UNIVERSIDAD CENTRAL "MARTA ABREU" DE LAS VILLAS

VERITATE SOLA NOVIS INPONETUR VIRILISTOGA, 1948

FACULTAD DE MATEMÁTICA, FÍSICA Y COMPUTACIÓN

TRABAJO DE DIPLOMA

Análisis cualitativo de métricas tipo Kantowski-Sachs en una clase genérica de modelos *f(R)*

Autor: Armando A. Roque Estrada

Tutores
Dr.C. Genly León Torres
Ms.C. Carlos Rodríguez Fadragas

Santa Clara, Cuba

2012

“La hora pasa,
la pena se olvida,
mas la obra queda.”
Viktor Frankl

Agradecimientos

“Cuando bebas agua,
recuerda la fuente.”
Proverbio chino

Mis más sinceros agradecimientos a mis tutores Genly León Torres y Carlos Rodríguez Fadragas por haberme exigido siempre el máximo en esta investigación, por su paciencia y apoyo en estos largos meses de trabajo, además de sus contribuciones en la confección de esta tesis, de ellos aprendí que las grandes metas solo se logran con sacrificio y entrega. También quiero agradecer a los colegas Dagoberto Escobar Atiénzar y Yoelsy Leiva Nodal cuyos consejos fueron de gran ayuda en el esclarecimiento de algunas inquietudes que surgieron en el transcurso de la investigación. A los colegas del grupo de ” Ciencia Planetaria ” de la Universidad Central de las Villas por el apoyo brindado en esta última etapa de trabajo.

Mi agradecimiento más profundo a mis padres Luisa y Andrés por todos los sacrificios realizados en estos cinco años de carrera, a mis hermanas Elismary y Eliza, quienes me apoyaron en toda esta etapa, a mi novia Adis por su paciencia en este año de intensos estudios, a mis abuelos cuyos consejos me han guiados en la vida. Sin todos ustedes, mi familia, el eje de mi vida, no hubiera podido alcanzar esta meta, la primera de muchas otras.

Por último y no menos importante mi agradecimiento a Ignacio, a mi tía Miriam y a mi prima Yaneisy. A todos aquellos que contribuyeron de una forma u otra a que esta tesis fuera posible.

¡¡¡ Gracias a todos !!!, este trabajo es también fruto de ustedes.

A mis padres y hermanas,
a mi novia Adis,
y a toda mi familia.

por su gran apoyo en esta etapa de mi vida.

SÍNTESIS

En esta tesis se investigan modelos del universo basados en métricas de tipo Kantowski-Sachs (KS) en una clase genérica de modelos *f(R)*. Para investigar dichos modelos se definen las funciones $m = \frac{Rf''(R)}{f'(R)} = \frac{d\ln f'(R)}{d\ln R}$, $r = -\frac{Rf'(R)}{f(R)} = -\frac{d\ln f(R)}{d\ln(R)}$ y $M(r) = \frac{r(1+r+m)}{m}$, y se utiliza un procedimiento similar al reportado en la literatura para métricas Friedmann-Robertson-Walker (FRW). Extendiéndose dicho procedimiento para métricas KS y determinándose regiones en el espacio $(\gamma, r, M'(r))$ en las cuales se tienen fases de dominio de materia (regiones V-VII) y fases de expansión acelerada (regiones I-IV). Una teoría *f(R)* con una curva $M(r)$ que conecte una región con dominio de materia precedente a una fase de expansión acelerada en el plano $(r, M'(r))$ se considerará viable cosmológicamente. Estos resultados son equivalentes a los presentados para métrica FRW. En esta tesis se extienden los resultados reportados en la literatura para modelos *f(R)* $= R + \alpha R^2$ con métricas FRW para métricas KS y los resultados reportados en la literatura para métricas KS en teorías R^n a marcos *f(R)* genéricos. Por último se diseñó una metodología para la reconstrucción de la función *f(R)* a partir de la función de entrada $m(r)$. Dicha función debe satisfacer un grupo de requisitos desde el punto de vista físico-matemático que se imponen para obtener funciones *f(R)* reconstruidas que provean un cuadro físico coherente y representen atractores de futuro isótropos en expansión acelerada precedidos de una etapa transiente de dominio de materia.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

"La ciencia será siempre una búsqueda, jamás un descubrimiento real.
Es un viaje, nunca una llegada."
Karl R. Popper

Las recientes observaciones astrofísicas (incluyendo mediciones de distancia-luminosidad de supernovas, de aglomeraciones de galaxias y del fondo cósmico de microondas) plantean que el universo observable es homogéneo e isotrópo a grandes escalas y que este está expandiéndose aceleradamente [1, 2]. Esto ha llevado a que la gran mayoría de los trabajos en cosmología se enfoquen en métricas homogéneas e isótropas. La explicación de estas características junto con el problema del Horizonte, fue la principal razón para la construcción del paradigma inflacionario [3, 4, 5]. Aunque el último aspecto ha sido bien explicado, el problema de la homogeneidad y la isotropía no ha sido resuelto totalmente, ya que usualmente se parte de una métrica homogénea e isótropa Friedmann-Robertson-Walker (FRW) y luego se examina la evolución de las perturbaciones. Sin embargo, la manera robusta de proceder, es partir de una métrica arbitraria y demostrar que el universo evoluciona hacia la solución FRW, coincidiendo con las observaciones. No obstante, dada la complejidad de este enfoque, solo es posible el tratamiento numérico del problema [6, 7, 8] y por tanto, con el objetivo de extraer soluciones analíticas muchos autores asumen de partida una hipótesis adicional, esto es, investigar cosmologías anisótropas pero homogéneas. Este tipo de geometrías se conocen desde hace mucho tiempo [9] y pueden exhibir comportamientos cosmológicos muy interesantes, tanto para la cosmología inflacionaria como la post-inflacionaria [10].

Por otra parte, para explicar el fenómeno de la expansión acelerada la primera dirección que se propuso consistió en invocar la presencia de un extraño fluido, que fue llamado la Energía Oscura (EO), el cual posee presión negativa, lo que explica la aceleración de la expansión del universo a grandes escalas.

El modelo de EO más simple es el modelo Λ - Materia Oscura Fría (Λ MOF). Estos presentan los llamados problema del ajuste fino de la constante cosmológica (Λ) y el problema de la Coincidencia [11, 12]. Una variante más elaborada de estos modelos, es considerar que la EO está compuesta de un campo escalar, llamado *Quintaesencia*, siendo este tipo de teorías un caso particular de las llamadas teorías Escalares-Tensoriales, en las que se introduce un campo escalar adicional en el sector gravitacional de la acción. En [13] se investigaron modelos de EO con acoplamiento no mínimo a la materia inspirados en este tipo de teorías, diseñándose un sistema dinámico apropiado para la descripción del sistema hacia el pasado. Comprobándose que dicho sistema admite soluciones escalantes y presenta expansiones asintóticas para las soluciones cosmológicas, en una vecindad de la singularidad inicial, extendiéndose resultados previos de otros investigadores. Otra posibilidad, es la descrita por los campos fantasmas, los cuales por sí solos implican una "física extraña", pues su energía cinética es negativa y además hay posible inestabilidad cuántica [14]. Sin embargo, una EO compuesta por quintaesencia y por un campo fantasma (cosmología "quintasma" o quintom) presenta ciertas ventajas. Una de ellas es que proporciona una dinámica de la ecuación de estado de la energía oscura favorecida por varias observaciones astrofísicas [15, 16]. En las referencias [17, 18] fueron investigados modelos quintom con potenciales exponenciales y geometría FRW plana en presencia de fluido sin presión. En [18] se probó que en ausencia de interacción entre los campos, la solución dominada por el campo fantasma era el atractor del sistema y que dicho comportamiento no cambiaba en presencia de interacciones. En la referencia [19] se probó que este resultado sólo es cierto si la existencia de la fase fantasma excluye la existencia de soluciones escalantes. De este modo el comportamiento fantasma no es genérico en las cosmologías quintom. En [20] se investigaron condiciones sobre el potencial que garantizan la existencia de fases escalantes, probándose que este régimen está asociado con el límite donde ambos campos escalares divergen. Los resultados presentados en las referencias [19, 20, 13], condujeron a la defensa de una Tesis de Doctorado en Ciencias Matemáticas [21]. En la referencia [16] se presenta una revisión exhaustiva el estado del arte del paradigma quintom.

La segunda dirección fue considerar modificaciones de la teoría de la gravedad misma, siendo los más investigados los llamados modelos de gravedad modificada *f(R)* (ver [22, 23] y referencias allí citadas) en los que se intenta dar una explicación alternativa a la aceleración de la expansión como consecuencia de una nueva física gravitacional [24]. En este tipo de teorías se parte de modificar la TGR mediante la adición de potencias del escalar de curvatura, los tensores de Riemann y Ricci e incluso sus derivadas, como por ejemplo lo hacen las teorías Lovelock o las teorías *f(R)* [12].

Otra alternativa son modelos basados en teorías extra-dimensionales, por ejemplo, los mundos branas de Randall-Sundrum tipo II (RSII). En este modelo los campos de norma se confinan a una sub-variedad de dimensión menor (3-brana) empotrada en el espacio 5D tipo Anti de Sitter (AdS5), solo la gravedad escapa en la dirección extra. Pueden considerarse, por ejemplo, branas homogéneas FRW y branas de Bianchi tipo I con un campo escalar confinado en esta. En este último caso pueden tenerse en cuenta los efectos del tensor de Weyl 5D en la dinámica de la brana. Otro modelo alternativo a la TGR lo constituye, por ejemplo, la cosmología Hořava-Lifshitz.

En [25] se determinaron condiciones suficientes para la existencia de atractores del futuro correspondientes a soluciones isótropas en expansión acelerada para diferentes modelos cosmológicos basados en generalizaciones de los modelos de RSII: brana FRW y brana con anisotropía del tipo Bianchi I, considerando como contenido material una mezcla de fluido perfecto y un campo escalar atrapados en la brana para una clase general de potenciales de auto-interacción. Para branas FRW se determinó que para la solución *de Sitter* las contribuciones de la dimensión extra son importantes. En este caso se obtuvo una tasa de expansión que difiere del valor predicho por la TGR. Debido al interés que desde el punto de vista físico tiene el análisis de la estabilidad de dicha solución el autor realizó el cálculo explícito de su variedad central y de la dinámica sobre esta, determinándose que dicha solución es localmente asintóticamente inestable (tipo silla), por lo que dicha solución puede describir apropiadamente la inflación primordial. En este trabajo se demostró que para un campo escalar con potencial $V = V_0 e^{-\chi\phi} + \Lambda$ (donde Λ es una constante cosmológica positiva) atrapado en la brana, el universo tardío experimenta una fase de expansión acelerada (atractor tardío de *de Sitter*). Esta clase de potenciales contiene al potencial exponencial puro ($\Lambda = 0$) estudiado previamente en [26]. A partir de los resultados analíticos y numéricos se puedo conjeturar que la solución correspondiendo a un universo vacío de Misner-Randall-Sundrum es la fuente local y que las trayectorias en el espacio de fase emergen de la vecindad de este punto. Este resultado concuerda con el resultado obtenido en [27]. El estudio realizado en la brana con anisotropía de Bianchi I demostró que también se pueden obtener atractores de futuro compatibles con estados de expansión acelerada para determinados potenciales, esto se logra para una determinada región del espacio de los parámetros libres del modelo. Además se comprobó que determinados modelos evolucionan hacia soluciones isótropas independientemente de los valores iniciales de anisotropía del modelo.

En [28] se investigó la cosmología Hořava-Lifshitz desde la perspectiva de los sistemas dinámicos. De dicho estudio se concluyó que, bajo la condición de balance detallado, puede obtenerse la realización de un universo cíclico en el futuro en el cual la EO, en la forma de una constante cosmológica, es dominante. Se determinó que cuando se relaja la condición de balance detallado, el universo futuro puede representarse mediante una solución cosmológica dominada por EO que se expande por siempre (universo *de Sitter*) donde el estado oscilatorio preserva una menor probabilidad. Aunque dicho análisis indica que la cosmología Hořava-Lifshitz puede ser compatible con las observaciones astrofísicas actuales, no se pretendió enriquecer la discusión sobre sus posibles problemas conceptuales y teóricos.

Finalmente en [29] se investigó una clase de modelos en los cuales el campo de energía oscura (de tipo fantasma) provee de masa a la materia oscura. Imponiendo, como es usual, potenciales exponenciales o con ley de potencias y dependencia de masa exponenciales o con ley de potencias. Se concluyó, luego de un análisis de estabilidad detallado por parte del autor, que el problema de la coincidencia no puede ser resuelto. Por tanto, de acuerdo a dicho estudio, si la energía oscura se atribuye a un campo fantasma, estos modelos de materia oscura con masa variable no pueden satisfacer los requerimientos básicos que motivaron su construcción.

Luego de un análisis exhaustivo del estado del arte se destacan como **antecedentes** de esta investigación los siguientes:

1. En [30] se investigó un modelo del universo basado en Teorías Escalares-Tensoriales (y por tanto relacionados mediante transformaciones conformes con teorías *f(R)*) con métricas FRW incluyendo un campo escalar acoplado a la materia y radiación. Probándose que los puntos de equilibrio correspondientes a los mínimos locales no negativos del potencial (asociados con soluciones cosmológicas tipo *de Sitter*)

son asintóticamente estables. Al igual que en [13], se diseñó un sistema dinámico apropiado para la descripción del sistema hacia el pasado obteniéndose: soluciones cosmológicas dominadas por radiación; soluciones inflacionarias con ley de potencias dominadas por el campo escalar; soluciones escalantes materia-energía cinética-radiación; soluciones escalantes materia-potencial-radiación. Utilizando el aparato matemático desarrollado se investigaron los importantes ejemplos de teorías de la gravedad modificada $f(R) = R+\alpha R^2$ (gravedad cuadrática) y $f(R) = R^n$. En el caso de la gravedad cuadrática se demostró, mediante el cálculo explícito de la variedad central correspondiente, que el punto de equilibrio correspondiente a la fase de *de Sitter* (con campo escalar no acotado) es localmente asintóticamente inestable (punto de ensilladura). Como novedad, en esta tesis se extiende este resultado a métricas Kantowsky-Sachs.

2. En [31] se investigaron teorías R^n en geometrías anisótropas Kantowski-Sachs (KS). En este caso se determinó que el universo futuro puede resultar en un estado de expansión acelerada, y adicionalmente, para el rango $2 < n < 3$, puede exhibir comportamiento fantasma. Además la isotropización puede alcanzarse independientemente del grado inicial de anisotropía. Se determinó que el universo futuro puede ser representado con alta probabilidad por una solución cosmológica en contracción. Finalmente se obtuvo también la realización de un universo cíclico. Estos hallazgos indican que las geometrías anisótropas en gravedad modificada presentan comportamientos cosmológicos radicalmente diferentes cuando se compara con los escenarios isotrópicos. Como novedad de esta tesis se tiene la extensión de estos resultados a marcos $f(R)$ genéricos, o sea, partiendo de una dependencia funcional arbitraria $f(R)$, se deducen hipótesis matemáticas adicionales (diferenciabilidad, extremos locales, intervalos de monotonía) requeridas para obtener soluciones cosmológicas compatibles con el paradigma cosmológico observacional.

3. En [32] se obtienen condiciones bajo las cuales los modelos de EO basados en teorías *f(R)* con métrica FRW son viables. Los autores demostraron que el comportamiento cosmológico de los modelos *f(R)* puede entenderse, desde una perspectiva geométrica, a partir de las propiedades de una curva $m(r)$ en el plano (r, m), donde $m = \frac{Rf''(R)}{f'(R)} = \frac{d \ln f'(R)}{d \ln R}$ y $r = -\frac{Rf'(R)}{f(R)} = -\frac{d \ln f(R)}{d \ln(R)}$. Esto permite clasificar a los modelos *f(R)* en cuatro clases generales, dependiendo de la existencia de una época de materia estándar y una época final acelerada. La existencia de una época dominada por materia viable previa al estado de expansión acelerada observado en la actualidad, requiere que la variable m satisfaga las condiciones $m(r) \approx +0$ y $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}r} > -1$ en $r \approx -1$. Para la existencia de una fase de aceleración tardía viable se requiere que (i) $m = -r - 1$, $(\sqrt{3} - 1)/2 < m < 1$ y $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}r} < -1$ ó (ii) $0 < m < 1$ en $r = -2$. Estas condiciones determinan dos regiones en el espacio (r, m), una para la era de materia y otra para la de aceleración. Solo los modelos con una curva $m(r)$ que conecte estas regiones y satisfaga los requerimientos anteriores puede conducir a una cosmología aceptable. Los modelos de tipo $f(R) = \alpha R^n$ y $f(R) = R + \alpha R^n$ no satisfacen estas condiciones para cualquiera $n < 0$ y $n > 1$ y por tanto son cosmológicamente inaceptables. En muchos casos la era estándar de materia es reemplazada por una expansión cósmica con un factor de escala $a \propto t^{1/2}$. También se hallaron modelos *f(R)* con atractores fantasmas pero en este caso no existe época de materia aceptable. Como novedad de esta tesis se formaliza y se extiende este procedimiento geométrico y se aplica a modelos *f(R)* en métricas Kantowsky-Sachs.

La **interrogante científica** que se pretende responder en esta investigación es: ¿Puede obtenerse información cosmológica de interés para clases genéricas de teorías *f(R)*, a pesar de la complejidad inherente de las ecuaciones cosmológicas, que este de acuerdo con la evidencia observacional existente?

Para dar respuesta a dicha interrogante se han trazado como **objetivo general**: Realizar un análisis relacionado con la viabilidad de los modelos cosmológicos basados en teorías *f(R)* con métricas homogéneas y anisótropas de tipo Kantowsky-Sachs para la descripción de la expansión acelerada del universo, de acuerdo al paradigma observacional moderno.

Para alcanzar este objetivo general nos hemos trazado los siguientes **objetivos específicos**:

- Confeccionar un marco teórico referencial que contenga los resultados más recientes sobre las teorías *f(R)* y sobre la teoría de los sistemas dinámicos, para ser utilizados como herramienta en el trabajo de investigación en estos temas.
- Formular las condiciones suficientes para la estabilidad asintótica de las soluciones de interés físico de un modelo cosmológico basado en métricas tipo Kantowsky-Sachs en una clase genérica de modelos *f(R)*, diseñando una metodología para la reconstrucción de la función *f(R)* a partir de los requerimientos matemáticos obtenidos.
- Analizar la viabilidad desde el punto de vista físico de dichas funciones *f(R)* como alternativas al concepto de la Energía Oscura a partir de la interpretación de los resultados matemáticos obtenidos.

La **hipótesis científica** referente a la presente investigación es que, al considerar Teorías de Gravedad Modificada no solo se aumenta el marco teórico de la cosmología, sino que es posible explicar diferentes fenómenos cosmológicos observados en la actualidad, los cuales no han sido explicados completamente usando la TGR. Así también, aún para clases genéricas de teorías *f(R)*, es posible diseñar un conjunto de variables adimensionales que permiten definir un sistema dinámico, de modo que a partir de las propiedades del flujo, sea posible extraer información que permita caracterizar las diferentes etapas de evolución del universo.

Como se ha comentado previamente, los problemas de la homogeneidad y la isotropía del universo y el problema de la EO no han tenido, hasta el momento, una resolución definitiva. Por otra parte, los estudios sobre la naturaleza de la aceleración de la expansión permanecen siendo una de las prioridades identificadas a nivel mundial [33], siendo las teorías *f(R)* una alternativa para explicar diferentes fenómenos cosmológicos observados en la actualidad, los cuales no han sido explicados completamente usando la TGR. Esto permite **justificar** la pertinencia de la presente investigación. La resolución de los primeros dos problemas se reduce a determinar condiciones suficientes para la existencia de atractores del futuro correspondiendo a soluciones isótropas en expansión acelerada. La viabilidad de la investigación se sustenta en que los análisis desde la perspectiva de los sistemas dinámicos proporcionan una de las mejores maneras de estudiar la estabilidad de los modelos cosmológicos. Además, estos métodos generales de investigación permiten el ajuste fino de las condiciones iniciales requeridas para conciliar con las observaciones. Por otra parte la viabilidad de la investigación se sustenta también en la disponibilidad de recursos computacionales para el tratamiento analítico y numérico de las soluciones.

La tesis está estructurada de la forma siguiente. En el capítulo 1 se hace una breve revisión sobre las teorías de gravedad modificadas y sobre la teoría de los sistemas dinámicos, que son importantes para mejorar la comprensión de los temas tratados en el segundo y tercer capítulo, haciéndose énfasis en las teorías *f(R)*, por lo cual puede usarse como material de consulta, para estudiantes de las carreras de Física y Matemática que investiguen en esta temática. También se brinda al final de este capítulo, algunas consideraciones del autor sobre las ideas fundamentales y problemáticas que presentan las teorías *f(R)*.

En el capítulo 2 se formula y realiza el análisis dinámico del modelo cosmológico, caracterizándose los puntos críticos de interés físico según su estabilidad. En el capítulo 3 se realiza el análisis físico de cada punto crítico obtenido. Para esto se calculan varias cantidades observables como son el parámetro de desaceleración, el parámetro de la ecuación de estado total y varios parámetros de densidad adimensional de energía que se evalúan en cada punto crítico. Se propone un método para el cálculo de tasas de evolución para diferentes magnitudes físicas de interés, como son el factor de escala, el escalar de curvatura y la densidad de materia (en función del tiempo) para las soluciones cosmológicas asociadas a dichas posiciones de equilibrio. Se diseña un algoritmo que permite reconstruir la función *f(R)* a partir del sistema dinámico bajo estudio. Dicho algoritmo se evalúa para los modelos de gravedad cuadrática $f(R) = R + \alpha R^2$. Al final de ambos capítulos se dan las conclusiones parciales que, a juicio del autor, se pueden extraer de la investigación aquí contenida.

En las secciones siguientes al capítulo 3 se brindan las conclusiones generales de la tesis y se hacen algunas recomendaciones sobre como dar continuidad a la investigación. Luego, se incorporan un anexo que complementa la tesis y finalmente se anotan las referencias bibliográficas. La norma bibliográfica que será implementada es el "UT Physics bibliographic style", referencia utilizada en las publicaciones y tesis en el área de la Física.

1. Marco Teórico

"Somos el medio para que el Cosmos
se conozca a sí mismo."
Carl E. Sagan

Las teorías de gravedad modificada o teorías de gravedad extendida pueden considerarse como un nuevo paradigma para salvar algunos de las deficiencias de la TGR en las escalas infra-rojas y ultra-violeta. Estas teorías preservan los indudables resultados positivos de la TGR y tienen como propósito resolver problemas conceptuales y experimentales que han surgido recientemente en astrofísica, cosmología y en física de las altas energías. En particular el objetivo es explicar, en un esquema auto-consistente, problemas como la inflación, la energía oscura, la materia oscura, estructuras en la amplia escala y primero que todo, dar una descripción al menos efectiva de la gravedad cuántica. Debido al creciente interés en el estudio de Teorías de Gravedad Modificada, en este capítulo se comenta de modo muy general sobre un grupo de teorías alternativas a la TGR haciendose énfasis en las teorías *f(R)* como una alternativa a la TGR que no requiere la introducción de componentes de materia exótica como la EO. Adicionalmente se presentan algunos elementos básicos de la Teoría de los Sistemas Dinámicos. Dichas técnicas permiten el ajuste fino de las condiciones iniciales requeridas para conciliar con las observaciones.

1.1. Teorías de Gravedad Modificada

Uno de los pioneros en la discusión de las bases conceptuales de las teorías de gravitación fue Robert H. Dicke, quien en 1961 conjunto a su estudiante Carls Brans introdujo lo que hoy es conocido como la Teoría de Brans-Dicke [34, 35]. Esta teoría incluye además de la métrica un campo escalar.

La acción de Brans-Dicke(BD) en el marco de Jordan(MJ) es: [1]

$$S_{BD}^{MJ} = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}\left[\phi R - \frac{\omega_0}{\phi}\left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi\right)\right] + S_M\left(g_{\mu v}, \psi\right) \tag{1.1}$$

donde ϕ es el campo escalar, ω_0 es el parámetro de Brans-Dicke y G la Constante Gravitacional de Newton. Como se puede observar ϕ no está presente en la acción correspondiente a la materia lo cual implica que el campo escalar no está acoplado con la misma, pero sí lo está de forma no mínima a la gravedad.

Esta teoría puede ser generalizada a lo que comúnmente se conoce como Teoría Escalar-Tensorial de Gravitación, la acción general para esta teoría es:

$$S_{BD}^{MJ} = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}\left[\phi R - \frac{\omega\left(\phi\right)}{\phi}\left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi\right) - V\left(\phi\right)\right] + S_M\left(g_{\mu v}, \psi\right) \tag{1.2}$$

donde V(ϕ) es el potencial del campo escalar y en lugar de considerar la constante de BD (ω_0), se ha sustituido por una función del campo escalar $\omega\left(\phi\right)$. Se puede apreciar que (1.1) se recupera si fijamos $\omega\left(\phi\right) = \omega_0$ y excluimos el término V(ϕ).

Para la Teoría de Brans-Dicke, y en general para las Teorías Escalar-Tensorial de Gravitación y cualquier otra versión de esta escrita en el marco de Jordan, el campo escalar

[1] Los subíndices y superíndices griegos $\alpha, \beta, ..., \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ designan los índices espacio-temporales cuadri-dimensionales (4D), a menos que se especifique lo contrario. El índice 0 representa la componente temporal, mientras que los índices 1,2,3 las componentes espaciales. A menos que se especifique lo contrario a lo largo de la tesis se utiliza el sistema natural de unidades donde $\hbar = c = 1$.

no está acoplado directamente a la materia. El rol del campo escalar es justamente intervenir en la generación de la curvatura del espacio-tiempo asociado con la métrica [36]. Los campos escalares acoplados no mínimamente con la gravedad están presentes en las acciones efectivas de bajas energías de teorías más fundamentales tales como la Teoría de Cuerdas [37].

Las Teoría de cuerdas, han motivado el desarrollo de cosmología de branas. La relación entre ambas es la introducción de dimensiones espaciales adicionales a nuestro conocido espacio-tiempo de 4 dimensiones, lo cual en la teoría de cuerdas se logra compactificando las dimensiones adicionales de la forma propuesta en los trabajos de Kaluza y Klein [38].

En la llamada Teoría M (la cual incluye un conjunto de teorías de cuerdas), modelo sugerido por Horava y Witten [38], se proponen 11 dimensiones para el espacio-tiempo, teniendo la última de estas simetría Z_2. Tambien se destacan los modelos de mundos brana. Uno de los primeros modelos de este tipo, corresponde a los propuestos por Randall y Sundrum en 1999 [39, 40]. El más simple de ellos consta de introducir una quinta dimensión con simetría Z_2 y para que el hecho de agregar nuevas dimensiones sea compatible con la TGR, debe cumplirse que la dimensión adicional se enrolle sobre si misma (proceso denominado compactificación) o que el espacio adicional introducido no contenga materia.

El término utilizado para este espacio penta-dimensional (5D) es bulk [2] dentro del cual se encuentra una hipersuperficie tipo 1+3 llamada brana que representaría nuestro universo. Se postula que *las partículas y campos del modelo estándar* están confinados en la brana mientras que la gravedad, comportándose como una verdadera interacción universal, se propaga libremente en el bulk.

Las motivaciones de la introducción de este nuevo punto de vista vienen del hecho que para energías suficientemente altas (límite ultra-violeta) la TGR deja de funcionar y debe

[2] "bulk" por sus nombre en inglés.

ser sustituida por una Teoría Cuántica de la Gravedad (TCG). Por otro lado los modelos de branas también pueden introducir correcciones a la TGR en el límite de bajas energías (límite infra-rojo) debido al escape de la gravedad en la dimensión extra (escapa hacia el bulk) lo cual conlleva a que se pueda obtener de forma natural un universo con expansión acelerada [11].

Existen varios modelos fundamentados en esta teoría, pero cabe mencionar a los **Modelos Randall-Sundrum 2 (RS2).** Este tipo de modelos es uno de los más recurridos en la actualidad pues proporcionan un escenario geométrico simple. A diferencia del modelo Randall-Sundrum 1 (RS1), donde se consideran dos branas ubicadas en puntos fijos $y = 0$ y $y = L$ de la dimensión extra del bulk, en el modelo (RS2), subsiste solamente la brana de tensión positiva λ localizada en $y = 0$ pues la brana de tensión negativa se aleja hasta el infinito haciendo $L \to \infty$. Este modelo tiene la ventaja respecto al primero de estar libre de la complicación asociada a la estabilización del radión [25].

La ecuación generalizada de Friedmann para una brana FRW es: [3]

$$H^2 = \frac{8\pi G_5}{3}\rho_T\left(1 + \frac{\rho_T}{2\lambda}\right) + \frac{\epsilon}{a^4} - \frac{K}{a^2} \tag{1.3}$$

donde ρ_T es la densidad de materia atrapada en la brana $\rho_T = \rho_{brana} - \lambda$. El término $\frac{\epsilon}{a^4}$ se asocia con la reacción del bulk al ser influenciado por la gravedad de la brana. Este término es usualmente llamado *radiación oscura* por la forma en que evoluciona el factor de escala a^{-4}. Este término decae muy rápidamente con la expansión, por tanto usando este argumento dicho término podría ser despreciado [11] [4].

