

I. Problemas Resueltos del Tema II

- I.1 Prob. Res.Tema II-I
- I.2 Prob. Res.Tema II-II
- I.3 Prob. Res.Tema II-III
- I.4 Prob. Res.Tema II-IV
- I.5 Prob. Res.Tema II-V

II. Problemas Resueltos del Tema III

- II.1 Prob. Res.Tema III-I
- II.2 Prob. Res.Tema III-II
- II.3 Prob. Res.Tema III-III
- II.4 Prob. Res.Tema III-IV

III. Problemas Resueltos del Tema IV

- III.1 Prob. Res.Tema IV-I
- III.2 Prob. Res.Tema IV-II

IV. Problemas Resueltos del Tema V

- IV.1 Prob. Res.Tema V-I
- IV.2 Prob. Res.Tema V-II
- IV.3 Prob. Res.Tema V-III
- IV.4 Prob. Res.Tema V-IV

V. Problemas Resueltos del Tema VI

- V.1 Prob. Res.Tema VI-I
- V.2 Prob. Res.Tema VI-II
- V.3 Prob. Res.Tema VI-III

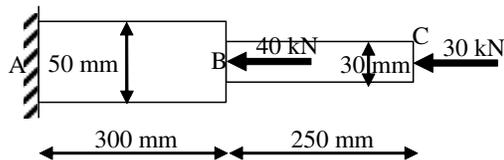
VI. Problemas Resueltos del Tema VII

- VI.1 Prob. Res.Tema VII-I
 - VI.2 Prob. Res.Tema VII-II
 - VI.3 Prob. Res.Tema VII-III
-



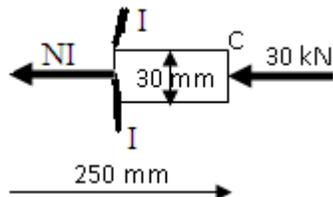
Problema Resuelto # 1.

Dos barras cilíndricas sólidas unidas en B están cargadas como se muestra. La barra AB es de acero ($E = 200 \text{ GPa}$), la barra BC es de latón ($E = 105 \text{ GPa}$). Hallar: a. El desplazamiento del punto C. b. El desplazamiento del punto B.



SOLUCION:

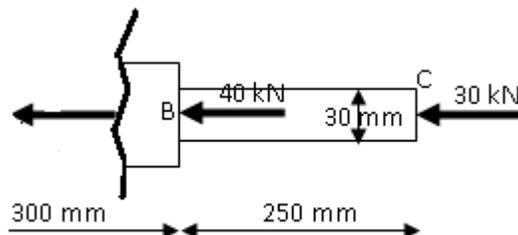
1. Se trata de un problema de análisis, puesto que me piden determinar los desplazamientos, o sea, parte de la respuesta en el campo de los desplazamientos del sistema.
2. Durante el análisis para la determinación de los esfuerzos axiales, trazamos la sec I-I entre B y C:



Haciendo $\sum F_h = 0$: $-30 \text{ kN} - N_I = 0$

De donde: $N_I := -30 \text{ kN}$

COMPRESION



Entre B y A trazamos la sección II-II: Haciendo $\sum F_h = 0$: $-30 \text{ kN} - 40 \text{ kN} - N_{II} = 0$

De donde: $N_{II} := -70\text{kN}$ COMPRESION

3. El desplazamiento total de la barra sería la suma de los desplazamientos de cada tramo:

$$L_{AB} := 300\text{mm} \quad E_{AB} := 200\text{GP}\epsilon \quad A_{AB} := \frac{\pi \cdot (50\text{mm})^2}{4} = 1.963 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$L_{BC} := 300\text{mm} \quad E_{BC} := 105\text{GP}\epsilon \quad A_{BC} := \frac{\pi \cdot (50\text{mm})^2}{4} = 1.963 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$\Delta_{AB} := \frac{N_{II} \cdot L_{AB}}{E_{AB} \cdot A_{AB}} = -0.05348\text{mm}$$

$$\Delta_{BC} := \frac{N_I \cdot L_{BC}}{E_{BC} \cdot A_{BC}} = -0.04365\text{mm}$$

$$\Delta_{ABC} := \Delta_{AB} + \Delta_{BC} = -0.09713\text{mm}$$

La deflexión del punto B, correspondería a la del tramo BC:

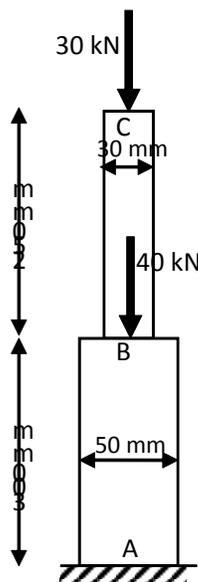
$$\Delta_B := \Delta_{BC} = -0.04365\text{mm}$$

p



Problema Resuelto # 2.

¿Cuáles serían los resultados del problema anterior, si consideramos su posición vertical con el empotramiento en el extremo inferior y el efecto del peso propio ($\gamma_{\text{acero}} = 78.5 \text{ kN/m}^3$, $\gamma_{\text{laton}} = 84.7 \text{ kN/m}^3$)?



$$L_{AB} := 300\text{mm} \quad E_{AB} := 200\text{GP}\epsilon$$

$$L_{BC} := 300\text{mm} \quad E_{BC} := 105\text{GP}\epsilon$$

$$A_{AB} := \frac{\pi \cdot (50\text{mm})^2}{4} = 1.963 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$A_{BC} := \frac{\pi \cdot (30\text{mm})^2}{4} = 706.86 \text{ mm}^2$$

$$\gamma_{\text{acero}} := 78.5 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$$

$$\gamma_{\text{laton}} := 84.7 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$$

SOLUCION:

En este caso, las fuerzas actuantes en cada sección son:

$$N_I(z) := -30\text{kN} - \gamma_{\text{laton}} \cdot A_{BC} \cdot z \quad z \text{ entre } 0 \text{ y } 250 \text{ mm}$$

$$N_{II}(z) := -70\text{kN} - \gamma_{\text{laton}} \cdot A_{BC} \cdot 250\text{mm} - \gamma_{\text{acero}} \cdot A_{AB} \cdot z$$

Ahora :

$$\Delta_{AB} := \int_0^{300\text{mm}} \frac{N_{II}(z)}{E_{AB} \cdot A_{AB}} dz = -0.05353\text{mm}$$

$$\Delta_{BC} := \int_0^{250\text{mm}} \frac{N_I(z)}{E_{BC} \cdot A_{BC}} dz = -0.0364\text{mm}$$

La deflexión total de la barra sería: $\Delta_{ABC} := \Delta_{AB} + \Delta_{BC} = -0.08993\text{mm}$

$$E_{AB} \cdot A_{AB} = 3.927 \times 10^5 \cdot \text{kN}$$

La deflexión del punto B, correspondería a la del tramo BC:

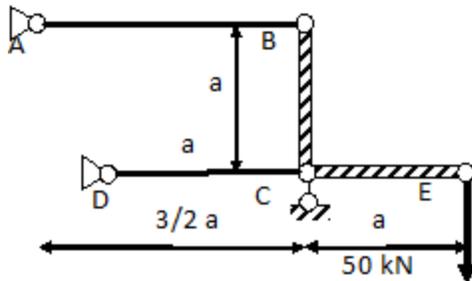
$$\Delta_B := \Delta_{AB} = -0.05353\text{mm}$$

p



Problema Resuelto # 3.

La barra rígida quebrada BCE se apoya en dos barras AB y CD y en el simple apoyo C. El conector AB es de aluminio ($E = 70 \text{ GPa}$) y tiene una sección transversal de 300 mm^2 ; el conector CD es de acero ($E = 200 \text{ GPa}$) y tiene una sección transversal de 600 mm^2 . Para la fuerza de 50 kN mostrada, halle el desplazamiento vertical y horizontal de E y los esfuerzos en las barras AB y CD, si $a = 1 \text{ m}$.



SOLUCIÓN :

$$P := 50 \text{ kN}$$

$$a := 1 \text{ m}$$

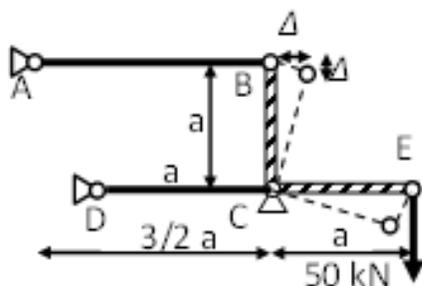
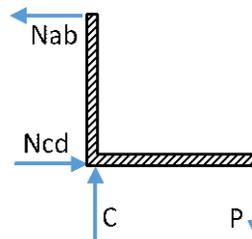
1. Se trata de un problema de análisis.
2. Realizando el DCL de la barra quebrada:

$$\Sigma F_h := 0 \quad N_{cd} := N_{ba}$$

$$\Sigma F_v := 0 \quad R_c := P$$

$$\Sigma M_c := 0 \quad P \cdot a - N_{ba} \cdot a = 0 \quad \text{de donde:}$$

$$N_{ba} := P = 50 \text{ kN} \quad (\text{TENS}) \quad N_{cd} := N_{ba} = 50 \text{ kN} \quad (\text{COMP})$$



3. A partir de las fuerzas que toman las barras determinamos los desplazamientos que estas experimentan:

$$\text{con } \boxed{l_{ba} := 1.5a = 1.5\text{m}} \quad \boxed{E_{ba} := 70\text{GPa}} \quad \boxed{A_{ba} := 300\text{mm}^2}$$

$$\Delta l_{ba} := \frac{N_{ba} \cdot l_{ba}}{E_{ba} \cdot A_{ba}}$$

$$\boxed{\Delta l_{ba} := \frac{N_{ba} \cdot l_{ba}}{E_{ba} \cdot A_{ba}} = 3.571\text{mm}} \quad (\text{Alargamiento})$$

$$\text{con } \boxed{l_{cd} := a = 1\text{m}} \quad \boxed{E_{cd} := 200\text{GPa}} \quad \boxed{A_{cd} := 600\text{mm}^2}$$

$$\Delta l_{cd} := \frac{N_{cd} \cdot l_{cd}}{E_{cd} \cdot A_{cd}}$$

$$\boxed{\Delta l_{cd} := \frac{N_{cd} \cdot l_{cd}}{E_{cd} \cdot A_{cd}} = 0.417\text{mm}} \quad (\text{Acortamiento})$$

4. El desplazamiento horizontal en E, Δ_{xE} sería el mismo desplazamiento de la barra CD, Δl_{cd} , ya que el simple apoyo no permite desplazamientos en la vertical, más el desplazamiento en E provocado por el giro con respecto a la articulación en C, que de acuerdo al esquema mostrado es Δl_{ba} :

$$\tan(60\text{deg}) = \frac{20\text{m}}{dh}$$

$$\boxed{\Delta_{xE} := \Delta l_{cd} + \Delta l_{ba} = 3.988\text{mm}}$$

El desplazamiento vertical en E, es el mismo desplazamiento de la barra Δl_{ba} :

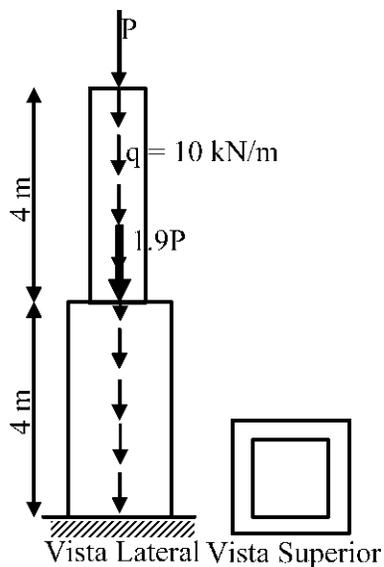
$$\boxed{\Delta_{yE} := \Delta l_{ba} = 3.571\text{mm}}$$

p



Problema Resuelto # 4.

3. El elemento mostrado es de sección maciza cuadrada escalonada, el tramo inferior tiene 350 mm de lado y sobresale 75 mm a cada lado del superior. Determine la carga máxima que puede actuar si se conoce que $\Delta_{adm} = 2$ mm, $\sigma_U = 10$ MPa y se desea un FS = 3 ante la falla. Considere $E = 22$ GPa. **Sugerencia:** Revise primero por el criterio de resistencia y después por el criterio de rigidez.



1. Se trata de un prob de revisión:

$$FS := 3 \quad \sigma_U := 15 \text{ MPa} \quad \Delta_{adm} := 1.5 \text{ mm} = 1.5 \times 10^{-3} \text{ m} \quad E := 22 \text{ GPa}$$

2. Análisis

$$q := 10 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$N_{I \max} := -P_{\max} - q \cdot 4 \text{ m} = \bullet \cdot \text{kN}$$

$$N_{II \max} := -2.9 P_{\max} - q \cdot 8 \text{ m} = \bullet \cdot \text{kN}$$

3. Revisión:

$$A_I := (350 \text{ mm} - 2 \cdot 75 \text{ mm})^2 = 0.04 \text{ m}^2$$

$$350 \text{ mm} - 2 \cdot 75 \text{ mm} = 0.2 \text{ m}$$

$$\sigma_{act.I} = \frac{N_I}{A_I} \leq \sigma_{adm} = \frac{\sigma_U}{FS}$$

$$\frac{\sigma_U}{FS} = 5 \cdot \text{MPa}$$

de donde:
$$\sigma_{actI} := \frac{|-P_{max} - q \cdot 4m|}{A_I} \leq \frac{\sigma_U}{FS} \qquad P_I := \frac{\sigma_U}{FS} \cdot A_I - q \cdot 4m = 160kN$$

Igualmente, comprobando para el tramo II:
$$A_{II} := (350mm)^2 = 0.123m^2$$

$$\sigma_{actI} := \frac{|-2.9P - q \cdot 8m|}{A_{II}} \leq \frac{\sigma_U}{FS} \qquad P_{II} := \frac{\frac{\sigma_U}{FS} \cdot A_{II} - q \cdot 8m}{2.9} = 183.62kN$$

Por tanto:
$$P_{res} := \min(P_I, P_{II}) = 160kN$$

Comprobando los desplazamientos: Cambiamos ahora el sistema de referencia para las N y lo colocamos en el empotramiento inferior, que es donde el desplazamiento es nulo, entonces las ecuaciones de las N(z) quedarían, siendo la reaccion en el empotramiento igual a:

$$R := -2.9P_{res} - q \cdot 8m = -544kN$$

$$N_{II}(z) := R + q \cdot z$$

Para $z := 0$ $N_{II}(0) = -544kN$

$$N_I(z) := R + q \cdot z + 1.9P_{res}$$

$z := 4m$ $N_{II}(4m) = -504kN$

Para $z := 4m$ $N_I(4m) = -200kN$

$z := 8m$ $N_I(8m) = -160kN$

$$\Delta := \frac{1}{E \cdot A_{II}} \int_0^{4m} N_{II}(x) dx + \frac{1}{E \cdot A_I} \int_{4m}^{8m} N_I(x) dx = -1.596mn$$

mayor:

$$\Delta_{adm} = 1.5mn$$

$$\frac{1}{E \cdot A_{II}} \int_0^{4m} N_{II}(x) dx = -0.778mn$$

$$\int_0^{lim1} N_{II}(x) dx \rightarrow \frac{5 \cdot kN \cdot lim1^2}{m} - 544000N \cdot lim$$

$$\frac{1}{E \cdot A_I} \int_0^{4m} N_I(x) dx = -1 \cdot mn$$

$$\int_{lim1}^{lim2} N_I(x) dx \rightarrow \frac{5.0(lim1 + -1.0lim2) \cdot (-48000.0N \cdot m + kN \cdot lim1 + kN \cdot lim2)}{m}$$

$$\int_0^{4\text{m}} N_{\text{I}}(x) dx = -880\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$\int_0^{4\text{m}} N_{\text{II}}(x) dx = -2096\text{kN}\cdot\text{m}$$

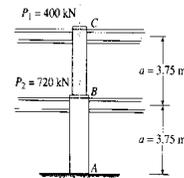
Otra forma de plantearlo, por tramos:

$$\frac{1}{E \cdot A_{\text{II}}} \int_0^{4\text{m}} (-2 \cdot P_{\text{res}} - q \cdot 4\text{m} - q \cdot x) dx + \frac{1}{E \cdot A_{\text{I}}} \int_0^{4\text{m}} (-P_{\text{res}} - q \cdot x) dx = -1.596 \times 10^{-3} \text{ m}$$



Problema Resuelto # 5.

Un edificio de dos niveles tiene columnas cuadradas AB en la planta baja y BC en el primer piso de ladrillo ($\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$). La carga del techo P_1 , es igual a 400 kN y la carga P_2 del primer piso es de 720 kN. Cada columna tiene longitud $a = 3,75 \text{ m}$. Si el esfuerzo admisible en los ladrillos es de $7,5 \text{ kN/m}^2$, el módulo de deformación $E = 12 \text{ GPa}$, y que el desplazamiento admisible de las columnas es de 5 mm, determine las dimensiones de las columnas en cada tramo. Sugerencia: Realice el diseño por resistencia y posteriormente compruebe el criterio de rigidez.



