Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas

Facultad de Matemática Fisica y Computación

Departamento de Matemática

Tesis para optar por el Grado de Master en Ciencias

Perfeccionamiento del Proceso de Enseñanza-Aprendizaje de la Matemática en la carrera de Ingeniería Agrícola

Autora:

Ing. Laura García Pedraza

Tutores:

Dr. C. Gerardo Hernández Cuellar

Ms. C. Ramón A Ortega Díaz

2014

Al venir a la tierra todo hombre tiene derecho a que se le eduque, y después en pago a contribuir a la educación de los demás.

José Martí

A mi bebé, mi chucha, mi mamá, mi papá y mi esposo, que sin su apoyo incondicional esto no hubiera sido posible.

Quiero agradecer a todos aquellos que de una forma u otra han colaborado con la realización de este trabajo.

En especial:

A mis tutores Dr.C. Gerardo Hernández Cuellar y el Ms.C. Ramón Abel Ortega Díaz por haberme guiado y ayudado en la realización de esta tarea.

Al colectivo de profesores que me ha acompañado en el transcurso de la investigacion.

A todos, Muchas Gracias.

RESUMEN

En el contexto actual, Cuba exige de una ciencia que contribuya al desarrollo económico y social del país. La Matemática como ciencia básica se hace imprescindible en la creación de habilidades que contribuyan a la formación de un profesional de las ciencias agropecuarias mejor preparado. Sin embargo, se han venido presentando problemas en la carrera de Ingeniería Agrícola con respecto a la asimilación de los contenidos matemáticos por parte de los estudiantes. Con la presente investigación se pretendió: Elaborar indicaciones metodológicas para la disciplina de Matemática en la carrera de Ingeniería Agrícola con vista al perfeccionamiento del proceso de enseñanza – aprendizaje de la Matemática en esta especialidad.

Para el cumplimiento de dicho objetivo se utilizaron como técnicas de investigación: revisión documental, entrevista a informantes claves, encuesta y observación participante. Se analizaron así, las necesidades matemáticas de diferentes asignaturas básicas y básicas específicas de la carrera, que hacen uso de la Matemática para la impartición de las mismas.

Los resultados obtenidos fueron los siguientes: una gran cantidad de asignaturas de la especialidad necesitan de temas matemáticos para su impartición. Las principales dificultades se presentan en los siguientes temas: Funciones, Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Ecuaciones Diferenciales y Series. Esto contribuyó a la confección de un Folleto de Ejercicios como medio de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en esta carrera.

ABSTRACT

In the present-day context, Cuba demands of a science that contributes to the economic and social development of the country. The Mathematics like basic science is essential in the creation of abilities that contribute to the formation of a professional of the agricultural sciences better prepared. However, we have been facing problems in agriculture engineer's carrier regarding the assimilation of the mathematical contents by the students. With this investigation we attempted: Elaborate methodological indications for Mathematics' discipline in Agricultural Engineer's carrier looking out on the perfecting of the process of teaching – learning of the Mathematics in this specialty.

In order to fulfill the objectives we used some techniques of searching like: Documentary revision, interview to informants keys, survey and participating observation. We examined, the mathematical needs of different basic subjects and basic specific of the carrier, that make use of the Mathematics for its accomplishment.

The obtained results were the following: There are a great quantity of subjects of the specialty that needs mathematical themes for its impartation. The principal difficulties are presented in the following themes: functions, Differential Calculation, Integral Calculation, Differential Equations and Series. Taking into account the detected needs we offer a set of methodological indications. This contributed to the confection of an Exercises' file like means of teaching learning of the Mathematics in this carrier.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

A inicios de la década de 1960, se comenzaron a brindar los primeros contenido sobre motores de combustión interna, riego y drenaje, construcciones rurales, procesamiento de materias primas agrícolas, maquinaria y tractores agrícolas, a los ingenieros agrónomas, aunque con muy pobres conocimientos teóricos, con los cuales atendieron la actividad mecanizada de la agricultura en Cuba (Agrícola, septiembre 2007).

En 1976 con la reestructuración de la Educación Superior y la creación de su Ministerio, comienzan los estudios de la especialidad (carrera) de Mecanización de la Producción Agropecuaria, en los centros y universidades dedicados a las Ciencias Agropecuarias, graduándose los primeros ingenieros mecanizadores en 1980 con el Plan de Estudios "A" (Agrícola, septiembre 2007).

Posteriormente, se aprueba de manera oficial, en 1982, el Plan "B" y en 1990 el "C", este último con el título de Ingeniero Mecanizador Agropecuario. En 1999 se certifica el Plan "C Perfeccionado". En el año 2006 comienza a aplicarse el Plan de estudios "D" y con este la carrera cambia de nombre y comienza a llamarse Ingeniería Agrícola. Para la confección del mismo se tuvieron en cuenta aspectos esenciales como el encargo social del profesional, la preparación del profesional (Ingenieros del siglo XXI), las técnicas mundiales en el desarrollo de la ciencia y de la tecnología en esta rama, el objeto de trabajo, el objeto de la profesión, el principal problema profesional (Agrícola, septiembre 2007).

Por tanto, los planes de estudios constituyen una herramienta imprescindible a la hora de concebir e impartir las asignaturas, así como para la formación integral del estudiante. Es importante señalar que en ocasiones resulta difícil hacer un correcto Trabajo Metodológico que repercuta en la disciplina, el año y la carrera.

Tradicionalmente en la carrera se utilizan con mucha frecuencia los métodos de cálculos impartidos por el profesor en clases. Los estudiantes se veían en la necesidad de resolver derivadas e integrales de funciones que en ocasiones no resultaban tan sencillas y que ellos nunca se iban a encontrar en problemas prácticos de su profesión. Por estas razones, y por la cantidad de contenidos matemáticos que tienen otras asignaturas de la especialidad, es que habría que concebir la enseñanza de la Matemática de tal forma, que lo esencial sea la interpretación de los conceptos y fenómenos que tengan relación con ella (Agrícola, septiembre 2007).

Con el proceso de actualización del modelo económico-social que vive Cuba, se refuerza la necesidad de contribución de la ciencia al desarrollo del país. De esta manera se hace un llamado, sobre todo al sector agropecuario a la diversificación y ampliación de la producción de alimentos.

Estos desafíos a los que se enfrenta la Educación Superior – sobre todo las ciencias agropecuarias – exigen de una didáctica especial, que de forma significativa, descubra nuevos elementos de planificación docente, que contribuyan a la formación de un profesional altamente competente. De tal manera, se hace necesario implementar en el sistema educativo cambios que se correspondan con las exigencias y desarrollo de las nuevas tecnologías, los problemas económicos, jurídicos, sociales, políticos, medio ambientales que acontecen en nuestro país.

En este sentido la Matemática ocupa un importante lugar en el desarrollo del pensamiento y la capacidad de razonamiento en el estudio de diversas ciencias entre ellas las Ciencias Técnicas Agropecuarias.

La automatización de la producción y la aplicación en gran escala de la técnica computacional moderna para enfrentar problemas económicos - productivos - organizativos muy complejos, hacen evidente la introducción sistemática ininterrumpida de los métodos matemáticos en la actividad del diseño, investigación, organización y producción que despliegan los ingenieros. El Ingeniero Agrícola tiene la capacidad de desempeñarse en diversos ámbitos, sobre todo en sectores relacionados con la producción agrícola y el manejo sustentable de los recursos naturales (Agrícola, septiembre 2007).

El diseño curricular actual de la disciplina Matemática y las acciones pedagógicas en la carrera de Ingeniería Agrícola aún no garantizan la formación matemática de los ingenieros, pues no se ha logrado el vínculo interdisciplinario que promoverá la formación de las habilidades matemáticas que estos requieren. No siempre los docentes han tenido claridad del papel de las matemáticas en la carrera, por lo que no se ha logrado un trabajo sistemático entre todas las disciplinas para la formación de estas habilidades. Los intentos y afanes dirigidos a la modernización se materializan, en última instancia, en la labor docente que realizan las Universidades (Agrícola, septiembre 2007).

El estudio actual del perfeccionamiento de la Matemática se caracteriza por: el desarrollo y descubrimiento de nuevas teorías matemáticas; las posibilidades de utilizar modelos y paquetes matemáticos más precisos debido al desarrollo de los medios computarizados; el enfoque globalizado del objeto de estudio de las ciencias como consecuencia de la necesidad de considerar los problemas complejos de la carrera con enfoque integrador. Esto le ha permitido a las diferentes ramas de la ciencia y la técnica, elaborar modelos matemáticos que faciliten el estudio de sus diferentes objetos. El trabajo profesional en la esfera agrícola no está exento del desarrollo matemático alcanzado mundialmente, su aplicación a problemas biotecnológicos, la aplicación de técnicas de simulación, entre otros, así lo confirman (Agrícola, septiembre 2007).

Además el campo de acción del Ingeniero Agrícola comprende la utilización racional de los recursos, los cambios tecnológicos en la maquinaria y sistemas de riego, la agricultura sostenible, de precisión y de conservación, el cuidado del medio ambiente, el uso combinado de las fuentes de energía renovables y no renovables, entre otras; y los avances de la agricultura en general que tiene una aplicación directa o indirecta en la producción agropecuaria, como son los nuevos paradigmas del conocimiento; el uso de los nuevos sistemas automatizados de cómputo electrónico para los cálculos y el dibujo en ingeniería; la automatización de los procesos tecnológicos de las máquinas y procesos; la utilización de la teledetección y el sistemas de información geográfica, entre otros (Agrícola, septiembre 2007).

Así mismo el ingeniero de este perfil, precisa de una formación básica matemática que le posibilite implementar los conocimientos adquiridos en las asignaturas básicas y en otras con carácter más específico dentro de la carrera. La Matemática desde su objeto de estudio, aporta los métodos y modelos de tratamiento de la información que fundamentan, describen, explican o validan problemas relacionados con su perfil profesional. Además desarrolla una serie de habilidades que permiten al estudiante lograr la abstracción, comparación, síntesis, observación, predicción, análisis, modelación, interpretación, aplicación, exposición, etc. (Agrícola, septiembre 2007).

De tal manera la matemática debe prever que sus habilidades se puedan desarrollar en otras disciplinas de la carrera, que hacen uso de ella, para sistematizarlas, para que los profesionales puedan aplicar los modelos matemáticos que exige su especialidad. Esta es la única forma en que la matemática puede llegar a revertirse en utilidad práctica generalizada, siendo la herramienta que fundamenta teóricamente la solución a una gran cantidad de problemas concretos y no solo para un grupo selecto de profesionales sino para la totalidad de estos (Ortega, 2000).

Se puede agregar que los estudiantes que ingresan en la carrera Ingeniería Agrícola presentan una mala preparación matemática, debido a los problemas existentes en la enseñanza precedente; que unido a la poca motivación, hace que vean a la matemática como una asignatura muy compleja.

Esto repercute directamente en el proceso de enseñanza-aprendizaje, pues los estudiantes presentan dificultades a la hora de hacer comparaciones, abstracciones, deducciones, no tienen un correcto desarrollo del pensamiento lógico matemático, no modelan correctamente problemas relacionados con temas de la especialidad, etc. (Ortega, 2000).

En este sentido la Matemática es un instrumento de trabajo indispensable en la solución de problemas relacionados con el perfil de la carrera y con la producción, por su formación desarrolladora en cuanto a pensamiento analítico, reflexivo, deductivo y creador. Este aspecto llevó a realizar un estudio en el cual se determinaron los problemas fundamentales presentes en las asignaturas de la carrera donde se utilizan herramientas matemáticas. Además se detectaron los modelos que con más frecuencia son necesarios utilizar en las diferentes disciplinas. Teniendo en cuenta que el futuro profesional participará directamente en el proceso de producción y dirección de las unidades agropecuarias de base, una buena ejemplificación y aplicación de contenidos matemáticos garantizará una correcta materialización del conocimiento sobre las técnicas modernas (Chaviano Conde, 1996).

A partir de lo anteriormente expuesto se plantea el siguiente **Problema Científico**: ¿Cómo incidir en el perfeccionamiento del proceso de enseñanza – aprendizaje de la Matemática en la especialidad de Ingeniería Agrícola a partir de las necesidades matemáticas que se presentan en las asignaturas específicas de esta profesión?

Así el **Objeto de Investigación** será: el proceso de enseñanza- aprendizaje de la Matemática en la carrera de Ingeniería Agrícola.

El **Campo de Acción**: la vinculación de laMatemáticacon las asignaturas específicas de la carrera de Ingeniería Agrícola.

Por lo que el **Objetivo General** será: *Elaborar indicaciones metodológicas para la disciplina de Matemática en la carrera de Ingeniería Agrícola con vista al perfeccionamiento del proceso de enseñanza – aprendizaje de la Matemática en esta especialidad.*

Objetivos Específicos:

1. Identificar las necesidades matemáticas que presentan las asignaturas que conforman cada una de las disciplinas del currículo de la carrera de Ingeniería Agrícola.
2. Proponer indicaciones metodológicas a partir de las necesidades detectadas con vista al perfeccionamiento del proceso de enseñanza - aprendizaje de la Matemática en esta especialidad.
3. Elaborar un Folleto de Ejercicios como medio de enseñanza –aprendizaje de la Matemática en la carrera Ingeniería Agrícola.

Tareas de investigación:

1. Revisión del plan de estudio de la carrera de Ingeniería Agrícola.
2. Identificación de las necesidades matemáticas que presentan las asignaturas que conforman cada una de las disciplinas.
3. Proposición de indicaciones metodológicas a partir de las necesidades detectadas con vista al perfeccionamiento del proceso de enseñanza - aprendizaje de la Matemática en esta especialidad.

4. Elaboración de un Folleto de Ejercicios como medio de enseñanza – aprendizaje de la Matemática en la carrera Ingeniería Agrícola.

Se utilizaron los siguientes métodos de investigación:

- Métodos teóricos:

- Histórico – lógico: para explicar el objeto en la lógica de su desarrollo, descubriendo sus contradicciones y esencia.

- Inductivo deductivo: para arribar a generalizaciones a partir de las concepciones particulares que existen sobre el objeto en cuestión.

- Métodos empíricos:

- Revisión documental:utilizada en la revisión bibliográfica, el estudio de reportes e informes sobre el proceso docente educativo, el Trabajo Metodológico y la consulta de documentos rectores de la carrera.

- Encuesta: aplicada a directivos del departamento docente, y a profesores de las asignaturas básicas y básicas específicas de la carrera.

- Entrevista a informantes claves: realizadas a los jefes de disciplina para poder determinar la incidencia de la Matemática en cada una de las asignaturas que conforman estas disciplinas.

- Observación participante: para determinar las potencialidades y deficiencias que presentan los estudiantes de la carrera de Ingeniería Agrícola en el desarrollo de las habilidades matemáticas.

Todos los métodos enunciados anteriormente permitieron identificar las necesidades matemáticas que presentan las asignaturas que conforman cada una de las disciplinas del currículo de la carrera de Ingeniería Agrícola.

La investigación resulta novedosa dado que su enfoque fortalece la sistematicidad. El estudio realizado permitió identificar las necesidades matemáticas en estudiantes y profesores, y de esta forma concebir una serie de indicaciones metodológicas, que conllevan a perfeccionar el proceso de enseñanza – aprendizaje de las asignaturas de Matemática en esta carrera.

La significación práctica de la investigación radica en:

- Fortalecimiento de la sistematización vertical y horizontal de la carrera; mediante la utilización de ejemplos matemáticos que satisfagan las necesidades matemáticas de las demás asignaturas.
- Influencia en la preparación matemática de los profesores de la especialidad, sobre todos en aquellos que imparten asignaturas que tiene un alto contenido matemático.
- Confección de un folleto de ejercicios que abarque cada uno de los temas tratados en la asignatura con ejercicios de aplicación a la especialidad.

La tesis está estructurada de la siguiente marera:

Capítulo I:

Donde se hace una búsqueda de la importancia de la Matemática y su aplicación sobe todo en el sector agropecuario. Los momentos por los que han transitado los planes de estudio. Se hace una descripción del proceso de enseñanza-aprendizaje en la carrera de Ingeniería Agrícola. Así como se desarrolla el Trabajo Metodológico en la Educación Superior, características reglamentos, etc.

Contiene los siguientes epígrafes.

I.I. La Matemática en las carreras técnicas de la Educación Superior.

I.II. La Matemática en las carreras agropecuarias.

I.III. El Proceso de Enseñanza – Aprendizaje (PEA) de la Matemática en la carrera de Ingeniería Agrícola.

I.IV. El Trabajo Metodológico en la Educación Superior.

Capítulo II:

En este capítulo se describen las principales necesidades matemáticas detectadas no solo a los estudiantes, sino también a los profesores. Se hace una propuesta metodológica general y una desglosada por temas de las asignaturas de Matemática. Concluye con la confección de un folleto de ejercicios como medio de enseñanza-aprendizaje.

Está estructurado de la forma siguiente:

II.I. Diagnóstico de las necesidades matemáticas en la Carrera de Ingeniería Agrícola.

II.II. Propuesta metodológica para el perfeccionamiento del Proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática en la carrera de Ingeniería Agrícola.

II.III. El Folleto de Ejercicios.

CAPÍTULO I. La enseñanza de la Matemática en las carreras de perfil agrícola. Consideraciones generales.

I.I. La Matemática en las carreras técnicas de la Educación Superior.

La impartición de la Matemática ha sido preocupación y ocupación de muchos, desde que se comenzó a impartir la misma. En las carreras técnicas de la Educación Superior son de vital importancia lo relacionado con los contenidos matemáticos, por su aplicación en estas carreras.

El Ministerio de Educación Superior es el encargado de conducir la impartición de estas asignaturas, orientando a los profesores en cuanto a los contenidos teniendo en cuenta las particularidades de cada carrera. Para esto fueron creados por este ministerio los planes de estudio de las diferentes carreras y dentro de estos los programas que conforman cada una de las asignaturas agrupadas en disciplinas.

Los programas de las asignaturas Matemática han pasado por distintas transformaciones, con el objetivo de perfeccionar el proceso de enseñanza-aprendizaje. Al triunfar la Revolución, los programas de Matemática tenían varias décadas de confeccionados y solo respondían a objetivos instructivos sin tener en cuenta los objetivos educativos. Esto traía como consecuencia una serie de dificultades en el desarrollo habilidades (Taillacq Montalvo, 1996).

En la década del 60 del silo XX, se unifican los programas de Matemática para las ingenierías del país, creándose los planes de estudios A y B. Para los años 70 de este mismo siglo, se comienzan a introducir contenidos relacionados con el Álgebra Lineal, la Teoría de Probabilidades y la Computación (Taillacq Montalvo, 1996).

En el año 1976 se crea el Ministerio de Educación Superior, y con este se comienzan a establecer las normas metodológicas para la confección de los planes y programas de estudio de las diferentes carreras. Esto sucede específicamente en el curso escolar 1977-1978 con el plan de estudios A (Taillacq Montalvo, 1996).

Una de las dificultades de este plan de estudios fue la no claridad de los objetivos, lo que trajo como consecuencia que los programas fueran prácticamente iguales sin importar la especialidad. Además los contenidos no respondían a las especificidades de otras disciplinas (Taillacq Montalvo, 1996).

Debido a estas dificultades se crea el plan de estudios B el cual comenzó a impartirse en el curso 1982-1983. En él se comenzaron a perfeccionar los objetivos y se continuaron unificando programas. En esta etapa con el desarrollo alcanzado por la computación se independiza esta como asignatura. Así se establecen tres niveles para la enseñanza de la Matemática en el país (Taillacq Montalvo, 1996):

Nivel 1: Programas de Matemática para aquellas especialidades que requerían de algunos conceptos matemáticos, en los que no era necesario el desarrollo de habilidades de cálculo ni hacer aplicaciones prácticas.

Nivel 2: Programas de Matemática para las especialidades que requerían de un dominio de conceptos matemáticos y desarrollo de habilidades cálculo que permitían aplicar herramientas matemáticas a su profesión.

Nivel 3: Programas de Matemática para especialidades que además de requerir un dominio de los conceptos matemáticos y habilidades de cálculo, le permitían aplicar herramientas matemáticas a las diferentes ramas de la ciencia y la técnica.

Establecer estos niveles, permitió reducir a cuatro los programas de las ingenierías. Las carreras estaban situadas en el nivel 2. Posteriormente se comenzó a realizar el Trabajo Metodológico por parte de los profesores que impartían la matemática para desarrollar contenidos que tuvieran aplicaciones a cada una de las especialidades (Taillacq Montalvo, 1996).

Las deficiencias de este plan B consistían en que estos niveles no especificaban la profundidad de los contenidos a desarrollar y se ubicaron en el mismos nivel carreras distintas. Todas las ingenierías tenían los mismos programas. No existía derivación gradual de los objetivos a partir del Modelo del Profesional (Taillacq Montalvo, 1996).

A finales de los 80 y principio de los 90 del siglo XX, entra en vigor el plan de estudios C. Los programas correspondientes de la disciplina de matemática se confeccionaron teniendo en cuenta la fundamentación de la Matemática como ciencia, así como el papel que debe jugar en el plan de estudio, pues debe proveerle a las demás asignaturas específicas, las herramienta necesarias para su desarrollo y así cumplir con los objetivos tratados en el Modelo del Especialista. Este plan tenía como premisa, lograr una sólida formación básica a partir de un conocimiento más profundo de las Ciencias Básicas y de los fundamentos de las ciencias de ingeniería por parte de los futuros egresados (Barrera, 2003).

En este programa se tiene en cuenta la derivación gradual de los objetivos, partiendo de los objetivos generales hasta los específicos de la formación del egresado –llamado Modelo del Profesional- precisando en el año, nivel, disciplina, asignatura, tema y clase. Así los objetivos generales de la disciplina reflejan la posibilidad de integrar todos los contenidos de la misma y obtener resultados más ambiciosos (Taillacq Montalvo, 1996).

Las principales dificultades de este plan de estudios estaban en el buen desarrollo del proceso docente educativo. En el año 2005 se comienzan a dar las primeras orientaciones y a discutir el nuevo plan de estudios D vigente hasta nuestros días. En el curso escolar 2006-2007, algunas carreras comienzan a implementarlo incluyendo la carrera de Ingeniería Agrícola.

Este nuevo plan tiene como objetivo principal potenciar el autoaprendizaje en los estudiantes para así favorecer el desarrollo de habilidades y la autogestión del conocimiento. Se hace una restructuración curricular de los contenidos y programas de manera que responda al objeto de estudio del profesional no solo por carrera sino también por disciplina.

Se enfatiza en el tratamiento de los conceptos principales y antecedentes, y a los conceptos secundarios, darle mayor tratamiento desde el estudio independiente ya que esto contribuye al autoaprendizaje.

Esta adecuación curricular contribuye a que a los estudiantes haya que proporcionarles quías de estudio formativas para que de esta forma indaguen e investiguen sobre diversos temas.

Este plan de estudios al igual que los anteriores presenta una serie de deficiencias como lo son por ejemplo, que los profesores no tienen la preparación adecuada para desarrollar en los estudiantes las habilidades necesarias para potenciar el autoaprendizaje. Además presentan una resistencia al cambio al concebir una menor cantidad de horas presenciales de los contenidos.

Esto conlleva a que aumente el número de actividades independientes orientadas por los profesores a realizar por parte de los alumnos, lo que contribuye a que el estudiante se desmotive por el estudio.

Por último el sistema de evaluación es muy ambicioso, proyectándose al estudiante actividades evaluativas de peso en varias asignaturas en un mismo día y en una misma semana.

A partir del perfeccionamiento de los planes de estudio, se ha comprobado que la Matemática es una de las ciencias más aplicables a cualquiera de las ramas del saber. Pero cuando se trata de carreras técnicas, sin lugar a dudas adquiere una considerable importancia por su aplicación y uso.

Muchos conceptos de la matemática se han convertido en elementos indispensables de la cultura general integral y en particular del ingeniero, por ejemplo (Alfonso Rodríguez, 2004):

- La Matemática como herramienta de cálculo.
- Como instrumento para resolver problemas de ingeniería.
- Como lenguaje universal capaz de contribuir al conocimiento y desarrollo de otras disciplinas propias del perfil profesional.
- Como herramienta para lograr el desarrollo del pensamiento lógico, la capacidad de razonar, de enfrentarse a situaciones nuevas.

En la Mecánica, la Matemática es utilizada para calcular fuerza, desplazamiento, velocidad y aceleración de un cuerpo. Para determinar la flexión de una viga que está sometida a fuerza por soportar determinada carga, decretar el movimiento que realiza un resorte en su desplazamiento respecto a su posición de equilibrio y la determinación de movimientos amortiguados (Autores, 2010).

En Ingeniería Eléctrica es utilizada para determinar las caídas de voltajes y la corriente generada por un circuito. En Ingeniería Industrial, puede ser utilizada a través de la optimización para determinar la asignación de rutas y frecuencias de transporte entre una serie de proveedores y otra de clientes. En Hidráulica para controlar la cantidad y la velocidad del agua cuando esta es distribuida por gravedad (Pacheco, 2005).

I.II. La Matemática en las carreras agropecuarias.

Al realizar estudios y predicciones futuras sobre fenómenos y procesos agrícolas se hace imprescindible conocer una serie de factores que actúan de forma directa en la toma de decisiones, que posteriormente permitirán llegar a conclusiones científicas y aplicarlas en la práctica. Reforzando así las investigaciones de los procesos agropecuarios utilizando como instrumento imprescindible la Matemática Aplicada.

La Matemática Aplicada en las Ciencias Agropecuarias permite brindar criterios y herramientas básicas para manejar e interpretar cada vez mejor la actividad agrícola, satisfacer las demandas de nuevas tecnologías para producir en mercados globales altamente competitivos resguardando los recursos naturales y tomar decisiones a mediano y largo plazo en condiciones similares de experimentación (Ortega, 2000).

Un investigador agrónomo requiere valorar la relación que existe entre la multiplicación de las bacterias y el tiempo, entre la desintegración proteica de una enzima y el sustrato aplicado, entre el rendimiento de un cultivo y la fertilización necesaria (Chávez, 2006).

El médico veterinario requiere evaluar una determinada enfermedad de acuerdo a las condiciones climáticas o del lugar donde se encuentren los animales. Además analiza las curvas de crecimiento de animales y de producción de leche, las curvas de respuesta a diferentes medicamentos (Quintero et al., 2010).

De esta forma, es importante que los especialistas de las Ciencias Agropecuarias comprendan con claridad cómo las herramientas matemáticas les permiten analizar un fenómeno o crear un modelo matemático nuevo para reflejar la realidad de su entorno, o sea, que pueden utilizar de manera aceptada y consciente las matemáticas en la solución de problemas agropecuarios; empleando además los software existentes de acuerdo a las complejas soluciones que se pueden presentar (Yepis, diciembre 1999).

Existe una gran variedad de problemas donde se utilizan las herramientas matemáticas en estas ciencias. Para agruparlos y diferenciarlos se consideraron tres clases de problemas básicos fundamentales, definidos por (Chávez, 2006).