Por otra parte también los modelos **Modelos de Dvali-Gabadadze-Porrati (DGP)** han recibido mucha atención en los últimos años [45, 46]. El mismo describe una brana

[3] Para más detalles consultar [41, 42].
[4] Para una revisión de este tipo de modelos consultar [43] y para una revisión exhaustiva de la dinámica ver [44].

4D, empotrada en un bulk 5D tipo Minkowski que permite introducir modificaciones a las leyes de la gravedad en el límite infra-rojo (bajas energías), correspondientes a grandes escalas.

Al considerar una métrica FRW plana en la brana, las ecuaciones de Friedmann quedarían como:

$$H^2 \pm \frac{H}{r_c} = \frac{8\pi G}{3}\rho \tag{1.4}$$

$$\dot{\rho} + 3\left(\rho + p\right) H = 0 \tag{1.5}$$

En (1.4) se ha despreciado el término de *radiación oscura* usando el argumento esgrimido para los modelos RS2. r_c es la longitud de cruce y marca la escala a partir de la cual los efectos 5D se comienzan a hacer apreciables sobre la dinámica 4D. (1.5) es la ecuación de continuidad.

Fuera del contexto de teorías extra-dimensionales como los mundos brana y dentro del grupo de Teorías de Gravedad Modificada debe hacerse énfasis en las llamadas teorías *f(R)*. Estas teorías proporcionan el escenario físico de esta tesis. Para una revisión reciente del tema, ver [47, 23, 48] y las referencias mencionadas en los mismos.

Los primeros intentos, dentro de lo que ahora llamamos Teorías de Gravedad Extendida (TGE), de lograr una descripción de la interacción gravitatoria que difiera de la Relatividad General convencional fueron desarrollados por Eddington y Weyl [49] entre 1919 y 1922 simplemente por curiosidad científica. Ellos consideraron modificaciones a la teoría de Einstein incluyendo invariantes de órdenes superiores en su acción.

Las llamadas teorías *f(R)*, se obtienen al generalizar la acción de Einstein-Hilbert (EH). La introducción de modificaciones a esta acción, pueden estar dadas por muchas razones, entre ellas, cabe mencionar que cuando son tomadas en cuenta la teoría de cuerdas o correcciones cuánticas, la acción efectiva de bajas energías para la gravedad admite invariantes de curvatura de ordenes superiores [50]. Por otro lado más recientemente se plantea que la expansión acelerada de nuestro universo puede deberse, entre otras muchas posibilidades, a correcciones en las ecuaciones de movimiento de la Relatividad General, generadas por contribuciones no lineales del escalar de curvatura R en el Lagrangiano puramente gravitacional de las teorías *f(R)* [51, 52, 53, 54] apareciendo así la posibilidad de dar respuesta al problema sin recurrir a la introducción de la EO o a la constante cosmológica evitando los problemas que de ellos se derivan.

Estas teorías, a pesar de ser la manera más simple de explicar diversos fenómenos cosmológicos, conducen en general a ecuaciones de movimiento de cuarto orden para la métrica (dentro del llamado formalismo métrico, porque en el formalismo de Palatini, el orden de las ecuaciones puede reducirse) y muy pocos de estos modelos han superado requisitos mínimos de estabilidad que reproduzcan todas las fases cosmológicas por las que el universo habría transcurrido, o no contemplan resultados conocidos en el régimen de campo débil. A pesar de todo, las teorías *f(R)*, aún cuando no sean una alternativa viable para explicar el estado actual de la expansión acelerada de nuestro universo, cuestión sobre la cual aún no existe consenso pleno, su relevancia para estudiar la inflación de tiempo temprano [55], así como su utilización en disimiles escenarios cosmológicos como Agujeros Negros, Lentes Gravitacionales [23], etc., podría constituir un estimulo adicional en su estudio.

1.1.1. Teorías f(R)

La acción de EH, en la cual la TGR está basada, se define por

$$S_{EH} = \frac{1}{2k} \int d^4x \sqrt{-g} R \tag{1.6}$$

donde $k \equiv 8\pi G$ (G es la constante gravitacional), g es el determinante de la métrica y R es el escalar de Ricci definido partir del tensor métrico.

Las teorías *f(R)*, las cuales son dinámicamente equivalentes a un caso particular de las teorías escalares-tensoriales, pueden considerarse pues como una generalización de la TGR a través de la inclusión de un término *f(R)* en la acción de EH, sustituyéndose (1.6) por:

$$S_{EH} = \frac{1}{2k} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) \tag{1.7}$$

De manera análoga a como se procede a derivar las ecuaciones del campo de Einstein a partir de la acción (1.6) usando un Principio Variacional, es posible obtener las ecuaciones del campo modificadas a partir de la acción generalizada (1.7) usándose diferentes principios variacionales.

Existen dos principios variacionales fundamentales [5]:

- El formalismo métrico estándar [56].
- El formalismo de Palatini [47].

En el formalismo métrico estándar se considera que la conexión es dependiente de la métrica y por tanto la acción depende de la métrica, esto lo denotamos por S$[g]$. En este caso las ecuaciones de Einstein modificadas se obtienen variando la acción con respecto a la métrica. A diferencia de esto, en el formalismo de Palatini la métrica y la conexión se supone que son variables independientes y la acción se denota esquemáticamente por S$[\Gamma, g]$. Para obtener las ecuaciones del campo, se varía la acción con respecto a los dos objetos geométricos Γ y g. Ambos principios variacionales conducen a las mismas ecuaciones del campo para una acción cuyo Lagrangiano sea lineal en R. Esto significa que ambos formalismos son equivalentes a la hora de obtener las ecuaciones del campo

[5] La elección del principio del variacional, es usualmente llamado formalismo.

de Einstein "clásicas" partiendo de (1.6). Esto ya no se cumple para una acción más general como (1.7). Por consiguiente, las teorías *f(R)* se clasifican de acuerdo al principio o formalismo variacional que se esté usado. Se puede deducir de lo anterior que existirán dos versiones de teorías *f(R)* de acuerdo a los dos formalismos descritos previamente. Existe una tercera clasificación:

- El formalismo métrico con conexiones afines.[57]

Este se basa en el formalismo de Palatini pero abandona la suposición de que el término de la acción correspondiente a la materia es independiente de la conexión. Claramente esta última clasificación es la más general de las tres teorías. Las otras dos se recuperan si se toman las suposiciones pertinentes.

En esta tesis solo se trabajará con el primer formalismo, el formalismo métrico estándar[56].

1.1.2. La Acción y las Ecuaciones de Campo

Se considera el espacio-tiempo como un par (M, g) con M una variedad cuatri-dimensional y $g_{\mu v}$ una métrica con signatura Lorentziana sobre M, sin torsión. Asociada a esta se considera la conexión, Γ, de Levi-Civita. Bajo estas hipótesis, la acción general puede ser escrita como: [6]

$$S_{mod} = \frac{1}{2k}\left(S_{met} + S'_{GYH}\right) + S_M \tag{1.8}$$

donde el término métrico de la acción está dado por

$$S_{met} = \int_V d^4x\sqrt{-g}f(R) \tag{1.9}$$

[6] El procedimiento que se sigue se basa en [58].

y el término de frontera de Gibbons-York-Hawking (GYH) se define por[59, 60]:

$$S'_{GYH} = 2\oint_{\partial V} d^3y\epsilon\sqrt{|h|}\frac{\partial f(R)}{\partial R}K \tag{1.10}$$

El introducir en la ecuación (1.8) el término de frontera S'_{GYH} permite que la parte geométrica de las ecuaciones de Campo de Einstein se obtengan fijando como condición en la variación tan solo $\delta g_{\mu\nu}|_{\partial V} = 0$,

Al variar el término métrico con respecto a la métrica $g^{\alpha\beta}$ en una región infinitesimal V y teniéndose en cuenta que $\delta f(R) = \frac{\partial f(R)}{\partial R}\delta R \equiv f'(R)\delta R$ se obtiene:

$$\delta S_{met} = \int_V d^4x\left[\sqrt{-g}f'(R)\delta R + f(R)\delta\left(\sqrt{-g}\right)\right] \tag{1.11}$$

donde δR denota la variación del escalar de Ricci

$$\delta R = \delta g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} + \nabla_\sigma\left[g^{\alpha\beta}\left(\delta\Gamma^\sigma_{\beta\alpha}\right) - g^{\alpha\sigma}\left(\delta\Gamma^\gamma_{\alpha\gamma}\right)\right]. \tag{1.12}$$

Sustituyendo el término $\left[g^{\alpha\beta}\left(\delta\Gamma^\sigma_{\beta\alpha}\right) - g^{\alpha\sigma}\left(\delta\Gamma^\gamma_{\alpha\gamma}\right)\right]$ en (1.12) por (A.1) calculado en el anexo A se obtiene:

$$\delta R = \delta g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}\Box\left(\delta g^{\alpha\beta}\right) - \nabla_\alpha\nabla_\beta\left(\delta g^{\alpha\beta}\right) \tag{1.13}$$

donde se ha definió el operador $\Box \equiv \nabla_\sigma\nabla^\sigma$.

Al sustituir (1.13) en (1.11) y tener en cuenta que $\delta\left(\sqrt{-g}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\upsilon}\delta g^{\mu\upsilon}$ [7] se llega

[7] La deducción de esta identidad puede encontrarse en la página 115 de [61].

a:

$$\begin{aligned}\delta S_{met} &= \int_V d^4x\sqrt{-g}\left\{f'(R)\left(\delta g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}+g_{\alpha\beta}\Box\left(\delta g^{\alpha\beta}\right)-\nabla_\alpha\nabla_\beta\left(\delta g^{\alpha\beta}\right)\right)\right\} \\ &\quad -\int_V d^4x\sqrt{-g}\left\{\frac{1}{2}f(R)\sqrt{-g}g_{\mu\upsilon}\delta g^{\mu\upsilon}\right\}\end{aligned} \tag{1.14}$$

Las integrales

$$\int_V d^4x\sqrt{-g}f'(R)g_{\alpha\beta}\Box(\delta g^{\alpha\beta})$$

y

$$\int_V d^4x\sqrt{-g}f'(R)\nabla_\alpha\nabla_\beta\left(\delta g^{\alpha\beta}\right)$$

que aparecen en (1.14) pueden escribirse, usándose el teorema de Gauss-Stokes, como (ver anexo A.2):

$$\int_V d^4x\sqrt{-g}f'(R)g_{\alpha\beta}\Box(\delta g^{\alpha\beta})=\int_V d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}\Box(f'(R))+\oint_{\partial V}d^3y\epsilon\sqrt{|h|}n^\tau M_\tau \tag{1.15}$$

y

$$\int_V d^4x\sqrt{-g}f'(R)\nabla_\sigma\nabla_\beta(\delta g^{\sigma\beta})=\int_V d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\sigma\beta}\nabla_\sigma\nabla_\beta(f'(R))+\oint_{\partial V}d^3y\epsilon\sqrt{|h|}n_\sigma N^\sigma \tag{1.16}$$

donde se han definido los vectores:

$$M_\tau = f'(R)g_{\alpha\beta}\nabla_\tau\left(\delta g^{\alpha\beta}\right)-\delta g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}\nabla_\tau\left(f'(R)\right) \tag{1.17}$$

y

$$N^\sigma = f'(R)\nabla_\gamma\left(\delta g^{\sigma\gamma}\right)-\delta g^{\sigma\gamma}\nabla_\gamma\left(f'(R)\right) \tag{1.18}$$

Sustituyéndose (1.15) y (1.16) en (1.14) se obtiene:

$$\begin{aligned}\delta S_{met} &= \int_V d^4x\sqrt{-g}\left\{f'(R)R_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}\Box f'(R) - \nabla_\alpha\nabla_\beta f'(R) - \frac{1}{2}f(R)g_{\alpha\beta}\right\}\delta g^{\alpha\beta}\\ &+ \oint_{\partial V} d^3y\epsilon\sqrt{|h|}n^\tau N_\tau + \oint_{\partial V} d^3y\epsilon\sqrt{|h|}n_\sigma N^\sigma \qquad (1.19)\end{aligned}$$

Para evaluar las cantidades M_τ y N^σ en la frontera ∂V, conviene reescribirlas en función de las variaciones $\delta g_{\alpha\beta}$. Como $\delta g_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\mu}g_{\beta v}\delta g^{\mu v}$ obteniéndose:

$$M_\tau = -f'(R)g^{\alpha\beta}\nabla_\tau\left(\delta g_{\alpha\beta}\right) - \delta g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}\nabla_\tau\left(f'(R)\right) \qquad (1.20)$$

$$N^\sigma = -f'(R)g^{\sigma\mu}g^{\gamma v}\nabla_\gamma\left(\delta g_{\mu v}\right) - g^{\sigma\mu}g^{\gamma v}\delta g_{\mu v}\nabla_\gamma\left(f'(R)\right) \qquad (1.21)$$

Al evaluar estas cantidades en la frontera y tener presente que $\delta g_{\alpha\beta}|_{\partial V} = \delta g^{\alpha\beta}|_{\partial V} = 0$ se tiene que:

$$M_\tau|_{\partial V} = -f'(R)g^{\alpha\beta}\partial_\tau(\delta g_{\alpha\beta}) \qquad (1.22)$$

$$N^\sigma|_{\partial V} = -f'(R)g^{\sigma\mu}g^{\gamma v}\partial_\gamma(\delta g_{\mu v}) \qquad (1.23)$$

Calculando los términos que aparecen en las integrales sobre la frontera y teniendo presente que $g^{\sigma\mu}$ se puede expresar como $g^{\sigma\mu} = h^{\alpha\beta} + \epsilon n^\alpha n^\beta$ se arriba a:

$$\begin{aligned}n^\tau M_\tau|_{\partial V} &= -f'(R)n^\tau(h^{\alpha\beta} + \epsilon n^\alpha n^\beta)\partial_\tau(\delta g_{\alpha\beta})\\ &= -f'(R)n^\sigma h^{\alpha\beta}\partial_\sigma(\delta g_{\alpha\beta}). \qquad (1.24)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
n_\sigma N^\sigma|_{\partial V} &= -f'(R) n_\sigma (h^{\sigma\mu} + \epsilon n^\sigma n^\mu)(h^{\gamma\upsilon} + \epsilon n^\gamma n^\upsilon)\partial_\gamma(\delta g_{\mu\upsilon}) \\
&= -f'(R) n^\mu (h^{\gamma\upsilon} + \epsilon n^\gamma n^\upsilon)\partial_\gamma(\delta g_{\mu\upsilon}) \\
&= -f'(R) n^\mu h^{\gamma\upsilon}\partial_\gamma(\delta g_{\mu\upsilon}) = 0, \qquad (1.25)
\end{aligned}
$$

donde $n_\sigma h^{\sigma\mu} = 0$, $\epsilon^2 = 1$. En el límite $\delta g_{\mu\upsilon} = 0$ se tiene que la derivada tangencial $h^{\gamma\upsilon}\partial_\gamma(\delta g_{\mu\upsilon})$ es nula [62]. Con estos resultados la variación de la acción, δS_{met}, es:

$$
\begin{aligned}
\delta S_{met} &= \int_V d^4x\sqrt{-g}\left\{ f'(R)R_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}\Box f'(R) - \nabla_\alpha\nabla_\beta f'(R) - \frac{1}{2}f(R)g_{\alpha\beta}\right\}\delta g^{\alpha\beta} \\
&\quad - \oint_{\partial V} d^3y\epsilon\sqrt{|h|}f'(R)n^\sigma h^{\alpha\beta}\partial_\sigma(\delta g_{\alpha\beta}) \qquad (1.26)
\end{aligned}
$$

Por otra parte la variación de S'_{GYH} conduce a

$$
\begin{aligned}
\delta S'_{GYH} &= 2\oint_{\partial V} d^3y\epsilon\sqrt{|h|}\left(f'(R)\delta K + K\delta f'(R)\right) \\
&= 2\oint_{\partial V} d^3y\epsilon\sqrt{|h|}\left(f'(R)\delta K + Kf''(R)\delta R\right) \qquad (1.27)
\end{aligned}
$$

Al sustituir la expresión para la variación de K, $\delta K = \frac{1}{2}h^{\alpha\beta}\partial_\sigma(\delta g_{\beta\alpha})n^\sigma$ (ver dedución en (A.3)), la ecuación anterior se puede escribir como:

$$
\begin{aligned}
\delta S'_{GYH} &= 2\oint_{\partial V} d^3y\epsilon\sqrt{|h|}\left(\frac{1}{2}f'(R)n^\sigma h^{\alpha\beta}\partial_\sigma(\delta g_{\alpha\beta}) + Kf''(R)\delta R\right) \\
&= 2\oint_{\partial V} d^3y\epsilon\sqrt{|h|}Kf''(R)\delta R + \oint_{\partial V} d^3y\epsilon\sqrt{|h|}f'(R)n^\sigma h^{\alpha\beta}\partial_\sigma(\delta g_{\alpha\beta}) \quad (1.28)
\end{aligned}
$$

Observar que el segundo término de (1.28) se cancela con el último término de (1.26) en la suma $\delta S_{met} + \delta S'_{GYH}$. Puesto que la función *f(R)* es arbitraria, para evitar nuevos grados de libertad se impone que $\delta R = 0$ en la frontera [59].

Finalmente solo falta calcular la variación del término S_M que representa la acción asociada a la materia. Por definición:

$$S_M\left(g_{\mu\upsilon},\psi\right)=\int_V d^4x\sqrt{-g}L_M\left(g_{\mu\upsilon},\psi\right) \tag{1.29}$$

donde ψ denota colectivamente todos los campos de materia. Variando la acción de materia con respecto a la métrica queda:

$$\delta S_M=\int_V d^4x\left(\frac{\partial L_M}{\partial g^{\alpha\beta}}\delta g^{\alpha\beta}\sqrt{-g}+L_M\delta\left(\sqrt{-g}\right)\right)=\int_V d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{\partial L_M}{\partial g^{\alpha\beta}}+\frac{1}{2}L_M g_{\alpha\beta}\right)\delta g^{\alpha\beta} \tag{1.30}$$

donde L_M es el Lagrangiano asociado a los campos de materia.

Es usual definir el tensor de energía-momento por $T_{\alpha\beta}\equiv-2\frac{\partial L_M}{\partial g^{\alpha\beta}}+L_M g_{\alpha\beta}=-\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\alpha\beta}}$. Entonces (1.30) se puede escribir como:

$$\delta S_M=-\frac{1}{2}\int_V d^4x\sqrt{-g}T_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} \tag{1.31}$$

Al sumar todos las variaciones (1.26),(1.28) y (1.31) tenemos que la variación de la acción modificada para una *f(R)* genérica es:

$$\begin{aligned}\delta S_{mod} &= \frac{1}{2k}\int_V d^4x\sqrt{-g}\left\{f'(R)R_{\alpha\beta}+g_{\alpha\beta}\Box f'(R)-\nabla_\alpha\nabla_\beta f'(R)-\frac{1}{2}f(R)g_{\alpha\beta}\right\}\delta g^{\alpha\beta}\\ &\quad -\frac{1}{2}\int_V d^4x\sqrt{-g}T_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}\end{aligned} \tag{1.32}$$

Imponiendo la condición de que la variación es estacionaria se llega a:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{mod}}{\delta g^{\alpha\beta}} &= 0\\ &\Rightarrow\ f'(R)R_{\alpha\beta}+g_{\alpha\beta}\Box f'(R)-\nabla_\alpha\nabla_\beta f'(R)-\frac{1}{2}f(R)g_{\alpha\beta}=kT_{\alpha\beta}\end{aligned} \tag{1.33}$$

Obteniéndose las ecuaciones generalizadas del campo utilizando el formalismo métrico.

Contrayendo (1.33) con $g^{\alpha\beta}$ se obtiene la traza de las ecuaciones del campo:

$$f'(R)R + 3\Box f'(R) - 2f(R) = kT \tag{1.34}$$

(donde se usado la definición $\Box = \nabla_\alpha \nabla_\beta g^{\alpha\beta}$ y se ha usado la propiedad $g_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = \delta^\alpha_\alpha = 4$). Nótese que $T = T_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$ es la traza del tensor de energía-momento de la materia.

En el caso $f(R) \equiv R$, (1.33) se reduce a la ecuación de Einstein "clásica" sin la constante cosmológica:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = kT_{\alpha\beta} \tag{1.35}$$

En estas ecuaciones la curvatura es descrita por el tensor de Riemmann y las ecuaciones de Einstein del campo expresan como ésta curvatura depende de las fuentes de materia y energía. Los efectos de la curvatura se pueden estudiar a través de la Ecuación de Desvío Geodésico (EDG) que da una descripción elegante de las propiedades geométricas del espacio-tiempo. A partir de (1.33) se pueden obtener la EDG para una *f(R)* genérica (ver la deducción en [63]).

La ecuación de la traza (1.34) difiere de la ecuación de la traza "clásica" $R = -kT$, la cual relaciona algebraicamente a R con T mediante una relación lineal, y en (1.34) es una relación es diferencial, pues esta es una ecuación diferencial de segundo orden para $f'(R)$. Esta ecuación resulta muy útil en el estudio de diversos aspectos de las teorías *f(R)* como son la estabilidad (no en el sentido de la estabilidad de sistemas dinámicos) y en el tratamiento del límite de campo débil de la teoría. No se profundizará ahora en el tema, ya que sobre ello se tratará en el próximo capítulo.

Por último, es posible escribir (1.33) en la forma de la ecuación de Einstein:

$$G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = \frac{k}{f'(R)} \left(T_{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta}^{(eff)} \right) \tag{1.36}$$

siendo

$$T_{\alpha\beta}^{(eff)} = \frac{1}{k} \left[\frac{f(R) - Rf'(R)}{2} g_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha \nabla_\beta f'(R) - g_{\alpha\beta} \Box f'(R) \right]. \tag{1.37}$$

Se aclara que este enfoque es cuestionable en principio, pues la definición de $T_{\alpha\beta}^{(eff)}$ no satisface ninguna condición de energía, pero en la práctica ha demostrado ser útil, interpretándose como un "fluido de curvatura" [47]. De estas ecuaciones se infiere que en las teorías *f(R)* de gravedad también es posible definir un acoplamiento gravitacional efectivo:

$$G_{eff} = \frac{G}{f'(R)} \tag{1.38}$$

de modo análogo a las Teorías Escalares-Tensoriales.

Considerando la métrica plana FRW las ecuaciones (1.33) toman la forma:

$$H^2 = \frac{k}{3f'(R)} \left[\rho^{materia} + \frac{Rf'(R) - f(R)}{2} - 3H\dot{R}f''(R) \right] \tag{1.39}$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\frac{k}{f'(R)} \left[\rho^{materia} + f'''(R)(\dot{R})^2 + 2H\dot{R}f''(R) + \ddot{R}f''(R) + \frac{f(R) - Rf'(R)}{2} \right] \tag{1.40}$$

donde el punto ($\dot{}$) denota diferenciación con respecto al tiempo comóvil. [8]

1.1.3. Condiciones para la viabilidad de modelos f(R)

La función genérica del escalar de Ricci debe cumplir una serie de requisitos para que el modelo sea consistente. Este debe tener entre otras características [11]:

[8] Para su deducción consultar página 67 de [64].

- una correcta dinámica cosmológica,
- ser compatible, en el límite de campos débiles, con los experimentos del Sistema Solar (recuperación de la acción de EH para curvaturas pequeñas),
- estar libre de fantasmas,
- ser ajustable para ciertas singularidades (ejemplo la singularidad de Schwarzschild),

A continuación se expondrán las condiciones y restricciones básicas que se imponen habitualmente a las teorías *f(R)* para que puedan proporcionar modelos gravitatorios consistentes, pues disímiles son las teorías *f(R)* que se pueden crear que cumplan con todos los requisitos matemáticos formales. Una manera de limitar la degeneración es imponer requisitos que garanticen la viabilidad de las mismas, así como un significado cosmológico coherente con las observaciones y experimentos.[65]

Se debe aclarar con relación al formalismo métrico (en el cual se dedujo (1.33)) que en la literatura se hace referencia a diferentes "marcos" en los cuales puede ser escrito (1.7), el marco de Jordan (MJ) o el marco de Einstein(ME)). Si bien puede establecerse una equivalencia matemática entre ambos marcos, en los últimos años se ha mantenido la controversia respecto a su equivalencia física. Las condiciones que se dan a continuación se refieren al MJ, además se redefine $G_{eff} = \frac{G}{1+f'(R)}$. Esta nueva definición no contradice a (1.38), pues es posible sustituir $f(R)$ por $R + f(R)$:

- $f''(R) > 0$ para $R \gg f''(R)$. Este es el requerimiento para obtener un régimen clásico y estable para curvaturas grandes, también conocido como estabilidad de Ricci. A esta condición se le puede dar una interpretación física simple si se define una constante gravitatoria efectiva $G_{eff} = \frac{G}{1+f'(R)}$ cuya variación con respecto a R

$$\frac{dG_{eff}}{dR} = -\frac{G}{(1+f'(R))^2} f''(R) > 0$$

se incrementa al aumentar la curvatura R. De verificarse la ecuación anterior, a grandes curvaturas los efectos de la gravedad se harían más fuertes, debido al incremento de G_{eff}, lo que a su vez generaría mayores valores de curvatura y así sucesivamente. Este mecanismo de retroalimentación desestabilizaría la teoría, ya que no tendría un estado fundamental porque un valor inicial de curvatura pequeño crecería indefinidamente (explosivamente). Por ejemplo para el modelo $f(R) = R + \mu^4/R$, que padece de la inestabilidad de Ricci, el tiempo para que este efecto se manifieste es del orden de 10^{-26} s [66]. En cambio si $f''(R) > 0$ un mecanismo de reacción opera para compensar ese crecimiento de R y estabiliza el sistema, en fin las condición para la estabilidad de Ricci sería $\frac{dG_{eff}}{dR} < 0 \Rightarrow f''(R) > 0$.

- $1+f'(R) > 0$ para todo R finito. Esta condición asegura que la constante gravitatoria efectiva sea positiva, según se aprecia de la definición dada en este epígrafe. Una implicación inmediata del caso contrario $1 + f'(R) < 0$ es que el universo se vuelve rápidamente inhomogéneo y anisótropo [65]. Su interpretación, desde el punto de vista cuántico, sería la condición que ha de cumplirse para evitar que el gravitón se convierta en fantasma [67].

- $f'(R) < 0$. Teniéndose en cuenta las fuertes restricciones de la nucleosíntesis primordial del Big Bang y del fondo cósmico de microondas, esta condición asegura que el comportamiento previsto por la TGR se recupere para épocas tempranas, es decir:

  $$\frac{f(R)}{R} \to 0 \text{ y } f'(R) \to 0 \text{ según } R \to \infty$$

  Combinándose esta, con las dos condiciones anteriores, se tiene pues que $f'(R)$ ha de ser una función negativa monótona creciente de R con valores en el rango:

  $$-1 < f'(R) < 0.$$

- $f'(R)$ debe ser pequeña en épocas recientes. Esto es necesario para satisfacer las restricciones impuestas por los test locales (solar y galáctico) de gravedad. Tal como se indica en el análisis realizado en [67] el valor de $|f'(R)|$ no debería ser mayor de 10^{-6} [9]. Este requerimiento no es necesario si el único objetivo que se persigue es conseguir un modelo que explique la aceleración cósmica.

1.2. Sistemas Dinámicos

Los trabajos de H. J. Poincaré en Mecánica Celeste sentaron las bases para el análisis local y global de las ecuaciones diferenciales no lineales, en particular la teoría de la estabilidad de los puntos de equilibrio y órbitas periódicas, variedades estables e inestables, etc. En esta sección se hace una revisión breve de la teoría de los sistemas dinámicos sentando las bases para el uso de los métodos propios de esta en el análisis cualitativo de los modelos *f(R)* lo cual es realizado en el capítulo 2.

Los métodos cualitativos han probado ser un esquema poderoso para investigar el comportamiento físico de modelos cosmológicos. Con este propósito se utilizan en la actualidad diferentes enfoques como la Aproximación por partes, métodos Hamiltonianos y métodos de la Teoría de los sistemas dinámicos [68]; para este último caso las cosmologías tipo Bianchi y su subclase isótropa (los modelos FLRW) son susceptibles de escribirse como un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales de primer orden, cuyas curvas de soluciones particionan a $\mathbb{R}^n$ en órbitas, definiendo un sistema dinámico en $\mathbb{R}^n$.

En el caso general, los elementos de la partición del espacio de fase (o sea, puntos de equilibrio, conjuntos invariantes, etc.) pueden ser enumerados y descritos. Su estudio conlleva varios pasos como la determinación de los puntos de equilibrio, la linealización en una vecindad de estos, la búsqueda de los valores propios de la matriz asociada, el

[9] Valor sobre el cual todavía hay gran controversia.

chequeo de las condiciones (necesarias y suficientes) para la estabilidad en una vecindad de los puntos de equilibrio, la determinación de los conjuntos de estabilidad e inestabilidad y la determinación de las cuencas de atracción, entre otros [21]. En algunas ocasiones, con el objetivo de hacer este análisis, es necesario simplicar al sistema dinámico. Dos enfoques son aplicados con en busca de este objetivo, uno es reducir la dimensionalidad del sistema y dos eliminar la no linealidad. Para ello se pueden utilizar dos técnicas rigurosas que permiten obtener un progreso sustancial en ambas líneas, estas son la teoría de la variedad central y el método de las formas normales.

