



Facultad de Matemática Física y  
Computación

---

Trabajo de Diploma

## **Modelación Matemática de Arrecifes Coralinos.**

Autor:

Fernando Enrique Machado Marcelo

Tutor:

Rolando Pedro Cárdenas Ortiz

Santa Clara 2009

---

# Agradecimientos

---

*No alcanzarían los agradecimientos para las personas que han estado involucradas en todo este proceso, pero citaré primeramente al trío pitagórico que tanto me han ayudado, sin los cuales este trabajo no sería posible.*

---

*También me llena de satisfacción darles todo mi amor a personas que me soportaron y me soportan en un momento de histeria, personas como mi mamá, mi papá, mi hermano.*

---

*También dar gracias a todos los profesores que de una manera u otra me formaron para convertirme en lo que soy y seré.*

---

*Existen dos personas que en mi vida son mi complemento con las cuales simplemente soy feliz, la primera es Claudia y la segunda Elizabeth.*

---

# Resumen

---

En esta tesis planteamos un modelo en ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden que describe la evolución en el tiempo de un arrecife coralino. Este sistema está conformado por tres grupos de especies que compiten por el espacio: algas césped, corales y macroalgas. En esta tesis nos planteamos el estudio del espacio de fase correspondiente a las ecuaciones del modelo. Las técnicas analíticas de la teoría de los sistemas dinámicos se combinan con la experimentación numérica con el propósito de investigar los estados asintóticos del sistema. Para el estudio numérico de las ecuaciones usamos un paquete de Wolfram Mathematica 6.0, llamado EquationTrekker. Éste permite, dada la ecuación diferencial, opcionalmente con parámetros, especificar condiciones iniciales solamente usando el ratón proporcionando una herramienta interactiva para investigar las soluciones de una ecuación diferencial así como otros tipos de ecuaciones que tienen soluciones, las cuales pueden verse como trayectorias. En la tesis describimos cómo puede emplearse esta herramienta computacional para la predicción del comportamiento futuro de los arrecifes coralinos de nuestro país, y así lograr un mejor manejo de estos ecosistemas.

# Índice general

Introducción.....	6
Capítulo 1: Modelación Biológica.....	1
1.1 Introducción a la teoría de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.....	1
1.2. Elementos de la ecología teórica.....	2
1.2.1. Dinámica poblacional para una especie.....	2
1.2.2. Dinámica de especies que interactúan .....	5
Capítulo2: Modelo de Arrecifes Coralinos.....	16
2.1. Introducción a los Arrecifes Coralinos .....	16
2. 2. Introducción al Modelo.....	18
2.2.1. Modelo.....	21
2.2.2. Solución del Modelo.....	23
Conclusiones .....	38
Recomendaciones .....	39
Bibliografía .....	40

---

---

## Introducción

Las ecuaciones diferenciales facilitan extraordinariamente el análisis de relaciones entre ciertas funciones y sus derivadas las cuales caracterizan determinados procesos de la naturaleza. Es tan amplio el campo de sus aplicaciones, que lo práctico llega a tener tanta importancia como el estudio puramente teórico.

Existen numerosos libros dedicados a la modelación de ecosistemas biológicos, en los cuales las ecuaciones diferenciales ordinarias juegan un papel muy importante. La inmensa mayoría de estos textos dan una representación adecuada de cada uno de los problemas que se modelan, a pesar de que, como cada uno de ellos plantea la modelación de ecosistemas biológicos es un problema que tiende a la realidad en el cual en algunos casos nos resulta una sorpresa y en otros solo la realidad absoluta.

El modelo que investigaremos en esta tesis se enmarca en la modelación de ecosistemas marinos y constituyen solo una pequeña parte de la inmensa variedad de modelos que pueden encontrarse en la literatura sobre el tema.

Nos proponemos entonces los siguientes objetivos:

- Realizar un estudio de la estructura matemática de un modelo de arrecife coralino.
- Implementar computacionalmente el modelo bajo estudio, de manera amistosa para el usuario no especializado en programación.

## Capítulo 1: Modelación Biológica

### ***1.1 Introducción a la teoría de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.***

En este epígrafe hacemos una introducción breve del tema de los sistemas de dos ecuaciones diferenciales en derivadas ordinarias (EDOs). Los conceptos y terminologías que abordaremos serán utilizados con posterioridad en la tesis.

Consideremos el sistema de dos EDOs:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) \quad , \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

Las curvas solución de este sistema son las soluciones de la ecuación

$$\frac{dx}{dy} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$$

Se definen los puntos singulares del sistema a los ceros de las funciones

$$f(x_s, y_s) = g(x_s, y_s) = 0$$

Mediante la traslación  $x \rightarrow x - x_s, y \rightarrow y - y_s$  el análisis se reduce al estudio del punto  $(0,0)$  el cual

es un punto singular de la ecuación transformada. Supongamos, sin perder generalidad, que la ecuación

$\frac{dx}{dy} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$  posee un punto singular en el origen lo que implica que:

$$f(x, y) = g(x, y) = 0 \Rightarrow x = 0, y = 0$$

Si  $f$  y  $g$  son analíticas en  $(0,0)$  podemos hacer una expansión de  $f$  y  $g$  en series de Taylor y reteniendo los términos lineales tenemos que

$$\frac{dx}{dy} = \frac{ax + by}{cx + dy} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}_{(0,0)}$$

Esto es equivalente al sistema

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

La obtención de una base del espacio solución de este sistema está relacionada estrechamente con la solución del problema algebraico de determinar los valores de los valores propios de la matriz A.

Sean  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  los valores propios de A esto es

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2} \left( a + d \pm \left[ (a + d)^2 - 4 \det A \right]^{1/2} \right)$$

Tenemos entonces que las soluciones de del sistema son de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 v_1 \exp[\lambda_1 t] + c_2 v_2 \exp[\lambda_2 t]$$

Donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes arbitrarias y  $v_1, v_2$  son los vectores propios de A correspondientes a los valores propios  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  respectivamente que vienen dados por

$$v_i = (1 + p_i^2)^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 \\ p_i \end{pmatrix}, \quad p_i = \frac{\lambda_i - a}{b}, \quad b \neq 0, \quad i = 1, 2$$

Eliminando t de la expresión anterior a esta tenemos que el plano  $(x, y)$ , o espacio de estados, puede particionarse en curvas llamadas órbitas. Estas no son otra cosa que la imagen en el plano  $(x, y)$  de las curvas solución del sistema. Si los valores propios son iguales la solución es proporcional a

$$(c_1 + c_2 t) \exp[\lambda t].$$

Ahora daremos una descripción de los posibles tipos de puntos singulares que posee el sistema en dependencia de los valores propios

(I) Si  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son reales y distintos:

(a)  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  tienen el mismo signo. Los vectores propios típicos  $v_1$ ,  $v_2$  son ilustrados en la figura a.

Supongamos que  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$  entonces por ejemplo  $c_2 = 0, c_1 \neq 0$  y  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 v_2 \exp[\lambda_1 t]$

entonces la solución en el plano simplemente se mueve por  $v_1$  en el origen cuando  $t \rightarrow \infty$  en la dirección que se muestra en la figura a junto con PO si  $c_1 > 0$  y junto con QO si  $c_1 < 0$ .

En este caso toda solución tiende a  $(0,0)$  cuando  $t \rightarrow \infty$  recuérdese que cuando  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ ,  $\exp[\lambda_1 t] = o(\exp[\lambda_2 t])$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y entonces tenemos que

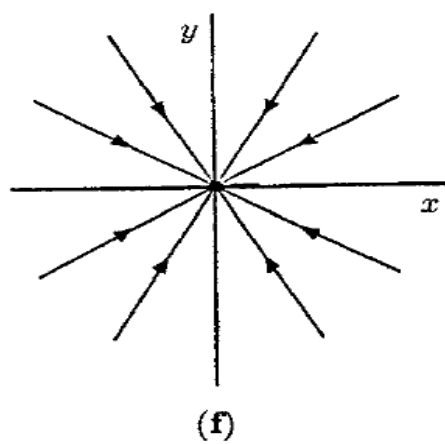
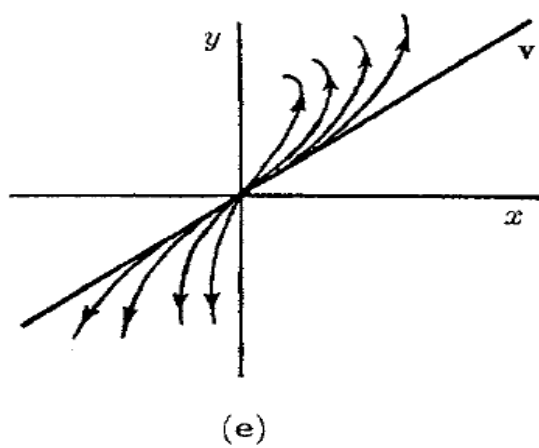
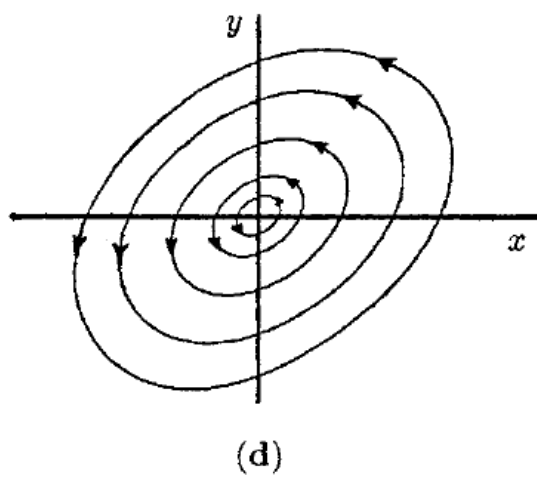
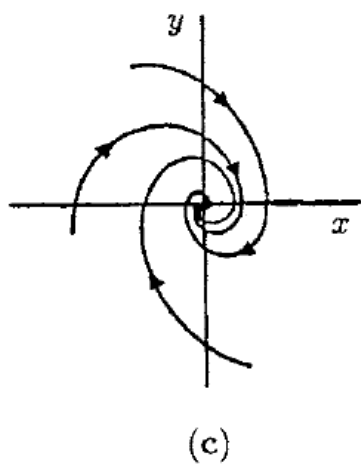
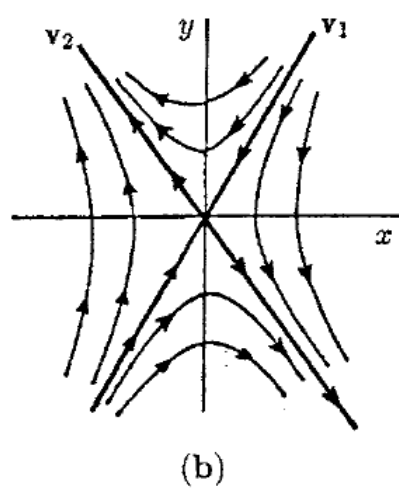
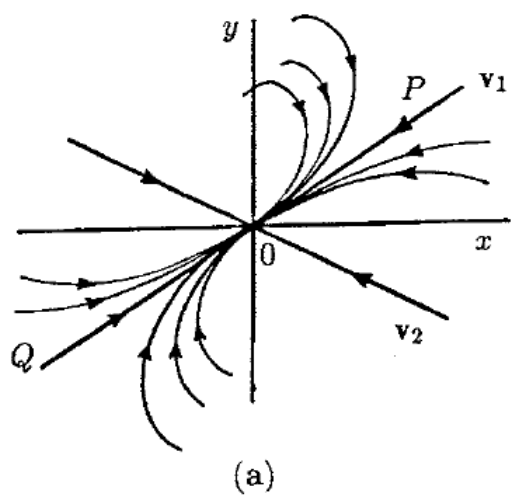
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \approx c_1 v_1 \exp[\lambda_2 t] \text{ cuando } t \rightarrow \infty$$

Como precisamente vemos en la figura a. Esto es llamado en nodo (Tipo 1) singular. Cuando  $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$  es un nodo estable recuérdese que todas las trayectorias tienden a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ . Si  $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$  esto es un nodo inestable, aquí  $(x, y) \rightarrow (0,0)$  cuando  $t \rightarrow -\infty$ .

El caso siguiente caso es el caso

(b)  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  tienen signos diferentes. Supongamos por ejemplo que  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$





Entonces  $v_1 \exp[\lambda_1 t] \rightarrow 0$  junto con  $v_1$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y cuando  $v_2 \exp[\lambda_2 t] \rightarrow 0$  junto con  $v_2$  cuando  $t \rightarrow -\infty$ .

Existen diferentes direcciones en  $v_1$ ,  $v_2$  la solución necesita pasar por el punto  $(0,0)$  como se muestra en la figura b. Esto es un punto singular que siempre es inestable, excepto cuando  $v_1$  recibe una pequeña perturbación desde el punto  $(0,0)$  entonces tenemos que ella crece exponencialmente.

