dark energy”, arXiv:0805.1117 [gr-qc].

- [44] H. H. Xiong, Y. F. Cai, T. Qiu, Y. S. Piao and X. Zhang, “Oscillating universe with quintom matter”, *Phys. Lett. B* **666**, 212 (2008) [arXiv:0805.0413 [astro-ph]].
- [45] J. Sadeghi, M. R. Setare, A. Banijamali and F. Milani, “Non-minimally Coupled Quintom Model Inspired by String Theory”, *Phys. Lett. B* **662**, 92 (2008) [arXiv:0804.0553 [hep-th]].
- [46] M. R. Setare and E. N. Saridakis, “Coupled oscillators as models of quintom dark energy”, arXiv:0802.2595 [hep-th].
- [47] M. R. Setare, J. Sadeghi and A. R. Amani, “Shape invariance method for quintom model in the bent brane background”, *Phys. Lett. B* **660**, 299 (2008) [arXiv:0712.1873 [hep-th]].
- [48] Y. F. Cai, T. Qiu, R. Brandenberger, Y. S. Piao and X. Zhang, “On Perturbations of Quintom Bounce”, *JCAP* **0803**, 013 (2008) [arXiv:0711.2187 [hep-th]].
- [49] M. Alimohammadi, “Asymptotic behavior of  $\omega$  in general quintom model”, *Gen. Rel. Grav.* **40**, 107 (2008) [arXiv:0706.1360 [gr-qc]].
- [50] H. Wei and S. N. Zhang, “Dynamics of Quintom and Hessece Energies in Loop Quantum Cosmology”, *Phys. Rev. D* **76**, 063005 (2007) [arXiv:0705.4002 [gr-qc]].
- [51] Y. F. Cai, T. Qiu, Y. S. Piao, M. Li and X. Zhang, “Bouncing Universe with Quintom Matter”, *JHEP* **0710**, 071 (2007) [arXiv:0704.1090 [gr-qc]].
- [52] B. Feng, X. L. Wang and X. M. Zhang, “Dark Energy Constraints from the Cosmic Age and Supernova”, *Phys. Lett. B* **607**, 35 (2005) [arXiv:astro-ph/0404224].
- [53] H. Wei and R. G. Cai, “Cosmological evolution of hessence dark energy and avoidance of big rip”, *Phys. Rev. D* **72**, 123507 (2005) [arXiv:astro-ph/0509328].
- [54] H. Wei and R. G. Cai, “A note on crossing the phantom divide in hybrid dark energy model”, *Phys. Lett. B* **634**, 9 (2006) [arXiv:astro-ph/0512018].
- [55] H. Wei, R. G. Cai and D. F. Zeng, “Hessence: A new view of quintom dark energy”, *Class. Quant. Grav.* **22**, 3189 (2005) [arXiv:hep-th/0501160].
- [56] Z. K. Guo, Y. S. Piao, X. M. Zhang and Y. Z. Zhang, “Cosmological evolution of a quintom model of dark energy”, *Phys. Lett. B* **608**, 177 (2005) [arXiv:astro-ph/0410654].
- [57] X. F. Zhang, H. Li, Y. S. Piao and X. M. Zhang, “Two-field models of dark energy with equation of state across -1”, *Mod. Phys. Lett. A* **21**, 231 (2006) [arXiv:astro-ph/0501652].

- [58] R. Lazkoz, G. Leon and I. Quiros, “Quintom cosmologies with arbitrary potentials”, *Phys. Lett. B* **649**, 103 (2007) [arXiv:astro-ph/0701353].
- [59] B. Feng, M. Li, Y. S. Piao and X. Zhang, “Oscillating quintom and the recurrent universe”, *Phys. Lett. B* **634**, 101 (2006) [arXiv:astro-ph/0407432].
- [60] P. X. Wu and H. W. Yu, “Statefinder parameters for quintom dark energy model”, *Int. J. Mod. Phys. D* **14**, 1873 (2005) [arXiv:gr-qc/0509036].
- [61] J. Q. Xia, B. Feng and X. M. Zhang, “Constraints on Oscillating Quintom from Supernova, Microwave Background and Galaxy Clustering”, *Mod. Phys. Lett. A* **20**, 2409 (2005) [arXiv:astro-ph/0411501].
- [62] G. B. Zhao, J. Q. Xia, M. Li, B. Feng and X. Zhang, “Perturbations of the quintom models of dark energy and the effects on observations”, *Phys. Rev. D* **72**, 123515 (2005) [arXiv:astro-ph/0507482].
- [63] H. M. Sadjadi and M. Alimohammadi, “Transition from quintessence to phantom phase in quintom model”, *Phys. Rev. D* **74**, 043506 (2006) [arXiv:gr-qc/0605143].
- [64] M. Alimohammadi and H. M. Sadjadi, “The  $w = -1$  crossing of the quintom model with slowly-varying potentials”, *Phys. Lett. B* **648**, 113 (2007) [arXiv:gr-qc/0608016].
- [65] X. Zhang, “Dynamical vacuum energy, holographic quintom, and the reconstruction of scalar-field dark energy”, *Phys. Rev. D* **74**, 103505 (2006) [arXiv:astro-ph/0609699].
- [66] G. Leon y R. Cardenas, “Dynamical Systems Approach to Quintom Cosmologies”, (sin publicar) (2008).
- [67] X. Zhang, “Statefinder diagnostic for holographic dark energy model”, *Int. J. Mod. Phys. D* **14**, 1597 (2005) [arXiv:astro-ph/0504586].
- [68] X. Zhang and F. Q. Wu, “Constraints on holographic dark energy from Type Ia supernova observations”, *Phys. Rev. D* **72**, 043524 (2005) [arXiv:astro-ph/0506310].
- [69] R. J. van den Hoogen and L. Filion, “Stability analysis of multiple scalar field cosmologies with matter”, *Class. Quant. Grav.* **17**, 1815 (2000) .
- [70] A. A. Coley and R. J. van den Hoogen, “The dynamics of multi-scalar field cosmological models and assisted inflation”, *Phys. Rev. D* **62**, 023517 (2000) [arXiv:gr-qc/9911075].

- [71] E. J. Copeland, A. Mazumdar and N. J. Nunes, “Generalized assisted inflation”, *Phys. Rev. D* **60**, 083506 (1999) [arXiv:astro-ph/9904309].
- [72] J. M. Aguirregabiria, A. Chamorro, L. P. Chimento and N. A. Zuccala, “Assisted inflation in Friedmann-Robertson-Walker and Bianchi spacetimes”, *Phys. Rev. D* **62**, 084029 (2000) [arXiv:gr-qc/0006108].
- [73] D. Blais and D. Polarski, “Transient accelerated expansion and double quintessence”, *Phys. Rev. D* **70**, 084008 (2004) [arXiv:astro-ph/0404043].
- [74] A. Nunes and J. P. Mimoso, “On the potentials yielding cosmological scaling solutions”, *Phys. Lett. B* **488**, 423 (2000) [arXiv:gr-qc/0008003].
- [75] G. F. R. Ellis and H. van Elst, “Cosmological models”, *NATO Adv. Study Inst. Ser. C. Math. Phys. Sci.* **541**, 1 (1999) [arXiv:gr-qc/9812046].
- [76] A. R. Liddle, “An introduction to modern cosmology”, *Chichester, UK: Wiley (1998) 129 p* (John Wiley and Sons Ltd, England, (2003)).
- [77] R. d’Inverno, “Introducing Einstein’s relativity”, *Oxford, UK: Clarendon (1992)*.
- [78] R. M. Wald, “General Relativity”, *Chicago, Usa: Univ. Pr. ( 1984)*.
- [79] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, “Gravitation”, *San Francisco 1973, (Freeman, 1999)*.
- [80] J. Ehlers, “Contributions to the relativistic mechanics of continuous media”, *Gen. Rel. Grav.* **25**, 1225 (1993) [*Abh. Akad. Wiss. Lit. Mainz. Nat. Kl.* **11**, 793 (1961)].
- [81] G. F. R. Ellis, “Relativistic cosmology”, *International School of Physics Enrico Fermi, Course 47: Proceedings. Edited by R.K. Sachs, Academic Press, London, 1971. pp. 104-182*
- [82] J. A. Wheeler, “Einstein’s Vision”, Springer, Berlin, 1968.
- [83] M. Trodden and S. M. Carroll, “TASI lectures: Introduction to cosmology”, arXiv:astro-ph/0401547.
- [84] C. F. Kolda and D. H. Lyth, “Quintessential difficulties”, *Phys. Lett. B* **458**, 197 (1999) [arXiv:hep-ph/9811375].
- [85] V. Sahni, “The cosmological constant problem and quintessence”, *Class. Quant. Grav.* **19**, 3435 (2002) [arXiv:astro-ph/0202076].