1. Se trata de un prob de diseño:

$$\sigma_{\text{adm}} := 7,5 \text{ MPa} \quad \Delta_{\text{adm}} := 5 \text{ mm} = 5 \times 10^{-3} \text{ m} \quad \gamma := 20 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \quad h := 3,75 \text{ m}$$

2. Análisis $P_1 := 400 \text{ kN}$ $P_2 := 450 \text{ kN}$

$$N_{\text{I max}} := -P_1 - \gamma \cdot A_{\text{I}} \cdot h$$

$$N_{\text{II max}} := -(P_1 + P_2) - \gamma \cdot A_{\text{I}} \cdot h - \gamma \cdot A_{\text{II}} \cdot h$$

3. Diseño:

$$\sigma_{\text{act.I}} := \frac{N_{\text{I max}}}{A_{\text{I}}} = \frac{(-P_1 - \gamma \cdot A_{\text{I}} \cdot h)}{A_{\text{I}}} = \frac{-P_1}{A_{\text{I}}} - \gamma \cdot h \leq \sigma_{\text{adm}}$$

$$\text{de donde: } A_{\text{I}} := \frac{|P_1|}{\sigma_{\text{adm}} + \gamma \cdot h} = 0,053 \text{ m}^2$$

$$d_{\text{I}} := \sqrt{A_{\text{I}}} = 229,794 \text{ mm}$$

Igualmente, comprobando para el tramo II:

$$\sigma_{\text{act.II}} := \frac{|-(P_1 + P_2) - \gamma \cdot A_{\text{I}} \cdot h - \gamma \cdot A_{\text{II}} \cdot h|}{A_{\text{II}}} \leq \sigma_{\text{adm}}$$

De donde

$$A_{\text{II}} := \frac{|-(P_1 + P_2) - \gamma \cdot A_{\text{I}} \cdot h|}{\sigma_{\text{adm}} + \gamma \cdot h} = 0,113 \text{ m}^2$$

$$d_{\text{II}} := \sqrt{A_{\text{II}}} = 335,759 \text{ mm}$$

Comprobando por rigidez:

$$E := 12 \text{GP}\varepsilon$$

$$\Delta := \frac{1}{E \cdot A_I} \cdot \int_0^h (-P_1 - \gamma \cdot A_I \cdot x) \, dx + \frac{1}{E \cdot A_{II}} \cdot \int_0^h (-P_1 - \gamma \cdot A_I \cdot h - P_2 - \gamma \cdot A_{II} \cdot x) \, dx = -4.758 \text{mm}$$

casi igual que: $\Delta_{\text{adm}} = 5 \cdot \text{mm}$

$$\frac{1}{E \cdot A_I} \cdot \int_0^h (-P_1 - \gamma \cdot A_I \cdot x) \, dx = -2.379 \text{mm}$$

$$\frac{1}{E \cdot A_{II}} \cdot \int_0^h (-P_1 - \gamma \cdot A_I \cdot h - P_2 - \gamma \cdot A_{II} \cdot x) \, dx = -2.379 \text{mm}$$

$$\left[\int_0^h (-P_1 - \gamma \cdot A_I \cdot x) \, dx \right] = -1507.42 \text{kN}\cdot\text{m}$$

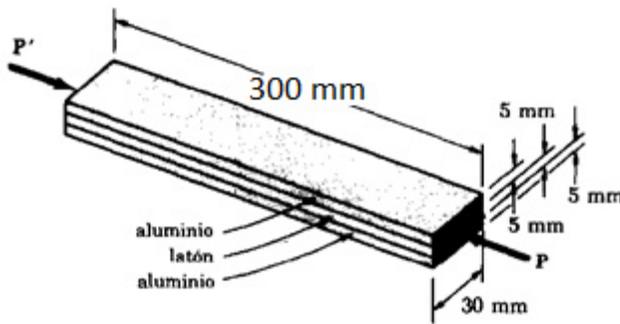
$$\left[\int_0^h (-P_1 - \gamma \cdot A_I \cdot h - P_2 - \gamma \cdot A_{II} \cdot x) \, dx \right] = -3218.20 \text{kN}\cdot\text{m}$$

Problemas Resueltos



Problema Resuelto # 1

Una barra de 300 mm de longitud, con sección de $h \times b = 15 \text{ mm} \times 30 \text{ mm}$ consta de dos capas de aluminio de 5 mm, perfectamente adheridas a una central de latón del mismo espesor. Si se le somete a cargas axiales $P = 50 \text{ kN}$ y sabiendo que $E_{\text{alum}} = 70 \text{ GPa}$ y $E_{\text{latón}} = 105 \text{ GPa}$, halle el esfuerzo en cada material y el desplazamiento de la barra.



SOLUCIONARIO:

$$\text{Long} := 300 \text{ mm}$$

$$b := 30 \text{ mm}$$

$$\text{esp}_{\text{al}} := 10 \text{ mm}$$

$$\text{esp}_{\text{lat}} := 5 \text{ mm}$$

$$P := 50 \text{ kN}$$

$$E_{\text{al}} := 70 \text{ GPa}$$

$$E_{\text{lat}} := 105 \text{ GPa}$$

La ecuación de equilibrio es:

$$N_{\text{al}} + N_{\text{lat}} + P = 0$$

La ecuación de compatibilidad en este caso sería:

$$\Delta_{\text{al}} = \Delta_{\text{lat}}$$

sustituyendo :

$$\frac{N_{\text{al}} \cdot \text{Long}}{E_{\text{al}} \cdot A_{\text{al}}} = \frac{N_{\text{lat}} \cdot \text{Long}}{E_{\text{lat}} \cdot A_{\text{lat}}}$$

Despejando para N_{al} :

$$N_{al} := -\frac{N_{lat} \cdot Long}{E_{lat} \cdot A_{lat}} \cdot \left(\frac{E_{al} \cdot A_{al}}{Long} \right) = -\frac{N_{lat}}{E_{lat} \cdot A_{lat}} \cdot (E_{al} \cdot A_{al})$$

La ecuación de equilibrio:

$$N_{al} + N_{lat} + P = 0 \quad N_{lat} := -P - N_{al} = -P - \frac{N_{lat}}{E_{lat} \cdot A_{lat}} \cdot (E_{al} \cdot A_{al})$$

$$N_{lat} := \frac{-P}{1 + \frac{E_{al} \cdot (esp_{al})}{E_{lat} \cdot esp_{lat}}} = -21.429 \cdot kN \quad \sigma_{lat} := \frac{N_{lat}}{esp_{lat} \cdot b} = -142.857 \cdot MPa$$

Cálculos auxiliares

$$\left[\frac{1}{1 + \frac{E_{al} \cdot (esp_{al})}{E_{lat} \cdot esp_{lat}}} \right] = 0.429 \quad 1 + \frac{E_{al} \cdot (esp_{al})}{E_{lat} \cdot esp_{lat}} = 2.333$$

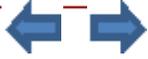
Sustituyendo en la ecuación de equilibrio:

$$N_{al} := -P - N_{lat} = -28.571 \cdot kN \quad \sigma_{al} := \frac{N_{al}}{esp_{al} \cdot b} = -95.238 \cdot MPa$$

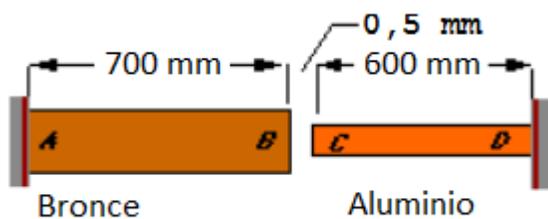
El desplazamiento puede calcularse como el desplazamiento de cualquiera de los Materiales, tendría que dar igual:

$$\Delta_{al} := \frac{N_{al} \cdot Long}{E_{al} \cdot esp_{al} \cdot b} = -0.408 \cdot mm \quad \text{de acortamiento}$$

$$\Delta_{lat} := \frac{N_{lat} \cdot Long}{E_{lat} \cdot esp_{lat} \cdot b} = -0.408 \cdot mm \quad \text{de acortamiento}$$



Problema Resuelto # 2.



$$E_b := 105\text{GPa} \quad A_{ab} := 2000\text{mm}^2 \quad L_{ab} := 700\text{mm} \quad \alpha_b := 19 \cdot 10^{-6}$$

$$E_a := 70\text{GPa} \quad A_{cd} := 1000\text{mm}^2 \quad L_{cd} := 600\text{mm} \quad \alpha_a := 23 \cdot 10^{-6}$$

$$\Delta t := 160 - 20 = 140$$

$$\text{hol} := 0.5\text{mm}$$

La ecuación de equilibrio es: $R_A - R_B = 0$

La ecuación de compatibilidad de desplazamientos quedaria en este caso:

$$R_A := 1\text{kN}$$

$$\frac{R_A \cdot L_{ab}}{E_b \cdot A_{ab}} - \frac{R_B \cdot L_{cd}}{E_a \cdot A_{cd}} + \alpha_a \cdot L_{ab} \cdot \Delta t + \alpha_b \cdot L_{cd} \cdot \Delta t = \text{hol}$$

$$\alpha_a \cdot L_{ab} \cdot \Delta t + \alpha_b \cdot L_{cd} \cdot \Delta t = 3.85 \cdot \text{mm}$$

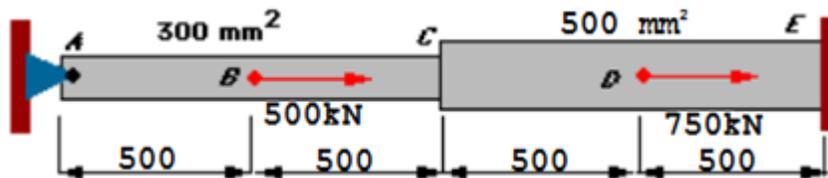
$$R_A := \text{root} \left(-\frac{R_A \cdot L_{ab}}{E_b \cdot A_{ab}} - \frac{R_A \cdot L_{cd}}{E_a \cdot A_{cd}} + \alpha_a \cdot L_{ab} \cdot \Delta t + \alpha_b \cdot L_{cd} \cdot \Delta t - \text{hol}, R_A \right) = 281.4 \cdot \text{kN}$$

$$R_B := R_A = 281.4 \cdot \text{kN}$$

Problemas Resueltos



Problema Resuelto # 3



$$A_{abc} := 300\text{mm}^2 \quad A_{cde} := 500\text{mm}^2 \quad L_t := 500\text{mm}$$

$$E := 200\text{GPa} \quad P_1 := 500\text{kN} \quad P_2 := 750\text{kN}$$

$$\text{Del Equilibrio:} \quad -R_a + P_1 + P_2 - R_e = 0$$

$$\text{De la compatibilidad de desplazamientos:} \quad \Delta_{ab} + \Delta_{bc} + \Delta_{cd} + \Delta_{de} = 0$$

$$\frac{R_a \cdot L_t}{E \cdot A_{abc}} + \frac{(R_a - P_1) \cdot L_t}{E \cdot A_{abc}} + \frac{(R_a - P_1) \cdot L_t}{E \cdot A_{cde}} + \frac{(R_a - P_1 - P_2) \cdot L_t}{E \cdot A_{cde}} = 0$$

Simplificando :

$$\frac{R_a}{A_{abc}} + \frac{(R_a - P_1)}{A_{abc}} + \frac{(R_a - P_1)}{A_{cde}} + \frac{(R_a - P_1 - P_2)}{A_{cde}} = 0$$

efectuando:

$$\frac{R_a}{A_{abc}} + \frac{R_a}{A_{abc}} - \frac{P_1}{A_{abc}} + \frac{R_a}{A_{cde}} - \frac{P_1}{A_{cde}} + \frac{R_a}{A_{cde}} - \frac{(P_1 + P_2)}{A_{cde}} = 0$$

Resolviendo para R_a:

$$R_a \cdot \left(\frac{2}{A_{abc}} + \frac{2}{A_{cde}} \right) = \frac{P_1}{A_{abc}} + \frac{P_1}{A_{cde}} + \frac{(P_1 + P_2)}{A_{cde}}$$

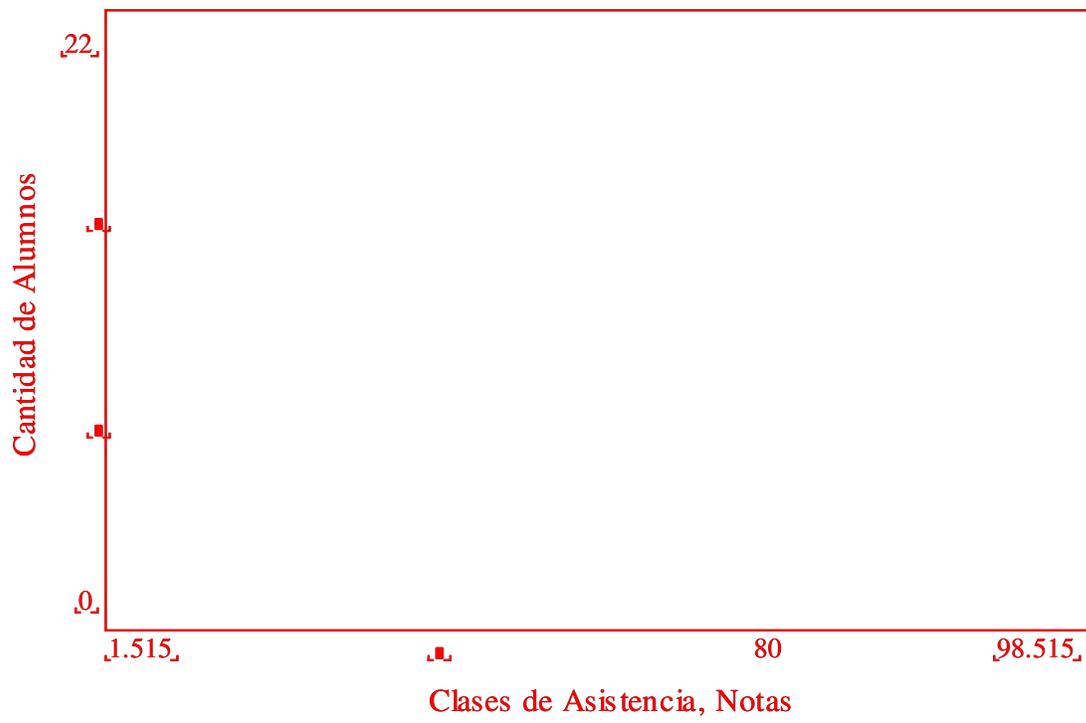
$$R_a := \frac{\frac{P_1}{A_{abc}} + \frac{P_1}{A_{cde}} + \frac{(P_1 + P_2)}{A_{cde}}}{\left(\frac{2}{A_{abc}} + \frac{2}{A_{cde}} \right)} = 484.375 \cdot \text{kN}$$

$$R_e := -R_a + P_1 + P_2 = 765.625 \cdot \text{kN}$$

$$\Delta_c := \frac{R_a \cdot L_t}{E \cdot A_{abc}} + \frac{(R_a - P_1) \cdot L_t}{E \cdot A_{abc}} = 3.906 \cdot \text{mm}$$

hacia la derecha ya que se alarga...

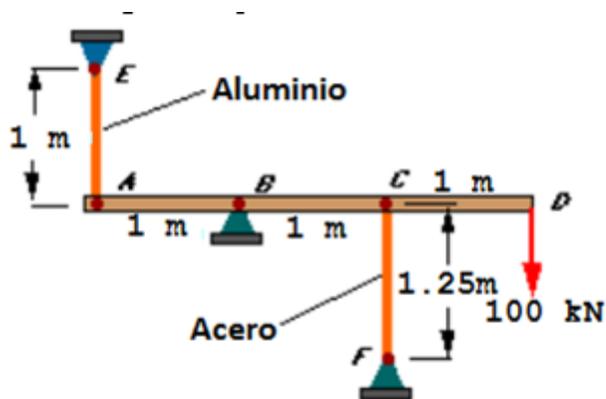
Comportamiento Asistencia vs. Aprovechamiento Academico 2PP



Problemas Resueltos



Problema Resuelto # 4



$$a := 1\text{ m} \quad P := 100\text{ kN} \quad L_{\text{al}} := 1\text{ m} \quad A_s := 1500\text{ mm}^2$$

$$E_a := 205\text{ GPa} \quad E_{\text{al}} := 70\text{ GPa} \quad L_a := 1.25\text{ m}$$

Es un sistema hiperestático. Eliminamos el alambre en A y lo sustituimos por la reacción R.a.

$$\text{Del Equilibrio :} \quad \Sigma F_v = 0 \quad -R_a + R_b + R_c - P = 0$$

$$\Sigma M_b = 0 \quad R_a \cdot a + R_c \cdot a - P \cdot (2 \cdot a) = 0$$

$$\text{Simplificando :} \quad R_a + R_c - 2P = 0$$

$$\text{De la compatibilidad de desplazamientos:} \quad \frac{\Delta_c}{a} = \frac{\Delta_a}{a}$$

$$\text{sustituyendo :} \quad \frac{\frac{R_c \cdot L_a}{E_a \cdot A_s}}{a} = \frac{\frac{R_a \cdot L_{\text{al}}}{E_{\text{al}} \cdot A_s}}{a}$$

$$\frac{L_{al}}{E_{al} \cdot A_s} \cdot \left(\frac{E_a \cdot A_s}{L_a} \right) = 2.343 \quad \text{de donde:} \quad R_c := \frac{R_a \cdot L_{al}}{E_{al} \cdot A_s} \cdot \left(\frac{E_a \cdot A_s}{L_a} \right) = 2.343 \cdot R_a$$

Sustituyendo en la ecuación de equilibrio de ΣM : $R_a + 2.343 \cdot R_a - 2 \cdot P = 0$

de donde obtenemos:

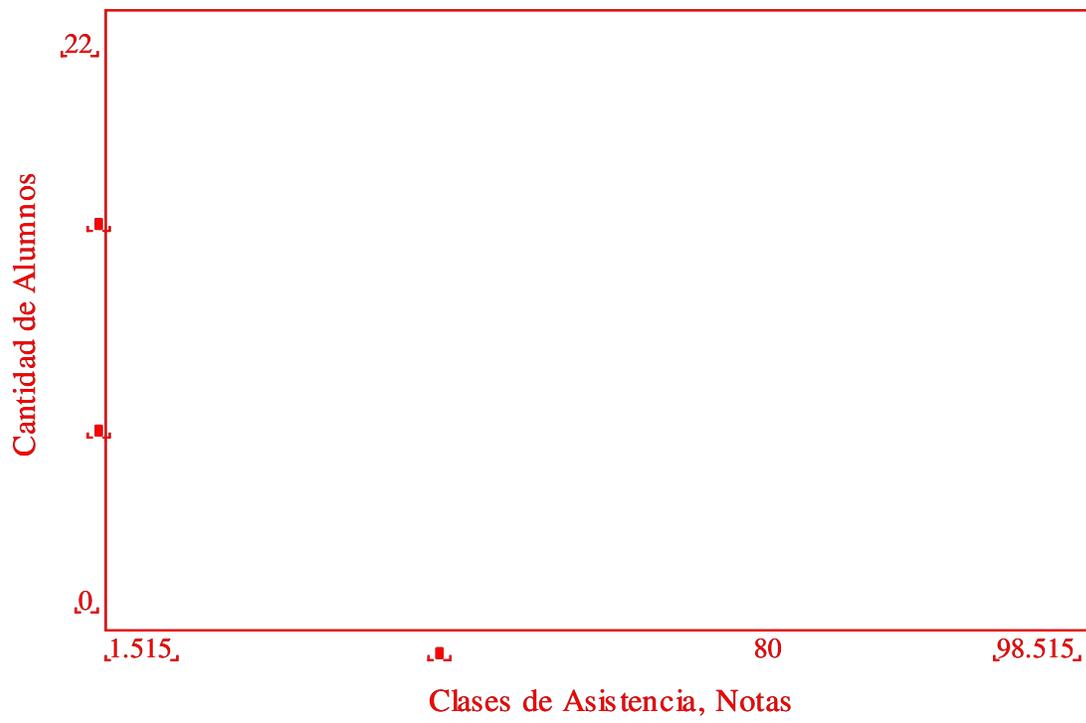
$$R_a := \frac{2 \cdot P}{(1 + 2.343)} = 59.827 \cdot \text{kN}$$

$$R_c := R_a \cdot 2.343 = 140.173 \cdot \text{kN}$$

$$\Delta_c := \frac{R_c \cdot L_a}{E_a \cdot A_s} = 0.57 \cdot \text{mm}$$

$$\Delta_d := 2 \cdot \Delta_c = 1.14 \cdot \text{mm}$$

Comportamiento Asistencia vs. Aprovechamiento Academico 2PP

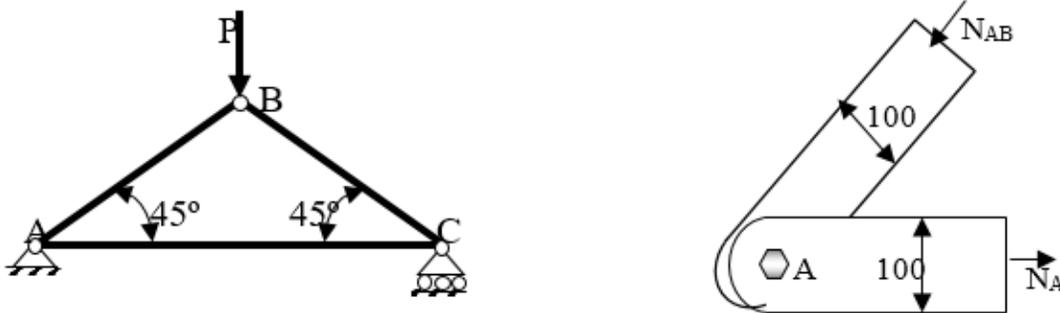


Problemas Resueltos



Problema Resuelto # 1

Si la armadura cuyo esquema de cálculo se muestra estuviera conformada por planchas de 100 mm de ancho y espesor 10 mm, unidas por un solo perno de diámetro $d = 20 \text{ mm}$ en los nudos, como se representa en el esquema de la derecha, y conociendo que los esfuerzos admisibles son: $\sigma_{\text{adm tensión}} = 160 \text{ MPa}$, $\sigma_{\text{adm aplastam}} = 320 \text{ MPa}$, $\tau_{\text{adm pernos}} = 90 \text{ MPa}$, determine el valor máximo de P , con base en el diseño para las uniones del elemento AC.



1. Se trata de un prob de revisión por resistencia de una unión a solape, donde hay un plano de corte.

2. Datos : $p_c := 1$ $t := 10\text{mm}$

$\sigma_{\text{apl}} := 320\text{MPa}$ $\tau_{\text{adm}} := 90\text{MPa}$ $\sigma_t := 160\text{MPa}$

$n := 1$ $b := 100\text{mm}$ $d_p := 20\text{mm}$

La fuerza que solicita la unión debe ser calculada a partir del análisis de la armadura:

Para el nudo B: De la ΣF_h : $N_{BA} := N_{BC}$

De la ΣF_v : $N_{BA} := \frac{-P}{2 \cdot \cos(45\text{deg})}$

Para el nudo C: $C_y := \frac{P}{2}$ $N_{BC} \cdot \cos(45\text{deg}) - N_{CA} = 0$

$$N_{CA} := N_{BC} \cdot \cos(45\text{deg}) = \frac{P}{2}$$

3. Criterio de cortante en los pernos:

$$\tau_{\text{act}} = \frac{\frac{P}{2}}{pc \cdot n \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}} \leq \tau_{\text{adm}} \quad \text{de donde:} \quad n = 1 \quad pc = 1$$

$$P_{\text{cort}} := 2 \cdot \left(pc \cdot n \cdot \frac{\pi \cdot d_p^2}{4} \cdot \tau_{\text{adm}} \right) = 56.549 \cdot \text{kN}$$

4. Criterio de tensión en el área neta de la plancha:

$$\sigma_{\text{act_net}} = \frac{\frac{P}{2}}{t \cdot (b - d)} \leq \sigma_t \quad \text{de donde:}$$

$$P_{\text{tens}} := \sigma_t \cdot [t \cdot (b - d_p)] \cdot 2 = 256 \cdot \text{kN}$$

5. Criterio de Aplastamiento:

$$\sigma_{\text{apl}} = \frac{\frac{P}{2}}{d \cdot t} \leq \sigma_{\text{apl}} \quad \text{de donde:} \quad P_{\text{apl}} := \sigma_{\text{apl}} \cdot (d_p \cdot t) \cdot 2 = 128 \cdot \text{kN}$$

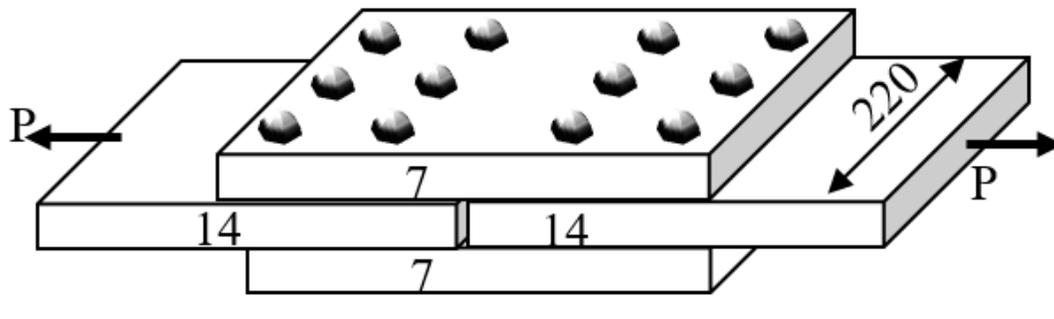
R / La carga máxima que es posible aplicar a la armadura es de:

$$P_{\text{max}} := \min(P_{\text{apl}}, P_{\text{tens}}, P_{\text{cort}}) = 56.549 \cdot \text{kN}$$



Problema Resuelto # 2.

2. Determine el diámetro de los pernos en la unión mostrada en la figura, conociendo que $P = 250 \text{ kN}$, que el esfuerzo admisible a cortante en las planchas y en los pernos es de 90 MPa , que el esfuerzo admisible a tensión es 160 MPa , y a aplastamiento 320 MPa . Las distancias entre pernos son de $3.5 d$ y de los pernos al borde $2 d$. **Sugerencia:** use un número entero de mm en el resultado.



1. Se trata de un prob de diseño por resistencia de una unión a tope con cubrejuntas, donde hay dos planos de corte y el fallo de las planchas es más peligroso que el de los cubrejuntas, según los espesores.

2. Datos $P := 250 \text{ kN}$ $t := 14 \text{ mm}$ $\tau_{\text{adm}} := 90 \text{ MPa}$ $\sigma_t := 160 \text{ MPa}$

$\sigma_{\text{admapl}} := 320 \text{ MPa}$ $n := 6$ $pc := 2$ $b := 220 \text{ mm}$

3. Criterio de cortante en los pernos:

$$\tau_{\text{act}} = \frac{P}{pc \cdot n \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}} \leq \tau_{\text{adm}}$$

de donde: $d_{\text{corte}} := \sqrt{\frac{P}{pc \cdot n \cdot \frac{\pi \cdot \tau_{\text{adm}}}{4}}} = 17.168 \text{ mm}$

4. Criterio de Desgarramiento en la plancha:

tomamos $d = 18 \text{ mm}$ $d := 18 \text{ mm}$

Con $a_0 := 2 \cdot d = 0.036 \text{ m}$ $a := 3.5 \cdot d = 0.063 \text{ m}$

$$\tau_{\text{act}} = \frac{P}{6 \cdot [t \cdot (a_0 + a)]} \leq \tau_{\text{adm}}$$

$$d_{\text{desg}} := \frac{P}{(\tau_{\text{adm}} \cdot 6 \cdot t \cdot 5.5)} = 6.013 \text{ mm}$$

de donde:

Si comprobamos para el $d=17.168$ en este criterio vemos que cumple hogadamente

$$\frac{P}{6 \cdot [t \cdot (5.5 \cdot 17.17 \text{mm})]} = 31.516 \text{MPa} \quad \text{cumpl}$$

Por lo que este criterio no es crítico y por tanto no decide.

5. Criterio de tensión en el área neta de la plancha:

$$\sigma_{\text{act_net}} = \frac{P}{t \cdot (b - 3 \cdot d)} \leq \sigma_t \quad \text{despejando } d \text{ y resolviendo:}$$

$$\text{root} \left[\frac{P}{t \cdot (b - 3 \cdot d)} - \sigma_t, d \right] = 36.131 \text{mm}$$

$$t \cdot (b - 3 \cdot d) = 2.324 \times 10^{-3} \text{m}^2$$

Si comprobamos para el $d=17.168$ en este criterio vemos que cumple hogadamente

$$\frac{P}{t \cdot (b - 3 \cdot 17.167 \text{mm})} = 105.978 \text{MPa} \quad \sigma_t := 160 \text{MPa} \quad \text{cumpl}$$

6. Criterio de Aplastamiento:

$$\sigma_{\text{act_apl}} := \frac{P}{n \cdot t \cdot d} = 165.344 \text{MPa} \quad \sigma_{\text{admapl}} := 320 \text{MPa} \quad \text{cumpl}$$

Si hubiesemos calculado d para este criterio seria:

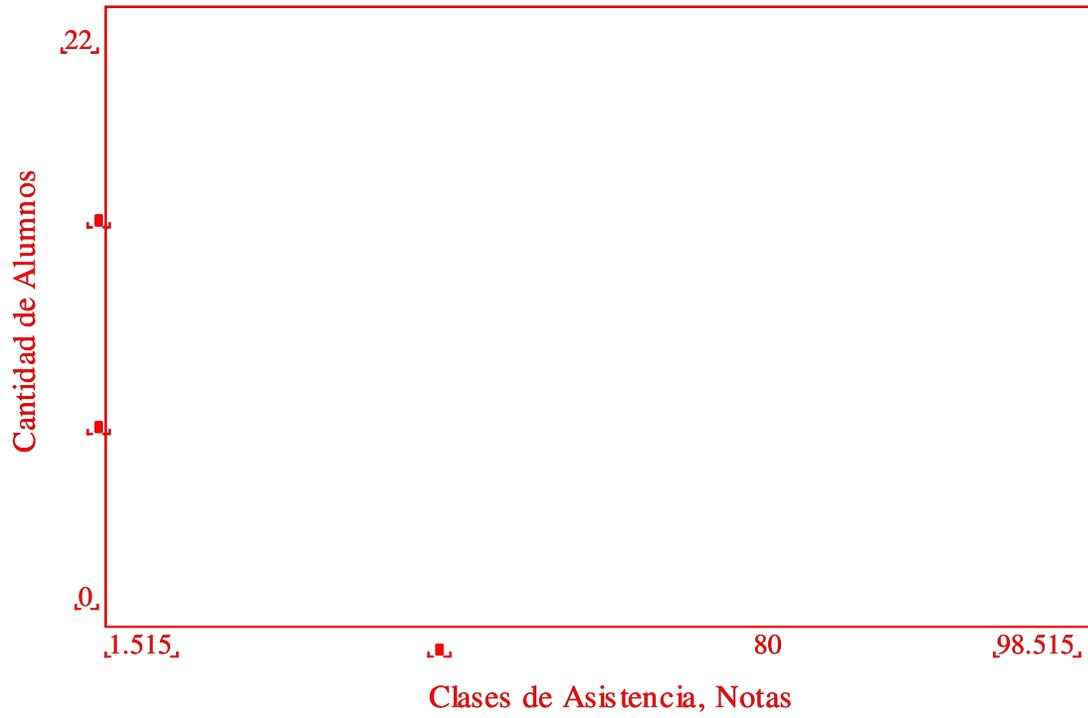
$$\text{root} \left(\frac{P}{n \cdot t \cdot d} - \sigma_{\text{admapl}}, d \right) = 9.301 \text{mm}$$

El cual tampoco decide el diseño de la unión.

Después de haber evaluado los criterios se llega a la conclusión siguiente:

R / el diametro debe ser de 18 mm

Comportamiento Asistencia vs. Aprovechamiento Academico 2PP





Problema Resuelto # 1

Convenios de signos para el tema de Estado Tensional Plano:

α positivo en sentido antihorario, o sea, en sentido trigonométrico positivo

τ positivo en sentido antihorario,

σ es positivo si provoca tensión en la cara analizada

Debemos tomar en cuenta que importa el valor algebraico, o sea con el signo, por lo que un esfuerzo de -500 kPa será menor que otro de 100 KPa.

El ángulo α se mide siempre desde el plano donde actúa el mayor de los esfuerzos hasta la normal al plano en que se quieren determinar los esfuerzos normales.

Resumen de expresiones. Problema Directo:

$$\sigma_x(\sigma_1, \sigma_2, \alpha) := \sigma_1 \cdot \cos(\alpha)^2 + \sigma_2 \cdot \sin(\alpha)^2 \quad (2.1)$$

$$\tau_{xy}(\sigma_1, \sigma_2, \alpha) := -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin(2 \cdot \alpha) \quad (2.2)$$

$$\sigma_y(\sigma_1, \sigma_2, \alpha) := \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(2 \cdot \alpha) \quad (2.3)$$

Los valores de σ_1 se han supuesto horizontales y con ellos se escogería σ_x para determinar el esfuerzo en la cara inclinada. **Por tanto, si σ_1 es vertical, deberá tomarse para calcular los esfuerzos en la cara inclinada la expresión de σ_y en un problema directo.**

Sobre la base anterior, los valores de τ_{xy} calculados por la expresión (2.2), dan el valor del esfuerzo tangencial en la cara donde actúa σ_x , **por tanto si σ_1 es horizontal, deberán interpretarse con el signo que den los esfuerzos en la expresión (2.2). En caso contrario en la cara inclinada actuarían esfuerzos de signo contrario al que da la expresión (2.2).**

Resumen de expresiones. Problema Inverso tipo I:

Esfuerzos principales máximos

$$\sigma_{\max}(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) := \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{\min}(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) := \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Plano de los esfuerzos ppales

$$\alpha_0(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) := \frac{1}{2} \cdot \text{atan}\left(\frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)$$

Esfuerzos tangenciales máximos

$$\tau_{\max}(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) := \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \tau_{\min}(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) := -\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{\text{media}}(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) := \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

plano de los esf. tangenciales maximos

$$\alpha_1(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) := \frac{1}{2} \cdot \text{atan}\left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \cdot \tau_{xy}}\right)$$

- ✓ Los valores de α_1, α_0 calculados, siempre deberán ser tomados de forma que $2\alpha_1 < 90^\circ$ y $2\alpha_0 < 90^\circ$.