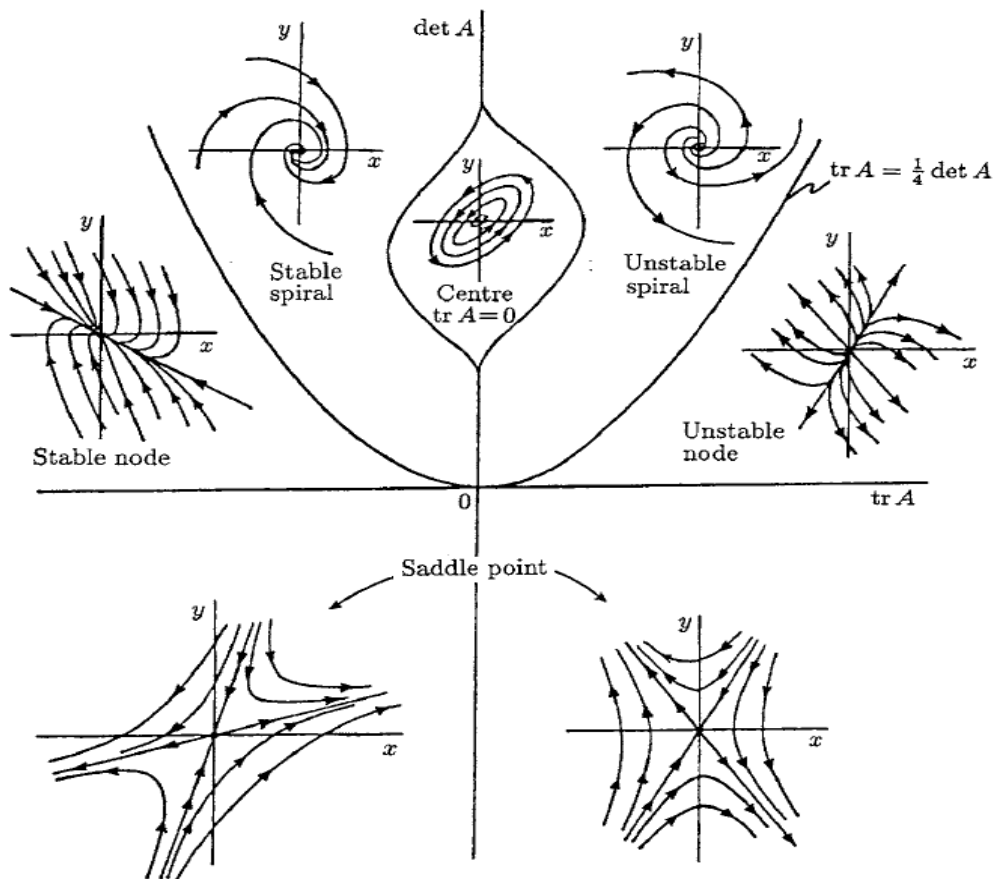
Caso (I I)  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son complejos:  $\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\beta$ ,  $\beta \neq 0$ . Entonces la solución involucra la  $\exp[\alpha t]$ ,  $\exp[\pm i\beta t]$  que implica una oscilación alrededor del punto  $(0,0)$ .

- (a) Cuando  $\alpha \neq 0$  aquí tenemos una espiral que es estable si  $\alpha < 0$  e inestable si  $\alpha > 0$  como se observa en la figura c que ilustra una singularidad de espiral.
- (b)  $\alpha = 0$ . En este caso las curvas son elipses. Esta singularidad es llamada singularidad central y la podemos ver en la figura d. Central no es estable en el uso de la palabra, una pequeña perturbación en el plano sobre una curva solo nos da otra solución del sistema. Mostremos un diagrama que reúne una serie de casos en los que uno se puede ver involucrado.

Caso (I I I)  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . Aquí los valores propios no son distintos.

- (a) En general las soluciones ahora involucran términos como  $t \exp[\lambda t]$  y existe solo un vector propio  $v$  cuando la solución tiende a  $(0,0)$ . Donde  $t$  en la expresión  $t \exp[\lambda t]$  modifica la solución junto con el punto  $(0,0)$ . Es llamado un nodo (Tipo 2) su singularidad viene ilustrada en la figura e.
- (b) Si la solución no contiene la expresión  $t \exp[\lambda t]$  podemos plantear que la singularidad puede ser estable o no en dependencia del signo de  $\lambda$ . Trayectorias en la vecindad de una de estas singularidades se muestran en la figura f.

Las singularidades dependen de  $a, b, c$  y  $d$  en la matriz  $A$ . En la figura que mostramos a continuación se resumen los resultados en términos de la traza del determinante.



## **1.2. Elementos de la ecología teórica.**

La propuesta de modelos para poblaciones biológicas, cada vez más realistas, que requieran el uso de métodos matemáticos para su investigación es cada vez más frecuente en la práctica. En modelos de poblaciones humanas, de crecimiento de bacterias, de expansiones de virus, de competencia entre especies y de muchos más, se pone de manifiesto el intercambio de procesos dinámicos entre especies o poblaciones. Muchas de estas relaciones complejas en poblaciones biológicas se pueden describir mediante sistemas de ecuaciones diferenciales. En esta tesis estudiaremos una subclase de estos los cuales se describen mediante sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

El estudio del “cambio” en poblaciones tiene una larga historia. En 1202, un ejercicio en un libro de aritmética escrito por Leonardo de Pisa, incluía la construcción de un modelo matemático para el crecimiento de una población de conejos. La ecología básicamente estudia la relación que existe entre las especies y el medio ambiente. Por ejemplo pueden citarse al sistema presa-depredador donde la competencia es un factor importante; la evolución y resistencia de una especie a cierto pesticida; la dinámica en la sociedad; el comportamiento de un sistema de especies; los sistemas de plantas y herbívoros, entre otros.

### **1.2.1. Dinámica poblacional para una especie**

Los modelos de una sola especie tienen una gran relevancia para el estudio en el laboratorio, en particular en el mundo real pueden reflejar una pequeña porción del efecto que tiene la dinámica de esta población. Estos modelos están contruidos sobre la base de la variación de una variable tiempo  $t$  que produce cambios en la especie ( $N(t)$ ). Esta variación en la población se puede modelar mediante una ecuación diferencial que tiene la forma:

$$\frac{dN}{dt} = \text{Nacimiento} - \text{Muerte} - \text{Migración}$$

Esta es una ecuación conservativa para una población. Existen modelos simples que no poseen migración en la que los términos de nacimiento y muerte son proporcionales a  $N$ , este es el caso de la siguiente ecuación:

$$\frac{dN}{dt} = bN - dN \quad \Rightarrow \quad N(t) = N_0 e^{(b-d)t}$$

Donde  $b$  y  $d$  son constantes positivas y la condición inicial de la población es  $N(0) = N_0$ . Si  $b > d$  la población crece exponencialmente y cuando  $b < d$  esta muere. Este modelo fue creado por Malthus, que en 1798 sonaba algo surrealista.

Para cuando la corrida creciera exponencialmente debería de existir algún ajuste, este se produjo con Verhulst quien propuso un límite de procesos operativos para cuando la población se volviera demasiado grande. Él sugirió la siguiente ecuación:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (1.1)$$

Donde  $r$  y  $K$  son constantes positivas. Esta es la llamada ecuación de la logística en una población, en la cual el término  $rN \left(1 - \frac{N}{K}\right)$  es el nacimiento per cápita que es un término que depende netamente de  $N$ . La constante  $K$  es la capacidad de cambio que posee esta población ante el medio en el que esta se desenvuelve. Existen dos estados de equilibrio de la esta ecuación, uno es el caso trivial cuando  $N = 0$  y otro es cuando  $N = K$  estos son los puntos donde  $dN/dt = 0$ .  $N = 0$  es un valor inestable dado que  $\left. \frac{d \left( rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \right)}{dN} \right|_{N=0} = r > 0$ . Así  $N$  crece exponencialmente

para cualesquiera pequeños valores iniciales. El otro punto de equilibrio es cuando  $N = K$ . Este es un punto estable dado que  $\left. \frac{d \left( rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \right)}{dN} \right|_{N=K} = -r < 0$ . Cuando  $t$  tiende a infinito,  $N$  tiende a  $K$ . La

constante  $K$  determina el comportamiento asintótico del modelo y el parámetro  $r$  representa los ritmos de producción o de crecimiento de la población que se puede incorporar con el tiempo con una transformación de  $t$  a  $rt$ .  $1/r$  representa una escala representativa del peso del modelo al cambio de población.

Si  $N(0) = N_0$  entonces la solución de (1.1) es

$$N(t) = \frac{N_0 K e^{rt}}{[K + N_0(e^{rt} - 1)]} \rightarrow K \quad \text{Cuando} \quad t \rightarrow \infty$$

Este tipo de comportamiento cualitativo se muestra en la Figura 1:

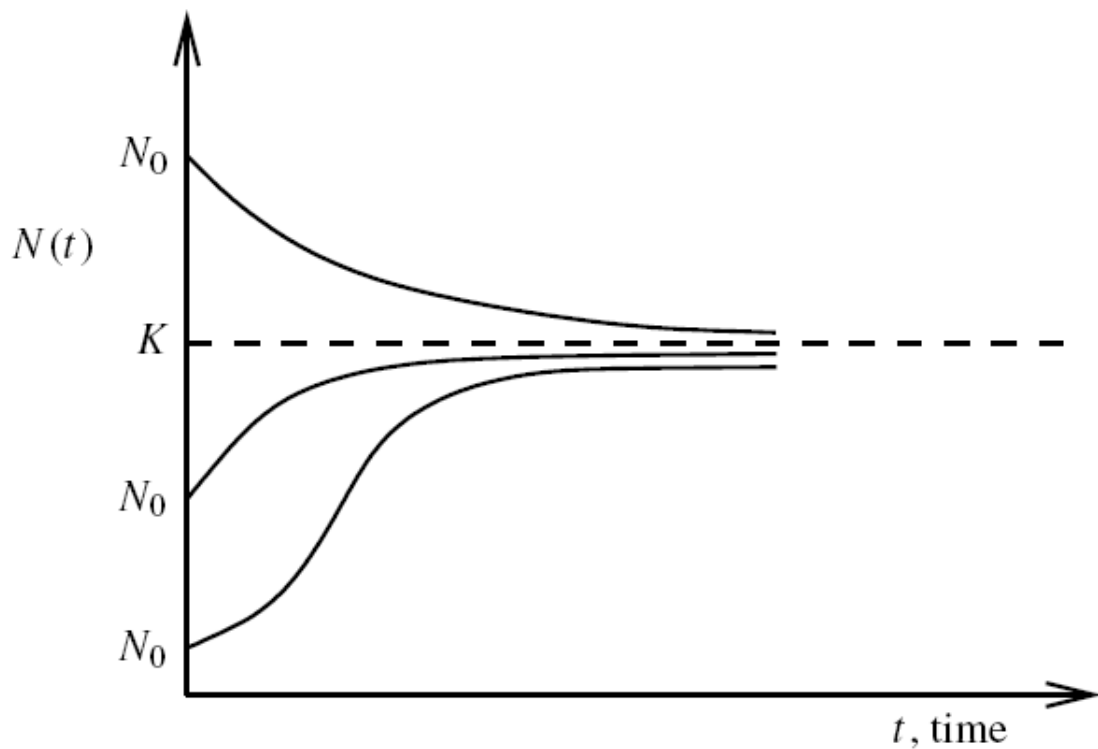


Figura: 1

Si  $N_0 < K$  tenemos que  $N(t)$  simplemente crece monótonamente hacia  $K$ . Cuando  $N_0 > K$  esta decrece monótonamente hacia  $K$ . En el caso en que  $N_0 > K$  esto implica que el nacimiento per cápita de la población es negativo. Este modelo vino a cubrir clases de poblaciones en las que el modelo tuviera una densidad de población dada.

Posteriormente se trabajaron modelos con la misma tónica de la ecuación de la logística teniéndose resultados muy favorables.

### 1.2.2. Dinámica de especies que interactúan

Uno de los modelos que más interés posee en nuestra discusión, es aquel que describe las interacciones que pueden existir entre varios tipos de poblaciones o de especies. La existencia de interacciones entre especies podría hacernos pensar en estructuras demasiado complicadas para lograr modelos que reflejen, aunque sea, un segmento de la realidad. Se pueden considerar desde la interacción de dos especies hasta una cantidad mayor de especies. Existen tres tipos de modelos de interacción entre especies. Primero, si el término de crecimiento de una población crece, este decrece en la otra población es llamado depredación. Segundo, si el término de crecimiento de ambas poblaciones decrece, esto es competencia y por ultimo si cada población crece esto es llamado mutualismo o simbiosis. Este modelo es conocido como el modelo de Lotka – Volterra, el modelo más sencillo es el caso en el que tenemos solo dos especies y viene expresado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= N(a - bP) \\ \frac{dP}{dt} &= P(cN - d)\end{aligned}$$

Donde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  son constantes positivas y  $N$  es la presa y  $P$  es el depredador.