- [86] T. Padmanabhan, “Cosmological constant: The weight of the vacuum”, Phys. Rept. **380**, 235 (2003) [arXiv:hep-th/0212290].
- [87] U. Alam, V. Sahni, T. D. Saini and A. A. Starobinsky, “Is there Supernova Evidence for Dark Energy Metamorphosis?”, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **354**, 275 (2004) [arXiv:astro-ph/0311364].
- [88] U. Alam, V. Sahni and A. A. Starobinsky, “The case for dynamical dark energy revisited”, JCAP **0406**, 008 (2004) [arXiv:astro-ph/0403687].
- [89] H. P. Nilles, “Supersymmetry, Supergravity And Particle Physics”, Phys. Rept. **110**, 1 (1984).
- [90] J. D. Barrow, “String-Driven Inflationary and Deflationary Cosmological Models”, Nucl. Phys. B **310**, 743 (1988).
- [91] M. D. Pollock, “On the initial conditions for superexponential inflation”, Phys. Lett. B **215**, 635 (1988).
- [92] R. R. Caldwell, “A Phantom Menace?”, Phys. Lett. B **545**, 23 (2002) [arXiv:astro-ph/9908168].
- [93] S. Nojiri and S. D. Odintsov, “Quantum deSitter cosmology and phantom matter”, Phys. Lett. B **562**, 147 (2003) [arXiv:hep-th/0303117].
- [94] I. Brevik, S. Nojiri, S. D. Odintsov and L. Vanzo, “Entropy and universality of Cardy-Verlinde formula in dark energy universe”, Phys. Rev. D **70**, 043520 (2004) [arXiv:hep-th/0401073].
- [95] S. M. Carroll, M. Hoffman and M. Trodden, “Can the dark energy equation-of-state parameter  $w$  be less than  $-1$ ?”, Phys. Rev. D **68**, 023509 (2003) [arXiv:astro-ph/0301273].
- [96] J. M. Cline, S. Jeon and G. D. Moore, “The phantom menaced: Constraints on low-energy effective ghosts”, Phys. Rev. D **70**, 043543 (2004) [arXiv:hep-ph/0311312].
- [97] L. Randall and R. Sundrum, “An alternative to compactification”, Phys. Rev. Lett. **83**, 4690 (1999) [arXiv:hep-th/9906064].
- [98] G. R. Dvali, G. Gabadadze and M. Porrati, “4D gravity on a brane in 5D Minkowski space”, Phys. Lett. B **485**, 208 (2000) [arXiv:hep-th/0005016].
- [99] A. Lue and G. D. Starkman, “How a brane cosmological constant can trick us into thinking that  $w < -1$ ”, Phys. Rev. D **70**, 101501 (2004) [arXiv:astro-ph/0408246].
- [100] R. Tavakol, “Introduction to dynamical systems”, *ch. 4, Part one, pp. 84–98, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1997.*

- [101] A. A. Coley, “Introduction to Dynamical Systems”, *Lecture Notes for Math 4190/5190 (1994)*.
- [102] S. Smale M.W. Hirsch and R.L. Devaney, “Differential equations, dynamical systems and an introduction to chaos”, *Elsevier Academic Press, San Diego, USA, 2004*.
- [103] M.W. Hirsch y S. Smale “Differential Equations, Dynamical Systems y Linear Algebra”, *New York, Academic, (1974)*.
- [104] D. K. Arrowsmith y C. M. Place, “An introduction to dynamical systems”, *Cambridge University Press, Cambridge, England, (1990)*.
- [105] S. Smale, M.W. Hirsch y R.L. Devaney, “Differential equations, dynamical systems y an introduction to chaos”, *Elsevier Academic Press, San Diego, USA, (2004)*.
- [106] P. Hartman, “Ordinary Differential Equations”, *New York, Wiley (1989)*.
- [107] E. A. Coddington y Levinson, N. “Theory of Ordinary Differential Equations”, *New York, MacGraw-Hill, (1955)*.
- [108] A. Coley, S. Hervik and J. Latta, “The phantom of the OPRA”, *Mod. Phys. Lett. A* **21**, 1099 (2006) [arXiv:astro-ph/0503169].
- [109] A. D. Linde, “Axions in inflationary cosmology”, *Phys. Lett. B* **259**, 38 (1991).
- [110] L. A. Kofman and A. D. Linde, “Generation of density perturbations in inflationary cosmology”, *Nucl. Phys. B* **282**, 555 (1987).
- [111] L. A. Kofman and D. Y. Pogosian, “Nonflat perturbations in inflationary cosmology”, *Phys. Lett. B* **214**, 508 (1988).
- [112] D. S. Salopek, J. R. Bond and J. M. Bardeen, “Designing density fluctuation spectra in inflation”, *Phys. Rev. D* **40**, 1753 (1989).
- [113] L. A. Kofman, “Primordial perturbations from inflation”, *Phys. Scripta* **T36**, 108 (1991).
- [114] H. M. Hodges, G. R. Blumenthal, L. A. Kofman and J. R. Primack, “Nonstandard primordial fluctuations from a polynomial inflation potential”, *Nucl. Phys. B* **335**, 197 (1990).
- [115] A. D. Linde, “Hybrid inflation” *Phys. Rev. D* **49**, 748 (1994) [arXiv: astro-ph/9307002].
- [116] R. Cen, “Decaying Cold Dark Matter Model and Small-Scale Power”, *Astrophys. J.* **546**, L77 (2001) [arXiv:astro-ph/0005206];

- M. Oguri, K. Takahashi, H. Ohno and K. Kotake, “Decaying Cold Dark Matter and the Evolution of the Cluster Abundance”, *Astrophys. J.* **597**, 645 (2003) [arXiv:astro-ph/0306020].
- [117] K. A. Malik, D. Wands and C. Ungarelli, “Large-scale curvature and entropy perturbations for multiple interacting fluids”, *Phys. Rev. D* **67**, 063516 (2003) [arXiv:astro-ph/0211602].
- [118] H. Ziaeeepour, “Quintessence from the decay of a superheavy dark matter”, *Phys. Rev. D* **69**, 063512 (2004) [arXiv:astro-ph/0308515].
- [119] C. G. Boehmer, G. Caldera-Cabral, R. Lazkoz and R. Maartens, “Dynamics of dark energy with a coupling to dark matter”, *Phys. Rev. D* **78**, 023505 (2008) [arXiv:0801.1565 [gr-qc]].
- [120] R. Lazkoz and G. Leon, “Asymptotic behavior of Cardassian cosmologies with exponential potentials”, *Phys. Rev. D* **71**, 123516 (2005) [arXiv:astro-ph/0503478].
- [121] K. Freese and M. Lewis, “Cardassian Expansion: a Model in which the Universe is Flat, Matter Dominated, and Accelerating”, *Phys. Lett. B* **540**, 1 (2002) [arXiv:astro-ph/0201229].
- [122] S. Foster, “Scalar field cosmologies and the initial space-time singularity”, *Class. Quant. Grav.* **15**, 3485 (1998) [arXiv:gr-qc/9806098].
- [123] H. van Elst and C. Uggla, “General Relativistic 1+3 Orthonormal Frame Approach Revisited”, *Class. Quant. Grav.* **14**, 2673 (1997) [arXiv:gr-qc/9603026].
- [124] A. A. Coley, W. C. Lim and G. Leon, “Spherically symmetric cosmology: resource paper”, arXiv:0803.0905 [gr-qc].
- [125] S. Dodelson, “Modern Cosmology”, *Amsterdam, Netherlands: Academic Pr. (2003)*.
- [126] E. Corbelli and P. Salucci, “The Extended Rotation Curve and the Dark Matter Halo of M33”, *Mon. Not. R. Ast. Soc.* **311**, 441 (2000) [arXiv:astro-ph/9909252].

# Apéndice A

## Historia térmica del Universo

### A.1 Densidad de energía y presión de un fluido perfecto isotrópico como función de la Temperatura. Entropía

Durante la mayor parte del Universo primordial, las reacciones proceden con la rapidez suficiente como para que las partículas se mantengan en equilibrio, con las diferentes especies compartiendo la misma temperatura. <sup>1</sup> En ocasiones se expresa la densidad de energía y la presión en términos de su temperatura. Por esta razón es conveniente introducir el número de ocupación, o función de distribución, de las especies. Esta función “cuenta” el número de partículas en una región dada del espacio de fases alrededor de la posición  $\vec{x}$  y  $\vec{p}$  (el cual es el momento propio que decrece con la expansión y no  $\vec{P}$  definido anteriormente). La densidad de energía de las especies se obtiene sumando la energía por sobre todos los elementos del espacio de fases:  $\sum f(\vec{x}, \vec{p}) E(p)$  con  $E(p) = \sqrt{p^2 + m^2}$ .

¿Cuántos elementos en el espacio de fase existen en una región de “volumen”  $d^3x d^3p$ ?

Según el Principio de incertidumbre de Heisenberg, ninguna partícula puede localizarse en una región del espacio de fase menor que  $(2\pi\hbar)^3$ , el cuál es el tamaño de un elemento fundamental de “volumen”. Por tanto el número de elementos de fase en una región de “volumen”  $d^3x d^3p$  es  $d^3x d^3p / (2\pi\hbar)^3$ , y la densidad de energía es

$$\rho_i = g_i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_i(\vec{x}, \vec{p}) E(p) \quad (\text{A.1.1})$$

donde los subíndices  $i$  denotan las diferentes especies,  $g_i$  denota el número de degeneración de las especies (para el caso del fotón es igual a 2 por sus estados de espín), utilizaremos unidades donde  $\hbar = 1$ .

Si la función de distribución no depende de la posición ni de las componentes angulares del momento

---

<sup>1</sup>Adaptado de [125].

entonces

$$\rho_i = \frac{g_i}{2\pi^2} \int p^2 E(p) f_i(p) dp \quad (\text{A.1.2})$$

donde  $p$  es la magnitud del momento y la integral ahora es unidimensional.

En equilibrio a una temperatura  $T$ , los bosones como el fotón tienen distribuciones de Bose-Einstein,

$$f_{BE} = \frac{1}{e^{(E-\mu)/T} - 1} \quad (\text{A.1.3})$$

y los fermiones tales como el electrón tienen distribuciones de Fermi-Dirac,

$$f_{FD} = \frac{1}{e^{(E-\mu)/T} + 1} \quad (\text{A.1.4})$$

donde  $\mu$  es el potencial químico. Es importante hacer notar que estas distribuciones no dependen de la posición  $\vec{x}$  o de la dirección del momento  $\hat{p}$ , sólo de la magnitud  $p$ .