Resumen de expresiones. Problema Inverso tipo II:

$$\sigma_{x\alpha}(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \alpha) := \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos(2 \cdot \alpha) + \tau_{xy} \cdot \sin(2 \cdot \alpha)$$

$$\sigma_{y\alpha}(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \alpha) := \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos(2 \cdot \alpha) - \tau_{xy} \cdot \sin(2 \cdot \alpha)$$

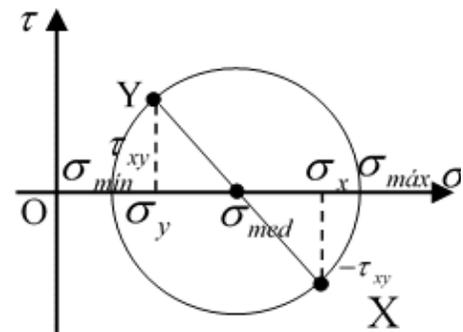
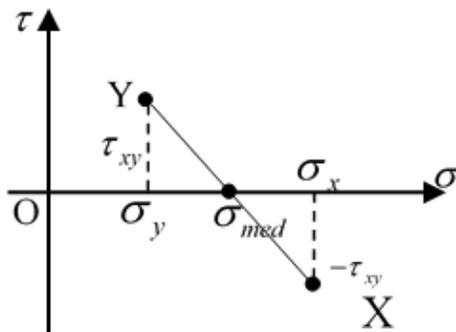
$$\tau_{xy}(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \alpha) := -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin(2 \cdot \alpha) + \tau_{xy} \cdot \cos(2 \cdot \alpha)$$

Su signo corresponde al esfuerzo en la cara donde actúa $\sigma \cdot x\alpha$

Para graficar:

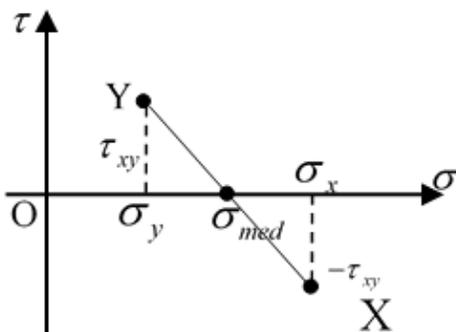
En problema Directo

1. Ubicamos a escala el punto X, de coordenadas $X = (\sigma_1; 0)$, que representa los esfuerzos en la cara donde actúa σ_x ,
2. Ubicamos a escala el punto Y, de coordenadas $Y = (\sigma_3; 0)$, que representa los esfuerzos en la cara donde actúa σ_y ,

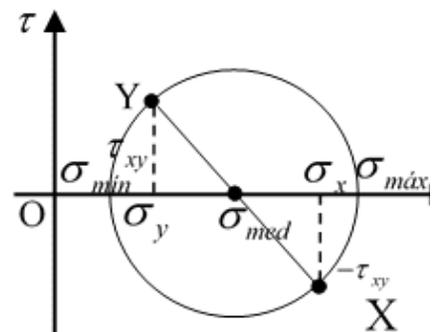


1. Ubicamos a escala el punto X, de coordenadas $X = (\sigma_x, -\tau_{xy})$, que **a** representa los esfuerzos en la cara donde actúa σ_x ,
2. Ubicamos a escala el punto Y, de coordenadas $Y = (\sigma_y, \tau_{xy}) = (\sigma_y, -\tau_{yx})$, que **b** representa los esfuerzos en la cara donde actúa σ_y ,

En problema Inverso:



a

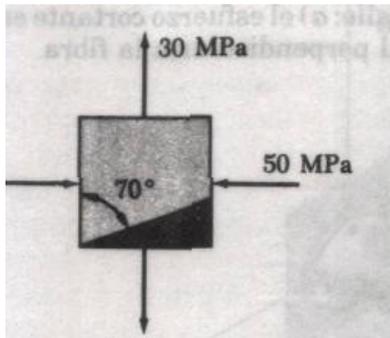


b



Problema Resuelto # 1

Para el estado de esfuerzo dado, halle los esfuerzos normales y cortantes ejercidos sobre la cara oblicua del elemento triangular sombreado. Use un método de análisis basado en las ecuaciones de equilibrio (analítico).



1. Como no hay esfuerzos tangenciales, concluimos que se trata de un estado de esfuerzos principales y por tanto estamos en presencia de un **Problema Directo**:

Problema 1. Solución analítica:

$\alpha := 20\text{deg}$ positivo pues el giro se produce anti-horario hasta encontrar el plano inclinado... partiendo del plano horizontal que es donde actúa el esf ppal mayor...

$$\boxed{\sigma_1 := 30\text{MPa}} \quad (\text{vertical}) \quad \boxed{\tau_{xy} := 0} \quad \boxed{\sigma_2 := -50\text{MPa}} \quad \text{compresión es negativo} \\ (\text{horizontal})$$

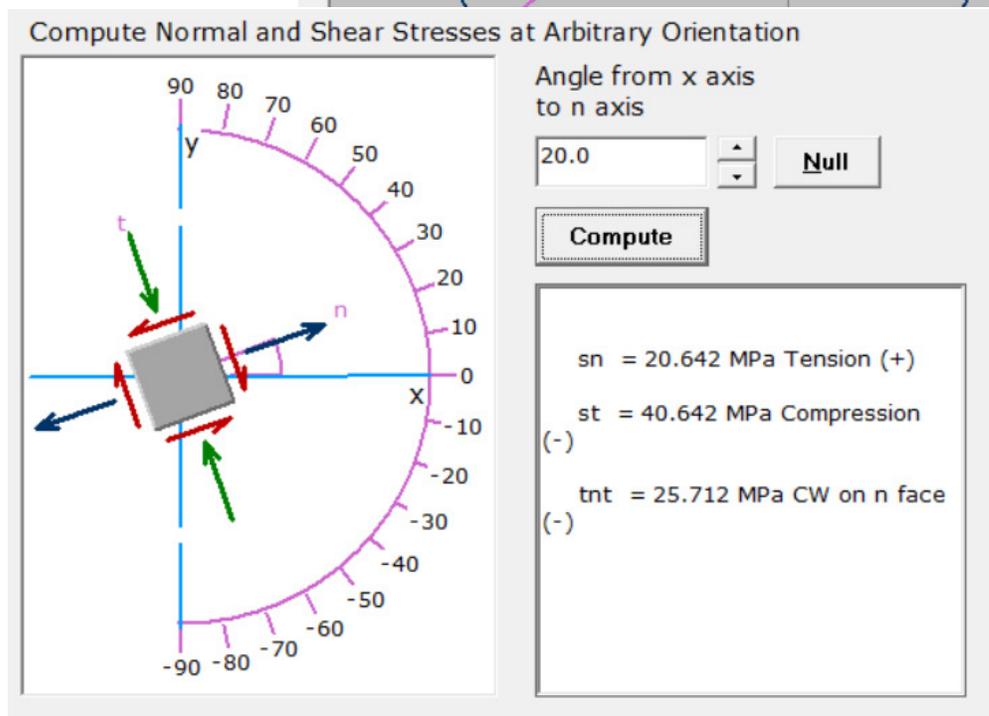
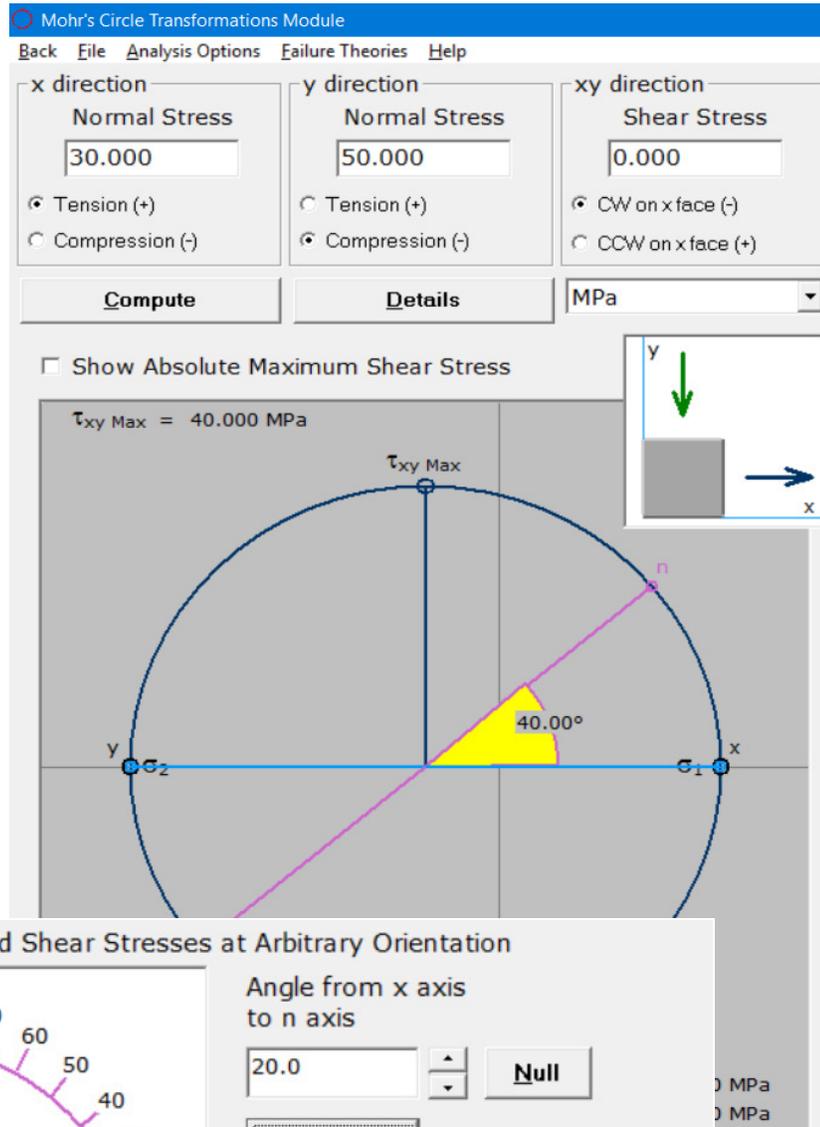
$$\sigma_y(30\text{MPa}, -50\text{MPa}, \alpha) = -40.642\text{MPa} \quad \text{comp en la cara inclinada}$$

$$\sigma_x(30\text{MPa}, -50\text{MPa}, \alpha) = 20.642\text{MPa}$$

$$\tau_{x'y'}(\sigma_1, \sigma_2, \alpha) = -25.712 \text{ MPa}$$

(-) significa antihorario en la cara inclinada ($\tau_{.yx}$), que corresponde a horario en la cara ($\tau_{.xy}$) que es la que se calcula con la expresión ... recordemos que acá el esf ppal mayor es vertical.

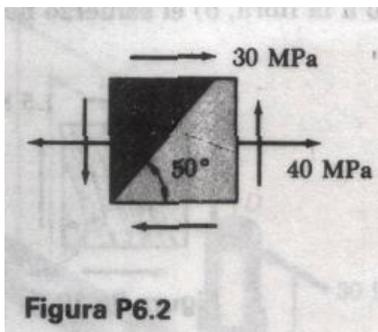
Problema 1. Solución gráfica:





Problema Resuelto # 2

Para el estado de esfuerzo dado, halle los esfuerzos normales y cortantes ejercidos sobre la cara oblicua del elemento triangular sombreado. Use un método de análisis basado en las ecuaciones de equilibrio (analítico).



1. Aca se trata de un **Problema Inverso**:

$\alpha := -40\text{deg}$ negativo pues el giro se produce horario... noten que giramos el plano donde actúa σ_x (vertical) 40grados en sentido horario hasta encontrar el plano inclinado

$\sigma_x := 40\text{MPa}$ Tension es positivo

$\sigma_y := 0\text{MPa}$

$\tau_{xy} := 30\text{MPa}$ positiva pues es antihorario en la cara X ...

$\sigma_{x\alpha}(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \alpha) = -6.071\text{MPa}$ Compresion en la cara inclinada

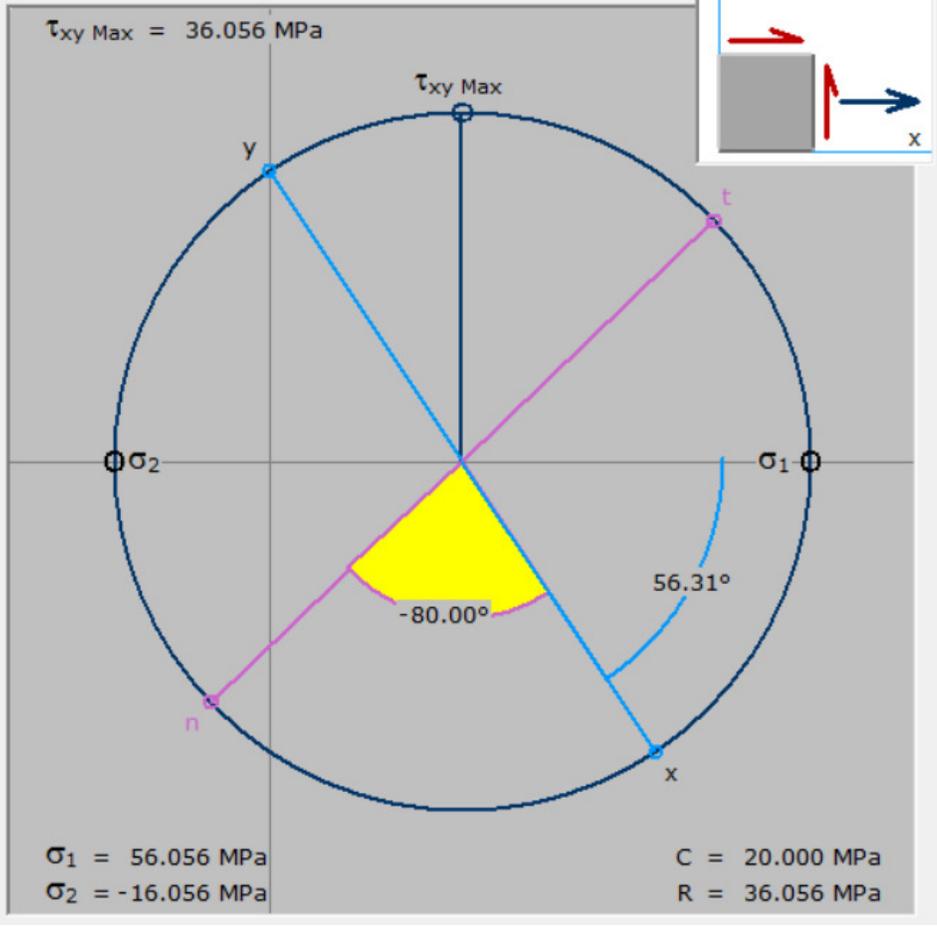
$\sigma_{y\alpha}(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \alpha) = 46.071\text{MPa}$ Tension en la cara perpendicular a la inclinada...

$\tau_{xy\alpha}(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \alpha) = 24.906\text{MPa}$ (+) significa anti horario en la cara inclinada, ya que el esf ppal mayor es σ_x ...

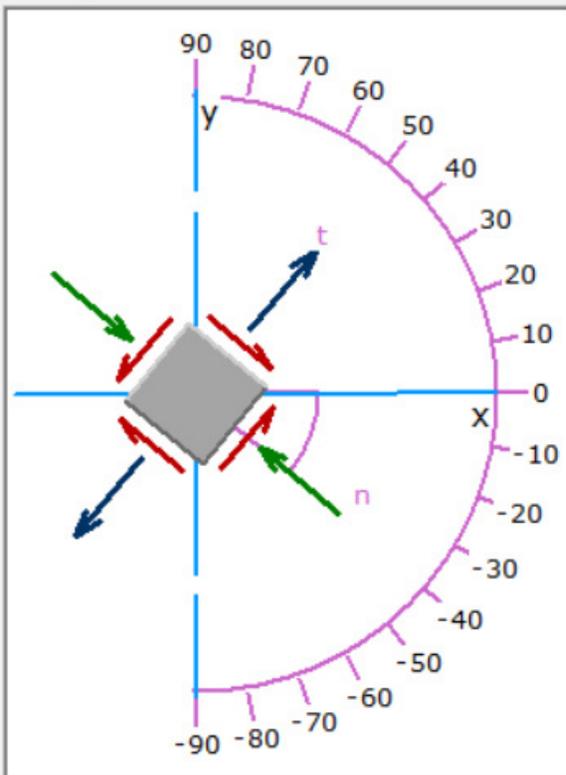
Problema 2. Solución grafica:

x direction Normal Stress <input type="text" value="40.000"/> <input checked="" type="radio"/> Tension (+) <input type="radio"/> Compression (-)	y direction Normal Stress <input type="text" value="0.000"/> <input type="radio"/> Tension (+) <input checked="" type="radio"/> Compression (-)	xy direction Shear Stress <input type="text" value="30.000"/> <input type="radio"/> CW on x face (-) <input checked="" type="radio"/> CCW on x face (+)
Compute	Details	MPa

Show Absolute Maximum Shear Stress



Compute Normal and Shear Stresses at Arbitrary Orientation



Angle from x axis
to n axis

-40.0



Null

Compute

$$\sigma_n = 6.071 \text{ MPa Compression (-)}$$

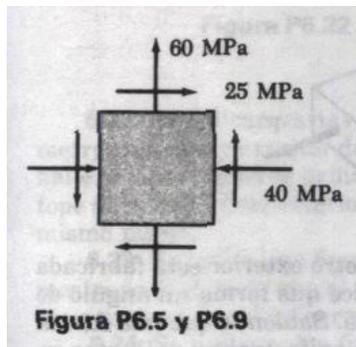
$$\sigma_t = 46.071 \text{ MPa Tension (+)}$$

$$\tau_{nt} = 24.906 \text{ MPa CCW on n face (+)}$$



Problema Resuelto # 3

Para el estado de esfuerzo dado, calcule de forma analítica: a) los planos principales, b) los esfuerzos principales, c) la orientación de los planos de máximo esfuerzo cortante, d) el máximo esfuerzo cortante en el plano, e) el esfuerzo normal correspondiente.