Se asume en el modelo que:

La presa, en ausencia de cualquier depredador, crece abundantemente de un modo Maltusiano. Este sería el término  $aN$  en el sistema de ecuaciones. El efecto del depredador sobre la presa es el de reducirla y este término viene dado por  $-bNP$ , y en la ausencia de cualquier presa llegaríamos a la muerte del depredador que sería el término  $-dP$ . La presa contribuye al depredador con un término de crecimiento que es el que toma forma  $cNP$ .

Veremos también que este modelo tiene serios problemas para afrontar la realidad objetiva. Uno de los primeros pasos en el análisis de este modelo es redimensionarlo de la forma siguiente:

Primero introducimos nuevas variables, parámetros y calibraciones de la variable temporal dados por

$$u(\tau) = \frac{cN(t)}{d}, \quad v(\tau) = \frac{bP(t)}{a}, \quad \tau = at, \quad \alpha = d/a.$$

Así el sistema se transforma entonces en el sistema siguiente:

$$\frac{du}{d\tau} = u(1-v), \quad \frac{dv}{d\tau} = \alpha v(u-1). \quad (1.2)$$

Que posee un punto singular en  $u=v=0$  y en  $u=v=1$  después de efectuar los cálculos pertinentes podemos obtener espacio de trayectorias que viene dado por la ecuación

$$\alpha u + v - \ln u^\alpha v = H, \quad (1.3)$$

Donde  $H > H_{\min}$  es una constante tal que  $H_{\min} = 1 - \alpha$  es el mínimo de  $H$  sobre el plano  $(u, v)$  y ocurre cuando  $u = v = 1$ . Para un  $H > 1 - \alpha$ , la trayectoria de la ecuación en el plano, es cerrada como se ve en la Figura 2



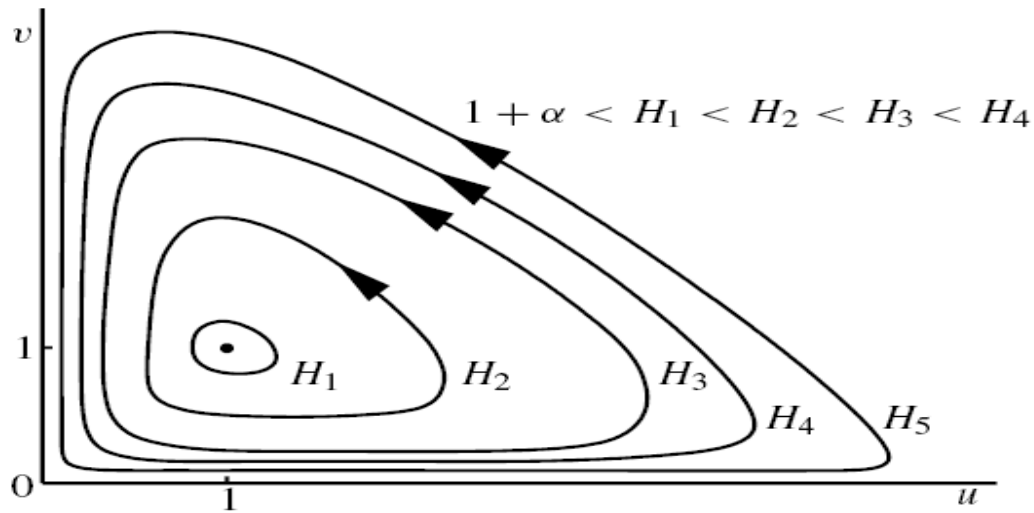


Figura: 2

Las condiciones iniciales,  $u(0)$  y  $v(0)$ , determinan la constante  $H$  en la ecuación (1.3) y por lo tanto las trayectorias como indica la figura. En la figura 3 se muestran soluciones periódicas  $u(\tau)$  y  $v(\tau)$  típicas. Se puede apreciar que una trayectoria cerrada en el plano  $u, v$  implica soluciones periódicas en  $\tau$  para  $u$  y  $v$

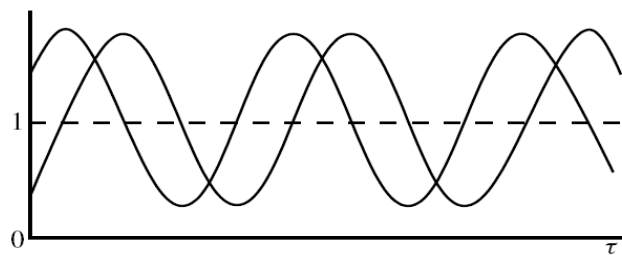


Figura: 3

De (1.2) podemos decir inmediatamente que  $u$  tiene un punto de viraje cuando  $v=1$  y  $v$  posee uno cuando  $u=1$ .

En el modelo de Lotka - Volterra las soluciones no son estructuralmente estables como se aprecia en la figura 2. Esto significa que cambios pequeños en las condiciones iniciales o en los parámetros del

sistema produce cambios sustanciales en las soluciones. Supongamos, por ejemplo que  $u(0)$  y  $v(0)$  son tal que  $u$  y  $v$  para  $\tau > 0$  esta en la trayectoria cerradas  $H_4$  en el plano  $u$  y  $v$ . Entonces cualquier pequeña perturbación moverá la solución en otra trayectoria, una pequeña perturbación podría tener un marcado efecto. Este es un problema que posee cualquier sistema con una primera integral como (1.3), que representa una trayectoria cerrada en el plano  $u$  y  $v$ . Estos sistemas son llamados sistemas conservativos. Estos son poco usuales en una gran cantidad de modelos donde existe una interacción real de la población.

Existen muchos contratiempos para la aplicación del modelo de Lotka – Volterra al mundo real en virtud de la inestabilidad del sistema. Este modelo tiene valor explicativo sobre cómo es un modelo donde existe interacción entre especies y más allá de su valor práctico sirve para que se revelen temas importantes que uno debe cuestionarse en un modelo de interacción entre especies. La presentación de un modelo de presa-depredador más realista es un tema que debe tomarse entonces con una mayor seriedad.

Una solución con ciclo límite es una trayectoria cerrada como en el caso de la presa y el depredador. Una trayectoria ciclo límite estable es aquella en que cualquier pequeña perturbación en la trayectoria decaiga a cero. Una de las cuestiones asumidas en el modelo de Lotka – Volterra, que tiene un carácter surrealista, es que la presa crece en ausencia de depredador en la forma descrita en el modelo que. El término de ruptura es el término de la densidad per cápita que posee cada una de las poblaciones. Para ser más realistas esta densidad debe depender de tanto la la densidad de la presa como de la del depredador como en las siguientes ecuaciones:

$$\frac{dN}{dt} = NF(N, P) \quad \frac{dP}{dt} = PG(N, P)$$

Donde las formas  $F$  y  $G$  dependen de la interacción de las especies.

El primer paso razonable sería el de tomar modelos donde estas funciones fueran capaces de satisfacer la ecuación de la logística así que por ejemplo una función para la presa podría tener la siguiente forma:

$$\frac{dN}{dt} = NF(N, P) \quad \text{Con} \quad F(N, P) = r \left( 1 - \frac{N}{K} \right) - PR(N)$$

Donde  $K$  es una constante positiva que carga con la capacidad de la presa cuando  $P \equiv 0$

El término de depredación, que es el responsable de cambiar el valor de la densidad de la presa, generalmente muestra un efecto de saturación. Tomada por la responsabilidad del depredador ( $bNP$ ) como en el modelo de Lotka – Volterra, tomamos  $PNR(N)$  cuando  $NR(N)$  está saturado por un  $N$  demasiado grande.

La ecuación del depredador también se puede hacer más realista que un simple  $G = -d + cN$  como en el modelo original. Una forma posible es la siguiente:

$$G(N, P) = k \left( 1 - \frac{hP}{N} \right), \quad G(N, P) = -d + eR(N)$$

donde  $k, h, d$  y  $e$  son constantes positivas y  $R(N)$  es el mismo término que en el ejemplo que vimos anteriormente. Estos modelos solo son algunos ejemplos de muchos que se han propuesto y estudiados. Estos modelos que le dan un valor de peso a la ecuación de la logística son más realistas que estos que se toman utilizando el modelo clásico de Lotka – Volterra.

Uno de los modelos de competición a tratar es precisamente el modelo de competencia en el que dos o más especies compiten por un recurso limitado de alimento o por el espacio que a su vez está directamente relacionado con los recursos de alimentos.

En este contexto veremos un modelo simple de competencia, en el que, cuando dos especies compiten por el mismo recurso, una de las especies generalmente resulta extinta. Consideremos el modelo básico

de Lotka – Volterra en el que cada especie  $N_1$  y  $N_2$  poseen un crecimiento logístico en la ausencia del otro. La inclusión de un crecimiento logístico en el sistema de Lotka – Volterra lo hace mucho más realista como hemos visto anteriormente, pero para comenzar utilizaremos en principio un modelo menos complicado, tomemos entonces el siguiente modelo:

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1 \left[ 1 - \frac{N_1}{K_1} - b_{12} \frac{N_2}{K_1} \right] \\ \frac{dN_2}{dt} &= r_2 N_2 \left[ 1 - \frac{N_2}{K_2} - b_{21} \frac{N_1}{K_2} \right]\end{aligned}$$

Donde  $r_1, K_1, r_2, K_2, b_{12}$  y  $b_{21}$  son constantes positivas, recordemos que los términos  $r_i$  son las líneas de nacimiento asociadas a cada ecuación y  $K_i$  la capacidad de carga de cada una de estas ecuaciones. Y  $b_{12}$  y  $b_{21}$  aseguran la eficiencia de la competitividad entre las especies  $N_2$  sobre  $N_1$  y viceversa esto implica que el modelo que vemos no sea un modelo conservativo como el modelo de Lotka – Volterra .

Si hacemos un cambio de variable al modelo y escribimos

$$u_1 = \frac{N_1}{K_1}, \quad u_2 = \frac{N_2}{K_2}, \quad \tau = r_1 t, \quad \rho = \frac{r_2}{r_1}, \quad a_{12} = b_{12} \frac{K_2}{K_1}, \quad a_{21} = b_{21} \frac{K_1}{K_2}$$

Entonces el sistema se transforma en el siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{d\tau} &= u_1(1 - u_1 - a_{12}u_2) = f_1(u_1, u_2) \\ \frac{du_2}{d\tau} &= \rho u_2(1 - u_2 - a_{21}u_1) = f_2(u_1, u_2)\end{aligned}$$

Entonces tendemos que los puntos singulares  $u_1^*$  y  $u_2^*$  son aquellos donde  $f_1(u_1, u_2) = f_2(u_1, u_2) = 0$  que son los puntos  $u_1^* = 0, u_2^* = 0$  ;  $u_1^* = 1, u_2^* = 0$  ;  $u_1^* = 0, u_2^* = 1$  ;

$$u_1^* = \frac{1 - a_{12}}{1 - a_{12}a_{21}}, u_2^* = \frac{1 - a_{21}}{1 - a_{12}a_{21}} .$$

El último punto de estos es solo de relevancia si  $u_1^* \geq 0$  y  $u_2^* \geq 0$ , si son finitos en tal caso  $a_{12}a_{21} \neq 1$  en la siguiente grafica se muestra un análisis de lo ocurre.