1- Problemas de Optimización: Aquí se enmarcan los problemas fundamentales de carácter agropecuario que puedan ser resueltos aplicando teoría de extremos, es decir, hallar el valor óptimo de una función que esté sujeta, o no, a ciertas restricciones.
2- Problemas Estadísticos: Son aquellos problemas relacionados con las especialidades agropecuarias que se solucionan a través de métodos estadísticos descriptivos e inferenciales.
3- Problemas para obtener cálculos y relaciones entre magnitudes: Son aquellos problemas agropecuarios los cuales se solucionan a partir de la modelación matemática utilizando como herramienta temas tales como: dependencia funcional entre magnitudes, derivadas, integrales y ecuaciones diferenciales.

La esfera agropecuaria no está exenta del desarrollo matemático alcanzado mundialmente. La aplicación de técnicas de simulación y procesos biotecnológicos dan fe de ello. Para lograr especialistas capases de estar a tono con este desarrollo se hace necesario su formación en el campo de las matemáticas, específicamente la modelación matemática. Esta herramienta permite la construcción de un modelo que representa un objeto o sistema real. Es por esta razón la importancia que se le da al uso de los modelos en la rama agropecuaria.

Algunos de los modelos que con más frecuencia se utilizan en las diferentes disciplinas de las especialidades agropecuarias, referidos al núcleo básico matemático mencionados anteriormente son (Chávez Esponda et al., 2013).

Problemas de Optimización.

- En el caso particular de la programación lineal, se basa en el estudio de modelos matemáticos concernientes a la asignación eficiente de los recursos limitados en las actividades conocidas, con el objetivo de satisfacer las metas deseadas (tal como maximizar beneficios o minimizar costos) y es aplicable este método a problemas de transporte, distribución de tierras y explotación de un parque de maquinarias (Chávez Esponda et al., 2013).
- La solución de sistemas de ecuaciones lineales, es utilizada en el mundo entero para la optimización de procesos, simulación, cálculo de matrices de riesgo y determinación de factores de eficiencia, por lo que debe formar parte del arsenal de conocimientos de todo profesional vinculado a procesos tecnológicos (Caña, 1992).

Problemas Estadísticos

- Otras técnicas estadísticas muy usadas como las dócimas de hipótesis y el Análisis de Varianza permiten probar y decidir si una nueva tecnología aumenta la producción promedio (Betancourt et al., 2008). validar si un nuevo método de fabricación de piezas favorece una mayor duración de las mismas; planificar y explotar con eficiencia el parque de maquinarias y el uso de implementos agrícolas, así como, comparar varios tipos de suelo o diferentes labores de cultivo (Betancourt et al., 2010). En la ingeniería agrícola los métodos estadísticos multivariados permiten analizar varias variables así como la interrelación entre ellas (Johnson and Wichern, 2005). Un ejemplo lo constituye el estudio de las propiedades físicas y organolépticas en los frutos, así como, la obtención de modelos de predicción de los mismos.

Problemas para obtener cálculos y relaciones entre magnitudes

- El cálculo del pH de los suelos conociendo la concentración de Hidronio conduce a la ecuación de una función de gran utilidad para el estudio de características de los suelos así como el proceso inverso.
- Otras funciones muy utilizadas son las curvas de respuesta, las cuales permiten establecer la relación entre el rendimiento de los cultivos y los nutrientes en una parcela de tierra.
- Un ejemplo del trazado de una curva y la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de 1er orden y grado por el método de variables separables, puede verse al solucionar la Ecuación del Balance del calentamiento del motor en la regulación de fuentes energéticas y al trazar el gráfico de la temperatura respecto al tiempo (Jiménez, 1997).

El vertiginoso desarrollo alcanzado por la informática unido al de las matemáticas aplicadas ha permitido darle solución a cada una de estas problemáticas. Lo anterior permite a los estudiantes; que mediante el proceso de enseñanza-aprendizaje visualicen la importancia y aplicación de la Matemática en estas carreras y específicamente en la carrera de Ingeniería Agrícola.

I.III. El Proceso de Enseñanza – Aprendizaje (PEA) de la Matemática en la carrera de Ingeniería Agrícola.

El concepto de Didáctica se interpreta como ciencia práctica, como teoría general de la enseñanza y el estudio de las diversas maneras de enseñar, como técnica metodológica, etc. Desde el punto de vista de su sentido funcional como ciencia de la dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje, para lograr una eficiencia formativa e instructiva, como conducción del educando a la progresiva adquisición de los conocimientos, habilidades, técnicas. También como organización del aprendizaje, como parte de la Pedagogía (Ginoris Quesada et al., 2006).

La Didáctica está en estrecha relación con el proceso de enseñanza-aprendizaje pues es considerada como el componente teórico y científico de este proceso. Así, la Didáctica como ciencia, estudia integralmente el proceso de enseñanza – aprendizaje;

es una ciencia social y sus leyes son de naturaleza dialéctica; y posee un objeto de estudio dinámico, complejo y multifactorial (Ginoris Quesada et al., 2006).

Se han dado varias definiciones de lo que es el PEA:

La actividad del profesor –la enseñanza- y la de los estudiantes - el aprendizaje -, son la expresión interna de este propio proceso, pero no se reduce a ésta; en él están presentes, como esencia, las relaciones más íntimas del objeto que se estudia: las leyes, que constituyen, en última instancia, la expresión pedagógica de las relaciones sociales, que son, como se conoce, la esencia del hombre (Ginoris Quesada et al., 2006).

Diferentes autores (M. et al., 2003),expresan sus puntos de vistas sobre el PEA. Ellos plantean que este proceso es conocido como el objeto de estudio de la Didáctica, lo que le confiere su carácter de ciencia.

Resulta interesante el análisis realizado por la brasileña V. M. Candaual quien propone una multidimencionalidad del PEA a partir de tres dimensiones: la humana donde afirma que el componente afectivo está presente en el proceso de enseñanza-aprendizaje; la dimensión técnica, se refiere al proceso como acción intencional y sistémica y por último la dimensión político-social donde expresa que… toda práctica pedagógica… posee en sí una dimensión político-social (Candaual, 1983).

La Dra. Gladys Valdivia al referirse al PEA plantea: “En el proceso pedagógico se tienen en cuenta los objetivos sociales, las condiciones en que tienen lugar el proceso y las relaciones que se establecen. La unidad dialéctica existente entre educación y enseñanza, así como la máxima generalidad del concepto educación , por estar presente tanto en el proceso de enseñanza que tiene lugar en la escuela como fuera de estas condiciones específicas (Labarrere, 1988).

Por otra parte Álvarez de Zayas, C. considera al proceso docente-educativo como aquel proceso que como resultado de las relaciones sociales que se dan entre los sujetos que participan, está dirigido, de un modo sistémico y eficiente, a la formación de las nuevas generaciones, tanto en el plano educativo como instructivo (objetivo), con vista a la solución del problema social: encargo social, mediante la apropiación de la cultura que ha acopiado la humanidad en su desarrollo (contenido); a través de la participación activa y consciente de los estudiantes (método); planificada en el tiempo y observando ciertas estructuras organizativas estudiantiles (forma); y con ayuda de ciertos objetos (medio); y cuyo movimiento está determinado por las relaciones causales entre esos componentes y de ellos con la sociedad (leyes), que constituye su esencia (Álvarez de Zayas, 1996).

Álvarez de Zayas, C. se refirió al proceso pedagógico como aquel que está dirigido a producir modificaciones en la personalidad del sujeto y tiene lo no sistémico. Incluye el proceso docente-educativo (P.D.E)y el proceso de enseñanza-aprendizaje, y es más espontáneo. Reiteró que el P.D.E, es lo mismo que el P.E.A, el cual es sistémico.

Las tendencias más actuales y universales para el perfeccionamiento de la enseñanza ponen el énfasis en la necesidad de que esta deje de concebirse como una opción para alumnos de élite y se convierta en enseñanza para todos. Una de las alternativas para lograr este perfeccionamiento es a partir de la dinamización, como un enfoque integral y sistémico del proceso de enseñanza-aprendizaje (relacionado con el funcionamiento de los componentes dinámicos: métodos, formas, medios y evaluación), que potencia el aprendizaje autónomo y autorregulado y propicia la elevación de la calidad del mismo atendiendo a las particularidades individuales del alumno y a su contexto de actuación (Asencio, 2012).

Esto nos da una idea de la importancia que tiene el P.E.A. Tener en cuenta todos los factores que componen el mismo así como su correcto manejo, contribuye a un mejor aprendizaje, en el que debemos incluir por supuesto el de la Matemática.

La importancia esencial que tiene el estudio de la Matemática en la formación de un ingeniero agrícola, está precisamente en la utilización de la modelación matemática como vía principal a la solución de problemas que se presentan en la práctica.

Los modelos siempre han formado parte de la historia del hombre, ya que son los responsables de la representación de ideas, fenómenos u objetos. Estos se diseñan con un propósito específico, por lo que lo principal será que cumplan la finalidad para el cual fueron diseñados (Alfonso Rodríguez, 2004).

Sus funciones fundamentales se pueden resumir en (Alfonso Rodríguez, 2004):

- Ayudar a entender las áreas donde usualmente son aplicados.
- Contribuir al desarrollo de la comunicación.
- Contribución a la predicción de las características de un sistema.
- Funcionar como una herramienta de ayuda en la experimentación.

Todo lo antes descrito, corrobora el papel primordial que ocupa en el futuro desempeño del ingeniero, la modelación matemática, por su utilización en las asignaturas no solo de Matemática sino también propias de la especialidad, y posteriormente en su vida laboral a través de la solución de problemas.

La Modelación Matemática es utilizada en los casos más complejos, ya que los modelos matemáticos son los encargados de representar un fenómeno u objeto real mediante el lenguaje matemático (Alfonso Rodríguez, 2004).

Por tanto es necesario una correcta utilización de la Modelación Matemática por parte de los profesores que imparten las asignaturas de Matemática y de las básicas específicas. Lo anterior contribuiría, como parte de la formación básica que requieren las asignaturas específicas de la profesión, a una mejor comprensión por parte de los estudiantes. De tal manera se hace necesario la utilización de ejemplos prácticos -aunque estos en ocasiones no tengan solución por las vías más sencillas- que estén vinculados a problemas prácticos reales.

A partir de lo anteriormente planteado se considera que el proceso de enseñanza-aprendizaje es la interacción y el intercambio que tiene lugar entre profesores y estudiantes utilizando por estos los medios de enseñanza necesarios, no necesariamente en el aula, con el objetivo de enseñar y aprender, regido por la institución y cumpliendo con su encargo social.

I.IV. El Trabajo Metodológico en la Educación Superior.

Existen en la literatura varias concepciones sobre el Trabajo Metodológico en las universidades. Haciendo una búsqueda sobre el tema se constata que son varios los autores que lo analizan; pero resulta interesante el criterio de (Díaz, 2004), en su artículo "*Paradigma Metodológico en la Educación Superior. Cambios que conlleva*", relacionado con este tema en Europa.

El autor hace referencia a la existencia de un paradigma tradicional, el cual centra al eje de la enseñanza en la tarea del profesor. Sin embargo Mario de M. Díaz promueve el Espacio Europeo de Educación Superior (EEES), teoría basada en el supuesto de que solo se logra un aprendizaje eficaz cuando es el propio alumno el que asume la responsabilidad en la organización y desarrollo de su trabajo académico (Díaz, 2004). Dicha teoría constituye una perspectiva distinta al paradigma tradicional pues al centrar el Trabajo Metodológico en el estudiante, le permite al mismo una mayor independencia y desarrollo de sus habilidades. De tal manera el Trabajo Metodológico no sería responsabilidad sólo del profesor.

La renovación en el sistema de enseñanza – aprendizaje en la Educación Superior en este continente, tiene su origen en la nueva organización social de la vida comunitaria de todas las sociedades avanzadas y que se conoce como "sociedad del conocimiento". Resulta de gran importancia porque (Díaz, 2004):

- Una de las prioridades de este sistema educativo es inculcar a los estudiantes que la máxima de toda formación es la "búsqueda personal del conocimiento".
- La clave del proceso formativo de un alumno radica en que: el proceso de aprendizaje se lleve a cabo fundamentalmente a través del estudio y trabajo autónomo del propio sujeto.
- La necesidad de formular los propósitos del aprendizaje en términos de competencia que le permitan al sujeto su incorporación al mundo laboral.

Este nuevo cambio conlleva a que en la elaboración de los planes de estudio se deben precisar los procedimientos a utilizar en el desarrollo de los procesos de enseñanza con el fin de promover el cambio metodológico de una enseñanza centrada sobre la actividad del profesor, a otra orientada hacia el aprendizaje del alumno.

Todos los elementos anteriormente expuestos según (Díaz, 2004), deben ser materializados en manuales o guías que le permitan al estudiante conocer en todo momento lo que se pretende que adquiera, cómo se considera que debe hacerlo y como se le va a evaluar. Para ello en esta nueva modalidad es de vital importancia la Guías Didácticas pues constituyen una explicación de toda la planificación de la materia o asignatura desde la perspectiva del alumno.

El autor aclara que la Guía no debe confundirse con lo que llamamos "Programa de la Asignatura", ya que la Guía es mucha más que eso, pues debe incluir toda la planificación del trabajo que debe realizar el alumno, es decir, debe construir una guía de su proceso de aprendizaje.

En el caso de América Latina tomamos como ejemplo a Venezuela. Este país se encuentra actualmente en una crisis política, económica y social que por supuesto repercute directamente en la formación de los estudiantes. En este contexto de crisis educativa en Venezuela, luego de la aprobación de la Constitución Bolivariana de la República Bolivariana de Venezuela en 1999, se asume la educación y el trabajo como los procesos fundamentales para alcanzar los fines esenciales del Estado de justicia social y de derecho (Garrido, mayo de 2011).

En el proyecto de La Universidad Bolivariana de Venezuela, la labor metodológica debe partir de un esfuerzo científico que garantice la preparación de los docentes para perfeccionar el proceso docente educativo con un adecuado manejo del Trabajo Metodológico en la Unidad curricular pensamiento político latinoamericano y caribeño (Garrido, mayo de 2011).

El Trabajo Metodológico diseñado surge como una necesidad para resolver el problema de la preparación de los docentes para asumir las tareas derivadas de los objetivos formativos de los profesionales y de las características actuales del PDE en las universidades, en las exigencias que demanda la formación integral de los estudiantes (Garrido, mayo de 2011).

Este se presenta desde una perspectiva revolucionaria, como el instrumento, que desde el punto de vista teórico-práctico, conduce a la gestión eficiente de la labor formativa desde la dimensión curricular ya que ofrece las vías y métodos para trazar las estrategias para esta labor en todos los niveles asociados a la actividad curricular en la universidad, contribuyendo al cumplimiento de los objetivos expresados en el modelo del profesional con una salida político-ideológico (Garrido, mayo de 2011).

Este Trabajo Metodológico sustentado en la educación popular (pensamiento pedagógico latinoamericano y caribeño), constituye un recurso fundamental que tributa al buen desempeño del proceso docente educativo, cuando logra materializar el profesor un proceso de formación y superación para sintonizarla con el encargo de la sociedad (Garrido, mayo de 2011).

El surgimiento de la Educación Superior cubana data del siglo XVIII, cuando en 1728 es creada la Real y Pontificia Universidad de la Habana, único centro de este tipo en el país. Específicamente 219 años después en 1947 es creada la Universidad de Oriente y años más tarde en 1952 es creada la Universidad Central de Las Villas, diversificando así los estudios superiores en nuestro país (Horruitiner Silva, 2007).

El triunfo de la revolución cubana trajo importantes cambios en el sistema de enseñanza, entendiendo la educación como un derecho de todos. Se enfoca en el logro de un mayor acceso a la Educación Superior, con un elevado carácter científico. Se impulsa la diversificación de las carreras y la ampliación a otras provincias del país. Con el objetivo de guiar la política educacional es creado en 1976 el Ministerio de Educación Superior (MES) (Horruitiner Silva, 2007).

En Cuba la sistemática formación de los docentes ha sido una constante preocupación de dicho ministerio. La inmensa mayoría de los profesores universitarios, no se han formado en instituciones pedagógicas. No obstante su alta calificación profesional, vocación, compromiso con el desarrollo social y convicciones bajo los cuales se formaron permiten que asuman la tarea de enseñar.

Tomando como punto de partida la experiencia soviética en la educación superior, se concibió como un elemento primordial de la actividad de los profesores universitarios el

Trabajo Metodológico (Tristá Pérez and Álvarez Vázquez, 2010),la preparación práctica-metodológica de los educadores juega un papel fundamental en el logro de la maestría pedagógica, resaltando las reuniones de instrucción metodológica, las clases demostrativas y las clases abiertas.

El desarrollo del Trabajo Metodológico se estructura y organiza de manera sistemática en las universidades cubanas regido por las orientaciones del Ministerio de Educación Superior (MES), mediante la Resolución Nº 95 de 1977 que, tuvo carácter transitorio y consultivo. Esta fue sustituida por la Resolución Nº 220/79 que establece el Primer Reglamento consensuado del Trabajo Docente y Metodológico de la Educación Superior en Cuba (Tristá Pérez and Álvarez Vázquez, 2010).

Este Reglamento define el Trabajo Metodológico como "…*la actividad sistemática y permanente de los docentes encaminada a elevar la calidad del proceso docente educativo a través del incremento de la maestría pedagógica de los cuadros científicos pedagógicos de los Centros de Educación Superior. El mismo implica la confección y mejor uso de los medios, de los métodos y de la evaluación del aprendizaje como elementos esenciales del proceso docente educativo"* (Artículo 223) (Tristá Pérez and Álvarez Vázquez, 2010).

Entre 1979 y el 2007, se exponen distintas versiones de este reglamento que, en mayor o menor medida, reconocían la existencia de dos direcciones fundamentales en el desarrollo del Trabajo Metodológico. El primero se orienta a elevar sistemáticamente la maestría pedagógica del personal docente y el segundo a garantizar la calidad y efectividad del proceso docente–educativo (Tristá Pérez and Álvarez Vázquez, 2010).

Posteriormente en el mismo año 2007, se emite la Resolución Ministerial 210, que pone en vigor un nuevo Reglamento para el Trabajo Docente-Metodológico la cual constituye referente obligado para cualquier análisis que se quiera hacer sobre el tema.

Este nuevo Reglamento Docente – Metodológico expresa en su artículo 24 que: *"El Trabajo Metodológico es la labor que, apoyados en la Didáctica, realizan los sujetos que intervienen en el proceso docente educativo, con el propósito de alcanzar óptimos resultados en dicho proceso, jerarquizando la labor educativa desde la instrucción, para* *satisfacer plenamente los objetivos formulados en los planes de estudio (Tristá Pérez and Álvarez Vázquez, 2010).*

Es necesario afirmar que la calidad del proceso docente– educativo está en estrecha relación con la maestría pedagógica y que es la Didáctica la base del Trabajo Docente – Metodológico. Así lo corrobora lo expresado en el artículo 25 de dicho Reglamento: El contenido del Trabajo Metodológico está dado, en primer lugar, por los objetivos y el contenido. Interrelacionados con los anteriores están las formas organizativas, los métodos, los medios y la evaluación del aprendizaje (Tristá Pérez and Álvarez Vázquez, 2010).

Se puede observar que en este proceso de perfeccionamiento del Reglamento del Trabajo Docente-Metodológico se deja a un lado las primitivas concepciones sobre el papel protagónico del profesor en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Lo cual no quiere decir que no se tenga en cuenta profesionalización docente o desarrollo profesional, que se asocia al perfeccionamiento de la función de los profesores universitarios. La profesionalización no es sólo en la esfera cognitiva, sino también en los fundamentos humanistas y la selección de métodos que involucren al propio profesor (Tristá Pérez and Álvarez Vázquez, 2010).

La formación como proceso, marca una visión alejada de lo que se ha entendido tradicionalmente como reciclaje, capacitación, perfeccionamiento o recalificación del profesorado y más próxima a lo que se concibe como desarrollo profesional, en la que correspondería a la universidad un rol de apoyo a la autoformación de los docentes, más que un planteamiento dirigista o gerencial, ya que en la mayoría de los casos la formación docente basada en la capacitación, que es lo que sucede en la mayoría de los centros de educación superior, se caracteriza por ser muy específica y relativamente descontextualizada (Tristá Pérez and Álvarez Vázquez, 2010), lo cual no debe entenderse como renuncia a los cursos de capacitación, entrenamiento y actualización para los profesores.

Según varios autores los escenarios para la formación continua de carácter profesional deben favorecer la posibilidad de un aprendizaje colaborativo y un aprendizaje cooperativo entre compañeros o colegas con los que se trabaja permanente y cotidianamente.

Sobre esta base, coincidimos con la Dra. Lidia Ruiz (2005) y (Tristá Pérez and Álvarez Vázquez, 2010) que concibe esta formación continua como un espacio colectivo de producción de conocimiento más que de transmisión, y a los profesores "como protagonistas de sus propios procesos de aprendizaje”.

Esta formación continua del profesor es resaltada en la Resolución Ministerial 210/07 que establece en su artículo 46, los tipos fundamentales del trabajo docente-metodológico que pueden asociarse con la Gestión del Conocimiento:

- Reunión metodológica.
- Clase metodológica.
- Clase abierta.
- Clase de comprobación.
- Taller metodológico.

La reunión metodológica se define como una actividad que posibilita el análisis, debate y toma de decisiones acerca de temas vinculados al proceso docente educativo para su mejor desarrollo.

El taller metodológico como un espacio de debate acerca de una problemática relacionada con el proceso de formación. En él los profesores presentan experiencias relacionadas con el tema tratado, con el propósito de proyectar alternativas de solución a dicho problema a partir del conocimiento y la experiencia de los participantes (Aguilera Almaguer et al., enero 2013).

La clase abierta se considera como un espacio de intercambio, aunque por su realización en un espacio real de clase lleva implícito un carácter de control, pues se concluye con el señalamiento de los principales logros y deficiencias observados en la clase por parte del dirigente de la actividad y la definición de recomendaciones (Aguilera Almaguer et al., enero 2013).

La clase metodológica tiene un carácter más instructivo, pues está dirigida a orientar a los profesores sobre algunos aspectos de carácter metodológico que contribuyan a su preparación para la ejecución del proceso docente educativo, mediante el desarrollo de una actividad docente modelo.

El Trabajo Metodológico es considerado también como el sistema de actividad que de forma permanente se ejecuta con y por los docentes para lograr que pueda concretarse de forma integral al sistema de influencias que ejercen en la formación de los estudiantes para dar cumplimiento a las direcciones principales del trabajo educacional y las prioridades de cada enseñanza (Aguilera Almaguer et al., enero 2013).

Por lo que su objetivo esencial es la elevación del nivel político -ideológico, científico – teórico - metodológico y pedagógico del personal docente con vista a la optimización del proceso docente-educativo en las diferentes instancias y niveles de enseñanza.

El contenido del Trabajo Metodológico es el mismo de la ciencia pedagógica que sustenta el proceso, es decir, la interrelación dialéctica existente entre sus componentes principales; objetivo-contenido-medio, forma y evaluación. Este contenido se expresa en los diferentes tipos de actividades académicas, laborales e investigativas que conforman cada asignatura, lo que va precisando la necesidad de ir particularizando su didáctica (Aguilera Almaguer et al., enero 2013).

En este sentido, al analizar las transformaciones que se han producido en la educación en Cuba, (Horruitiner Silva, 2007), planteó: “Si antes resultaba necesario la preparación pedagógica y didáctica de los profesores, en estos tiempos resulta imprescindible, debido a que se está hablando de una nueva universidad, con nuevas concepciones, donde se brinda especial atención al Trabajo Metodológico”.

De tal manera el Trabajo Metodológico en el caso cubano está dirigido hacia dos direcciones fundamentales: el Trabajo Docente Metodológico y el Trabajo Científico Metodológico. La primera dirección es la que realizan los docentes basándose en la didáctica de la educación con el fin de mejorar la calidad del proceso docente-educativo. La segunda dirección es la que realizan los docentes basándose en la investigación pedagógica. En ella se aplican creadoramente los resultados de las investigaciones pedagógicas a la solución de problemas relacionados con el Proceso Docente Educativo (PDE) (Victoria González Peña, noviembre 2006).

Las dos direcciones del Trabajo Metodológico mencionadas anteriormente tienen como premisa el contenido y los objetivos del proceso. De tal manera mediante la preparación de los docentes se garantiza una actividad docente-educativa de calidad que eleva la preparación político-ideológica, científica y pedagógica de los profesores.

Según la MsC: María Victoria González Peña, el Trabajo Metodológico constituye una vía efectiva en la preparación de los docentes. La instrumentación del mismo permite enfocar la preparación como procesamiento cognitivo-valorativo de carácter multidimensional, cuyos atributos son: la adaptabilidad; la variedad, y la problematicidad.

Es importante aclarar que todas las transformaciones de la Educación Superior cubana no son más que un proceso de Universalización de la Educación Superior; a decir de Horruitinier un proceso iniciado con el triunfo de la Revolución que tiene como premisa la campaña nacional de alfabetización –masivo proceso que involucró a miles de jóvenes en la noble tarea de enseñar a leer y escribir– y avanza y se fortalece gradualmente desde la Reforma Universitaria de 1962 hasta nuestros días (Horruitiner Silva, 2007).

De tal manera la universalización es un proceso sistemático de transformaciones de la educación superior, dirigido a la ampliación de posibilidades y oportunidades de acceso a la universidad y a la multiplicación de los conocimientos. Contribuyendo así con la formación de una cultura general integral de la población y a un incremento paulatino delos niveles de equidad y de justicia social (Horruitiner Silva, 2007).

El desafío actual de nuestras universidades, en pleno siglo XXI está precisamente en situarse en el contexto de la comunidad en la que está insertada, favoreciendo la construcción de una sociedad cada vez más justa y reforzando así más que nunca su compromiso sociedad.

También debemos tener en cuenta que vivimos en una sociedad en constante cambio, en la cual el conocimiento es una necesidad objetiva para el proceso de aprendizaje a lo largo de la vida. Es aquí entonces donde el Trabajo Docente – Metodológico se convierte en la vía más efectiva para alcanzar la profesionalización deseada y desarrollar las habilidades necesarias para el aprendizaje continuo.

La Matemática como ciencia básica requiere un mayor Trabajo Docente Metodológico y necesita una continua preparación por parte de los docentes, dada las características de las asignaturas y los estudiantes que ingresan a nuestras universidades. El cual juega un papel importante en las carreras técnicas.

CAPÍTULO II.Descripción de la propuesta metodológica a partir de las necesidades detectadas.

II.I. Diagnóstico de las necesidades matemáticas en la Carrera de Ingeniería Agrícola.

Las necesidades matemáticas constituyen carencias y/o deficiencias que presentan estudiantes y profesores en el proceso de enseñanza aprendizaje tanto de la Matemática como de otras ciencias que necesitan de esta. Las mismas se manifiestan en la ausencia de habilidades en la realización de inferencias, deducciones, modelaciones, etc.