La presión puede expresarse similarmente como una integral de la función de distribución

$$P_i = g_i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_i(\vec{x}, \vec{p}) \frac{p^2}{3E(p)}. \quad (\text{A.1.5})$$

Al igual que antes si la función de distribución no depende de la posición ni de las componentes angulares del momento

$$P_i = \frac{g_i}{2\pi^2} \int \frac{p^4 f_i(p)}{3E(p)} dp \quad (\text{A.1.6})$$

donde  $p$  es la magnitud del momento y la integral ahora es unidimensional.

Para casi todas las partículas en el Universo durante casi todo el tiempo, el potencial químico es menor que la temperatura. En muy buena aproximación, entonces, la función de distribución depende sólo de  $E/T$  y la presión satisface

$$\frac{dP_i}{dT} = \frac{\rho_i + P_i}{T}. \quad (\text{A.1.7})$$

Esta relación puede utilizarse para demostrar que la densidad de entropía del Universo escala como  $a^{-3}$ . Esto se obtiene de re-expresar la ecuación (1.2.56) en la forma

$$a^{-3} \frac{\partial [(\rho + p) a^3]}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} = 0. \quad (\text{A.1.8})$$

La derivada de la presión con respecto al tiempo puede escribirse como  $(dT/dt)$   $(\partial p/\partial T)$  de modo que

$$a^{-3} \frac{\partial [(\rho + p) a^3]}{\partial t} - \frac{dT}{dt} \frac{\rho + p}{T} = a^{-3} \frac{\partial \left[ \frac{(\rho + p) a^3}{T} \right]}{\partial t} = 0, \quad (\text{A.1.9})$$

de esta forma la entropía

$$s \equiv \frac{\rho + p}{T} \quad (\text{A.1.10})$$

escala según  $a^{-3}$ . Aunque hemos trabajado en términos de una sola especie, este resultado es válido para la entropía total incluyendo todas las especies en equilibrio. De hecho, si incluso dos especies tienen diferentes temperatura, la suma de sus densidades de entropía sigue escalando según  $a^{-3}$ .

## A.2 Distribución térmica y espectro de cuerpo negro

Queremos discutir brevemente la física de la radiación.<sup>2</sup>

Si las partículas interactúan frecuentemente unas con otras, entonces la distribución de sus energías puede ser descrita mediante la Termodinámica de Equilibrio. En una distribución térmica, las interacciones son frecuentes, pero se ha alcanzado un balance de modo todas las interacciones proceden con igual frecuencia tanto en la dirección adelante como hacia atrás, de este modo la distribución total del número de partículas y las energías permanecen constantes. El número de partículas a una energía dada depende solo de la temperatura.

La distribución precisa depende de cuando las partículas consideradas son fermiones, los cuales obedecen el Principio de Exclusión de Pauli, o bosones, los cuales no. El caso más interesante en esta sección son los fotones, los cuales son bosones, y su distribución característica a la temperatura  $T$  es el espectro de Planck o de cuerpo negro. Los fotones tienen dos posibles polarizaciones, y cada una tiene un número de ocupación por modo  $\mathcal{N}$  dado por la función de Planck:

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\exp(hf/k_B T) - 1}, \quad (\text{A.2.11})$$

donde  $k_B$  es una de las constantes fundamentales de la Naturaleza, la constante de Boltzmann, cuyo valor es  $1.381 \times 10^{-23} JK^{-1}$ ;  $h$  es la constante de Planck que tiene por valor  $2\pi (1.055 \times 10^{-34} m^2 kg s^{-1})$ .

Para interpretar esta ecuación debemos señalar que  $hf$  es la energía del fotón. El propósito de la constante de Boltzmann es convertir la temperatura en una energía característica. Por debajo de esta energía característica,  $hf \ll k_B T$ , es fácil producir fotones y el número de ocupación es grande (como los fotones son bosones, el Principio de Exclusión de Pauli no se aplica y pueden existir un número

---

<sup>2</sup>Adaptado de [76].

arbitrario de fotones en un modo dado). Por encima de esta energía característica,  $hf \gg k_B T$ , es energéticamente desfavorable la producción de fotones y el número de ocupación es exponencialmente suprimido.

Más importante que el número de fotones en un modo es la distribución de energía entre modos. Nos concentraremos en la energía por unidad de volumen, conocida como densidad de energía  $\epsilon$ . Como existen muy pocos fotones con  $hf \gg k_B T$ , no existe mucha energía a altas frecuencias. Pero, a pesar de su gran número, no existen tampoco mucha energía total a bajas frecuencias  $hf \ll k_B T$ , tanto por que dichos fotones tienen muy poca energía cada uno ( $E = hf$ ), como por que su longitud de onda es grande y de esta manera cada foton ocupa un volumen muy grande. Puede mostrarse que la densidad de energía en el intervalo de frecuencia  $df$  alrededor de  $f$  está dada por:

$$\epsilon(f) df = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{f^3 df}{\exp(hf/k_B T) - 1} \equiv \mathcal{I}(f), \quad (\text{A.2.12})$$

la cuál nos dice como se distribuye la energía entre las diferentes frecuencias. Se puede Demostrar que el pico de la distribución es en  $f_{peak} \cong 2.8k_B T/h$ , correspondiente a una energía de  $E_{peak} = hf_{peak} \cong 2.8k_B T$ . Esto es, la energía total en la radiación está dominada por los fotones con energía del orden del  $k_B T$ . Be hecho, la enegía media de un fotón en esta distribución es  $E_{mean} \cong 3k_B T$ .

Una última cantidad de interés es la densidad de energía total de la radiación de cuerpo negro obtenida integrando (A.2.12) sobre todas las frecuencias:

$$\epsilon_{rad} = \int_0^\infty \mathcal{I}(f) df = \alpha T^4 \quad (\text{A.2.13})$$

donde  $\alpha$  es la constante de radiación definida por

$$\alpha = \frac{\pi^2 k_B^4}{15 \hbar^3 c^3} = 7.565 \times 10^{-16} \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-4}.$$

### A.3 Propiedades del fondo cósmico de microondas

La radiación de fondo de microondas (en inglés Cosmic Microwave Background o CMB) es una forma de radiación electromagnética que llena el universo por completo. También se denomina radiación cósmica de microondas o radiación del fondo cósmico. <sup>3</sup>

Esta radiación fue predicha por George Gamow, Ralph Alpher y Robert Hermann en los años 40 y fue descubierta de manera accidental en 1964 por Arno Penzias y Robert Woodrow Wilson quienes recibieron el Premio Nobel de Física de 1978.

<sup>3</sup>[http://es.wikipedia.org/wiki/Radiaci3n\\_de\\_fondo\\_de\\_microondas](http://es.wikipedia.org/wiki/Radiaci3n_de_fondo_de_microondas).

Esta observación crucial inclinó el debate entre la teoría del Big-bang y la teoría del Estado Estacionario en favor de la primera. Esta radiación permea todo el espacio y es recibida por la Tierra desde todas direcciones. Actualmente se conoce que en muy buena aproximación esta toma la forma de radiación de cuerpo negro con una temperatura actual de  $T_0 = 2.725 \pm 0.001K$ . La densidad de energía de la radiación actual es  $\epsilon_R(t_0) = 4.17 \times 10^{-14} J m^3$ . En términos de la densidad crítica es: <sup>4</sup>  $\Omega_R = 2.47 \times 10^{-5} h^2$ . De este modo la radiación en el fondo cósmico de microondas (la cuál de hecho domina a la densidad de energía en la radiación en las otras longitudes de onda) es pequeña hoy día pero no completamente despreciable.

## A.4 Historia térmica del Universo

Ahora que entendemos el comportamiento de la radiación, podemos considerar toda la historia térmica del Universo. El mejor acercamiento al tema es comenzar desde la época actual y seguir hacia atrás en el tiempo hasta donde nuestra comprensión lo permita. <sup>5</sup>

Actualmente tenemos alguna idea de los ingredientes materiales del Universo, al menos hasta cierto nivel de incertidumbre en las mediciones de los parámetros observacionales tales como  $h$ . Las partículas relativistas aparecen en dos variedades, fotones y neutrinos. La densidad de los fotones es  $\Omega_R = 2.47 \times 10^{-5} h^{-2}$ . Por su parte los neutrinos hasta el momento representan un desafío y no son fáciles de detectar. Para detectar, por ejemplo los neutrinos de un objeto astronómico tan brillante como nuestro propio Sol se requieren delicados experimentos en tierra que involucran inmensos recursos. La detección directa de la radiación térmica del fondo cósmico de neutrinos (CNB) está actualmente varios órdenes de magnitud más allá de nuestra experiencia técnica. De modo que para estimar las propiedades del fondo cósmico de neutrinos pertenece al campo puramente teórico.

La densidad de neutrinos se estima en  $\Omega_\nu = 0.68\Omega_R = 1.68 \times 10^{-5} h^{-2}$ . La cantidad de energía esperada en el CNB es similar a aquella del CMB. Sumando las contribuciones de los neutrinos y los fotones juntas obtenemos que la densidad de materia correspondiente a las partículas relativistas es

$$\Omega_{rel} = 4.15 \times 10^{-5} h^{-2},$$

de modo que la mayor parte de la materia/energía en el Universo es no relativista. La densidad de materia no relativista es simplemente  $\Omega_0 \cong 0.3$ . Conocemos que la dependencia de las densidades de materia relativista y materia no relativista con la expansión se reduce respectivamente a  $1/a^4$  y  $1/a^3$ . La razón entre ellas, expresada en términos del parámetro de densidad fraccional de energía, es

---

<sup>4</sup>Para convertir densidad de energía en densidad de masa se debe dividir por  $c^2$

<sup>5</sup>Adaptado de [76].

entonces

$$\frac{\Omega_{rel}}{\Omega_m} = \frac{4.15 \times 10^{-5}}{\Omega_0 h^2} \frac{1}{a}, \quad (\text{A.4.14})$$

donde la constante de proporcionalidad ha sido fijada por los valores actuales y se ha asumido  $a(t_0) = 1$ . Con esta expresión podemos calcular las cantidades relativas de materia relativista y no relativista para cualquier dimensión dada del Universo. Por ejemplo, en la época de desacople de fotones  $a_{des} \cong 1/1000$ , de modo que la razón durante el desacople de fotones está dada por

$$\frac{\Omega_{rel}}{\Omega_m} = \frac{0.04}{\Omega_0 h^2}. \quad (\text{A.4.15})$$

A menos que la combinación  $\Omega_0 h^2$  sea muy pequeña, este resultado es un indicador que durante el período de desacople de fotones había mucho más materia no relativista que relativista; el Universo se dice dominado por materia. Sin embargo en momentos más tempranos, cuando

$$a = a_{eq} = \frac{1}{24000 \Omega_0 h^2}, \quad (\text{A.4.16})$$

las densidades de materia y radiación fueron iguales. Esta época es conocida como época de igualdad materia-radiación ( $\Omega_m = \Omega_R$ ). En épocas más tempranas las partículas relativistas dominaban el Universo.