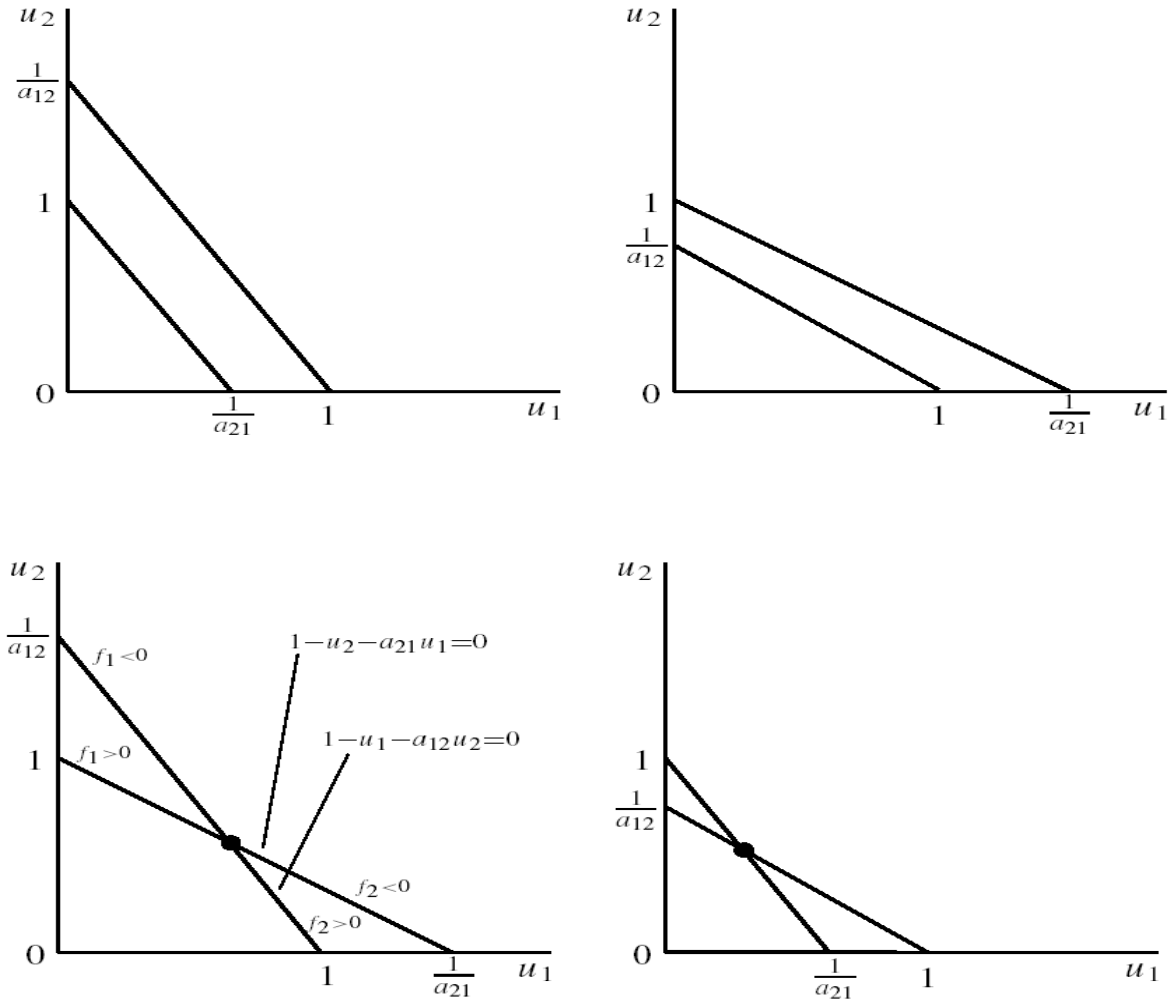


Figura 4

Calculemos la matriz  $A$  que viene dada por las derivadas parciales evaluadas en los puntos singulares o sea.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{pmatrix}_{u_1^*, u_2^*} = \begin{pmatrix} 1 - 2u_1 - a_{12}u_2 & -a_{12}u_1 \\ \rho a_{21}u_2 & \rho(1 - 2u_1 - a_{12}u_2) \end{pmatrix}_{u_1^*, u_2^*}$$

El primer estado es cuando  $(0,0)$ , es inestable entonces los valores propios de la matriz vienen dado de la manera siguiente,

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & \rho - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = \rho$$

Donde podemos ver que ambos valores son positivos. Para el segundo valor que es  $(1,0)$  tenemos que los valores propios son.  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = \rho(1 - a_{21})$  y tenemos entonces que:

$$u_1^* = 1, u_2^* = 0 \quad \text{es} \quad \begin{cases} \text{estable} \\ \text{inestable} \end{cases} \quad \text{si} \quad \begin{cases} a_{21} > 1 \\ a_{21} < 1 \end{cases} \quad (1.8)$$

Similarmente se hace para el punto  $(0,1)$  que tiene los siguientes valores propios  $\lambda_1 = -\rho$ ,  $\lambda_2 = (1 - a_{12})$  y tenemos entonces que

$$u_1^* = 0, u_2^* = 1 \quad \text{es} \quad \begin{cases} \text{estable} \\ \text{inestable} \end{cases} \quad \text{si} \quad \begin{cases} a_{12} > 1 \\ a_{12} < 1 \end{cases} \quad (1.9)$$

Finalmente para el último punto los valores propios son

$$\lambda_1, \lambda_2 = [2(1 - a_{12}a_{21})]^{-1} [(a_{12} - 1) + \rho(a_{21} - 1) \pm \{(a_{12} - 1) + \rho(a_{21} - 1)\}^2 - 4\rho(1 - a_{12}a_{21})(a_{12} - 1)(a_{21} - 1)]^{\frac{1}{2}}$$

El signo de  $\lambda$  o la parte real de  $\lambda$  o compleja y un ves dado esto la estabilidad del estado del sistema, depende del sitio de los valores  $\rho, a_{12}$  y  $a_{21}$ . El primer caso es cuando  $a_{12} < 1, a_{21} < 1$  el segundo es cuando  $a_{12} > 1, a_{21} > 1$  el tercero es  $a_{12} < 1, a_{21} > 1$  y el cuarto y final es  $a_{12} > 1, a_{21} < 1$  todos estas son analizados del mismo modo como vemos en la figura que mostramos a continuación

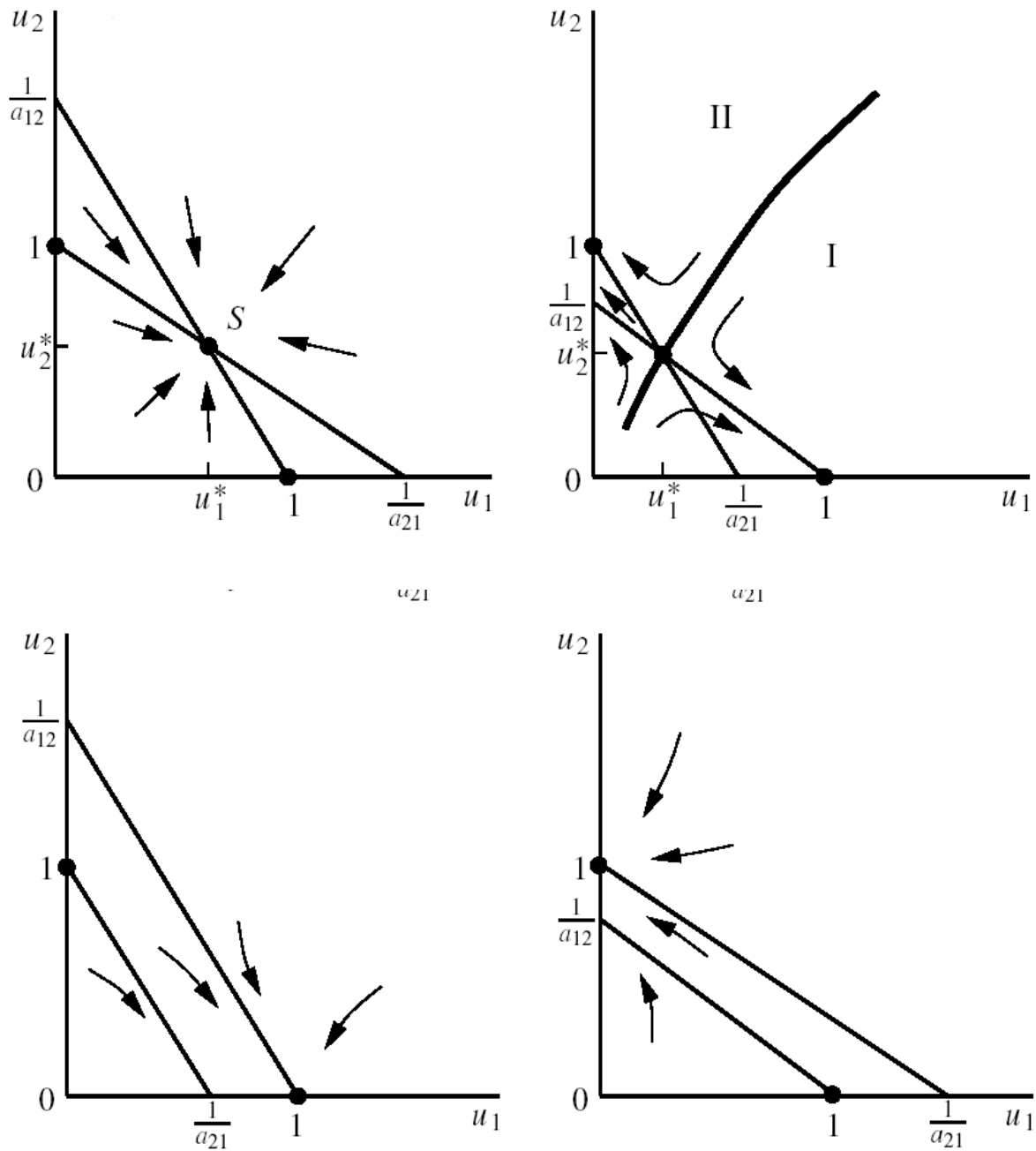


Figura: 5

La primera grafica donde  $a_{12} < 1, a_{21} < 1$  solo el estado positivo  $S$  es estable, y todas las trayectorias tienden al punto. Cuando  $a_{12} > 1, a_{21} > 1$  esto corresponde a la segunda figura y los puntos  $(1,0)$  y  $(0,1)$  son puntos estables, en estos puntos existe un dominio de atracción, existe una línea de separación llamada separatríz que divide el primer cuadrante en dos partes.

Ahora consideremos algunas de las implicaciones ecológicas de estos resultados. Un caso donde  $a_{12} < 1, a_{21} < 1$  existe un estado estable, estado donde ambas especies pueden existir como se ve en la figura 4 primer grafico de la esquina izquierda en términos de los parámetros originales, esto corresponde a cuando  $b_{12}K_2/K_1 < 1$  y  $b_{21}K_1/K_2 < 1$ . Por ejemplo, si  $K_1$  y  $K_2$  son aproximadamente los mismos y la competencia entre especies, asegurada por  $b_{12}$  y  $b_{21}$ , no es tan fuerte, estas condiciones dicen que ambas especies simplemente se ajustan a una población lenta como si no existiera competición. En otras palabras la competencia no es agresiva. En otro caso sí  $b_{12}$  y  $b_{21}$  son aproximadamente los mismos y  $K_1$  y  $K_2$  son diferentes, no es fácil decir que pasaría y entonces habría que hacer una comparación entre  $a_{12}$  y  $a_{21}$ .

En el segundo caso cuando  $a_{12} > 1$  y  $a_{21} > 1$ , si los  $K_i$  son iguales, entonces los  $b_{12}$  y  $b_{21}$  no son pequeños. El análisis entonces dice que la competencia es tal que los tres estados no triviales pueden existir, pero de (1.8) a (1.9), solo (1,0) y (0,1) son estables, como se muestra en la figura 5 en la del cuadro superior derecho. Puede ser un asunto delicado el decir quién sale, esto depende del avance que puede tener cada especie. Si  $u_2 \rightarrow 0$  y  $u_1 \rightarrow 1$  esto significa que  $N_1 \rightarrow K_1$  la capacidad de absorción del ambiente de  $N_1$ . En esta competencia sale eliminada la especie  $N_2$ . En el otro caso si  $N_2$  tiene una condición inicial de avanzada entonces  $u_1$  y  $u_2$  comienzan en la región II entonces  $u_1 \rightarrow 0$  y  $u_2 \rightarrow 1$  en tal caso la especie  $N_1$  se extingue y  $N_2 \rightarrow K_2$  La sección de extinción de una especie es solo cuando la población inicial de esta especie es cerrada con la separatriz.

En el tercer y cuarto caso en el que existe una competición entre ambas donde una es más fuerte que la otra, o donde la constante de absorción del ambiente es bien diferente tal que  $a_{12} = b_{12}K_2/K_1 < 1$  y  $a_{21} = b_{21}K_1/K_2 < 1$  o alternativamente  $a_{12} > 1$  y  $a_{21} > 1$ . En el tercer caso vemos en la figura 5 esquina inferior izquierda, la fuerte competición entre la  $u_1$ -especie que domina a la  $u_2$  haciendo que esta salga del juego, en el cuarto caso es el caso contrario y la especie  $u_1$  sale del juego.

En todos los casos no existe una convergencia hacia la eliminación de una especie en los casos tres y cuatro siempre pasa, pero en el segundo caso es inevitable que existan fluctuaciones naturales en los niveles de población. Esto trabaja con el principio de competición exclusión. La importancia de la competición entre ambas especies en la naturaleza es obvia es un problema que posee una gran cantidad de fluctuaciones en dependencia de los parámetros.



Mutualismo o simbiosis es uno de los temas a tratar en el que debemos de hacer una pequeña observación. Existen muchos ejemplos de interacción de especies, el mutualismo y la simbiosis juega un papel crucial promoviendo y manteniendo ambas especies. El tema de mutualismo o simbiosis tiene gran importancia en la ecología teórica, incluso con dos especies este tema no ha sido lo suficientemente tratado solo se han hecho estudios donde existe competencia a niveles de un modelo de Lotka – Volterra y la principal interacción es la competencia.