Mediante el análisis de documentos (Plan de Estudio de la carrera de Ingeniería Agrícola y Programas de las Disciplinas[1]) y las entrevistas a informantes claves[2] se detectaron las necesidades matemáticas que tienen las diferentes asignaturas.
El plan de estudios de la disciplina de Física, contiene las asignaturas de Física I, II y III. La primera asignatura se imparte en el segundo semestre de primer año y las restantes en el segundo año, primero y segundo semestres respectivamente.

Dentro del sistema de habilidades generales de la disciplina se encuentran: Deducir la ecuación del movimiento mecánico de la partícula y del sólido rígido, modelar sistemas físicos reales por analogía, medir tiempo, longitud, masa, ángulo, presión y temperatura, procesar estadísticamente datos experimentales de mediciones directas e indirectas, construir gráficos en escalas lineales y no lineales e interpretar resultados, obtener las ecuaciones diferenciales de sistemas oscilatorios y ondulatorios (Agrícola, 2007a).

Teniendo en cuenta esto, sería necesario relacionar las ecuaciones diferenciales y los sistemas de ecuaciones diferenciales, contenidos que corresponden a la asignatura

---

[1]Las disciplinas analizadas fueron: Física, Ciencias Agropecuarias, Ciencias de la Ingeniería, Energía Agrícola, Sistemas de Ingeniería Agrícola.

[2]Se realizaron un total de 10 entrevistas. Los entrevistados fueron los jefes de las disciplinas y profesores que imparten asignaturas con necesidades matemáticas.

Matemática III impartida en el segundo año de la carrera, a través de ejemplos físicos que a su vez estén relacionados al perfil de un Ingeniero Agrícola.

La disciplina de Ciencias Agropecuarias cuenta con cuatro asignaturas, dentro de ella la asignatura de Tecnologías de Producción Agrícola, impartida en quinto año, que en su sistema de habilidades se tiene: Determinar el momento óptimo de cosecha, en dependencia del tipo de cultivo, y su destino, así como su organización a los estimados de producción y sus pérdidas, los procesos de beneficio, manipulación y conservación (Agrícola, 2007c).
La matemática puede contribuir a un mejor entendimiento de la asignatura profundizando en aspectos relacionados con la optimización. La carrera concibe este tema en la Matemática I y II, impartida en el primer año. Los problemas de optimización relacionados con este campo de la especialidad, ayudarían a determinar los valores óptimos de producción en correspondencia con el cultivo que se esté analizando.

En la disciplina Energía Agrícola, podemos encontrar dos asignaturas: Electrotecnia y Electrónica y Accionamiento Eléctrico impartidas en cuarto año. Ellas por sus características necesitan del Álgebra Lineal, específicamente de las matrices, operaciones con matrices y determinantes, además de los sistemas de ecuaciones lineales, pues estos son necesarios para calcular los circuitos de corriente alterna.

Otra de las disciplinas con que cuenta la carrera es Sistemas de Ingeniería Agrícola, la cual es una de las más extensas pues tiene un total de seis asignaturas.

Dentro de esta disciplina, la asignatura Topografía y Cartografía, por sus aplicaciones matemáticas, presenta como necesidades, profundizar en el estudio de temas relacionados con la Geometría Analítica, como son: el sistema de coordenadas cartesianas, la representación de planos y superficies, determinar la pendiente de una recta, la pendiente entre dos puntos y trazar una línea con pendiente dada.

También se puede vincular la “Teoría de errores y su aplicación a la Topografía” (Agrícola, 2007b), a través de aproximaciones lineales y el cálculo del diferencial de una función. A esto podemos agregarle determinar el área de trabajo de una superficie topográfica, mediante integral definida, doble y triple. Además podemos incluir el trabajo con funciones de varias variables y la descripción de las características y propiedades de las curvas de nivel (Agrícola, 2007b).

Otra de las disciplinas analizadas fue Ciencias de la Ingeniería. Esta es la disciplina que más necesita de la matemática para la impartición de sus asignaturas. De sus siete asignaturas, cuatro de ellas necesitan de temas matemáticos. Estas asignaturas son: Gráfica de Ingeniería, Mecánica Aplicada, Resistencia de Materiales y Elementos de Máquinas. La primera de ellas incluye dentro de su sistema de habilidades la representación de las vistas en cortes transversales de las obras hidrotécnicas a partir de la identificación de las vistas principales y las trazas de corte (Agrícola, 2007b).

Esto hace necesario trabajar con los estudiantes temas de Geometría Analítica como: representación de sólidos, su proyección en los tres planos coordenados y hallar las trazas correspondientes en ellos. Además se deben incluir las operaciones con vectores y el cálculo de determinantes, que se utilizan para determinar el momento angular de un cuerpo rígido en tres dimensiones, entre otros. Para el resto de las asignaturas, es imprescindible profundizar en aspectos relacionados con la derivación e integración y la geometría analítica.

Por último se analizó la disciplina de Ingeniería Agrícola. Dentro de sus asignaturas se encuentra Ingeniería Agrícola II, en la cual el estudiante debe ser capaz de diseñar órganos de trabajo para la labranza del suelo. De esta manera se hace necesario que el estudiante conozca aspectos de Álgebra Lineal y Geometría Analítica como: operaciones con vectores, matrices, determinantes, sistemas de ecuaciones lineales y determinar la ecuación de la recta en el plano. Además debe dominar contenidos sobre series y cálculo diferencial e integral.

A partir de la detección de las necesidades y exigencias matemáticas del ingeniero, es importante para la especialidad la realización de evaluaciones sistemáticas que permitan el cumplimiento de los objetivos en el primer año de la carrera. La elaboración y correcta utilización de medios de enseñanza-aprendizaje, permitirá una mejor comprensión por parte de los educandos de los temas estudiados.

Los modelos matemáticos ofrecen la posibilidad de lograr la interrelación necesaria entre las diferentes disciplinas, las matemáticas serán un lenguaje común que permitirán resolver problemas relacionados con otras asignaturas y con el perfil del ingeniero. A esto se puede agregar que la utilización de la computación como herramienta fundamental, unida a los paquetes matemáticos permitirá la realización de cálculos más sencillos en la práctica.

Es importante señalar que no solo se quiere cambiar la proyección del profesor a la hora de impartir la asignatura, sino también la del estudiante al recibirla, pues el proceso de enseñanza – aprendizaje es bilateral. Esto contribuiría a establecer en el receptor un conjunto de habilidades como son: el pensamiento lógico y algorítmico, capacidad de razonamiento, análisis, síntesis, etc., que le permitirán a través de la modelación matemática o no, la resolución de problemas relacionados con su perfil profesional (Ortega, 2000).

La siguiente tabla muestra un resumen donde se relacionan los diferentes temas de las asignaturas de Matemática y las asignaturas de la especialidad:

Tabla 2.1. Tabla de necesidades.

Temas de la asignatura de Matemática.	**Asignaturas de la especialidad.**
Funciones	Física, Topografía y Cartografía, Resistencia de Materiales.
Álgebra Lineal	Electrotecnia y Electrónica, Accionamiento Eléctrico, Topografía y Cartografía, Ingeniería Agrícola II.
Geometría Analítica	Gráfica de Ingeniería, Resistencia de Materiales, Elementos de Máquinas, Topografía y Cartografía, Ingeniería Agrícola II.

Cálculo Diferencial Integral	Mecánica Aplicada, Resistencia de Materiales, Electrotecnia y Electrónica, Topografía y Cartografía, Ingeniería Agrícola II, Termodinámica.
Ecuaciones Diferenciales	Física, Operaciones de Sistemas de Ingeniería Agrícola, Resistencia de Materiales y Mecánica Aplicada
Series	Mecánica Aplicada, Ingeniería Agrícola II

Los temas en que más dificultades se han encontrado son: Funciones, Cálculo Diferencial Integral, Ecuaciones Diferenciales y Series. En el primero de los casos los profesores que imparten la asignatura de Resistencia de Materiales, no utilizan las relaciones entre funciones, relaciones trigonométricas, así como algunas funciones inversas. Por su pate este tema es utilizado con bastante frecuencia por los profesores que imparten las asignaturas de Física, Topografía y Cartografía. El Cálculo Diferencial Integral es poco empleado pues no les brindan a los estudiantes problemas que conduzcan a ecuaciones diferenciales, pues utilizan otras vías de cálculo. No lo utilizan para calcular parámetros que sus ecuaciones contienen integrales y derivadas.

Los profesores de la carrera que imparten las asignaturas básicas y básicas específicas no utilizan la Matemática adecuadamente al no poner ejemplos que evidencien la aplicación de la misma. De tal manera carecen de los conocimientos necesarios para poder vincular la Matemática a sus asignaturas. De lo anterior se derivan una serie de necesidades matemáticas presentadas por los estudiantes en el desarrollo de las actividades docentes.

La observación participante permitió identificar las necesidades matemáticas de los estudiantes para lo que sería necesario comenzar haciendo un análisis de la situación docente con que ingresan a la carrera.

Los alumnos al ingresar a la Educación Superior, específicamente a la carrera Ingeniería Agrícola, sienten una gran desmotivación por la misma. En la mayoría de los casos la solicitan en las últimas opciones o les llega por re oferta; por lo que no son de altos rendimientos académicos. De a enseñanza Pre Universitaria arrastran una serie de dificultades matemáticas en aspectos relacionados con: trabajo con variable, funciones, trigonometría, geometría, entre otros.

La matemática es utilizada por un ingeniero en este perfil para deducir fórmulas con operaciones de cálculo tales como: vectorial, diferencial, integral, y solución de ecuaciones, sistema de ecuaciones, etc. Además de incluir la modelación y la interpretación matemática de los procedimientos.

Se observan dificultades generales por parte de los alumnos a la hora de identificar procesos y fenómenos vinculados con su objeto de estudio. Presentan problemas al hacer deducciones y calcular determinadas magnitudes, en cálculo diferencial integral, la modelación matemática y en el uso de la computación y los paquetes matemáticos en la solución de problemas presentados en los trabajos decurso. No logran graficar un objeto en estudio.

En cuanto al Álgebra Lineal y la Geometría Analítica, los estudiantes no logran resolver un sistema de ecuaciones por los métodos estudiados, representar un sólido, ni elegir el sistema de coordenadas adecuadas, ni las ecuaciones correspondientes en los planos coordenados.

En el cálculo diferencial integral los alumnos son capaces de resolver derivadas sencillas, pero presentan dificultades al aplicar la regla de la cadena. Resuelven integrales con bajo nivel de complejidad aunque no dominan completamente el manejo con las tablas y las reglas de integrales. Presentan dificultad para resolver integrales dobles y triples.

Teniendo en cuenta las Ecuaciones Diferenciales, los estudiantes no logran identificar el método por el cual deben ser resueltas, olvidan el procedimiento y las vías de solución. Además no saben hallar correctamente un factor integrante. En el caso de las Serie, no saben aplicar el límite para determinar la convergencia de una serie. No logran un correcto trabajo con los números factoriales, ni aplicar adecuadamente la trigonometría para calcular los coeficientes de la serie de Fourier.

Entre las operaciones de cálculo más utilizadas por los ingenieros que manifiestan la aplicación de la Matemática se encuentran:

- Los Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL): a partir de un problema práctico los estudiantes son capaces de hallar el sistema de ecuaciones reducido y ampliado, pero no saben resolverlo mediante el método de Gauss.
- Las Integrales: para calcular el área de un terreno dadas las ecuaciones que lo limitan, presentan dificultades en representar el mismo e identificar el área a calcular, sin embargo con la ecuación planteada calculan el área.
- Las Ecuaciones Diferenciales: para modelar problemas reales que conduzcan a este tipo de ecuaciones. En este caso las principales dificultades se encuentran a la hora de modelar el problema.
- Las Serie: para determinar la erosión de los suelos; analizar el comportamiento de sistemas mecánicos ante variaciones periódicas, o sea sometidos a diferentes regímenes de trabajo, utilizando la series de Fourier.

II.II. Propuesta metodológica para el perfeccionamiento del Proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática en la carrera de Ingeniería Agrícola.

Teniendo en cuenta las necesidades detectadas, se exponen indicaciones metodológicas a tener en cuenta a la hora de impartir las asignaturas de Matemática.

1. La disciplina debe tener un enfoque teórico práctico. Las clases deben ser concebidas de forma tal que contengan algún ejemplo de aplicación práctica.
2. La modelación debe estar presente en el desarrollo de las actividades prácticas, siempre bajo la quía del profesor. Es importante crear en los estudiantes las habilidades de modelar y de interpretar modelos ya creados, reduciéndose así la actividad de cálculo mediante métodos analíticos.

3. Los estudiantes serán los que tendrán el protagonismo en la apropiación de los conocimientos. Para esto será importante insistir con los estudiantes en la realización del trabajo independiente, los seminarios y tareas extra clase.

4. La utilización de la computación como herramienta para el cálculo es de vital importancia, por lo que es necesario una correcta preparación de los laboratorios para lograr la apropiación de habilidades en los estudiantes. Se recomienda la utilización de paquetes matemáticos como el Derive o el Mathematica.

5. Los contenidos se deben estructurar partiendo de lo general a lo particular y viceversa, según sea necesario, y siempre representándolo con un ejemplo, de esta manera se logrará una mejor comprensión por parte de los alumnos.

6. Una adecuada utilización de los medios de enseñanza-aprendizaje, apoyándose de la computación como herramienta, proporcionándole a los estudiantes la bibliografía en soporte electrónico necesaria, contribuirán a una mayor motivación y aprovechamiento del proceso docente.

Es importante orientar metodológicamente a los profesores de Matemática que imparten las asignaturas en la carrera.

➢ ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA ANALÍTICA:

- Se debe prestar especial atención a la hora de explicar el método de Gauss, de tal forma que los estudiantes lo comprendan con claridad dada las dificultades que presentan a la hora de resolver ejercicios.

- El profesor debe profundizar en la explicación de cómo expresar un vector como combinación lineal de un sistema de vectores y en el análisis de la dependencia e independencia lineal.

- Dejar bien claro a partir de ejemplos, la definición de espacio y subespacio vectorial en $\Re^2\ y\ \Re^3$.

- La geometría del espacio se impartirá dándole mayor importancia a la representación de planos y superficies, la intersección entre estos, representar un sólido así como la proyección en los tres planos coordenados. Esto será utilizado para calcular área y volumen, a través de las integrales dobles y triples.

- FUNCIONES, LÍMITE Y CONTINUIDAD:

  - Se comenzará introduciendo las funciones reales de una variable real más elementales ya estudiadas en la enseñanza precedente.
  - Posteriormente su clasificación y formas de representarlas haciendo énfasis en esto último, por las dificultades presentadas. Además se tratarán las funciones inversas más utilizadas.
  - En las funciones de varias variables su definición y su dominio de representación serán los aspectos más importantes.
  - Los conceptos de límite y continuidad se darán a partir de una interpretación geométrica mediante un ejemplo sencillo. Esto se debe impartir en una misma conferencia.
  - En el caso de la continuidad se debe dedicar una actividad para este tema, ya que es necesario clasificar e identificar los distintos tipos de discontinuidades a través de ejemplos, así como la continuidad de funciones en un punto y en un intervalo.
  - Las propiedades y leyes de los límites se deben tratar de forma general y orientar su estudio de manera independiente.
  - En el tema de límite y continuidad de funciones de varias variables se darán solo los conceptos y definiciones que sean imprescindibles de la forma más sencilla posible.

- DERIVADA Y DIFRENCIAL:

  - Se dará el concepto de deriva de una variable real a partir de la interpretación geométrica. Sólo se calcularán derivas aplicando las tablas y las reglas de derivación y se hará énfasis en la aplicación de la regla de la cadena teniendo en cuenta que es donde los estudiantes presentan mayor dificultad.

- Hacer ver a los estudiante la importancia de la aplicación de la derivada a través de la Regla de L' Hôpital.
- En el estudio y análisis de los extremos en una y varias variables, se tratarán los extremos libres y condicionados donde se darán los criterios necesarios y la condición suficiente para el caso de dos variables.
- Debe insistirse en la utilización del límite para la determinación de extremos absolutos.
- En el caso funciones de varias variables se trabajará solo con las reales. Se impartirán primero las derivadas de funciones compuestas e implícitas subrayando la regla (cuando se deriva respecto a una variable, todo lo que no sea esa variable permanece constante).
- Posteriormente es necesario impartir la derivada direccional o dirigida, diferenciándola cuando esta es máxima.

➢ INTEGRALES:

- La integral indefinida se comienza recordando la derivación de una función y a través de un ejemplo definiendo que es una antiderivada.
- El cálculo de las integrales se realizará fundamentalmente mediante el uso de las tablas y las reglas de integración.
- Se darán también los métodos de integración: por partes, sustitución y fracciones simples, siempre facilitando al alumno los elementos necesarios y vías de solución, de tal forma que sean capaces de aplicarlos en la práctica de manera directa o través de paquetes matemáticos.
- En el caso de la integral definida, se comenzará con un ejemplo sencillo y luego se harán generalizaciones. Lo más importante en este tema es la aplicación que tiene al cálculo de área. Por lo que se debe insistir en los casos particulares del área en el plano y en cómo particionar un intervalo. Aquí se reafirma la importancia de la representación de funciones.

- Las integrales impropias se tratarán como generalización de la integral definida. Se impartirán las de primera y segunda especie, detallando las particularidades de cada tipo.

- En el caso de las integrales múltiples, será necesario retomar lo estudiado en Geometría Analítica sobre planos y superficies (este tema se imparte en el primer semestre del primer año y se utiliza en el segundo semestre de ese mismo año) para que a través de la representación de sólidos y sus proyecciones y la utilización de las integrales dobles y triples, se calcule el volumen y el trabajo.

- En la integral de línea se deberá enfatizar el teorema de Green. En las clases correspondientes a este tema se pondrán ejercicios de aplicación al cálculo del trabajo y potencial. Estos deben estar en estrecha relación con asignaturas de la carrera como: Física y Termodinámica.

- De igual manera, se debe proceder en el caso de las integrales de superficie.

➢ SERIES:

- Se debe insistir en la diferencia entre sucesiones y series numéricas, así como en los criterios fundamentales de convergencia.

- Extender el concepto de serie a las series de potencia y particularmente a la de Fourier, en este último caso se retomarán, según sea necesario, los elementos de la trigonometría que serán usados. Insistir en que esta serie describe varios procesos mecánicos.

- No será necesario calcular la serie de Taylor utilizando la definición sino mediante la utilización de tablas y las propiedades operacionales de las series en su dominio de convergencia.

➢ ECUACIONES DIFERENCIALES

- Este tema será impartido después de las series ya que estas deben ser utilizadas en la solución de ecuaciones diferenciales.

- Lo más importante desde el punto de vista matemático es la modelación de problemas sencillos, para esto será necesarios plantear el modelo y el problema matemático a resolver (EDO), con las condiciones que garanticen la existencia y unicidad de la solución.
- Se darán los métodos de solución de las ecuaciones diferenciales de variables separables y exactas.
- Ecuaciones diferenciales de segundo orden: homogéneas y no homogéneas. Es necesario insistir en la correcta determinación del factor integrante.

II.III. El Folleto de Ejercicios.

Tomando en consideración:

- la importancia de la aplicación de la Matemática en la carrera de Ingeniería Agrícola,
- las necesidades detectadas no solo en las asignaturas de matemática, sino también en las asignaturas básicas específicas de la carrera,
- la bibliografía en soporte duro con que cuenta las asignaturas de Matemática está dispersa y no aparecen ejercicios de aplicación a la especialidad,
- la bibliografía digital existente es escasa y tampoco responde a las necesidades de los estudiantes.

De esta forma se hace necesaria la confección de un Folleto de Ejercicios como medio de enseñanza-aprendizaje, sirviendo como bibliografía complementaria en soporte digital, para poner a disposición de los estudiantes de esta carrera. El mismo parte de los ejercicios más generales de cada tema, hasta llegar a los ejemplos de aplicación práctica. Permite relacionar la teoría impartida en las clases con la práctica, que unido a los ejemplos resueltos, hace que el Folleto sea más asequible. Es una forma de contribuir a la sistematicidad de los contenidos, logrando la solidez necesaria en la asimilación de los conocimientos, habilidades y hábitos de estudio de los estudiantes.

Se resalta su cientificidad dado que la mayoría de los ejercicios expuestos son tomados de investigaciones precedentes y libros de la especialidad que permitieron vincular la Matemática a la carrera.

El folleto cuenta con un total de ocho capítulos dedicados a cada uno de los temas que se tratan en las asignaturas de la disciplina de Matemática: Álgebra Lineal, Geometría Analítica, Funciones, Límite y Continuidad, Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Ecuaciones Diferenciales y Series.

El inicio de cada capítulo cuenta con un resumen de las principales definiciones que podrán ser utilizadas para resolver los ejercicios. Aparecen ejercicios generales para ejercitar la teoría impartida en las clases y al finalizar cada capítulo cuenta con ejercicios de aplicación a problemas concretos de la especialidad. Además contiene ejercicios resueltos que les permiten a los estudiantes y al profesor conocer los posibles pasos y principales vías de solución.

A continuación se muestran ejemplos de ejercicios de aplicación en algunos de los temas más utilizados por las asignaturas de la especialidad:

Ejemplo 1:Funciones.

La figura muestra un mecanismo de manivela. El volante es de radio R, la biela es de longitud a. El volante gira uniformemente en el sentido de las agujas del reloj dando n vueltas en un segundo. En el momento $t = 0$ en el que le biela y la manivela formaron una misma recta (posición del punto muerto), la cruceta (A) ocupó el punto O. Hallar la dependencia entre el desplazamiento x de la cruceta (A) y el tiempo t.

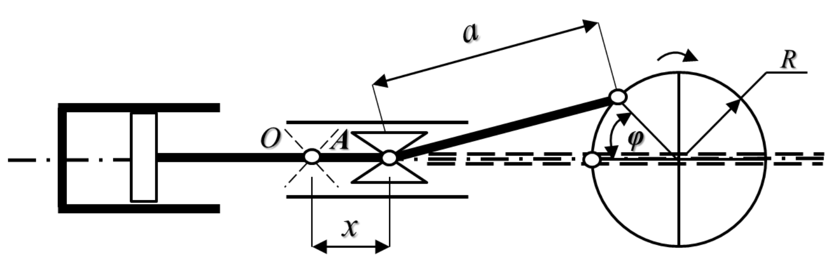

Fig. Mecanismo de manivela.

Ejemplo 2: Cálculo Integral.

En la empresa agropecuaria “Valle del Yabú”, se destinó un terreno para la siembra de papa. Se conoce que para la reparación del mismo un agregado formado por un tractor YUMZ-6K y el arado ADI-3, para preparar cada hectárea (ha) de tierra se consume 30 litros (L) de combustible aproximadamente. Si es terreno está limitado por las siguientes curvas: $y = x, y = 3x, y = 9$. Determine qué cantidad de combustible se necesita para preparar el terreno en su totalidad.

Ejemplo 3: Ecuaciones Diferenciales.

La ecuación del movimiento de vibración de un cuerpo unido a un resorte es: $\frac{d^2s}{dt^2} + 16s = 0$ siendo s la elongación del muelle en el instante t. Si para $t = 0$, $s = 2$ y $\frac{ds}{dt} = 1$. Hallar s en función de t.

CONCLUSIONES

- Una adecuada preparación metodológica de los profesores, basada en la vinculación de la matemática con los contenidos de la especialidad de Ingeniería Agrícola, contribuye de manera satisfactoria al desarrollo de habilidades en los estudiantes y por ende al perfeccionamiento del proceso de enseñanza – aprendizaje.

- Las indicaciones metodológicas propuestas a partir de las necesidades detectadas, permitirán la interacción y el intercambio efectivo entre profesores y estudiantes utilizando por estos los medios de enseñanza necesarios.

- Los temas en que más dificultades presentan los estudiantes de la carrera son: Funciones, Cálculo Diferencial Integral, Ecuaciones Diferenciales y Series.

- Los profesores de la carrera que imparten asignaturas de la especialidad, no vinculan correctamente la matemática a los contenidos de las asignaturas que necesitan de esta.

- El Folleto de Ejercicios constituye un material de apoyo que puede contribuir a un mejor aprovechamiento del proceso de enseñanza –aprendizaje de la Matemática en la carrera Ingeniería Agrícola, ampliando, perfeccionando y profundizando la bibliografía en soporte electrónico.

RECOMENDACIONES

- Utilizar las indicaciones metodológicas propuestas en esta investigación, tanto por los profesores que imparten asignaturas de matemática, como los que imparten asignaturas específicas de la carrera que necesitan de esta.

- Utilizar el folleto de ejercicios como bibliografía en las asignaturas de matemática en la carrera.

BIBLIOGRAFÍA

AGRÍCOLA, C. N. D. L. C. D. I. 2007. Plan de estudios “D”, Carrera Ingeniería Agrícola, Curso Regular Diurno, Programa de la Disciplina Física. La Habana.

AGRÍCOLA, C. N. D. L. C. D. I. 2007. Plan de estudios “D”, Carrera Ingeniería Agrícola, Curso Regular Diurno, Programa de la Disciplina Sistemas de Ingeniería Agrícola. La Habana.

AGRÍCOLA, C. N. D. L. C. D. I. 2007. Plan de estudios “D”, Carrera Ingeniería Agrícola, Curso Regular Diurno, Programa de la Disciplina Ciencias Agropecuarias. La Habana.

AGRÍCOLA, C. N. D. L. C. D. I. septiembre 2007. Plan de estudios “D”, Carrera Ingeniería Agrícola, Curso Regular Diurno y Semipresencial, Modelo de Profesional. La Habana.

AGRÍCOLA, C. N. D. L. C. D. I. septiembre 2007. Plan de estudios “D”, Carrera Ingeniería Agrícola, Curso Regular Diurno y Semipresencial, Programa de la Disciplina Matemática. La Habana.

AGUILERA ALMAGUER, O., AGUILERA BORJAS, M. & R., R. C. enero 2013. El trabajo metodológico como vía efectiva en la preparación de los docentes.

ALFONSO RODRÍGUEZ, N. 2004. *Estrategia para la Enseñanza de la Matemática en la carrera de Ingeniería en Mecanización de la Producción Agropecuaria*. Tesis para optar por el grado de Master en Ciencia de la Educación, Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas

ALVAREZ DE ZAYAS, C. La Escuela en la Vida.

ÁLVAREZ DE ZAYAS, C. 1996. *Hacia una escuela de excelencia.,* La Habana, Cuba.

ARNAZ, J. A. La Planeación Curricular. *In:* TRILLAS (ed.).

ASENCIO, E. 2012. Una alternativa didáctica para el perfeccionamiento del proceso de enseñanza-aprendizaje de las ciencias. *Revista Iberoamericana de Educación,* 81-97

AUTORES, C. D. 1988. *Matemática Superior II para la especialidad de Agronomía,* La Habana, Cuba.

AUTORES, C. D. 2010. Las Ecuaciones Diferenciales y su aplicación a la ingeniería.

BARRERA, J. 2003. *Estrategia pedagógica para el desarrollo de habilidades investigativas en la disciplina física de ciencias técnicas*

Tesis en opción al grado científico de doctor en ciencias pedagógicas, Universidad de la Habana.