Ahora tenemos suficiente información para determinar (aproximadamente) la relación temperatura-tiempo en el Universo. Primero que todo el factor de escala puede servir como marcador del tiempo que ha transcurrido desde el Big-bang. Segundo, cómo que  $T \propto 1/a$ , y como conocemos el valor de  $a(t)$  en cada una de estas etapas, podemos obtener resultados apropiados para  $T$ .

Una aproximación aceptable es hacer  $k = 0$  (Universo plano) y  $\Lambda = 0$  (no constante cosmológica), aun cuando ellas están presentes hoy día, en el pasado fueron despreciables. De modo que el factor de escala crece como  $a \propto t^{2/3}$ , dando la relación  $T \propto t^{-2/3}$ . Fijando la razón de proporcionalidad constante y asumiendo que la edad del Universo es 12 Giga años (lo cual es un pequeñísimo subestimado de la edad real del Universo para compensar que  $\Lambda = 0$ ) tenemos

$$\frac{T}{2.725K} = \left( \frac{4 \times 10^{17} s}{t} \right)^{2/3}. \quad (\text{A.4.17})$$

Esto es válido para

$$T < T_{eq} = \frac{2.725K}{a_{eq}} = 66000 \Omega_0 h^2 K, \quad (\text{A.4.18})$$

de modo que el tiempo de la igualdad materia-radiación es

$$t_{eq} = 1.0 \times 10^{11} \Omega_0^{-3/2} h^{-3} s \cong 3400 \Omega_0^{-3/2} h^{-3} \text{ años.} \quad (\text{A.4.19})$$

Como que el desacople de fotones ocurre luego de la época de igualdad de materia-radiación, podemos aplicar la fórmula (A.4.17) con  $T_{dec} \cong 3000K$  para encontrar la edad del Universo en esta época

$$t_{dec} \cong 10^{13} s = 350000 \text{ años.} \quad (\text{A.4.20})$$

A temperaturas por debajo de  $T_{eq}$ , tiene lugar el dominio de la radiación y, de la ley de expansión  $a \propto t^{1/2}$ , la relación temperatura-tiempo se transforma en

$$\frac{T}{T_{eq}} = \left( \frac{t_{eq}}{t} \right)^{1/2}, \quad (\text{A.4.21})$$

donde la constante de proporcionalidad ha sido fijada por los valores en la época de igualdad materia-radiación. Sustituyendo estos valores y teniendo en cuenta que esta vez la dependencia de  $\Omega_0$  y  $h$  es débil, resulta

$$\left( \frac{1s}{t} \right)^{1/2} \cong \frac{T}{2 \times 10^{10} K} = \frac{k_B T}{2 MeV}. \quad (\text{A.4.22})$$

Esto significa que cuando el Universo tuvo un segundo de vida, la temperatura pudo haber sido del orden de  $2 \times 10^{10}$  Kelvin y la energía típica por partícula de cerca de  $2MeV$ .

Este último resultado puede obtenerse de manera más directa y exacta a partir de la ecuación de Friedmann

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho = \frac{8\pi G}{3} \times 1.68 \times \frac{\alpha T^4}{c^2}, \quad (\text{A.4.23})$$

y sustituir todas las constantes, recordar que como en este período domina la radiación  $a \propto t^{1/2}$  y por tanto  $H = 1/2t$ . El factor 1.68 incluye los neutrinos.

Conociendo la energía típica de la radiación como función del tiempo podemos construir la historia de eras interesantes en la evolución del Universo. Comenzando en la época actual y considerando el ocurrir del tiempo hacia atrás el Universo se hace más y más caliente.

El tiempo de desacople de fotones corresponde al último momento en que los fotones fueron lo suficientemente energéticos para dispersar los electrones de los átomos, a una temperatura de  $3000K$ . Este período de la evolución del Universo tuvo lugar durante la era de dominio de la materia. Sin

embargo poco antes la radiación dominaba el Universo, la transición ocurrió a una temperatura de  $T_{eq} = 66000 \Omega_0 h^2 K$ .

A tiempos tiempos suficientemente tempranos de modo que la energía excediera la temperatura de  $10^{10} K$ , la energía típica de un fotón es comparable con la energía de ligazón nuclear, las cuáles son del orden del  $MeV$ ; esto podría haber ocurrido cuando el Universo tenía cerca de  $1s$  de edad. Cuando el Universo era más joven que esto, los fotones eran suficientemente energéticos para destruir los átomos, dividiéndolos en protones, neutrones. Así, todo el tiempo antes de que el Universo tuviera un segundo de vida este podría haber sido una “sopa” de protones, neutrones y electrones, etc. desligados, interactuando fuertemente unos con otros.

Más atrás en el tiempo la temperatura fue aún mayor, la situación es aún menos clara, por que la energías típicas comenzaron a ser tan altas tal que las leyes de la física eran menos comprendidas. Se cree que a temperaturas del orden de  $10^{12} K$  deja de tener sentido la idea de neutrones y protones; en su lugar, el Universo era un plasma caliente constituidos por quarks (los constituyentes de los protones y neutrones) libres de vagar alrededor de un “mar” denso (una reminiscencia de la forma en que en algunas moléculas los electrones no están asociados a un núcleo particular). La transición en que los quarks se condensaron por primera vez en protones y neutrones se conoce como transición de fase quark-hadrón.<sup>6</sup>

La energías más altas obtenidas en la Tierra esta siendo generada en los aceleradores de partículas y es del orden de cerca de  $100 GeV$  (donde  $GeV$  es un giga-electrón volt, o sea, mil  $MeV$ ), correspondiendo a una temperatura “efectiva” de cerca de  $10^{15} K$ . Esta es la más alta energía a la cual tenemos evidencia del comportamiento físico de las partículas elementales, y esta temperatura es alcanzada sólo  $10^{-10} s$  luego del mismísimo Big-Bang. Mucho antes todavía entramos al dominio del Universo muy temprano, donde especulaciones en relación con las leyes de la física tales como la unificación de las fuerzas elementales debe ser empleada. Una gran variedad de posibles comportamientos han sido propuestos; una idea particularmente prominente ha sido la de la inflación cosmológica.

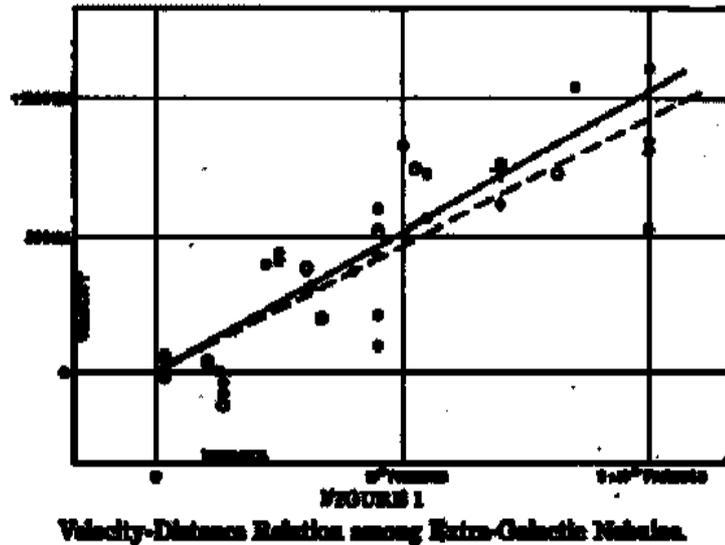
En la tabla C.11 se presenta una cronología aproximada de los hechos más importantes relacionados con la evolución del Universo.

---

<sup>6</sup>Hadrón es el término técnico para el estado básico para las partículas formadas por quarks: bariones (tres quarks) o mesones (un quark y un anti-quark).