Problema 3. Solución analítica:

en este caso se trata de un problema inverso:

$$\sigma_x := -40 \text{ MPa} \quad \sigma_y := 60 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} := 25 \text{ MPa} \quad \text{Noten que el esf ppal mayor es vertical...}$$

$$\alpha_0(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = -13.283 \text{ deg} \quad \text{se mide horario con respecto a la cara del esf actuante mayor, es decir, con respecto a } \sigma_y \dots$$

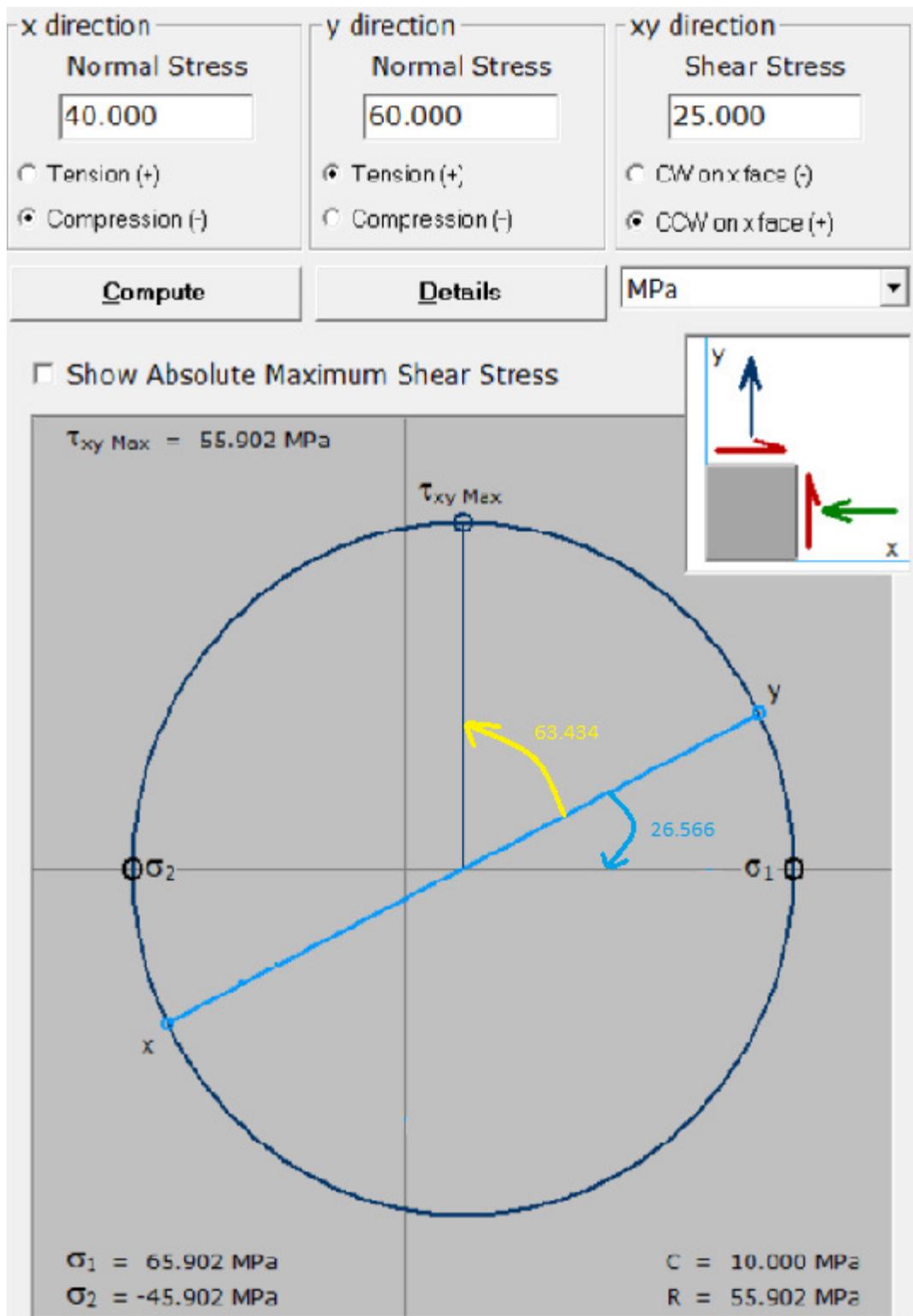
$$\sigma_{\max}(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 65.902 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\min}(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = -45.902 \text{ MPa}$$

$$\alpha_1(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 31.717 \text{ deg} \quad \text{entre } \alpha_0 \text{ y } \alpha_1 \text{ hay } 45 \text{ deg} \quad \tau_{\max}(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 55.902 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{media}}(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 10 \text{ MPa}$$

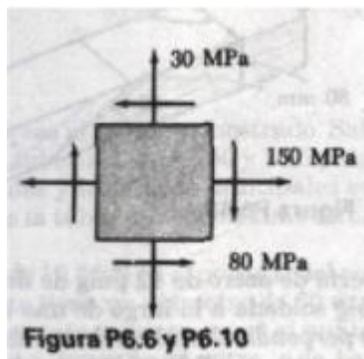
Problema 3. Solución grafica:





Problema Resuelto # 4

Para el estado de esfuerzo dado, calcule de forma analítica: a) los planos principales, b) los esfuerzos principales, c) la orientación de los planos de máximo esfuerzo cortante, d) el máximo esfuerzo cortante en el plano, e) el esfuerzo normal correspondiente.



Problema 4. Solución analítica:

en este caso se trata de un **problema inverso**:

$$\sigma_x := 150 \text{ MPa} \quad \sigma_y := 30 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} := -80 \text{ MPa} \quad \text{Noten que el esf ppal mayor es horizontal...}$$

$$\alpha_0(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = -26.565 \text{ deg} \quad \text{se mide horario con respecto a la cara del esf actuante mayor, es decir, con respecto a } \sigma_x.$$

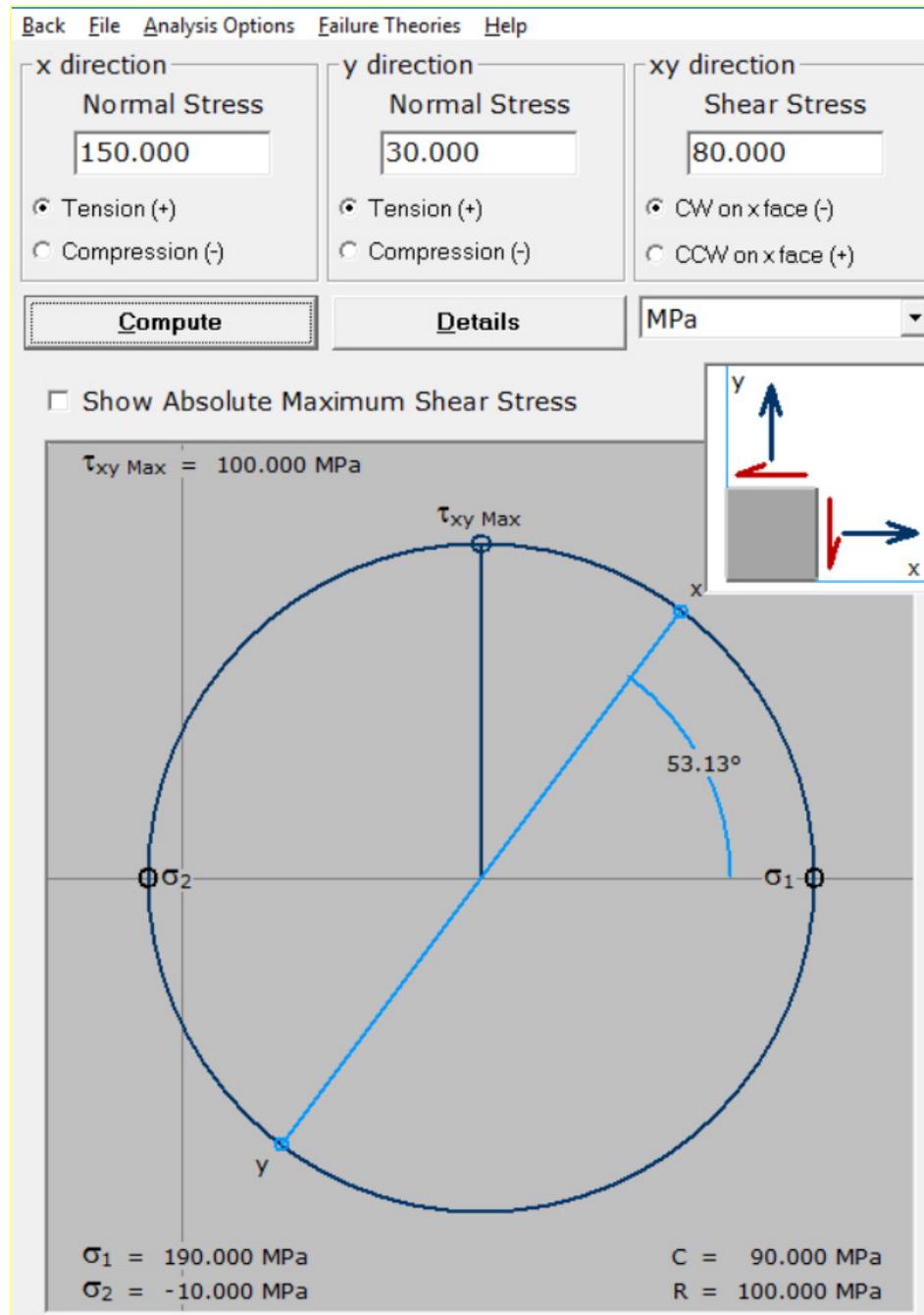
$$\sigma_{\max}(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 190 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\min}(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = -10 \text{ MPa}$$

$$\alpha_1(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 18.435 \text{ deg} \quad \text{entre } \alpha_0 \text{ y } \alpha_1 \text{ hay } 45 \text{ deg} \quad \tau_{\max}(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{media}}(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 90 \text{ MPa}$$

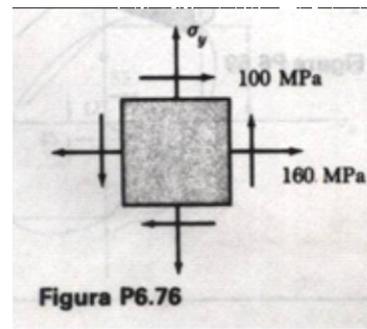
Problema 4. Solución gráfica:





Problema Resuelto # 1

El estado de esfuerzo plano mostrado ocurre en un componente estructural hecho de acero con $\sigma_f = 250$ MPa. Usando el criterio del esfuerzo cortante máximo, determine si ocurre fluencia cuando: a) $\sigma_y = 160$ MPa, b) $\sigma_y = 40$ MPa, c) $\sigma_y = -40$ MPa.



SOLUCIÓN PROB. 1:

1. Para el estado de esfuerzos representado:

$$\sigma_f := 250 \text{ MPa}$$

$$\sigma_x := 160 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} := -100 \text{ MPa} \quad \sigma_y := 160 \text{ MPa}$$

2. Usando las expresiones correspondientes:

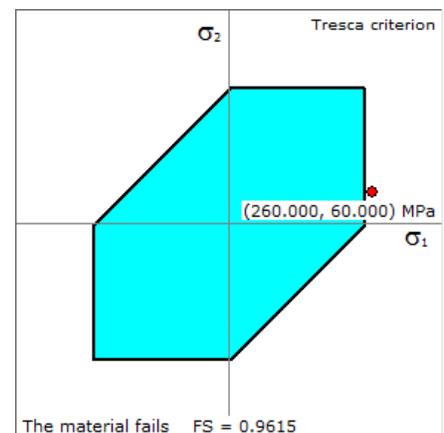
$$\sigma_{\max} := \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 260 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\min} := \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 60 \text{ MPa}$$

Graficamente :

Ocurre fluencia....

$$\sigma_f = 250 \text{ MPa}$$



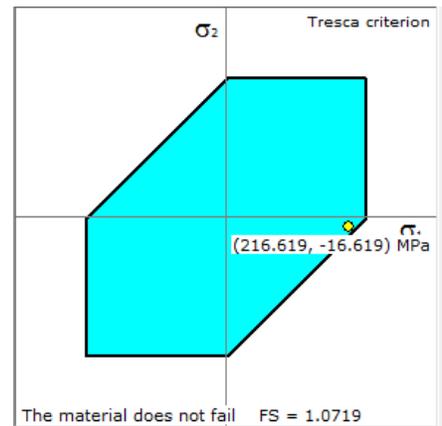
b. Con $\sigma_{yy} := 40\text{MPa}$

$$\sigma_{\max} := \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 216.619\text{MPa}$$

$$\sigma_{\min} := \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = -16.619\text{MPa}$$

$$|\sigma_{\max} - \sigma_{\min}| = 233.238\text{MPa}$$

NO ocurre fluencia



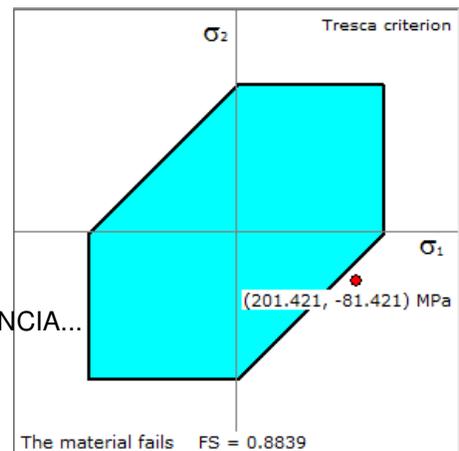
c. Con $\sigma_{yy} := -40\text{MPa}$

$$\sigma_{\max} := \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 201.421\text{MPa}$$

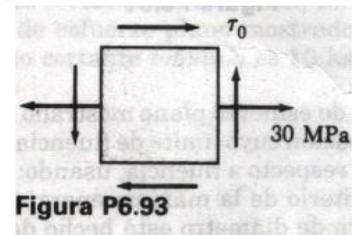
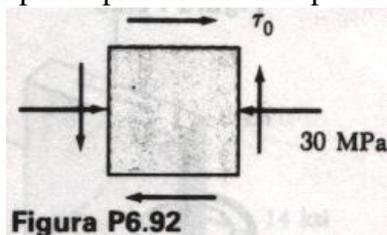
$$\sigma_{\min} := \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = -81.421\text{MPa}$$

$$|\sigma_{\max} - \sigma_{\min}| = 282.842\text{MPa}$$

SI OCURRE FLUENCIA...



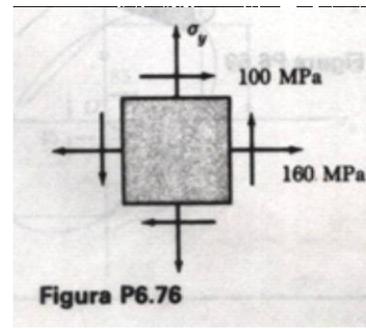
6.92 y 6.93 El estado de esfuerzo mostrado ocurrirá en un componente de aluminio fundido. Si para la aleación usada $\sigma_{UT} = 60$ MPa y $\sigma_{UC} = 120$ MPa y valiéndose del criterio de Mohr, halle el esfuerzo cortante τ_0 en el cual puede presentarse la ruptura.





Problema Resuelto # 2

Resuelva el problema anterior usando el criterio de máxima energía de distorsión.



SOLUCIÓN PROB. 2:

1. Para el estado de esfuerzos representado $\sigma_x := 160 \text{ MPa}$

$$\tau_{xy} := -10 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y := 16 \text{ MPa}$$

2. Usando las expresiones correspondientes:

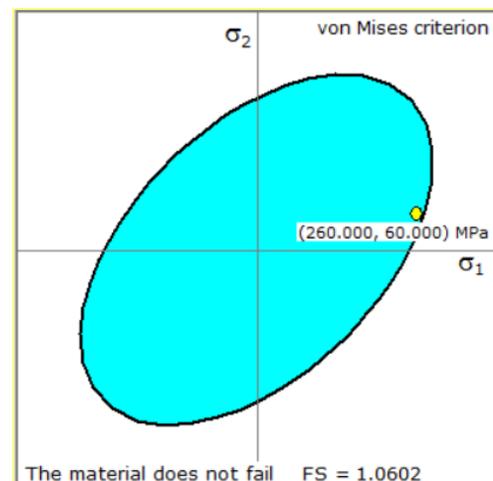
$$\sigma_{\max} := \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 260 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\min} := \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 60 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{eq}} := \sqrt{\sigma_{\max}^2 - \sigma_{\max} \sigma_{\min} + \sigma_{\min}^2} = 235.79 \text{ MPa}$$

3. De los datos del material:

$$\sigma_f := 250 \text{ MPa}$$



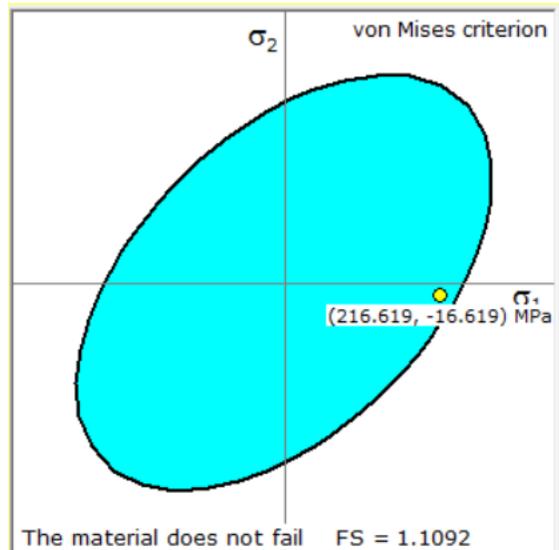
Por lo que según este criterio no ocurrirá fluencia...

b. Con $\sigma_{xy} := 40\text{MPa}$

$$\sigma_{\max} := \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 216.619\text{MPa}$$

$$\sigma_{\min} := \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = -16.619\text{MPa}$$

$$\sigma_{\text{eqv}} := \sqrt{\sigma_{\max}^2 - \sigma_{\max}\sigma_{\min} + \sigma_{\min}^2} = 225.389\text{MPa}$$



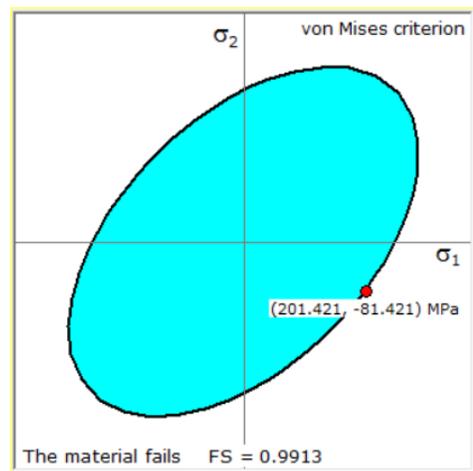
Tampoco ocurre fluencia

c. Con $\sigma_{xy} := -40\text{MPa}$

$$\sigma_{\max} := \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 201.421\text{MPa}$$

$$\sigma_{\min} := \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = -81.421\text{MPa}$$

$$\sigma_{\text{eqv}} := \sqrt{\sigma_{\max}^2 - \sigma_{\max}\sigma_{\min} + \sigma_{\min}^2} = 252.19\text{MPa}$$

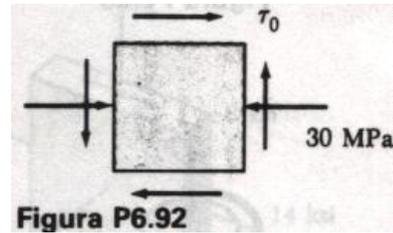


Si ocurriría fluencia....