BETANCOURT, Y., GARCÍA, R., LÓPEZ, D., CABRERA, P. & RODRÍGUEZ, O. 2008. Efectos de la tecnología de preparación de suelos pesados sobre la brotación de malezas en caña de azúcar. *Revista Ciencias Técnicas Agropecuarias*. La Habana, Cuba: Universidad Agraria de La Habana.

BETANCOURT, Y., RODRÍGUEZ, I. & PINEDA, E. 2010. Las propiedades químicas del suelo para definir la zona de aplicación del laboreo localizado en los suelos arcillosos pesados. *Revista Ciencias Técnicas Agropecuarias*. La Habana, Cuba: Universidad Agraria de La Habana.

BOCCO, M., CANTER, C. & SAYAGO, S. 2013. La Matemática en situaciones propias de la Ingeniería Agronómica.

CALDERÓN GACÍA, J., DÍAZ DUQUE, J. & VRELA MARCELO, M. 1987. *Complementos de Geometría Analítica*, La Habana, Cuba, Ministerio de Educación Superior.

CANDAUAL, V. 1983. *A Didática em questão,* São Paulo, Brasil.

CAÑA, R. 1992. Análisis de simulación en el planteamiento de modelos para la resolución de problemas agrícolas. *RCIA*. Chile.

CASTILLO SERPA, A. Y. C. 1986. *Series* La Habana, Cuba.

CHÁVEZ, D. 2006. Importancia de la enseñanza de las matemáticas en las carreras agropecuarias. *Revista Ciencias Técnicas Agropecuarias*.

CHÁVEZ ESPONDA, D., SABÍN RENDÓN, Y., TOLEDO DIEPPA, V. & JIMÉNEZ ÁLVAREZ, Y. 2013. La Matemática: una herramienta aplicable a la Ingeniería Agrícola. *Revista Ciencias Técnicas Agropecuarias*. José de las Lajas, Mayabeque, Cuba: Universidad Agraria de La Habana, Facultad de Ciencias Técnicas, Departamento de Matemáticas.

CHAVIANO CONDE, R. 1996. *Programa para el desarrollo de la Matemática Aplicada en Ingeniería Mecánica*. Trabajo para optar por el grado de Máster en Ciencias de Matemática Aplicada, Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas.

CLARO DUYOS, M., LEYVA MACHÍN, P., MIYAR CHÁVEZ, A. & SANTOS MARÍN, N. 1989. *Matemática Superior,* La Habana, Cuba, Ministerio de Educación Superior.

DÍAZ, M. 2004. Cambio de Paradigma Metodológico en la Educación Superior. Cambios que conlleva. *Universidad de Oviedo.* España.

ESTEBARANZ, A. Didáctica e Innovación Curricular. 2da ed. Sevilla, España: Universidad de Sevilla.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. Metodología Didáctica para la Enseñanza de la Matemática: Variables Facilitadoras del Aprendizaje http://www.grupomayeutica.com.

FERNÁNDEZ, L., LARA, A., PEREYRA, A., GUERRA, W. & DE CALZADILLA, J. junio, 2013. Estadística Aplicada a la Ingeniería Agrícola y a las Ciencias Agropecuarias. Su contribución en la docencia, investigación y transferencia de conocimiento. *Revista Ciencias Técnicas Agropecuarias,* 22.

FERRO, C., MARTÍNEZ, A. & OTERO, M. julio, 2009. Ventajas del uso de las tics en el proceso de enseñanza-aprendizaje desde la óptica de los docentes universitarios españoles *Revista Electrónica de Tecnología Educativa* [Online].

FRANCO, M., BLANCO, A., PADRÓN, J. & enero, 2009. La importancia del trabajo metodológico para el desempeño docente en los profesores del Nuevo Programa de Formación de Médicos Latinoamericanos. *Odiseo, Revista Electrónica de Pedagogía,* 19 - 16.

GARCÍA, N., DEL CASTILLO, A., MARTÍN, L. & ÁLVAREZ, M. 1986. *Series,* La Habana, Cuba.

GARRIDO, O. mayo de 2011 Estrategia de trabajo metodológico para perfeccionar el proceso docente educativo de la Unidad curricular Pensamiento político latinoamericano y caribeño de la Universidad Bolivariana de Venezuela sede Zulia

GINORIS QUESADA, O. 2001. Didáctica Desarrolladora; Teoría y Practica de la Escuela Cubana. La Habana, Cuba.

GINORIS QUESADA, O., ADDINE FERNÁNDEZ, F. & TURCAZ MILLÁN, J. 2006. *Didáctica General del Material Básico de la Maestría en Educación* La Habana

GONZÁLEZ, A. & GALLARDO, T. 2007. *Investigación Educativa,* Perú, Universidad Nacional San Agustín de Arequipa.

GONZÁLEZ CEPRO, E., DEL VALLE CRUZ, A. & RUÍZ DE ZÁRATE, J. 1988. *Matemática Superior II para la especialidad de Agronomía,* La Habana, Cuba, Ministerio de Educación Suprior.

GRENÓN, D. 2012. Modelos Matemáticos en Ingeniería Agronómica.

HORRUITINER SILVA, P. 2007. La universidad cubana: el modelo de formación. *Revista Pedagogía Universitaria* XII, 1, 11, 12

IRIARTE, R. Las Matemáticas en la Ingeniería.

IRIARTE, R. Investigación Educativa.

JIMÉNEZ, M. 1997. *Ecuaciones Diferenciales en la Mecanización Agropecuaria.* Tesis en opción al título de Máster en Ciencias Pedagógicas, Universidad Agraria de La Habana.

JOHNSON, R. & WICHERN, D. 2005. *Applied Multivariate Statistical Analysis,* USA.

KORDEMSKI, B. Y. C. 1976. *Problemas y ejercicios de análisis matemático*.

LABARRERE, G. 1988. *Pedagogía,* La Habana, Cuba.

LEYVA MACHÍN, P. Y. C. 1987. *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones,* La Habana, Cuba.

M., G. S., RECAREY FERNÁNDEZ, S. & ADDINE FERNÁNDEZ, F. 2003. El proceso de enseñanza aprendizaje: un reto para el cambio educativo. *In:* VARELA, F. (ed.) *Fundamentos didácticos de la educación superior en Cuba. Selección de Lecturas.* La Habana: Programa Académico de Amplio Acceso, Educación Superior.

MENA SILVA, T. 2012. *El sistema de trabajo metodológico para las disciplinas que conforman las carreras en la SUM. Una estrategia para San Luis* Tesis para optar por el grado de Master en Ciencias de la Educación, SUM, Pinar del Río.

NAVA, H. & GARCÍA, L. 2012. Una estrategia para la preparación metodológica del docente en condiciones de universalización de la educación superior.

ORTEGA, R. 2000. *Perfeccionamiento de la enseñanza de la Matemática en la carrera de Agronomía.* Trabajo para optar por el grado de Máster en Ciencias de Matemática Aplicada, Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas.

PACHECO, J. 2005. Algunas reflexiones acerca del papel de la ingeniería en matemáticas *SCTM 05*.

PANZA, M. 1986. Pedagogía y Currículo. *In:* GERNIKA (ed.).

QUINTERO, A., GUERRA, W., FERNÁNDEZ, I. & DE CALZADILLA, J. 2010. Diagnóstico del sistema de producción-comercialización del ganado caprino-ovino en el departamento de La Guajira, Colombia. Aplicación del Escalamiento Óptimo. *Revista Ciencias Técnicas Agropecuarias*.

RODRÍGUEZ, E., MARTÍN AMONÍ, L., OTERO MENÉNDEZ, M. & RIVERO GALÁN, R. 1986. *Integrales Múltiples,* La Habana, Cuba.

RODRÍGUEZ, E. Y. C. 1986. *Integrales Múltiples,* La Habana, Cuba.

ROLDÁN INGUANZO, R., HERNÁNDEZ RUBIO, Y. & ARMESTO ARTILES, B. 2007. *Matemática II para especialidades de las Ciencias Naturales,* La Habana, Cuba.

SAUT, R., BONIOLO, P., DALLE, P. & ELBERT, R. 2005. *Manual de Metodología,* Buenos Aires, Argentina

STEWART, J. 2006. *Cálculo con Trascendentes Tempranas,* La Habana, Cuba.

SUPERIOR, M. D. E. 2007. Reglamento trabajo docente y metodológico. Resolución Ministerial.

TAILLACQ MONTALVO, A. 1996. *Perfeccionamiento de la enseñanza de la matemática en la carrera de Ingeniería en Telecomunicaciones*. Tesis para optar por el grado de Master en Ciencias Matemáticas, Universidad Central" Marta Abreu" de las Villas.

TRISTÁ PÉREZ, B. & ÁLVAREZ VÁZQUEZ, Y. 2010. El trabajo metodológico en la educación superior. Un enfoque desde la gestión del conocimiento y el aprendizaje organizacional. *Revista Pedagogía Universitaria* XV, 68.

VARELA MARCELO, V., SUÁREZ GANDOLFF, L., CASTRO GARCÍA, M. & BALDOQUÍN DE LA PEÑA, G. 1986. *Álgebra Lineal,* La Habana, Cuba, Ministerio de Educación Superior.

VICTORIA GONZÁLEZ PEÑA, M. noviembre 2006. El trabajo docente-metodológico y de educación en valores en la universalización de la educación superior. Una experiencia cubana. *V I Seminário da redestrado - Regulaçã Educacion al e Trabalho Docente*. Río de Janeiro, Brasil.

YEPIS, V. diciembre 1999. El perfeccionamiento del trabajo interdisciplinario por año como herramienta básica para la formación integral del profesional universitario. *Conferencia Internacional de Ciencias de la Educación* [Online].

ANEXOS

Anexo 1. Eencuesta aplicada.

El Departamento de Matemática de la UCLV, realiza un estudio sobre las aplicaciones matemáticas a las diferentes disciplinas que componen la carrera de Ingeniería Agrícola. Su opinión resultaría de gran importancia para dicha investigación. Muchas gracias.

1- ¿Qué asignatura usted imparte?________________________________.

2- ¿A qué disciplina pertenece?__________________________________.

3- ¿Según su criterio qué contenidos matemáticos son usados en la asignatura que imparte?

4- De los temas que se presentan a continuación ¿cuáles se utilizan en su asignatura? Defina de ellos cuáles se utilizan en la docencia, en la investigación o en ambas.

Matemática I
____ Tema I: Función real de una variable real (determinar dominio, imagen, representar el dominio en caso de inecuaciones, límite y continuidad). ___D ___I ___Ambas.

____ Tema II: Derivadas (derivadas de funciones simples y compuestas, regla de la cadena, aplicaciones de la derivada en extremos de funciones, hallar máximos y mínimos). ___D ___I ___Ambas.

_____ Tema III: Integrales (integrales definidas, indefinidas e impropias, aplicaciones de la integral definida en el cálculo de áreas). ___D ___I ___Ambas.

Matemática II
____ Tema I: Funciones de varias variables (dominio y representación de funciones). ___D ___I ___Ambas.

____ Tema II: Derivadas de funciones de varias variables (derivadas de funciones compuestas, implícitas y de orden superior, derivada direccional). ___D ___I ___Ambas.

____ Tema III: Integrales múltiples (integrales dobles y triples, aplicación al cálculo de áreas, integral de línea y de superficie, todo en coordenadas cartesianas). ___D ___I ___Ambas.

Matemática III
____ Tema II: Series (series convergentes y divergentes, teoría de errores, error de interpolación). ___D ___I ___Ambas.

____ Tema II: Ecuaciones diferenciales (ecuaciones diferenciales ordinarias de variables separables y exactas, lineales de 1er y 2do orden con coeficientes constantes). ___D ___I ___Ambas.

Álgebra Lineal y Geometría Analítica

____ Tema I: Vectores. ___D ___I ___Ambas.

____ Tema II: Matrices y determinantes. ___D ___I ___Ambas.

____ Tema III: Sistemas de ecuaciones lineales. ___D ___I ___Ambas.

____ Tema IV: Geometría (ecuación de la recta en el plano y de las secciones canónicas, representar rectas, planos y superficies). ___D ___I ___Ambas.

5- ¿En cuáles de estos temas que utiliza su asignatura o disciplina los estudiantes presentan deficiencias?

Anexo 2. Guía de Observación.

Se utilizó con el objetivo de identificar las necesidades matemáticas que presentan los estudiantes que ingresan en la carrera.

- Operaciones de cálculo utilizadas por el ingeniero que manifiestan la aplicación de la Matemática.
- Dificultades en el desarrollo de habilidades generales.
- Potencialidades en la utilización de las habilidades matemáticas.
- Manifestaciones de la transdisciplinariedad.

Anexo 3. Folleto de Ejercicios.

Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas

Facultad de Matemática-Física-Computación

Departamento de Matemática

FOLLETO DE EJERCICIOS DE MATEMÁTICA

Autora: Laura García Pedraza

2014

A los estudiantes:

En los momentos actuales, Cuba se está enfrentando a una serie de cambios económicos, políticos y sociales. Los mismos encierran entre sus objetivos principales revitalizar el sector agropecuario. Esto hace necesario la formación de Ingenieros Agrícolas; los cuales se encargan de la explotación de los sistemas de ingeniería agrícola para los procesos tecnológicos y biotecnológicos de la producción agropecuaria sostenible en los eslabones bases. Para la formación de estos profesionales sería imprescindible la utilización de la Matemática.

La misma como ciencia básica, permite el desarrollo de habilidades tales como: la abstracción, comparación, síntesis y análisis. Además brinda la posibilidad de modelar fenómenos, describirlos y analizarlos a partir de la utilización de conceptos básicos y definiciones.

En este Folleto de Ejercicios se han escogido problemas y ejemplos de Análisis Matemático I, II, III y Álgebra Lineal y Geometría Analítica (ALGA); teniendo en cuenta los contenidos y las habilidades del plan de estudios de la carrera. Con la intención de una mejor preparación de los estudiantes para el proceso docente-educativo; presentado especial atención a aquellos temas donde los educandos muestran mayores dificultades.

Se pretende que este material sirva de apoyo como bibliografía complementaria, ya que los textos básicos en ocasiones carecen de ejemplos prácticos y aplicaciones concretas. Que le permita al estudiante no sólo dominar las técnicas y métodos matemáticos, sino también desarrollar su capacidad de aplicarlos en la práctica, elemento que cada día cobra mayor importancia en su formación profesional.

El Folleto cuenta con VI capítulos, al comienzo de cada uno, se expone un resumen teórico además de ejemplos resueltos relacionados con problemas de la especialidad. Se proponen un conjunto de ejercicios que los estudiantes pueden desarrollar como trabajo independiente o sirven de apoyo en su preparación para las clases prácticas.

La Autora.

ÍNDICE

CAPÍTULO I: ÁLGEBRA LINEAL.

En este capítulo se proponen una serie de ejercicios generales y de aplicación que al ser resueltos contribuirán a una mejor comprensión y ejercitación de lo recibido en las conferencias.

Con los vectores se pueden efectuar diferentes operaciones:

Adición y sustracción de vectores.

$si\ a = (a_1, a_2)\ y\ b = (b_1, b_2)$ entonces el vector $(a + b)$ está definido por:

$a + b = (a_1 + b_1; a_2 + b_2)$

Multiplicación por un escalar.

Si c es un escalar y $a = (a_1;\ a_2)$, entonces la multiplicación de ca está definida por: $ca = (ca_1;\ ca_2)$

Producto escalar o producto punto.

Sean $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$, el producto escalar de AB esta definid por: $AB = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. Esto da como resultado un escalar.

Producto vectorial o producto cruz.

Si $a = (a_1, a_2, a_3)$ y $b = (b_1, b_2, b_3)$ entonces el producto vectorial de $a \times b$ es el vector: $a \times b = a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1$. Esto también se puede resolver formando un determinante de orden tres.

También podemos determinar la longitud o norma de un vector.

Dado un vector P_1P_2 de origen $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y extremo $P_2(x_2, y_2, z_2)$, para determinar su longitud se calcula la distancia entre ambos puntos.

$l(P_1P_2) = |P_2 - P_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Si el vector viene dado por sus componentes o sea $V(V_1, V_2, V_3)$, entonces:

$l(V) = |V| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2}$

Con las matrices se pueden realizar diferentes operaciones. Veamos.

Suma de matrices:

Sean $A = \left[a_{ij}\right] \quad y \quad B = \left[b_{ij}\right]$ matrices de igual orden

La suma de las matrices A y B será la matriz $C = \left[c_{ij}\right]$ del mismo orden tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo i y todo j.

Multiplicación de una matriz por un escalar:

Sea λ un número real y A una matriz de orden p x n.

El producto de λ por A es, la matriz que resulta de multiplicar por λ todos los elementos de la matriz A.

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Multiplicación de matrices: para que esta operación se pueda realizar en necesario que el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de filas de la segunda. Dará como resultado una matriz con orden igual al número de filas de la primera por el número de columnas de la segunda.

Sean $A = \left[a_{ij}\right] \quad y \quad B = \left[b_{ij}\right]$ dos matrices tales que el número de columnas de A es igual al número de filas de B sí

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}_{pxq} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{q1} & \cdots & b_{qn} \end{pmatrix}_{qxn}$$

$$la\ matriz\ C = AB = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1} & \cdots & c_{pn} \end{pmatrix}_{pxn}$$

Donde:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{iq}b_{qn} (i = 1 \cdots p; j = 1 \cdots n)$$

Inversa de una matriz: una matriz tiene inversa o es inversible sí y solo sí su determinante es distinto de cero.

$A^{-1} = \frac{A^+}{|A|}$, donde: $A^+ \rightarrow$ es la matriz adjunta del sistema, que es igual a la de los cofactores traspuesta: $A^+ = C^T$.

$|A| \rightarrow$ determinante de A.

La matriz inversa de una matriz A inversible es una matriz A-1 que cumple que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

En cuanto a los sistemas de ecuaciones lineales podrán ser resueltos a través del método de Gauss. Su aplicación nos permitirá determinar si un sistema es o no compatible, en caso de serlo si es determinado o indeterminado y finalmente obtener la solución en los casos en que exista.

Este método consiste en transformar el sistema en un sistema equivalente mediante transformaciones elementales hasta convertir la matriz del sistema en matriz escalón. Finalmente terminar la solución mediante el procedimiento por sustitución, de abajo hacia arriba.

Veamos la clasificación del SEL:

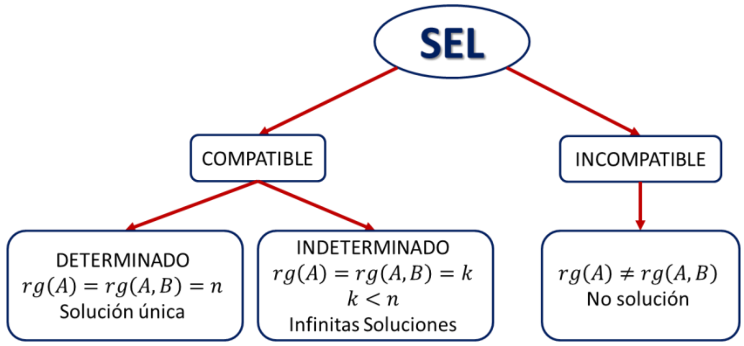

Figura 1 Clasificación de un SEL.

Ejemplos Resueltos.

I. En la barra que muestra la figura aparece aplicadas tres fuerzas en el punto $B: P_1, P_2, y\ P_3$.

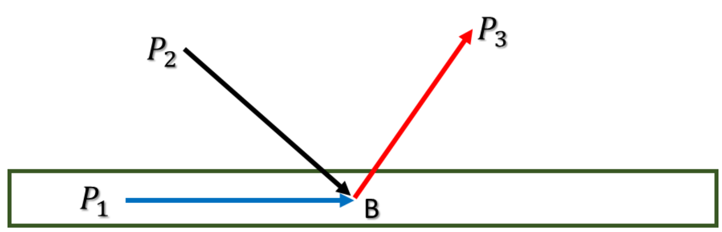

Figura 2 Aplicación de tres fuerzas en un punto a una barra de acero.

La matriz flexibilidad que caracteriza esta barra es la matriz de orden 3:

$$M_f = \begin{bmatrix} \frac{L}{2A} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{2EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}$$

Donde A es el área de la sección de la barra, E es el módulo elasticidad, Ies el momento de inercia y L su longitud.

Una traslación de las fuerzas del punto B al punto A se describe mediante el producto de las matrices:

$$T_{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & L & 1 \end{bmatrix} \text{ y } P_B = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

Que denominamos matriz traslación y matriz de las fuerzas en el punto Brespectivamente.

La matriz de las fuerzas en el punto A, P_A se calcula, mediante la multiplicación de las matrices $T_{BA}\ y\ P_B$.

$$P_A = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & L & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3(L+1) \end{bmatrix}$$

II. Un pequeño agricultor posee un terreno en forma de paralelogramo y desea conocer cuál es su área en m^2 con el objetivo de comprar posturas de tomate necesarias para la próxima cosecha. Se conocen las coordenadas de los vértices del terreno: $A(1,1,1), B(5,7,2)$ y $C(6,8,9)$. Si en un metro cuadrado se siembran 12 posturas. ¿Cuántas posturas se comprarán en total?

Hallemos $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$

$$\overline{AC} = (5,7,8)$$

$$\overline{AB} = (4,6,1)$$

Por lo tanto debemos calcular $A = |\overline{AC} x \overline{AB}|$

$$\overline{AC} x \overline{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -41\bar{\imath} + 27\bar{\jmath} + 2\bar{k}$$

$$A = \sqrt{(41)^2 + (27)^2 + (2)^2} = \sqrt{1681 + 729 + 4} = \sqrt{2414} \approx 49{,}13 m^2$$

Como en un metro cuadrado se siembran 12 posturas, en el área total del terreno se sembrarán 589 posturas, cantidad que deberá comprarse.

Ejercicios Propuestos

1. Dados los vectores:

$U_1 = (3, -4, 5)$ $U_4 = (4, -5)$ $U_7 = (2, -7, 1)$
$U_2 = (1, 1, -2)$ $U_5 = (4, 0, -6)$ $U_8 = (-3, 0, 4)$
$U_3 = (1, 2, -3)$ $U_6 = (-6, 7, -8)$ $U_9 = (6, 4)$

1.1. Halle:

a) $U_1 + U_5$ b) $U_4 + U_3$ c) $\frac{1}{2}U_2 + \frac{3}{4}U_3$ d) $U_2 - U_6$ e) $3U_7 - 8U_2$

1.2. Calcule los productos escalares siguientes:

a) $U_1 \bullet U_2$
b) $U_4 \bullet U_9$
c) $U_5 \bullet U_6$

1.3. Halle la longitud de los escalares: U_3, U_4, U_5.

1.4. Halle los productos vectoriales y mixtos según corresponda:

a) $U_2\ X\ U_8$
b) $U_4 \bullet (U_3\ X\ U_7)$
c) $U_6\ X\ U_1$
d) $U_3 \bullet (U_5\ X\ U_2)$

1.5. Hallar la norma de los siguientes vectores:

a) $(2, -7)$
b) $(3, -12, -4)$

1.6. Determine k tal que $\|u\| = \sqrt{39}$ si $u = (1, k, -2, 5)$.

2. Analice si los siguientes vectores son linealmente independientes o linealmente dependientes:

a) $U_7\ y\ U_9$ c) $U_7, U_8\ y\ U_9$

b) $U_1\ y\ U_6$ d) $U_4, U_5\ y\ U_6$

2.1. Pruebe que el paralelogramo que tiene como vértices: $A(2,0), B(3,0), C(2,2), D(3,2)$, es un rectángulo.

3. Efectuar las siguientes operaciones:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -12 & 7 \\ 5 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

3.1. Hallar x, y, z y w si $3\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{pmatrix}$

3.2. Hallar el producto de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -4 & 1 & -6 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -4 \\ -4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 9 & -4 \\ 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

3.3. Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} r & u \\ s & v \\ t & w \end{pmatrix},$

$D = \begin{pmatrix} l & m & n \end{pmatrix}$

a) Diga cuáles de ellas se pueden permutar en la multiplicación. Justifique su respuesta.

3.4. Realice las operaciones indicadas siendo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

a) $A^2 + 4B^T + 2I$

b) $A + A^T + 3I$

3.5. Calcular los determinantes de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & -7 & 4 \\ 0 & -6 & -8 \\ -3 & 12 & 6 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1\,3\,-1\,2 \\ 0\,11\,-5\,3 \\ 2\,-5\,3\,1 \\ 4\,1\,1\,5 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 3x & 2 & 1 \\ 6 & -x & 4 \\ -1 & 0 & x \end{pmatrix}$

3.6. Calcular la inversa de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 4y - z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ -y + 5z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y - 2z = 10 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \\ 5x + 4y + 3z = 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ 3x - y + 2z = 7 \\ 5x + 3y - 4z = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 5 \\ x - 2y + 3z = 2 \\ 4x - y + 4z = 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + 2y - z + 3w = 3 \\ 2x + 4y + 4z + 3w = 9 \\ 3x + 6y - z + 8w = 10 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ 3x - 2y - z = 5 \\ 2x - 5y + 3z = -4 \\ x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 + 6x_4 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$

$i)$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 = 16 \end{cases}$

4.1. ¿Qué condiciones deben cumplir a, b y c para que el siguente sistema con incógnitas x, y y z tenga solución única?

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x - 2y + 7z = c \end{cases}$$

5. Expresar el vector $v = (1, -2, 5)$ como combinación lineal de los vectores $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 2, 3), e_3 = (2, -1, 1)$.

5.1. Escribir el vector $u = (2, -5, 3)$ como combinación lineal de los vectores $v_1 = (1, -3, 2), v_2 = (2, -4, -1), v_3 = (1, -5, 7)$.

5.2. Para qué valores de k el vector $u = (1, -2, k)$será una combinación lineal de los vectores $v = (3, 0, -2), w = (2, -1, -5)$.