## Apéndice B

# Gráficos y figuras



(a)

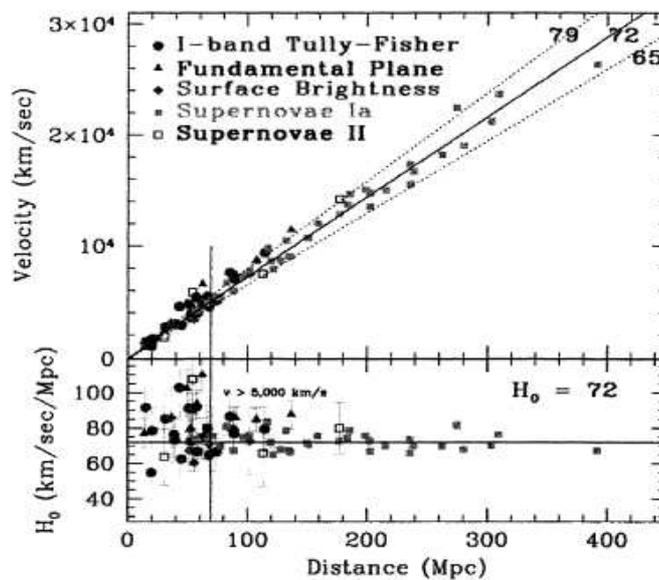


Figura B.1: [Reproducido de [125], ver [3]] La ley de Hubble satisface el Principio Cosmológico y es la única que satisface el Principio Cosmológico. La ley de Hubble no implica que la Tierra esté en el centro de la expansión sino que todo el Universo se expande homogénea e isotrópicamente. En (a) se presentan las mediciones originales de Hubble en 1929, la medición original de  $H_0$  arrojó el valor de  $500 \text{ km sec}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ . En (b) se presenta el Diagrama de Hubble obtenido por el Proyecto Hubble Space Telescope Key Project ([3]) usando 5 diferentes medidas de distancia. El panel inferior muestra  $H_0$  vs distancia con la línea horizontal igual al valor de mejor ajuste de  $72 \text{ km sec}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ .

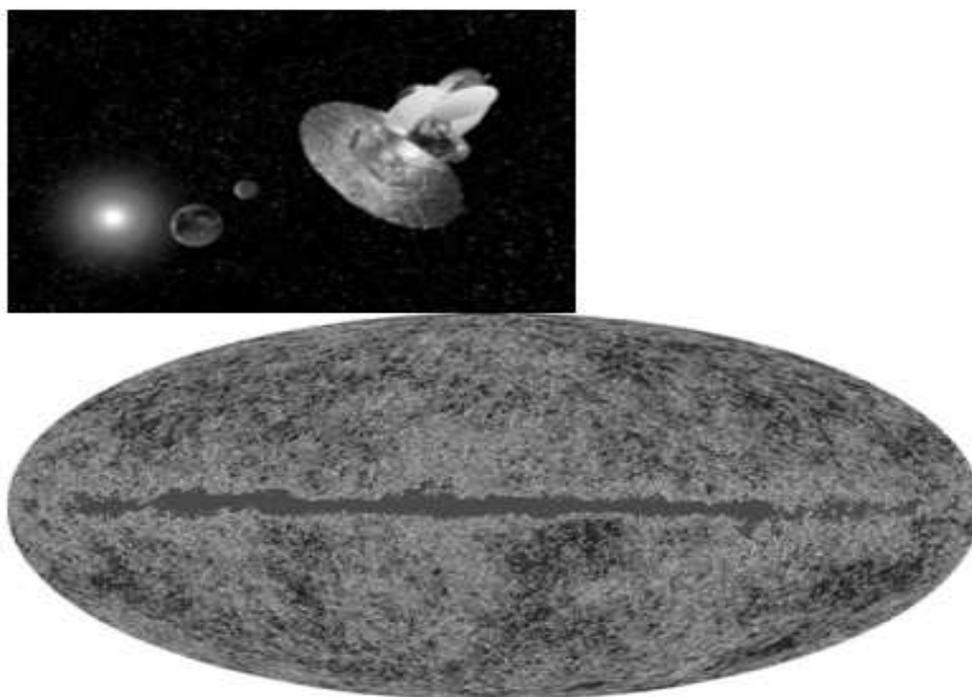


Figura B.2: Izquierda: el satélite WMAP lanzado en el 2001 [<http://plus.maths.org/latestnews/sep-dec06/CTC/WMAP.jpg>]; Derecha: Mapa del CMB obtenido por WMAP a 94 GHz [[http://www.das.uchile.cl/%7Emhamuy/courses/AS42B/3w\\_moll1512.jpg](http://www.das.uchile.cl/%7Emhamuy/courses/AS42B/3w_moll1512.jpg)].

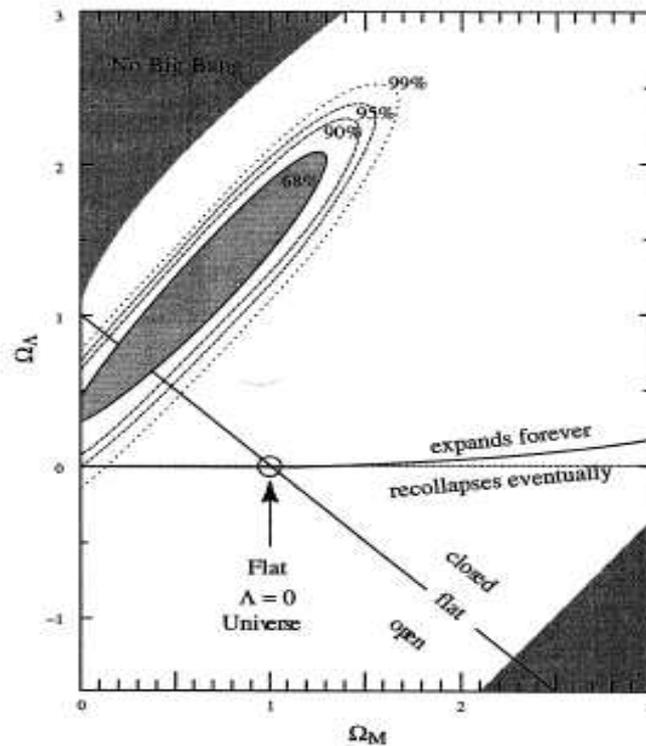


Figura B.3: [Reproducido de [125]] Contornos de confianza en el plano  $(\Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda,0})$  obtenidos a partir de datos de Supernovas.

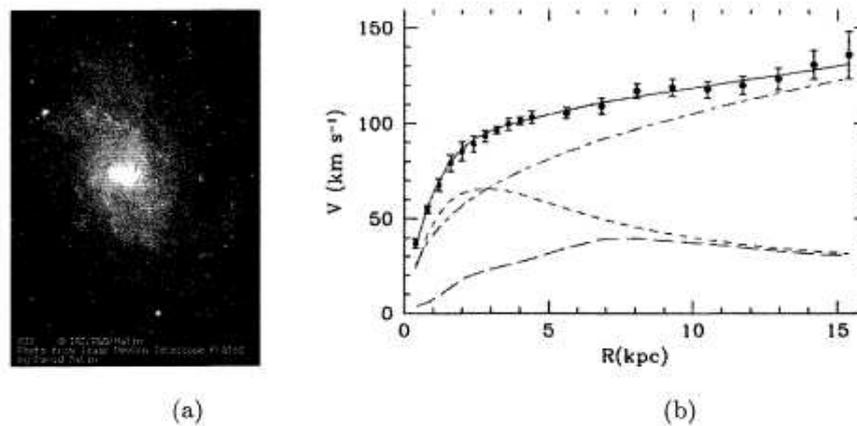


Figura B.4: [Reproducido de [125]] (a) Imagen de la galaxia espiral M33. La región interior más brillante tiene un radio de varios  $kpc$ . (b) Curvas de rotación de M33 [126]. Los puntos con barras de error provienen de la línea de 21-cm de hidrógeno neutral. La línea sólida es el modelo ajustando los datos. Las diferentes contribuciones a la curva de rotación total son: el halo de materia oscura (línea discontinua de puntos), el disco estelar (línea discontinua corta), y gas (línea discontinua larga). A radios grandes la materia oscura domina.

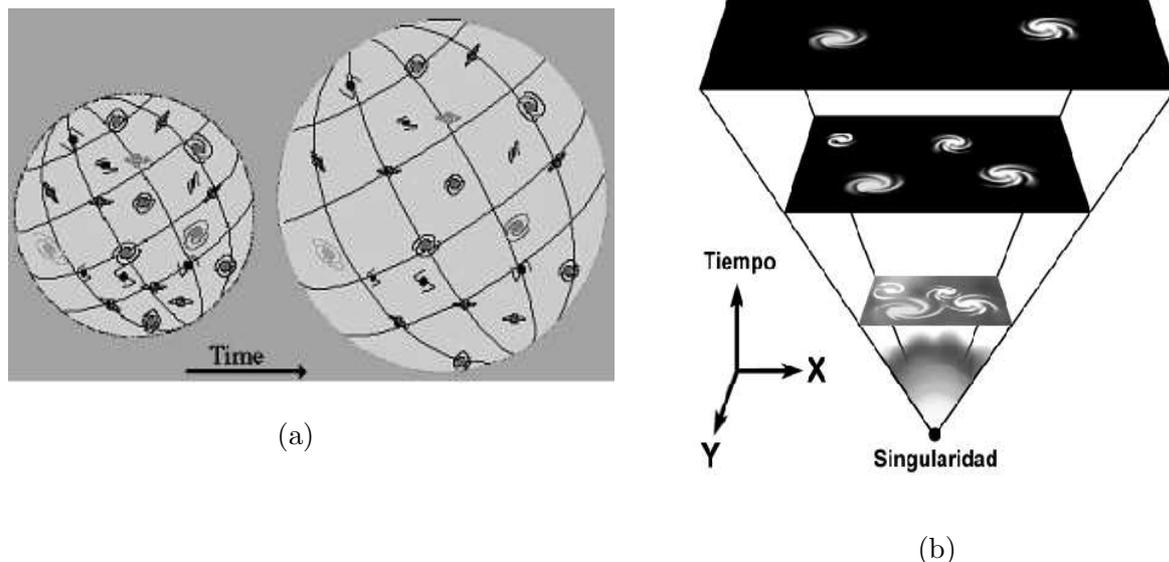


Figura B.5: (a) Modelo 2D de Universo isotrópico y homogéneo en expansión. (b) Modelo 3D del Universo en expansión desde la singularidad inicial [<http://www.das.uchile.cl/~mhamuy/courses/AS42B/tema2.html>].