1.2.1. Definiciones y nociones básicas de la teoría de los sistemas dinámicos

Al considerarse el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)

$$x' = f(x) \Rightarrow x_i' = f_i(x_k) \tag{1.41}$$

donde $x_k \in \mathbb{R}$ y $x' = \frac{dx}{d\tau}$ siendo τ un parámetro temporal y la función f es continua $f \in C^1$ y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Si el miembro derecho de (1.41) no depende explícitamente del tiempo el sistema se dice que es *autónomo*, el vector $x \in \mathbb{R}$ se denomina *vector de estado* del sistema (o simplemente *estado o fase*) y $\mathbb{R}^n$ es el *espacio de estados* (o *espacio de fase*).

A continuación se brindan algunas definiciones básicas:

Definición 1. *Una solución de* (1.41) *es una función* ψ*:* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\ltimes}$ *la cual satisface* $\psi'(\tau) = f(\psi(\tau))$*,* $\forall \tau \in \mathbb{R}$*.[68, 69, 70]*

La aplicación anterior se interpreta geométricamente como una curva en $\mathbb{R}^n$ de modo que

(1.41) representa el vector tangente en cada punto de la curva, por eso se le refiere como *campo vectorial*. Véase la definición formal:

Definición 2. *La imagen de la curva solución ψ en $\mathbb{R}^n$ es denomina órbita de* (1.41)*.*

Si el campo vectorial f es tangente en x a la órbita pasando por x, el estado del sistema físico que está siendo analizado, estaría entonces representado por el punto x y la evolución del sistema en el tiempo es descrita por el movimiento de este punto a lo largo de una órbita de (1.41) en $\mathbb{R}^n$ con τ jugando el rol del tiempo. De modo abstracto, el objetivo del estudio cualitativo de un campo vectorial es la comprensión de la geometría de las curvas solución en el espacio de fase.

Una vez definidos estos conceptos claves, se puede declarar rigurosamente el concepto de sistema dinámico asociado a una EDO.

Definición 3. *El sistema dinámico asociado a* (1.41)*, siendo $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, no es más que la aplicación $\Phi : \mathbb{R}^+ \times D \to \mathbb{R}^n$ la cual está definida por la solución $\psi(\tau) = \Phi(\tau, \psi(0))$.[71]*

El punto de partida para el análisis cualitativo del sistema dinámico asociado a una EDO en $\mathbb{R}^n$ es localizar los ceros del campo vectorial f, o sea encontrar todos los valores $a \in \mathbb{R}^n$ tales que $f(a) = 0$, lo que implica que $\psi(\tau) = a$, $\forall \tau \in \mathbb{R}$ y esta es una solución de (1.41) basándose en la Definición (1).

Esta solución constante $\psi(\tau) = a$ describe un estado de equilibrio del sistema físico, por tanto el punto $a \in \mathbb{R}^n$ es llamado *punto crítico* de (1.41), rigurosamente su definición es:

Definición 4. *Dada la EDO en $\mathbb{R}^n$, un valor $a_c \in \mathbb{R}^n$ que satisfaga $f(a_c) = 0$ es llamado punto crítico (a_c) del sistema.[68, 69, 70]*

De la teoría de las ecuaciones diferenciales es conocido que el estudio del flujo asociado a la ecuación diferencial en una vecindad de los puntos críticos hiperbólicos se reduce al análisis de la estabilidad de los puntos críticos (a_c) del sistema.

La estabilidad de los puntos críticos es analizada estudiando el sistema dinámico linealizado, es decir, la idea es considerar la aproximación lineal del campo vectorial $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ en uno de estos puntos y lo cual hace necesario suponer que f es de clase $C^1(\mathbb{R}^n)$ o sea que las derivadas parciales de f existen y son funciones continuas de $\mathbb{R}^n$. A continuación se expresan las definiciónes formales de órbita y de matriz de derivadas.

Definición 5. *La órbita pasando a través del punto a, se denota y define por:[68, 69, 70]*

$$O(a) = \{x \in R^n|_x = \Phi_\tau(a), \forall\tau \in R\}$$

La órbita positiva (órbita del futuro) y la órbita del pasado se definen por:

$$O^+(a) = \{x \in \mathbb{R}^n | x = \Phi_\tau(a), \forall\tau \geq \tau_0\}$$

$$O^-(a) = \{x \in \mathbb{R}^n | x = \Phi_\tau(a), \forall\tau \leq \tau_0\}$$

respectivamente.

En general las órbitas se clasifican en órbitas puntuales, órbitas periódicas y órbitas no periódicas.

Definición 6. *La matriz de derivadas (o matriz de linealización) $Df(x)$ de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es la matriz $n \times n$ definida por:*

$$Df(x) = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j})$$

donde $i, j = 1, .., n$, f_i son las funciones componentes de f. [68, 69, 70]

Finalmente el sistema dinámico linealizado es obtenido realizando una expansión de Taylor de primer orden al sistema (1.41):

$$f(x) = f(a_c) + Df(a_c)(x - a_c) + R(x, a_c) \tag{1.42}$$

donde $R(x, a_c)$ es el término residual y $Df(a_c)(x - a_c)$ denota la matriz de linealización $n \times n$ evaluada en a_c actuando sobre el vector $x - a_c$. En general la linealizaciones dan una descripción bastante adecuada de las órbitas no lineales en la vecindad de los puntos críticos y la estabilidad de estos puede ser establecida localmente estudiando la linealización de la EDO.

Si el sistema (1.41) es no lineal se puede aplicar el teorema de Hartman-Grobman el cual se expresa como:

Teorema 1. *Sea p un punto de equilibro del EDO* (1.41) *en $\mathbb{R}^n$ donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación al menos de clase $C^1(R)$. Si todos los valores propios λ de la matriz de linealización $Df(x)$ en p satisfacen $Re(\lambda) \neq 0$, entonces existe un homomorfismo $h : u \to \bar{u}$ de una vecindad u de O sobre una vecindad $\bar{u}$ de p, que mapea órbitas de flujo lineal $e^{Df(x)\tau}$ sobre órbitas de flujo no lineal de la EDO, preservando la dirección del parámetro τ.[68, 70]*

Ya se conocen como evolucionan las perturbaciones de la EDO, ahora para encontrar los valores propios λ_i, $i = 1, 2, ..n$ de la matriz de linealización se debe resolver la ecuación secular $det(Df(x) - \lambda I) = 0$ y los vectores propios u_i asociados a los autovalores de $Df(x)$ son aquellos vectores $Df(x)u_i = \lambda_i u_i$ y cumplen que:

- El número de valores (vectores) propios es igual a la dimensión del espacio de fase $dim = n$
- Cada vector propio define una dirección propia en el espacio de fase.
- El conjunto u_i forma una base en el espacio de fase $\mathbb{R}^n$

La signatura de la parte real de los valores propios de $Df(x)$ (que en general $\lambda \in \mathbb{C}$), definen la estabilidad lineal del EDO en la vecindad de los puntos críticos hiperbólicos.

Según sea el valor de $Re(\lambda_i)$, negativo, positivo o cero, los correspondientes vectores propios dividirán el espacio de fase en tres sub-espacios:

- `Sub-espacio estable:` es generado por los vectores propios u_i asociados a valores propios con partes real negativa ($Re(\lambda_i) < 0$), siendo los llamados sub-espacios estables del punto crítico.
- `Sub-espacio inestable:` es generado por los vectores propios u_i asociados a valores propios con partes real positiva ($Re(\lambda_i) > 0$), siendo los llamados sub-espacios inestables del punto crítico.
- `Sub-espacio centro:` es generado por los vectores propios u_i asociados a valores propios con partes real cero ($Re(\lambda_i) = 0$), siendo los llamados sub-espacios centro.

El carácter de los puntos críticos depende de los valores de los exponentes característicos λ como sigue:

- Si la parte real de todos los exponentes característicos ($Re(\lambda_i)$) es negativa, el punto fijo es asintóticamente estable, o sea, un atractor.
- Si al menos un exponente característico tiene parte real positiva el punto crítico es inestable, el cual es un repulsor si todas las partes reales son positivas, en cambio si al menos uno de estos exponentes tiene parte real negativa es un punto de ensilladura (silla), en cuyo caso existe, aparte de la variedad inestable, una variedad estable conteniendo las órbitas excepcionales que convergen al punto.
- Si uno de los exponentes es nulo el punto es no hiperbólico y por tanto la estabilidad estructural no puede garantizarse (la forma geométrica de las órbitas puede cambiar bajo perturbaciones pequeñas) y en el caso en que la mayor parte real sea precisamente cero ha de ser analizado usando otros métodos, por ejemplo, el teorema de la variedad central pues en este caso el análisis lineal no es concluyente (el teorema de Hartman-Grobman no se aplica) [21].

La forma geométrica de las orbitas cerca de los puntos críticos, en el caso de que el sistema dinámico bajo estudio sea 3D, está determinada por la parte imaginaria de los (tres) exponentes característicos. Si los tres son reales (partes imaginarias nulas) el punto crítico es un nodo. Un par de exponentes conjugados conducen, salvo en los casos degenerados, a un centro espiral, un foco o una silla espiral (las órbitas son hélices en las cercanías del punto crítico). El primero de los casos ocurre cuando las partes reales de los exponentes complejos se anulan, mientras que el segundo y tercer caso ocurren si el signo del exponente real y la parte real de los exponentes complejos son respectivamente iguales o diferentes.

1.2.2. Teoría de la variedad central

En esta sección se ofrecen las técnicas para la construcción de variedades centrales locales para campos vectoriales en $\mathbb{R}^n$.

Considerérese que el campo vectorial (1.41) puede escribirse de la forma [72]:

$$\begin{aligned} x' &= Ax + f\,(x, y) \\ y' &= Bx + g\,(x, y) \end{aligned} \tag{1.43}$$

con $(x, y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s$. Donde A una matriz $c \times c$ asociada a los autovalores propios con parte real nula ($Re(\lambda_i) = 0$), B es una matriz $s \times s$ asociada a los autovalores propios con parte real negativa ($Re(\lambda_i) < 0$), f y g son funciones de clase $C^r, r \geq 2$ y además cumplen que:

$$\begin{aligned} f\,(0, 0) &= Df\,(0, 0) = 0 \\ g\,(0, 0) &= Dg\,(0, 0) = 0 \end{aligned} \tag{1.44}$$

Se define:

Definición 7. *Una variedad invariante se llamará variedad central para* (1.43) *si esta puede representarse localmente como sigue:*

$$W^c(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s : y = h(x), |x| < \delta\}$$

cumpliendo que $h(0) = Dh(0) = 0$*. Para* δ *suficientemente pequeño.[72, 73]*

Las condiciones $h(0) = Dh(0) = 0$ implican que $W^c(0)$ es tangente a E^c en $(x, y) = (0, 0)$ donde E^c es el espacio propio generalizado correspondiente a los valores propios cuyas partes reales son cero.

A continuación se definen tres teoremas (2,3,4) los cuales son los resultados principales para el tratamiento de las variedades centrales. Los primeros dos son el teoremas de Existencia y el de Estabilidad de la variedad central para (1.43) en el origen. El tercer teorema permite calcular explícitamente la variedad central hasta el grado deseado de exactitud usando series de Taylor para resolver una ecuación diferencial parcial cuasilineal que $h(x)$ debe satisfacer.

Teorema 2. *Existe la variedad central de clase* C^r *de* (1.43)*. La dinámica de* (1.43) *restringida a la variedad central está dada, para u suficientemente pequeño, por el siguiente campo vectorial c-dimensional:*

$$u' = Au + f(u, h(u)), u \in \mathbb{R}^c \tag{1.45}$$

El teorema implica que la dinámica de (1.45) en una vecindad de $u = 0$ determina la dinámica de (1.43) en una vecindad de (x,y)=(0,0).

Teorema 3. *Suponiendo que la solución idénticamente cero de* (1.45) *es estable (asintóticamente estable) (inestable) tendríamos que la solución idénticamente cero de* (1.43) *es* *también estable (asintóticamente estable) (inestable). Entonces si* $(x(\tau), y(\tau))$ *es solución de* (1.43) *con* $(x(0), y(0))$ *suficientemente pequeño, existirá una solución* $u(\tau)$ *de* (1.45) *tal que, cuando* $\tau \to \infty$ *se tendrá que:*

$$\begin{aligned} x(\tau) &= u(\tau) + O(e^{-r\,\tau}) \\ y(\tau) &= h(u(\tau)) + O(e^{-r\,\tau}) \end{aligned} \tag{1.46}$$

donde $r > 0$ *es una constante.*

Al analizar el teorema se aprecia que para condiciones iniciales del sistema completo suficientemente cerca del origen, las trayectorias pasando por estas tienden asintóticamente a una trayectoria sobre la variedad central. En particular, en la variedad central están contenidos puntos de equilibrio suficientemente cercanos al origen, órbitas periódicas de amplitud suficientemente pequeña, así como pequeñas órbitas homoclínicas y heteroclínicas.

La cuestión obvia ahora es: ¿ cómo calcular la variedad central de modo que pueda ser usado el resultado del Teorema 3 ? Para darle respuesta a esta pregunta es necesario deducir una ecuación diferencial parcial cuasilineal que $h(x)$ debe satisfacer para que su grafo sea una variedad central para (1.43), para ello suponiendo que tenemos una variedad central representada según la Definición (7).

$$W^c(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s : y = h(x), |x| < \delta\}$$

cumpliendo que $h(0) = Dh(0) = 0$, con δ suficientemente pequeño. Usando la invarianza de $W^c(0)$ bajo la dinámica de (1.43), se deduce una ecuación diferencial parcial cuasilineal que satisface $h(x)$. Esto se hace como sigue:

1. La coordenadas (x, y) de cualquier punto sobre $W^c(0)$ deben satisfacer que:

$$y = h(x) \tag{1.47}$$

2. Al diferenciar (1.47) con respecto al tiempo se tiene que las coordenadas (x', y') de cualquier punto sobre $W^c(0)$ deben satisfacer que:

$$y' = Dh(x)x' \tag{1.48}$$

3. Como cada punto en $W^c(0)$ obedece la dinámica generada por (1.43), se tiene que $x' = Ax + f(x, h(x))$, $y' = Bx + g(x, h(x))$, luego, sustituyendo en (1.48) se obtiene:

$$N(h(x)) \equiv Dh(x)\left[Ax + f(x, h(x))\right] - Bh(x) - g(x, h(x)) = 0 \tag{1.49}$$

Finamente la ecuación (1.49) es una ecuación diferencial parcial cuasilineal que $h(x)$ debe satisfacer para que su grafo sea una variedad central invariante y para construirla solo es necesario resolver (1.49).

Desafortunadamente, es probablemente más difícil resolver (1.49) que el problema original; sin embargo, el Teorema 4 ofrece un método para calcular soluciones aproximadas de (1.49) hasta el grado deseado de exactitud.

Teorema 4. *Sea $\Phi : \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s$ una aplicación de clase al menos C^1, con $\Phi(0) = 0$ y $D\Phi(0) = 0$ tal que $N(\Phi(x)) = O(|x|^q)$ cuando $x \to 0$ para $q > 1$. Entonces, se tiene que: $|h(x) - \Phi(x)| = O(|x|^q)$ cuando $x \to 0$.*

Este teorema permite calcular la variedad central al grado deseado de exactitud resolviendo (1.49) hasta el mismo grado de exactitud. Para esta tarea, las expansiones en series de Taylor funcionan apropiadamente.

1.3. Conclusiones Parciales

En este capítulo se presentaron algunas ideas básicas sobre teorías de gravedad extendida en particular las Teorías Escalares-Tensoriales, Mundos Branas, y otros, con especial énfasis en los modelos de gravedad modificada *f(R)* como enfoques alternativos a la EO para explicar la expansión acelerada del universo y otros problemas cosmológicos. Se comentó sobre algunas implicaciones físicas de estos modelos y sobre las ventajas y desventajas de los mismos.

En el caso de las teorías *f(R)* se demostró cómo es posible obtener las ecuaciones del campo en el formalismo métrico introduciendo el término de Gibbons-York-Hawking, lo cual implica fijar $\delta g_{\mu v}|_{\partial V} = \delta R|_{\partial V} = 0$, evitando así complicaciones con los términos de frontera, posibilitando la derivación de las ecuaciones del campo y las ecuaciones de Friedmann modificadas. Se definió el acoplamiento gravitacional efectivo, el cual es muy útil en el análisis de la viabilidad de las teorías *f(R)*.

En este capítulo se enumeraron las principales restricciones que se imponen habitualmente a las teorías *f(R)*, a estas se les pueden sumar las condiciones para la existencia y estabilidad de las soluciones de Sitter presentadas en [11] para disponer así de teorías cosmológicamente viables. Se debe comentar que son pocos los modelos que han superado los requisitos mínimos de estabilidad que reproduzcan todas las fases cosmológicas por las que el universo habría transcurrido, o no contemplan resultados conocidos en el régimen de campo débil. A pesar de lo planteado, de acuerdo a las ideas comentadas en el epígrafe (1.1.1), mediante los modelos *f(R)* se puede disponer de una manera sencilla de explicar el fenómeno de la expansión acelerada del universo sin introducir el concepto de EO. Estas teorías pueden ser aplicadas a disímiles escenarios cosmológicos. También para explicar la expansión acelerada del universo, en la actualidad se recurre a una clase de teorías, llamadas teorías *f(T)*, donde la torsión sería la responsable de la aceleración observada.

En este caso las ecuaciones de campo son siempre de segundo orden. [10]

Finalmente se comentaron las ideas bases y algunos resultados de la Teoría de los Sistemas Dinámicos que se utilizan en el análisis cualitativo de modelos cosmológicos, como son la Técnica de linealización y la Teoría de la Variedad Central.

Los análisis desde la perspectiva de los sistemas dinámicos proporcionan una de las mejores maneras de estudiar la estabilidad de los modelos cosmológicos. Además, estos métodos generales de investigación permiten el ajuste fino de las condiciones iniciales requeridas para conciliar con las observaciones.

[10] Para profundizar en el tema consultar [64].

2. Métrica Kantowski-Sachs en teorías f(R)

"No hay rama de la matemática, por abstracta que sea, que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del mundo real."

Nikolái Lobachevski

En el presente capítulo se investiga la estabilidad de las soluciones de un modelo cosmológico con métrica homogénea pero anisótropa de tipo Kantowsky-Sach basado en una teoría de gravedad modificada *f(R)*. En particular se investigan los posibles comportamientos cosmológicos usando las herramientas de la teoría de los sistemas dinámicos. Tal enfoque hace posible pasar por alto la alta no linealidad de las ecuaciones cosmológicas que impiden el tratamiento analítico completo, obteniéndose una descripción cualitativa de la dinámica global de estos modelos.

2.1. Cosmologías anisotrópicas

El modelo estándar de la cosmología supone como válida la TGR y plantea las hipótesis de homogeneidad e isotropía del universo a grandes escalas (a distancias mayores de 150 Mpc), siendo la métrica Friedmann-Robertson-Walker (FRW) compatible con dichas hipótesis (este es el llamado principio cosmológico) [74]. Sin embargo, a "pequeñas" escalas (menos de 100 Mpc), se observan inhomogeneidades en la estructura del universo, como son los cúmulos de galaxias, las cuales se pudieran explicar como fluctuaciones de densidad, que surgen al considerar perturbaciones de la métrica FRW, las cuales se amplifican con la expansión. Sin embargo, existe una jerarquía de modelos cosmológicos en grado creciente de generalidad con relación a los modelos FRW, que son también homogéneos pero anisótropos. Estos son los modelos Bianchi [75, 68, 76] y los modelos Kantowski-Sachs.

2.1.1. Geometrías anisotrópicas

Con el objetivo de investigar las cosmologías anisótropas, es usual asumir una métrica de la forma [31, 77]:

$$dS^2 = -N(t)^2dt^2 + [e_1^1(t)]^{-2}dr^2 + [e_2^2(t)]^{-2}[d\theta^2 + S(\theta)^2 d\varphi^2] \tag{2.1}$$

donde $N(t)$ es la función de lapso que relaciona el paso del tiempo de cualquier observador con el tiempo cosmológico y $e_1^1(t)$, $e_2^2(t)$ son los factores de escala, que en principio pueden evolucionar de forma diferente.

Los vectores bases pueden escribirse en forma de coordenadas como:

$$e_0 = N^{-1}\partial_t, \;\; e_1 = e_1^1\partial_r, \;\; e_2 = e_2^2\partial_\theta, \;\; e_3 = e_3^3\partial_\varphi \tag{2.2}$$

donde $e_3^3 = e_2^2/S(\theta)$.

La métrica (2.1) puede describir tres familias geométricas diferentes, estas son:

$$S(\theta) = \begin{cases} \theta & \text{para } k = 0 \quad \text{(modelo Bianchi I)}, \\ \sinh\theta & \text{para } k = -1 \quad \text{(modelo Bianchi III)}, \\ \sin\theta & \text{para } k = 1 \quad \text{(modelo Kantowsky-Sachs)}. \end{cases}$$

donde k es el parámetro de curvatura espacial.

Por otra parte, aunque el modelo estándar de cosmología se basa en la métrica de FRW, se ha reportado que los resultados obtenidos utilizando la métrica KS son también compatibles con observaciones cosmológicas [78]. Aunque en la época actual el universo es considerado isótropo, en épocas tempranas pudo no haberlo sido y las anisotropías iniciales podrían haberse diluido con la evolución del universo [76]. Por lo tanto, considerar un modelo cosmológico con métrica KS nos daría la posibilidad de generalizar resultados conocidos para métricas FRW y nos permitiría explicar la isotropización del universo, sin incluir la isotropía como ingrediente en el modelo desde el principio. Este procedimiento sería más natural que imponer la métrica FRW desde el principio y estudiar entonces fluctuaciones de dicha métrica para explicar fenómenos que se observan a escalas menores donde el principio cosmológico no puede aplicarse.

2.1.2. Cantidades cinemáticas

Al tratar de representar la evolución de una partícula, un observador recurre a “grabar” la historia de esta, o sea, su línea mundo (en ingles wordline), como $x^\alpha = (t, x^i(t))$. En la cosmología este mecanismo no es factible ya que se necesita una descripción covariante (independiente del observador) de estas líneas mundo y de la velocidades de las partículas. Si tomamos a τ como el tiempo marcado por un reloj que se mueve con la partícula (tiempo comóvil), la línea mundo podría representarse como $x^\alpha = x^\alpha(\tau)$, independientemente de cualquier observador. Este tiempo comóvil es llamado tiempo propio, a partir del cual podemos expresar de forma covariante la cinética de la partícula por la 4-velocidad:

$$u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \tag{2.3}$$

y la 4-aceleración:

$$\dot{u}_{\mu} = u^{\upsilon}\nabla_{\upsilon}u_{\mu} \tag{2.4}$$

En lo anterior se considera las 4-velocidades de las líneas de mundo normalizadas ($u_{\mu}u^{\mu} = -1$) y τ es el tiempo propio medido por los observadores de las líneas de mundo fundamentales.

Al generalizar esta idea se puede considerar una descripción del contenido de materia como un fluido relativista. En cada punto del espacio-tiempo se puede definir un campo de 4-velocidades, que representa el movimiento promedio de la materia. Las líneas de mundo asociadas a este campo se denominan "observadores fundamentales", definiéndose esta 4-velocidad por (2.3) [79].

Dado u^{μ}, es posible definir dos tensores de proyección, uno que proyecta a lo largo del vector 4-velocidad u^{μ} y otro que determina las propiedades métricas de las hiper-superficies espaciales ortogonales a un observador (con 4-velocidad u^{μ}) [1]:

$$h_{\mu\upsilon} = g_{\mu\upsilon} + u_{\mu}u_{\upsilon} \tag{2.5}$$

el cual cumple las siguientes propiedades:

$$h^{\mu}_{\gamma}\, h^{\gamma}_{\upsilon} = h^{\mu}_{\upsilon}, \quad h^{\mu}_{\mu} = 3, \quad h_{\mu\upsilon}\, u^{\upsilon} = 0 \tag{2.6}$$

[1] En lo precedente todos los resultados que se exponen son basados en el formalismo covariante $1+3$. Para profundizar en este formalismo consultar [80, 81, 82].

y $g_{\mu\upsilon}$ es el tensor métrico.

Partiéndose de la descomposición de la primera derivada covariante de u^μ en sus partes irreducibles, definidas por sus propiedades de simetría [2]:

$$\nabla_\mu u_\upsilon = -u_\mu \dot{u}_\upsilon + \tilde{\nabla}_\mu u_\upsilon = -u_\mu \dot{u}_\upsilon + \sigma_{\mu\upsilon} + \frac{1}{3}\Theta h_{\mu\upsilon} - \omega_{\mu\upsilon} \tag{2.7}$$

donde (˜) representa la derivada covariante proyectada ortogonalmente y (˙) representa la derivada covariante temporal a lo largo de las líneas mundo fundamentales. $\sigma_{\mu\upsilon}$ es el tensor de anisotropía (shear), simétrico y libre de traza, el cual describe la tasa de distorsión del flujo de materia. $\omega_{\mu\upsilon}$ es el tensor de vorticidad, antisimétrico, que describe la rotación de la materia con respecto a un marco no rotante [3]. $\dot{u}_\upsilon$ es la 4-aceleración definida por (2.4) y Θ es el escalar de expansión, el cual describe la tasa de expansión (contracción) volumétrica del fluido mediante su relación con la escala de longitud promedio o factor de escala ℓ a lo largo de las líneas de flujo [4]:

$$\frac{\dot{\ell}}{\ell} = \frac{1}{3}\Theta \tag{2.8}$$

Y teniéndose en cuenta que $\omega_{(\mu\upsilon)} = \sigma_{[\mu\upsilon]} = 0$ y $\omega_{\mu\upsilon}u^\upsilon = \sigma_{\mu\upsilon}u^\upsilon = \dot{u}_\upsilon u^\upsilon = 0$ es posible demostrar que estos campos cinemáticos asociados con el tiempo propio τ en concordancia con el vector de campo u están definidos por:

$$\begin{aligned} \Theta &= \nabla_\mu u^\mu, \\ \sigma_{\mu\upsilon} &= \dot{u}_{(\mu}u_{\upsilon)} + \nabla_{(\mu}u_{\upsilon)} - \frac{1}{3}\Theta h_{\mu\upsilon}, \\ \omega_{\mu\upsilon} &= -u_{[\mu}\dot{u}_{\upsilon]} - \nabla_{[\mu}u_{\upsilon]} \end{aligned} \tag{2.9}$$

[2] Para ver un análisis detallado de este procedimiento consultar [82]. Se debe aclarar que en esta ecuación suele expresarse a $\omega_{\mu\upsilon}$ con signatura positiva. En [80] se explica el por qué de esta elección.

[3] En el modelo estándar FRW $\sigma_{\mu\upsilon} = \omega_{\mu\upsilon} = 0$.

[4] Debido a que en el contexto cosmológico es usual definir la constante de Hubble como $H = \frac{\Theta}{3}$, se nota que para geometrías FRW, ℓ coincide con el factor de escala (a).

donde los paréntesis y corchetes denotan los procesos de simetrización y antisimetrización respectivamente.[5]

Asumiéndose que N es una función positiva de t o sencillamente $N = 1$ y pasando a la calibración temporal síncronoga es posible escribir las cantidades cinéticas en términos de la métrica.[6], pudiendo extraerse las siguientes restricciones de las variables cinéticas: [31]

$$\begin{aligned} \sigma^{\mu}_{\upsilon} &= diag\ (0, -2\sigma_+, \sigma_+, \sigma_+), \\ w_{\mu\upsilon} &= 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

donde

$$\sigma_+ = \frac{1}{3}\frac{d}{dt}\left[\mathbf{ln}\ \frac{e_1^1}{e_2^2}\right] \tag{2.11}$$

Finalmente es posible expresar el parámetro de Hubble en términos de e_1^1 y e_2^2 teniendo presente que $H_i \equiv \frac{\dot{\ell}_i}{\ell_i}$ y $H \equiv \frac{1}{3}(\sum H_i)$ obteniéndose:

$$H = \frac{1}{3}\left(-2\,\frac{\dot{e}_2^2}{e_2^2} - \frac{\dot{e}_1^1}{e_1^1}\right) = -\frac{1}{3}\,\frac{d}{dt}\ \mathbf{ln}\left[\,e_1^1\,(e_2^2)^2\,\right] \tag{2.12}$$

2.2. Teorías f(R) con geometría anisotrópica

2.2.1. Variables Dinámicas

Como se apreció en la sección anterior de la métrica anisótropa (2.1) es posible obtener diferentes modelos cosmológicos definiéndose un valor para el parámetro de curvatura k. En lo adelante se trabajará con la geometría tipo Kantowski-Sachs (KS) es decir $k = 1$

[5] Esto es $A_{(\mu\upsilon)} = \frac{1}{2}[A_{\mu\upsilon} + A_{\upsilon\mu}]$ y $A_{[\mu\upsilon]} = \frac{1}{2}[A_{\mu\upsilon} - A_{\upsilon\mu}]$.