Problema Resuelto # 3

El estado de esfuerzo mostrado ocurrirá en un componente de aluminio fundido. Si para la aleación usada $\sigma_{UT} = 60 \text{ MPa}$ y $\sigma_{UC} = 120 \text{ MPa}$ y valiéndose del criterio de Mohr, halle el esfuerzo cortante τ_0 en el cual puede presentarse la ruptura.



SOLUCIÓN PROB. 3: $\sigma_{Ut} := 60 \text{ MPa}$ $\sigma_{Uc} := 120 \text{ MPa}$

$$\sigma_x := -30 \text{ MPa} \quad \sigma_y := 0 \quad \tau_{xy} := y$$

$$\sigma_{\max} := \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \rightarrow \sqrt{225 \text{ MPa}^2 + y^2} - 15 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\min} := \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \rightarrow -15 \text{ MPa} - \sqrt{225 \text{ MPa}^2 + y^2}$$

$$\sigma_{\text{eq}} := \sigma_{\max} - \frac{\sigma_{Ut}}{\sigma_{Uc}} \cdot \sigma_{\min} \rightarrow \frac{3 \cdot \sqrt{225 \text{ MPa}^2 + y^2}}{2} - \frac{15 \text{ MPa}}{2}$$

$$y := 10 \text{ MPa}$$

Igualando $\sigma_{\text{eq}} = \sigma_{Ut}$ hallamos :

$$\tau_0 := \text{root}\left(\frac{3 \cdot \sqrt{225 \text{ MPa}^2 + y^2}}{2} - \frac{15 \text{ MPa}}{2} - \sigma_{Ut} \cdot y\right) = 42.426 \text{ MPa}$$

Comprobando :

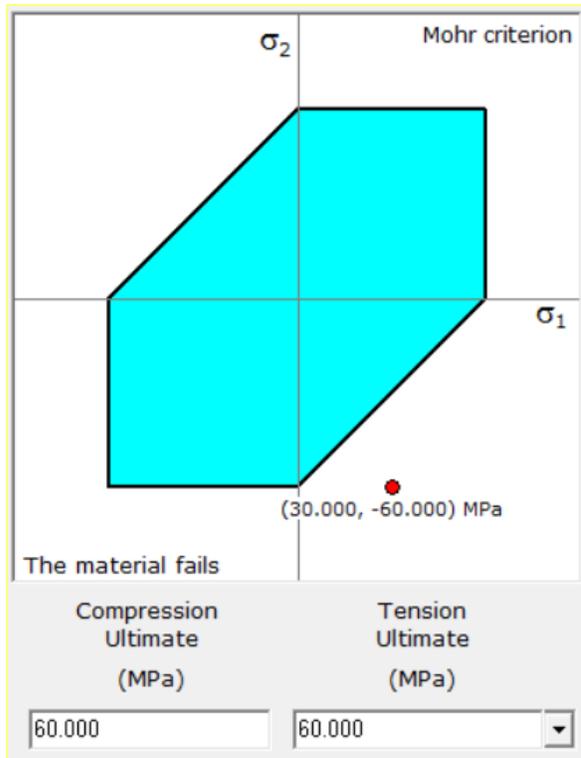
$$\tau_{xy} := \tau_0 = 42.426 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\max} := \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 30 \text{ MPa}$$

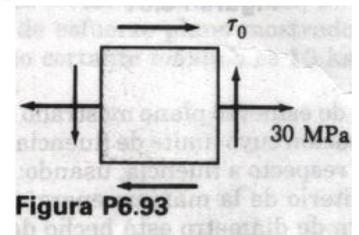
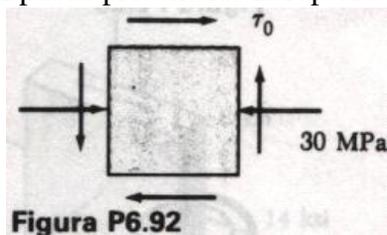
$$\sigma_{\min} := \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = -60 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{eq} := \sigma_{max} - \frac{\sigma_{Ut}}{\sigma_{Uc}} \cdot \sigma_{min} = 60 \text{ MPa}$$

$\sigma_{Ut} = 60 \text{ MPa}$
coincide con la σ_{Ut} , por lo que se produce la ruptura...



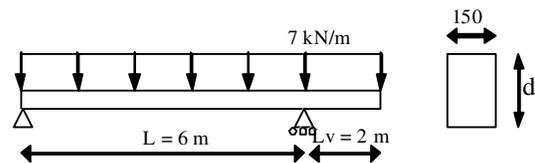
6.92 y 6.93 El estado de esfuerzo mostrado ocurrirá en un componente de aluminio fundido. Si para la aleación usada $\sigma_{UT} = 60$ MPa y $\sigma_{UC} = 120$ MPa y valiéndose del criterio de Mohr, halle el esfuerzo cortante τ_0 en el cual puede presentarse la ruptura.





Problema Resuelto # 1

1. Para la viga de madera y cargas mostradas, determine el peralte de la sección transversal de la viga si para la madera utilizada $\sigma_{adm\ tens} = 12\text{ MPa}$, $\sigma_{adm\ comp} = 10\text{ MPa}$, $\tau_{adm} = 1\text{ MPa}$ y en este elemento, $\Delta_{adm} = L/250$



SOLUCIÓN

1. Los diagramas de momento y cortante son los mas sencillos:

$$q := 7 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$Luz := 6\text{m}$$

$$b := 150\text{mm}$$

$$\sigma_{adm} := 10\text{MPa}$$

$$Lv := 2\text{m}$$

$$\tau_{adm} := 1\text{MPa}$$

$$E := 12\text{GPa}$$

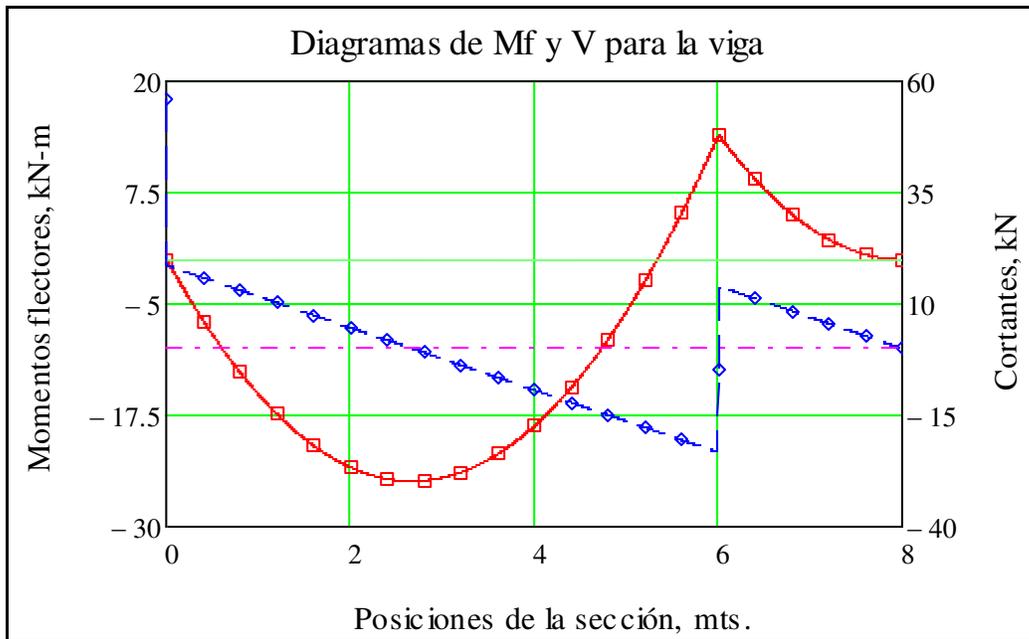
$$\Delta_{adm} := \frac{Luz}{250} = 24\cdot\text{mm}$$

$$R_b := q \cdot \frac{(Luz + Lv)^2}{2Luz} = 37.333\cdot\text{kN}$$

$$R_a := q \cdot (Luz + Lv) - R_b = 18.667\cdot\text{kN}$$

$$Mf(z) := \begin{cases} \left(R_a \cdot z - \frac{q \cdot z^2}{2} \right) & \text{if } (z \geq 0\text{m} \wedge z \leq Luz) \\ \left[R_a \cdot z - \frac{q \cdot z^2}{2} + R_b \cdot (z - Luz) \right] & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$Vact(z) := \frac{d}{dz} Mf(z)$$



Los valores de diseño serían: V_{\max} en $z = 0$ $V_{\max} := |V_{\text{act}}(5.999\text{m})| = 23.333\text{kN}$

M_{\max} en $z = ?$ Para ello determinamos la posición de cortante cero... $z_1 := 2\text{m}$

$$z_{\text{paraMmax}} := \text{root}(V_{\text{act}}(z_1), z_1) = 2.667\text{m}$$

Evaluando la ecuación de M para $z = 2.667$ m obtenemos:

$$M_{\max} := M_f(z_{\text{paraMmax}}) = 24.889\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_f(6.000\text{m}) = -13.999\text{kN}\cdot\text{m}$$

2. Diseño: Ahora determinamos W_{req} , partiendo de σ_{adm} menor, ya que se trata de un sección simétrica

$$W_{\text{req}} := \frac{M_{\max}}{\sigma_{\text{adm}}} = 2.489 \times 10^{-3} \cdot \text{m}^3$$

Con ese resultado se obtiene el siguiente peralte:

$$d_{\text{req}} := \sqrt{\frac{6 \cdot W_{\text{req}}}{b}} = 0.316\text{m} \quad \boxed{d := 0.32\text{m}} \quad b = 0.15\text{m}$$

3. Con ese peraltol escogido que cumple con los esfuerzos normales, chequeamos los esfuerzos tangenciales:

Ahora recordemos que es en el apoyo a donde se produce el v_{max} . Para esa seccion determinamos el τ_{max} que se produce en el eje de la seccion que es donde Q (mto. estático) es maximo y conociendo que para esta sección la fórmula de Zhuravaski daba:

$$\boxed{\text{Area} := b \cdot d = 0.048 \text{m}^2}$$

$$\boxed{\tau_{max} := \frac{3}{2} \frac{V_{max}}{\text{Area}} = 729.145 \cdot \text{kPa}}$$

$$\boxed{\tau_{adm} = 1000 \cdot \text{kPa}}$$

Cumple holgadamente....

Preguntar: Si no hubiera dado que tendríamos que hacer?????

4. Finalmente determinamos si esa sección cumple con la deformacion permisible que en este caso resulta ser:

$$\boxed{\Delta_{adm} := \frac{Luz}{250} = 0.024 \text{m}}$$

$$\boxed{\Delta_{adm} = 24 \cdot \text{mm}}$$

aunque este es un caso clásico que puede ser resuelto por tablas, Doble Integración, etc, lo haremos por MPO para mostrar su aplicacion al mismo:

a. Planteamos las discontinuidades:

Tipo de condición \ Parámetros	Condiciones Iniciales	Condiciones de Transición
Valor de z, m	0	6
Δy	$\Delta y_0 = 0$	$\Delta y_6 = 0$
$\Delta y'$	$\Delta y'_0 = i?$	$\Delta y'_6 = i?$
ΔM	$\Delta M_0 = 0$	$\Delta M_6 = 0$
ΔV	$\Delta V_0 = R_A = 18.667 \text{ kN}$	$\Delta V_6 = R_B = 37.333 \text{ kN}$
Δq_0	$\Delta q_0 = -7 \text{ kN/m}$	$\Delta q_6 = 0 \text{ kN/m}$

5. Como la $EI = \text{cte}$ adecuamos la ecuacion de Snitko-Kulikovskii en su forma simple, al caso dado:

$$y_n(z) = y_{n-1}(z) + \Delta y_a + \Delta y'_a(z-a) + \frac{\Delta M_a}{EI} \frac{(z-a)^2}{2!} + \frac{\Delta V_a}{EI} \frac{(z-a)^3}{3!} + \frac{\Delta q_a}{EI} \frac{(z-a)^4}{4!} + \frac{\Delta q'_a}{EI} \frac{(z-a)^5}{5!} \dots$$

que adecuándola queda:

$$y(z) = \Delta y'_0(z) + \frac{\Delta V_0}{3! \cdot EI} (z)^3 + \frac{\Delta q_0}{4! \cdot EI} (z)^4 \Big|_I^I + \frac{\Delta V_6}{3! \cdot EI} (z - 6m)^3 \Big|_I^{II}$$

Sustituyendo los valores:

$$y(z) = \Delta y'_0(z) + \frac{18.667 \text{ kN}}{6 \cdot EI} (z)^3 - \frac{7 \text{ kN/m}}{24 \cdot EI} (z)^4 \Big|_I^I + \frac{37.333 \text{ kN}}{6 \cdot EI} (z - 6m)^3 \Big|_I^{II}$$

6. Determinamos el valor del parámetro desconocido, en este caso $\Delta y'_0$. De la condición de que la flecha también es cero para $z = 6 \text{ m}$, obtenemos:

$$y(6m) = 0 = \Delta y'_0(6m) + \frac{3.111 \text{ kN}}{EI} (6m)^3 - \frac{0.291667 \text{ kN/m}}{EI} (6m)^4 \quad \text{de donde obtenemos:}$$

$$\Delta y'_0 = -\frac{0.46992 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI}$$

7. Ahora la ecuación de flecha quedaría definitivamente:

$$y(z) = -\frac{0.46992 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} (z) + \frac{3.111 \text{ kN}}{EI} (z)^3 - \frac{0.291667 \text{ kN/m}}{EI} (z)^4 \Big|_I^I + \frac{6.222 \text{ kN}}{EI} (z - 6m)^3 \Big|_I^{II}$$

8. Para determinar el punto de y_{max} hallamos el ángulo de giro y lo igualamos a cero, despejando z para el que se produce ángulo de giro cero que es donde la flecha sería máxima, en la ecuación del primer tramo:

$$y(z, EI) := \frac{-0.46992 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \cdot z + \frac{3.111 \text{ kN}}{EI} \cdot z^3 - \frac{0.291667 \frac{\text{kN}}{\text{m}}}{24 \cdot EI} \cdot z^4$$

$$\theta(z, EI) := \frac{d}{dz} y(z, EI)$$

$$I := \frac{b \cdot d^3}{12} = 4.096 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$E \cdot I = \blacksquare \cdot \text{kN} \cdot \text{m}^2$$

y_{max} en $z = ?$

$$z_{\text{paraymax}} := \text{root}(\theta(z1, E \cdot I), z1) = 0.225\text{m}$$

$$y_{\text{max}} := y(z_{\text{paraymax}}, E \cdot I) = -0.014\text{mm}$$

como vemos es muy pequeña, por lo que comprobamos el extremo del voladizo...

$$z1 := .2\text{m}$$

$$y(z, EI) := \begin{cases} \left(\frac{-0.46992\text{kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \cdot z + \frac{3.11\text{kN}}{EI} \cdot z^3 - \frac{0.291667 \frac{\text{kN}}{\text{m}}}{24 \cdot EI} \cdot z^4 \right) & \text{if } z \leq 6\text{m} \\ \left[\frac{-0.46992\text{kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \cdot z + \frac{3.11\text{kN}}{EI} \cdot z^3 - \frac{0.291667 \frac{\text{kN}}{\text{m}}}{24 \cdot EI} \cdot z^4 + \frac{6.222\text{kN}}{EI} \cdot (z - 6\text{m})^3 \right] & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$y(8\text{m}, E \cdot I) = 0.323\text{m}$$

$$\Delta_{\text{adm}} = 24 \cdot \text{mm}$$

como vemos no cumple, por lo que rediseñando:

$$0.323\text{m} \cdot E \cdot I = 1587.61 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}^3$$

$$I_{\text{req}} := \frac{1587.61 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{E \cdot \Delta_{\text{adm}}} = 5.513 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$\text{con } b = 0.15\text{m}$$

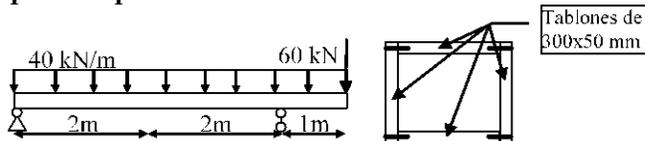
$$d := \sqrt[3]{\frac{12 \cdot I_{\text{req}}}{b}} = 0.761\text{m}$$

Valor muy elevado para la madera.... se sugiere cambiar el material...



Problema Resuelto # 2

La viga de madera cuya geometría, condiciones de carga y apoyos se muestran en la figura está conformada por dos tabloncillos iguales unidos por conectores. Compruebe si la misma resiste los esfuerzos a que se verá sometida con los esfuerzos admisibles a compresión y tensión son $\sigma_{c adm} = 21.5 \text{ MPa}$, $\sigma_{t adm} = 25 \text{ MPa}$ y $\tau_{adm} = 8 \text{ MPa}$ b. Calcule el espaciamiento de los conectores, si la fuerza resistente admisible de cada conector es 3 kN . c. Compruebe el criterio de rigidez conociendo que para esa viga la flecha máxima se produce a 2.87 m del apoyo izquierdo y que $y_{adm} = 2 \text{ cms}$. d. En caso que no cumpla, proponga y justifique las medidas que adoptaría para que se cumpliera dicho criterio.