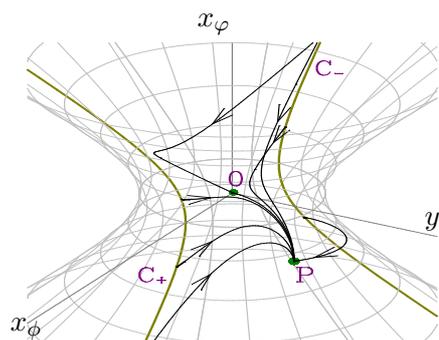


Figura B.6: Trayectorias en el espacio de fases para el modelo quintasma con  $m = 0.5$  y  $n = 0.6$ .

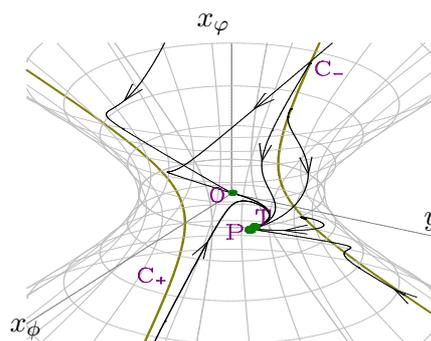


Figura B.7: Trayectorias en el espacio de fases para el modelo quintasma con  $m = 0.75$  y  $n = 0.05$ .

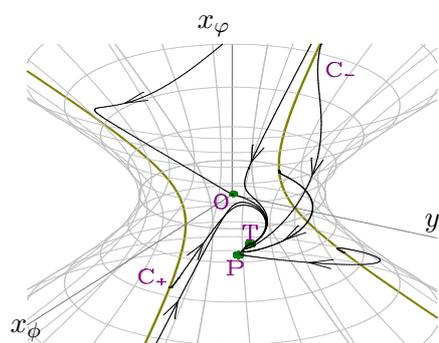


Figura B.8: Trayectorias en el espacio de fases para el modelo quintasma con  $m = 0.9$  y  $n = 0.4$ .

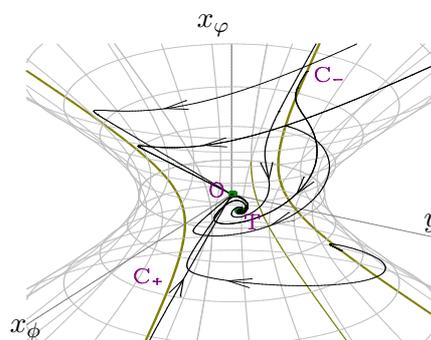


Figura B.9: Trayectorias en el espacio de fases para el modelo quintasma con  $m = 2$  y  $n = 0.5$ .

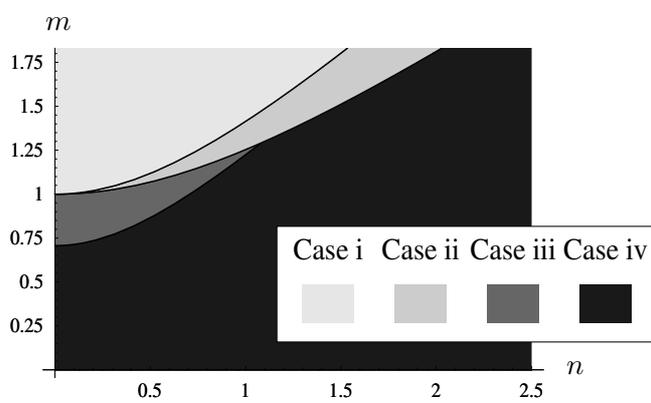


Figura B.10: Regiones en el plano  $(n, m)$  representando los cuatro casos referidos a las condiciones de existencia y el carácter dinámico de los puntos críticos  $T$  y  $P$ .

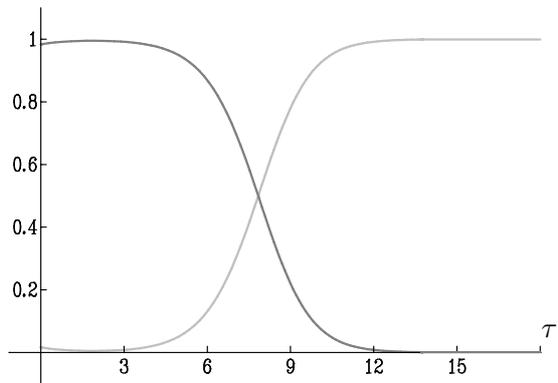


Figura B.11: Comportamiento típico de las densidades de energía fraccionales en el caso en el que el atractor fantasma existe. Las líneas gris oscura y gris clara se refieren a  $\Omega_m$  y  $\Omega_{de}$  respectivamente.

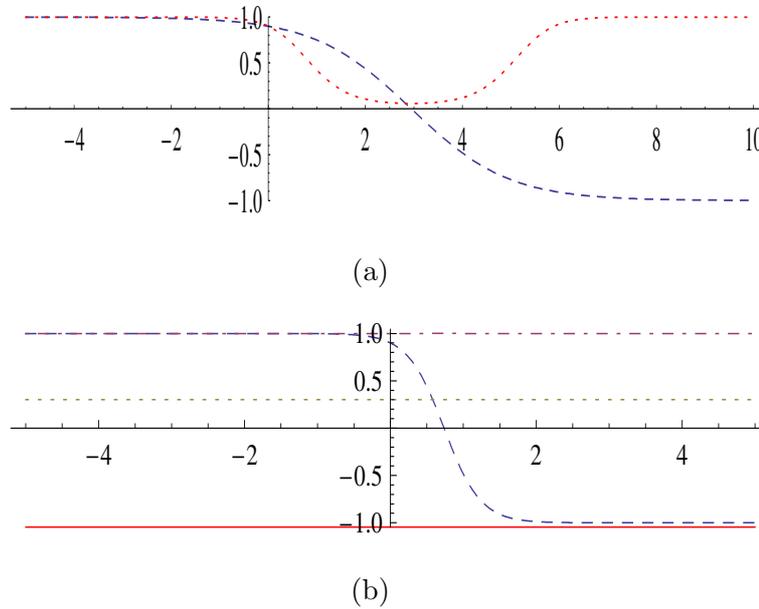


Figura B.12: El colapso en cosmología quintasma con curvatura positiva para los valores de los parámetros  $m = 0.7$ ,  $n = 0.3$  y  $\gamma = 1$ . En (a) hemos seleccionado las condiciones iniciales  $Q_0(0) = \hat{\Omega}(0) = 0.9$ , y  $\hat{U}_\phi(0) = \hat{U}_\varphi(0) = \hat{W}(0) = 0$ . La línea discontinua (azul) representa la evolución de  $Q_0$  vs  $\tau$  (observar que  $Q_0$  evoluciona desde 1 hasta  $-1$ , y eventualmente toma valor cero). La línea de puntos (roja) representa  $\hat{\Omega}$  vs  $\tau$ . Este ejemplo ilustra la existencia de una solución FRW cerrada sin campo quintasma comenzando en una singularidad de big-bang en  $+\hat{F}$  y recolapsando en un “big-crunch” en  $-\hat{F}$ . En (b) hemos escogido las condiciones iniciales  $Q_0(0) = 0.9$ ,  $\hat{\Omega}(0) = 0$  y  $\hat{U}_\phi(0) = -\sqrt{1 + \hat{U}_\varphi(0)^2}$  con  $\hat{U}_\varphi(0) = 0.3$ . La línea discontinua (azul) denota  $Q_0$  vs  $\tau$ . Observar que  $Q_0$  va desde el valor 1 hasta  $-1$  (o sea, el modelo colapsa). La línea discontinua-puntuada denota la evolución de  $\hat{U}_\phi^2 - \hat{U}_\varphi^2$  vs  $\tau$  (el cual es idénticamente igual a 1). La línea puntada (amarilla) denota el valor de  $\hat{U}_\phi$  vs  $\tau$  y la línea recta (roja) denota el valor de  $\hat{U}_\varphi$  vs  $\tau$ . esto ilustra la existencia de órbitas del tipo  $+\hat{K}_- \rightarrow -\hat{K}_-$ . Escogiendo el valor inicial  $\hat{U}_\phi(0) = \sqrt{1 + \hat{U}_\varphi(0)^2}$ , con las mismas condiciones iniciales para el resto de las variables, se obtiene una órbita del tipo  $+\hat{K}_+ \rightarrow -\hat{K}_+$ . Estas son soluciones comenzando en y recolapsando hacia una singularidad (dada por una cosmología CESM).