[6] Un sistema de referencia que satisface las condiciones $g_{0\alpha} = 0$, $g_{00} = 1$ se califica de síncronogo.

con el objetivo de obtener las variables dinámicas para las teorías *f(R)*.[7]

Utilizándose los resultados presentados en el epígrafe 1.1.2 y tomando a $8\pi G \equiv 1$ se pueden reformular las ecuaciones (1.36), (1.34), (A.24) como:

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{f'(R)} T_{\alpha\beta} + T^{(eff)}_{\alpha\beta} \tag{2.13}$$

$$f'(R)R + 3\Box f'(R) - 2f(R) = T \tag{2.14}$$

y

$$T^{(eff)}_{\alpha\beta} = \frac{1}{f'(R)} \left[\frac{f(R) - Rf'(R)}{2} g_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha \nabla_\beta f'(R) - g_{\alpha\beta} \Box f'(R) \right] \tag{2.15}$$

respectivamente.

En el formalismo 1+3 el Tensor energía-momentum puede descomponerse con respecto a la 4-velocidad u^μ como:

$$\tilde{T}_{\alpha\upsilon} = T_{\alpha\upsilon} = \mu \; u_\alpha u_\upsilon + 2q_{(\alpha} u_{\upsilon)} + P \; h_{\alpha\upsilon} + \pi_{\alpha\upsilon} \tag{2.16}$$

donde $\mu = T_{\alpha\upsilon} u^\alpha u^\upsilon$ es la *densidad de energía* relativista a μ^α, $q^\alpha = -T_{\upsilon\gamma} u^\upsilon h^{\gamma\alpha}$ es la *densidad de momentum relativista*, que es también el flujo de energía relativo a u^α y cumple que $q_\alpha u^\alpha = 0$, $P = \frac{1}{3}(T_{\alpha\upsilon} h^{\alpha\upsilon})$ es la *presión isotrópica* y $\pi_{\alpha\upsilon}$ es el *tensor de presión anisotrópico*, el cual por definición es libre de traza y tiene las siguientes propiedades $\pi^\alpha_\alpha = 0$, $\pi_{\alpha\upsilon} = \pi_{(\alpha\upsilon)}$ y $\pi_{\alpha\upsilon} u^\upsilon = 0$.

Como es conocido un escenario físico puede ser modelado por una ecuación de estado que nos relacione la presión P con la densidad μ, por ejemplo, es muy conocido el caso de un

[7] Para profundizar el estudio de las teorías *f(R)* con geometría Bianchi I y Bianchi III consultar [83].

fluido perfecto para el cual se imponen las restricciones:

$$q^{\alpha} = \pi_{\alpha\upsilon} = 0 \quad \leftrightarrow \quad T_{\alpha\upsilon} = \mu\, u_{\alpha}u_{\upsilon} + P\, h_{\alpha\upsilon}.$$

En general un fluido perfecto tiene una ecuación de estado $P = p(\mu)$. Si asumimos $p = 0$, tenemos el caso más simple de materia libre de presión o materia fría ("polvo").

Entonces se hace necesario encontrar las ecuaciones para P, μ, π y q en aras de describir los campos de materia de manera que estén en concordancia con un cuadro físico coherente.

Para el caso de las teorías *f(R)* el Tensor de energía-momentum puede verse como la suma del "Tensor estándar" y el denominado "Tensor efectivo" (2.15), representando un "fluido de materia estándar" y un "fluido de curvatura", respectivamente. Este último representa las contribuciones no-einstenianas de las interacciones gravitacionales.

Por tanto se hace necesario obtener las ecuaciones de las componentes (μ, P, q, π) del "Tensor efectivo" ("fluido de curvatura"), aplicando las ideas expuestas en el epígrafe 2.1.2 [8]:

$$\begin{aligned}
\mu^{(eff)} &= -\frac{1}{2f'(R)}\left[f(R) - Rf'(R) + 6H\frac{d}{dt}f'(R)\right] \\
P^{(eff)} &= -\frac{1}{2f'(R)}\left[-f(R) + Rf'(R) - 4H\frac{d}{dt}f'(R) - 2\frac{d^2}{dt^2}f'(R)\right] \\
q^{(eff)} &= 0
\end{aligned} \tag{2.17}$$

También según [31] puede expresarse el tensor $\pi^{(eff)}$ para estas teorías como

$$\pi_{\upsilon}^{\alpha(eff)} = diag(0, -2\pi_{+}, \pi_{+}, \pi_{+})$$

donde $\pi_{+} = -\frac{\frac{d}{dt}f'(R)}{f'(R)}\sigma_{+}$

[8] En el Anexo A.4 se obtienen las expresiones para $\mu^{(eff)}$ y $P^{(eff)}$

Finalmente las componentes del Tensor energía-momentum son:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\mu_{(m)}}{f'(R)} + \mu^{(eff)} \\ P &= \frac{p_{(m)}}{f'(R)} + P^{(eff)} \\ q &= \frac{q_{(m)}}{f'(R)} \\ \pi^{\mu}_{v} &= \frac{\pi^{\mu}_{v(m)}}{f'(R)} + \pi^{\mu(eff)}_{v} \end{aligned} \tag{2.18}$$

2.2.2. Ecuaciones cosmológicas

Para calcular la dinámica del sistema se emplean las ecuaciones del campo de Einstein definidas de la forma (2.13), utilizando una métrica homogénea y anisótropa tipo Kantowsky-Sachs y considerando el Tensor de energía-momentum que describe el contenido de materia ("Tensor estándar") en el universo como un fluido perfecto, es decir:

$$T_{\alpha v} = \rho\, u_{\alpha} u_{v} + p\, h_{\alpha v}$$

teniéndose en cuenta que $T_{00} = \rho_m$ es la densidad de energía, $T_{0i} = 0$ es la densidad de momentum, $T_{ij} = p_m \delta_{ij}$ es el flujo de momento de i a través de la superficie j y los resultados obtenidos en el epígrafe 2.1.2, así como la relación (2.18) obtenemos las ecuaciones cosmológicas para el modelo propuesto:[9]

$$\begin{aligned} 3\sigma_+^2 - 3H^2 -^2 K &= -\frac{\rho_m}{f'(R)} - \mu^{(eff)} \\ -3(\sigma_+ + H)^2 - 2\dot{\sigma}_+ - 2\dot{H} -^2 K &= \frac{p_m}{f'(R)} + P^{(eff)} - 2\pi_+ \\ -3\sigma_+^2 + 3\sigma_+ H - 3H^2 + \dot{\sigma}_+ - 2\dot{H} &= \frac{p_m}{f'(R)} + P^{(eff)} + \pi_+ \end{aligned} \tag{2.19}$$

[9] Los sub-índices i, j corren desde 1 hasta 3.

donde ρ_m y p_m son la densidad de energía y la presión de un fluido de materia perfecto respectivamente, dando la razón entre estas, la ecuación del parámetro de estado de la materia.

$$w = \frac{p_m}{\rho_m} \tag{2.20}$$

Además ${}^2K = (e_2^2)^2$, es la curvatura de Gauss de las 3-esferas y su ecuación de evolución en función de las ecuaciones obtenidas para H y σ_+ es:[10]

$$\begin{aligned} e_0\ {}^2K &= e_0(e_2^2)^2 = 2\ ({}^2K)\frac{\dot{e}_2^2}{e_2^2} \\ {}^2\dot{K} &= -2(\sigma_+ + H)\ ({}^2K) \end{aligned} \tag{2.21}$$

se debe recordar que $N = 1$.

Adicionalmente la evolución para e_1^1 sería:

$$e_0 e_1^1 = \dot{e}_1^1 = (-H + 2\sigma_+)\, e_1^1 \tag{2.22}$$

Por último como es conocido la constante de Hubble está relacionada con otros parámetros cosmológicos, observando la primera ecuación de (2.19) es posible definir dichos parámetros de densidad (en analogía con lo que normalmente se hace en universos FRW), como son la densidad adimensional de curvatura:

$$\Omega_k \equiv -\frac{{}^2K}{3H^2} \tag{2.23}$$

la densidad adimensional de materia:

$$\Omega_m \equiv \frac{\rho_m}{3H^2 f'(R)} \tag{2.24}$$

[10] Para comprender la obtención de las ecuaciones de evolución puede consultarse [84].

la densidad adimensional del "fluido de curvatura":

$$\Omega_{curvfl} \equiv \frac{\mu^{(eff)}}{3H^2} \tag{2.25}$$

y la densidad adimensional de anisotropía:

$$\Omega_\sigma \equiv \left(\frac{\sigma_+}{H}\right)^2 \tag{2.26}$$

Cumpliéndose que:

$$\Omega_k + \Omega_m + \Omega_{curvfl} + \Omega_\sigma = 1 \tag{2.27}$$

Reescribiendo la ecuación de la traza (2.14) para una métrica tipo Kantowsky-Sachs y considerando la descripción del contenido de materia como un fluido perfecto se obtiene:[11]

$$-3\frac{d^2}{dt^2}f'(R) - 9H\frac{d}{dt}f'(R) + f'(R)R - 2f(R) = -\rho_m + 3p_m \tag{2.28}$$

además el escalar de Ricci puede ser escrito como:

$$R = 12H^2 + 6\sigma_+^2 + 6\dot{H} + 2\,{}^2K \tag{2.29}$$

Reduciéndose el sistema de ecuaciones (2.19) junto a (2.28) con respecto a $\dot{\sigma_+}$, ${}^2K$ y $\dot{H}$ y teniendo presente las ecuaciones (2.17), es posible encontrar la ecuación de propagación del *shear*:

$$\dot{\sigma}_+ = -\sigma_+^2 - 3H\sigma_+ + H^2 - \frac{\rho_m}{3f'(R)} - \frac{1}{6}\left[R - \frac{f(R)}{f'(R)}\right] + \frac{(H-\sigma_+)}{f'(R)}\frac{d}{dt}f'(R) \tag{2.30}$$

[11] La definición del operador $\Box$ para una métrica homogénea es $\Box A = -\left(\frac{d^2}{dt^2} + 3H\frac{d}{dt}\right)A$

y la ecuación de restricción de Gauss:

$$ {}^{2}K = 3\sigma_+^2 - 3H^2 - \frac{\rho_m}{f'(R)} + \frac{1}{2}\left[R - \frac{f(R)}{f'(R)}\right] - \frac{3H}{f'(R)}\frac{d}{dt}f'(R) \tag{2.31} $$

Con estos elementos podemos obtener la ecuación que gobierna la evolución temporal de la expansión, la cual recibe el nombre de ecuación de *Raychaudhuri* también conocida como ecuación básica de la atracción gravitacional: [12]

$$ \dot{H} = -H^2 - 2\sigma_+^2 - \frac{1}{6f'(R)}\left[\rho_m + 3p_m\right] - \frac{H}{2f'(R)}\frac{d}{dt}f'(R) + \frac{1}{6}\left[R - \frac{f(R)}{f'(R)} - \frac{3}{f'(R)}\frac{d^2}{dt^2}f'(R)\right] \tag{2.32} $$

Es conveniente utilizar la ecuación de la traza (2.28) para la eliminación de la derivada $\frac{d^2}{dt^2}f'(R)$ en (2.32), obteniéndose así una expresión más simple para esta:

$$ \dot{H} = -H^2 - 2\sigma_+^2 - \frac{\rho_m}{3f'(R)} + \frac{f(R)}{6f'(R)} + \frac{1}{f'(R)}H\frac{d}{dt}f'(R) \tag{2.33} $$

Además la ecuación (2.31) puede expresarse como:

$$ \left[H + \frac{1}{2}\frac{\frac{d}{dt}f'(R)}{f'(R)}\right]^2 + \frac{1}{3}\,{}^{2}K = \sigma_+^2 + \frac{\rho_m}{3f'(R)} + \frac{1}{6}\left[R - \frac{f(R)}{f'(R)}\right] + \frac{1}{4}\left[\frac{\frac{d}{dt}f'(R)}{f'(R)}\right]^2 \tag{2.34} $$

Finalmente, la ecuación de conservación para la materia sería

$$ \dot{\rho}_m = -3\gamma H\rho_m. \tag{2.35} $$

En resumen, las ecuaciones cosmológicas para las teorías *f(R)* con geometría Kantowski-Sachs son la ecuaciones de evolución de la curvatura de las 2-esferas (2.21); la ecuación de evolución de e_1^1 (2.22); la ecuación traza (2.28), la ecuación de evolución de las anisotropías

[12] Para el modelo estándar se reduce a una de las ecuaciones de Friedmann.

(*shear*) (2.30), la ecuación de Raychaudhuri (2.33), la restricción de Gauss escrita como (2.34) y la ecuación de conservación de la materia (2.35).

2.3. Sistema Dinámico

La teoría de los sistemas dinámicos proporciona una herramienta particularmente útil en el estudio de los modelos cosmológicos, ya que como es conocido en la actualidad no existen métodos generales de solución para las ecuaciones cosmológicas obtenidas, permitiéndonos obtener una visión global de la dinámica de la expansión del universo sin necesidad de resolver las ecuaciones diferenciales. [13]

2.3.1. Normalización y espacio de fase

Para la realización del análisis del espacio de fase, así como el análisis de la estabilidad del modelo, se hace necesario transformar las ecuaciones cosmológicas en un sistema dinámico autónomo [85], para ello se recurre a la definición de variables auxiliares adimensionales o variables dinámicas:

$$\begin{gathered} Q = \frac{H}{D}, \qquad \Sigma = \frac{\sigma_+}{D}, \qquad x = \frac{1}{2Df'(R)}\frac{df'(R)}{dt}, \\ y = \frac{1}{6D^2}\left[R - \frac{f(R)}{f'(R)}\right], \quad z = \frac{\rho_m}{3D^2 f'(R)}, \quad K = \frac{{}^2K}{3D^2}, \quad E_1^1 = \frac{e_1^1}{D} \end{gathered} \tag{2.36}$$

donde se ha definido a:

$$D = \sqrt{\frac{({}^2K)}{3} + \left(H + \frac{1}{2f'(R)}\frac{df'(R)}{dt}\right)^2} \equiv \sqrt{\frac{({}^2K)}{3} + \left(H + \frac{f''(R)}{2f'(R)}\frac{dR}{dt}\right)^2} \tag{2.37}$$

[13] Ver epígrafe 1.2 para comprensión de esta teoría.

Reescribiéndose (2.34) y (2.37) en términos de las variables auxiliares es posible deducirse las restricciones que cumplen estas variables:

$$x^2 + y + z + \Sigma^2 = 1 \tag{2.38}$$

$$K + (Q + x)^2 = 1. \tag{2.39}$$

Estas restricciones permiten expresar a z y K en función de las otras variables.

Además al definir a:

$$m = \frac{Rf''(R)}{f'(R)} = \frac{d \ln f'(R)}{d \ln R} \tag{2.40}$$

$$r = -\frac{Rf'(R)}{f(R)} = -\frac{d \ln f(R)}{d \ln(R)} \tag{2.41}$$

y

$$M = \frac{r(1 + r + m)}{m} \tag{2.42}$$

donde se introduce la hipótesis de que $m = m(r)$, lo cual implica que $M = M(r)$ y la evolución de la variable r es:

$$\hat{r} = 2Mx$$

siendo $(\hat{\ })$ la derivada con respecto a τ, la cual es introducida como una nueva variable temporal definida como $d\tau = Ddt$. [14]

Finalmente de la propia definición de las variables dinámicas (2.36) se obtienen las cotas

[14] En lo adelante $(\hat{\ })$ denota la derivada con respecto a τ.

$y \geq 0$, $z \geq 0$ y $K \geq 0$, definiéndose así un conjunto compacto:

$$Q \in [-2,2]\,, \quad \Sigma \in [-1,1]\,, \quad K \in [0,1]\,, \quad x \in [-1,1]\,, \quad y \in [0,1]\,, \quad z \in [0,1] \tag{2.43}$$

despreciádose el análisis de E_1^1 debido a que en el estudio dinámico de los modelos *f(R)* con geometría tipo Kantowsky-Sachs toda la información pertinente es dada por la evolución de las otras variables.

Utilizándose las variables dinámicas (2.36) junto con las restricciones (2.38) se puede reducir el sistema cosmológico completo en estudio a:

$$\hat{r} = 2Mx \tag{2.44}$$

$$\begin{aligned}\hat{Q} = & -\frac{1}{2(1+r)}\{\, 2(1+r) - 2(1+r)x^2 - 2ry + 2Q^3(1+r)\Sigma + 2(1+r)\Sigma^2 + \\ & +Q^2(1+r)(2+3x^2(-2+\gamma)+4x\Sigma - 6\Sigma^2 + 3\gamma(-1+y+\Sigma^2)) + \\ & +Q(1+r)(-2\Sigma + x(-2+3x^2(-2+\gamma)+2x\Sigma - 6\Sigma^2 + \\ & +3\gamma(-1+y+\Sigma^2)))\,\}\end{aligned} \tag{2.45}$$

$$\begin{aligned}\hat{\Sigma} = & \frac{1}{2}\{\, -2 + 2(Q+x)^2 - 3(Q+x)(2+x^2(-2+\gamma)+(-1+y)\gamma)\Sigma - \\ & -2(-1+Q+x)(1+Q+x)\Sigma^2 - 3(Q+x)(-2+\gamma)\Sigma^3\,\}\end{aligned} \tag{2.46}$$

$$\begin{aligned}\hat{x} \;=\;& -\frac{1}{2(1+r)}\,\{-4-4r+6Qx+6Qrx+10x^2+10rx^2-6Qx^3-\\ & -6Qrx^3-6x^4-6rx^4+2ry+3\gamma+3r\gamma-3Qx\gamma-\\ & -3Qrx\gamma-6x^2\gamma-6rx^2\gamma+3Qx^3\gamma+3Qrx^3\gamma+\\ & +3x^4\gamma+3rx^4\gamma-3y\gamma-3ry\gamma+3Qxy\gamma+3Qrxy\gamma+\\ & +3x^2y\gamma+3rx^2y\gamma+2(1+r)x(-1+Q+x)(1+Q+x)\Sigma+\\ & +(1+r)(4+3x(Q+x)(-2+\gamma)-3\gamma)\Sigma^2\} \end{aligned} \tag{2.47}$$

$$\begin{aligned}\hat{y} \;=\;& -\frac{1}{1+r}\,y\,\{3(1+r)x^3(-2+\gamma)+(1+r)x^2(3Q(-2+\gamma)+2\Sigma)+\\ & +x(4+2r-3\gamma-3r\gamma+3y\gamma+3ry\gamma+4Q(1+r)\Sigma+\\ & +3(1+r)(-2+\gamma)\Sigma^2)+(1+r)(-2\Sigma+Q(2(Q-3\Sigma)\Sigma+\\ & +3\gamma(-1+y+\Sigma^2)))\} \end{aligned} \tag{2.48}$$

obtiéndose un sistema dinámico. El cual fue deducido derivándose las variables dinámicas (2.36) respecto al parámetro temporal τ, reflejando como se aprecia, un sistema de ecuaciones diferenciales autónomo 5-dimensional:

$$\hat{X} \;=\; g(X)$$

donde X es el vector columna constituido por las variables dinámicas ($X = (r, Q, \Sigma, x, y)^T$) y $g(X)$ es el vector columna correspondiente de las ecuaciones autónomas.

Por consiguiente el análisis dinámico se reduce al estudio del sistema (2.44) - (2.48) definido en un espacio de fase en el cual las nuevas ecuaciones dinámicas tienen sentido físico:

$$\begin{aligned}\Psi &= \left\{x^2+y+\Sigma^2\leq 1, |Q+x|\leq 1, x\in[-1,1], y\in[0,1], \Sigma\in[-1,1], Q\in[-2,2]\right\} \\ &\quad \times\{r\in R\}\end{aligned} \tag{2.49}$$

deduciéndose este, del análisis de (2.43) y las restricciones (2.38). Además para que el fluido perfecto satisfaga las condiciones estándares de energía se asume que $1 \leq \gamma \leq 2$.

2.3.2. Análisis de los puntos críticos

Los puntos críticos del sistema dinámico en estudio son obtenidos igualando los miembros derechos de la EDO a cero y resolviéndolo para las variables dinámicas. De las ecuaciones (2.44)-(2.48) se distinguen dos casos: en los puntos críticos la variable dinámica x es cero o en los puntos críticos, r es tal que la función $M(r)$ se anula. Se denotan los valores de r donde $M(r)$ se anula por $r = r^*$, o sea, $r^* = M^{-1}(0)$.

En la tabla 2.1 se muestran los puntos críticos para el caso $(r = r^* = M^{-1}(0))$, notándose que:

- Los puntos $N^{\pm}(r^*)$, $P_1^{\pm}(r^*)$ y $P_2^{\pm}(r^*)$ existen siempre. $P_3^{\pm}(r^*)$ no pertenece al espacio de fase. Si se relaja la condición $\gamma \geq 1$, este punto existiría [15].
- El sistema admite dos círculos de puntos críticos dados por $C^{\pm}(r^*) : r = r^*$, $y = 0$, $\Sigma^2 + Q^2 \pm (-2Q) = 0$, $x + Q = \pm 1$ y los puntos $N^{\pm}(r^*)$ y $L^{\pm}(r^*)$ que son puntos especiales en dichas curvas de puntos críticos..
- Los restantes puntos $A^{\pm}(r^*)$, $B^{\pm}(r^*)$, $P_4^{\pm}(r^*)$, $P_5^{\pm}(r^*)$ y $P_6^{\pm}(r^*)$ existen para determinados valores en el espacio de parámetros (ver tabla 2.1).[16]

[15] Ver análisis en [31] donde relaja esta condición y aparece el equivalente de este punto para el caso $f(R) = R^n$.

[16] A menos que se especifique lo contrario en el dominio de existencia γ está definida en: $1 \leq \gamma \leq 2$.

Tabla 2.1.: En la tabla se muestran los puntos críticos del sistema de ecuaciones (2.44) - (2.48) para el caso en que $r = r^* = M^{-1}(0)$. Se utilizan las notaciones $A = \frac{-6(1+r^*)(-4r^*+2\gamma r^*+3\gamma^2-5\gamma)}{(r^*)^2(-4+3\gamma)^2}$, $B = \frac{9(4(r^*)^2+10r^*+7)(1+r^*)^2}{(7(r^*)^2+16r^*+10)^2}$, $C = \frac{2(1+r^*)(4r^*+3\gamma)}{(3\gamma r^*+3\gamma-2r^*)^2}$ y $b^{\pm} = \frac{-4-9\gamma}{4(1+3\gamma)} \pm \frac{1}{4}\sqrt{\frac{16+48\gamma+9\gamma^2}{(1+3\gamma)^2}}$.

Pts.	r	Q	Σ	y	x	Existencia
$A^{\pm}(r^*)$	r^*	$\pm\frac{1+2r^*}{3(1+r^*)}$	0	$\frac{(4r^*+5)(1+2r^*)}{9(1+r^*)^2}$	$\pm\frac{2+r^*}{3(1+r^*)}$	$r^* \leq \frac{-5}{4}$ ó $r^* \geq \frac{-1}{2}$
$B^{\pm}(r^*)$	r^*	$\pm\frac{-2}{3(-2+\gamma)}$	0	0	$\pm\frac{-4+3\gamma}{3(-2+\gamma)}$	$1 \leq \gamma \leq \frac{5}{3}$
$C^{+}(r^*)$	r^*	Q	$\sqrt{-Q(Q-2)}$	0	$-Q+1$	$0 \leq Q \leq 2$
$C^{-}(r^*)$	r^*	Q	$\sqrt{-Q(Q+2)}$	0	$-Q-1$	$-2 \leq Q \leq 0$
$N^{\pm}(r^*)$	r^*	0	0	0	± 1	siempre
$L^{\pm}(r^*)$	r^*	± 2	0	0	∓ 1	siempre
$P_1^{\pm}(r^*)$	r^*	± 1	± 1	0	0	siempre
$P_2^{\pm}(r^*)$	r^*	± 1	∓ 1	0	0	siempre
$P_3^{\pm}(r^*)$	r^*	$\pm\frac{-2}{-4+3\gamma}$	$\pm\frac{3\gamma+2r^*}{r^*(-4+3\gamma)}$	A	$\pm\frac{3\gamma(1+r^*)}{(-4+3\gamma)r^*}$	$\notin \Psi$
$P_4^{\pm}(r^*)$	r^*	$\pm\frac{2(r^*)^2+5r^*+5}{7(r^*)^2+16r^*+10}$	$\mp\frac{2(r^*)^2+2r^*-1}{7(r^*)^2+16r^*+10}$	B	$\pm\frac{3(2+r^*)(1+r^*)}{7(r^*)^2+16r^*+10}$	$r^* \leq \frac{1}{2}(-1-\sqrt{3})$; ó
						$r^* \geq \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3})$
$P_5^{\pm}(r^*)$	r^*	$\pm\frac{2}{(-4+3\gamma)}$	$\frac{2\sqrt{3\gamma-5}}{-4+3\gamma}$	0	$\pm\frac{3(-2+\gamma)}{-4+3\gamma}$	$\frac{5}{3} \leq \gamma \leq 2$
$P_6^{\pm}(r^*)$	r^*	$\pm\frac{-2r^*}{3\gamma r^*+3\gamma-2r^*}$	0	C	$\pm\frac{3\gamma(1+r^*)}{3\gamma r^*+3\gamma-2r^*}$	$1 \leq \gamma < \frac{4}{3}, b^- \leq r^* \leq -1$
						$1 \leq \gamma < \frac{4}{3}, -\frac{3\gamma}{4} \leq r^* \leq b^+$ ó
						$\frac{4}{3} < \gamma < \frac{5}{3}, b^- \leq r^* \leq -\frac{3}{4}$ ó
						$\frac{4}{3} < \gamma < \frac{5}{3}, -1 \leq r^* \leq b^+$ ó
						$\frac{5}{3} < \gamma < 2, -1 \leq r^* \leq b^+$ ó
						$\gamma = \frac{4}{3}, \frac{-4}{5} - \frac{\sqrt{6}}{5} \leq r^* \leq \frac{-4}{5} + \frac{\sqrt{6}}{5}$ ó
						$\gamma = \frac{5}{3}, -1 \leq r^* \leq \frac{-1}{3}$ ó
						$\gamma = \frac{5}{3}, r^* = \frac{-5}{4}$
$N_1^{\pm}(r^*)$	r^*	± 2	± 1	0	0	$\notin \Psi$
$N_2(r^*)$	r^*	$-\frac{2\sqrt{3}\sqrt{\frac{-2+3\gamma}{-2+\gamma}}}{3(-2+3\gamma)}$	0	0	$\frac{\sqrt{3}\sqrt{\frac{-2+3\gamma}{-2+\gamma}}}{3}$	$\notin \Psi$
$N_3^{\pm}(r^*)$	r^*	$\pm\frac{2}{-4+3\gamma}$	$\mp\frac{2}{(-4+3\gamma)(3\gamma-5)}$	0	$\mp\frac{3(\gamma-1)}{3\gamma-5}$	$\notin \Psi$

En la tabla (2.2) se presentan los puntos críticos encontrados para $x = 0$:

- Los puntos $P_7^{\pm}$ no satisfacen las condiciones de existencias dadas, ya que la variable dinámica Q no satisface las restricciones en (2.49).

- Los puntos $N_1^{\pm}(r^*)$, $N_2(r^*)$, $N_3^{\pm}(r^*)$ no satisfacen la condición $-1 \leq Q + x \leq 1$, luego no pertenecen al espacio de fase definido por (2.49).

Tabla 2.2.: En la tabla se muestran los puntos críticos del sistema de ecuaciones (2.44) - (2.48) para el caso en que $x = 0$ ($P_7^{\pm} - P_{11}^{\pm}$).

Pts.	r	Q	Σ	y	x	Existencia
$P_7^{\pm}$	r_c	$\pm\, 2$	$\pm\, 1$	0	0	$\notin \Psi$
$P_8^{\pm}$	r_c	$\pm\, 1$	$\pm\, 1$	0	0	siempre
$P_9^{\pm}$	r_c	± 1	$\mp\, 1$	0	0	siempre
$P_{10}^{\pm}$	-2	$\pm\, 1$	0	1	0	siempre
$P_{11}^{\pm}$	-2	$\pm\, \frac{1}{2}$	$\mp\, \frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	0	siempre

2.3.3. Estabilidad de los puntos críticos

Utilizándose las variables dinámicas (2.36) en el epígrafe 2.3.1 fue posible transformar las ecuaciones cosmológicas de movimiento ((2.28), (2.30), (2.33), (2.34), (2.21)) en un sistema autónomo ((2.44) - (2.48)), es decir en la forma $\hat{X} = g(X)$. Una vez presentados las condiciones de existencia de los puntos críticos (X_c) del sistema procederemos a realizar el análisis de la estabilidad de las perturbaciones de las ecuaciones dinámicas en la cercanía de estos. Esto permite determinar la estabilidad de dichas soluciones sin necesidad de resolver el sistema numéricamente.