5.3. Mostrar que los vectores $u = (1,2, 3), v = (0,1, 2), w = (0, 0, 1)$ generan a R^3.

5.4. Mostrar que los vectores $(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 1, -1)$ generan a R^3.

5.5. Determinar si los vectores u y v son linealmente dependientes:

a) $u = (3, 4), v = (1, -3)$
b) $u = (4, 3, -2), v = (2, -6, 7)$
c) $u = 2 - 5t + 6t^2 - t^3, v = 3 + 2t - 4t^2 + 5t^3$

5.6. Determinar si los siguientes vectores forman una base del espacio vectorial R^3.

a) $(1, 1, 1)$ y $(1, -1, 5)$
b) $(1, 1, 1), (1, 2, 3)$ y $(2, -1, 1)$
c) $(1, 2,3), (1, 0, -1), (3, -1, 0)$ y $(2, 1, -2)$

5.7. Sea W el espacio generado por los polinomios. Hallar una base y la dimensión de W.

$v_1 = t^3 - 2t^2 + 4t + 1 v_3 = t^3 + 6t - 5$

$v_2 = 2t^3 - 3t^2 + 9t - 1 v_4 = 2t^3 - 5t^2 + 7t + 5$

5.8. Hallar la dimensión del espacio generado por:

a) $(1, -2, 3, -1)\ y\ (1, 1, -2,3)$
b) $(3, -6, 3, 9)\ y\ (-2, 4, -2, 6)$

6. Mario, Ernesto y Antonio se encuentran trabajando en la rectificación de camisas de pistones para el tractor MTZ-80, en el taller de moldes y troqueles de la IMPUD “1ro de Mayo”. Reciben por ello un total de 100 pesos de pago que deben repartirse, de modo que la cantidad recibida se corresponda con el trabajo realizado; si se conoce que: Antonio hizo la misma cantidad que Mario y Ernesto juntos, que Ernesto y Antonio hicieron cuatro veces la cantidad que hizo Mario. ¿Cuánto debe recibir cada uno?
7. La C.P.A. “Ovidio Rivero” dispone de 6 ha de tierra cultivable. En ellas se desea sembrar yuca y boniato. La cantidad de tierra a sembrar de yuca no debe exceder las 3 ha. Se dispone de 8 toneladas de materia orgánica para fertilizar los cultivos: una ha de yuca necesita 2 toneladas de materia orgánica y una de boniato, una tonelada. Es necesario determinar la cantidad de ha a sembrar de cada variedad.

a) Elabore el modelo matemático
b) Represente gráficamente la región solución
c) Plantee una posible solución y explique su respuesta.

CAPÍTULO 2: GEOMETRÍA ANALÍTICA.

Al resolver los ejercicios expuestos en este capítulo el estudiante podrá representar un sólido y proyectarlo en los tres planos coordenados.

Resumen de planos:

Ecuación general del plano: $Ax + By + Cz - D = 0$

- ***Plano oblicuo***

  $Ax + By + Cz = D$

  $Ax + By + Cz = 0$

  $Ax + By = D$

  $Ax + Cz = D$

  $By + Cz = D$

- **Planos proyectantes**

  $Ax = D$

  $By = D$

  $Cz = D$

- **Planos auxiliares**

  $Ax + By = 0$

  $Ax + Cz = 0$

  $By + Cz = 0$

- **Planos axiales**

  $x = 0;\ y = 0;\ z = 0$

Resumen de superficies

Ecuación general de la superficie: $Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = R; R > 0$

- **Esfera:**$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, coeficientes iguales.
- **Elipsoide:**$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, coeficientes diferentes.

- **Cilindros:** $Mx^2 + Ny^2 = R;\ Mx^2 + Pz^2 = R;\ Ny^2 + Pz^2 = R$
- **Cono:** $z = \sqrt{Mx^2 + Ny^2};\ x = \sqrt{Ny^2 + Pz^2};\ y = \sqrt{Mx^2 + Pz^2}$

Ejemplos Resueltos:

I. Representar el siguiente plano $12x + 6y - 6 = 0$

Plano perpendicular al plano XY y paralelo al eje Z debido a que solo aparecen dos variables X y Y, y tiene termino independiente.

Interceptas:

Eje X: $y = 0, z = 0$

$$12x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Eje Y: $x = 0, z = 0$

$$6y - 6 = 0 \rightarrow y = 1$$

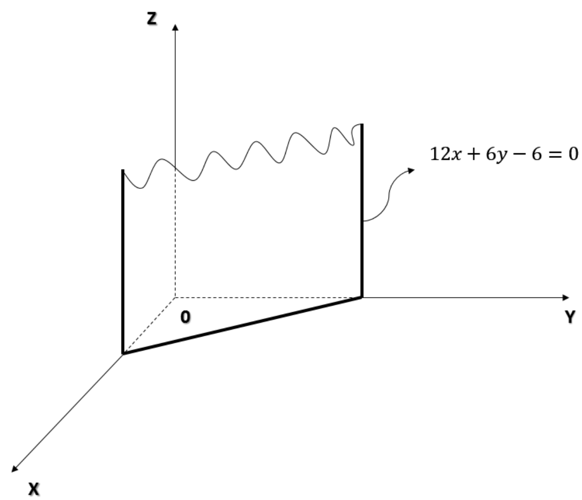

Figura 3 Representación de un plano.

Ejercicios Propuestos:

1. Representen gráficamente los siguientes planos:

a) $2x + 4y + 3z - 12 = 0$
b) $x + y = 6$
c) $x + y + z = 0$
d) $4x + 2z = 4$
e) $2y + 3z = 6$
f) $5x = 10$
g) $3x + 3y = 0$
h) $2y = 4$
i) $4x + 2z = 0$
j) $z = 3$
k) $4y + 2z = 0$
l) $x + y + z = 3$

1.1. Representar las siguientes superficies:

a) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 9$
b) $2x^2 + 2y^2 = 4$
c) $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 4$
d) $3x^2 + z^2 = 9$
e) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
f) $y^2 + z^2 = 1$
g) $y^2 = 2x^2 + 2z^2$
h) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$
i) $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = \mathrm{x}$
j) $4x^2 + y^2 + 2z^2 = 8$

1.2. Interceptar los siguientes planos:

a) $x^2 + y^2 = 2, \mathrm{z} = 3$
b) $x + y + z = 3, y = 2$
c) $x^2 + y^2 + z^2 = 9, \mathrm{x} = 2$

1.3. Represente los siguientes sólidos:

a) $\{\ (x, y, z) \in R^3 : x + y \leq 5, 0 \leq x \leq y, 0 \leq z \leq 2\}$
b) $\{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 : x + y + z \leq 5, 0 \leq x \leq z, x \geq 0\}$
c) $\left\{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 \leq 16, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq x \leq y\ \right\}$
d) $\left\{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq \sqrt{3x,}\ 1 \leq z \leq 2\right\}$
e) $\{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x, z \geq 0\}$
f) $\{(x, y, z) \in R^3 : z^2 \geq x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0\}$
g) $\left\{(x, y, z) \in R^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 25, 0 \leq \sqrt{3x} \leq y, z \geq 0\right\}$
h) $\{(x, y, z) \in R^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z^2 \geq x^2 + y^2, x \geq 0, y \geq 0\}$

1.4. Halle la proyección en los tres planos coordenados y las trazas correspondientes a cada uno de ellos, de los sólidos del ejercicio anterior.

2. Escribe en forma general o simétrica según corresponda las siguientes rectas:

a) $x - 2y + 3z + 1 = 0$
b) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-4}{2}$
c) $2x + 3y - 2z + 5 = 0$
d) $\frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{4} = \frac{z--2}{3}$

2.1. Hallar los planos proyectantes y representar:

a) $x + y - z = 2, 3x + 2y + z = 6$

b) $\frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-4}{4}$

c) $x + 2y - 3z + 1 = 0, 4x - 2y + 5z - 6 = 0$

d) $\frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{3}$

2.2. Halle las ecuaciones de una recta en la forma simétrica que pasa por los puntos: $(-2, 1, 3)$ y $(4, 2, -2)$.

CAPÍTULO 3: FUNCIONES.

Función: es una correspondencia entre dos conjuntos A y B tal que a cada elemento del conjunto A le corresponde un único elemento del conjunto B.

Tipos de funciones:

1. Funciones polinómicas

Ej. $y = 7x + 5$ Ej. $y = x^4 + 7x + 3$

1.1. Función lineal

$f(x) = ax + 0$

$y = mx + n$

Si $m > 0 \rightarrow f\ crece.$

Si $m < 0 \rightarrow f\ decrece.$

Si $m = 0, y = n \rightarrow$ función constante.

Si $n = 0, y = mx \rightarrow$ función afín (pasa por el origen de coordenadas).

Si $m\ y\ n \neq 0 \rightarrow y = mx + n$

2. Función cuadrática

$y = ax^2 + bx + c$

Vértice: $V(x_v; y_v);\ x_v = \frac{-b}{2a};\ y_v = f(x_v)$

3. Función potencia

$f(x) = x^n; donde\ n\ es\ cte$

$n \begin{cases} par \\ impar \end{cases}$ Aquí se determina la simetría de una función.

4. Función exponencial

$f(x) = a^x$ donde $a > 1; a \neq 1$, o $0 < a < 1$

4.1. $f(x) = e^x$, función exponencial de bese Euler.

5. Función logarítmica

   Función inversa de la función exponencial. Teniendo en cuenta su bese pueden ser:

   $f(x) = \log_a x$ con $a > 1; a \neq 1$ o $0 < a < 1$ Base 10.

   $f(x) = lnx$ base Euler.

   Hasta aquí el dominio de todas las funciones es: $x \in R$.

6. Función racional

   $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P\ y\ Q$ son polinomios. $Domfx \in R: x \neq Q(x)$.

7. Función algebraica: son aquellas que se pueden constituir utilizando operaciones algebraicas$(+, -, \times, \div, extracción\ de\ raíz)$ a partir de polinomios. Cualquier función racional es una función algebraica.

8. Función trigonométrica

   $f(x) = sinx$ y $f(x) = cosx$

   Son funciones periódicas, período 2π.

   $f(x) = tanx$ Período π.

$$Domfx \in R: (-\infty; +\infty)x \in R$$

Ejemplos Resueltos:

I. En una granja se desea cercar una parcela rectangular y dividirla por la mitad. Si se usan 12 millas de cerca, exprese el área total cercada en función de la longitud de uno de sus lados. Halle el dominio.

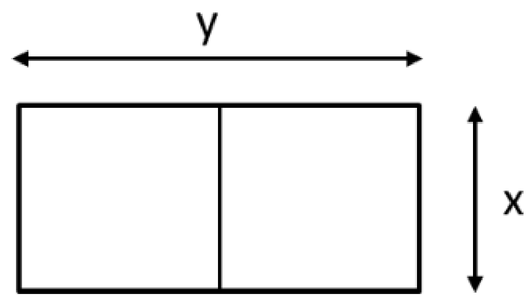

Figura 4 Terreno de una granja.

Solución:

Sea x la longitud de un lado paralelo a la cerca del medio

Entonces si Y es la longitud del otro lado de la parcela, se tiene:

$A = xy$

Como el total de cerca es de 12 millas, resulta:

$3x + 2y = 12$

de donde se obtiene $y = \frac{(12-3x)}{2}$

$$A(x) = x\left(\frac{12 - 3x}{2}\right)$$

$$A(x) = 6x - \frac{3}{2}x^2$$

La imagen de la función se debe restringir a valores positivos a fin de que sea razonable, por lo que el dominio de la misma está dado por los valores de x que satisfacen:

$6x - \frac{3}{2}x^2 > 0$, es decir $0 < x < 4$.

II. Se desea construir un depósito para combustible en forma de cilindro circular recto con una capacidad para $40L$. Exprese su área en función del radio.

Solución:

De acurdo con la figura, $V = \pi r^2 h \, dm^3$, donde r es el radio y h es la altura en decímetros. El área es: $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

Sustituyendo h se obtiene se obtiene en área en función del radio:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2}, r > 0$$

III. El número de hongos de un cultivo en un tiempo t está dado por: $y = N_0 e^{5t}$. ¿Cuántos hongos habían en el instante $t = 0$? ¿Cuándo su número será el doble de la cantidad inicial?

Solución:

Para $t = 0, y = N_0 e^0 = N_0$. Así en el instante $t = 0$, el número de hongos de un cultivo es N_0.

Su número será el doble de la cantidad inicial, para el valor t que satisfaga la ecuación siguiente:

$2\mathrm{N}_0 = \mathrm{N}_0 \mathrm{e}^{5\mathrm{t}}$, es decir,

$e^{5t} = 2$

$e^{5t} = ln2$

$t = \frac{1}{5} ln2 = \frac{0,6939}{5} \approx 0,13186$ Unidades de tiempo.

Ejercicios propuestos:

1. Haga una tabla resumen con los diferentes tipos de funciones que conoce y sus propiedades principales.
2. Determine el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 9 + x^2 - 7x^3$

b) $f(x) = \frac{7x}{x^2-4x-5}$

c) $y = \sqrt{x^2 - 25}$

d) $f(x) = ln(x^2 - 9)$

e) $y = e^{\frac{4}{x}+2}$

f) $y = arc\ cos(3x + 1)$

g) $y = \sqrt{ln(2x + 3)}$

h) $f(x) = \frac{1}{cos^2 x + cosx}$

i) $f(x) = \sqrt{arc\ sinx}$

j) $f(x) = \frac{5}{x+1}$

k) $f(x) = \begin{cases} 1+x, x > 0 \\ x, x \leq 0 \end{cases}$

l) $y = \sqrt{x^2 - 4} + \frac{3}{x-2}$

m) $y = \sqrt{\frac{x^1 - 1}{x}} - \frac{3\sqrt{x-2}}{\sqrt{2x} - 1}$

n) $y = \sqrt{\frac{x}{4+x}}$

o) $y = \frac{\sqrt{6x - x^2}}{2 - \sqrt{x}}$

p) $y = \sqrt{x} + \frac{1}{x-2} - ln(2x - 3)$

2.1. Esboce el gráfico de la siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} arc\ tanx, x \leq 0 \\ x^2 + 1, 0 < x \leq 1 \\ lnx, x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} e^x, si\ x \leq 0 \\ tanx, si\ 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 2\ , si\ x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 3 - x, si\ x \leq 0 \\ 4x^2, si\ x > 0 \end{cases}$

2.2. La figura muestra un mecanismo de manivela. El volante es de radio R, la biela es de longitud a. El volante gira uniformemente en el sentido de las agujas del reloj dando n vueltas en un segundo. En el momento $t = 0$ en el que le biela y la manivela formaron una misma recta (posición del punto muerto), la cruceta (A) ocupó el punto O. Hallar la dependencia entre el desplazamiento x de la cruceta (A) y el tiempo t.

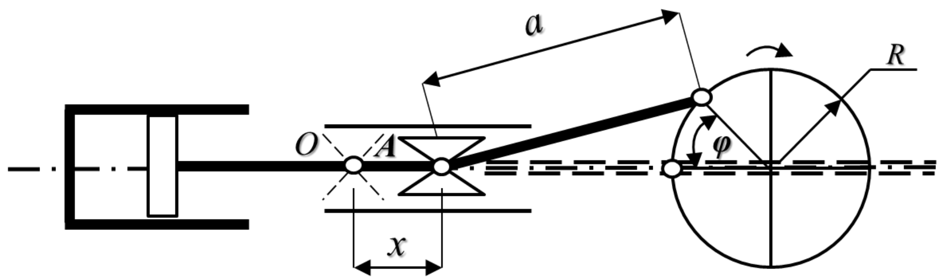

Figura 5 Mecanismo de manivela.

2.3. Indicar la dependencia entre el ángulo φ de la vuelta de la manivela (figura del ejercicio anterior) y el desplazamiento x de la cuerda (F. trigonométrica inversa).

2.4. Para proteger un terreno rectangular se precisan 2000 metros de alambrada, si una de las dimensiones es $x(m)$, expresar el área, $y(m^2)$, en función de x. Determinar el campo de variación de x.

2.5. En cada uno de los vértices de una placa cuadrada de aluminio de 12 cm de lado, se cortan pequeños cuadrados de $x\,cm$ de lado, doblándose a continuación los bordes hacia arriba para formar una caja abierta. Expresar el volumen $v(cm^3)$ en función de x y determinar el campo de variación de x.

2.6. Se desea construir un depósito en forma de cilindro circular recto con capacidad para 5 litros. Exprese su área en función del radio. Halle el dominio de variación del radio.

CAPÍTULO 4: LÍMITE Y CONTINUIDAD.

El concepto de límite es fundamental en el Análisis Matemático y constituye uno de los más complejos de la matemática en general.

Definición de límite: $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$

Límites laterales:

Límite lateral izquierdo o por la izquierda (LLI) $\lim_{x\to a^-} f(x) = l_i$

Límite lateral derecho o por la derecha (LLD) $\lim_{x\to a^+} f(x) = l_d$

Si los límites laterales son iguales $LLI = LLD$ entonces $\lim_{x\to x_0} f(x) \to \ni$

Límites fundamentales:

Trigonométrico: $\lim_{x\to 0} \frac{sinf(x)}{f(x)} = 1$, con una indeterminación de $\frac{0}{0}$.

Algébrico o exponencial: $\lim_{x\to 0}\left(1+f(x)\right)^{\frac{1}{f(x)}} = 1^{\infty} = e$ o

$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = 1^{\infty} = e$, con 1^{∞} como indeterminación.

Continuidad: una función f es continua en un punto a si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, donde $f(a)$ es la función evaluada en el punto.

Además esta definición requiere de tres condiciones:

1- $f(a)$tiene que estar definida ($a \in Domf$)

2- $\lim_{x\to a} f(x) \ni$ debe estar definida en el intervalo

3- $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Clasificación de la discontinuidad:

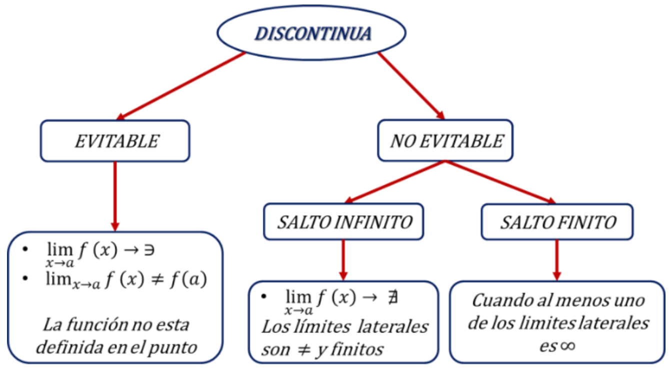

Figura 6 Clasificación de discontinuidad.

Regla de L' Hospital: $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, siempre que:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \ , \ \left[\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)\right] \in \{\pm\infty\}$$

Formas indeterminadas:

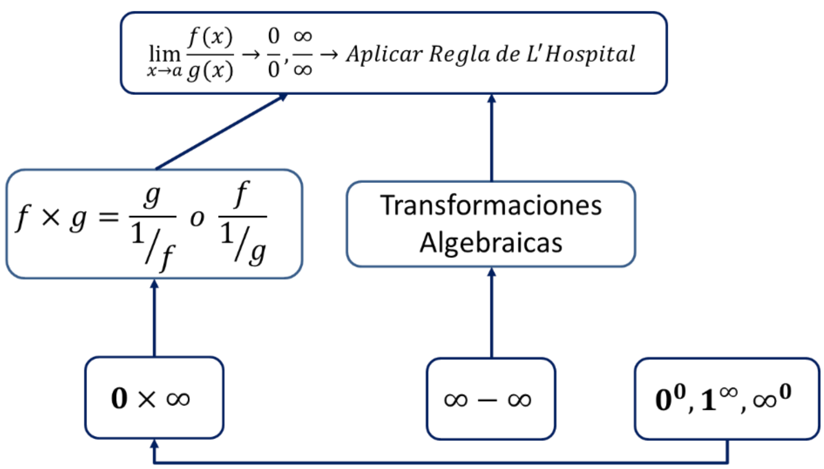

Figura 7 Formas indeterminadas.

Ejemplos Resueltos.

1. El fenómeno de desnaturalización proteica en los organismos responde al modelo y = No e^{-kt} , donde y es la cantidad de proteínas en el organismo en un tiempo t específico. ¿Cómo se comportan las proteínas con el paso del tiempo?

Analicemos cómo se comportan las proteínas para valores de t relativamente pequeños. La tabla refleja tal situación:

t	0	1	3	10	....	1000	....
y	N_0	N_0/e^{k}	N_0/e^{3k}	N_0/e^{10k}	....	N_0/e^{1000k}	....

Se observa que a medida que transcurre el tiempo el número de proteínas presentes es menor, por lo que sospechamos que para tiempos suficientemente grandes las proteínas desaparezcan. ¿Cómo podemos demostrar tal situación?

Sencillo, calculando el límite de la función y = No $\mathbf{e}^{-kt}$ cuando t $\to\infty$

$$\lim_{t\to+\infty} \text{No } \mathbf{e}^{-kt} = N_0 \lim_{t\to\infty} \mathbf{e}^{-kt} = N_0 \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^{kt}} = 0$$

Ahora podemos afirmar con seguridad que cuando el tiempo es suficientemente grande, las proteínas tienden a desaparecer.

Ejercicios Propuestos.

1. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 2}(4x+5)$ n) $\lim_{r\to 1}\sqrt{\frac{8r+1}{r+3}}$

b) $\lim_{x\to 0^+} xlnx$ ñ) $\lim_{x\to 1}\frac{cos(lnx)-8x}{e^{x-1}}$

c) $\lim_{x\to 0}(cscx - cotx)$ o) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

d) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+5x+8}{x-3}$ p) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$

e) $\lim_{x\to a^+}\frac{ln(x-a)}{ln(e^x-e^a)}$ q) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-3x+2}$

f) $\lim_{x\to 0^+} x^{sinx}$ r) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^x$

g) $\lim_{x\to\infty} xsin\frac{1}{x}$ s) $\lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{x}}$

h) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2}$ t) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x+4}$

i) $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$ u) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+4}{x+3}\right)^{x+5}$

j) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{lnx}\right)$

k) $\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$

l) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{lnx}\right)$

m) $\lim_{x\to -3}\frac{x^2+5x+6}{x^2-x-12}$

2. Halle el límite indicado, si existe. Si no existe, explique por qué.

a) $f(x)=\begin{cases} 2\ si\ x<1 \\ -1\ si\ x=1 \\ -3\ si\ x>1 \end{cases}$

Hallar $\lim_{x\to 1^+} f(x), \lim_{x\to 1^-} f(x), \lim_{x\to 1} f(x)$

b) $f(r)\begin{cases} 2r+3, r<1 \\ 2, r=1 \\ 7-2r, r>1 \end{cases}$

Hallar $\lim_{x\to 1^+} f(r), \lim_{x\to 1^-} f(r)$

c) g$(t)\begin{cases} 3+t^2, t<-2 \\ 0, t=-2 \\ 11-t^2, t>-2 \end{cases}$

Hallar $\lim_{x\to -2^+} g(t)$, $\lim_{x\to -2^-} g(t), \lim_{x\to -2} g(t)$

3. Analice la continuidad de las siguientes funciones y clasifique los casos de discontinuidad.

a) $f(x)=\begin{cases} 3\ si\ x<0 \\ 0\ si\ x=0, en\ x=0 \\ 2\ si\ x>0 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^{2+1}}\ si\ x<1 \\ 4\ si\ x=1, en\ x=1 \\ 1-x^2\ si\ x>1 \end{cases}$

c) $g(x)=\begin{cases} \tan x\ si\ -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2} \\ 4\ si\ \frac{\pi}{2}\le x\le 4 \\ x\ si\ x=4 \end{cases}$

d) h$(x)=\begin{cases} cos\frac{\pi}{2}xsix\le 1 \\ \frac{1-e^{3(x-1)}}{x^3}six>1 \end{cases}$

4. Analice la continuidad y represente la situación problémica.

a) $f(x) = \frac{4}{x-1}, en\ V^*(1)$

b) $f(x) = \frac{x}{|x|}, en\ V^*(0)$

c) $y = \frac{3}{x^2-4}, en\ V^*(2)\ y\ V^*(-2)$

5. ¿Qué valor debe tomar A para que $f(x)$ presente una discontinuidad evitable? Si:

$$f(x) = \begin{cases} \left(1 + \dfrac{3x}{5}\right)^{\frac{1}{x}}, x > 0 \\ A\sqrt[5]{e^3} + x^2, x < 0 \end{cases}$$

6. ¿Qué valor debe tomar k para que la función sea continua en el punto que se indica? Si:

$$f(x) = \begin{cases} kcosx\ si\ x < 0 \\ x^3 + 2\ si\ x \geq 0 \end{cases}, en\ x = 0$$

7. Analice la continuidad en cada intervalo:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2\ -1 < x < 0 \\ 1\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0\ x\infty - 1 \end{cases}, en\ [-1,1]$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1, -2 \leq x \leq -1 \\ 0\ x = -1 \\ \frac{1}{x+1}, -1 < x \leq 0 \end{cases}, en\ [-2,0]$

CAPÍTULO 5: CÁLCULO DIFERENCIAL.

Este tema es muy importante a la carrera por su aplicación práctica a las asignaturas de la especialidad.

Reglas de derivación

1- $(f \pm g)' = f' \pm g'$
2- $(\alpha f)' = \alpha f'$
3- $(f.g)' = f'g + fg'$
4- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
5- $[f.g(x)]' = f'\big(g(x)\big).g(x)'$ Regla de la cadena.

Linealización: $L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$

Diferencial: $dy = f'(x)dx;\ como\ dx = \Delta x;\ \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

Derivada dirigida o direccional

Gradiente: $gradf(x_0) = \nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \ldots\ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right)$

Derivada dirigida: $D_u f(x_0, y_0) = \underset{\nabla f}{\rightarrow}(x_0, y_0).\underset{u}{\rightarrow}$

$$D_v f(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)cos\beta$$

$máxD_u f(P_o) = \|\nabla f(P_0)\|, cuando\ \nabla f \| u$

¿Cómo determinar la derivada dirigida?

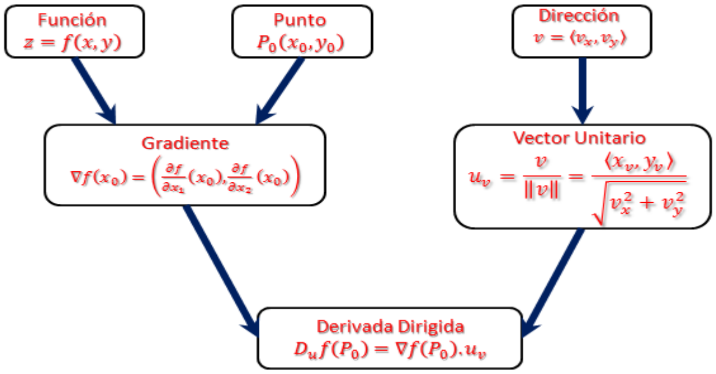

Figura 8 Metodología para determinar la derivada dirigida.

Ejemplos Resueltos:

I. Los movimientos en los cuales la posición x de un objeto en un tiempo t está dada por la fórmula: $x - x_0 = a \sin b(t - t_0)$, (donde x_0, t_0, a, b, son constantes que encontramos con frecuencia en la asignatura de Mecánica Aplicada), se llaman movimientos armónicos simples. Por ejemplo el sistema de suspensión de…..que se encuentra sujeto…

Calcular la velocidad y la aceleración de un cuerpo en movimiento, cuya posición está dada por la fórmula anterior y encontrar la función (posición)→ (aceleración).

Solución:

La posición del objeto en el tiempo t es: $x - x_0 = a \sin b(t - t_0)$.

La función de velocidad del objeto es $D_t x$, de donde:

$D_t(x_0 + a \sin b(t - t_0)) = ab \cos b(t - t_0)$.

De modo que la velocidad en un tiempo t es $ab \cos b(t - t_0)$. Del mismo modo, la función aceleración es D_t^2. Por tanto, la aceleración en el tiempo t es:$-b^2 a \sin b(t - t_0)$.

La función (posición)→ (aceleración) es: $x \rightarrow -b^2 a \sin b(t - t_0)$, o también mediante la sustitución de $x - x_0 = a \sin b(t - t_0)$ según la fórmula original de la posición: $x \rightarrow -b^2 a \sin b(t - t_0), x \epsilon \mathcal{R}$.