1. Los diagramas de momento y cortante son los mas sencillos:

$$y_{adm} := 2 \text{ cm}$$

$$\sigma_{admt} := 25 \text{ MPa} \quad P := 60 \text{ kN}$$

$$Luz := 4 \text{ m} \quad b := 300 \text{ mm} \quad Lv := 1 \text{ m}$$

$$q := 40 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$R_b := \frac{q \cdot \frac{(Luz + Lv)^2}{2} + P \cdot (Luz + Lv)}{Luz} = 200 \cdot \text{kN}$$

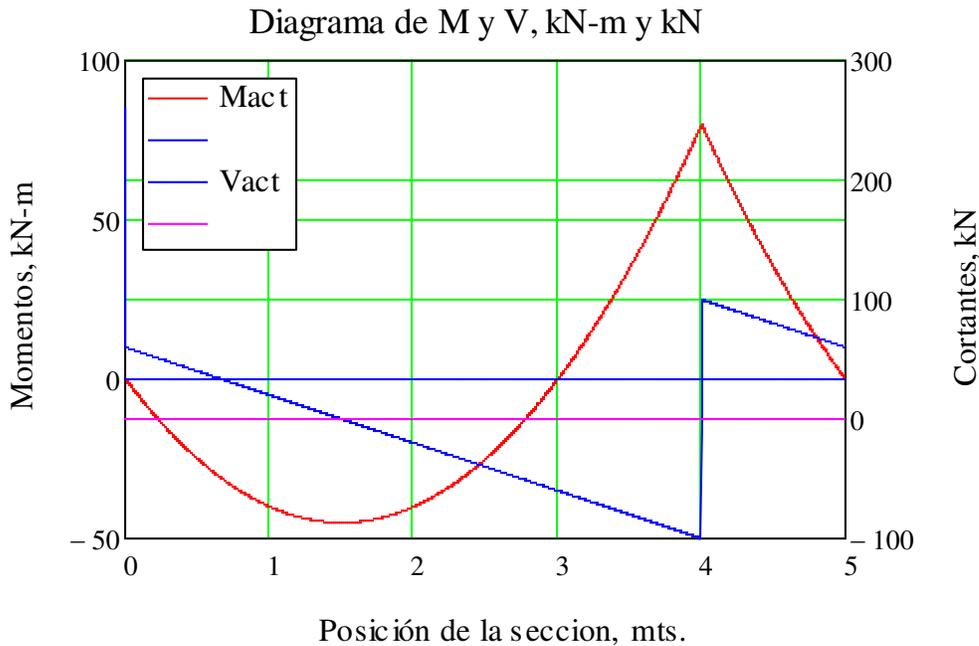
$$t := 50 \text{ mm} \quad \sigma_{admc} := 21.5 \text{ MPa}$$

$$\tau_{adm} := 8 \text{ MPa}$$

$$R_a := q \cdot (Luz + Lv) + P - R_b = 60 \cdot \text{kN}$$

$$M_f(z) := \begin{cases} R_a \cdot z - \frac{q \cdot z^2}{2} & \text{if } z \geq 0 \text{ m} \wedge z \leq Luz \\ R_a \cdot z - \frac{q \cdot z^2}{2} + R_b \cdot (z - 4 \text{ m}) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$V_{act}(z) := \frac{d}{dz} M_f(z)$$



Los valores de diseño serían: V_{\max} en $z = Luz$

$$\overline{V_{\max}} := |V_{act}(3.999999m)| = 100 \cdot kN$$

M_{\max} en $z = z_1$? Para ello determinamos la posición de cortante cero...

$$z_1 := 2m$$

$$\overline{z_{\text{para}M_{\max}}} := \text{root}(V_{act}(z_1), z_1) = 1.5m$$

Evaluando la ecuación de M para $z = 1.5$ m obtenemos:

$$\overline{M_{\max}} := M_f(z_{\text{para}M_{\max}}) = 45 \cdot kN \cdot m$$

$$M_f(Luz) = -80 \cdot kN \cdot m \quad \underline{\underline{M_{\max}}} := M_f(Luz) = -80 \cdot kN \cdot m$$

2. Revisión: Ahora determinamos σ_{\max} , y la comparamos con σ_{adm} menor, ya que se trata de un sec simétrica:

$$I_x := \frac{(b + 2 \cdot t)b^3}{12} - \frac{b(b - 2 \cdot t)^3}{12} = 7 \times 10^{-4} m^4$$

$$\sigma_{\max} := \frac{M_{\max} \cdot 300\text{mm}}{I_x \cdot 2} = -17.143 \cdot \text{MPa} \quad \text{menor que :} \quad \sigma_{\text{adm}} = 21.5 \cdot \text{MPa}$$

3. Con ese perfil escogido que cumple con los esfuerzos normales, chequeamos los esfuerzos tangenciales

Ahora recordemos que es en el apoyo a donde se produce el V_{\max} . Para esa sección determinamos el τ_{\max} que se produce en el eje de la sección que es donde Q (mto. estático) es máximo y conociendo que para esta sección la fórmula de Zhuravski daba:

$$Q_{\max} := b \cdot t \cdot \left(\frac{b}{2} - \frac{t}{2} \right) + 2 \cdot \left(\frac{b}{2} \cdot t \cdot \frac{b}{4} \right) = 3 \times 10^{-3} \cdot \text{m}^3$$

$$\tau_{\max} := \frac{V_{\max} \cdot Q_{\max}}{I_x \cdot 2 \cdot t} = 4.286 \cdot \text{MPa} \quad \text{menor que :} \quad \tau_{\text{adm}} = 8 \cdot \text{MPa}$$

4. Para calcular el espaciamiento de los conectores: $Q := b \cdot t \cdot \left(\frac{b}{2} - \frac{t}{2} \right) = 1.875 \times 10^{-3} \cdot \text{m}^3$

Como al mismo nivel hay dos conectores, uno en cada alma, ahora el flujo de corte que provoca el área separada se divide entre dos superficies conectadas:

$$q_c := \frac{V_{\max} \cdot Q}{2 \cdot I_x} = 133928.407 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad q = 40 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad F_{\text{adm}} := 3\text{kN}$$

$$s_c := \text{root}(q_c \cdot s_c - F_{\text{adm}}, s_c, 0.000001\text{m}, 0.4\text{m}) = 22.4 \cdot \text{mm}$$

4. Calculo de la flecha máxima:

$$E := 12\text{GPa}$$

a. Colocamos el SR en el punto A y con el semieje positivo hacia la derecha.

b. Determinamos las reacciones de apoyo

$$I := I_x \quad \text{Luz} = 4\text{m}$$

c. Aplicamos el método de parámetros de origen:

Parámetros iniciales:

Parám de Transición:

$$E \cdot I = 8400 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}^2$$

$$\Delta y'_0 = 0$$

$$\Delta V_t := R_b = 200 \cdot \text{kN}$$

$$\Delta V_0 := R_a = 60 \cdot \text{kN}$$

$$I = 7 \times 10^{-4} \cdot \text{m}^4$$

$$\Delta q_0 := -q = -40 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Ecuación de la flecha:

$$y_1(z, \Delta y'_0) := \Delta y'_0 \cdot z + \frac{\Delta V_0}{E \cdot I \cdot 3!} \cdot z^3 + \frac{\Delta q_0}{E \cdot I \cdot 4!} \cdot z^4 \quad \Delta y'_0 := 1$$

$$y_2(z, \Delta y'_0) := \Delta y'_0 \cdot z + \frac{\Delta V_0}{E \cdot I \cdot 3!} \cdot z^3 + \frac{\Delta q_0}{E \cdot I \cdot 4!} \cdot z^4 + \frac{\Delta Vt}{E \cdot I \cdot 3!} \cdot (z - 4m)^3$$

Evaluando la flecha para $z = 4$ m e igualandola a cero:

$$\Delta y'_0 := \text{root}(y_1(Luz, \Delta y'_0), \Delta y'_0, -1, 1) = -6.349206 \times 10^{-3}$$

$$\Delta y'_0 \cdot E \cdot I = -53.333 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

$$y_1(z) := \Delta y'_0 \cdot z + \frac{\Delta V_0}{E \cdot I \cdot 3!} \cdot z^3 + \frac{\Delta q_0}{E \cdot I \cdot 4!} \cdot z^4$$

$$E \cdot I = 8400 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

$$y_2(z) := \Delta y'_0 \cdot z + \frac{\Delta V_0}{E \cdot I \cdot 3!} \cdot z^3 + \frac{\Delta q_0}{E \cdot I \cdot 4!} \cdot z^4 + \frac{\Delta Vt}{E \cdot I \cdot 3!} \cdot (z - 4m)^3$$

$$y(z) := \begin{cases} y_1(z) & \text{if } z \leq 4m \\ y_2(z) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\Theta(z) := \frac{d}{dz} y(z) \quad z_{y\max} := \text{root}(\Theta(z), z, 0m, 4m) = 1.686m$$

$$y_{\max} := y_1(2.87m) = -3.54109 \text{ mm}$$

Cumple...

$$y_{\text{vol}} := y_2(5m) = -2.976 \text{ mm}$$

Hacia arriba, pero menor que el desplazamiento entre apoyos...

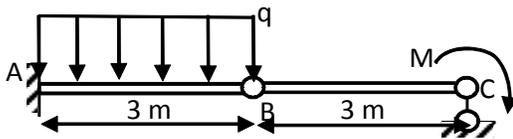
$$y_{\text{adm}} = 20 \text{ mm}$$

$$y_1(2.87m) = -3.541 \text{ mm}$$



Problema Resuelto # 3

Para la viga ABC de acero, condiciones de carga y apoyos se muestran en la figura: a. Realice el análisis y dibuje los diagramas de solicitaciones, $M = 67.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$ y $q = 30 \text{ kN/m}$, b. Diseñela a flexión utilizando un perfil W200, con $\sigma_{adm c} = \sigma_{adm t} = 160 \text{ MPa}$, c. Si se utilizara un perfil W310x74, verifique si resiste los esfuerzos cortantes actuantes, con $\tau_{adm} = 96 \text{ MPa}$, d. Compruebe si el perfil del inciso c cumple el criterio de rigidez, con $E = 200 \text{ GPa}$ y flecha permisible de $L/180$, e. En caso que no cumpliera, qué medidas propondría para resolver la situación. Argumente.



$$\overline{M := 67.5 \text{ kN}\cdot\text{m}} \quad \overline{q := 30 \frac{\text{kN}}{\text{m}}} \quad \overline{Luz := 6\text{m}} \quad \overline{E := 200 \text{ GPa}} \quad \overline{\sigma_{adm} := 160 \text{ MPa}}$$

1. Análisis: Del equilibrio en el DCL BC: $R_c := \frac{M + q \cdot \left(\frac{Luz^2}{8} \right)}{\frac{Luz}{2}} = 67.5 \cdot \text{kN}$

De la suma de F_v en el DCL Gral: $R_a := q \cdot Luz - R_c = 112.5 \cdot \text{kN}$ $M_a := 1 \text{ kN}\cdot\text{m}$

De a suma de M_A : $M_A := \text{root} \left[M_a + R_c \cdot Luz - M - q \cdot \frac{\left(\frac{Luz}{2} \right)^2}{2}, M_a \right] = -202.5 \cdot \text{kN}\cdot\text{m}$

$$\text{Mom}(x) := \begin{cases} \text{mon} \leftarrow -M_A + R_a \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} & \text{if } x \geq 0 \wedge x < 3\text{m} \\ \text{mon} \leftarrow -M_A + R_a \cdot x - q \cdot 3\text{m} \cdot (x - 1.5\text{m}) & \text{otherwis} \\ \text{mon} & \end{cases}$$

$$V_{act}(x) := \frac{d}{dx} \text{Mom}(x)$$

$$M_{max} := \text{Mom}(0) = 202.5 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

$$V_{max} := V_{act}(0.00001\text{m}) = 112.5 \cdot \text{kN}$$

2. Diseño por flexión:

$$W_{req} := \frac{|M_{max}|}{\sigma_{adm}} = 1.266 \times 10^6 \cdot \text{mm}^3$$

implica un W460x74, con $W = 1457 \times 10^3 \text{ mm}^3$

3. Chequeo Cortante:

W310x74 tiene:

$$I := 164 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad d := 310 \text{ mm} \quad t_w := 9.4 \text{ mm}$$

$$b_f := 205 \text{ mm} \quad t_f := 16.3 \text{ mm}$$

$$S := b_f \cdot t_f \cdot \left(\frac{d}{2} - \frac{t_f}{2} \right) + \frac{\left(\frac{d}{2} - t_f \right)^2}{2} \cdot t_w = 5.811 \times 10^{-4} \cdot \text{m}^3$$

$$\tau_{max} := \frac{V_{max} \cdot S}{I \cdot t_w} = 42.408 \cdot \text{MPa}$$

muy por debajo de τ_{adm}cumple....

4. Chequeo flecha:

Parametros de origen:

$$E := 200 \text{ GPa}$$

$$I = 1.64 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$\Delta y_0 := 0$$

$$\Delta y'_0 := 0$$

$$\Delta V_0 := R_a = 112.5 \cdot \text{kN}$$

$$\Delta M_0 := M_A = -202.5 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

$$\Delta q_0 := -q = -30 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Ecuacion de la Flecha Tramo I:

$$y(z) := \frac{\Delta M_0 \cdot z^2}{E \cdot I \cdot 2!} + \frac{\Delta V_0 \cdot z^3}{E \cdot I \cdot 3!} + \frac{\Delta q_0 \cdot z^4}{E \cdot I \cdot 4!}$$

$$y(3\text{m}) = -0.015434\text{m}$$

$$y(3\text{m}) \cdot E \cdot I = -506.25 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}^3$$

$$\frac{Luz}{180} = 0.033\text{m}$$

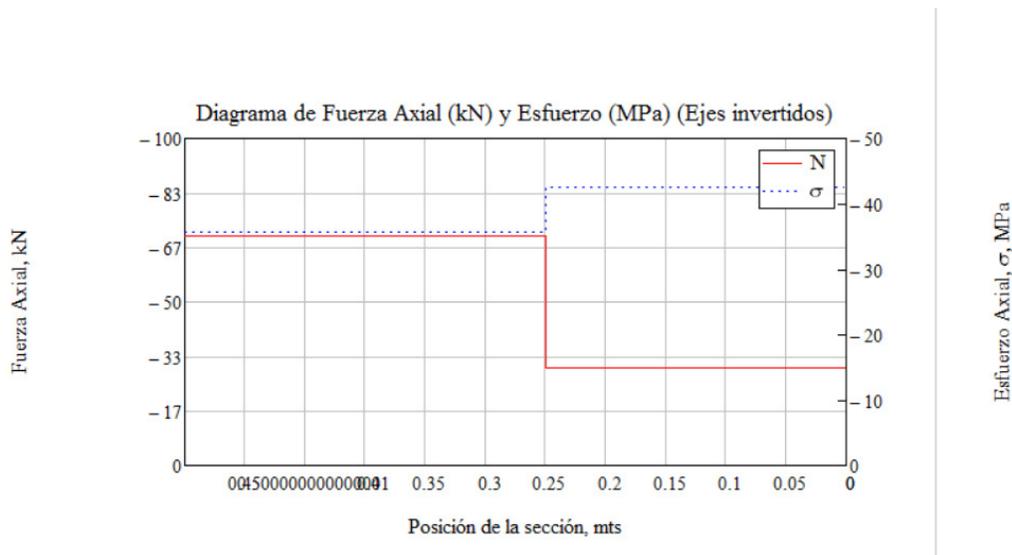
Cumple

Anexo XXIII: Respuesta de los Ejercicios Propuestos.

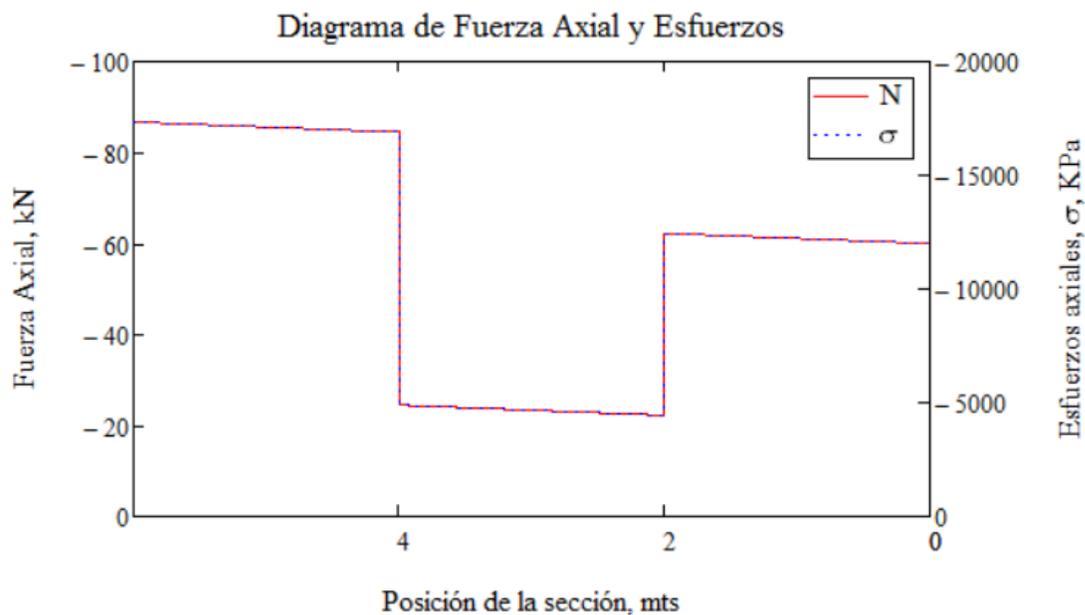
En este anexo se podrán encontrar la respuesta numérica de los ejercicios propuestos de cada uno de los temas. En el caso de los ejercicios teóricos se dejarán sin respuestas para que los estudiantes las busquen dentro de la teoría de la asignatura y así lograr una mejor comprensión de los mismos.