Con el fin de determinar las propiedades de estabilidad en la vecindad de estos puntos críticos es necesario el estudio de los valores propios de la matriz de linealización evaluada en cada punto, para a partir de ellos determinar el tipo de solución y su estabilidad.[17]

Como fue comentado en el epígrafe anterior, el sistema (2.44)-(2.48) admite dos círculos de puntos críticos no aislados dados por $C^{\pm}(r^*)$, los cuales corresponden a soluciones definidas en todo el espacio de fase, satisfaciendo que $K = y = z = 0$. Para una mayor transparencia en el análisis de su estabilidad, se propone la siguiente parametrización:

$$C^{\pm}(r^*) = \begin{cases} Q = \pm 1 + \sin u \\ \Sigma = \cos u & \quad u \in [0, 2\pi] \\ x = -\sin u \end{cases}$$

O sea, los puntos críticos en $C^{\pm}(r^*)$ tienen coordenadas:

$$\pm 1 + \sin u,\ \cos u,\ 0,\ -\sin u,\ r^*$$

con autovalores dados por:

$$\begin{aligned} \{0 \quad , \quad & (\pm 4 - 2\cos u),\ \pm(6 - 3\gamma) + (4 - 3\gamma)\sin u, \\ & 2\left(\pm 3 + (1 + \frac{1}{1 + r^*})\ \sin u\right),\ -2M'(r^*)\sin u\} \end{aligned} \tag{2.50}$$

Como se nota existe un autovalor nulo. Luego como los puntos son no hiperbólicos el análisis de estabilidad local de la linealización no es concluyente. Sin embargo como el vector propio asociado al valor propio cero es tangente a la curva de equilibrio, las curvas son en realidad "normalmente hiperbólicas" [86], y por tanto se le puede analizar la estabilidad mediante el estudio de la signatura de las partes reales de los valores propios

[17] Consultar epígrafe 1.2.

no nulos, notándose que:

- Esta familia de puntos son no hiperbólicos para valores de u que reducen a cero algún valor propio o para $M'(r^*) = 0$.
- Para el caso de los valores de u que no cumplen con lo anterior, se tiene que ninguna parte de $C^+(r^*)$ (resp., $C^-(r^*)$) es atractor (resp., fuente), así que cualquier parte de $C^+(r^*)$ (resp., $C^-(r^*)$) o es fuente (resp., sumidero) o es silla. Ver detalles en la tabla 2.3, para casos no representados $C^+(r^*)$ y $C^-(r^*)$ son puntos silla.
- Entre las curvas de $C^\pm(r^*)$ podemos encontrar los puntos críticos $L^+(r^*) = C^+(r^*)|_{u=\frac{\pi}{2}}$, $N^-(r^*) = C^-(r^*)|_{u=\frac{\pi}{2}}$, $L^-(r^*) = C^-(r^*)|_{u=\frac{3\pi}{2}}$, $N^+(r^*) = C^+(r^*)|_{u=\frac{3\pi}{2}}$, $P_1^+(r^*) = C^+(r^*)|_{u=0}$, $P_1^-(r^*) = C^-(r^*)|_{u=\pi}$ y $P_2^+(r^*) = C^+(r^*)|_{u=\pi}$, $P_2^-(r^*) = C^-(r^*)|_{u=0}$

Del análisis de la estabilidad de los restantes puntos críticos (tabla 2.1) y teniendo presente los autovalores de estos (tabla 2.4), se deduce que:

- Los puntos $L^-(r^*)$ (resp., $L^+(r^*)$) y $N^-(r^*)$ (resp., $N^+(r^*)$) representan atractores locales de futuro (resp., de pasado) para los valores de parámetros expresados en la tabla 2.6. En otro caso estos representan puntos sillas.
- Para la región en el espacio de parámetros donde $A^+(r^*)$ (resp., $A^-(r^*)$) es hiperbólico, este se comporta como un atractor de futuro (resp., de pasado) (ver los valores de parámetros expresados en la tabla 2.7). En otro caso son puntos silla.
- Para la región en el espacio de parámetros donde $P_6^\pm(r^*)$, $P_4^\pm(r^*)$ y $B^\pm(r^*)$ son hiperbólicos, estos se comportan como puntos sillas (para valores de parámetros fuera de los expresados en la tabla 2.5).
- Para el estudio de los puntos $P_1^\pm(r^*)$, $P_2^\pm(r^*)$ y $P_5^\pm(r^*)$ se hace necesario recurrir al teorema de la variedad central, pues estos presentan una variedad central 2D. Notándose que los puntos $P_1^\pm(r^*)$ y $P_2^\pm(r^*)$ son casos particulares de $P_8^\pm$ y $P_9^\pm$

Tabla 2.3.: En la tabla se muestran las condiciones de estabilidad de los círculos de puntos críticos dados por $C^{\pm}$.

$$a = \frac{-3}{-3+\sin u} - 2, \quad b = \frac{4}{3} - \frac{2}{3-3\sin u}, \quad c = \frac{3}{3+\sin u} - 2, \quad d = \frac{2}{3}(2 + \frac{1}{1+\sin u})$$

Ptos	Atractor	Fuente
$C^+(r^*)$	Nunca	$\pi < u < 2\pi$, $r^* < -1$, $M'(r^*) > 0$
		$\pi < u < 2\pi$, $r^* > c$, $M'(r^*) > 0$
		$0 < u < \pi$, $\gamma \neq 2, r^* > -1$, $u \neq \frac{\pi}{2}$, $M'(r^*) < 0$
		$0 < u < \pi$, $\gamma \neq 2$, $\gamma \neq \frac{5}{3}$, $r^* > -1$, $M'(r^*) < 0$
		$0 < u < \pi$, $\gamma > d$, $\gamma \neq 2$, $r^* > -1$, $M'(r^*) < 0$
		$0 < u < \pi$, $\gamma \neq 2, r^* < c$, $u \neq \frac{\pi}{2}$, $M'(r^*) < 0$
		$0 < u < \pi$, $\gamma \neq 2$, $\gamma \neq \frac{5}{3}$, $r^* < c$, $M'(r^*) < 0$
		$0 < u < \pi$, $\gamma > d$, $\gamma \neq 2$, $r^* < c$, $M'(r^*) < 0$
$C^-(r^*)$	$0 < u < \pi$, $r^* > a$, $M'(r^*) > 0$	Nunca
	$0 < u < \pi$, $r^* < -1$, $M'(r^*) > 0$	
	$\pi < u < 2\pi$, $\gamma \neq 2$, $r^* > -1$, $u \neq \frac{3\pi}{2}$, $M'(r^*) < 0$	
	$\pi < u < 2\pi$, $\gamma \neq 2$, $\gamma \neq \frac{5}{3}$, $r^* > -1$, $M'(r^*) < 0$	
	$\pi < u < 2\pi$, $\gamma > b$, $\gamma \neq 2$, $r^* > -1$, $M'(r^*) < 0$	
	$\pi < u < 2\pi$, $\gamma \neq 2$, $r^* < a$, $u \neq \frac{3\pi}{2}$, $M'(r^*) < 0$	
	$\pi < u < 2\pi$, $\gamma \neq 2$, $\gamma \neq \frac{5}{3}$, $r^* < a$, $M'(r^*) < 0$	
	$\pi < u < 2\pi$, $\gamma > b$, $\gamma \neq 2$, $r^* < a$, $M'(r^*) < 0$	

Tabla 2.4.: En la tabla se muestran los autovalores de los puntos crítico correspondientes a la tabla 2.1.

$A = \frac{2}{3}(-1 + \frac{1}{(1+r^*)^2}) + \gamma(-2 + \frac{1}{1+r^*}), \quad B = \frac{3\gamma+r^*(4+9\gamma+(2+6\gamma)r^*)}{3(1+r^*)^2},$

$C^{\pm} = \frac{-3(7+2r^*(5+2r^*)\pm\sqrt{-1+26r^*+20(r^*)^2}\sqrt{7+2r^*(5+2r^*)})}{20+2r^*(16+7r^*)},$

$D^{\pm} = \frac{-(3\gamma+3r^*(-2+3\gamma+2(-1+\gamma)r^*)\pm\sqrt{1+r^*}\sqrt{81\gamma^2+r^*(3\gamma(52+87\gamma)+4r^*(41+57\gamma+54\gamma^2+(5+3\gamma)^2r^*)))}{(2(1+r^*)(3\gamma+(-2+3\gamma)r^*))}$

Puntos	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
$L^{\pm}(r^*)$	± 4	0	$\pm(10-6\gamma)$	$\pm(8+\frac{2}{1+r^*})$	$\mp 2M'(r^*)$
$N^{\pm}(r^*)$	± 4	± 2	0	$\pm(4-\frac{2}{1+r^*})$	$\pm 2M'(r^*)$
$P_1^{\pm}(r^*)$	± 6	± 2	0	0	$\mp 3(-2+\gamma)$
$P_2^{\pm}(r^*)$	± 6	± 6	0	0	$\mp 3(-2+\gamma)$
$A^{+}(r^*)$	$-\frac{(1+2r^*)(5+4r^*)}{3(1+r^*)^2}$	$-\frac{(1+2r^*)(5+4r^*)}{3(1+r^*)^2}$	$\frac{2-4r^*(1+r^*)}{3(1+r^*)^2}$	A	$\frac{2(2+r^*)M'(r^*)}{3(1+r^*)}$
$A^{-}(r^*)$	$\frac{-2+4r^*(1+r^*)}{3(1+r^*)^2}$	$\frac{(1+2r^*)(5+4r^*)}{3(1+r^*)^2}$	$\frac{(1+2r^*)(5+4r^*)}{3(1+r^*)^2}$	B	$-\frac{2(2+r^*M'(r^*))}{3(1+r^*)}$
$B^{\pm}(r^*)$	$\pm\frac{4}{6-3\gamma}$	$\pm(-2+\frac{2}{6-3\gamma})$	$\pm(-2+\frac{2}{6-3\gamma})$	$\pm\frac{-2(3\gamma+4r^*)}{3(-2+\gamma)(1+r^*)}$	$\pm\frac{2(-4+3\gamma)M'(r^*)}{3(-2+\gamma)}$
$P_4^{\pm}(r^*)$	$\pm\frac{-3(7+2r^*(5+2r^*))}{10+r^*(16+7r^*)}$	$\pm\frac{-15\gamma-3r^*(4+5\gamma+2(1+\gamma)r^*)}{10+r^*(16+7r^*)}$	$\pm(C^{\pm})$	$\pm(C^{\mp})$	$\pm\frac{6(1+r^*)(2+r^*)M'(r^*)}{10+r^*(16+7r^*)}$
$P_5^{\pm}(r^*)$	0	0	$\pm 4+\frac{4\sqrt{-5+3\gamma}}{4-3\gamma}$	$\pm\frac{6(\gamma+2(-1+\gamma)r^*)}{(-4+3\gamma)(1+r^*)}$	$\pm\frac{6(-2+\gamma)M'(r^*)}{-4+3\gamma}$
$P_6^{\pm}(r^*)$	$\pm\frac{6\gamma+4r^*}{3\gamma+(-2+3\gamma)r^*}$	$\pm\frac{-3(\gamma+2(-1+\gamma)r^*)}{3\gamma+(-2+3\gamma)r^*}$	$\pm D^{\pm}$	$\pm D^{\mp}$	$\pm\frac{6\gamma(1+r^*)M'(r^*)}{3\gamma+(-2+3\gamma)r^*}$

Tabla 2.5.: La tabla muestra los valores de los parámetros para los cuales los puntos críticos $P_6^{\pm}(r^*)$, $P_4^{\pm}(r^*)$ y $B^{\pm}(r^*)$ son no hiperbólicos. Se usa la notación $b^{\pm} = \frac{-4-9\gamma}{4(1+3\gamma)} \pm \frac{1}{4}\sqrt{\frac{16+48\gamma+9\gamma^2}{(1+3\gamma)^2}}$ y $c^{\pm} = \frac{1}{5}(-4 \pm \sqrt{6})$

$P_6^{\pm}$	$P_4^{\pm}$	$B^{\pm}$
$1 \leq \gamma < \frac{4}{3}, r^* = -1$ ó	$r^* = -2$ ó	$1 \leq \gamma \leq \frac{5}{3}, r^* \neq -1, M'(r^*) = 0$ ó
$1 \leq \gamma < \frac{4}{3}, r^* = -\frac{3\gamma}{4}$ ó	$r^* = \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$ ó	$\gamma = \frac{4}{3}, r^* \neq -1$ ó
$1 \leq \gamma < \frac{4}{3}, r^* = b^+$ ó	$-r^* \leq \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, M'(r^*) = 0$ ó	$\gamma = \frac{5}{3}, r^* \neq -1$ ó
$1 \leq \gamma < \frac{4}{3}, -\frac{3\gamma}{4} < r^* < b^+, M'(r^*) = 0$ ó	$M'(r^*) = 0, r^* \geq \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$	$1 \leq \gamma < \frac{5}{3}, \gamma \neq \frac{4}{3}, r^* = -\frac{3\gamma}{4}$ ó
$1 \leq \gamma < \frac{4}{3}, b^- \leq r^* < -1, M'(r^*) = 0$ ó		$1 \leq \gamma < \frac{4}{3}, r^* \geq -\frac{3\gamma}{4}, M'(r^*) = 0$ ó
$\gamma = \frac{4}{3}, r^* = -1$ ó		$\frac{4}{3} < \gamma < \frac{5}{3}, r^* \leq -\frac{3\gamma}{4}, M'(r^*) = 0$
$\gamma = \frac{4}{3}, r^* = c^+$ ó		
$\gamma = \frac{4}{3}, c^- \leq r^* \leq c^+, M'(r^*) = 0$ ó		
$\frac{4}{3} \leq \gamma < \frac{5}{3}, r^* = -1$ ó		
$\frac{4}{3} \leq \gamma < \frac{5}{3}, r^* = b^+$ ó		
$\frac{4}{3} \leq \gamma < \frac{5}{3}, 1 < r^* < b^+, M'(r^*) = 0$ ó		
$\frac{4}{3} \leq \gamma < \frac{5}{3}, b^- \leq r^* \leq -\frac{3\gamma}{4}, M'(r^*) = 0$ ó		
$\gamma = \frac{5}{3}, r^* = -\frac{5}{4}$ ó		
$\gamma = \frac{5}{3}, r^* = -1$ ó		
$\gamma = \frac{5}{3}, r^* = -\frac{1}{3}$ ó		
$\gamma = \frac{5}{3}, -1 < r^* < -\frac{1}{3}, M'(r^*) = 0$ ó		
$\frac{5}{3} < \gamma \leq 2, r^* = b^+$ ó		
$\frac{5}{3} < \gamma \leq 2, -1 < r^* < b^+, M'(r^*) = 0$ ó		

respectivamente, ya que ambos coinciden cuando $r = r^*$, y presentando por tanto $P_1^-(r^*)$ y $P_2^-(r^*)$ una variedad estable 3D para $\gamma \neq 2$. Para $P_5^-(r^*)$ la variedad estable es 3D si:

$$\frac{5}{3} \leq \gamma < 2,\ r^* < \frac{\gamma}{2-2\gamma},\ M'(r^*) < 0 \ \text{ o } \ \frac{5}{3} \leq \gamma < 2,\ r^* > -1,\ M'(r^*) < 0$$

Tabla 2.6.: La tabla muestra las regiones en el espacio de parámetros donde de los puntos críticos no aislados de la tabla 2.1 son atractores locales de futuro (resp., de pasado).

Ptos.	Atract. local de futuro (resp., de pasado)	No hiperbólico
$L^-(r^*)$ (resp., $L^+(r^*)$)	$1 \leq \gamma < \frac{5}{3}, r^* < -\frac{5}{4}, M'(r^*) < 0$ o	$\gamma = \frac{5}{3}$ o
	$1 \leq \gamma < \frac{5}{3}, r^* > -1, M'(r^*) < 0$	$M'(r^*) = 0$ o
		$r^* = -\frac{5}{4}$
$N^-(r^*)$ resp., $(N^+(r^*))$	$r^* < -1, M'(r^*) > 0$ o	$r^* = -\frac{1}{2}$ o
	$r^* > -\frac{1}{2}, M'(r^*) > 0$	$M'(r^*) = 0$

Si no se verifican las condiciones sobre el espacio de parámetros impuestas en las tablas 2.6, 2.7 y 2.5, dichos puntos se comportan como puntos sillas. En particular

- El punto $L^-(r^*)$ presenta una variedad estable 3D si:

$$\begin{aligned}
1 \leq \gamma &< \frac{5}{3}, r^* < -\frac{5}{4}, M'(r^*) > 0 \ \text{ o} \\
1 \leq \gamma &< \frac{5}{3}, r^* > -1, M'(r^*) > 0 \ \text{ o} \\
1 \leq \gamma &< \frac{5}{3}, -\frac{5}{4} < r^* < -1, , M'(r^*) < 0 \ \text{ o} \\
\frac{5}{3} < \gamma &\leq 2, r^* < -\frac{5}{4}, M'(r^*) < 0 \ \text{ o} \\
\frac{5}{3} < \gamma &\leq 2, r^* > -1, M'(r^*) < 0
\end{aligned}$$

Tabla 2.7.: La tabla muestra los puntos críticos correspondientes a la tabla 2.1 que representan a atractores de futuro (pasado).

$b^{\pm} = \frac{-4-9\gamma}{4(1+3\gamma)} \pm \frac{1}{4}\sqrt{\frac{16+48\gamma+9\gamma^2}{(1+3\gamma)^2}}$

Ptos.	Atract. de futuro (pasado)	No hiperbólico
$A^+(r^*)$ $(A^-(r^*))$	$-2 < r^* < \frac{-1-\sqrt{3}}{2},\ M'(r^*) > 0$ o	$r^* = b^+$ o
	$r^* < -2,\ M'(r^*) < 0$ o	$r^* = -\frac{1}{2}$ o
	$r^* > \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}),\ M'(r^*) < 0$	$r^* = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{3})$ o
		$r^* = -2$ o
		$r^* = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3})$ o
		$r^* = -\frac{5}{4}$ o
		$r^* \geq -\frac{1}{2}, M'(r^*) = 0$ o
		$r^* \geq b^+, M'(r^*) = 0$ o
		$r^* \leq -\frac{5}{4}, M'(r^*) = 0$ o
		$1 \leq \gamma < \frac{5}{3}, r^* = b^-$ o
		$1 \leq \gamma < \frac{5}{3}, r^* \leq b^-, M'(r^*) = 0$

- El punto $L^+(r^*)$ presenta una variedad estable 3D si:

$$\frac{5}{3} < \gamma \leq 2, -\frac{5}{4} < r^* < -1, M'(r^*) > 0$$

- El punto $N^-(r^*)$ tiene una variedad estable 3D para:

$$\begin{aligned} r^* &< -1, M'(r^*) < 0 \text{ o} \\ r^* &> -\frac{1}{2}, M'(r^*) < 0 \text{ o} \\ -1 < r^* &< -\frac{1}{2}, M'(r^*) > 0 \end{aligned}$$

Los puntos $A^+(r^*)$, $B^+(r^*)$ y P_4^+ tienen una variedad 4D estable en los casos:

- $A^+(r^*)$ es no hiperbólico si:

$$\begin{aligned} r^* &= \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, M'(r^*) > 0 \text{ o} \\ r^* &= \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, M'(r^*) < 0 \text{ o} \\ r^* &\neq \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}, M'(r^*) = 0 \text{ o} \\ r^* &= -2 \end{aligned}$$

- $A^+(r^*)$ es silla si:

$$\begin{aligned} -2 < r^* &< \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, M'(r^*) < 0 \text{ o} \\ r^* &< -2, M'(r^*) > 0 \text{ o} \\ r^* &> \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, M'(r^*) > 0 \text{ o} \\ \frac{5}{3} < \gamma \leq 2, \frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}) < r^* &< -\frac{5}{4}, M'(r^*) > 0 \text{ o} \\ 1 \leq \gamma \leq \frac{5}{3}, \frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}) < r^* &< \frac{-4-9\gamma}{4(1+3\gamma)} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{16+48\gamma+9\gamma^2}{(1+3\gamma)^2}}, M'(r^*) > 0 \text{ o} \\ \frac{-4-9\gamma}{4(1+3\gamma)} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{16+48\gamma+9\gamma^2}{(1+3\gamma)^2}} < r^* &< \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}), M'(r^*) < 0 \end{aligned}$$

- $B^{+}(r^{*})$ es silla si:

$$\begin{aligned} 1 \leq \gamma &< \frac{4}{3}, -1 < r^* < -\frac{3\gamma}{4}, M'(r^*) < 0 \text{ o} \\ \frac{4}{3} < \gamma &< \frac{5}{3}, -\frac{3\gamma}{4} < r^* < -1, M'(r^*) < 0 \end{aligned}$$

- $P_4^{+}(r^{*})$ es no hiperbólico si:

$$\begin{aligned} r^* &= \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, M'(r^*) > 0 \text{ o} \\ r^* &= \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, M'(r^*) < 0 \end{aligned}$$

- $P_4^{+}(r^{*})$ es silla si:

$$\begin{aligned} -2 < r^* &< \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, M'(r^*) > 0 \text{ o} \\ r^* &< -2, M'(r^*) < 0 \text{ o} \\ r^* &> \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, M'(r^*) < 0 \end{aligned}$$

Analizándose los autovalores correspondientes a los puntos P_8 - P_{11} (tabla 2.8) se puede arribar a las siguientes conclusiones:

- El punto P_{10}^{+} para $M(-2) > 0$ representa un atractor de futuro (sumidero) y específicamente si $M(-2) > \frac{9}{8}$ su comportamiento es tipo foco estable. Si $M(-2) < 0$ es silla y si $M(-2) = 0$ es no hiperbólico, presentando una variedad 4D estable.

- El punto P_{10}^{-} representa a un atractor de pasado (fuente) para $0 < M(-2) \leq \frac{9}{8}$. Para $M(-2) = 0$ es no hiperbólico con una variedad 4D inestable. Es un punto silla para $M(-2) < 0$.

- Los puntos $P_{11}^{\pm}$ son no hiperbólico para $M(-2) = 0$ comportándose como puntos de ensilladura [18]. Para $0 < M(-2) \leq \frac{3}{8}$, P_{11}^{+} tiene una variedad estable 4D.

[18] El concepto de punto silla no se aplica en general a puntos de equilibrios no hiperbólicos.

- Para el estudio de los puntos $P_8^{\pm}$ y $P_9^{\pm}$ se hace necesario recurrir al teorema de la variedad central, pues estos presentan una variedad central 2D, poseyendo P_8^{-} y P_9^{-} una variedad estable 3D para $\gamma \neq 2$.

Tabla 2.8.: En la tabla se muestran los autovalores y estabilidad de los puntos crítico P_8 - P_{11}.

$$\alpha^{\pm}(r^*) = -3 \pm \sqrt{9 - 8M(-2)} \qquad \beta^{\pm} = -3 \pm \sqrt{9 - 24M(-2)}$$

Ptos.	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	Estabilidad
$P_8^{\pm}$	± 6	± 2	0	0	$\mp 3(-2+\gamma)$	No hiperbólico
$P_9^{\pm}$	± 6	± 6	0	0	$\mp 3(-2+\gamma)$	No hiperbólico
P_{10}^{+}	-3	-2	-3γ	$\frac{1}{4}\alpha^{-}$	$\frac{1}{4}\alpha^{+}(r^*)$	No hiperbólico si $M(-2) = 0$
						Estable (atractor) si $M(-2) > 0$
						Inestable (Silla) si $M(-2) < 0$
P_{10}^{-}	3	2	3γ	$-\frac{1}{2}\alpha^{+}(r^*)$	$-\frac{1}{2}\alpha^{-}$	No hiperbólico si $M(-2) = 0$
						Inestable si $M(-2) \neq 0$
P_{11}^{+}	-3	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}\gamma$	$\frac{1}{4}\beta^{-}$	$\frac{1}{4}\beta^{+}$	No hiperbólico si $M(-2) = 0$
						Inestable (Silla) si $M(-2) \neq 0$
P_{11}^{-}	3	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}\gamma$	$-\frac{1}{4}\beta^{+}$	$-\frac{1}{4}\beta^{-}$	No hiperbólico si $M(-2) = 0$
						Inestable (Silla) si $M(-2) \neq 0$

2.4. Conclusiones Parciales

En este capítulo fueron obtenidos las cantidades cinemáticas para modelos cosmológicos con geometría tipo KS en teorías genéricas $f(R)$. Estás cantidades fueron de utilidad en la obtención de las ecuaciones cosmológicas de nuestro modelo y en la definición de los parámetros de densidad, los cuales en brindan información física sobre las soluciones cosmológicas asociadas a cada punto crítico obtenido.

Los resultados más importantes que se derivan del análisis dinámico realizado son:

- Se obtuvieron condiciones suficientes para la existencia de atractores de pasado:
  - $L^{+}(r^*)$ es un repulsor local si $1 \leq \gamma < \frac{5}{3}, r^* < -\frac{5}{4}, M'(r^*) < 0$; ó $1 \leq \gamma < \frac{5}{3}, r^* > -1, M'(r^*) < 0$.
  - $N^{+}(r^*)$ es un repulsor local si $r^* < -1, M'(r^*) > 0$; ó $r^* > -\frac{1}{2}, M'(r^*) > 0$.
  - $A^{-}(r^*)$ es un repulsor si $-2 < r^* < \frac{-1-\sqrt{3}}{2},\ M'(r^*) > 0$; ó $r^* < -2,\ M'(r^*) < 0$; ó $r^* > \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}),\ M'(r^*) < 0$.
  - El punto P_{10}^{-} es un repulsor para $M(-2) > 0$.
- Se obtuvieron condiciones suficientes para la existencia de atractores de futuro:
  - $L^{-}(r^*)$ es un atractor local si $1 \leq \gamma < \frac{5}{3}, r^* < -\frac{5}{4}, M'(r^*) < 0$; ó $1 \leq \gamma < \frac{5}{3}, r^* > -1, M'(r^*) < 0$.
  - $N^{-}(r^*)$ es un atractor local si $r^* < -1, M'(r^*) > 0$; ó $r^* > -\frac{1}{2}, M'(r^*) > 0$.
  - $A^{+}(r^*)$ es un atractor si $-2 < r^* < \frac{-1-\sqrt{3}}{2},\ M'(r^*) > 0$; ó $r^* < -2,\ M'(r^*) < 0$; ó $r^* > \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}),\ M'(r^*) < 0$.
  - El punto P_{10}^{+} para $M(-2) > 0$ representa un atractor de futuro y específicamente si $M(-2) > \frac{9}{8}$ su comportamiento es tipo foco estable.
- Algunos puntos sillas con variedad estable 4D de interés físico son:

- $A^+(r^*)$ es silla con variedad 4D estable si:

$$\begin{aligned}
-2 < r^* &< \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, M'(r^*) < 0 \text{ o} \\
r^* &< -2, M'(r^*) > 0 \text{ o} \\
r^* &> \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, M'(r^*) > 0 \text{ o} \\
\frac{5}{3} < \gamma \leq 2, \frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}) < r^* &< -\frac{5}{4}, M'(r^*) > 0 \text{ o} \\
1 \leq \gamma \leq \frac{5}{3}, \frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}) < r^* &< \frac{-4-9\gamma}{4(1+3\gamma)} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{16+48\gamma+9\gamma^2}{(1+3\gamma)^2}}, M'(r^*) > 0 \text{ o} \\
\frac{-4-9\gamma}{4(1+3\gamma)} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{16+48\gamma+9\gamma^2}{(1+3\gamma)^2}} < r^* &< \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}), M'(r^*) < 0
\end{aligned}$$

- $B^+(r^*)$ es silla con variedad 4D estable si:

$$\begin{aligned}
1 \leq \gamma &< \frac{4}{3}, -1 < r^* < -\frac{3\gamma}{4}, M'(r^*) < 0 \text{ o} \\
\frac{4}{3} < \gamma &< \frac{5}{3}, -\frac{3\gamma}{4} < r^* < -1, M'(r^*) < 0
\end{aligned}$$

- $P_4^+(r^*)$ es silla con variedad 4D estable si:

$$\begin{aligned}
-2 < r^* &< \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, M'(r^*) > 0 \text{ o} \\
r^* &< -2, M'(r^*) < 0 \text{ o} \\
r^* &> \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, M'(r^*) < 0
\end{aligned}$$

3. Descripción Física

"La Física es el sistema operativo del universo."

Hugo Scolnik

En el capítulo 2 se realizó el análisis cualitativo de una métrica Kantowsky-Sachs para una función genérica del escalar de Ricci *f(R)*, obteniéndose los puntos críticos y determinándose su estabilidad local. En este capítulo se presentará un formalismo perturbativo de primer orden para evaluar los observables básicos (el factor de escala, las densidades de materia y el escalar de Ricci) en los puntos críticos. Estos observables determinan el comportamiento cosmológico de cada solución cosmológica asociada a cada punto crítico. Estas magnitudes son básicas para la discusión física del modelo. [1] Luego de realizarse el análisis físico de los puntos críticos se presenta un algoritmo para la reconstrucción de la función *f(R)* a partir de una función $m(r)$ (ó $M(r)$) de entrada.

3.1. Formalismo

Primeramente se derivan las tasas de evolución a primer orden de e_1^1, ${}^2K$, ρ_m y R en función de τ. A partir de las ecuaciones diferenciales (2.22), (2.21) y usando la relación

[1] El formalismo utilizado es basado en [31].