---

## Capítulo 2: Modelo de Arrecifes Coralinos

### 2.1. Introducción a los Arrecifes Coralinos

En el capítulo anterior el análisis de una gran diversidad de modelos que son necesarios para una mayor comprensión del modelo que plantearemos en esta tesis. Antes de presentar y discutir el modelo haremos una breve descripción del complejo ecosistema de los arrecifes coralinos.

Uno de los grandes lastres de la humanidad es la deuda que posee con el manejo sustentable de los ecosistemas marinos los cuales en el transcurso del tiempo se han ido deteriorando por el desgaste algunas veces de la naturaleza y otros por el desgaste del propio pasar de la humanidad. Un ecosistema de gran importancia al que dedicaremos nuestra atención en esta tesis que es el de los arrecifes coralinos.

Los arrecifes del Caribe al igual que otros se ven amenazados por acciones diversas del desarrollo económico, social y por la propia competencia que resulta entre el coral y las demás especies, con las cuales compita por algo o exista algún tipo de intercambio, la tala en la vegetación en las zonas costeras la construcción en estas zonas, el desarrollo del turismo y la pesca han hecho que estas zonas tan vulnerables a perturbaciones sean un objeto de estudio para muchos científicos.

En estos ecosistemas existe una diversidad de corales entre los que se encuentran los corales pétreos estos son uno de los componentes mas importantes del escenario marino por sus importantes funciones ecológicas. Esta diversidad de corales esta a expensas de los posibles impactos que pueden generar los sistemas como huracanes, pesca excesiva, la pesca con arrastre y otras más.

Los arrecifes de coral sirven de refugio a organismos que en muchos casos constituyen su único mecanismo de defensa en la evasión de depredadores. Los estudios sobre zooplancton en arrecifes

coralinos arrojan información sobre la existencia de una fauna particular, conformada por especies oceánicas, estadios larvales de peces e invertebrados y formas endémicas que habitan alrededor de las estructuras coralinas, esta cantidad de zooplancton logra que exista toda esta diversidad de vida en este sistema. Los fenómenos atmosféricos como el Niño en 1997 y 1998 incrementaron la temperatura de las aguas lo suficiente para eliminar aproximadamente 16% de los arrecifes del mundo. Cuando las aguas se calientan, pólipos coralinos expulsan los organismos que viven en una relación simbiótica con el coral. Los corales pierden el color y los arrecifes se destiñen y empiezan a morir por la falta de nutrientes. Uno de los sitios donde el ciclo de destrucción es más evidente es en el mar Caribe. El desarrollo de las áreas costeras y el desagüe de los productos agrícolas también causan estragos. Los corales están siendo sofocados por un tipo de algas marinas cuyo crecimiento es estimulado por los fertilizantes que utilizan los agricultores. Al mismo tiempo, la sobrepesca está eliminando los peces que se alimentan de este tipo de algas un ejemplo de esto es la eliminación del pez loro especie que vivía en los arrecifes coralinos y consumía una gran cantidad de algas. En estas condiciones, los corales son presa fácil de enfermedades, como la enfermedad de banda blanca que ha diezmado la población de los corales tipo cuerno de ciervo y cuerno de alce.

Analicemos como se lleva a cabo la reproducción de los corales. Los corales tienen 2 formas de reproducción sexual. Los corales que secretan sus gametos (huevo y esperma empacados juntos llamados también bulto huevo o esperma) en la columna de agua para fertilización externa, son llamados "desovadores por emisión". El esperma se adhiere sin duda a los huevos flotantes y el bulto flota hacia la superficie donde se pega con bultos secretados por otras especies similares de coral. Esta modalidad de reproducción, requiere que todos los corales del área utilicen marcadores específicos estacionales para asegurar que sus gametos se mezclen con los gametos de otras especies similares de coral. El término desovadores masivos fue dado al evento en el cual varios corales secretan sus gametos al mismo tiempo. Investigaciones adicionales han revelado que las diferentes especies de coral del mismo arrecife secretaran sus gametos en la misma noche, pero no al mismo tiempo. Por ejemplo, el *Acropora surculosa* secretará sus gametos en la misma noche al igual que *Acropora humilis*; sin embargo, cada especie los secretará a una hora específica y no al mismo tiempo. Esto incrementa la posibilidad de que se crucen con los gametos de especies específicas y minimizar aún más el riesgo de

crías cruzadas. La fertilización de los huevos por el esperma da como resultado la formación de la larva. Tiempo después, la larva se desarrolla por unos cuantos días en la columna de agua antes de sumergirse en dirección al arrecife donde se adhiere. Un coral reproductor fertiliza el huevo y el esperma internamente, y secreta la plánula desarrollada en el agua. La plánula al igual que la larva, buscará un lugar adecuado para asentarse y crecer.

## 2. 2. Introducción al Modelo

Estudios realizados tienen documentación del cambio de estructura que esta aconteciendo en estos sistemas, los cuales antiguamente eran dominados plenamente por los corales hoy en día existe una competencia por el espacio entre los corales y las algas, y con un florecimiento del dominio de las algas.

En esta tesis planteamos un modelo en ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden que describe la evolución en el tiempo de este ecosistema. Este sistema está conformado por tres especies marinas que compiten por el espacio: algas césped, corales y macroalgas.

El primer objetivo es el estudio del espacio de fase correspondiente a las ecuaciones modelo. Para la esto emplearemos técnicas analíticas de la teoría de los sistemas dinámicos con el propósito de investigar los estados asintóticos del sistema. El segundo objetivo es implementar un modelo computacional dando soluciones para diferentes parámetros de estas ecuaciones, y la adaptación de este a nuestros arrecifes coralinos en dependencia de mediciones que se puedan realizar en las costas de nuestro país. Para esto usamos un paquete de Wolfram Mathematica 6.0: llamado EquationTrekker. EquationTrekker permite, dada la ecuación diferencial, opcionalmente con parámetros, especificar condiciones iniciales solamente usando el ratón proporcionando una herramienta interactiva para investigar las soluciones.

Existe una amplia evidencia experimental que apunta a la coexistencia de múltiples estados de equilibrio, por lo que se necesita identificar las emergencias que pueden surgir para estos estados de

acuerdo a los parámetros medidos experimentalmente. Estudiaremos los múltiples estados de equilibrio que pueden aparecer en el sistema utilizando nuestro modelo del ecosistema. Modelaremos hábitats de una estructura compleja, asumiendo una simplificación de un problema complejo a un sistema que podamos manejar, capaz de aproximarse a la realidad.

El modelo esta definido en un área de  $1\text{cm}^2$  y los biólogos aseguran un parámetro de mortalidad elevado incluso para este espacio. Existen dos tipos de macroalgas llamada *Lobophora* y *Dictyota*, que prolifera si el coral muere. El coral posee una capacidad muy baja para hacerle frente a estas algas ya que su ritmo de reproducción es muy bajo, la desaparición de especies de peces como la *Diadema* que se alimentan de este tipo de algas, a hecho que el coral tenga menos herramientas para competir por una porción de espacio con estas algas. Las mediciones que se han hecho sugieren que antes de que desapareciera esta especie el modelo de dominación del alga era simplemente el estado inestable del sistema como se muestra en la Figura 6:

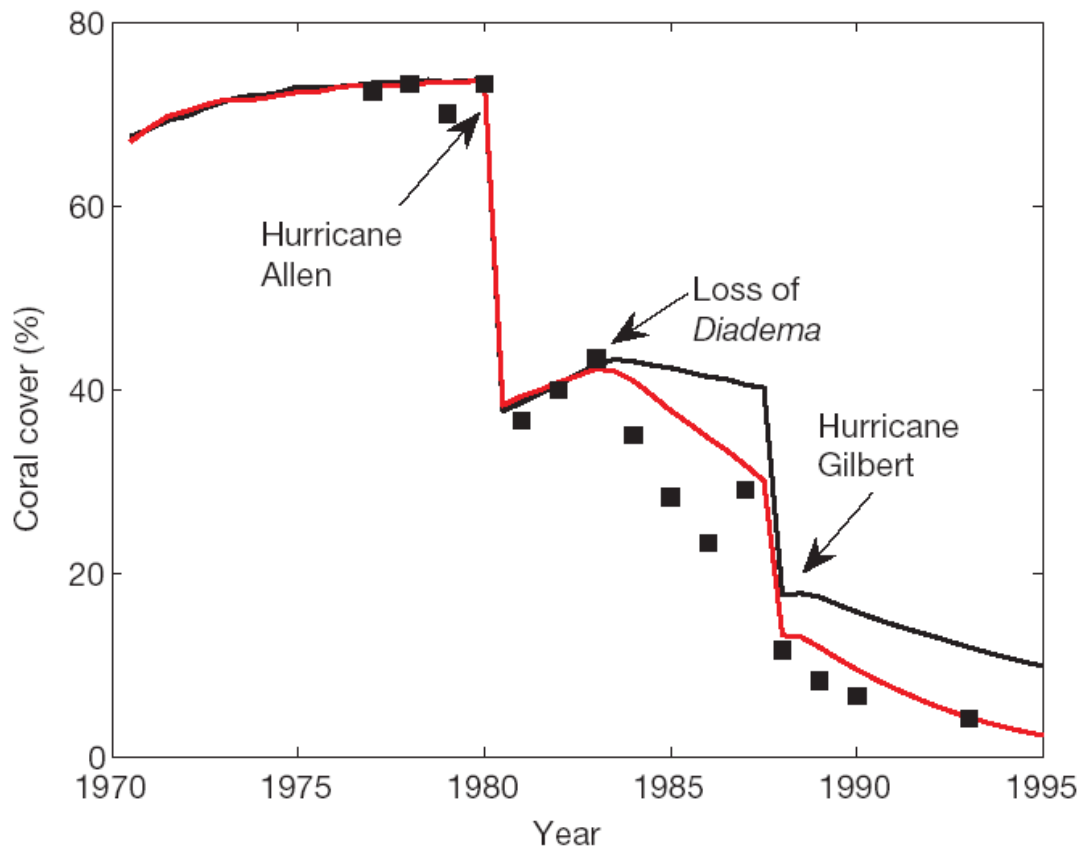


Figura: 6

Obsérvese que el modelo no exhibía un dominio de algas cuando la especie *Diadema* estaba presente. Notemos que después del paso del huracán Allen hay una devastación del coral. La presencia de la especie *Diadema* intervenía directamente en la recuperación paulatina del coral debido su papel controlador de la población de algas. La pérdida significativa de la población de *Diadema* y la incidencia del huracán Gilbert incidió hizo decaer el porcentaje del área cubierta por coral.

Múltiples equilibrios podrían existir en este ecosistema. Por ejemplo un declive en el cubrimiento de coral podría crear espacio para la proliferación de una colonia de algas y lograr que exista un estado de estabilidad de las algas.

En este modelo trabajaremos con dos tipos de algas como ya explicamos anteriormente. Un tipo de alga es la llamada alga (turf), por su terminología en ingles, o simplemente alga césped que entra al sistema a través de una restricción algebraica que se le impone. El otro tipo de alga que consideraremos entra directamente en el sistema de competencia por el espacio con los corales. Veremos en el modelo que el resultado de incrementar el cubrimiento de alguna especie implica el crecimiento de la frecuencia e intensidad de la interacción entre coral – alga. Una competencia despiadada de recubrimiento de espacio de las algas, hace que el término de crecimiento del coral tienda a un límite de mortalidad.

### **2.2.1. Modelo**

En este epígrafe empecemos a definir nuestro modelo [1], como será y que forma posee, que soluciones tendrá, a que se debe, como será el comportamiento de las variables que intervienen en el proceso y algunas otras cosas más que vayamos explicando por el camino de la resolución de este.