II. En la empresa de Cultivos Varios Valle del Yabú se realizó un experimento de campo para conocer el comportamiento del rendimiento de un cultivo por la aplicación de diferentes dosis de nitrógeno. Después de analizar los datos obtenidos se concluyó que la curva que más se ajustó a la realidad fue de tipo parabólico: $R = 1{,}5 + {,}4231x - 0{,}1011x^2$ donde R representa el rendimiento y $x$el nutriente aplicado.

Calcule la dosis óptima económica de nitrógeno a aplicar para que el rendimiento sea máximo, si se conoce que el precio de unidad de producto agrícola que se obtiene varía según se comporte el costo de la unidad de nutriente que se aplica. En este caso esa relación es igual a 3. Se conoce que la primera derivada representa la variación de una magnitud con respecto a otra. Aquí el precio de la unidad de producto agrícola que se obtiene: p varía, según como se comporte el costo de la unidad de fertilizantes: q que se emplea, por lo tanto tenemos que: $R' = \frac{p}{q}$

$4{,}4231 - 2(0{,}1011)x = 3$

$-0.2022x + 1{,}4231 = 0$

Se obtiene $x = 7{,}04\, kg/ha$ que es la dosis óptima económica de nitrógeno.

Ejercicios propuestos:

1. Halle y' y y'' de las siguiente funciones:

a) $y = 3x^2 - 5x + 1$ l) $y = x^2 logx$

b) $y = ax^2 + bx + c$ m) $y = x\ lnx$

c) $u = \frac{v^5}{v^3-2}$ n) $y = ln^2x$

d) $y = \frac{1-x^3}{\sqrt{\pi}}$ ñ) $y = x\ sinx\ lnx$

e) $y = \sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}$ o) $y = \frac{lnx}{x^n}$

f) $y = cos^2x$ p) $y = 2^x$

g) $y = \frac{tanx}{x}$ q) $y = \frac{x}{e^x}$

h) $y = xsec^2 - tanx$ r) $y = \frac{e^x}{sinx}$

i) $y = 3sin(3x + 5)$ s) $y = e^x cosx$

j) $y = sin^2(cos3x)$ t) $y = xe^x$

k) $y = x\ arcsinx$ u) $y = e^{-x^2} lnx$

2. Derivar las funciones:

a) $y = x^2 - 3x + 2,\ y'' = ?$

b) $y = 1 - x^2 - x^4, y''' = ?$

c) $f(x) = (x^2 + 1)^3, f'' = ?$

d) $f(x) = e^{2x-1}, f''(0) = ?$

3. Halle la derivada de la función:

a) $y = cos(a^3 + x^3)$

b) $f(x) = (3x - 2)^{2013}(5x^2 - x + 1)^{2014}$

c) $y = sin\left(tan\sqrt{sinx}\right)$

d) $s(t) = \sqrt[4]{\frac{t^3+1}{t^3-1}}$

e) $y = \cos kx$

f) $y = 5ln(\tan 4x^3)$

g) $y = e^{x^3\left(log(2x)\right)}$

h) $y = 3^{5x^4+3x}$

4. Determinar el comportamiento de las siguientes funciones. Trace su gráfico.

a) $f(x) = \frac{8}{x^2-4}$ g) $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 5$

b) $y^3 = x^2(6 - x)$ h) $y = \frac{-1}{x^4}$

c) $y = -x + \frac{4}{-x}$ i) $y = \sqrt[3]{x}$

d) $y = \ln cosx$

e) $y = e^{-x^2}$

f) $y = x^3 - 3x^2$

5. Determinar las derivadas parciales indicadas:

a) $f(x, y) = e^{xy^2}, f_{xxy}$

b) $f(x, y) = tanx\ siny, f_{xxy}$

c) $f(x, y) = e^x lny + 3x, f_{xyy}$

d) $f(x,y,z) = x^5 + x^4y^4z^3 + yz^2, f_{xyz}$

e) $f(x,y,z) = sin(3x - yz), f_{xxyz}$

f) $f(x,y,z) = xz^2lny + xz^3, f_{xzzy}$

6. Halle las derivadas indicadas:

a) $f(x,y) = x^4 - 4x^2y^2 + y^4, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$

b) $z = ln\sqrt{xy} + x^2, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

c) $z = tan\frac{x^2}{y}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

d) $z = x^y, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

e) $f(x,y) = \frac{1}{y}cosx^2, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$

f) $f(x,y) = e^{\frac{1}{x+y^2}}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$

g) $z = \sqrt[3]{sin(x^2y + y^2)}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

h) $f(x,y,z) = e^{xy}lnz, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$

i) $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$

7. Calcular las derivadas de las siguientes funciones compuestas:

a) $z = sinxy + cosxy$z siendo $\begin{cases} x = e^{st} \\ y = st \end{cases}$, Hallar: $\frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial t}$

b) $u = x^2 + y^2$ siendo $\begin{cases} x = t \\ y = e^t \\ z = sint \end{cases}$, Hallar: $\frac{du}{dt}$

c) $z = sin(4x + 5y)$ siendo $\begin{cases} x = s + t \\ y = s - t \end{cases}$, Hallar: $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

d) $z = x^2 - 3xy + y^2$ siendo $\begin{cases} x = u\ sinv \\ y = u\ cosv \end{cases}$, Halar: $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$

e) $z = e^{xy}$ siendo $y = x^2 + 2x$, Hallar: $\frac{dz}{dx}$

8. Si $z = \frac{x^2y^2}{x+y}$, demuestre que $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2\frac{\partial z}{\partial x}$

9. Si $z = e^{-x}cosy - e^{-y}cosx$, demuestre que $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

10. La función $y = 50 + 200x - x^2$ representa la relación existente entre la aplicación de fertilizantes y el rendimiento en un cultivo de papas.

x – kg de fertilizantes aplicados

y – rendimiento obtenido en quintales por hectáreas cultivadas

Trace la curva de la función y.

¿Cuál será el rendimiento máximo? ¿Con que cantidad de fertilizantes se obtiene?

Si $x = 100kg$. ¿Qué sucede con el rendimiento? ¿Por qué?

¿Cuándo se hace nulo el rendimiento?

Tendría sentido aplicar una dosis de $300kg$ de fertilizantes? ¿Por qué?

11. Una sembradora de papas describe en el surco una curva aproximadamente igual a $y = 5|sinx|$. Realice el trazado de la misma y analice dominio e imagen.

12. Hallar la diferencial de las funciones:

a) $0{,}25\sqrt{x}$ c) tan^2x

b) $(1 + x - x^2)^3$ d) $x^4 + 5x$

13. Halle la aproximación lineal dada en $a = 0$:

a) $\sqrt{1+x}$ b) e^x

b) $\frac{1}{(1+2x)^4}$

14. En el taller de fundición de Planta Mecánica se fabrican pistones, una pieza de acero en forma de cilindro, cuyo uso en la maquinaria agrícola es de gran importancia. Las dimensiones de un tipo de pistón son: altura h = 60cm y radio r = 30cm. Para la efectividad en la explotación del parque es necesario saber cuánto aumenta el volumen de la pieza si por efecto del calor se dilata su altura hasta

60,01cm y su radio hasta 30,02cm.

15. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3$, en el punto de abscisa 2.
16. Hallar la ecuación de la tangente a la línea $y = x^3 + 3x^2 - 5$, perpendicular a la recta $2x - 6y + 1 = 0$.
17. El ángulo de giro de una pole en función del tiempo t viene expresado por la función $a = t^2 + 3t - 5$. Hallar la velocidad angular para $t = 5s$.
18. Un cuerpo se mueve conforme a la ley expresada por la ecuación $S = 10t + 18t^2 - 2t^3$. Halle la velocidad máxima de desplazamiento del cuerpo.
19. La solidez de una viga rectangular es proporcional al producto de su ancho por el cuadrado de su altura. Hale las dimensiones de la viga más sólida que puede obtenerse de un tronco cilíndrico de $a\ cm$ de diámetro.
20. El ángulo θ, que se forma al dar vuelta un rueda, al cabo de t segundos, es igual a $\theta = at^2 - bt + c$, donde a, b, c son constantes positivas. Hallar la velocidad angular ω de la rotación de la rueda. ¿En qué momento es igual a cero la velocidad angular?
21. Dada la función $y = x^3 + 2x$ hallar el valor del incremento y de su parte lineal principal que corresponde a la variación de x desde $x = 2$ hasta $x = 2{,}1$.
22. Hallar el incremento y la diferencial de la función $y = \sqrt{x}$ para $x = 4$ y $\Delta x = 0{,}41$.
23. $y = x^3 - x$. Para $x = 2$ calcular Δy y dy, dado a Δx los valores $\Delta x = 1, \Delta x = 0{,}1, \Delta x = 0{,}01$.
24. Halle la derivada direccional de la función $f(x, y, z) = 2x^2 - y + z^2$ en el punto $P = (1,2,3)$ en la dirección del vector $s = \overrightarrow{2\imath} + \overrightarrow{3\jmath} - \overrightarrow{3k}$.
25. El disco metálico de un arado se dilata por la acción del calor de manera que su radio aumenta de $5\ a 5{,}06\ cm$.Hallar el valor aproximado del incremento del área. Sea $z = e^x cosy$, en el punto $P(0/\pi/3)$.

a) Hallar $\overline{\nabla} z$

b) Calcular la derivada direccional de esta función en la dirección$\overline{\nabla} z$.

c) Hallar la derivada direccional en la dirección del vector $\vec{s} = \overrightarrow{3\imath} + \overrightarrow{4\jmath}$.

26. Determine el gradiente de la función en el punto que se indica:

a) $f(x, y) = x^3 - 4x^2 y - 2y^2, P(1,1)$

b) $f(x,y) = sinx + e^{xy}, P(0,1)$

c) $f(x,y,z) = xsinyz, P(1,3,0)$

d) $f(x,y,z) = e^{y}lnx + e^{z}lny, P(1,1,0)$

27. Calcule la derivada direccional de la función en el punto dado y en la dirección que se indica:

a) $f(x,y) = x^2y^3 - 4y, P(2,-1), \vec{v} = \overrightarrow{2\imath} + \overrightarrow{5\jmath}$

b) $f(x,y) = \sqrt{x-y}, P(5,1), \vec{v} = \overrightarrow{12\imath} + \overrightarrow{5\jmath}$

c) $f(x,y,z) = lnx + e^{y} + sinz, P(e,1,0), \vec{v} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$

28. Determine la derivada dirigida máxima de f y en la dirección en que ocurre:

a) $f(x,y) = xe^{-y} + 3y, P(1,0)$

b) $f(x,y) = ln(x^2 + y^2), P(1,2)$

c) $f(x,y,z) = xyz + xy^2 + y^2z, P(1,1,1)$

CAPÍTULO 6: CÁLCULO INTEGRAL

El Cálculo Integral es también uno de los más aplicables a la carrera pues este se utiliza para el cálculo de áreas y para hallar algunos parámetros de asignatura específicas de la carrera.

Métodos de integración:

Por partes: $\int u\,dv = u.v - \int v\,du$

Por sustitución: $I = \int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$

$$I = F(u) + c, c \in R$$

$$I = F\big(g(x)\big) + c$$

$$I = \int f(u)\,du$$

Donde: $u = g(x);\ du = g'(x)\,dx$

Fracciones simples: Una fracción racional simple se puede descomponen en una suma de fricciones racionales simples.

Una fracción racional propia, es simple, si es alguno de los tres casos siguientes:

Caso I: Factores lineales no repetidos: $\frac{A}{ax+b}$

Caso II: Factores lineales repetidos: $\frac{A_K}{(ax+b)^K} + \frac{A_{K-1}}{(ax+b)^{K-1}} + \cdots + \frac{A_1}{ax+b}$

Caso III: Factores cuadráticos no repetidos: $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$

Área: $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx, respeco\ a\ x$

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\,dy, respecto\ a\ y$$

Volumen de sólidos de revolución:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\ dx, girando\ respecto\ al\ eje\ x$$

$$V = \pi \int_c^d [f(y)]^2\ dy\ , girando\ respecto\ al\ eje\ y$$

$$V = \pi \int_a^b \left[\big(f(x)\big)^2 - \big(g(x)\big)^2\right]\ dx$$

Integrales dobles:

$$\iint_{S_x} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right] dx$$

$$\iint_{S_y} f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx\right] dy$$

Si $f(x,y) = 1$, entonces $\iint dxdy$ representa el área de la región analizada.

Integrales triples:

Si $f(x,y,z) = 1$, entonces $\iiint_W dxdydz$ representa el volumen de la región analizada.

Integral de línea:

De primera especie: $\int_C f(x,y)\,ds$, donde

$C \rightarrow$ representa una curva suave a trozos.

$ds \rightarrow$ es la diferencial de arco.

Si $f(x,y)$ se interpreta como la densidad lineal de masa entonces $\int_C f(x,y)\,ds$ representa la masa de la curva.

Si $f(x,y) = 1$ entonces $\int_C ds$ representa la longitud de la curva.

De segunda especie: $\int_C F\,dr = \int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, donde

$dr = (dx, dy)$

$F(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$

Teorema de Green: $\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$

Integral de superficie:

$$\iint_S f(x,y,z)ds = \iint_D f\big(x,y,g(x,y)\big)\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\;dA$$

Ejemplos resueltos:

I. En una fábrica de arados se recibirán láminas de acero en forma de segmento parabólico: y = x^2 y de altura 25 metros. Estas láminas se utilizan en el proceso productivo para la elaboración de discos, por lo que es necesario determinar el total de materia prima a recibir si la entrega es de 100 láminas, así como la longitud del arco parabólico para decidir por problemas de espacio disponible, el almacén donde se ubicarán.

- Para saber el total de materia prima a recibir, es necesario calcular el área de una lámina

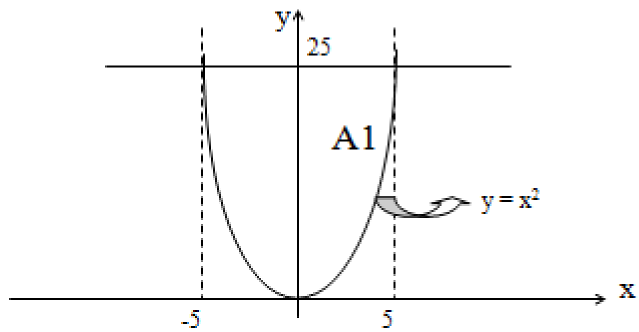

Figura 9 Área de una región.

Y calcular el área de la región se pude realizar tanto utilizando la integral definida como la integral doble:

a) Integral definida

Aprovechando la simetría de la región con respecto al eje $''y''$, se puede plantear el cálculo del área de la siguiente forma:

$$A = 2A_1$$

$$A_1 = \int_0^5 (25 - x^2)dx = 25x - \frac{x^3}{3}\Big|_0^5 = \frac{250}{3} \rightarrow A = \frac{500}{3}m^2$$

El área de una lámina es de $166{,}66m^2$.

b) Integral doble

$$A_1 = \int_0^5 \int_{x^2}^{25} dydx = \int_0^5 y|_{x^2}^{25}\, dx = \int_0^5 25 - x^2 dx = \frac{250}{3}$$

$$A = \frac{500}{3}m^2$$

Por tanto, si la entrega total es de 100 láminas, la fábrica recibió $166{,}66m^2$ de materia prima.

- Para decidir lugar de almacenamiento de las láminas, se debe calcular la longitud del arco parabólico
  Y para este cálculo se puede utilizar tanto la integral definida como la integral de línea.

a) Integral definida

$$l = \int_{-5}^{5} \sqrt{1-(2x)^2}dx$$

b) Integral de línea

$l = \int_A^B dl$ donde $dl = \pm\sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

Parametrizando obtenemos que:

$$\begin{cases} y = x^2, dy = 2xdx \\ x = x, dx = dx \end{cases}$$

Hallemos la longitud del arco l_1 de parábola comprendido en el intervalo $[0,5]$.

En este intervalo, el parámetro x crece desde el punto $A(0,0)$ al $B(5,25)$, por tanto:

$$dl = \sqrt{1+4x^2}dx$$

$$l_1 = \int_A^B dl = \int_{(0,0)}^{5,25} dl$$

$$l_1 = \int_0^5 \sqrt{1+4x^2}dx = 4{,}9105$$

La longitud del arco $l = 2l_1 = 9{,}821$.

II. Se desea determinar el volumen en m^3 que tendrá un tanque para almacenar agua para el regadío de un autoconsumo. El mismo describe las siguientes características:

$\{ (x, y, z) \in R\text{^}3 : x + z \leq 4; y + z \leq 1; z \geq 0; x \geq 0; y \geq 0\}$

Solución:

Primero se representa el sólido.

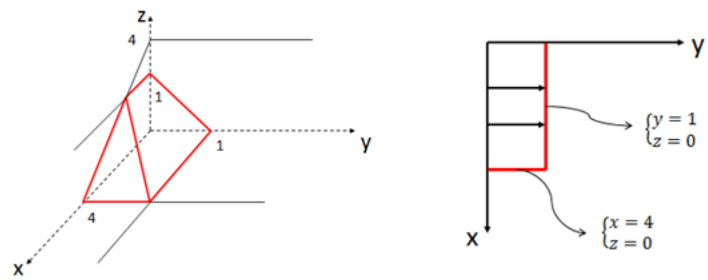

Figura 10 Representación y proyección de un sólido.

Luego se plantea la integral. Los límites de integración de las dos primeras integrales se buscan en la proyección del plano coordenado, en este caso Plano xy. Los límites de integración de la tercera integral se buscan en el sólido.

$$\int_0^4 dx \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz = \int_0^4 dx \int_0^1 z\Big|_0^{1-y} dy$$

$$\int_0^4 dx \int_0^1 1 - y\, dy = \int_0^4 y - \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 dy$$

$$\int_0^4 \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} x\Big|_0^4 = 2m^3$$

Ejercicios Propuestos:

1. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int (6x^2 + 8x + 3)dx$ i) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $\int \sqrt{x} dx$ j) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}}$

c) $\int cos3xdx$ k) $\int \frac{cos2x}{cos^2xsin^2x}dx$

d) $\int \frac{dx}{x^2}$ m) $\int (arcsinx + arccosx)dx$

e) $\int x + \frac{1}{x}dx$ n) $\int 3^x e^x dx$

f) $\int \frac{dx}{1+x^2}dx$

g) $\int 10^x dx$

h) $\int sec^2x\, dx$

2. Resolver las siguientes integrales teniendo en cuenta el método de integración correspondiente:

a) $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$ l) $\int \frac{dx}{x(x+1)}$

b) $\int \frac{cosx}{\sqrt[3]{sin^2x}}dx$ m) $\int x^2cos^2x\, dx$

c) $\int e^x sine^x\, dx$ n) $\int e^x sinxdx$

d) $\int \frac{sin(lnx)}{x}dx$ ñ) $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$

e) $\int xsin2xdx$ o) $\int \frac{4dx}{x^2(x+2)}$

f) $\int \frac{xdx}{(x+1)(2x-1)}$ p) $\int ln(x^2+1)dx$

g) $\int xe^{-x}dx$ q) $\int \frac{x+1}{(x^2+1)(x^2+3)}dx$

h) $\int \frac{x}{\sqrt{9-x^4}}dx$ r) $\int x^2lnxdx$

i) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$ s) $\int \frac{5x^2+6x+6}{(x-3)^2(x+1)^2}dx$

j) $\int \frac{ln^3x}{x^2}dx$ u) $\int \frac{sinx}{1-cosx}dx$

k) $z\int \frac{dx}{(x+1)(2x+3)}$ v) $\int \frac{x^2+2}{x+1}dx$

3. Calcule las integrales siguientes:

a) $\int_0^1 \sqrt{1+x}dx$ e) $\int_0^{2\pi} xsinxdx$

b) $\int_0^{\pi} sinxdx$ f) $\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

c) $\int_0^1 (e^x-1)e^x dx$ g) $\int_0^1 (x-1)e^{-x}dx$

d) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}dx$ h) $\int_{-1}^1 x^2\sqrt{4-x^2}dx$

4. Determine el área comprendida entre las siguientes curvas:

a) $y = x^2, y = 0, x = 2, x = 5$

b) $y = x^3, y = 0, x = 1, x = 3$

c) $y = 4x - x^2, y = 0, x = 1, x = 3$

d) $x = 1 + y^2, x = 10$

e) $x = 3y^2 - 9, x = 0, y = 0, y = 1$

f) $x = y^2 + 4y, x = 0$

g) $y = 9 - x^2, y = x + 3$

h) $y = 2 - x^2, y = -x$

i) $y = tanx, x = 0, x = {}^{\pi}/_{4}$

j) $y = x^2 - x, y = 8 - x^2$

k) $y^3 = x, y = 1, x = 8$

l) $y = x^3, y = 8, x = 0$

m) $y = x^2, 2y = x^2, y = 2x$

n) $y = sinx, y = cosx, x = 0, x = {}^{\pi}/_{4}$

5. Analice la convergencia de las integrales siguientes:

a) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ f) $\int_{-\infty}^{0} e^x dx$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)^{2/3}}$ g) $\int_0^{+\infty} x\, e^{-x} dx$

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^4)^2} dx$ h) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^5}$

d) $\int_0^1 \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$ i) $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$

e) $\int_0^{\pi/2} tanx\, dx$ j) $\int_1^{+\infty} lnx\, dx$

6. Calcule las siguientes integrales dobles:

a) $\int_0^2 \int_y^8 y^2\, dxdy$

b) $\int_0^3 \int_0^{\frac{x}{3}} e^{x^2}\, dydx$

c) $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} (x + x^3) dxdy$

d) $\int_0^1 \int_{x-1}^{2x} xy\, dydx$

e) $\int_2^4 \int_y^{8-y} y\, dxdy$

f) $\int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}} y\, dxdy$

g) $\int_0^1 \int_{x^3}^{x} (x^2y - 2xy)\, dydx$

h) $\int_{-2}^2 \int_{x^2}^{2-x} xy\, dydx$

i) $\int_0^1 \int_{-y}^{y^2} (x + y)\, dxdy$y

7. Calcule el área de las regiones planas siguientes:

a) $R = \{(x, y) \in \Re^2 : y = x^3, x = y^3\}$

b) $R = \{(x, y) \in \Re^2 : x^2 + y^2 = 9, x = 3y, x = 0\}$

c) $R = \{(x, y) \in \Re^2 : y = x, x^2 = -y + 2, x = -1\}$

d) $R = \{(x, y) \in \Re^2 : y = x + 1, x^2 - 1 = y\}$

e) $R = \{(x, y) \in \Re^2 : y = x^2, y = 2 - x^2\}$

f) $R = \{(x, y) \in \Re^2 : y = 1 - x^2, y = x^2 - 1, x = -1, x = 1\}$

g) $R = \{(x, y) \in \Re^2 : 0 \leq y \leq x^2, 0 \leq x \leq 6 - y\}$

h) $R = \{(x, y) \in \Re^2 : 0 \leq y \leq x^3, y \leq 1, 0 \leq x \leq 8\}$

i) $R = \{(x, y) \in \Re^2 : y^2 + 1 \leq x \leq 10\}$

j) $R = \{(x, y) \in \Re^2 : x + 3 \leq y \leq 9 - x^2\}$

k) $R = \{(x, y) \in \Re^2 : y^2 \leq x \leq 2 - y, y = 0\}$

l) $R = \left\{(x, y) \in \Re^2 : \sqrt{x} \leq y \leq 2 - x, x + y = 5\right\}$

m) $R = \{(x, y) \in \Re^2 : 2x \leq y \leq 5x, x + y = 6\}$

8. Determine el volumen del sólido de revolución generado por las siguientes funciones alrededor del eje indicado:

a) $R = \{(x, y) \in \Re^2 : 0 \leq y \leq x^3, 0 \leq x \leq 2\}$, eje x.

b) $R = \{(x, y) \in \Re^2 : y \leq 2x, y \leq 6 - x, 0 \leq y \leq 2\}$, eje x.

c) $R = \{(x, y) \in \Re^2 : y^2 \leq x \leq 8 - y^2\}$, eje y.

d) $R = \{(x, y) \in \Re^2 : 4x^2 + 9y^2 \leq 36\}$, eje x.

9. Un terreno limitado por las curvas $y = 3x, y = 8 - x, y = 0$. Se conoce que por cada metro cuadrado de terreno, se utiliza $0{,}3m^2$ de agua para regadío.

a) Halle el área del terreno.

b) ¿Cuántos m^3 de agua se necesitan para regar el terreno en su totalidad?

10. Un campesino posee una parcela cuyo contorno está formado de manera tal que responde a las siguientes ecuaciones: $x = x^2 - 2, y = -x$. Su objetivo es saber cuántas posturas de tabaco debe comprar para sembrar la parcela en su totalidad si conoce que por cada m^2 se necesita 20 posturas.

11. Calcular las integrales dobles siguientes:

a) $\iint_R (x - y)dxdy, si\ R = \{(x, y) \in I\Re^2 : 2x - 1 \leq 2 - x^2\}$

b) $\iint_R (x + y)dxdy, si\ R = \{(x, y) \in I\Re^2 : x \leq y \leq x^3, 1 \leq x \leq 3\}$

c) $\iint_R sin(x + y)\, dxdy, si\ R = \left[0; \frac{\pi}{2}\right] x \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

d) $\iint_R ye^{xy} dxdy, si\ R = [0; 1]\, x[0; 1]$

e) $\iint_S x\, dxdy$, donde S es el triángulo con vértices en los puntos: $A(0{,}0), B(1, -1), C(1{,}1)$.

12. Invierta el orden de integración en cada una de las siguientes integrales iteradas:

a) $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x, y)\, dy$

b) $\int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x, y)\, dx$

c) $\int_1^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2} f(x, y)\, dy$

d) $\int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx$

13. En la empresa agropecuaria “Valle del Yabú”, se destinó un terreno para la siembra de papa. Se conoce que para la reparación del mismo un agregado formado por un tractor YUMZ-6K y el arado ADI-3, para preparar cada hectárea (ha) de tierra se consume 30 litros (L) de combustible aproximadamente. Si es terreno está limitado por las siguientes curvas: $y = x, y = 3x, y = 9$. Determine qué cantidad de combustible se necesita para preparar el terreno en su totalidad.