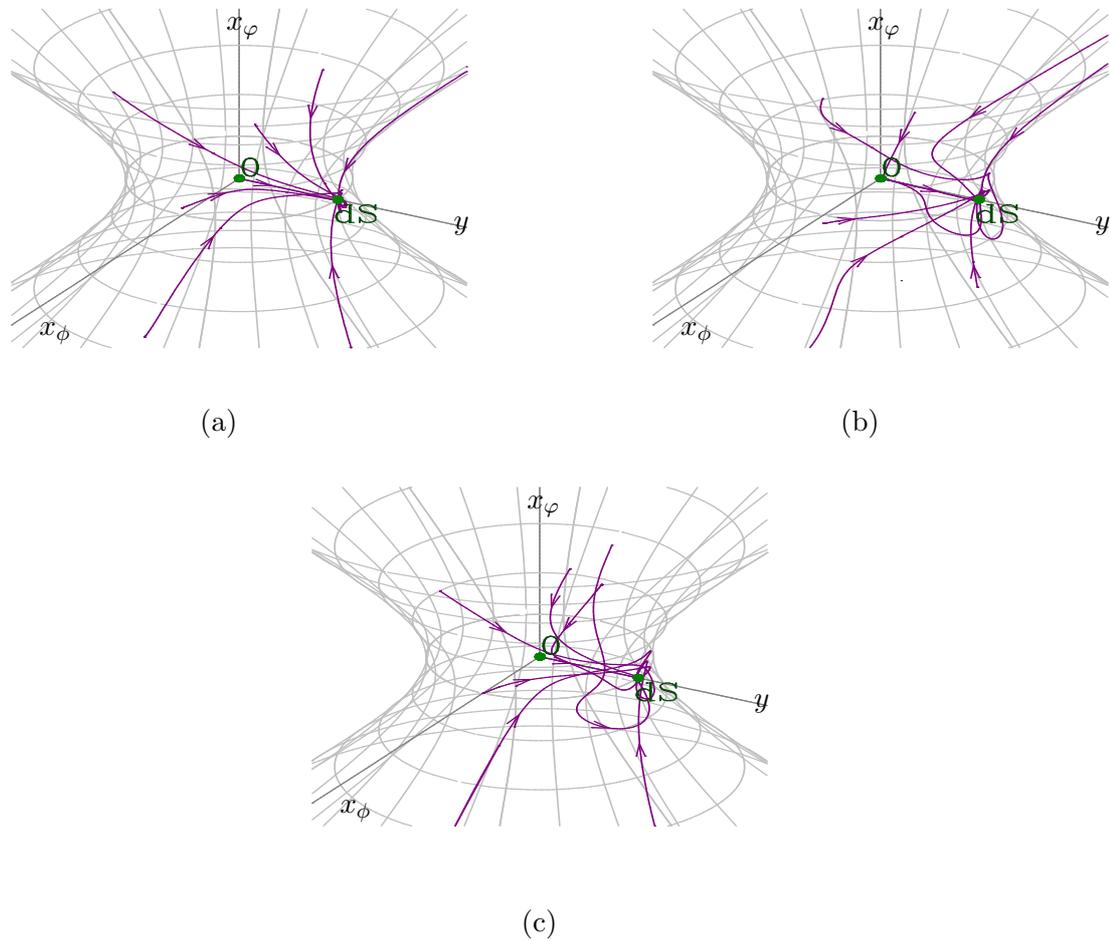


Figura B.13: Proyecciones sobre el hiperboloide de algunas órbitas en espacio de fase  $\Psi$  para diferentes valores de  $M$ ,  $m$ ,  $g$ , y  $\lambda$ :  $M = 4$ ,  $m = 3$ ,  $g = 2$ ,  $\lambda = 2$  (a);  $M = 2$ ,  $m = 1.5$ ,  $g = 2$ ,  $\lambda = 1.3$  (b) y  $M = 4$ ,  $m = 5$ ,  $g = 2$ , y  $\lambda = 3.5$  (c). El punto  $dS$  representa el atractor de de Sitter. Todas las órbitas representadas se obtuvieron fijando los valores iniciales de los campos escalares a:  $\phi(\tau = 0) = 0.20$  y  $\varphi(\tau = 0) = 0.19$ .

# Apéndice C

## Tablas

Tipo de Energía	$\rho(a)$	$a(t)$
Polvo	$a^{-3}$	$t^{2/3}$
Radiación	$a^{-4}$	$t^{1/2}$
Constante Cosmológica	constante	$e^{Ht}$

Tabla C.1: Resumen del comportamiento de las fuentes más importante de energía en Cosmología. El comportamiento del factor de escala se aplica solo al caso del universo plano; el comportamiento de las densidades de energía es general.

Modelo	Densidad Lagrangiana	Ecuaciones de Euler-Lagrange (caso homogéneo)
Quintaesencia	$\mathcal{L}_\phi = -V(\phi) + X$	$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0$
Taquión	$\mathcal{L}_\phi = -V(\phi)\sqrt{1 - 2X}$	$\frac{\ddot{\phi}}{1-\dot{\phi}^2} + 3H\dot{\phi} + \frac{1}{V}\frac{dV}{d\phi} = 0$
Energía fantasma	$\mathcal{L}_\phi = -V(\phi) - X$	$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{dV}{d\phi} = 0$
K-esencia	$\mathcal{L}_\phi = L(\phi, X)$ $L$ no lineal en $X$	$\left(\frac{\partial L}{\partial X} + 2X\frac{\partial^2 L}{\partial X^2}\right)\ddot{\phi} + \frac{\partial L}{\partial X}(3H\dot{\phi}) + \frac{\partial^2 L}{\partial \phi \partial X}\dot{\phi}^2 - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$

Tabla C.2: Modelos para la EO basados en campos escalares ( $X \equiv -\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi$ ).

Etiqueta	Coordenadas: ( $x_\phi, x_\varphi, y, \Omega$ )	Existencia	Valores propios
$\pm K_\pm$	$(\pm\sqrt{1+x_\varphi^{*2}}, x_\varphi^*, 0, 0)$	All $m$ and $n$	$\frac{4}{3}\epsilon, 0, \epsilon(1-nx_\varphi - mx_\phi), \epsilon(2-\gamma)$
$\pm M$	$(0, 0, 0, 0)$	All $m$ and $n$	$-\frac{2}{3}\epsilon[\times 2], \frac{1}{3}\epsilon, -(\gamma - \frac{2}{3})\epsilon$
$\pm F$	$(0, 0, 0, 1)$	All $m$ and $n$	$\frac{\gamma}{2}\epsilon, (\frac{\gamma}{2} - 1)\epsilon[\times 2], (\gamma - \frac{2}{3})\epsilon$
$\pm SF$	$(m, -n, \epsilon\sqrt{1-\delta}, 0)$	$\delta < 1$	$-2(\frac{1}{3} - \delta)\epsilon, -(1-\delta)\epsilon[\times 2], (2\delta - \gamma)\epsilon$
$\pm CS$	$(\frac{m}{3\delta}, -\frac{n}{3\delta}, \frac{\epsilon\sqrt{2}}{3\sqrt{\delta}}, 0)$	$\delta > \frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}\epsilon, (\frac{2}{3} - \gamma)\epsilon, -\frac{1}{3}(\epsilon \pm \sqrt{\frac{4}{3\delta} - 3})$
$\pm MS$	$(\frac{m\gamma}{2\delta}, -\frac{n\gamma}{2\delta}, \frac{\epsilon\sqrt{(2-\gamma)\gamma}}{2\sqrt{\delta}}, \sqrt{1 - \frac{\gamma}{2\delta}})$	$\delta > \frac{\gamma}{2}$	$-(\frac{2}{3} - \gamma)\epsilon, (-1 + \frac{\gamma}{2})\epsilon, \lambda^\pm$

Tabla C.3: Puntos críticos del sistema 3.2.13. Hemos usado las notaciones  $\delta = m^2 - n^2$ ,  $\lambda^\pm = -\frac{1}{4}\left((2-\gamma)\epsilon \pm \sqrt{(2-\gamma)\left(2-9\gamma + \frac{4\gamma^2}{\delta}\right)}\right)$ .  $[\times s]$  significa que el correspondiente valor propio tiene multiplicidad  $s$ . Los subíndices en la etiqueta que identifica el punto crítico tienen el siguiente significado: el subíndice a la izquierda (denotado por  $\epsilon = \pm 1$ ) indica cuando el modelo cosmológico está en expansión (+) o en contracción (-); el subíndice a la derecha denota el signo de  $x_\phi$  (o sea, el signo de  $\dot{\phi}$ ) y es representado por el símbolo  $\pm$ . Los puntos  $\pm K_\pm, \pm F, \pm SF, \pm MS$  son puntos críticos asociados a modelos FRW planos ( $k = 0$ ) el cual constituye un conjunto invariante de este caso más general. Para el caso  $k = 0$ , los valores propios de estos puntos críticos coinciden con los mostrados en la tabla salvo el primero de la izquierda.

Etiqueta	Param. eq. estado: $w$	Param. desaceleración: $q$	Densidades de energía: $\Omega_m, \Omega_{de}, \Omega_k$
$\pm K_{\pm}$	1	2	0, 1, 0
$\pm M$	no aplicable	0	0, 0, 1
$\pm F$	no aplicable	$-1 + \frac{3\gamma}{2}$	1, 0, 0
$\pm SF$	$-1 + 2\delta$	$-1 + 3\delta$	0, 1, 0
$\pm CS$	$-\frac{1}{3}$	0	$0, \frac{1}{3\delta}, 1 - \frac{1}{3\delta}$
$\pm MS$	$-1 + \gamma$	$-1 + \frac{3\gamma}{2}$	$1 - \frac{\gamma}{2\delta}, \frac{\gamma}{2\delta}, 0$

Tabla C.4: Parámetros cosmológicos asociados a los puntos críticos del sistema 3.2.13.

Restricciones	Atractor del pasado	Atractor del futuro
$\epsilon = -1$	$-SF$ si $\delta < \frac{1}{3}$ $-CS$ si $\delta > \frac{1}{3}$	$-K_{\pm}$ si $nU_{\varphi}^* \pm m\sqrt{1 + U_{\varphi}^{*2}} > -1$
$\epsilon = 1$	$+K_{\pm}$ si $nU_{\varphi}^* \pm m\sqrt{1 + U_{\varphi}^{*2}} < 1$	$+SF$ si $\delta < \frac{1}{3}$ $+CS$ si $\delta > \frac{1}{3}$

Tabla C.5: Resumen de atractores del sistema sistema 3.2.13. Estamos considerando la restricción  $1 \leq \gamma \leq 2$ . Existen más posibilidades si relajamos esta restricción. Observar que siempre que exista, la solución dominada por curvatura  $-CS$  ( $+CS$ ) es bien el atractor del pasado (del futuro) para  $\epsilon = -1$ , o sea, para modelos en contracción ( $\epsilon = 1$ , o sea, para modelos en expansión).