Empecemos por definir las variables que intervienen en nuestro proceso, en nuestras ecuaciones tendremos las siguientes funciones  $c, m$  y  $T$  las cuales dependen del tiempo. Donde  $c$  significa la variable coral,  $m$  la variable alga y  $T$  es otro tipo de alga que interviene en el modelo que viene dada por una condición que se le impone al modelo, esta condición que interviene en el proceso es una condición de espacio, la cual viene expresada de la siguiente forma:  $T + c + m = 1$ . Esta es una restricción de espacio que significa, que la suma de  $c, m$  y  $T$  representa una porción de espacio, que sería la porción de espacio por la que ellos luchan o compiten que es constante a medida de que pasa el tiempo. Entonces en nuestro sistema solo intervendrían dos ecuaciones la primera sería la ecuación de las macroalgas y la segunda la de los corales. Y podríamos donde quiera que este la función  $T$  sustituirla por la condición  $T = 1 - c - m$ . Nuestro modelo sin la restricción tiene la forma siguiente:

$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = amc - \frac{gm}{m+T} + \gamma mT \\ \frac{dc}{dt} = rTc - dc - amc \end{cases}$$

Donde  $T$  es el tipo de alga (turf) o tipo césped como habíamos explicado anteriormente,  $m$  es un tipo de macro alga y  $c$  representa a los corales. Bien antes de resolver este sistema expliquemos bien que representan cada uno de estos factores que intervienen en el. Tomemos primeramente la expresión  $gm/(m+T)$ , donde  $g$  es una constante que representa a las especies de peces que se alimentan de estos tipo de macroalgas, que es un valor negativo por que es un valor que le quita peso a la ecuación de las macroalgas para dárselo posteriormente a la ecuación de los corales recuérdese que esto es un sistema netamente de competencia de espacio. El otro valor que explicaremos será el parámetro de mortalidad de los corales que vine expresado por el siguiente valor  $(-dc)$ , que toma valor negativo por que representa una tasa de mortalidad de los corales, por lo tanto es un parámetro negativo para la ecuación de los corales. Observemos ahora el primer parámetro de la ecuación de los corales, este parámetro representa el ritmo de crecimiento que vine expresado por el valor  $r$ , el cual implica un ritmo de crecimiento vinculado con las algas tipo césped y los corales. Veamos ahora los siguientes valores que intervienen en el sistema de ecuaciones diferenciales, veamos el termino  $(-amc)$  este término representa el cubrimiento de los corales por las macroalgas, y posee un signo negativo por la razón de que, es un termino que le quita espacio a las corales para que las algas colonicen. El termino final que veremos es el dado por  $\gamma mT$ , el cual significa el recubrimiento de la población por las algas tipo césped. Entonces nuestro modelo con la condición incluida nos quedaría de la siguiente forma:



$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = amc - \frac{gm}{1-c} + \gamma m(1-m-c) \\ \frac{dc}{dt} = rc(1-m-c) - dc - amc \end{cases}$$

### 2.2.2. Solución del Modelo

Aquí veremos la solución que le daremos a nuestro sistema con los métodos clásicos de las ecuaciones diferenciales como planteamos en el epígrafe 2. 2, y también presentaremos algunas soluciones numéricas que nos servirán para una mayor comprensión del fenómeno que estamos analizando. Estas soluciones se obtuvieron usando el paquete Wolfram Mathematica 6.0, que nos muestran las diferentes soluciones de nuestro sistema utilizando programación dinámica sobre las constantes del sistema.

El primer paso es el obtener los puntos singulares del sistema

$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = amc - \frac{gm}{1-c} + \gamma m(1-m-c) \\ \frac{dc}{dt} = rc(1-m-c) - dc - amc \end{cases}$$

Igualando a cero los miembros derechos y resolviendo el sistema de ecuaciones resultante tenemos los puntos singulares:

T: $m = 0$	$c = 0$
CT: $c = 1 - \frac{d}{r}$	$m = 0$
MT: $m = 1 - \frac{g}{\gamma}$	$c = 0$

$m = \frac{\overset{\text{CMT:}}{a^2(-2d+r) + a(r^2 + 2d(-r+\gamma)) + r(d\gamma + \sqrt{a(a-4g)(a+r)^2 + 2a(d+2g)(a+r)\gamma + d^2\gamma^2})}}{(2a(a+r)(a+r-\gamma))}$
$c = -\frac{-a(a+r) + (2a+d)\gamma + \sqrt{a(a-4g)(a+r)^2 + 2a(d+2g)(a+r)\gamma + d^2\gamma^2}}{2a(a+r-\gamma)}$
$m = \frac{\overset{\text{ó}}{a^2(-2d+r) + d r \gamma - r \sqrt{a(a-4g)(a+r)^2 + 2a(d+2g)(a+r)\gamma + d^2\gamma^2} + a(r^2 + 2d(\gamma-r))}}{(2a(a+r)(a+r-\gamma))}$
$c = \frac{a(a+r) - (2a+d)\gamma + \sqrt{a(a-4g)(a+r)^2 + 2a(d+2g)(a+r)\gamma + d^2\gamma^2}}{2a(a+r-\gamma)}$

Después de haber calculado los puntos singulares debemos investigar la naturaleza de los valores propios asociados a la matriz Jacobiana, A, del sistema de ecuaciones diferenciales evaluada en cada uno de estos puntos singulares.

Para los puntos T, CT y MT, es posible determinar de manera analítica los valores propios asociados. Estos se ofrecen en la tabla siguiente. Esto sin embargo no es posible para el punto CMT, en cuyo caso nos valdremos de la experimentación numérica.

Puntos singulares	Valores propios asociados a los puntos singulares
T	$-d + r \quad -g + \gamma$
CT	$d - r$ $a - \frac{ad}{r} - \frac{gr}{d} + \frac{d\gamma}{r}$

MT	$\frac{g(a+r) - (a+d)\gamma}{g - \gamma}$
----	---

El primer punto singular es donde los corales y las macroalgas se hacen cero observemos que condiciones deben de cumplir los parámetros para que este punto sea estable o inestable.

Para este análisis nos basaremos en el paquete Wolfram Mathematica 6.0, dentro del cual existe un paquete , el cual nos servirá de ayuda para el análisis de cada uno de los puntos. Primeramente mostremos como se carga este paquete y expliquemos un poco su funcionamiento. Este paquete se llama EquationTrekker para cargarlo basta con solo escribir lo siguiente (<< "EquationTrekker`"). Este paquete suministra una herramienta interactiva para la investigación de las soluciones de una ecuación diferencial. Hallando soluciones numéricas a una ecuación diferencial, con este paquete solo podemos analizar ecuaciones diferenciales de segundo orden o un sistemas bidimensionales de ecuaciones diferenciales. En este paquete podemos manejar los parámetros que intervienen en el sistema de ecuaciones y ver que pasa con la estabilidad o inestabilidad de cada uno de los puntos. Mostremos entonces los códigos para cargar el paquete:

```
<< "EquationTrekker`";
EquationTrekker[
{Derivative[1][m][t] == a*m[t]*c[t] - (g*m[t])/(1 - c[t]) + \gamma*m[t]*(1 - m[t] - c[t]),
Derivative[1][c][t] == r*c[t]*(1 - m[t] - c[t]) - d*c[t] - a*m[t]*c[t]}, {m, c}, {t, -100, 100},
PlotRange -> {{0, 1}, {0, 1}}, TrekParameters -> {a -> 0, d -> 0, g -> 0, r -> 0, \gamma -> 0}]
```

Veamos que después de haber cargado el paquete escribimos EquationTrekker paréntesis y el sistema de ecuaciones diferenciales con el cual estamos trabajando le damos un rango al parámetro t damos un rango de para graficar nuestro sistema y con la sentencia TrekParameters le damos un

valor a cada uno de los parámetros, que en este código que presentamos de ejemplo le damos el valor cero a todos los parámetros.

Habiendo explicado ya esta herramienta que nos será de gran utilidad para la comprensión del análisis de los puntos pasaremos entonces al primer punto.

Empecemos entonces haciendo el análisis de estabilidad de este punto. Para que este punto sea estable se requiere que  $d > 0$ ,  $0 \leq r < d$ ,  $g > 0$ ,  $0 \leq \gamma < g$ . Observemos que el parámetro  $r$  que es el ritmo de reproducción de los corales que está acotado entre cero y  $d$  el próximo parámetro que vemos es el  $\gamma$  que está acotado también, por cero y  $g$ . Veamos que la mortalidad del coral es mayor que su ritmo de crecimiento lo cual implica que en este caso tenemos un punto estable para las algas Turf o césped.

El otro análisis es para ver cuando este punto es un punto inestable, veamos para que condiciones de los parámetros esto se a de cumplir observemos que  $d \geq 0$ ,  $r > d$ ,  $g \geq 0$ ,  $\gamma > g$ . Veamos que el ritmo de reproducción de los corales en este caso es mayor que su tasa de crecimiento y el parámetro  $\gamma$  es mayor que la tasa de herbivoría. O sea bajo estas condiciones de estado de los parámetros, este punto es un punto inestable.

Analicemos ahora que pasa con el segundo punto este punto sería aquel donde las macroalgas son cero y los corales tienen el siguiente valor  $c = 1 - \frac{d}{r}$ . Observemos que condiciones deben de

cumplir los parámetros para que este punto que es el dominado por corales sea asintóticamente estable veamos las condiciones,  $d > 0$ ,  $r > d$ ,  $g > 0$ ,  $0 \leq \gamma < \frac{gr^2}{d^2}$ ,

$0 \leq a < \frac{-gr^2 + d^2\gamma}{d(d-r)}$ . Veamos primeramente que la tasa de reproducción de los corales es mayor

que la tasa de mortalidad de estos y los parámetros  $a$  y  $\gamma$  están completamente acotados el parámetro  $\gamma$  está en dependencia de  $\frac{gr^2}{d^2}$  notemos que como  $r > d$  este numerador es mayor que

el denominador y por lo tanto la tasa de crecimiento de la herbivoría multiplicada por el ritmo de

reproducción es mayor que la tasa de mortalidad de este. El siguiente parámetro que está acotado es el  $a$  y está acotado por la siguiente expresión  $\frac{-gr^2 + d^2\gamma}{d(d-r)}$ , para esta condición de este parámetro  $a$  este punto es un punto estable.

En este caso tenemos un punto silla, para que este punto silla exista se requiere que los parámetros adquieran la siguiente forma. Al igual que antes todos los parámetros son positivos y el espacio donde esto se cumple es donde  $r > d$ ,  $0 \leq \gamma < \frac{gr^2}{d^2}$ ,  $a > \frac{-gr^2 + d^2\gamma}{d(d-r)}$  o  $\gamma = \frac{gr^2}{d^2}$ ,  $a > 0$  o  $\gamma > \frac{gr^2}{d^2}$ ,  $a \geq 0$ . Veamos que el ritmo de reproducción sigue siendo mayor que de  $d$ ,  $\gamma$  sigue estando acotada entre el mismo parámetro que vimos,  $a$  en este caso es mayor que  $\frac{-gr^2 + d^2\gamma}{d(d-r)}$  y el parámetro  $\gamma$  es igual a  $\frac{gr^2}{d^2}$  si  $a$  es mayor estricto que cero y, es mayor que  $\frac{gr^2}{d^2}$  el parámetro  $\gamma$  si  $a$  es mayor o igual que  $a$ .

Veamos antes de continuar un gráfico donde mostramos que cada uno de los puntos que intervienen en nuestro proceso.

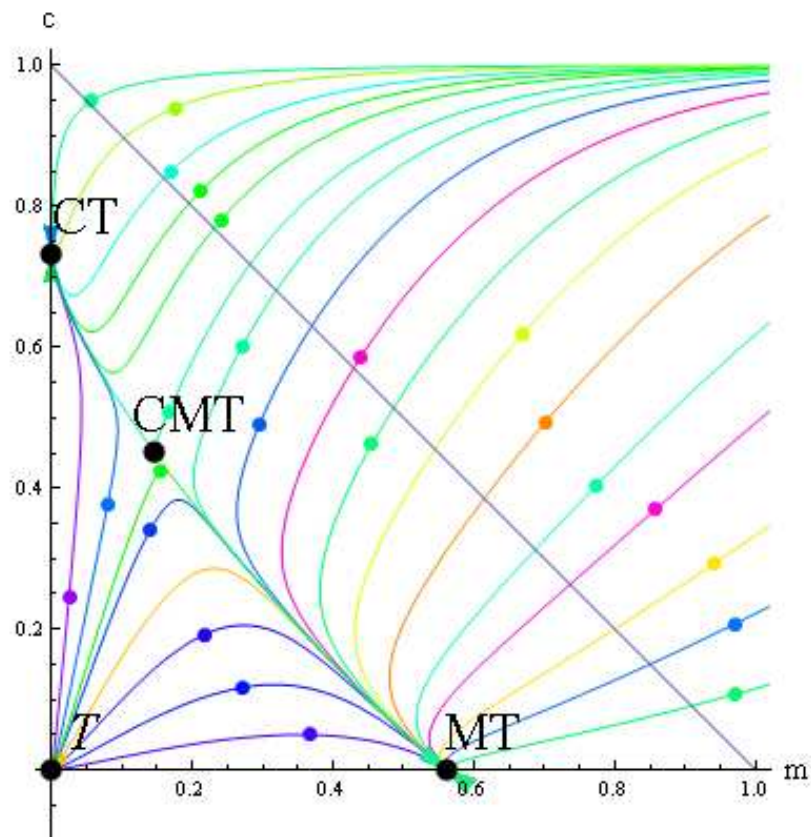


Figura 7: El plano de fase mostrado presenta dos estados estables, el CT caracterizado por ausencia de macroalgas y el MT que no presenta corales. Los parámetros usados son  $a = 0.7$ ,  $d = 0.2$ ,  $g = 0.35$ ,  $r = 0.75$  y  $\gamma = 0.8$

Veamos en el grafico los puntos que intervienen hasta ahora, solo hemos hecho el análisis de dos puntos el punto T y el CT, el primero es que donde los corales y las macroalgas son ceros que es un punto como vemos dominado por algas turf o césped y el segundo es donde las macroalgas son cero y los corales tienen un valor determinado.