14. Calcule las siguientes integrales triples:

a) $\int_0^1 dx \int_2^3 dy \int_1^3 dz$

b) $\int_0^2 dx \int_0^x dy \int_0^y xyz\, dz$

c) $\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi} d\delta \int_0^2 r^2 sin\,\delta\, dr$

15. Hallar el volumen de los siguientes sólidos:

a) $V = \{(x, y, z) \in \Re^3 : x + y + 2z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

b) $V = \{(x, y, z) \in \Re^3 : 0 \leq z \leq 2 - x - y, 0 \leq y \leq 1 - x^2, x \geq 0\}$

c) $V = \{(x, y, z) \in \Re^3 : 0 \leq x \leq 5 - y, 0 \leq z \leq 5 - x, y \geq 0\}$

d) $V = \{(x, y, z) \in \Re^3 : 1 \leq z \leq 2 - x^2, 1 \leq y \leq 2, x \geq 0\}$

e) $V = \{(x, y, z) \in \Re^3 : x^2 \leq z \leq 4, 0 \leq y \leq 1, x \geq 0\}$

f) $V = \{(x, y, z) \in \Re^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x, z \geq 0\}$

g) $V = \{(x, y, z) \in \Re^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z^2 \geq x^2 + y^2, x \geq 0, y \geq 0\}$

h) $V = \{(x, y, z) \in \Re^3 : x + y = 5, 0 \leq x \leq y, 0 \leq z \leq 2\}$

i) $V = \{(x, y, z) \in \Re^3 : 0 \leq z \leq x, 0 \leq y \leq 4, x + z = 3\}$

j) $V = \{(x, y, z) \in \Re^3 : 0 \leq z \leq 1 - x, x \leq y \leq 1, x \geq 0\}$

16. Calcular $\iiint_W xyz\, dxdydz$, si W es la región del espacio limitada por los planos $x = 0, y = 0, z == 0, x + y + z = 1$

17. Calcule $\iiint_W dxdydz$, si $W = \left\{ \begin{matrix} (x, y, z) \in IR^3 : 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 3, \\ 1 - y \leq z \leq y^2 \end{matrix} \right\}$

18. Determine $\iiint_W (x - y) dxdydz$, si $W = \left\{ \begin{matrix} (x, y, z) \in IR^3 : 1 \leq x \leq 3, \\ 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq x \end{matrix} \right\}$

19. Calcular $\iiint_T (x^2 + y^2)\, dxdydz$, si $T = \left\{ \begin{matrix} (x, y, z) \in \Re^3 : x^2 + y^2 \leq 4, \\ 0 \leq y \leq \sqrt{3}x, 1 \leq z \leq 2 \end{matrix} \right\}$

20. Calcule el volumen de la región del espacio limitada por las superficies:

a) $z = 4,\ x^2 + y^2 = 2x, z = 0$

b) $x + z = 2, x^2 + y^2 = 4, z = 0$

c) $z = 4 - x^2 - y^2, z = 0$

21. Calcule $\int_C (x + 2)y\, ds$, donde C es el tramo de recta $x = 2y - 2$ que une los puntos $A(2,2), y\ B(0,1)$.

22. Resuelve $\int_C x\, ds$, donde C es el tramo de curva $x = sint, y = 1 - cost$ entre los puntos $A(0,0)\ y\ B(1,1)$.

23. Calcular $\oint_C y^2\,dx + x^2 dy$ si C es el contorno del triángulo con vértices en $A(1,0), B(1,1), C(0,0)$.

24. Calcular $\int_{C(0,0)}^{(2,3)} (x+y)dx + y^2\,dy$ siendo $C: x^2 = \frac{4}{3}y$

25. Calcular $\int_{C(0,-1)}^{(0,1)} y^2 dx + x^2\,dy$ siendo C la curva cuyas ecuaciones paramétricas son $\begin{cases} x = cost \\ y = sint \end{cases}$.

26. Calcular $\int_{C(1,1)}^{(2,8)} 6x^2ydx + 10xy^2\,dy$ siendo C la ecuación vectorial $\vec{r}(t) = t\vec{\imath} + t^3\vec{\jmath}$.

27. Calcular $\int_C \vec{F}\,d\vec{r}$ siendo $\vec{F} = (x^2 - 2xy)\vec{\imath} + (y^2 - 2xy)\vec{\jmath}$, la ecuación vectorial de la curva es: $\vec{r}(t) = t\vec{\imath} + t^2\vec{\jmath}$ recorrida desde $A(-1,1), B(1,1)$.

28. Calcular $\int_{C\,(0,0)}^{(1,1)} 3x^2y\,dx + 2x\,dy$ siendo C la parábola semicúbica $y^2 = x^3$.

29. Calcular $\int_{C\,(0,-1)}^{(0,1)} y^2\,dx + x^2\,\,dy$ siendo C la curva cuyas ecuaciones paramétricas son: $\begin{cases} x = cost \\ y = sint \end{cases}$

30. Calcular $\int_{C\,(0,1)}^{(1,2)} (x^2 + 3xy)\,dx + (y - x^2)dy$ siendo C la curva cuya ecuación vectorial en $\vec{r}(t) = t\vec{\imath} + (t^2 + 1)\vec{\jmath}$.

31. Calcular el trabajo (W)realizado por el campo de fuerzas $\vec{F} = y\vec{\imath} + x\vec{\jmath}$ siendo $C \begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t^3 \end{cases}$ recorrido desde $t = 0$ hasta $t = 1$.

32. Determinar la longitud de la curva $C \begin{cases} x = 3\,cost \\ y = 3sint \end{cases}$ desde el punto $A(3,0)$ hasta el punto $B(0,3)$ de la misma.

33. Calcular $\oint 2x(y+1)dx + (x^2 + x)dy$ siendo $C: x^2 + y^2 = 1$.

34. Calcular la integral de línea comprendida entre la curva $y^2 = x^3$ y la recta $y = x$. Aplíquela consecuencia uno del Teorema de Green.

35. Aplicando la consecuencia tres del Teorema de Green calcule $\int_C \frac{-4x\,dx - y\,dy}{4x^2 + y^2}$ siendo $C: x^2 + y^2 = 1$ recorrida en sentido positivo desde $A(1,0)$ hasta $B(0,1)$.

CAPÍTULO 7 ECUACIONES DIFERENCIALES.

Las ecuaciones diferenciales son de gran importancia para la formación de un ingeniero de esta especialidad. Las mismas pueden ser aplicadas a problemas relacionados con las vibraciones amortiguadas, velocidad, aceleración, movimientos vibratorios, crecimientos de población, electricidad, etc. Para su correcta solución y aplicaciones de vital importancia conocer elementos del cálculo diferencial e integral.

***Números Complejos*.**

Valor absoluto: $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Ejemplos Resueltos:

I- *Si* $r = -2 + i, s = 4 - 7i, t = -2 - i$

a) $r + s = (-2 + i) + (4 - 7i) = 2 - 6i$

b) $r - s = (-2 + i) - (4 - 7i) = -6 + 8i$

c) $r + t = (-2 + i) + (-2 - i) = -4 + 0i = -4$

II- *Efectúe:*

a) $-4(7i) = -28i$

b) $3i(2) = (3.2)i = 6i$

c) $(3i)(7i) = (3.7)(i.i) = 21i^2 = 21(-1) = -21$

III- Calcule $\left|\frac{z}{v}\right|$ si $z = 2 - 11i, v = 1 + 2i$

$$\frac{z}{v} = \frac{(2 - 11i)}{(1 + 2i)} = \frac{(2 - 11i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{-20 - 15i}{1^2 + 2^2} = -4 - 3i$$

$$\left|\frac{z}{v}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

IV- *Resolver la ecuación:* $x^4 + 4x^2$

$x^4 + 4x^2 = 0$

$x^2(x^2 + 4) = 0$

$x_{1,2} = 0 \; x^2 + 4 = 0x^2 = -4 = 4i$

$x_{3,4} = \pm 2i$

Ejercicios Propuestos:

1- Hallar $z_1+z_2;\ z_1.z_2;\ z_1-z_2;\ \frac{z_1}{z_2};\ |z_1|;\ |z_2|$

a) $z_1=2+5i;\ z_2=1-7i$

b) $z_1=\sqrt{2}-\sqrt{3}i;\ z_2=\sqrt{2}+\sqrt{3}i$

2- Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $x^2+4x+5=0$

b) $x^2+2x+3=0$

c) $x^2+x+1=0$

d) $x^2+2x+2=0$

e) $x^3+x^2+2=0$

f) $x^3+3x^2+x+3=0$

g) $x^4+2x^2+1=0$

h) $(x^2+2x+4)(x^2+9)^2=0$

i) $x^3+4x^2+5x=0$

Ecuaciones Diferenciales

Ecuación diferencial de orden n: $F\left(x,y,y',\dots,y^{(n)}\right)=0$

ED de variables separables: $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$

ED exactas: $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ *es exacta si se cumple que:*

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

ED reducible a exacta: *la ED de la forma $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ puede ser reducible a exacta al ser multiplicada por un factor integrante que dependa solo de x o de y:*

$u(x)=e^{\int h(x)dx}$ *donde* $h(x)=\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{-Q}$

$u(y)=e^{\int g(y)dy}$ *donde* $g(y)=\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P}$

ED lineales de primer orden: $A_0(x)y'+A_1(x)y=F(x)$ *al dividir entre $A_0(x)\neq 0$ se obtiene la forma característica de la ED $y'+p(x)y=q(x)$ un factor integrante* *sería* $u(x) = e^{\int p(x)dx}$ *y la solución general de la ecuación será* $y = \frac{1}{u(x)}\int u(x)q(x)dx + \frac{C}{u(x)}$

También se puede resolver a través del método llamado *Variación de Parámetros* siendo la ecuación homogénea $q(x) \neq 0$.

$y = y_h + y_p$ donde:

$y_h = Ce^{-\int p(x)dx}, C \neq 0$, solución de la ecuación homogénea.

$y_p = C(x)e^{-\int p(x)dx}$, solución particular.

ED homogénea de segundo orden:$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1\frac{dy}{dx} + p_2y = 0$ su ecuación característica será $m^2 + p_1m + p_2 = 0$. Su solución dependerá de su ecuación característica, se tienen tres casos:

Caso 1: $m_1 \neq m_2 \rightarrow y = C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x}$

Caso 2: $m_1 = m_2 \rightarrow y = C_1e^{mx} + C_2xe^{mx}$

Caso 3: $m_1 = \alpha + \beta i\ ;\ m_2 = \alpha - \beta i \rightarrow y = e^{\alpha x}(C_1cos\beta x + C_2sin\beta x)$

ED de segundo orden no homogénea:$y'' + p_1y' + p_2y = f(x)$

Solución general de la ecuación: $y = y_h(x) + y_p(x)$

Se selecciona $y_p(x)$ teniendo en cuenta la forma de la función $f(x)$:

$$f(x) = ae^{mx} \rightarrow y_p = Ae^{mx}$$

$$f(x) = acos\,\omega x + b\sin\omega x \rightarrow y_p = Acos\,\omega x + Bsin\,\omega x$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \rightarrow y_p = Ax^2 + bx + C$$

Ejemplos Resueltos*:*

I. Se tiene un resorte suspendido verticalmente de un soporte fijo y cierto peso P colgando del resorte como se muestre en la figura página 35.

Cuando el peso P está en reposo, se dice que está en la posición de equilibrio. Si se tira del peso P hacia abajo cierta distancia x y después se deja libre, se produce un movimiento vibratorio que se describa a continuación.

La fuerza f que ejerce el resorte para llevar el peso a la posición de equilibrio es proporcional a la distancia x que existe entre el peso P y la posición de equilibrio, según la Ley de Hooke. Luego:

$f(x) = -kx$.

El signo indica que el desplazamiento tiene sentido contrario al desplazamiento.

Cuando el peso P se coloca en el resorte, se produce un desplazamiento s, de acuerdo con la ley de Hooke la tensión $T_1 = ks$.

Como el resorte y el peso están en equilibrio,

$T_1 = W = ks$.

Cuando se coloca el peso P a una distancia x hacia debajo de la posición de equilibrio, se produce un tensión T_2 en el resorte que, de acuerdo a la ley está dada por

$T_2 = k(s + x)$.

Si se tiene presente que las únicas fuerzas que intervienen en este movimiento son el peso W y la tensión T_2 la segunda ley de Newton asegura que:

$\left(\frac{W}{g}\right)\frac{d^2x}{dt^2} = W - T_2$, y como $W - T_2 = ks - ks - kx = -kx,$

Se obtiene, $\frac{W}{g}.\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$,

Este movimiento depende esencialmente de la posición $x(x_0)$ y de la velocidad $x^{'}(x_0)$ del peso en el movimiento inicial x_0. En este caso $x^{'}(x_0) = 0$.

II. La ecuación diferencial: $\frac{w}{g}.\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$, es la formulación matemática, mediante el uso de las leyes de Hooke y Newton, de los sistemas de masa-muelle. Se tiene experimentalmente que una masa de $6lb$ alarga un muelle de $6''$, y si además la masa se estira $4''$, determine la amplitud período y frecuencia del movimiento y, además, la posición, velocidad y aceleración del peso $0.5\,s$ después del desplazamiento que se realiza.

Solución:

Se sabe que $6'' = \frac{1}{2}\ pie$ y por la ley de Hooke $|f| = |Kx|$,

$6 = K.\frac{1}{2}$, de donde $K = 12$

La ecuación diferencial

$\frac{6}{32}\frac{d^2x}{dt^2} = -12x$ o $\frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 0$, describe el movimiento.

Las raíces de la ecuación característica correspondiente son: $\pm 8i$.

Así, la ecuación diferencial tiene por solución:

$X = A\ cos8t + B\ sin8t$.

Las condiciones del problema permiten encontrar la solución particular, ya que cuando $t = 0$, el peso está $4''$ debajo de la posición de equilibrio y se tiene $x = \frac{1}{3}\ pie$, por lo que $A = \frac{1}{3}$ y $x = \frac{1}{3}\cos 8t + B\sin 8t$, si se derive se obtiene:

$v = \frac{dx}{dt} = -\frac{8}{3}\sin 8t + B\cos 8t$ y como el peso está libre, es decir, tiene velocidad cero en $t = 0$;

$\frac{dx}{dt} = 0$ en $t = 0$, y entonces $B = 0$

Por consiguiente, la solución buscada es:

$x = \frac{1}{3}\cos 8t(x\ en\ pie)$, la cual determina la posición del peso en función del tiempo.

De aquí, se determina que la amplitud es $\frac{1}{3}\ pie$, la frecuencia f es $\frac{8}{2\pi} = \frac{4}{\pi}$ ciclos por segundo y el período $T\left(\frac{1}{f}\right)$ es $T = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}s$.

Para determinar la posición, velocidad y aceleración del peso $\frac{1}{2}\ s$ después que se deja libre se sustituye $t = \frac{1}{2}$ y $4\,radianes \approx 229\,grados$; aproximadamente se obtiene:

$$x = \frac{1}{3}(-0{,}656) = -0{,}219$$

$$V = -\frac{8}{3}(-0{,}755) = 2{,}01$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{64}{3}\cos 8t$$

$$a = -\frac{64}{3}(-0{,}656) = 14$$

***Ejercicios Propuestos**:*

1. Determine el orden y el grado (en caso de tenerlo) de las ecuaciones diferenciales siguientes:

a) $y^{´} = 3x^2y^5 + y^3$

b) $y^{´´} - 2x\left(y^{´}\right)^2 = y^2$

c) $\frac{d^3y}{dx^3} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$

d) $\frac{d^2s}{dt^2} - 7s^2 + \frac{ds}{dt} = 9t^3$

e) $xy^{´} + (y´´)^2 = 4$

f) $(y´´)^2 = 1 + (y´)^2$

g) $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = x$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales: VS

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}, x \neq 0$

b) $\frac{dy}{dx} = xy$

c) $\frac{dx}{y} + \frac{dy}{x} = 0, x \neq 0, y \neq 0, y = f(x)$

d) $\frac{dy}{dx} = xe^{-y^2}$

e) $x^3dx + \sin 3y\, dy = 0$

f) $(3x^3y + x^3)dx - xy\, dx = 0$

g) $y^2\, dx + x^3\, dy = 0$

h) $(x^2 + 1)\frac{dy}{dx} + y^2 + 1 = 0$

i) $xy\, dx - (x^2 + 2)dx = 0$

3. Halle la solución particular de la ecuación diferencial $(1 + e^x)y\frac{dy}{dx} = e^x$ que satisface la condición inicial $y(0) = 1$.

4. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales: EXTAS

a) $\frac{2xy+1}{y}dx + \frac{x-y}{y^2}dy = 0, y \neq 0$

b) $(3x^2 + 2y\, sin2x)dx + (2sin^2x + 3y^2)dy = 0$

c) $(3x^2y + 2xy)dx + (x^3 + x^2 + 2y)dy = 0$

d) $(3x + 2y^2)dx + 2xy\, dy = 0$

e) $(x^2 + y^2 + x)dx + xy\, dy = 0$

f) $(x + y^3 sin2y)dy - 2y\, dx = 0$

g) $(2x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$

h) $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$

i) $(2xy^4 + \sin y)dx + (4x^2y^3 + x \cos y)dy = 0$

j) $(3e^{3x} - 2x)dx + (e^{3y})dy = 0$

5. Pruebe que la función dada es un factor integrante de las ecuaciones diferenciales:

a) $(2x^3y - y^3)dx + (xy^2 - x^4)dy = 0, \mu = \frac{1}{x^2y^2}, xy \neq 0$

b) $(xy + x + 1)dx + (x - 1)dy = 0, \mu = e^x$

c) $y(x + y^3)dx + x(y^3 - x)dy = 0, \mu = \frac{1}{y^3}, y \neq 0$

6. Si la ecuación diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es homogénea, entonces $\frac{1}{xM+yN}$ es factor integrante. Haga uso de la expresión para resolver: $(y^2 - xy)dx + x^2\, dy = 0$

7. Resuelva la ecuación $tany\, dx + tanx\, dy = 0$ con el factor integrante: $cosx\, cosy$.

8. Halle una curva que pase por el punto $(2; 3)$ de modo que la pendiente de la tangente en cualquiera de sus puntos sea igual a la ordenada del punto disminuida en 2 unidades.

9. Encuentre la familia de curvas que tiene tangente en cada punto de cualquiera de ellas y tal que se forme un triángulo isósceles entre la recta tangente, y la línea que une el punto de tangencia con el origen y el eje de las x, se este forma la base. Ver figura página 97.

10. Resuelve las ecuaciones diferenciales homogéneas: COEF CTE

a) $(D^2 - 4D + 4)y = 0$

b) $16y'' - 8y' + 8 = 0$

c) $y'' - y = 0$

d) $y'' - 3y' + 2y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$

e) $(D^2 + 16)y = 0$

f) $y'' - 2y' - 8y = 0$

g) $y'' - 2y' + 2y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$

h) $y'' + y = 0$

11. Si las raíces de la ecuación característica $\emptyset(r) = 0$ correspondiente a la ecuación diferencial $L_4(y) = 0$ son: $0, 2, -5, -1$, halle la solución general.

12. Determine la solución general de la ecuación diferencial:

a) Si $D^2y - (m_1 + m_2)Dy + m_1 m_2\, y = 0$ si son constantes distintas de cero m_1y m_2 como $m_1 \neq m_2$, y satisfacen las condiciones iniciales $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

b) Si las raíces de la ecuación característica correspondiente a $L_6(y) = 0$ son: $1, -1, 0, 0, 5, 5$.

c) Si las raíces de la ecuación característica correspondiente $L_5(y) = 0$ son: $0, -1, -1, 2 \pm 3i$

13. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales no homogéneas:

a) $y'' + 4y' + 5y = x^2$

b) $y'' - 2y' + y = e^x$

c) $y'' + 2y' + y = 2\sin x$

d) $y'' - y = 3e^{2x}\, cosx$

e) $y'' + 4y = sin2x$

f) $y'' - 2y' + y = cosx$

g) $y'' + 4y = x^2 + cosx$

h) $y'' + 4y' + 3y = 9e^{-3x}$

i) $y'' + 4y' - 2y = 8\sin 2x$

j) $y'' - 6y' - 9 = x^2 - x + 3, y(0) = 4/3, y'(0) = 1/27$

k) $y'' + 4y = x^2 \sin 2x$

l) $y'' + 9y = 6e^{3x}, y(0) = y'(0) = 0$

m) $y'' - 2y' + 4y = e^x \sin x$

n) $y'' + y' + y = (x + x^2)e^x$

CAPÍTULO 8: SERIES.

Las series son de gran importancia pues ellas son capaces de describir determinados procesos mecánicos.

Series numéricas:

Definición

Sea la sucesión $\{a_n\}$. La expresión $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$, se denomina serie numérica y los números a_k, $k \geq 1$ se llaman términos de la serie, siendo a_n el término general de la serie.

Se denota; $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ (1)

Los números $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n$ (sumas finitas) se llaman sumas parciales de la serie. Las sumas parciales forman una sucesión $\{S_n\} = \sum_{k=1}^{n} a_k$

Series convergentes

Definición: **Se dice que la serie** (1) **es convergente si existe el límite de la sucesión de sus sumas parciales, o sea,** $\lim S_n = S$, $S \in R$. **Al número S se le llama suma de la serie y se denota también por**

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

De no existir el límite de las sumas parciales se dice que la serie es divergente.

<u>**Ejemplos**</u>

1. Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c = c + c + c + ... + c + ...$

   Entonces, $S_n = c + c + c + ... + c = nc$

n veces $\rightarrow$

$$\lim S_n = \lim cn = \begin{cases} 0, & \text{si } c = 0 \\ \infty, & \text{si } c \neq 0 \end{cases}$$

luego, la serie dada converge si c = 0 y su suma es cero, en caso contrario diverge.

2. Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$

$$S_1 = \frac{1}{1.2} = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$S_3 = \frac{3}{4}$$

$\vdots$

$S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ (demostrar esto por inducción)

Como lim $\frac{n}{n+1} = 1,$ la serie dada es convergente y tiene suma $S = 1$.

Serie geométrica

Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + a\,r + a\,r^2 + \ldots + a\,r^{n-1} + \ldots$, denominada serie geométrica de razón q y primer término a. Veamos cuando esta serie es convergente y cuando es divergente.

$$S_n = a + a\,r + a\,r^2 + \ldots + a\,r^{n-1} = a\,\frac{1-r^n}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{a\,r^n}{1-r}$$

1ro. Cuando $|r| < 1\ (-1 < r < 1)$, $r^n \to 0$ y la serie converge con suma $\dfrac{a}{1-r}$

2do. Cuando $|r| > 1\ (r > 1 \vee r < -1)$, $r^n \to \infty$ y la serie es divergente.

3ro. Si r = 1, se tiene la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a$ que solo converge cuando a = 0.

4to. Si r = -1, se tiene la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a = a - a + a - a + \ldots$

En este caso $S_n = \begin{cases} 0, & \text{si n es par} \\ a, & \text{si n es impar} \end{cases}$, la serie es divergente.

Ejemplos

1. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^{n-1}}$ es convergente y su suma es $S = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}$

2. Utilizando la serie geométrica, pruebe que la expresión decimal periódica $0.3\overline{14}$ representa un número racional. Se tiene,

$$0.3\overline{14} = \frac{3}{10} + \frac{14}{10^3} + \frac{14}{10^5} + \cdots = \frac{3}{10} + \frac{14}{10^3}\left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \cdots\right) = \frac{3}{10} + \frac{14}{10^3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10^2}\right)^{n-1} =$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{14}{10^3} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{1}{10^2}} = \frac{311}{999}$$

Serie Armónica

A la serie $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ se le llama Serie Armónica y es un ejemplo clásico de serie divergente.

Propiedades generales de las series numéricas

1. Si las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son convergentes, entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ es convergente y se cumple: $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

2. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y $c \in R$, entonces, es convergente $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ y se cumple $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

3. Las series $(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$

$$(2)\ \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_{k+i} = a_{k+1} + a_{k+2} + ... a_{k+n} + ...$$

tienen ambas el mismo carácter, es decir, convergen o divergen a la vez.

4. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ diverge.

5. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, si y solo si, $\lim r_k = 0$.

Condición necesaria de convergencia. (Criterio del término n-ésimo)

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces la sucesión $\{a_n\}$ es infinitesimal.

Es decir, Si $\lim a_n \neq 0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Observaciones importantes:

La propiedad anterior es necesaria pero no suficiente; es decir,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ es convergente} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0}$$

Por la contra recíproca,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ es divergente}}$$

Ejemplos

1. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1000n^2 + n + 1}$ es divergente, pues

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{1000n^2 + n + 1} = \frac{1}{1000} \neq 0$$

2. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$ es convergente como $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} = 0$ entonces no se puede asegurar nada sobre el carácter de la serie, sin embargo, observe que:

   $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$, como estas dos últimas series son geométricas de razón $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$, respectivamente, son convergentes, y por tanto, la serie dada converge.

Criterio de comparación: (Criterios de mayoración y minoración de Gauss)

Sean las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tales que $0 \le a_n \le b_n$, para todo $n \ge n_0$, entonces

a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

Ejemplo:

Investigue la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + \sqrt{n}}$

Tenemos, $\frac{1}{3^n + \sqrt{n}} \le \frac{1}{3^n}$, para todo n. Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ converge, la serie dada converge.

Corolario (Criterio de comparación por paso al límite)

Sean las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tales que $0 \le a_n$, $0 < b_n$, para todo $n \ge n_0$,

y $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ entonces,

a) Si $0 \le k < +\infty$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge.

b) Si $0 < k \le +\infty$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también diverge.

Ejemplo:

Analicemos la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{2n}\right)^n$

Como $a_n = \left(\frac{1+n}{2n}\right)^n = \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Tomando $b_n = \frac{1}{2^n}$ resulta $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\frac{1}{2^n}}$

=

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$. Por tanto, la serie dada converge porque la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$

converge.

Criterio de la Integral

Serie armónica generalizada

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, $p \in R$ recibe el nombre de serie armónica generalizada.

Si $p<1$, la serie armónica generalizada es divergente, pues de $n^p < n$, para todo n, resulta $\frac{1}{n} < \frac{1}{n^p}$.

Si $p>1$, la serie armónica generalizada es convergente.

En el caso de $p=1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ recibe el nombre de serie armónica y es divergente.

Ejemplo:

Son convergentes las series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ y $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}$

Son divergentes las series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{-2}}$ y $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

Criterio del cociente o de D'Alembert (J.D'Alembert

Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tal que $a_n > 0$, para todo n y $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$, $\ell \in R$ entonces

i) Si $\ell < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

ii) Si $\ell > 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

iii) Si $\ell = 1$, el criterio no decide.

Ejemplo:

Investiguemos la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1$$ la serie dada diverge.

Criterio de la raíz o de Cauchy

Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tale que $a_n \geq 0$, para todo n y $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$, $\ell \in R$ entonces

i) Si $\ell < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

ii) Si $\ell > 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

iii) Si $\ell = 1$, el criterio no decide.

Ejemplo:

Investiguemos la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Se tiene, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{e}{2} > 1,$ luego la serie dada diverge.

Nota: Tanto el criterio de la raíz como el del cociente, no son más que casos particulares de criterios de comparación. La utilidad práctica de estos criterios es que no se requiere el conocimiento explícito de una serie de comparación.