Restricciones	Atractor del pasado	Atractor del futuro
$\epsilon = -1$	$-SF$ si $\frac{2}{3} \leq \gamma \leq 2, 0 \leq \delta < \frac{1}{3}$ o $0 \leq \gamma \leq \frac{2}{3}, 0 \leq \delta < \frac{\gamma}{2}$ $-CS$ si $\frac{2}{3} < \gamma < 2, \delta > \frac{1}{3}$ $-MS$ si $0 < \gamma < \frac{2}{3}, \delta > \frac{\gamma}{2}$	$-K_{\pm}$ si $nU_{\varphi}^* \pm m\sqrt{1 + U_{\varphi}^{*2}} > -1$
$\epsilon = 1$	$+K_{\pm}$ si $nU_{\varphi}^* \pm m\sqrt{1 + U_{\varphi}^{*2}} < 1$	$+SF$ si $\frac{2}{3} \leq \gamma \leq 2, 0 \leq \delta < \frac{1}{3}$ o $0 \leq \gamma \leq \frac{2}{3}, 0 \leq \delta < \frac{\gamma}{2}$ $+CS$ if $\frac{2}{3} < \gamma < 2, \delta > \frac{1}{3}$ $+MS$ if $0 < \gamma < \frac{2}{3}, \delta > \frac{\gamma}{2}$

Tabla C.6: Resumen de atractores del sistema 3.2.13. Estamos considerando la restricción  $0 \leq \gamma \leq 2$ .

Etiqueta	$x_\phi$	$x_\varphi$	$y$	Existencia	$q$
$O$	0	0	0	Todo $m$ y $n$	$\frac{1}{2}$
$C_\pm$	$\pm\sqrt{1+x_\varphi^{*2}}$	$x_\varphi^*$	0	Todo $m$ y $n$	2
$P$	$m$	$-n$	$\sqrt{1-\delta}$	$\delta < 1$	$-1+3\delta$
$T$	$\frac{m}{2\delta}$	$-\frac{n}{2\delta}$	$\frac{1}{2\sqrt{\delta}}$	$\delta \geq 1/2$	$\frac{1}{2}$

Tabla C.7: Localización, existencia y factor de desaceleración de los puntos críticos del sistema 3.3.25, para  $m > 0$ ,  $n > 0$  y  $y > 0$ .

Nombre	Valores propios	Carácter dinámico	$w$
$O$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	inestable	indefinido
$C_\pm$	$(1, 0, 1 - nx_\varphi^* \mp m\sqrt{1+x_\varphi^{*2}})$	inestable	1
$P$	$(-1+2\delta, -1+\delta, -1+\delta)$	estable si $\delta < \frac{1}{2}$ , en otro caso inestable	$-1+2\delta$
$T$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}(1+\Delta), -\frac{1}{4}(1-\Delta))$	estable si $\Delta^2 < 0$ o si $1 > \Delta$ , inestable en otro caso	0

Tabla C.8: Valores propios, carácter dinámico y ecuación del parámetro de estado del sistema 3.3.25, con  $m > 0$  y  $n > 0$ . Usamos la notación  $\Delta = \sqrt{-7+4/(m^2-n^2)}$ ,  $\delta = m^2 - n^2$ .

Etiqueta	Coordenadas: ( $Q_0, \hat{U}_\phi, \hat{U}_\varphi, \hat{W}$ )	Existencia	Valores propios
$S_\pm$	$(0, \hat{U}_\phi, \hat{U}_\varphi, 0), \hat{U}_\phi^2 - \hat{U}_\varphi^2 = \frac{2-3\gamma}{3(2-\gamma)}$	$0 \leq \gamma \leq \frac{2}{3}$	$0, \pm\sqrt{2(2-3\gamma)}, -3n\tilde{U}_\varphi - 3m\hat{U}_\phi$
$\pm\hat{K}_\pm$	$(\epsilon, \pm\sqrt{1+U_\varphi^{*2}}, U_\varphi^*, 0)$	All $m$ and $n$	$4\epsilon, 0, 3(\epsilon - nU_\varphi - mU_\phi), 3(2-\gamma)\epsilon$
$\pm\hat{F}$	$(\epsilon, 0, 0, 0)$	Todo $m$ y $n$	$(3\gamma-2)\epsilon, \frac{3}{2}\gamma\epsilon, 3(\frac{\gamma}{2}-1)\epsilon[\times 2]$
$\pm\hat{S}F$	$(\epsilon, m\epsilon, -n\epsilon, \sqrt{1-\delta})$	$\delta < 1$	$-2(1-3\delta)\epsilon, -3(1-\delta)\epsilon[\times 2], 3(2\delta-\gamma)\epsilon$
$\pm\hat{C}S$	$(\sqrt{3\delta}\epsilon, \frac{m\epsilon}{\sqrt{3\delta}}, -\frac{n\epsilon}{\sqrt{3\delta}}, \sqrt{\frac{2}{3}})$	$0 < \delta < \frac{1}{3}$	$-2\sqrt{3\delta}\epsilon, -\sqrt{3\delta}\epsilon \pm \sqrt{4-9\delta}, (2-3\gamma)\sqrt{3\delta}\epsilon$
$\pm\hat{M}S$	$(\epsilon, \frac{m\gamma}{2\delta}, -\frac{n\gamma}{2\delta}, \frac{\sqrt{(2-\gamma)\gamma}}{2\sqrt{\delta}}, \sqrt{1-\frac{\gamma}{2\delta}})$	$\delta > \frac{\gamma}{2}$	$-(2-3\gamma)\epsilon, 3(-1+\frac{\gamma}{2})\epsilon, 3\lambda^\pm\epsilon$

Tabla C.9: Puntos críticos del sistema 3.4.37. Usamos el mismo convenio de signos y la misma notación que en la tabla C.3. Usaremos etiquetas con sombrero para distinguir del caso  $k = -1, 0$ . Si  $\gamma = \frac{2}{3}$ , el conjunto de puntos críticos,  $S_\pm$ , corresponde a soluciones estáticas. Cuando el flujo se restringe a los conjuntos  $Q_0 = \pm 1$ , los valores propios asociados a los puntos  $\pm\hat{F}$ ,  $\pm\hat{S}F$  y  $\pm\hat{M}S$  y a los conjuntos de puntos críticos  $\pm\hat{K}_\pm$ , son, en cada caso, los mismos mostrados, salvo el primero desde la izquierda.

Restricciones	Atractor del pasado	Atractor del futuro
$Q_0 = -1$	$-\hat{S}F$ si $0 \leq \gamma \leq 2, \delta < \frac{\gamma}{2}$ $-\hat{M}S$ si $0 < \gamma < 2, \delta > \frac{\gamma}{2}$	$-\hat{K}_{\pm}$ si $nU_{\varphi}^* \pm m\sqrt{1 + U_{\varphi}^{*2}} > -1$
$-1 < Q_0 < 0$	$-\hat{S}F$ si $\frac{2}{3} \leq \gamma \leq 2, \delta < \frac{1}{3}$ o $0 \leq \gamma \leq \frac{2}{3}, \delta < \frac{\gamma}{2}$ $-\hat{M}S$ si $0 < \gamma < \frac{2}{3}, \delta > \frac{\gamma}{2}$	como arriba
$0 < Q_0 < 1$	$+\hat{K}_{\pm}$ si $nU_{\varphi}^* \pm m\sqrt{1 + U_{\varphi}^{*2}} < 1$	$+\hat{S}F$ si $\frac{2}{3} \leq \gamma \leq 2, \delta < \frac{1}{3}$ o $0 \leq \gamma \leq \frac{2}{3}, \delta < \frac{\gamma}{2}$ $+\hat{M}S$ si $0 < \gamma < \frac{2}{3}, \delta > \frac{\gamma}{2}$
$Q_0 = 1$	como arriba	$+\hat{S}F$ si $0 \leq \gamma \leq 2, \delta < \frac{\gamma}{2}$ $+\hat{M}S$ si $0 < \gamma < 2, \delta > \frac{\gamma}{2}$

Tabla C.10: Resumen de los atractores del sistema 3.4.37.

Evento	Tiempo	Factor de escala	Redshift	Temp. (K)	Energía (eV)
Big-bang	0	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$
Planck	$< 5 \times 10^{-44} s$	-	-	$> 10^{32}$	$> 2 \times 10^{28}$
TOE	$5 \times 10^{-43} s$	$7 \times 10^{-85}$	$10^{84}$	$10^{32}$	$2 \times 10^{28}$
GUT	$10^{-36} s$	$7 \times 10^{-71}$	$10^{72}$	$10^{28}$	$2 \times 10^{24}$
Inflación	$10^{-36} - 10^{-34} s$	$7 \times 10^{-71} - 2 \times 10^{-27}$	$10^{72} - 10^{27}$	-	-
Desacople de neutrinos ( $\nu$ )	1s	$2 \times 10^{-10}$	$4 \times 10^{19}$	$9 \times 10^{19}$	$2 \times 10^6$
Nucleosíntesis	200s	$3 \times 10^{-9}$	$3 \times 10^8$	$8 \times 10^8$	$2 \times 10^5$
$\Omega_m = \Omega_R$	47000 años	$2.8 \times 10^{-4}$	3570	9730	2.2
Recombinación	240000 años	$7 \times 10^{-4}$	1370	3740	0.9
Desacople de fotones ( $\gamma$ )	350000 años	$9 \times 10^{-4}$	1100	3000	0.7
$\Omega_m = \Omega_{\Lambda}$	9.86 Giga años	0.75	0.33	3.6	$8 \times 10^{-4}$
Ahora	13.5 Giga años	1	0	2.725	$6 \times 10^{-4}$

Tabla C.11: Hitos importantes en la evolución del Universo (tomado de <http://www.das.uchile.cl/~mhamuy/courses/AS42A/AS42A.html>).