Antes de continuar damos primeramente un bosquejo de que pasa con este sistema biológico con el que estamos trabajando. Muchos de estos sistemas biológicos muestran estados de biestabilidad, esto implica que pueden coexistir dos estados de equilibrio, que están en dependencia de los valores iniciales que posea el sistema.

Observemos también que nuestro espacio de fase es un conjunto invariante lo cual implica que nuestras soluciones van a estar contenidas en este espacio que sería el primer cuadrante limitado por la recta  $m + c = 1$ . En la figura que mostramos anteriormente los valores que tenemos para los puntos son  $\{(0,0), (0,0.7333), (0.5625,0), (0.1457,0.451648)\}$ . Para diferentes valores de los puntos tendremos que estos se irán corriendo en dependencia del valor que se les de, pero siempre se mantendrán en nuestro espacio de fase. También notemos que al ser nuestro sistema bidimensional podemos encontrarnos con tres tipos de casos el primero es el de los puntos críticos el segundo es el caso donde existen orbitas periódicas este segundo caso es muy común en la modelación de ecosistemas biológicos pero que no están presente en nuestro sistema, y el tercer caso es cuando tenemos secuencias heteroclinicas. Cualquier sistema bidimensional posee una de estas tres cualidades o las tres o simplemente dos de estas.

Ya que sabemos algunos tópicos sobre nuestro sistema hagamos el análisis del tercer punto que sería donde los corales son cero y las macroalgas toman el valor  $1 - \frac{g}{\gamma}$ . Para que este punto sea un punto estable se requiere que  $d = 0, r = 0, \gamma > g$  o  $r > 0, g = 0$  o  $a > -\frac{gr}{g-\gamma}$  y si  $d > 0, r < d, \gamma > g$  o  $r > d, g = 0$  o  $g > 0, g < \gamma < \frac{gr}{d}, a > -\frac{gr-d\gamma}{g-\gamma}$  o  $\gamma = \frac{gr}{d}$  si  $a > 0$  o  $\gamma > \frac{gr}{d}$  si  $a \geq 0$ . Veamos que el parámetro  $\gamma$  siempre está acotado o simplemente depende de algún otro parámetro como el ritmo de mortalidad,  $g$  o  $r$  en dependencia de los valores.

Analicemos que condiciones deben de cumplirse para que este punto se convierta en punto silla,  $g > 0, 0 \leq a, d = 0, \gamma > g, \frac{ag + gr - a\gamma}{g - \gamma} < 0$  o  $d > 0, r > d, a < -\frac{gr - d\gamma}{g - \gamma}, \gamma < \frac{gr}{d}$ . Notemos que en un caso para  $d = 0$  tenemos unas condiciones y en otro caso para  $d > 0$  tenemos otras condiciones, el primer caso es un tanto utópico por la razón que la tasa de mortalidad del coral casi nunca estará en cero y segundo cuando este es mayor que cero que sería en caso más real por que existiría crecimiento de este parámetro de muerte y el modelo quedaría más realista ante los hechos.

Mostremos una grafica donde las macroalgas dejan de ser estable y el régimen dominado por corales se torna el único punto estable del sistema.

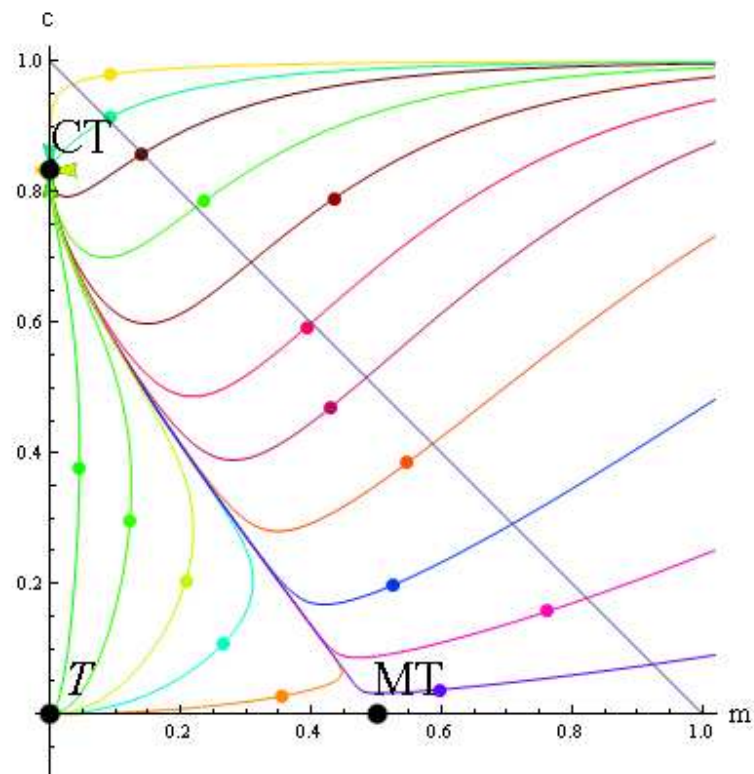


Figura 8: El plano de fase mostrado presenta un estado estable, el CT, caracterizado por ausencia de macroalgas. El punto MT, que no presenta corales, es una ensilladura. Los parámetros usados son  $a = 0.7$ ,  $d = 0.2$ ,  $g = 0.5$ ,  $r = 1.2$  y  $\gamma = 1$

Como observamos en la figura en el punto  $\{(0,0), (0,0.8333), (0.5,0)\}$  bajo las condiciones donde el régimen dominado por macroalgas es inestable, nuestro sistema se convierte en un sistema donde el régimen dominado por corales es en punto estable.

Mostremos en el siguiente caso bajo que condiciones el punto dominado por microalgas es un punto estable de nuestro sistema. Como vemos en la figura que mostramos a continuación.



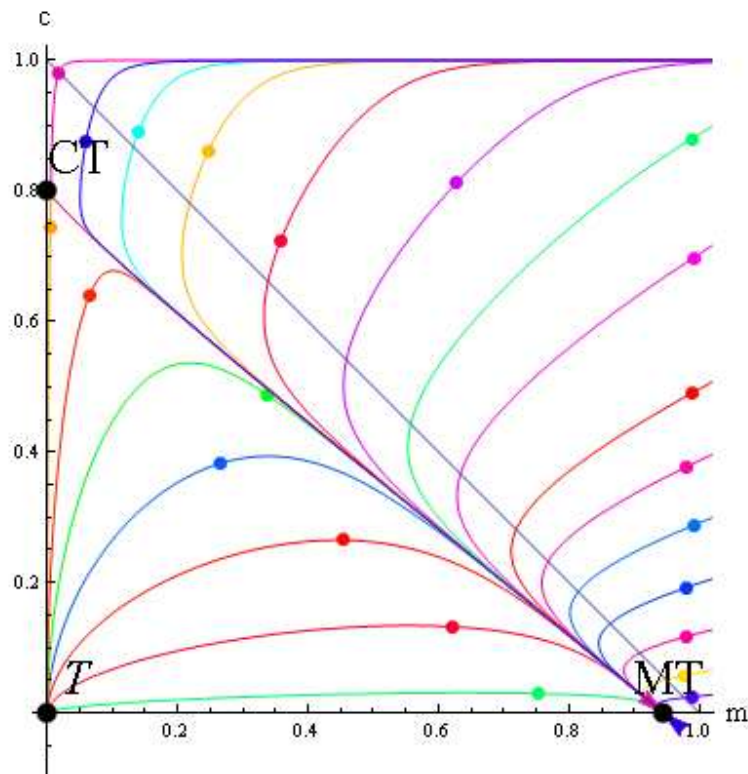


Figura 9: El plano de fase mostrado presenta un estado estable, el MT, caracterizado por ausencia de corales. El punto CT, que no presenta macroalgas, es una ensilladura. Los parámetros usados son  $a = 0.24$ ,  $d = 0.24$ ,  $g = 0.1$ ,  $r = 1.2$  y  $\gamma = 1.8$

Observemos en el grafico como todas las curvas de nuestro sistema tienden al punto MT estas condiciones están logradas con el siguiente valor de los parámetros  $a = 0.24$ ,  $d = 0.24$ ,  $g = 0.1$ ,  $r = 1.2$ ,  $\gamma = 1.8$ .

Una de las ventajas que nos permite este el uso de este paquete es que podemos en dependencia de los parámetros determinar bajo que condiciones un punto se torna estable o inestable. Esto resulta de gran utilidad por que una de las cosas que más nos importa de un sistema es saber precisamente esto, para tomar alguna decisión en caso de cambio de alguna de las constantes.

Y el otro punto que analizaremos al cual será el ultimo punto que intervine en nuestro espacio es uno de los dos últimos puntos donde las raíces que intervienen toman valore positivos. Con este punto se

tiene una complicación, que el calculo de los valores propios para este punto se torna en tanto complicado por lo tanto daremos paso a la experimentación numérica la cual nos servirá para saber que pasa en este punto .Para esto utilizaremos el paquete EquationTrekker el cual nos permitirá saber que pasa en este punto cuando existen determinados tipo de condiciones.

Mostremos una grafica dada por este paquete para que observemos que en el punto  $\{(0,0), (0,0.5), (0.122961, 0.0696377)\}$  tenemos precisamente un punto en espiral.

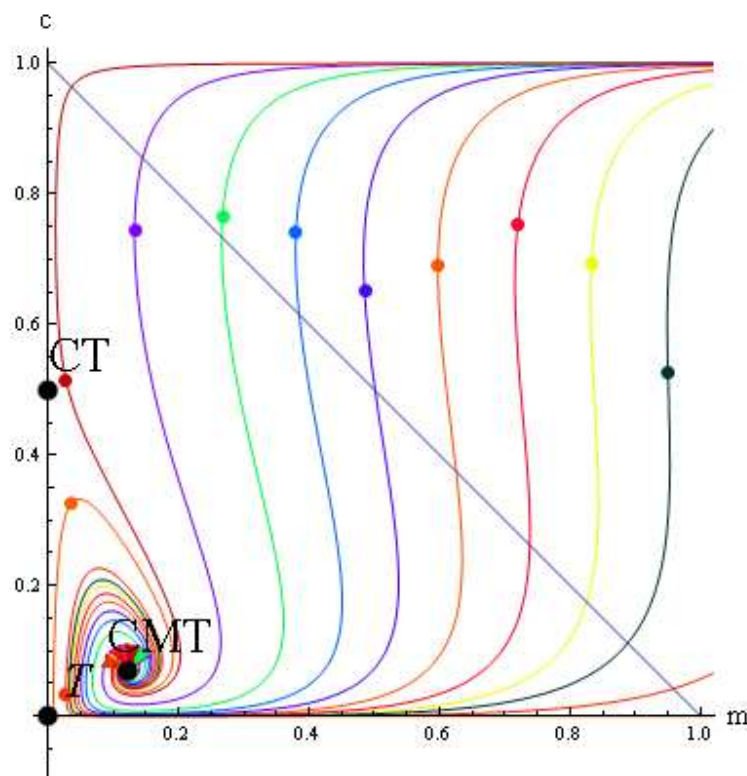


Figura 10: El atractor en este caso es un foco estable, en el que coexisten los tres grupos de especies. Los parámetros usados son  $a=2.5$ ,  $d=0.5$ ,  $g=0.5$ ,  $r=1.0$  y  $\gamma=0.45$

Notemos que este es un punto estable y es un punto de gran significación por ser un punto donde coexisten los tres organismos que intervienen en nuestro proceso las algas césped las macroalgas y los corales es evidentemente es un punto de gran interés biológico por que logra la simbiosis de las tres componentes que intervienen en nuestro sistema.

Habiendo hecho un análisis de que sucede en cada punto y que característica tiene cada uno de estos solo quedaría que a través de este medio y esta herramienta que mencionamos de el paquete Wolfram Mathematica 6.0 podamos hacer un análisis de que comportamiento tendrá nuestro ecosistema con determinadas variaciones que se le puedan introducir a este. Miremos en el modelo que hemos resuelto que una de las variables que más peso le añade al sistema el valor del parámetro  $a$  al cual el sistema es sensible y el parámetro  $g$  que si este logra aumentar decrece la población de macroalgas esto es un método muy viable para los corales ya que es un instrumento el cual el coral utiliza para la competición por el espacio.

Ya estamos en condiciones de mostrar un programa hecho en el Wolfram Mathematica 6.0 que nos servirá para una mayor comprensión de lo que sucede en nuestro sistema cuando hacemos algún cambio sobre las constantes. Este programa nos muestra dos graficas una que representa los corales y otra que representa las macroalgas. Y muestra que pasa cuando cambiamos las constantes.