Tema II: Elementos sometidos a Esfuerzos Axiales.

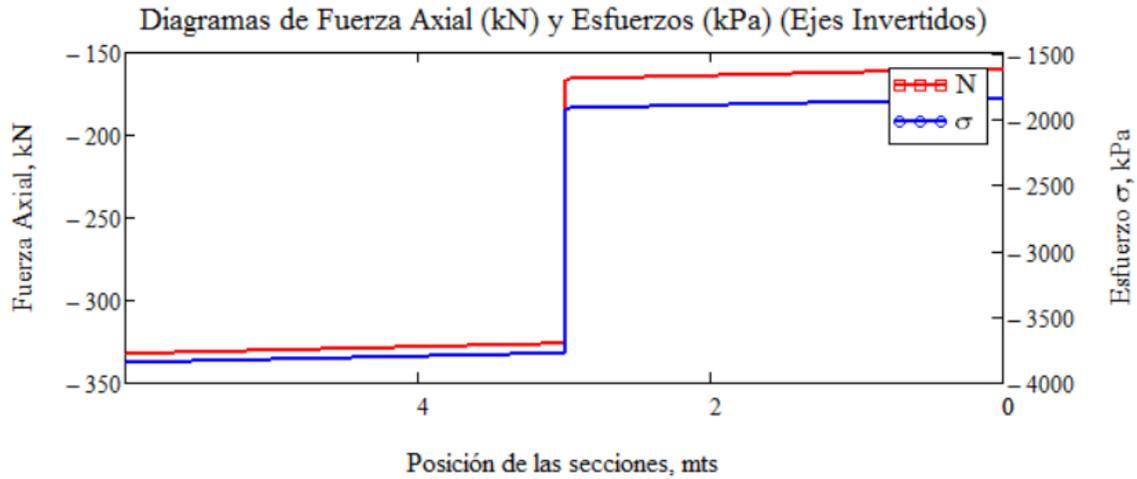
Problema Propuesto 2 a).



Problema Propuesto 2 b).

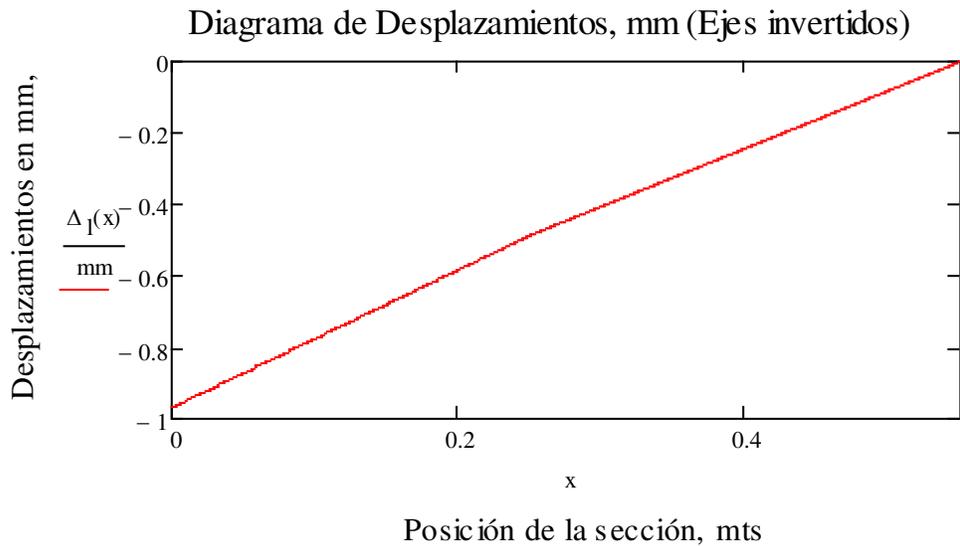


Problema Propuesto 2 c).



Problema Propuesto 3 a).

$\Delta_1(0) = -9.688 \times 10^{-4} \text{ m}$	$\Delta_1(249\text{mm}) = -4.88 \times 10^{-4} \text{ m}$
$\Delta_1(250\text{mm}) = -4.861 \times 10^{-4} \text{ m}$	$\Delta_1(\text{long}) = 0 \text{ m}$

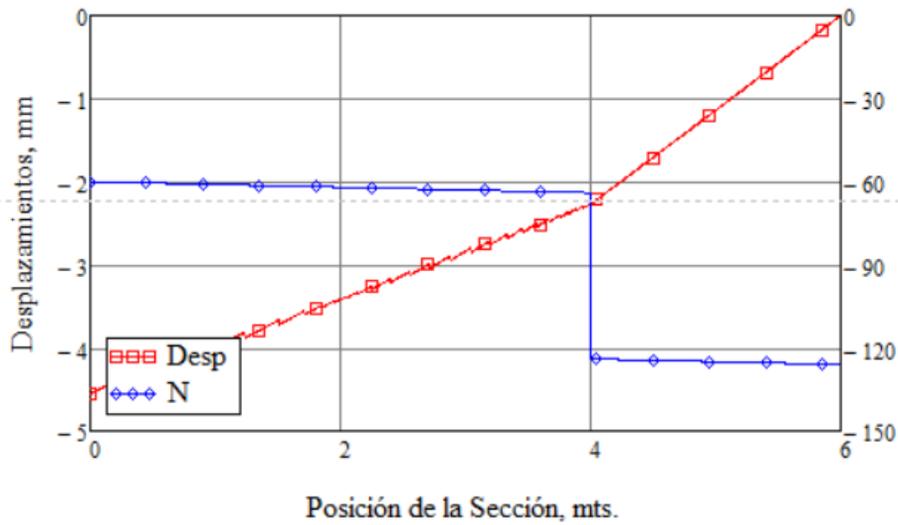


Propuesto 3 b).

$\Delta_1(0) = -4.553 \text{ mm}$	$\Delta_1(1.999\text{m}) = -3.419 \text{ mm}$	$\Delta_1(2\text{m}) = -3.418 \text{ mm}$
$\Delta_1(3.999\text{m}) = -2.274 \text{ mm}$	$\Delta_1(4\text{m}) = -2.273 \text{ mm}$	$\Delta_1(6\text{m}) = 0 \text{ m}$

(hhdfbjljljngllmkh)

Diagrama de Desplazamientos, mm (Ejes invertidos)



Problema Propuesto 3 c).

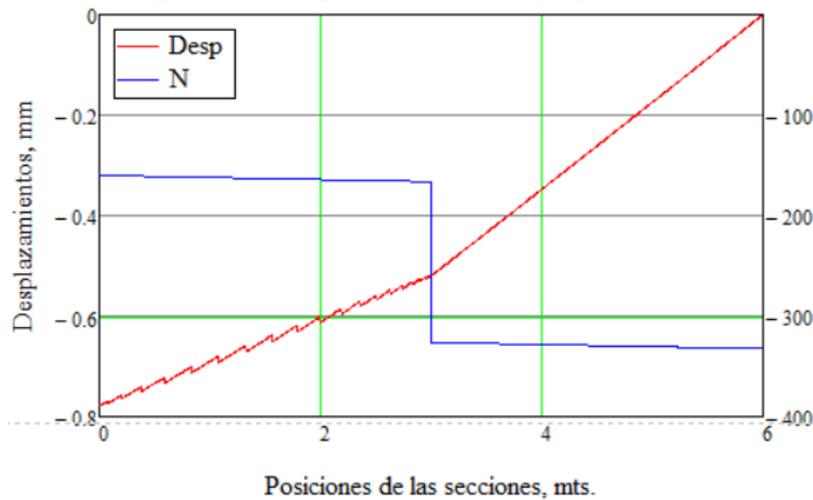
$$\Delta_1(0) = -7.773 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$\Delta_1(2.999\text{m}) = -5.2 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$\Delta_1(3\text{m}) = -5.198 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$\Delta_1(\text{long}) = 0 \text{ m}$$

Diagrama de Desplazamientos, mm (Ejes invertidos)



Problema Propuesto 4

$$P_{res} := \min(P_I, P_{II}) = 93.333 \text{ kN}$$

$$\Delta l(8\text{m}, P_{res}) = -1.006 \times 10^{-3} \text{ m}$$

menor que el admisible:

$$\Delta_{adm} = -2 \text{ mm}$$

Problema Propuesto 5

$$d_{\text{res}} := 53\text{mm}$$

$$\Delta l(6\text{m}) = 3.97 \times 10^{-3} \text{ m} \quad \text{menor que el admisible:} \quad \Delta_{\text{adm}} = 5 \cdot \text{mm}$$

+

Problema Propuesto 6

$$P_{\text{res}} := \min(P_{\text{I}}, P_{\text{II}}) = 40 \cdot \text{kN}$$

$$\Delta = -8.313 \times 10^{-4} \text{ m} \quad \text{cumple!!!!}$$

Problema Propuesto 7

$$d_{\text{II}} := \sqrt{A_{\text{II}}} = 328.634 \cdot \text{mm}$$

$$d_{\text{I}} := d_{\text{II}} - 2.5\text{cm} = 229 \cdot \text{mm}$$

Problema Propuesto 8

$$P_{\text{max}} := \min(P_{\text{II}}, P_{\text{I}}) = 313.851 \cdot \text{kN}$$

$$\Delta = 2.666 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Problema Propuesto 9

$$\Delta = 51.17\text{mm}$$

Problema Propuesto 10

$$\Delta = 38.91\text{mm}$$

Tema III: Elementos sometidos a Esfuerzos Axiales.

Problema Propuesto 2

$$T_a := \frac{4}{5} \cdot P = 1.76 \cdot \text{kN}$$

$$T_b := \frac{2}{5} \cdot P = 880 \text{ N}$$

Problema Propuesto 3

$$R_C := \frac{2 \cdot P}{2.837} = 56.398 \cdot \text{kN} \text{ y } R_A := 1.837 \cdot R_C = 103.602 \cdot \text{kN}$$

$$\Delta_D := 2 \cdot \frac{R_C \cdot L_{al}}{E_{al} \cdot A_b} = 0.558 \cdot \text{mm}$$

Problema Propuesto 4

$$R_C := \frac{300 \text{ kN}}{5} = 60 \cdot \text{kN}$$

$$R_B := \frac{100 \text{ kN} \cdot 9 \text{ m} - R_C \cdot 3 \text{ m}}{6 \text{ m}} = 120 \cdot \text{kN}$$

$$\Delta_A := 3 \cdot \frac{R_C \cdot L_{CF}}{E \cdot \frac{\pi \cdot (d)^2}{4}} = 34.377 \cdot \text{mm}$$

Problema Propuesto 5

$$P_{\max} = 42.56 \text{ kN}$$

$$\Delta_c = 6.266 \times 10^{-5} \text{ m}$$

Problema Propuesto 6

$$\sigma_{ab} := -\frac{R_A}{A_s} = -201.771 \cdot \text{MPa} \quad \sigma_{bc} := -\left(\frac{R_A}{A_b}\right) = -72.638 \cdot \text{MPa}$$

$$\Delta_B := \alpha_b \cdot \Delta t \cdot l_{bc} - R_A \cdot \frac{l_{bc}}{E_b \cdot A_b} = 1.06 \times 10^{-4} \text{ m} \quad \text{hacia arriba}$$

Problema Propuesto 7

$$R_A = 18.75 \text{ kN}$$

$$R_B = 31.25 \text{ kN} \quad +$$

$$\Delta_a := -\frac{R_B \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2} = -0.053 \cdot \text{mm}$$

Problema Propuesto 8

$$R_B := R_A = 212.201 \text{ kN}$$

Problema Propuesto 9

$$R_a = 3.5 \times 10^5 \text{ N}$$

$$R_e = 6.25 \times 10^5 \text{ N} \quad +$$

Problema Propuesto 10

$$\sigma_{acero} := \frac{F_{acero}}{A_{acero}} = 560.538 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_{al} := \frac{P - F_{acero}}{A_{al}} = -46.139 \cdot \text{MPa}$$

Problema Propuesto 11

$$\sigma_{lat} := \frac{N_{lat}}{esp_{lat} \cdot b} = -142.857 \cdot \text{MPa}$$

$$\Delta_{al} := \frac{N_{al} \cdot \text{Long}}{E_{al} \cdot esp_{al} \cdot b} = \cdot \text{mm}$$

$$\sigma_{al} := \frac{N_{al}}{esp_{al} \cdot b} = -95.238 \cdot \text{MPa}$$

$$\Delta_{lat} := \frac{N_{lat} \cdot \text{Long}}{E_{lat} \cdot esp_{lat} \cdot b} = -0.408 \cdot \text{mm}$$

Problema Propuesto 12

$$F_{acero} = 7.837 \times 10^4 \text{ N} \quad \sigma_{acero} := \frac{F_{acero}}{A_{acero}} = 39.911 \cdot \text{MPa}$$

$$F_{hormigón} = 4.216 \times 10^5 \text{ N} \quad \sigma_{hormigón} := \frac{F_{hormigón}}{A_{hormigón}} = 3.679 \cdot \text{MPa}$$

Problema Propuesto 13

$$\sigma_{al} := \frac{N_{al}}{A_{al}} = -46.971 \cdot \text{MPa}$$

+

Tema IV: Elementos a Esfuerzo Cortante. Diseño de uniones.

Problema Propuesto 2

$$P_{max} := \min(P_{desg}, P_{apl}, P_{tens}, P_{cort}) = 353.28 \cdot \text{kN}$$

Problema Propuesto 3

R / el diámetro debe ser de 16mm

Problema Propuesto 4

R / LA Pmax sería de 56.297 kN, como succión sería de 2.815 MPa

Problema Propuesto 5

R / La cantidad minima de pernos n es 4

Problema Propuesto 6

$$t = 6.351 \cdot 10^{-3} m$$

Problema Propuesto 7

$$d := \sqrt{\frac{N_{max}}{\frac{\pi}{4} \cdot \tau_{adm}}} = 20.471 \cdot mm$$

Tema V: Estado Tenso-Deformacional Plano.

Problema Propuesto 2

Ver ejemplo resuelto en el libro electrónico de Matcad.

Problema Propuesto 3

Ver ejemplo resuelto en el libro electrónico de Matcad.

Problema Propuesto 4

$$FS_{tension} := \frac{400kPa}{\sigma_{\alpha}} = 1.368$$

$$FS_{cortante} := \frac{900kPa}{\tau_{\alpha}} = 1.244$$

Problema Propuesto 5

$$FS_M := \frac{\sigma_{UT}}{\sigma_{eqM}} = 1.071$$

Problema Propuesto 6

$$\tau = 49.763 MPa$$

Problema Propuesto 7

$$FS_{\text{Tresca}} := \frac{\sigma_f}{\sigma_{\text{eqT}}} = 1.625$$

$$FS_{\text{VM}} := \frac{\sigma_f}{\sigma_{\text{eqVM}}} = 1.848$$

Problema Propuesto 8

$$FS := \frac{\sigma_{\text{Ut}}}{\sigma_{\text{eq}}} = 0.852$$

Tema VII: Análisis, Diseño y Revisión de elementos sometidos a flexión.

Problema Propuesto 2

$$B_y := \frac{\frac{q \cdot \text{Luz}^2}{2}}{\text{Luz}} = 17.875 \cdot \text{kN}$$

$$A_y := q \cdot \text{Luz} - B_y = 17.875 \cdot \text{kN}$$

$$\sigma_{\text{max}} := \frac{M_{\text{max}}}{W} = 12.91 \cdot \text{MPa}$$

$$\tau_{\text{max}} := \frac{3}{2} \frac{V_{\text{max}}}{A} = 595.833 \cdot \text{kPa}$$

Problema Propuesto 3

$$B_y := \frac{q \cdot (3\text{m})^2}{2} + P \cdot 4\text{m} = 37.98 \cdot \text{kN}$$

$$A_y := q \cdot 3\text{m} + P - B_y = 13.62 \cdot \text{kN}$$

$$\sigma_{\text{max}} := \frac{M_{\text{max}}}{S_x} = 168.053 \cdot \text{MPa}$$

$$\tau_{\text{max}} := \frac{|V_{\text{max}}| \cdot Q}{I \cdot t_w} = 29.384 \cdot \text{MPa}$$

Problema Propuesto 4

$$B_y = 235.4 \text{ kN}$$

$$A_y = 235.4 \text{ kN}$$

+

Problema Propuesto 5

$$R_a = 360 \text{ kN}$$

$$R_b = 330 \text{ kN}$$

$$W_{\text{req}} := \frac{M_{\text{max}}}{\sigma_{\text{adm}}} = 3.403 \times 10^6 \cdot \text{mm}^3$$

$$\tau_{\text{max}} := \frac{V_{\text{max}} \cdot Q_{\text{max}}}{I_x \cdot t_w} = 57.875 \cdot \text{MPa}$$

$$v_{\text{máx}} := y_{vb}(z_{y\text{max}}) = -0.01009 \cdot \text{m}$$

Problema Propuesto 6

De donde $a = 20$ cm

$$y_{\text{máx}} := y_1(z_{\text{ymax}}) = -22.77 \cdot \text{mm}$$

Problema Propuesto 7

Escogemos el W310 x 38.7, que resulta el mas economico al tener menor peso...

+

$$y_{\text{máx}} := y_1(z_{\text{ymax}}) = -14.66003 \cdot \text{mm}$$

Problema Propuesto 8

Escogemos el W410 x 46.1, que resulta el mas economico al tener menor peso...

$$y_{\text{máx}} := y_1(z_{\text{ymax}}) = -18.40537 \cdot \text{mm}$$

Problema Propuesto 9

El perfil seria W250 x 32.7 con $W = 381 \times 10^3 \text{ mm}^3$

$$y_{\text{máx}} := y_1(z_{\text{ymax}}) = -12.50098 \cdot \text{mm}$$

Problema Propuesto 10

De donde $a = 17.5$ cm

$$y_{\text{máx}} := y_1(z_{\text{ymax}}) = -32.82 \cdot \text{mm}$$