$d\tau = Ddt$ se llega a:

$$
\begin{aligned}
\hat{e}_1^1 &= -(Q^* - 2\Sigma^*)e_1^1 \,, \\
{}^2\hat{K} &= -2\left(Q^* + \Sigma^*\right)^2 K \,, \\
\hat{\rho}_m &= -3\,\gamma\, Q^* \rho_m \,, \\
\hat{R} &= \frac{2x^* R}{m(r^*)} \,.
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

donde * indica la evaluación en un punto crítico. En (3.1) la ecuación de evolución de ρ_m se obtuvo a partir de la ecuación de balance de la energía dada por [2]:

$$\dot{\rho}_m + (\rho_m + p)\Theta = 0 \,, \tag{3.2}$$

y considerando la ecuación de estado para la materia [87]:

$$p = (\gamma - 1)\rho_m \,, \tag{3.3}$$

donde γ es una constante llamada índice barotrópico. De acuerdo a nuestra hipótesis de trabajo se tiene $1 \leq \gamma \leq 2$. Esto garantiza que el fluido de fondo no viole las condiciones débiles de energía y además que velocidad del fluido no sea supra-lumínica [3]. Usando la variable temporal τ, la ecuación de conservación de la materia (3.2) se reduce a la penúltima ecuación en (3.1).

Con el fin de expresar las funciones $e_1^1(\tau)$, ${}^2K(\tau)$, $\rho_m(\tau)$ y $R(\tau)$ obtenidas al resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (3.1) en términos del tiempo comóvil t, se invierte la

[2] Su obtención puede verse en el Anexo A.5.

[3] En algunas ocasiones también se utiliza la ecuación $P = \omega\rho_m$, con ω constante relacionada con γ de la forma $\gamma = \omega + 1$, si $\omega = \frac{1}{3}$ ($\gamma = \frac{4}{3}$) corresponde a materia relativista (radiación), para $\omega = 0$ ($\gamma = 1$) no relativista y en el caso de $\omega = -1$ ($\gamma = 0$) energía de vacío (constante cosmológica Λ) [88]

solución de:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{D^*}, \tag{3.4}$$

siendo D^* la solución de primer orden de:

$$\hat{D} = D\,\Upsilon^* \tag{3.5}$$

donde

$$\Upsilon^* = \frac{1}{2}\{2(x^* - \Sigma^*) + (Q^* + x^*)\left(3((\gamma-2)(x^*)^2 + \gamma(y^*-1)) + 2(Q^*+x^*)\Sigma^* + 3(\gamma-2)(\Sigma^*)^2\right)\}.$$

Al asumirse que $x^* \neq 0$, $y^* \neq 0$, $\Upsilon^* \neq 0$ y $r^* \neq \{0,1\}$ y resolviendose las ecuaciones diferenciales (3.4), (3.5) con las condiciones iniciales $D(0) = D_0$ y $t(0) = t_0$ se obtiene:

$$t(\tau) = \frac{1 - e^{-\tau\Upsilon^*}}{D_0\Upsilon^*} + t_0. \tag{3.6}$$

Despejándose τ de la última ecuación y sustituyendose en las soluciones del sistema (3.1) con condiciones iniciales $e_1^1(0) = e_{1\,0}^1$, ${}^2K(0) = {}^2K_0$, $\rho_m(0) = \rho_{m\,0}$ y $R(0) = R_0$ se obtiene:

$$\begin{aligned} e_1^1(t) &= e_{1\,0}^1\,(\ell_1 - t\Upsilon^* D_0\}^{\frac{Q^*-2\Sigma^*}{\Upsilon^*}}, \\ {}^2K(t) &= {}^2K_0\,(\ell_1 - t\Upsilon^* D_0)^{\frac{2(Q^*+\Sigma^*)}{\Upsilon^*}}, \\ \rho_m(t) &= \rho_{m0}\,(\ell_1 - t\Upsilon^* D_0)^{\frac{3\gamma Q^*}{\Upsilon^*}}, \\ R(t) &= R_0\,(\ell_1 - t\Upsilon^* D_0)^{-\frac{2x^*}{m(r^*)\Upsilon^*}}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

donde $\ell_1 = D_0 t_0 \Upsilon^* + 1$.

Por otra parte, el factor de escala ℓ a lo largo de las líneas de flujo dado por (2.8), estaría definido como [80]:

$$\ell(t) = \ell_0\,(\ell_1 - t\Upsilon^* D_0)^{-\frac{Q^*}{\Upsilon^*}}. \tag{3.8}$$

donde $\ell_0 = [(e^1_{1\,0})(\,^2K_0)]^{-\frac{1}{3}}$. En el caso en que $\Upsilon^* \to 0^+$ se tiene que $\ell_1 \to 1$ y usando el límite fundamental algebraico resulta:

$$\begin{aligned}
e^1_1(t) &= e^1_{1\,0}\, e^{-D_0\,(Q^*-2\,\Sigma^*)\,t} \\
^2K(t) &= \,^2K_0\, e^{-2\,D_0\,(Q^*+\Sigma^*)\,t} \\
\rho_m(t) &= \rho_{m\,0}\, e^{-3\gamma\,D_0\,Q^*\,t} \\
R(t) &= R_0\, e^{\frac{2\,D_0\,x^*\,t}{m(r^*)}} \\
\ell(t) &= \ell_0\, e^{D_0\,Q^*\,t}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Finalmente, en los casos simples $x^* = 0$ y $y^* = 0$ se obtiene que:

- Si $y^* = 0$ y $r^* \neq \{0, 1\}$, $R = 0$.

- Si $y^* = 0$ y $r^* = 1$, R es arbitrario.

- Si $x^* = 0$, implicaría que $f'(R)$ es una constante, lo que conlleva a que $R = R_0$.

Dichas relaciones que se obtienen a partir de las definiciones de las variables dinámicas (2.36) y de r (2.40). Es válido aclarar que para el caso $x^* = 0$, r^* debe satisfacer que:

$$r^* = -c\frac{R}{f(R)}. \tag{3.10}$$

con c una constante. Esta relación es en general una ecuación trascendente para R. Resolviendo dicha relación se obtiene el valor de $R(r^*)$ correspondiente.

Por otra parte para realizar el análisis físico de las soluciones cosmológicas asociadas a los puntos críticos del sistema conviene expresar diferentes magnitudes observables en función de las variables de fase. Esto permite evaluar dichas expresiones en cada punto crítico del sistema.

Algunas magnitudes observables de interés cosmológico son el parámetro de desaceleración

q, definido usualmente como [80],

$$q = 3u^{\mu}\nabla_{\mu}[\frac{1}{\Theta}] - 1 = -\frac{\ell\,\ddot{\ell}}{(\dot{\ell})^2}, \tag{3.11}$$

y el parámetro de la ecuación de estado efectiva (total) de la materia, que de acuerdo a (2.20), se expresa convencionalmente por:

$$w_{eff} \equiv \frac{P}{\mu} = \frac{\frac{p_m}{f'(R)} + P^{(eff)}}{\frac{\rho_{(m)}}{f'(R)} + \mu^{(eff)}}, \tag{3.12}$$

donde $P^{(eff)}$ y $\mu^{(eff)}$ están definidos por (2.17). Usando las variables auxiliares (2.36) y las ecuaciones (2.33), (2.28) y (3.3), se obtiene:

$$\begin{aligned} q &= \frac{1 - x(2Q + x) + \Sigma^2 - r(-1 + 2Qx + x^2 + y - \Sigma^2)}{Q^2(1 + r)}, \\ w_{eff} &= \frac{1}{3} + \frac{2ry}{3(1 + r)(-1 + 2Qx + x^2 + \Sigma^2)}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Finalmente los parámetros de densidad definidos en (2.23) - (2.26) se expresan en términos de las variables auxiliares como:

$$\begin{aligned} \Omega_k &= \frac{(-1 + Q + x)(1 + Q + x)}{Q^2}, \\ \Omega_m &= \frac{1 - x^2 - y - \Sigma^2}{Q^2}, \\ \Omega_{curvfl} &= \frac{-2Qx + y}{Q^2}, \\ \Omega_{\sigma} &= \left(\frac{\Sigma}{Q}\right)^2. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Con estos resultados es posible calcular para cada punto crítico el valor de los observables básicos q y w_{eff}, así como los diferentes parámetros de densidad y la solución física específica, es decir, obtener el comportamiento de $\ell(t)$, $\rho_m(t)$ y $R(t)$ brindándonos la posibilidad de interpretar físicamente cada punto crítico.

Es válido comentar que en la métrica Kantowski-Sachs es posible tratar fácilmente el problema de la isotropización. Observándose que la isotropía se alcanza si σ_+ es cero asintóticamente, como puede apreciarse de (2.1) y (2.11). Así los puntos críticos con $\Sigma = 0$ (o físicamente $\Omega_\sigma = 0$) corresponden a puntos con geometría FRW, es decir a un universo isótropo. Si además dicho punto isótropo es un atractor de futuro, se obtiene una isotropización asintótica en el futuro [89].

3.2. Implicación Cosmológica

En secciones precedentes se formularon las ecuaciones del campo para una función *f(R)* arbitraria en un universo con geometría Kantowski-Sachs, llevándose a cabo un análisis detallado del espacio de fase y obteniéndose las ecuaciones de los observables. En esta sección se discutirán las implicaciones física de los resultados matemáticos obtenidos, enfocándonos en el comportamiento físico de la soluciones y en las cantidades observables.

Como la variable auxiliar Q es por definición el escalar de Hubble dividido por una constante positiva, tenemos que para $Q > 0$ ($Q < 0$) corresponde a un universo en expansión (contracción) y en el caso $Q = 0$ corresponde a un universo estático [4] si a esto le juntamos la información que nos brinda el parámetro de desaceleración (q) se puede caracterizar la solución cosmológica de acuerdo a:

- Si $Q > 0$ y $q < 0$ ($q > 0$) el punto crítico representa a un universo en expansión acelerada (desacelerada).
- Si $Q < 0$ y $q > 0$ ($q < 0$) el punto crítico representa a un universo que se contrae

[4] Desde el punto de vista cosmológico, las soluciones estáticas poseen $\ell(t) = const$, implicando que $\dot{\ell}(t) = 0$ y $\ddot{\ell}(t) = 0$. Estas condiciones son equivalentes a $H(t) = 0$ y $\dot{H}(t) = 0$ las cuales se deducen, a partir de la definición de Q, cuando $Q = 0$ y $\dot{Q} = 0$.

aceleradamente (desaceleradamente).

Adicionalmente si $w_{eff} < -1$, entonces el universo presenta fantasmas y por último, si $\Sigma^* = 0$ el punto crítico corresponde a un universo isotrópico.

A contiunación se procede a la interpretación física de los puntos críticos del sistema.

El punto crítico $A^+(r^*)$ representa un universo isótropo en expansión desacelerada (resp. acelerada) para valores $-1{,}366 \lesssim r^* \leq -1{,}25$ ó $-0{,}5 < r^* \lesssim 0{,}366$ (resp. $r^* \lesssim -1{,}366$ ó $r^* \gtrsim 0{,}366$). Para $r^* < -2$ se obtiene comportamiento fantasma. En el caso, $r^* = -2$ la solución $A^+(r^*)$ tiene curvatura constante $(R(t) = R_0)$[5] y la solución cosmológica es de tipo de *de Sitter*.

Al estudiar la estabilidad de la variedad central de $A^+(r^*)$ para $r^* = -2$ se deduce que dicho punto es localmente asintóticamente inestable (tipo silla). Este resultado tiene mucha importancia física ya que tal comportamiento podría describir la época inflacionaria del universo [31] (este resultado es consistente con el resultado obtenido en [30] para modelos de gravedad cuadrática $f(R) = R + \alpha R^n$ en su formulación conforme como teoría escalar-tensorial en el Marco de Einstein). Además, dado que la densidad de energía de curvatura es cero (ver tabla 3.2), este punto corresponde a un universo asintóticamente plano (este resultado es análogo a lo que se tiene para modelos FRW cerrados o abiertos los cuales podrían tener soluciones con curvatura cero como estados asintóticos [31]).

En $A^+(r^*)$ la ecuación de estado efectiva y el parámetro de desaceleración están dados por $w_{eff} = \frac{1-7r^*-6(r^*)^2}{3+9r^*+6(r^*)^2}$ y $q = \frac{1-2r^*-2(r^*)^2}{1+3r^*+2(r^*)^2}$ respectivamente. Luego la condición de universo en expansión acelerada $(w_{eff} < -\frac{1}{3}, q < 0)$ se reduce a $r^* \lesssim -1{,}366$ ó $r^* \gtrsim 0{,}366$.

A modo de resumen $A^+(r^*)$ es un atractor representando un universo con expansión acelerada en los casos

[5] Ver tabla 3.3

1. $r^* < -2$, $M'(r^*) < 0$. $A^+(r^*)$ obedece una ecuación de estado fantasma $w_{eff} < -1$.

2. $r^* > \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}) \gtrsim 0{,}366$, $M'(r^*) < 0$. $A^+(r^*)$ mimetiza un campo de quintaesencia $-1 < w_{eff} < -\frac{1}{3}$. Si $M'(r^*) < 0$ cuando $r^* \to \infty$ entonces $\lim_{r^*\to\infty} w_{eff} = -1$, en cuyo caso $A^+(r^*)$ representa una solución tipo *de Sitter*.

3. $-2 < r^* < -\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}) \lesssim -1{,}366$, $M'(r^*) > 0$. $A^+(r^*)$ tiene una ecuación de estado $w_{eff} > -1$.

En el caso límite $r^* \to -2$, $A^+(r^*)$ se reduce al punto $(Q, \Sigma, y, x, r) = (1, 0, 1, 0, -2)$ que es no hiperbólico (un valor propio cero). Para el caso concreto de gravedad cuadrática se puede demostrar que $A^+(-2)$ es localmente asintóticamente inestable (tipo silla) (ver sección B.1). Este resultado para $A^+(r^*)$ puede ser genérico para cualquier función diferenciable $M(r)$. Por otro parte si $M(r^*) = M'(r^*)) = 0$, $A^+(r^*)$ tendría una variedad estable a lo sumo 4D. En ambos casos se requiere de un análisis más detallado.

Evaluándose a primer orden se obtienen para $A^+(r^*)$ las soluciones asintóticas:

$$\ell(t) = \begin{cases} \ell_0\,(\ell_1 - D_0\,t\Upsilon^*)^{s_1} & \text{para } r^* \neq -2 \\ \ell_0\,e^{D_0\,t} & \text{para } r^* = -2 \end{cases}, \quad \rho_m(t) = \rho_{m0}\left[\frac{\ell(t)}{\ell_0}\right]^{-3\gamma},$$

$$R(t) = \begin{cases} R_0\,(\ell_1 - D_0\,t\Upsilon^*)^{\frac{2(1+r^*)}{m(r)}} & \text{para } r^* \neq \{-2, -\frac{5}{4}, -\frac{1}{2}\} \\ R_0 & \text{para } r^* = -2 \\ 0 & \text{para } r^* = \{-\frac{5}{4}, -\frac{1}{2}\} \end{cases}$$

donde $s_1 = -1 + 2r^* + \frac{3}{2+r^*}$ y $\Upsilon^* = -\frac{2+r^*}{3(1+r^*)^2}$. Los puntos críticos $A^-(r^*)$ y $B^-(r^*)$ corresponden a universos isótropos en contracción son inestables luego no representan apropiadamente el universo tardío.

$B^+(r^*)$ tiene gran probabilidad de representar un atractor de futuro del universo en expansión desacelerada y con curvatura cero ($R(t) = 0$), si $1 \leq \gamma \lesssim 1{,}66, r^* \neq -1$ porque tiene una variedad estable 4D. En especial $B^+(r^*)$ corresponde a una solución de dominio de materia para $\gamma = \frac{4}{3}$ en cuyo caso el fluido de fondo mimetiza radiación. En este caso $B^+(r^*)$ a pesar de ser no hiperbólico para $\gamma = \frac{4}{3}$ debido a la existencia de dos valores propios reales de signos opuestos se puede concluir que se comporta como un punto silla.

Dado que $B^+(r^*)$ se comporta como silla, las soluciones cosmológicas cerca de B^+ abandonan la época de dominio de materia. Este resultado tiene gran significación desde el punto de vista físico ya que un modelo del universo viable observacionalmente debe tener una etapa de dominio de materia transiente que anteceda a una época de expansión acelerada. Evaluándose a primer orden en $B^+(r^*)$ se obtienen las soluciones asintóticas:

$$\ell(t) = \ell_0\sqrt{\ell_1 - D_0 t\Upsilon^*}, \quad \rho_m(t) = \rho_{m0}(\ell_1 - D_0 t\Upsilon^*)^{-3\gamma/2}, \quad R(t) = 0$$

donde $\Upsilon^* = \frac{4}{3(-2+\gamma)}$.

Los puntos $N^{\pm}(r^*)$ representan universos estáticos ($Q = 0$). $L^-(r^*)$ corresponde a un universo isótropo en contracción acelerada para $r^* \neq -1$, con curvatura cero y asintóticamente plano, representando un atractor de futuro del universo (es localmente asintóticamente estable) para las condiciones $1 \leq \gamma < \frac{5}{3}, r^* < -\frac{5}{4}, M'(r^*) < 0$ ó $1 \leq \gamma < \frac{5}{3}, r^* > -1, M'(r^*) < 0$. El punto L^+ corresponde a un universo en expansión desacelerada para $r^* \neq -1$, pero como este es inestable (atractor local de pasado) no representa un atractor de futuro.

Los puntos $P_1^-(r^*)$ y $P_2^-(r^*)$ poseen una variedad estable 3D con una variedad central 2D. Ambos representan universo en contracción aceleradas, con curvatura cero y asintóticamente planos. Por otro lado los puntos no hiperbólicos $P_1^+(r^*)$ y $P_2^+(r^*)$ corresponden a un universo en expansión desacelerada, no representando una fase tardía, pues poseen una variedad 3D inestable.

De acuerdo al análisis que se realizó en el capítulo 2 el punto crítico $P_4^+(r^*)$, posee una

Tabla 3.1.: En la tabla se muestran el valor de los observables básicos q y w_{eff} para cada punto crítico.

Ptos	w_{eff}	q
$A^{\pm}(r^*)$	$\frac{1-7r^*-6(r^*)^2}{3+9r^*+6(r^*)^2}$	$\frac{1-2r^*-2(r^*)^2}{1+3r^*+2(r^*)^2}$
$B^{\pm}(r^*),\ L^{\pm}(r^*)$	$\frac{1}{3}$	1
$P_4^{\pm}(r^*)$	$\frac{1-r^*(21+4r^*(9+4r^*))}{3+3r^*(21+8r^*(3+r^*))}$	$\frac{1-2r^*-2(r^*)^2}{5+5r^*+2(r^*)^2}$
$P_5^{\pm}(r^*)$	$\frac{1}{3}$	$-4+3\gamma$
$P_6^{\pm}(r^*)$	$-\frac{\gamma+r^*}{r^*}$	$-\frac{3\gamma+2r^*}{2r^*}$
$P_1^{\pm}(r^*)$,$P_2^{\pm}(r^*)$,$P_8^{\pm}$,$P_9^{\pm}$	$\frac{1}{3}$	2
$C^{\pm}(r^*)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{1\pm\sin u}$
$P_{10}^{\pm},\ P_{11}^{\pm}$	-1	-1

variedad 4D estable, correspondiendo a un universo no plano ($\Omega_k \neq 0$).

Evaluando el valor del parámetro de la ecuación de estado efectiva y el parámetro de desaceleración en $P_4^+(r^*)$ obtenemos $w_{eff} = \frac{1-r^*(21+4r^*(9+4r^*))}{3+3r^*(21+8r^*(3+r^*))}$ y $q = \frac{1-2r^*-2(r^*)^2}{5+5r^*+2(r^*)^2}$ respectivamente.

1. Para $-2{,}395 \lesssim \frac{1}{4}\left(-5-\sqrt{21}\right) < r^* < -2$, $M'(r^*) < 0$, $P_4^+(r^*)$ representa un solución fantasma ($w_{eff} < -1$).
2. Para $r^* \lesssim -2{,}395$ la solución es acelerada pero no de tipo fantasma.
3. Cuando $r^* = \left(-5-\sqrt{21}\right)$ se obtiene una solución tipo de Sitter.
4. $r^* > \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3})$, $M'(r^*) < 0$, P_4^+ representa una solución acelerada con $-\frac{2}{3} < w_{eff} < -\frac{1}{3}$ y en el límite $r^* \to \infty$ se tiene que $w_{eff} = -\frac{2}{3}$.

Tabla 3.2.: En la tabla se muestran el valor de los diferentes parámetros de densidad Ω_k, Ω_m, Ω_{curvfl} y Ω_σ para cada punto crítico.

$A=-\frac{3(-1+2r^*(1+r^*))(7+2r^*(5+2r^*))}{(5+r^*(5+2r^*))^2}$

Ptos	Ω_k	Ω_m	Ω_{curvfl}	Ω_σ
$A^\pm(r^*)$,$L^\pm(r^*)$,$P_{10}^\pm$	0	0	1	0
$B^\pm(r^*)$	0	$5-3\gamma$	$-4+3\gamma$	0
$P_4^\pm(r^*)$	A	0	$\frac{3(1+r^*)(1+r^*(21+8r^*(3+r^*)))}{(5+r^*(5+2r^*))^2}$	$\frac{(1-2r^*(1+r^*))^2}{(5+r^*(5+2r^*))^2}$
$P_5^\pm(r^*)$	0	0	$6-3\gamma$	$-5+3\gamma$
$P_6^\pm(r^*)$	0	$-\frac{3\gamma+r^*(4+9\gamma+(2+6\gamma)r^*)}{2(r^*)^2}$	$\frac{(1+r^*)(3\gamma+(4+6\gamma)r^*)}{2(r^*)^2}$	0
$P_1^\pm(r^*)$,$P_2^\pm(r^*)$,$P_8^\pm$,$P_9^\pm$	0	0	0	1
$C^\pm(r^*)$	0	0	$\frac{2\sin u}{\pm 1+\sin u}$	$\frac{\cos^2 u}{(\pm 1+\sin u)^2}$
$P_{11}^\pm$	-3	0	3	1

5. Para $-2<r^*<\frac{1}{2}(-1-\sqrt{3})$, $M'(r^*)>0$ se tiene $w_{eff}>-1$.

Para el caso $r^*=-2$, $P_4^+(r^*)$ es no hiperbólico con una variedad 3D estable. Para $P_4^+(r^*)$ se tienen las soluciones a primer orden:

$$\ell(t)=\begin{cases}\ell_0\,(\ell_1-D_0\,t\Upsilon^*)^{s_2} & \text{para } r^*\neq-2\\ \ell_0\,e^{\frac{D_0\,t}{2}} & \text{para } r^*=-2\end{cases},\ \rho_m(t)=\rho_{m0}\left[\frac{\ell(t)}{\ell_0}\right]^{-3\gamma},$$

$$R(t)=\begin{cases}R_0\,(\ell_1-D_0\,t\Upsilon^*)^{\frac{2(1+r^*)}{m(r)}} & \text{para } r^*\neq-2\\ R_0 & \text{para } r^*=-2\end{cases}$$

donde $\Upsilon^*=-\frac{3(2+r^*)}{10+r^*(16+7r^*)}$.

Por otro lado el punto $P_4^-(r^*)$ corresponde a un universo en contracción desacelerada,

Tabla 3.3.: En la tabla se muestran las ecuaciones que determinan el comportamiento de $\ell(t)$, $\rho_m(t)$ y $R(t)$ para los punto críticos $A^{\pm}(r^*)$, $B^{\pm}(r^*)$ y $P_4^{\pm}(r^*)$.

$s_1 = -1 + 2r^* + \frac{3}{2+r^*}, \quad s_2 = \frac{5+5r^*+2(r^*)^2}{3(2+r^*)}$

Ptos	Υ^*	Solución
$A^+(r^*)$	$-\frac{2+r^*}{3(1+r^*)^2}$	$\ell(t) = \begin{cases} \ell_0\,(\ell_1 - D_0\,t\Upsilon^*)^{s_1} & \text{para } r^* \neq -2 \\ \ell_0\,e^{D_0\,t} & \text{para } r^* = -2 \end{cases}, \rho_m(t) = \rho_{m0}\left[\frac{\ell(t)}{\ell_0}\right]^{-3\gamma},$
		$R(t) = \begin{cases} R_0\,(\ell_1 - D_0\,t\Upsilon^*)^{\frac{2(1+r^*)}{m(r)}} & \text{para } r^* \neq \{-2, -\frac{5}{4}, -\frac{1}{2}\} \\ R_0 & \text{para } r^* = -2 \\ 0 & \text{para } r^* = \{-\frac{5}{4}, -\frac{1}{2}\} \end{cases}$
$A^-(r^*)$	$\frac{2+r^*}{3(1+r^*)^2}$	$\ell(t) = \begin{cases} \ell_0\,(\ell_1 - D_0\,t\Upsilon^*)^{s_1} & \text{para } r^* \neq -2 \\ \ell_0\,e^{-D_0\,t} & \text{para } r^* = -2 \end{cases}, \rho_m(t) = \rho_{m0}\left[\frac{\ell(t)}{\ell_0}\right]^{-3\gamma},$
		$R(t) = \begin{cases} R_0\,(\ell_1 - D_0\,t\Upsilon^*)^{\frac{2(1+r^*)}{m(r)}} & \text{para } r^* \neq \{-2, -\frac{5}{4}, -\frac{1}{2}\} \\ R_0 & \text{para } r^* = -2 \\ 0 & \text{para } r^* = \{-\frac{5}{4}, -\frac{1}{2}\} \end{cases}$
$B^+(r^*)$	$\frac{4}{3(-2+\gamma)}$	$\ell(t) = \ell_0\sqrt{\ell_1 - D_0 t\Upsilon^*}$, $\rho_m(t) = \rho_{m0}(\ell_1 - D_0 t\Upsilon^*)^{-3\gamma/2}$, $R(t) = 0$
$B^-(r^*)$	$\frac{4}{3(2-\gamma)}$	$\ell(t) = \ell_0\sqrt{\ell_1 - D_0 t\Upsilon^*}$, $\rho_m(t) = \rho_{m0}(\ell_1 - D_0 t\Upsilon^*)^{-3\gamma/2}$, $R(t) = 0$
$P_4^+(r^*)$	$-\frac{3(2+r^*)}{10+r^*(16+7r^*)}$	$\ell(t) = \begin{cases} \ell_0\,(\ell_1 - D_0\,t\Upsilon^*)^{s_2} & \text{para } r^* \neq -2 \\ \ell_0\,e^{\frac{D_0\,t}{2}} & \text{para } r^* = -2 \end{cases}, \rho_m(t) = \rho_{m0}\left[\frac{\ell(t)}{\ell_0}\right]^{-3\gamma},$
		$R(t) = \begin{cases} R_0\,(\ell_1 - D_0\,t\Upsilon^*)^{\frac{2(1+r^*)}{m(r)}} & \text{para } r^* \neq -2 \\ R_0 & \text{para } r^* = -2 \end{cases}$
$P_4^-(r^*)$	$\frac{3(2+r^*)}{10+r^*(16+7r^*)}$	$\ell(t) = \begin{cases} \ell_0\,(\ell_1 - D_0\,t\Upsilon^*)^{s_2} & \text{para } r^* \neq -2 \\ \ell_0\,e^{-\frac{D_0\,t}{2}} & \text{para } r^* = -2 \end{cases}, \rho_m(t) = \rho_{m0}\left[\frac{\ell(t)}{\ell_0}\right]^{-3\gamma},$
		$R(t) = \begin{cases} R_0\,(\ell_1 - D_0\,t\Upsilon^*)^{\frac{2(1+r^*)}{m(r)}} & \text{para } r^* \neq -2 \\ R_0 & \text{para } r^* = -2. \end{cases}$

pero al ser inestable no puede ser una solución de universo tardío.

Los puntos crticos no hiperbólicos $P_5^\epsilon(r^*)$ corresponden a soluciones cosmológicas con curvatura cero en expansión desacelerada (si $\epsilon = +$) y contracción acelerada (si $\epsilon = -$) para $5/3 \leq \gamma \leq 2$, $r^* \neq -1$. $P_5^+(r^*)$ tiene una variedad central 2D y una inestable 3D, por lo que, genéricamente, no representarían un universo tardío. $P_5^-(r^*)$ tiene una variedad estable 3D y una variedad central 2D. Evaluándose a primer orden se obtienen las soluciones asintóticas:

$$\ell(t) \propto t^{\frac{1}{3(-1+\gamma)}}, \quad \rho_m(t) \propto t^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}, \quad R(t) = 0.$$

Los puntos críticos $P_6^+(r^*)$ (resp. $P_6^-(r^*)$) correspondientes a un universo en expansión desacelerada (resp. contracción acelerada) no representan el universo tardío porque son puntos sillas. En este caso las soluciones cosmológicas pueden permanecer un período largo de tiempo en una vecindad del punto crítico antes de abandonar esta región. Para $P_6^+(r^*)$ tenemos a primer orden:

$$\ell(t) = \ell_0 \left(\ell_1 - D_0 \Upsilon^* t\right)^{-\frac{2r^*}{3\gamma}}, \quad \rho_m(t) = \rho_{m0} \left[\frac{\ell(t)}{\ell_0}\right]^{-3\gamma},$$

$$R(t) = \begin{cases} R_0 \left(\ell_1 - D_0 \Upsilon^* t\right)^{\frac{2(1+r^*)}{m(r)}} & \text{para } r^* \neq \{-\frac{3\gamma}{4}, -1\} \\ 0 & \text{para } r^* = -\frac{3\gamma}{4} \\ \text{arbitraria} & \text{para } r^* = -1. \end{cases}$$

donde $\Upsilon^* = -\frac{3\gamma}{3\gamma + (-2+3\gamma) r^*}$.