Mostremos los códigos del programa.

```
CoralesAlgas[{a_, g_, d_, γ_, r_}, {c0_, m0_}, t1_] := Module[{c, m, t},
  {c, m} /. Quiet[NDSolve[{
    c'[t] == r (1 - m[t] - c[t]) c[t] - d c[t] - a m[t] c[t],
    m'[t] == a m[t] c[t] -  $\frac{g m[t]}{m[t] + (1 - m[t] - c[t])}$  + γ m[t] (1 - m[t] - c[t]),
    c[0] == c0,
    m[0] == m0
  }], {c, m}, {t, 0, t1}]] // Flatten
];
```

```

Manipulate[
Module[
{soln, col1 = RGBColor[1, 0, 0], col2 = RGBColor[0, 0, 1]},
Plot[Evaluate[{{#[[1]][t], #[[2]][t]} & [soln = Quiet@CoralesAlgas[{a, g, d, γ, r}, {corales0, algas0}, tmax]]],
{t, 0, Min[tmax, Min[#[[1, 1, 2]] & /@ soln]}],
AxesLabel → TraditionalForm /@ {t, {Style[corales[t], col1], Style[algas[t], col2]}},
PlotRange → All, AxesOrigin → {0, 0}, PlotStyle → {col1, col2}, ImageSize → {400, 300}, ImagePadding → {{40, 10}, {10, 25}}]
],
{{a, 0, "a"}, 0, 1, .001, ImageSize → Tiny, Appearance → "Open"}, Delimiter,
{{g, 0, "g"}, 0, 1, .01, ImageSize → Tiny, Appearance → "Open"}, Delimiter,
{{d, 0, "d"}, 0, 1, .001, ImageSize → Tiny, Appearance → "Open"}, Delimiter,
{{γ, 0, "γ"}, 0, 1, .001, ImageSize → Tiny, Appearance → "Open"}, Delimiter,
{{r, 0, "r"}, 0, 1, .0001, ImageSize → Tiny, Appearance → "Open"}, Delimiter,
"Poblaciones iniciales",
{{corales0, 0, "corales"}, 0, 1, ImageSize → Tiny},
{{algas0, 0, "algas"}, 0, 1, ImageSize → Tiny}, Delimiter, {{tmax, 40, "tiempo máximo"}, .01, 50, ImageSize → Tiny},
SaveDefinitions → True, ControlPlacement → Left]

```

Mostramos a continuación algunas gráficas del sistema, están graficados con las condiciones iniciales por el eje  $y$ , el tiempo en el eje  $x$ . Este modelo computacional permite una mayor comprensión del sistema cambiando algunas componentes de este, lo cual nos daría una simulación dinámica de los hechos que podrían pasar en determinadas condiciones. Veamos algunas graficas que nos dan soluciones numéricas del sistema con condiciones dadas de los parámetros.

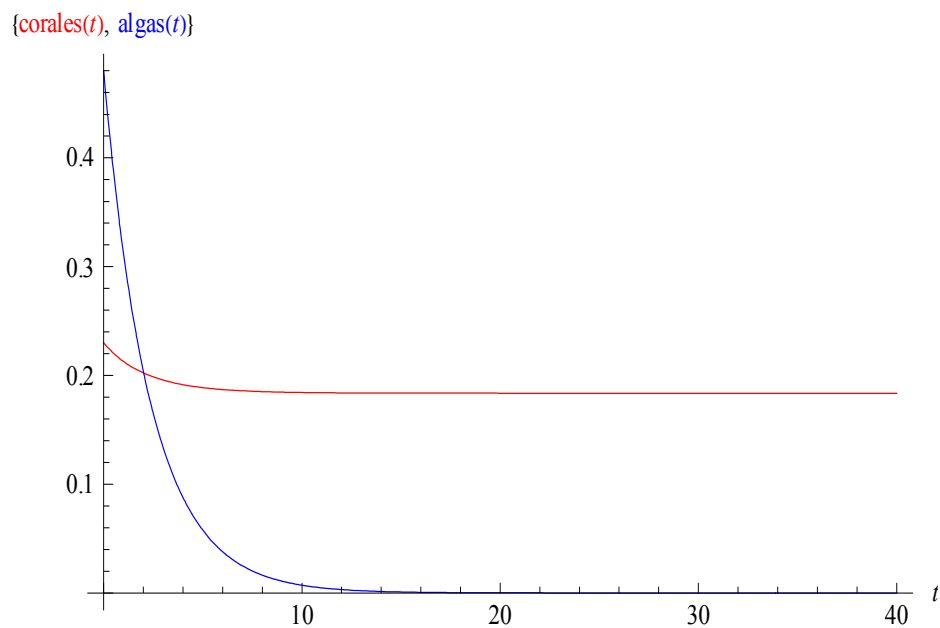


Figura: 11

En la siguiente grafica mostramos dos curvas la curva roja representa los corales y la azul las algas, obsérvese que en esta grafica la población inicial de las algas es mayor que la de los corales y en este caso hemos alterado las constantes  $a = 0.199$  y la constante  $g = 0.26$ . Observemos que pasa cuando dejamos estos valores fijos para  $a$ ,  $g$  y empezamos a mover los demás parámetros que intervienen en la ecuación.

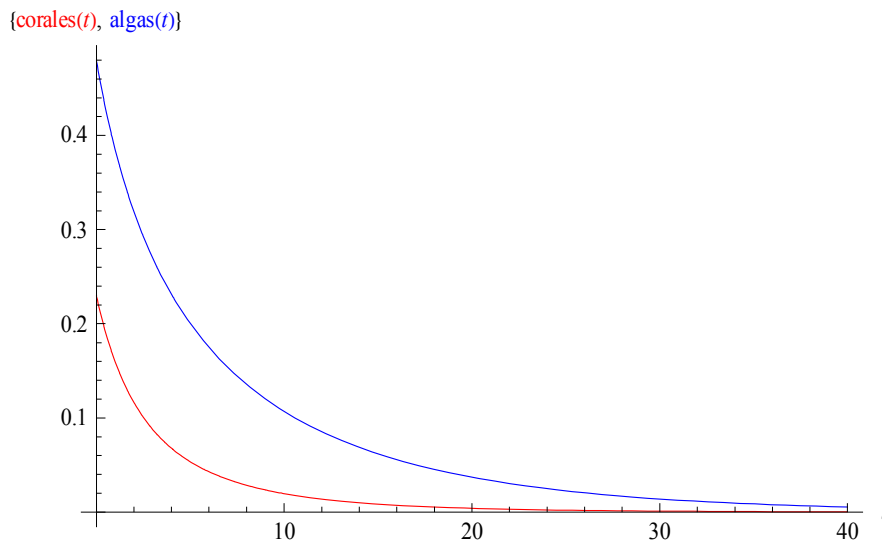


Figura: 12

Vemos en la grafica que pasa cuando dejamos los mismos valores para  $a$  ,  $g$  y las poblaciones iniciales, y simplemente cambiamos los parámetros  $\gamma = 0.167$  ,  $d = 0.373$  que es el parámetro de mortalidad del coral, también hemos cambiado el parámetro  $r = 0.246$  que es la tasa de crecimiento del coral, vemos en la grafica que existe una caída de los corales a medida de que pasa el tiempo con estos parámetros.

Ahora mostremos otra solución de este modelo pero en este caso alteraremos las constantes de tal manera que la línea de los corales pase por encima de las macroalgas logrando así manipular las soluciones de tal manera que alterando todas las constantes y las condiciones iniciales uno pueda tener ganancia sobre las macroalgas. Mostremos entonces la grafica continua:

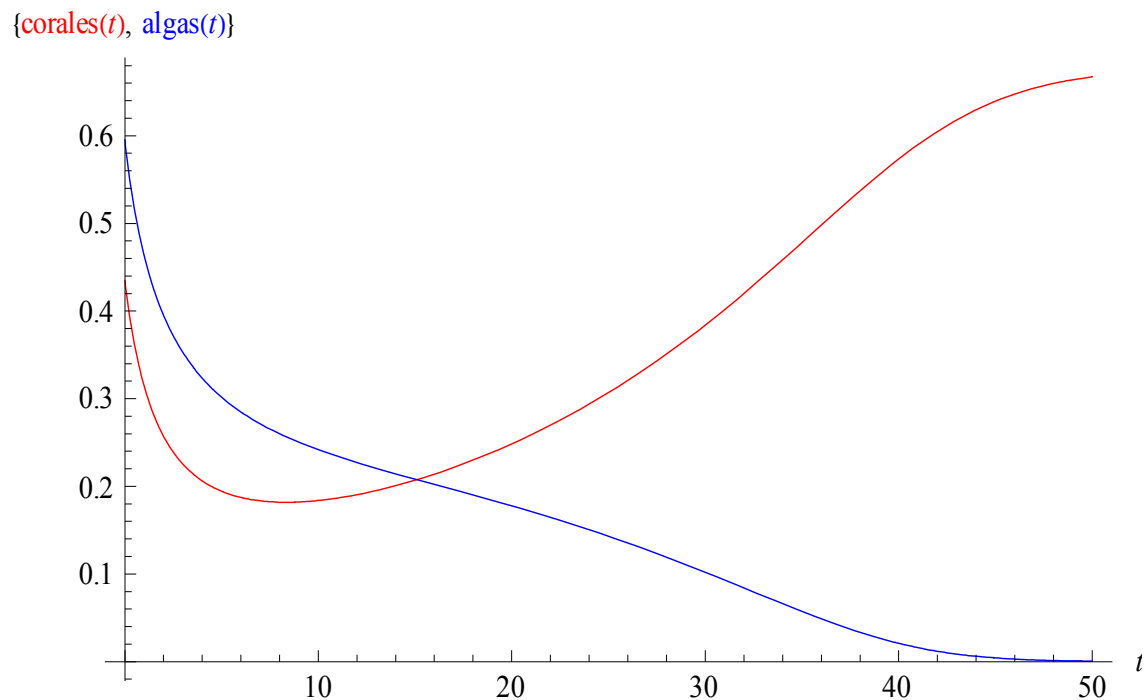


Figura: 13

Miremos en esta solución como en un plazo de alrededor de 15 o 16 años existe una recuperación de la población de los corales y hemos alterados constantes como la constante  $g = 0.29$ ,  $a = 0.437$ ,  $d = 0.151$ ,  $\gamma = 0.421$ ,  $r = 0.4683$ . Notemos que hemos establecido primeramente que las condición inicial del coral sean más pequeña que las establecidas para las macroalgas, también démonos cuenta que, en esta solución el ritmo o parámetro de crecimiento de los corales es más elevado que el rito de muerte de este.

Con esta concepción de simplemente manipular los parámetros que intervienen en la solución del sistema de ecuaciones diferenciales podemos tener una gran cantidad de soluciones que nos pueden servir para el mayor entendimiento del sistema.

---

## Conclusiones

- En el trabajo se ha explorado la estructura de un moderno modelo matemático de arrecife coralino, obteniéndose diversos planos de fase para distintos valores de los parámetros.
- Se han confeccionado ficheros con el paquete Wolfram Mathematica 6.0, que permiten a usuarios no especializados en programación la manipulación del modelo en dependencia de los parámetros y condiciones iniciales que intervienen en éste. Esto permitirá a biólogos y otros especialistas que estudian los arrecifes coralinos poder predecir con mayor certeza el futuro de estos ecosistemas en nuestro país y consecuentemente aplicar medidas de manejo más eficaces.



---

## Recomendaciones

- Continuar el estudio del modelo, considerando la inclusión del efecto de los nutrientes, pues de éstos también dependen las macroalgas para su propagación en los arrecifes coralinos.
- Presentar los resultados de este trabajo en diversos centros de nuestro país en que se estudien los arrecifes coralinos, para comenzar el proceso de prueba y validación futura de los programas implementados en Mathematica, así como su mejoramiento continuo.

## Bibliografía

1. *Mumby, Peter J., Alan Hastings, Helen J. Edwards, (2007), Thresholds and the resilience of Caribbean coral reefs. Nature, 450 (7166), p. 98-101.*
2. *Murray, J. D, (2003), Mathematical Biology I. New York: Springer.*
3. *R.W. Hiorns and D. Cooke, (1981), The Mathematical Theory of the Dynamics of Biological Populations II. Academic Press*
4. *Hao Bai-lin, (1988), Directions in Chaos, Volumen 2. World Scientific*
5. *Elsigoltz, L. (1977), Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional. Moscú: MIR.*
6. *Kaplan, Wilfred. (1967). Ordinary Differential Equations. Reading, Mass. Addison-Wesley.*
7. *Piskunov, N . (1969), Cálculo Diferencial e Integral. Tomo II. Moscú: MIR.*