Ejercicios Propuestos Series numéricas:

1. Investigue la convergencia de las series siguientes, valiéndose del criterio de comparación (o el del término n-simo). Use como serie comparativa la geométrica, armónica y $\sum \frac{1}{n^p}$.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^2}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2-n+3}{n^3+2n}$

2. Investigue la convergencia de las series siguientes, valiéndose del criterio del cociente.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$

3. Investigue la convergencia de las series siguientes, valiéndose del criterio de la raíz.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^{n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$

4. Investigue la convergencia de las siguientes series alteradas. Si son convergentes, comparar si son absolutas o coincidentes.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{7/2}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{6\,n-5}$

c) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\ln n}{n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^{2}+2n+2}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2\,n+1}{n(n+1)}$

Series de funciones

Dentro de las series funcionales se distinguen las series de potencia y las series trigonométricas.

$$\{f_n(x)\} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad x \in \bigcap Dom\, f_i(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad \text{es convergente} \Leftrightarrow \quad \lim S_n(x) = S(x)$$

$$S_1(x) = f_1(x)$$
$$S_2(x) = f_1(x) + f_2(x)$$
$$\vdots$$
$$S_n(x) = \sum_{1}^{n} f_n(x)$$

En una serie funcional la convergencia siempre será uniforme

Serie de potencia

Una serie de potencias con centro en x=a es una serie de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

En el cual el centro es a, y los C_n son constantes llamadas coeficientes de la serie.

Para el centro la serie siempre converge

Una serie de potencias con centro en x=0 es una serie de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x)^n \qquad \textbf{(1)}$$

Ejemplos

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \cdots$$

$$1 + \frac{x-1}{1} + \frac{(x-1)^2}{2¡} + \frac{(x-1)^3}{3¡} + \cdots + \frac{(x-1)^n}{n¡} + \cdots$$

Definición

Se dice que una serie de potencias (1)es convergente

En x_1 , si y solo si $\sum_{n=1}^{\infty} C_n x_1^n$ converge

En el conjunto S , si y solo si (1) converge para cada x que pertenezca a S.

Al conjunto de valores de x para los cuales la serie **(1)** converge se llama dominio de convergencia de la serie de potencia.

A cada valor x del dominio de convergencia de una serie de potencia está asociado un número real, que es la suma de la serie numérica correspondiente. Por ello podemos considerar esta correspondencia como un función que llamaremos función suma, definida en el dominio de convergencia de la serie de potencia y que denotaremos por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n$$

La serie de potencia (1) representa a la función f en el dominio de convergencia de la serie y a esta se le denomina desarrollo de la función f en serie de potencia.

Intervalo de convergencia

Nos interesa primeramente determinar el dominio de convergencia de una serie de potencias.

Es evidente que la serie (1) converge para x = 0, pero existen otros valores de x para los cuales la serie también converge ¿Cuáles son y como se determinan?

Para dar respuesta a esto veremos el estudio de dos importantes teoremas

Teorema

Si una serie de potencias converge para un valor x_1 $(x_1 \neq 0)$ entonces la serie converge absolutamente para $\forall x : \ |x| < |x_1|$

Idea de la demostración

Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n$ converge para

$$x_1 \Rightarrow lim\, C_n x_1^n = 0 \Rightarrow \exists n_0 \in N : \forall n \geq n_0 \ |C_n x_1^n| < 1$$

Considerando a $|x| < |x_1|$ $\displaystyle |C_n x^n| = \left| C_n x_1^n \frac{x^n}{x_1^n} \right| < \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$

Ejemplos:

La serie geométrica

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ Es una serie de potencias absolutamente convergente si | *x* | < 1 y divergente si | *x* | > 1 ó | *x* | = 1

- La serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} (x/n)^n$ es absolutamente convergente para todo $x \in \mathbb{R}$
- La serie de potencias $\sum_{n=3}^{\infty} (xn)^n$ solamente converge para *x* = 0

Los tres casos posibles para el radio de convergencia de una serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$

Determinación del radio de convergencia de una serie

Para muchas series de potencia su radio de convergencia puede ser determinado aplicando el criterio de D'Alembert o el criterio de la raíz de Cauchy.

Sea la serie $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_n x^n + \cdots$

Siendo $C_n \neq 0 \;\; \forall n$ y cuya serie de los módulos es

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n = |C_0| + |C_1 x| + |C_2 x^2| + \cdots + |C_n x^n| + \cdots$$

Si el limite $\lim \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right| = L$ entonces $R = \frac{1}{L} = \lim_{n} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right|$ **(2.1)**

Para el caso en sea tal que el limite $\lim\limits_{n} \sqrt[n]{|C_n|} = L$ existe entonces el radio de convergencia de dicha serie aplicándole criterio de la raíz se obtiene de la forma $R = \frac{1}{L} = \frac{1}{\lim\limits_{n} \sqrt[n]{|C_n|}}$ **(2.2)**

Si el límite no existe no pueden aplicarse las fórmulas obtenidas

Ejemplos

1) El radio de convergencia de la serie se puede determinar $\sum\limits_{n} \frac{1}{n^2} x^n$ aplicando la formula **(2.1)**

$R = \frac{1}{L} = \lim\limits_{n} \left| \frac{n^2}{(n+1)^2} \right| = 1$ El intervalo de convergencia es]-1, 1 [

Para determinar el dominio de convergencia es necesario analizar las serie que se obtienen para los casos de x = 1 y x = -1

Para x = 1 se obtiene le serie $\sum\limits_{n} \frac{1}{n^2}$ que es convergente

Para x = -1 se obtiene le serie $\sum\limits_{n} \frac{(-1)^n}{n^2}$ que es absolutamente convergente

Por tanto el dominio de convergencia es [-1, 1]

Ejemplo

Sobre la derivabilidad de las funciones definidas por SP

Dada la serie de potencia

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_n x^n + \cdots \qquad \textbf{(1)}$$

Se llama serie derivada a aquella serie que se obtiene derivando término a término la serie derivada la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} n C_n x^{n-1} = C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \cdots + n C_n x^{n-1} + \cdots$$

La serie de potencia y su serie derivada tienen el mismo radio de convergencia.

En los extremos del intervalo ambas series pueden tener distinto comportamiento. Por ejemplo la serie $\sum_n \frac{x^n}{n^2}$ converge en el intervalo [-1, 1] y su serie derivada $\sum_n \frac{x^{n-1}}{n}$ converge en el intervalo [-1, 1[.

Sobre la integrabilidad de las funciones definidas por SP

Si f (x) es la función suma de la serie de potencias $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n$ para]-R, R[, entonces la función f es integrable en cada subintervalo cerrado de]-R, R[y su integral se puede calcular integrando término a término la serie de potencia .En particular para cada x del intervalo]-R, R[se tiene

$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{n+1} x^{n+1}$ la serie obtenida el mismo radio de convergencia que la serie original.

¿Qué propiedades debe tener una función f (x) para que exista una serie de potencias que la represente? ¿Cómo hallar esa serie si existe?

Tal función si existe debe tener derivadas de todos los órdenes en un intervalo abierto con centro en el centro de desarrollo de la serie.

Sea f (x) una función con estas características en un intervalo cerrado en x = a y formemos la serie, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ donde $C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ $n = 0, 1, 2, \cdots$ entonces

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^a = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a) + \cdots$ se denomina la serie de Taylor generada por f en a o en potencias de (x-a).En particular

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^{a}=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^{2}+\cdots$$ se denomina la serie de Maclaurin generada por f .

Del Análisis Matemático recordemos la fórmula de Taylor con resto la cual establece que si una función f (x tiene derivadas hasta el orden n+1 en un intervalo abierto centrado en a entonces

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k}+R_{n}(x)$$ donde R_n (x) es el error que se comete al aproximar F por su polinomio de Taylor y se denomina término del error .

El resto en forma de Logrange

$$R_{n}(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$, donde a< c < x, c$\in$ R

Ejercicios propuestos:

1. Determine el intervalo de convergencia de las series de potencias dadas. Si el intervalo es finito, estudie el comportamiento en los extremos del intervalo.

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{(x+1)2^n}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(x-2)^n}{3^n(n+1)}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n!}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n\,9^n}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n-1}}{2n\,4^n}$

2. Encuentre la serie de Taylor engendrada por las siguientes funciones:

a) $\frac{1}{x}$, alrededor de $x_0=1$

b) $\sqrt{x}$, alrededor de $x_0 = 4$

Serie de Fourier

En el tratamiento de las series trigonométricas es importante el concepto de funciones pares e impares, funciones periódicas y funciones seccionalmente continuas.

Funciones pares e impares

Una función es par: si f (x) = f (-x) para todo x en (-a, a)

Una función es impar: si f (x) = - f (-x) para todo x en (-a, a).

Algunas propiedades importantes de estas funciones:

- El producto de dos funciones pares es una función par.
- El producto de dos funciones impares es una función par.
- El producto de una función par por un impar es una función impar.
- Par una función par la $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$
- Para una función impar la $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Funciones periódicas y seccionalmente continuas.

Una función $f(x)$ se dice que es *periódica* con período $T \neq 0$, si $f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in Dom \ f(x)$.

Ejemplos:

- $f(x) = k\,; \qquad T \neq 0$
- $f(x) = Sen(x)\,; \qquad T = 2\pi$

- $$f(x)=\begin{cases} 2 \text{ para } & 0<x\le\pi \\ \\ -1 \text{ " } & -\pi<x\le 0 \end{cases} \quad ;T=2\pi$$

Función seccionalmente continua

Una función f (x) se dice que es *seccionalmente continua* en el intervalo

[a ; b], si f (x) es continua en todo punto del intervalo con la excepción de un número finito de puntos en los cuales tiene discontinuidades finitas.

Series trigonométricas

Una *serie trigonométrica* es una serie de la forma:

$$\frac{a_0}{2}+a_1Cos(x)+b_1Sen(x)+a_2Cos(2x)+b_2Sen(2x)+...=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_nCos\,(nx)+b_nSen\,(nx)\right)$$

donde a_0, a_n, b_n para $n=1,\ 2,\ 3,...,$ son números reales, llamados *coeficientes de la serie trigonométrica.*

Ejemplos de serie trigonométricas

$$1.\sum_{1}^{\infty}\frac{sen\left(2n-1\right)x}{2n-1} \qquad 2.\ \sum_{1}^{\infty}\frac{cos\ nx}{n^2}$$

Supongamos una función $f(x)$, seccionalmente continua en el [-π,π] y periódica con período 2π.

La serie trigonométrica donde:

$$\frac{a_o}{2} = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,d\,x\right) \quad (1)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\,nx\,d\,x\right) \quad (2) \text{ para } n = 1,\ 2,\ 3,\ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,sen\,n\,x\,d\,x\right) \quad (3) \text{ para } n = 1,\ 2,\ 3,\ldots,$$

se denomina *serie trigonométrica de Fourier* de la función $f(x)$ o simplemente *serie de Fourier* de la función $f(x)$ y a los coeficientes determinados por las fórmulas (1) - (3) *coeficientes de Fourier* de la función $f(x)$.

Ejemplo:

Sea la función $f(x) = \begin{cases} -2 \text{ para } -\pi < x < 0 \\ \ 1 \quad \text{"} \qquad 0 < x < \pi \end{cases}$ periódica con período t = 2 π.

Esta función es seccionalmente continua en el intervalo [- π, π], ya que solo presenta discontinuidades finitas en los puntos x = - π , x = 0 y x = π , además es periódica con período T = 2π.

Los coeficientes de Fourier de la función f (x) serán:

$$\frac{a_o}{2} = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{o}(-2)dx + \int_{o}^{\pi} dx\right] = -1/2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-2)\cos nx dx + \int_{0}^{\pi}(1)\cos nx dx\right] =$$

$$= \frac{1}{n\,\pi}\left[-2 sen n\pi + sen n\pi\right] = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-2) sen nx dx + \int_{0}^{\pi}(1) sen nx dx\right] =$$

$$= \frac{3}{n\pi}\left[1-\cos n\pi\right] = \frac{3}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]$$

Entonces, la serie de Fourier engendrada por f (x) es:

$$f(x) \sim -1/2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\left[1-(-1)^n\right] sen nx}{n\pi} =$$

$$= -1/2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6 sen (2n-1)\, x}{(2n-1)\,\pi}$$

ya que

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n \text{ par} \\ \dfrac{6}{n\pi}\ \text{"} & n \text{ impar} \end{cases}$$

Ejemplo:

Sea f (x) periódica con período 2π definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -\pi & \text{para } -\pi < x < 0 \\ x & \text{"} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

Como esta función es seccionalmente continua en el intervalo [-π,π] y periódica de período 2π, engendra una serie de Fourier dada por

$$\frac{a_0}{2} = -\frac{\pi}{4} \qquad á_n = \frac{\left[(-1)^n - 1\right]}{\pi n^2} \qquad b_n = \frac{\left[1 - 2(-1)^n\right]}{n}$$ para n = 1, 2, ...

Como f (x) es seccionalmente continua en el intervalo [-π,π], periódica de período 2π y f ' (x) es seccionalmente continua en el intervalo [-π,π], entonces en todos los puntos de continuidad de la función se tendrá que:

$$f(x) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \{ \frac{1}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right]\cos nx + \frac{1}{n}\left[1 - 2(-1)^n\right] sen\, nx \}$$

En los puntos de discontinuidad x = 0 y x = π ,

$$\frac{1}{2}\left[f(0^+) + f(0^-)\right] = -\frac{\pi}{2} \qquad , \frac{1}{2}\left[f(\pi^+) + f(\pi^-)\right] = 0$$

Desarrollo Trigonométrico de Fourier para funciones pares e impares.

Teorema

Sea f (x) una función seccionalmente continua en el intervalo (-π,π) y periódica con período 2π

a) si f (x) es una función par en ese intervalo, entonces:

$$f(x) \sim \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$ con

$$\frac{a_o}{2} = \frac{1}{\pi}\left[\int_o^{\pi} f(x)\, dx\right]$$ y

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\int_o^{\pi} f(x) \cos nx\, dx\right]$$, n = 1, 2, 3, ...

b) si f (x) es una función impar en ese intervalo, entonces:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx$$ con

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\int_o^{\pi} f(x)\, s\,e\,n\; n\,x\; d\,x\right],$$ n = 1, 2, 3, ...

Ejemplo:

Consideremos la función f (x) = / x / para - π< x ≤π y periódica con período 2π (función par). Entonces engendra una serie de Fourier en cosenos solamente:

$$\frac{a_o}{2} = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} /x/\,dx\right] = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi} /x/ \cos n\,x dx\right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos n\,\pi}{n^2} + \left(\frac{\pi\; s\,e\,n\; n\,\pi}{n}\right) - \frac{1}{n^2}\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi\, n^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0 & \text{para } n \text{ par} \\ -\dfrac{4}{\pi\, n^2} & \text{"}\quad n \text{ impar} \end{cases} ,$$

Entonces, la serie de Fourier engendrada por la función es:

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\left[(-1)^n - 1\right]\cos nx}{n^2\pi}$$

Como la función y su derivada cumplen con las condiciones de Dirichlet en [-π , π], la serie de Fourier converge hacia la función para todo valor de x, es decir:

$$/x/ = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\,x}{(2n-1)^2}\right]$$

Cambio de Período

Propiedad de las funciones periódicas:

Si la función f (u) es seccionalmente continua en cualquier intervalo finito y tiene período T, es decir,

si f (u+T) = f (u) , entonces el valor de la integral $\int_{c}^{c+T} f(u)du$ no depende de c, siendo c $\in \Re$, es decir $\int_{c}^{c+T} f(u)du = \int_{0}^{T} f(u)du$

Entonces, en una serie de Fourier engendrada por una función periódica de período 2π , se tiene que:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{0}^{2\pi} f(x)dx\right] \; ; \; a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{2\pi} f(x)\cos nx dx\right] \; ; \; b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{2\pi} f(x) sennxdx\right]$$

Supongamos una función f (x) seccionalmente continua en [c , c + T] y periódica con período T > 0, haciendo x = Tt / 2π , se puede demostrar que la serie de Fourier que genera esta función es:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\,\omega\, x + b_n senn\omega\, x\right)$$, siendo $\omega = \frac{2\,\pi}{T}$ y

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\left[\int_{c}^{c+T} f(x)dx\right] \; ; \; a_n = \frac{2}{T}\left[\int_{c}^{c+T} f\;(x)\cos n\omega\, x\, d\;x\right] \; ;$$

$$b_n = \frac{2}{T}\left[\int_{c}^{c+T} f(x) senn\omega x dx\right]$$

- Si f (x) es una función par, entonces:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\omega\, x\right)$$, donde $\omega = \frac{2\,\pi}{T}$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{2}{T}\left[\int_0^{T/2} f(x)dx\right] \; ; \; a_n = \frac{4}{T}\left[\int_0^{T/2} f(x)\cos n\,\omega\, x\, d\, x\right]$$, n = 1, 2, 3, ...

- Si f (x) es una función impar, entonces:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen n\omega x$$ **, donde** $b_n = \frac{4}{T}\left[\int_0^{T/2} f(x)\, sen\, n\omega\, x\, d\, x\right]$ **, n = 1, 2, 3, ...**

Ejemplo:

Sea la función f (x) = x en (-1, 1) y periódica con período T = 2 .

Como f (x) es una función impar, se tiene que :

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \; sen\, n\, \omega\, x$$, como $\omega = \frac{2\,\pi}{T}$ y T = 2 , se tiene que:

$$b_n = 2\int_0^1 x\, sen\, n\, \pi\, x\, d\, x = 2\left[\left(\frac{sen\, n\pi\, x}{(n\pi)^2}\right) - \left(\frac{x\cos n\pi\; x}{n\pi}\right)\right]$$

Como sen nπ = 0 y cos nπ = (-1)^n para n = 1, 2, 3, ... , concluimos que:

$$b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$$ y, por tanto,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1} s\; e\; n\; (n\;\pi\; x)}{n\pi} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\; s\; e\; n\; (n\;\pi\; x)}{n}$$

Como la función y su derivada cumplen las condiciones de Dirichlet en el intervalo [-1, 1], en los puntos de continuidad de la función:

$$x = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} s\; e\; n\; (n\;\pi\; x)$$

En los puntos de discontinuidad de f (x), es decir, en los puntos

$x_o = 1 \pm 2K$, K = 1, 2, 3, ..., tendremos que la serie converge a:

$$\frac{1}{2}\left[f\left(1^{+}\right)+f\left(1^{-}\right)\right]=\frac{1-1}{2}=0$$

Desarrollo Trigonométrico de Fourier de funciones no Periódica.

Extensión periódica de una función:

Sea f (x) una función seccionalmente continua en (a , b). Llamaremos extensión periódica de f (x) con período T = (b -a) a la función f_p (x) , definida por:

f_p (x) = f (x) para a < x < b y tal que

f_p (x + KT) = f_p (x) para todo x , donde K es un entero cualquiera, positivo o negativo.

Consideremos una extensión tal que la función sea periódica con período igual a la amplitud de su intervalo de definición.

Ejemplo

Sea la función $f(x)=\begin{cases} 3 \text{ si } & -1<x<0 \\ x \text{ si } & 0<x<1 \end{cases}$

Esta función es seccionalmente continua en [-1,1].Consideremos la extensión periódica de f (x) con período T = 2 , es decir, f_p (x) = f (x) para -1 < x < 1

Entonces f_p (x) engendra una serie de Fourier:

$$f_p(x) \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\omega x+b_n sen n\omega x\right)$$, con $\omega = \pi$.

Como

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\left[\int_{c}^{c+T} f_p(x)dx\right]$$, haciendo c = -1, tenemos:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{1} f_p(x)dx\right] = \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{0} f_p(x)dx + \int_{0}^{1} f_p(x)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{0} 3dx + \int_{0}^{1} xdx\right] = 7/4$$

$$a_n = \frac{2}{T}\left[\int_{c}^{c+T} f(x)\cos n\omega\, x\, d\, x\right]$$

Como $\omega = \pi$, T = 2 y c = - 1 , c + T = 1

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi\, x\, d\, x = \int_{-1}^{0} 3\cos n\pi\, x\, d\, x + \int_{0}^{1} x\cos n\pi\, x\, d\, x$$

$$a_n = \frac{(-1)^n - 1}{(n\pi)^2}$$ n = 1, 2, 3, ...

De forma análoga, $b_n = (-1)^n\left[3 - \frac{4}{n\pi}\right]$ n = 1, 2, 3, ...

Como la función f_p (x) y su derivada cumplen las condiciones de Dirichlet en [-1,1], en todos los puntos de continuidad de f_p (x) se tiene que:

$$f_p(x) = \frac{7}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(n\pi)^2}\left[(-1)^n - 1\right]\cos\, n\,\pi\, x + (-1)^n\left[3 - \frac{4}{n\pi}\right]\operatorname{sen} n\pi\, x\right\}$$

Los puntos de discontinuidad de f_p (x) son $x_o = 1 \pm 2K$ y $x_o = 0 \pm 2K$, en ellos la serie converge respectivamente a:

$$\frac{1}{2}\left[f_p\left(1^+\right) + f_p\left(1^-\right)\right] = \frac{3+1}{2} = 2 \qquad \frac{1}{2}\left[f_p\left(0^+\right) + f_p\left(0^-\right)\right] = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}$$

¿Cómo determinar el desarrollo trigonométrico de Fourier para una función no periódica, suponiendo que el período de la serie sea mayor que la amplitud del intervalo de definición de la función que se quiere desarrollar?

Prolongación de una función

Sean A y B dos conjuntos de números reales, siendo A $\subset$ B y sea f (x) una función real definida sobre A. Una función real F (x) definida sobre B se dice que es una prolongación de f (x) al conjunto B si para todo x de A, se tiene que f (x) = F (x) .

Ejemplos:

1- Sea f (x) = 1 para x $\in$ [0,2].

La función $F(x)=\begin{cases}1 & \text{para } 0\le x\le 2\\ x & \text{"}\quad 2<x\le 3\end{cases}$ es una prolongación de f (x) al intervalo [0,3].

2- Sea f (x) = x + 1 para (0,1), si queremos prolongar la función al intervalo (-1, 1), de forma tal que la función prolongada sea una función par, basta definir a F (x) como:

Para determinar el desarrollo de Fourier de una función seccionalmente continua en el intervalo [a,b] pero de forma tal que el período del desarrollo sea T > (b-a) debemos realizar sobre f (x) una prolongación de tal manera que la función prolongada, F (x) coincida con f (x) en el intervalo [a,b] y que, además su intervalo de definición tenga una amplitud igual al período que se desea.

$$F(x)=\begin{cases}x+1 & \text{para}\quad 0<x<1\\ -x+1 & \text{"}\quad -1<x\le 0\end{cases}$$

Ejemplo: Dada la función f (x) = x para 1 < x < 2, obtener el desarrollo de Fourier con período T = 2.

Sea $F(x)=\begin{cases}x & \text{para}\quad 1<x<2\\ 0 & \text{"}\quad 2<x<3\end{cases}$.

Considerando la extensión periódica de F (x) con T = 2, es decir,

Fp (x) = F (x) para 1 < x < 3, tendremos que Fp (x) engendra la serie de Fourier:

$$F_p(x)=\frac{3}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(n\pi)^2}\left[1-(-1)^n\right]\cos n\pi x+\frac{1}{n\pi}\left[(-1)^n-2\right]sen\, n\pi x\right\}$$

3. Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases}1 & -\pi<x<0\\ x & 0\le x\le\pi\end{cases}$$

a) Dibuje la función
b) Verifique que cumple las condiciones de Dirichlet
c) Dibuje el gráfico de $f_A(x)$ con período 2π.
d) Obtenga el desarrollo trigonométrico de Fourier de $f(x)$ con período 2π.

Ejercicios propuestos

1. Si una serie es convergente y otra es divergente, probar que la suma de ambas, es divergente.

2. Ponga ejemplos de series numéricas tales que una con término n-simo a_n sea divergente y la correspondiente con a_n^2 es convergente.

3. Si $u_n \rangle 0$ para todo n y $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge, dar ejemplos donde las siguientes series sean divergentes:
   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_n}$
   b) $\sum_{n=1}^{\infty} n.u_n$

4. Si $u_n \rangle 0$, $u_n \neq 1$ para todo *n* y $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge, probar que las siguientes series convergen
   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{1+u_n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{1-u_n}$

5. Analizar la nturaleza de las siguientes series:
   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}\right)$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n.sen\left(\frac{1}{n}\right)$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n^2+1}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} senn$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n+1}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

6. Desde una altura de a metros se deja caer una pelota sobre un piso horizontal, cada vez que la pelota choca contra el suelo desde una altura *h*, rebota hasta alcanzar la altura *rh* donde r es un número positivo menor que 1. Hallar la distancia total recorrida por la pelota.

7. Cuántos términos del desarrollo de Taylor alrededor de $x = \frac{\pi}{6}$ deben ser usados para calcular $senx28^0$ con 5 cifras decimales exactas?

8. Cuál es el desarrollo de Fourier de la función periódica cuya definición en un período viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad -\pi < x < 0 \\ 3 & si \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

9. Para las funciones siguientes obtenga los tres primeros términos de los desarrollos posibles. En caso de usar Fourier hallar el más simple:

a) $f(x) = sen2x$

b) $f(x) = \begin{cases} x & si \quad 0 < x < 2 \\ 0 & si \quad 2 < x < 3 \end{cases}$

BIBLIOGRAFÍA

1. Alfredo Castillo Serpa y col, 1986, Series Tomo I, Editorial Pueblo y Educación, La Habana, Cuba, pp. 279.
2. B. A.Kordemski y col, 1976, Problemas y ejercicios de análisis matemático, pp.265.
3. Colectivo de autores, 1988, Matemática Superior II para la especialidad de Agronomía, Editorial ENPES, La Habana, Cuba, pp. 310.
4. Eugenio Carlos Rodríguez y col 1986, Integrales Múltiples, Editorial Pueblo y Educación, La Habana, Cuba, pp. 545.
5. James Stewart 2006, Calculo con Trascendentes Tempranas Parte 1, Editorial Félix Varela, La Habana, Cuba, pp. 3-275.
6. James Stewart 2006, Calculo con Trascendentes Tempranas Parte 2, Editorial Félix Varela, La Habana, Cuba, pp. 276-579.
7. James Stewart 2006, Calculo con Trascendentes Tempranas Parte 3, Editorial Félix Varela, La Habana, Cuba, pp. 578-965.
8. James Stewart 2006, Calculo con Trascendentes Tempranas Parte 4, Editorial Félix Varela, La Habana, Cuba, pp. 966-1151.
9. José Calderón García y col 1987, Complementos de Geometría Analítica, Editorial Pueblo y Educación, La Habana Cuba, pp.368.
10. María Sofía Claro y cola, Matemática Superior, Editorial Pueblo y Educación, La Habana, Cuba, pp. 552.
11. María Virginia Varela Marcelo y col 1986, Algebra lineal, Editorial Pueblo y Educación, La Habana Cuba, pp. 487.
12. Pérsida Leyva Machín, y col, 1987, Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones, Editorial Pueblo y Educación, La Habana, Cuba, pp. 230.
13. Rita Roldan Inguanzo y Yolanda Hernández 2007, Matemática I para especialidades de la Ciencias Naturales I y II parte, Editorial Félix Varela, La Habana, Cuba, pp. 295.
14. Rita Roldan Inguanzo, Yolanda Hernández y Blanca A. Armesto Artíles 2007, Matemática I para especialidades de la Ciencias Naturales, Editorial Félix Varela, La Habana, Cuba, pp. 185.