$P_6^+(r^*)$ representa una solución de dominio de materia si $1 \leq \gamma \leq \frac{5}{48}\left(5 + 3\sqrt{17}\right) \lesssim 1{,}8093$ y $r^* = -\frac{3\gamma}{6\gamma+4}$ con $M'(r^*) \neq 0$; o bien $r^* \to -1$, $M(r^*) = 0$. En este límite aparecen dos valores propios $\lambda_1 \to= +\infty$ y $\lambda_2 \to= -\infty$. Luego, a pesar de ser no hiperbólicos (un valor propio cero), los puntos de equilibrio se comportan como puntos sillas, pero en este caso

Tabla 3.4.: En la tabla se muestran las ecuaciones que determinan el comportamiento de $\ell(t)$, $\rho_m(t)$ y $R(t)$ para los punto críticos $P_5^{\pm}(r^*)$ - $P_{11}^{\pm}$.

Ptos	Υ^*	Solución
$P_5^+(r^*)$	$-\frac{6(-1+\gamma)}{3\gamma-4}$	$\ell(t)=\ell_0(\ell_1-D_0\Upsilon^* t)^{\frac{1}{3(-1+\gamma)}}$, $\rho_m(t)=\rho_{m0}(\ell_1-D_0\Upsilon^* t)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$, $R(t)=0$
$P_5^-(r^*)$	$\frac{6(-1+\gamma)}{3\gamma-4}$	$\ell(t)=\ell_0(\ell_1-D_0\Upsilon^* t)^{\frac{1}{3(-1+\gamma)}}$, $\rho_m(t)=\rho_{m0}(\ell_1-D_0\Upsilon^* t)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$, $R(t)=0$
$P_6^+(r^*)$	$-\frac{3\gamma}{3\gamma+(-2+3\gamma)r^*}$	$\ell(t)=\ell_0\left(\ell_1-D_0\Upsilon^*\, t\right)^{-\frac{2r^*}{3\gamma}}$, $\rho_m(t)=\rho_{m0}\left[\frac{\ell(t)}{\ell_0}\right]^{-3\gamma}$
		$R(t)=\begin{cases} R_0\left(\ell_1-D_0\Upsilon^*\, t\right)^{\frac{2(1+r^*)}{m(r)}} & \text{para } r^*\neq\{-\frac{3\gamma}{4},-1\} \\ 0 & \text{para } r^*=-\frac{3\gamma}{4} \\ \text{arbitraria} & \text{para } r^*=-1 \end{cases}$
$P_6^-(r^*)$	$\frac{3\gamma}{3\gamma+(-2+3\gamma)r^*}$	$\ell(t)=\ell_0\left(\ell_1-D_0\Upsilon^*\, t\right)^{-\frac{2r^*}{3\gamma}}$, $\rho_m(t)=\rho_{m0}\left[\frac{\ell(t)}{\ell_0}\right]^{-3\gamma}$
		$R(t)=\begin{cases} R_0\left(\ell_1-D_0\Upsilon^*\, t\right)^{\frac{2(1+r^*)}{m(r)}} & \text{para } r^*\neq\{-\frac{3\gamma}{4},-1\} \\ 0 & \text{para } r^*=-\frac{3\gamma}{4} \\ \text{arbitraria} & \text{para } r^*=-1 \end{cases}$
P_8^+	-3	$\ell(t)=\ell_0(\ell_1+3D_0t)^{\frac{1}{3}}$, $\rho_m(t)=\rho_{m0}(\ell_1+3D_0t)^{-\gamma}$, $R(t)=0$
P_8^-	3	$\ell(t)=\ell_0(\ell_1-3D_0t)^{\frac{1}{3}}$, $\rho_m(t)=\rho_{m0}(\ell_1-3D_0t)^{-\gamma}$, $R(t)=0$
P_9^+	-3	$\ell(t)=\ell_0(\ell_1+3D_0t)^{\frac{1}{3}}$, $\rho_m(t)=\rho_{m0}(\ell_1+D_0t)^{-\gamma}$, $R(t)=0$
P_9^-	3	$\ell(t)=\ell_0(\ell_1-3D_0t)^{\frac{1}{3}}$, $\rho_m(t)=\rho_{m0}(\ell_1-3D_0t)^{-\gamma}$, $R(t)=0$
P_{10}^+	0	$\ell(t)=\ell_0\, e^{D_0\, t}$, $\rho_m(t)=\rho_{m0}\, e^{-3D_0\, t\, \gamma}$, $R(t)=R_0$
P_{10}^-	0	$\ell(t)=\ell_0\, e^{-D_0\, t}$, $\rho_m(t)=\rho_{m0}\, e^{3D_0\, t\, \gamma}$, $R(t)=R_0$
P_{11}^+	0	$\ell(t)=\ell_0\, e^{\frac{D_0\, t}{2}}$, $\rho_m(t)=\rho_{m0}\, e^{-\frac{3}{2}D_0\, t\, \gamma}$, $R(t)=R_0$
P_{11}^-	0	$\ell(t)=\ell_0\, e^{-\frac{D_0\, t}{2}}$, $\rho_m(t)=\rho_{m0}\, e^{\frac{3}{2}D_0\, t\, \gamma}$, $R(t)=R_0$

las soluciones no permanecen un período largo de tiempo cerca de estas soluciones por tener una dirección propia fuertemente inestable.

Para la curvas de equilibrio $P_8^{\pm}$ y $P_9^{\pm}$ se tienen las soluciones a primer orden:

$$\ell(t) = \ell_0(\ell_1 \pm 3D_0 t)^{\frac{1}{3}}, \quad \rho_m(t) = \rho_{m0}(\ell_1 \pm 3D_0 t)^{-\gamma}, \quad R(t) = 0.$$

Estas curvas contienen como casos particulares los puntos $P_1^{\pm}(r^*)$ y $P_2^{\pm}(r^*)$ cuando $r_c = r^*$. Estos puntos no describen apropiadamente el universo actual, por tanto no discutiremos en profundidad las propiedades físicas de las soluciones cosmológicas correspondientes.

El punto crítico P_{10}^{+} describe un universo plano e isótropo en expansión acelerada tipo *de Sitter* puesto que $w_{eff} = -1$. Dicho punto existe para $r = -2$ entonces, si $M(-2) > 0$, P_{10}^{+} es un atractor de futuro (ver tabla 2.8). Evaluándose a primer orden en P_{10}^{+} se obtienen las soluciones asintóticas:

$$\ell(t) = \ell_0\, e^{D_0\, t}, \quad \rho_m(t) = \rho_{m0}\, e^{-3D_0\, t\, \gamma}, \quad R(t) = R_0.$$

Para $M(-2) = 0$ este punto crítico es no hiperbólico teniendo una variedad 4D estable. Observar que A^+ y P_{10}^{+} coinciden para $r = -2$. En este caso se requiere de un análisis más detallado. Por otra parte, P_{10}^{-} representa un universo isótropo en contracción desacelerada y no es capaz de representar una fase del universo tardío.

El punto P_{11}^{-} corresponde a un universo contracción desacelerada, al ser inestable no reproduce un universo tardío. Por otra parte P_{11}^{+} tiene una variedad estable 4D estable. Pudiendo representar una solución de un universo tardío no plano y en expansión acelerada tipo *de Sitter* si $r = -2$, $0 < M(-2) \leq \frac{3}{8}$. Evaluando en P_{11}^{+} se obtiene a primer orden:

$$\ell(t) = \ell_0\, e^{\frac{D_0\, t}{2}}, \quad \rho_m(t) = \rho_{m0}\, e^{-\frac{3}{2}D_0\, t\, \gamma}, \quad R(t) = R_0.$$

Para $u \in [0, 2\pi]$, $u \neq \pi/2$ los puntos críticos en la curva $C^-(r^*)$ corresponden a atractores de futuro, correspondiendo a universos en contracción acelerada y plano (ver tabla 2.3). Para $u \in [0, 2\pi]$, $u \neq 3\pi/2$, los puntos críticos en $C^+(r^*)$ son inestables por tanto no corresponden a atractores de futuro.

Resumiendo, se demostró que este tipo de geometría Kantowsky-Sachs puede llevar a las teorías *f(R)* no solo a un universo acelerado, sino también a un comportamiento fantasma[6]. Como los obtenido en los puntos $A^+(r^*)$, $P_4^+(r^*)$, mientras que otros, como el P_{10}^+ y P_{11}^+ corresponden a atractores de tipo *de Sitter*. Los puntos de equilibro $B^+(r^*)$ y $P_6^+(r^*)$ pueden representar universos dominados por materia.

Para concluir la sección se comenta brevemente sobre la viabilidad de los modelos $f(R)$ desde el punto de vista cosmológico. Uno de los aspectos de mayor interés desde el punto de vista cosmológico es que los modelos *f(R)* sean capaces de reproducir las diferentes etapas por las que el universo a evolucionado. Un modelo cosmológico viable debe tener una época de expansión acelerada precedida de una época de dominio de materia [32].

De acuerdo al análisis que se realizó en el capítulo 2, de los posibles atractores de futuro que representan soluciones cosmológicas en expansión acelerada se puedo definir las siguientes regiones (asumimos $1 \leq \gamma \leq 2$):

I: $r^* < -2,\ M'(r^*) < 0$. En esta región $A^+(r^*)$ es el atractor comportándose como un campo fantasma ($w_{eff} < -1$).

II: $r^* = -2,\ M'(r^*) > 0$. En esta región P_{10}^+ es el atractor comportándose como una solución *de Sitter*.

III: $-2 < r^* < -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}),\ M'(r^*) > 0$. En esta región $A^+(r^*)$ es el atractor.

IV: $r^* > \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}),\ M'(r^*) < 0$. En esta región $A^+(r^*)$ es el atractor.

[6] Un resultado de gran interés cosmológico.

Tabla 3.5.: En la tabla se muestran las ecuaciones que determinan el comportamiento de $\ell(t)$, $\rho_m(t)$ y $R(t)$ para la curva de puntos críticos $C^{\pm}$ y los puntos críticos que pertenecen a la misma.

Ptos.	Υ^*	Solución
$L^+(r^*)$	-4	$\ell(t)=\ell_0\sqrt{\ell_1+4D_0t}$, $\rho_m(t)=\rho_{m0}(\ell_1+4D_0t)^{-3\gamma/2}$, $R(t)=0$
$L^-(r^*)$	4	$\ell(t)=\ell_0\sqrt{\ell_1-4D_0t}$, $\rho_m(t)=\rho_{m0}(\ell_1-4D_0t)^{-3\gamma/2}$, $R(t)=0$
$P_1^+(r^*)$,$P_2^+(r^*)$	-3	$\ell(t)=\ell_0(\ell_1+3D_0t)^{1/3}$, $\rho_m(t)=\rho_{m0}(\ell_1+3D_0t)^{-\gamma}$, $R(t)=0$
$P_1^-(r^*)$,$P_2^-(r^*)$,	3	$\ell(t)=\ell_0(\ell_1-3D_0t)^{1/3}$, $\rho_m(t)=\rho_{m0}(\ell_1-3D_0t)^{-\gamma}$, $R(t)=0$
$C^+(r^*)$	$-3-\sin u$	$\ell(t)=\ell_0(\ell_1-D_0\Upsilon^*t)^{-\frac{1+\sin u}{\Upsilon^*}}$, $\rho_m(t)=\rho_{m0}(\ell_1-D_0\Upsilon^*t)^{\frac{3\gamma(1+\sin u)}{\Upsilon^*}}$, $R(t)=0$
$C^-(r^*)$	$3-\sin u$	$\ell(t)=\ell_0(\ell_1-D_0\Upsilon^*t)^{\frac{1-\sin u}{\Upsilon^*}}$, $\rho_m(t)=\rho_{m0}(\ell_1-D_0\Upsilon^*t)^{\frac{3\gamma(-1+\sin u)}{\Upsilon^*}}$, $R(t)=0$

De acuerdo al análisis que se realizó en el capítulo 2, los puntos críticos que pueden representar soluciones cosmológicas de dominio de materia $\Omega_m=1$, son P_6^+ y B^+. Como se espera dichos puntos tienen comportamiento tipo silla. Luego se pueden definir tres regiones en el espacio de parámetros para la existencia de una etapa transiente de dominio de materia:

V: $1\leq\gamma\leq 2$, $r^*\to -1$. En este caso $P_6^+(r^*)$ representa un universo dominado por materia.

VI: $1\leq\gamma\leq\frac{5}{48}(5+3\sqrt{17})$, $r^*=-\frac{3\gamma}{4+6\gamma}$, $M'(r^*)=0$. En este caso $P_6^+(r^*)$ representa un universo dominado por materia.

VII: $\gamma=\frac{4}{3}$, $M(r^*)=0$. En este caso $B^+(r^*)$ representa un universo dominado por materia.

En [32] los autores demostraron que el comportamiento cosmológico de los modelos *f(R)* puede entenderse, desde una perspectiva geométrica, a partir de las propiedades de una curva $m(r)$ en el plano (r, m), donde $m = \frac{Rf''(R)}{f'(R)} = \frac{d \ln f'(R)}{d \ln R}$ y $r = -\frac{Rf'(R)}{f(R)} = -\frac{d \ln f(R)}{d \ln(R)}$. Esto permite clasificar a los modelos *f(R)* en cuatro clases generales, dependiendo de la existencia de una época de materia estándar y una época final acelerada. La existencia de una época dominada por materia viable previa al estado de expansión acelerada observado hoy día, requiere que la variable m satisfaga las condiciones $m(r) \approx +0$ y $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}r} > -1$ en $r \approx -1$. Para la existencia de una fase de aceleración tardía viable se requiere que:

$$\text{(i) } m = -r - 1, \quad (\sqrt{3} - 1)/2 < m < 1 \quad \text{y} \quad \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}r} < -1. \quad \text{ó} \quad \text{(ii) } 0 < m < 1 \text{ en } r = -2.$$

Estas condiciones determinan dos regiones en el espacio (r, m). En esta investigación se determinaron regiones en el espacio $(\gamma, r, M'(r))$ en las cuales se tienen fases de dominio de materia (regiones V-VII) y fases de expansión acelerada (regiones I-IV) Una teoría *f(R)* con una curva $M(r)$ que conecte una región con dominio de materia precedente a una fase de expansión acelerada en el plano $(r, M'(r))$ se considerará viable cosmológicamente. Estos resultados son equivalentes a los presentados en [32]. En esta investigación las nuevas regiones son la región de tipo I (expansión acelerada) y las regiones de tipo V y VI (dominio de materia). Luego en esta tesis se extienden los resultados de [32].

3.3. Reconstrucción de la función genérica f(R)

En el capítulo 1 se discute brevemente sobre el rol de los modelos *f(R)* como alternativa para modelar diferentes comportamientos del universo sin necesidad de recurrir a la EO o la MO. Para la obtención de un modelo *f(R)* viable se debe escoger apropiadamente la función genérica del escalar de Ricci *f(R)*. Esta función debe satisfacer un grupo de requisitos expuestos en el epígrafe 1.1.3 para que el modelo construido sea auto-consistente desde el punto de vista teórico y al mismo tiempo compatible con las observaciones y experimentos cosmológicos.

En este epígrafe se propone un método para la reconstrucción de la función *f(R)* a partir de la función de entrada $m(r)$ (definida en (2.40)). Dicha función debe satisfacer un grupo de requisitos desde el punto de vista matemático que se imponen para obtener atractores de futuro isótropos en expansión acelerada precedidos de una etapa transiente de dominio de materia. Una vez planteadas la funciones $m(r)$ de inicio, se imponen condiciones adicionales que surgen a partir de las restricciones que deben satisfacer las funciones *f(R)* reconstruidas que provean un cuadro físico coherente.

Existen muchos métodos de reconstrucción de las teorías *f(R)* abordados en la literatura. Por ejemplo en [11] se reconstruye la función *f(R)* a partir de conocer la evolución del parámetro de Hubble. En el proceso de reconstrucción de la función *f(R)* el autor adopta predicciones de un modelo de EO, buscando así obtener los mismos resultados sin necesidad de recurrir a componentes exóticas. En esta tesis, en lugar de seguir el procedimiento anterior, se parte de poner como función de entrada la función $m(r)$ y reconstruir la función genérica *f(R)* utilizándose el algoritmo que se propone a continuación.

Sean dadas las expresiones

$$m = \frac{Rf''(R)}{f'(R)} = \frac{d\ln f'(R)}{d\ln R} \tag{3.15}$$

$$r = -\frac{Rf'(R)}{f(R)} = -\frac{d\ln f(R)}{d\ln(R)}, \tag{3.16}$$

Derivando en ambos miembros de (3.16) con respecto a R, y usando la definicón (3.15) se deduce que

$$\frac{dr}{dR} = \frac{r(1+m(r)+r)}{R} \tag{3.17}$$

Separando variables e integrando la ecuación resultante, se obtiene la expresión en cuadraturas

$$R(r) = R_0 \exp\left[\int \frac{dr}{r(1+m(r)+r)}\right] \tag{3.18}$$

Para obtener la función *f(R)* como una integral en cuadraturas que contenga la función $m(r)$ se parte de la definición de r:

$$r = -\frac{d\ln f(R)}{d\ln R}$$

Agrupándose términos convenientemente resulta

$$\begin{aligned} -\, r d\ln R &= d\ln f(R) \\ -\int r d\ln R &= \ln\left[\frac{f(R)}{f_0}\right] \\ f(R) &= f_0 \exp\left(-\int r d\ln R\right) \end{aligned} \tag{3.19}$$

Sustituyendo (3.18) en (3.19) resulta

$$f(r) = f_0 \exp\left(-\int \frac{1}{1+m(r)+r}\, dr\right). \tag{3.20}$$

Luego es posible construir una función *f(R)* a partir de una $m(r)$ dada. También se puede construir una función *f(R)* dada una $M(r)$ debido a la relación dada por (2.42). Finalmente de las ecuaciones (3.19) y (3.18) puede obtenerse una relación paramétrica entre el *f(R)* y R.

En la tabla 3.6 se muestran para algunos modelos *f(R)* usuales sus respectivas funciones $m(r)$ y $M(r)$.

Tabla 3.6.: Modelos *f(R)* usuales

Modelos *f(R)*	$m(r)$	$M(r)$
αR^n,	$-r-1$	0
$R+\alpha R^n$	$\frac{n(1+r)}{r}$	$\frac{r(n+r)}{n}$
$R^p\left(\ln \alpha R\right)^q$	$\frac{p^2+2rp-qr^2+r^2-qr}{qr}$	$-\frac{r(p+r)^2}{-p^2-2rp+qr^2-r^2+qr}$
$R^p \exp\left(qR\right)$	$\frac{p-r^2}{r}$	$-\frac{r(p+r)}{r^2-p}$
$R^p \exp\left(\frac{q}{R}\right)$	$-\frac{r^2+2r+p}{r}$	$\frac{r(p+r)}{r^2+2r+p}$

3.3.1. Ejemplo: Gravedad Cuadrática

En esta sección se usa el modelo de Gravedad Cuadrática $f(R) = R+\alpha R^n$ como ejemplo para ilustrar los resultados analíticos discutidos en esta tesis.

En este caso $M(r) = \frac{1}{2}r(r+2)$. La función $M(r)$ se anula en los puntos $r=0$ y $r=-2$, o sea, $r^* \in \{0,-2\}$. Tenemos que $M'(0)=1$ y $M'(-2)=-1$.

- Fueron obtenidas condiciones suficientes para la existencia de atractores de pasado:
  - $L^+(-2)$ es un repulsor local si $1 \leq \gamma < \frac{5}{3}$.
  - $N^+(0)$ es siempre un repulsor local.
- Fueron obtenidas condiciones suficientes para la existencia de atractores de futuro:
  - $L^-(-2)$ es un atractor local si $1 \leq \gamma < \frac{5}{3}$.
  - $N^-(0)$ es siempre un atractor local.
  - El punto P_{10}^+ para $M(-2) > 0$ representa un atractor de futuro y específicamente si $M(-2) > \frac{9}{8}$ su comportamiento es tipo foco estable.

- Algunos puntos sillas de interés físico son:
  - $A^{-}(-2)$ es no hiperbólico con una variedad inestable 4D cuando $r \to (-2)^{-}$. Se prueba que la variedad central es estable. Luego es de tipo silla.
  - $A^{+}(-2)$ no hiperbólico con una variedad estable 4D cuando $r \to (-2)^{-}$. Se prueba que la variedad central es inestable. Luego es de tipo silla.
  - $A^{+}(0)$ es silla con una variedad estable 3D y una variedad inestable 2D.
  - $P_4^{+}(-2)$ es silla con una variedad estable 3D y una variedad inestable 1D.

En el anexo B, sección B.1 se hace un estudio de la estabilidad de la variedad central de $A^{+}(-2)$ que representa universos en expansión tipo *de Sitter* ($\ell(t) \propto e^{D_0 t}$) para valores de $\gamma \neq 1$ y $\gamma = 1$. En dicho anexo se demuestra que el punto crítico asociado a la fase de Sitter es localmente asintóticamente inestable (tipo silla). Este resultado tiene una gran importancia práctica ya que dicha solución cosmológica podría representar la etapa de aceleración del universo temprano asociada con la inflación primordial. De esta manera se logra extender los resultados para el caso $f(R) = R + \alpha R^2$ presentados en [30] para métricas Kantowsky-Sachs. Cabe señalar que para demostrar el resultado análogo para la métrica FRW en [30], se trabajó con la formulación conforme de las teorías $f(R) = R + \alpha R^2$. Como se sabe, el modelo de cuadrática es equivalente a una Teoría Escalar-Tensorial con campo escalar, Φ, acoplado no-mínimamente a la materia [90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 30]. El potencial de autointeracción de Φ es

$$V(\Phi) = \frac{1}{8\alpha}\left(1 - e^{-\sqrt{2/3}\Phi}\right)^2 \tag{3.21}$$

y función de acoplamiento

$$\chi(\Phi) = e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\Phi} \tag{3.22}$$

(ver detalles en el anexo B, sección B.2).

En las figuras 3.1, 3.2 y 3.3 se presentan algunas órbitas de (B.6) desde diferentes perspectivas geométricas, ilustrando el comportamiento inestable de la variedad central de $A^+(-2)$ en la dirección de u. El grupo de órbitas en frente de la figura representa el grafo de la variedad central. La figuras sugieren que el punto de equilibrio $L^+(-2)$ es el atractor del pasado del modelo. Este resultado está en correspondencia con los resultados analíticos obtenidos en esta sección que plantean que $L^+(-2)$ es una fuente local para $1 \leq \gamma < \frac{5}{3}$.

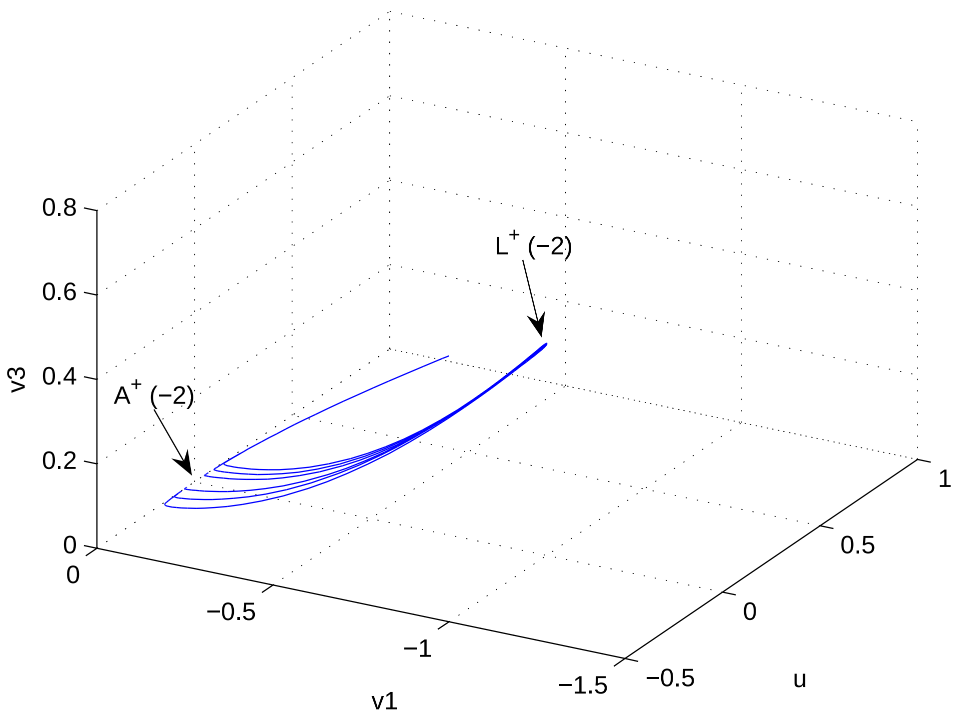

Figura 3.1.: Proyección de algunas órbitas de (B.6) en el espacio u, v_2, v_3. El gráfico ilustra el comportamiento inestable de la variedad central de $A^+(-2)$ en la dirección de u. El grupo de órbitas en frente de la figura representa el grafo de la variedad central. El punto de equilibrio $L^+(-2)$ es el atractor del pasado del modelo.

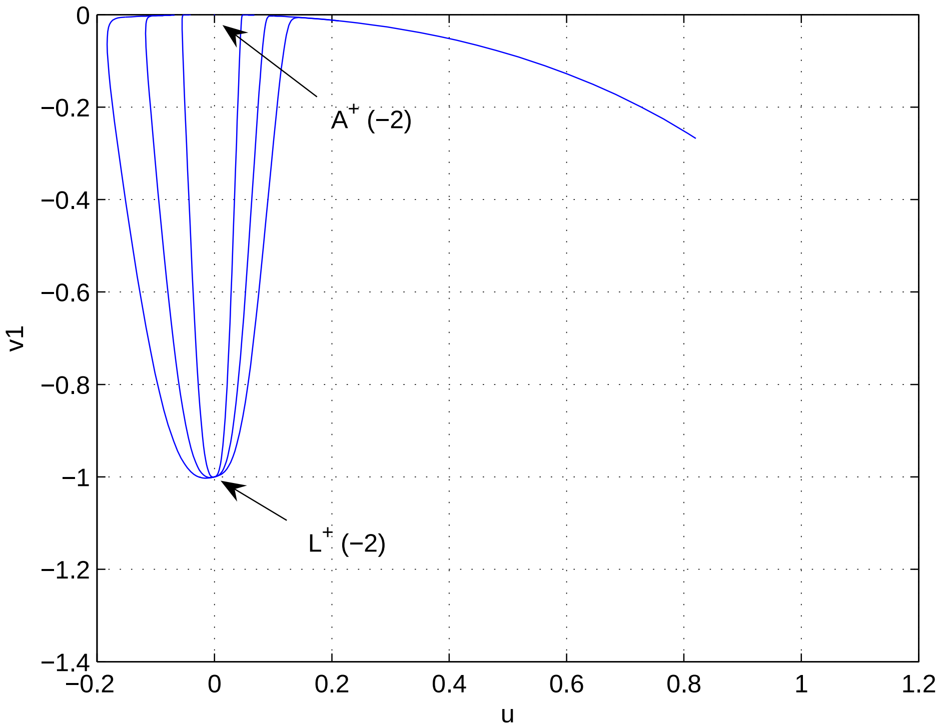

Figura 3.2.: Proyección en el plano (u, v_1) de las órbitas representadas en la Figura 3.1. El gráfico ilustra el comportamiento inestable de $A^+(-2)$ (las trayectorias comenzando en $u > 0$ se alejan del origen).

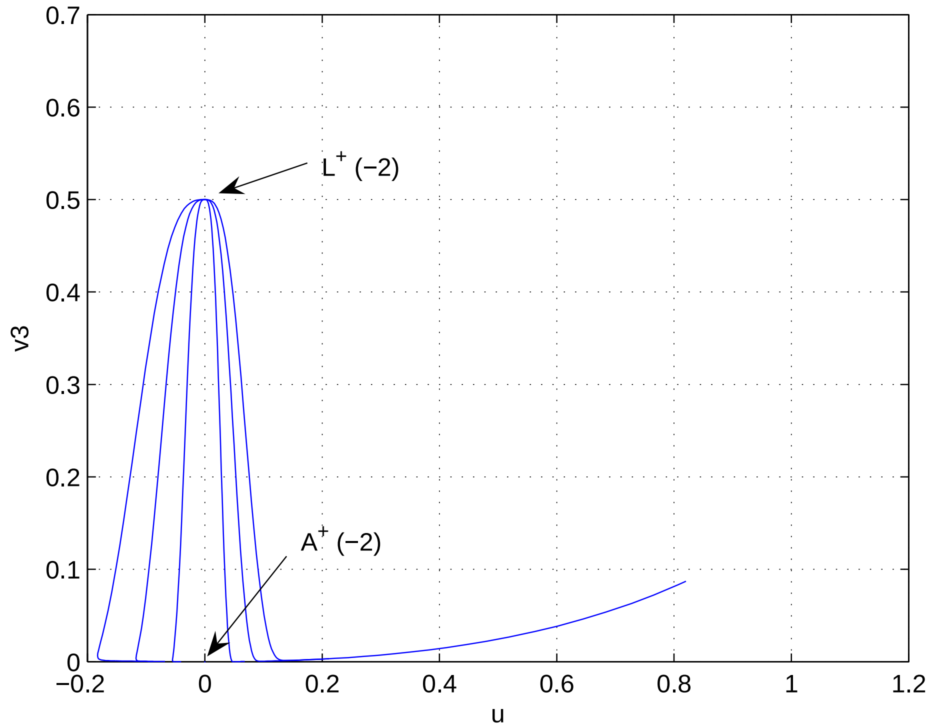

Figura 3.3.: Proyección en el plano (u, v_3) de las órbitas representadas en la Figura3.1. El gráfico ilustra el comportamiento inestable de $A^+(-2)$ (las trayectorias comenzando en $u > 0$ se alejan del origen).

3.4. Conclusiones Parciales

En este capítulo se presentó un formalismo perturbativo de primer orden para evaluar los observables básicos (el factor de escala, las densidades de materia y el escalar de Ricci) en los puntos críticos. La información obtenida se utilizó para la caracterizacón física de cada punto crítico obtenido.

Los resultados más importantes que se derivan del análisis físico realizado son:

- A partir del análisis que se realiza en el capítulo 2, fueron obtenidas varias regiones en el espacio de parámetros para la existencia de atractores de futuro, los cuales representan soluciones cosmológicas en expansión acelerada (asumimos $1 \leq \gamma \leq 2$):

  I: $r^* < -2,\ M'(r^*) < 0$. En esta región $A^+(r^*)$ es el atractor comportándose como un campo fantasma ($w_{eff} < -1$).

  II: $r^* = -2,\ M'(r^*) > 0$. En esta región P_{10}^+ es el atractor comportándose como una solución *de Sitter*.

  III: $-2 < r^* < -\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}),\ M'(r^*) > 0$. En esta región $A^+(r^*)$ es el atractor.

  IV: $r^* > \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}),\ M'(r^*) < 0$. En esta región $A^+(r^*)$ es el atractor.

- A partir del análisis que se realiza en el capítulo 2, fueron obtenidas varias regiones en el espacio de parámetros para la existencia de soluciones con comportamiento tipo silla (P_6^+ y B^+), que representan soluciones cosmológicas de dominio de materia $\Omega_m = 1$.

  V: $1 \leq \gamma \leq 2,\ r^* \to -1$. En este caso $P_6^+(r^*)$ representa un universo dominado por materia.

  VI: $1 \leq \gamma \leq \frac{5}{48}(5+3\sqrt{17}),\ r^* = -\frac{3\gamma}{4+6\gamma},\ M'(r^*) = 0$. En este caso $P_6^+(r^*)$ representa un universo dominado por materia.

VII: $\gamma = \frac{4}{3}, M(r^*) = 0$. En este caso $B^+(r^*)$ representa un universo dominado por materia.

- Se determinaron nuevas regiones: la región de tipo I, donde se garantiza la existencia una fase de expansión acelerada y las regiones de tipo V y de tipo VI, donde se garantiza la existencia de una época de dominio de materia, que no fueron reportadas en [32]. Esta es una de las novedades de la presente tesis.

- Se propuso un método para la reconstrucción de la función *f(R)* a partir de la función de entrada $m(r)$ (definida en (2.40)) que debe satisfacer un grupo de requisitos desde el punto de vista matemático y físico. La esencia del método es que a partir de las expresiones en cuadratura

$$f(r) = f_0 \exp\left(-\int \frac{1}{1+m(r)+r}\, dr\right),\ R(r) = R_0 \exp\left[\int \frac{dr}{r(1+m(r)+r)}\right] \tag{3.23}$$

se puede obtener una dependencia implícita entre f y R.

- Para ilustrar el procedimiento de trabajo propuesto en este capítulo, se realizó el estudio al modelo de gravedad cuadrática, realizándose el análisis de la variedad central presentada por esta y llegándose al resultado inestable independientemente del valor del parámetro γ.

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos cumplen con los objetivos generales y específicos trazados en esta tesis, dando así una respuesta afirmativa a la interrogante científica y validando la hipótesis de este trabajo. Los principales aportes de esta investigación se pueden enumerar como sigue:

1. Se lograron extender los resultados para el caso *f(R)* $= R + \alpha R^2$ presentados en [30] para métricas Kantowsky-Sachs, mediante el análisis de estabilidad de la variedad central correspondiente $A^+(-2)$, al demostrarse el carácter localmente asintóticamente inestable (punto silla) del punto de equilibrio correspondiente a la fase *de Sitter* (región II).

2. Se logró generalizar los resultados presentados en [31] a marcos *f(R)* genéricos, al obtenerse una familia de puntos críticos equivalentes a los obtenidos por [31] y demostrarse que estos poseen el mismo comportamiento dinámico que el expresado en el mencionado artículo.

3. Se formuló y obtuvo en esta tesis una generalización del procedimiento geométrico presentado en [32] para métricas FRW, determinándose regiones en el espacio $(\gamma, r, M'(r))$ en las cuales se tienen fases de dominio de materia (regiones V-VII) y fases de expansión acelerada (regiones I-IV). Una teoría $f(R)$ con una curva $M(r)$ que conecte una región con dominio de materia precedente a una fase de expan-

sión acelerada en el plano $(r, M'(r))$ se considerará viable cosmológicamente. Estos resultados son equivalentes a los presentados por [32]. En esta investigación se obtuvierón las nuevas regiones tipo I (expansión acelerada) y las regiones de tipo V y VI (dominio de materia). Luego en esta tesis se extienden los resultados de [32].

4. Se diseñó una metodología para la reconstrucción de la función *f(R)* a partir de la función de entrada $m(r)$ (definida en (2.40)). Dicha función debe satisfacer un grupo de requisitos desde el punto de vista matemático que se imponen para obtener atractores de futuro isótropos en expansión acelerada precedidos de una etapa transiente de dominio de materia. A dichas funciones $m(r)$ de inicio, se le imponen condiciones adicionales que surgen a partir de las restricciones que deben satisfacer las funciones *f(R)* reconstruidas que provean un cuadro físico coherente.

RECOMENDACIONES

Para dar continuidad al trabajo investigativo discutido en la presente tesis, se hacen las siguientes recomendaciones:

- Aplicar la metodología desarrollada en esta tesis para los modelos *f(R)* propuestos en la Tabla 3.6 con el objetivo de determinar una teoría viable cosmológicamente en el sentido de que la curva $M(r)$ asociada conecte una región del plano $(r, M'(r))$ asociada al dominio de materia con una región del plano $(r, M'(r))$ asociada a una fase de expansión acelerada.
- Para aclarar el problema de la equivalencia física (o no) entre la teoría *f(R)* y su formulación conforme como Teoría Escalar-Tensorial, se recomienda estudiar la estabilidad de las soluciones cosmológicas de interés físico del sistema (B.19)-(B.23). De la comparación entre los resultados físicos que se obtengan en dicho escenario conforme y los reportados en esta tesis, se podría dar una respuesta parcial a dicho problema.

A. Cálculos Auxiliares

A.1. Cálculo del Término $g^{\alpha\beta}(\delta\Gamma^{\sigma}_{\beta\alpha})$-$g^{\alpha\sigma}(\delta\Gamma^{\gamma}_{\alpha\gamma})$

En esta sección se calcula la variación de $\delta\Gamma^{\sigma}_{\beta\alpha}$:

$$\delta\Gamma^{\sigma}_{\beta\alpha} = \frac{1}{2}\delta g^{\sigma\gamma}\left[\partial_\beta g_{\gamma\alpha} + \partial_\alpha g_{\gamma\beta} - \partial_\gamma g_{\beta\alpha}\right] + \frac{1}{2}g^{\sigma\gamma}\left[\partial_\beta\left(\delta g_{\gamma\alpha}\right) + \partial_\alpha\left(\delta g_{\gamma\beta}\right) - \partial_\gamma\left(\delta g_{\beta\alpha}\right)\right]. \quad \text{(A.1)}$$

La derivada covariante de las variaciones de la métrica está dada:

$$\nabla_\gamma \delta g_{\alpha\beta} = \partial_\gamma \delta g_{\alpha\beta} - \Gamma^{\sigma}_{\gamma\alpha}\delta g_{\sigma\beta} - \Gamma^{\sigma}_{\gamma\beta}\delta g_{\alpha\sigma} \quad \text{(A.2)}$$

Como la variedad en que estamos trabajando es libre de torsión, se garantiza la simetría de los símbolos de Christoffel con respecto a los índices covariantes, $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}$. Luego, se puede escribir:

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma^{\sigma}_{\beta\alpha} &= \frac{1}{2}\delta g^{\sigma\gamma}\left[\partial_\beta g_{\gamma\alpha} + \partial_\alpha g_{\gamma\beta} - \partial_\gamma g_{\beta\alpha}\right] + \frac{1}{2}g^{\sigma\gamma}[\nabla_\beta\left(\delta g_{\gamma\alpha}\right) + \\
&\quad \nabla_\alpha\left(\delta g_{\gamma\beta}\right) - \nabla_\gamma\left(\delta g_{\beta\alpha}\right) + \Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha}\delta g_{\gamma\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}\delta g_{\lambda\gamma}] \\
&= \frac{1}{2}\delta g^{\sigma\gamma}\left[\partial_\beta g_{\gamma\alpha} + \partial_\alpha g_{\gamma\beta} - \partial_\gamma g_{\beta\alpha}\right] + g^{\sigma\gamma}\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha}\delta g_{\gamma\lambda} + \frac{1}{2}g^{\sigma\gamma}[\nabla_\beta\left(\delta g_{\gamma\alpha}\right) + \\
&\quad \nabla_\alpha\left(\delta g_{\gamma\beta}\right) - \nabla_\gamma\left(\delta g_{\beta\alpha}\right)] \qquad \text{(A.3)}
\end{aligned}$$

Sustituyendo las relaciones

$$\begin{aligned} \delta g_{\alpha\beta} &= -g_{\alpha\mu}g_{\beta\upsilon}\delta g^{\mu\upsilon} \\ \delta g^{\alpha\beta} &= -g^{\alpha\mu}g^{\beta\upsilon}\delta g_{\mu\upsilon} \end{aligned} \tag{A.4}$$

en el segundo término de (A.3) obtenemos:

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^{\sigma}_{\beta\alpha} &= \frac{1}{2}\delta g^{\sigma\gamma}[\partial_\beta g_{\gamma\alpha} + \partial_\alpha g_{\gamma\beta} - \partial_\gamma g_{\beta\alpha}] + \delta g^{\mu\upsilon}g^{\sigma\gamma}g_{\gamma\mu}g_{\lambda\upsilon}\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha} + \frac{1}{2}g^{\sigma\gamma}[\nabla_\beta\left(\delta g_{\gamma\alpha}\right) + \\ &\quad \nabla_\alpha\left(\delta g_{\gamma\beta}\right) - \nabla_\gamma\left(\delta g_{\beta\alpha}\right)] \\ &= \delta g^{\sigma\upsilon}g_{\lambda\upsilon}\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha} - \delta g^{\mu\upsilon}\delta^{\sigma}_{\mu}g_{\lambda\upsilon}\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha} + \frac{1}{2}g^{\sigma\gamma}[\nabla_\beta\left(\delta g_{\gamma\alpha}\right) + \nabla_\alpha\left(\delta g_{\gamma\beta}\right) - \nabla_\gamma\left(\delta g_{\beta\alpha}\right)] \\ &= \delta g^{\sigma\upsilon}g_{\lambda\upsilon}\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha} - \delta g^{\sigma\upsilon}g_{\lambda\upsilon}\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha} + \frac{1}{2}g^{\sigma\gamma}\left[\nabla_\beta\left(\delta g_{\gamma\alpha}\right) + \nabla_\alpha\left(\delta g_{\gamma\beta}\right) - \nabla_\gamma\left(\delta g_{\beta\alpha}\right)\right] \end{aligned} \tag{A.5}$$

Teniéndose entonces:

$$\delta\Gamma^{\sigma}_{\beta\alpha} = \frac{1}{2}g^{\sigma\gamma}\left[\nabla_\beta\left(\delta g_{\alpha\gamma}\right) + \nabla_\alpha\left(\delta g_{\beta\gamma}\right) - \nabla_\gamma\left(\delta g_{\beta\alpha}\right)\right] \tag{A.6}$$

y similarmente

$$\delta\Gamma^{\gamma}_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\gamma}\left[\nabla_\alpha\left(\delta g_{\sigma\gamma}\right)\right] \tag{A.7}$$

Expresando la variación de (A.6) en términos $\delta g^{\alpha\beta}$ mediante la relación (A.4) se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^{\sigma}_{\beta\alpha} &= \frac{1}{2}g^{\sigma\gamma}\{\nabla_\beta\left(-g_{\alpha\mu}g_{\gamma\upsilon}\delta g^{\mu\upsilon}\right) + \nabla_\alpha\left(-g_{\beta\mu}g_{\gamma\upsilon}\delta g^{\mu\upsilon}\right) - \nabla_\gamma(-g_{\beta\mu}g_{\alpha\upsilon}\delta g^{\mu\upsilon})\} \\ &= -\frac{1}{2}g^{\sigma\gamma}\left[g_{\alpha\mu}g_{\gamma\upsilon}\nabla_\beta(\delta g^{\mu\upsilon}) + g_{\beta\mu}g_{\gamma\upsilon}\nabla_\alpha(\delta g^{\mu\upsilon}) - g_{\beta\mu}g_{\alpha\upsilon}\nabla_\gamma(\delta g^{\mu\upsilon})\right] \\ &= -\frac{1}{2}[\delta^{\sigma}_{\upsilon}g_{\alpha\mu}\nabla_\beta(\delta g^{\mu\upsilon}) + \delta^{\sigma}_{\upsilon}g_{\beta\mu}\nabla_\alpha(\delta g^{\mu\upsilon}) - g_{\beta\mu}g_{\alpha\upsilon}g^{\gamma\sigma}\nabla_\gamma(\delta g^{\mu\upsilon})] \\ &= -\frac{1}{2}[g_{\alpha\gamma}\nabla_\beta(\delta g^{\sigma\gamma}) + g_{\beta\gamma}\nabla_\alpha(\delta g^{\sigma\gamma}) - g_{\beta\mu}g_{\alpha\upsilon}\nabla^{\sigma}(\delta g^{\mu\upsilon})] \end{aligned} \tag{A.8}$$

De manera similar se obtiene:

$$\delta\Gamma^{\gamma}_{\alpha\gamma} = -\frac{1}{2} g_{\mu\upsilon} \nabla_{\alpha} \left(\delta g^{\mu\upsilon} \right) \tag{A.9}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta}(\delta\Gamma^{\sigma}_{\beta\alpha}) - g^{\alpha\sigma}(\delta\Gamma^{\gamma}_{\alpha\gamma}) &= -\frac{1}{2}\{[g^{\alpha\beta} g_{\alpha\gamma} \nabla_{\beta} \left(\delta g^{\sigma\gamma} \right) + g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} \nabla_{\alpha} \left(\delta g^{\sigma\gamma} \right) - \\ & g^{\alpha\beta} g_{\beta\mu} g_{\alpha\upsilon} \nabla^{\sigma} \left(\delta g^{\mu\upsilon} \right)] - g^{\alpha\sigma} g_{\mu\upsilon} \nabla_{\alpha} \left(\delta g^{\mu\upsilon} \right)\} \\ &= -\frac{1}{2}\{[\delta^{\beta}_{\gamma} \nabla_{\beta} \left(\delta g^{\sigma\gamma} \right) + \delta^{\alpha}_{\gamma} \nabla_{\alpha} \left(\delta g^{\sigma\gamma} \right) - \delta^{\alpha}_{\mu} g_{\alpha\upsilon} \nabla^{\sigma} \left(\delta g^{\mu\upsilon} \right)] - \\ & [g_{\mu\upsilon} g^{\alpha\sigma} \nabla_{\alpha} \left(\delta g^{\mu\upsilon} \right)]\} \\ &= -\frac{1}{2}\{[\nabla_{\gamma} \left(\delta g^{\sigma\gamma} \right) + \nabla_{\gamma} \left(\delta g^{\sigma\gamma} \right) - g_{\mu\upsilon} \nabla^{\sigma} \left(\delta g^{\mu\upsilon} \right)] - \\ & [g_{\mu\upsilon} \nabla^{\sigma} \left(\delta g^{\mu\upsilon} \right)]\} \\ &= -\frac{1}{2} \left(2\nabla_{\gamma} \left(\delta g^{\sigma\gamma} \right) - 2 g_{\mu\upsilon} \nabla^{\sigma} \left(\delta g^{\mu\upsilon} \right) \right) \end{aligned} \tag{A.10}$$

de donde

$$g^{\alpha\beta}(\delta\Gamma^{\sigma}_{\beta\alpha}) - g^{\alpha\sigma}(\delta\Gamma^{\gamma}_{\alpha\gamma}) = g_{\mu\upsilon} \nabla^{\sigma} \left(\delta g^{\mu\upsilon} \right) - \nabla_{\gamma} \left(\delta g^{\sigma\gamma} \right) \tag{A.11}$$

A.2. Deducción de (1.15) y (1.16)

Sean definidos los vectores

$$M_{\tau} = f'(R) g_{\alpha\beta} \nabla_{\tau} \left(\delta g^{\alpha\beta} \right) - \delta g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \nabla_{\tau} \left(f'(R) \right) \tag{A.12}$$

y

$$N^{\sigma} = f'(R) \nabla_{\gamma} \left(\delta g^{\sigma\gamma} \right) - \delta g^{\sigma\gamma} \nabla_{\gamma} \left(f'(R) \right) \tag{A.13}$$

La derivada covariante de M_τ se calcula según:

$$\begin{aligned}
\nabla^\tau M_\tau &= \nabla^\tau(f'(R)g_{\alpha\beta}\nabla_\tau(\delta g^{\alpha\beta})) - \nabla^\tau(\delta g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}\nabla_\tau(f'(R))) \\
&= \nabla^\tau(f'(R))g_{\alpha\beta}\nabla_\tau(\delta g^{\alpha\beta}) + f'(R)g_{\alpha\beta}\Box(\delta g^{\alpha\beta}) - \nabla^\tau(\delta g^{\alpha\beta})g_{\alpha\beta}\nabla_\tau(f'(R)) \\
&\quad -\delta g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}\Box(f'(R)) \\
&= f'(R)g_{\alpha\beta}\Box(\delta g^{\alpha\beta}) - \delta g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}\Box(f'(R)), \qquad \text{(A.14)}
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado la compatibilidad de la derivada covariante con la métrica expresada en la relación $\nabla^\tau g_{\alpha\beta} = 0$. Integrando resulta:

$$\int_V d^4x\sqrt{-g}\nabla^\tau M_\tau = \int_V d^4x\sqrt{-g}f'(R)g_{\alpha\beta}\Box(\delta g^{\alpha\beta}) - \int_V d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}\Box(f'(R)) \quad \text{(A.15)}$$

Ahora, utilizando el teorema de Gauss-Stokes (GS) que expresa que:

$$\int_V d^nx\sqrt{|g|}\nabla_\mu A^\mu = \oint_{\partial V} d^{n-1}y\epsilon\sqrt{|h|}n_\mu A^\mu \quad \text{(A.16)}$$

donde n_μ es el vector normal a la superficie ∂V, la ecuación, la ecuación (A.15) puede escribirse como:

$$\oint_{\partial V} d^3y\epsilon\sqrt{|h|}n^\tau M_\tau = \int_V d^4x\sqrt{-g}f'(R)g_{\alpha\beta}\Box(\delta g^{\alpha\beta}) - \int_V d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}\Box(f'(R)). \quad \text{(A.17)}$$

La ecuación puede reescribirse convenientemente de la forma:

$$\int_V d^4x\sqrt{-g}f'(R)g_{\alpha\beta}\Box(\delta g^{\alpha\beta}) = \int_V d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}\Box(f'(R)) + \oint_{\partial V} d^3y\epsilon\sqrt{|h|}n^\tau M_\tau \quad \text{(A.18)}$$

De una manera similar, tomando la derivada covariante de N^σ:

$$\begin{aligned}
\nabla_\sigma N^\sigma &= \nabla_\sigma(f'(R)\nabla_\gamma(\delta g^{\sigma\gamma})) - \nabla_\sigma(\delta g^{\sigma\gamma}\nabla_\gamma(f'(R))) \\
&= \nabla_\sigma(f'(R))\nabla_\gamma(\delta g^{\sigma\gamma}) + f'(R)\nabla_\sigma\nabla_\gamma(\delta g^{\sigma\gamma}) - \\
&\quad \nabla_\sigma(\delta g^{\sigma\gamma})\nabla_\gamma(f'(R)) - \delta g^{\sigma\gamma}\nabla_\sigma\nabla_\gamma(f'(R)) \\
&= f'(R)\nabla_\sigma\nabla_\beta(\delta g^{\sigma\beta}) - \delta g^{\sigma\beta}\nabla_\sigma\nabla_\beta(f'(R))
\end{aligned} \tag{A.19}$$

Integrando:

$$\int_V d^4x\sqrt{-g}\nabla_\sigma N^\sigma = \int_V d^4x\sqrt{-g}f'(R)\nabla_\sigma\nabla_\beta(\delta g^{\sigma\beta}) - \int_V d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\sigma\beta}\nabla_\sigma\nabla_\beta(f'(R)) \tag{A.20}$$

Usando nuevamente el teorema GS se llega a:

$$\int_V d^4x\sqrt{-g}f'(R)\nabla_\sigma\nabla_\beta(\delta g^{\sigma\beta}) = \int_V d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\sigma\beta}\nabla_\sigma\nabla_\beta(f'(R)) + \oint_{\partial V} d^3y\epsilon\sqrt{|h|}n_\sigma N^\sigma \tag{A.21}$$

A.3. Obtención de δK

Por definición de curvatura extrínseca [62] se tiene:

$$\begin{aligned}
K &= \nabla_\alpha n^\alpha, \\
&= g^{\alpha\beta}\nabla_\beta n_\alpha, \\
&= (h^{\alpha\beta} + \epsilon n^\alpha n^\beta)\nabla_\beta n_\alpha, \\
&= h^{\alpha\beta}\nabla_\beta n_\alpha, \\
&= h^{\alpha\beta}(\partial_\beta n_\alpha - \Gamma^\gamma_{\beta\alpha}n_\gamma),
\end{aligned} \tag{A.22}$$

por tanto

$$
\begin{aligned}
\delta K &= -h^{\alpha\beta}\delta\Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha}n_{\gamma}, \\
&= -\frac{1}{2}h^{\alpha\beta}g^{\sigma\gamma}[\partial_{\beta}(\delta g_{\sigma\alpha})+\partial_{\alpha}(\delta g_{\sigma\beta})-\partial_{\sigma}(\delta g_{\beta\alpha})]n_{\gamma}, \\
&= -\frac{1}{2}h^{\alpha\beta}[\partial_{\beta}(\delta g_{\sigma\alpha})+\partial_{\alpha}(\delta g_{\sigma\beta})-\partial_{\sigma}(\delta g_{\beta\alpha})]n^{\sigma}, \\
&= \frac{1}{2}h^{\alpha\beta}\partial_{\sigma}(\delta g_{\beta\alpha})n^{\sigma}. \qquad \text{(A.23)}
\end{aligned}
$$

Esto viene de la variación $\delta\Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha}$ y del hecho de que $h^{\alpha\beta}\partial_{\beta}(\delta g_{\sigma\alpha})=0$ y $h^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}(\delta g_{\sigma\beta})=0$.

A.4. Obtención de $u^{(eff)}$ y $P^{(eff)}$

A partir de la definición del tensor de energía-momentum efectivo

$$
T^{(eff)}_{\alpha\beta}=\frac{1}{f'(R)}\left[\frac{f(R)-Rf'(R)}{2}g_{\alpha\beta}+\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}f'(R)-g_{\alpha\beta}\Box f'(R)\right] \qquad \text{(A.24)}
$$

se deducen las cantidades geométricas irreducibles:

$$
\begin{aligned}
\mu^{(eff)} &= \frac{1}{f'(R)}\left[\frac{f(R)-Rf'(R)}{2}g_{\alpha\beta}+\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}f'(R)-g_{\alpha\beta}\Box f'(R)\right]u^{\alpha}u^{\beta} \\
&= -\frac{1}{2\,f'(R)}\left[f(R)-Rf'(R)-2\ddot{f}'(R)+2\left(\ddot{f}'(R)+3H\dot{f}'(R)\right)\right] \qquad \text{(A.25)} \\
\mu^{(eff)} &= -\frac{1}{2\,f'(R)}\left[f(R)-Rf'(R)+6H\dot{f}'(R)\right]
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
P^{(eff)} &= \frac{1}{3}(T^{(eff)}_{\alpha v} h^{\alpha v}) \\
&= \frac{1}{3}(T^{(eff)} + \mu) \qquad (A.26)\\
&= \frac{1}{3}\left\{-\frac{1}{2f'(R)}\left[-4(f(R) - Rf'(R)) - 6\ddot{f}'(R) - 18H\dot{f}'(R)\right]\right\} + \\
&\quad + \frac{1}{3}\left\{-\frac{1}{2\,f'(R)}\left[f(R) - Rf'(R) + 6H\dot{f}'(R)\right]\right\} \\
P^{(eff)} &= -\frac{1}{2\,f'(R)}\left[-(f(R) - Rf'(R)) - 2\ddot{f}'(R) - 4H\dot{f}'(R)\right].
\end{aligned}
$$

A.5. Ecuación de balance

La ecuación de evolución del contenido material de nuestro universo (la cual se conoce como ecuación de conservación de la energía o ecuación de balance) está dada por

$$T^{\alpha v}_{;v} = 0 \qquad (A.27)$$

En el caso particular del tensor de energía-momentum de fluido perfecto

$$T_{\alpha v} = \rho\, u_\alpha u_v + p\, h_{\alpha v}$$

de la expresión A.27 se deduce:

$$\rho_{,v}\, u^\alpha u^v + \rho\, (u^\alpha_{;v}) + p_{,v}\, h^{\alpha v} + p\, (g^{\alpha v} + u^\alpha u^v_{;v}) = 0 \qquad (A.28)$$

recordando las expresiones para la 4-aceleración y del escalar de expansión del fluido dadas en el epígrafe 2.1.2, reescribimos esta ecuación como:

$$\dot{\rho}\, u^{\alpha} + (\rho + p)\Theta u^{\alpha} + (\rho + p)\dot{u}^{\alpha} + p_{,v}\, h^{\alpha v} = 0 \tag{A.29}$$

Proyectando esta relación en la dirección de u^{α} (es decir, calculando $u_{\alpha}\, T^{\alpha v}_{;v} = 0$) encontramos la ecuación de balance de la energía:

$$\dot{\rho_m} + (\rho_m + p)\Theta = 0. \tag{A.30}$$

B. Solución de Sitter en Gravedad Cuadrática. Formulación Conforme

B.1. Análisis de estabilidad de la Solución de Sitter en Gravedad Cuadrática

Para analizar la estabilidad de la solución tipo *de Sitter* ($A^+(-2)$) se utilizará el Teorema de la Variedad Central demostrándose que dicha solución es localmente asintóticamente inestable (punto silla) independientemente del valor de γ. Procederemos como sigue:

Caso $\gamma \neq 1$. Introduciendo las nuevas variables $(u, v_1, v_2, v_3, v_4) \equiv \mathbf{x}$ dadas por las ecuaciones

$$
\begin{aligned}
u &= r + 2, \\
v_1 &= \frac{r}{3} + x + \frac{y(4-3\gamma)}{6-6\gamma} + \frac{\gamma}{6(\gamma-1)}, \\
v_2 &= -2Q - 2x + \Sigma + 2, \\
v_3 &= y - 1, \\
v_4 &= 2Q + 2x - 2
\end{aligned}
$$

y expandiendo en series de Taylor hasta orden cuatro en la norma vectorial el sistema (2.44)-(2.48), con $M(r) = \frac{1}{2}r(r+2)$, se reduce a

$$\begin{pmatrix} u' \\ v_1' \\ v_2' \\ v_3' \\ v_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(u,v_1,v_2,v_3,v_4) \\ g_1(u,v_1,v_2,v_3,v_4) \\ g_2(u,v_1,v_2,v_3,v_4) \\ g_3(u,v_1,v_2,v_3,v_4) \\ g_4(u,v_1,v_2,v_3,v_4) \end{pmatrix} \tag{B.1}$$

donde

$$f(u,v_1,v_2,v_3,v_4) = -\frac{u^3\gamma}{3(\gamma-1)} + \frac{u^3}{3(\gamma-1)} + \frac{u^2v_1\gamma}{\gamma-1} - \frac{u^2v_1}{\gamma-1} - \frac{u^2v_3\gamma}{2(\gamma-1)} + \frac{2u^2v_3}{3(\gamma-1)} + \frac{2u^2\gamma}{3(\gamma-1)} - \frac{2u^2}{3(\gamma-1)} -$$
$$\frac{2uv_1\gamma}{\gamma-1} + \frac{2uv_1}{\gamma-1} + \frac{uv_3\gamma}{\gamma-1} - \frac{4uv_3}{3(\gamma-1)} + O(4),$$

$$g_1(u,v_1,v_2,v_3,v_4) = \frac{u^3\gamma^4}{18(\gamma-1)^3} - \frac{3v_1^3\gamma^4}{2(\gamma-1)^3} - \frac{3v_3^3\gamma^4}{16(\gamma-1)^3} - \frac{3v_4^3\gamma^4}{4(\gamma-1)^3} + \frac{3uv_1^2\gamma^4}{2(\gamma-1)^3} + \frac{uv_2^2\gamma^4}{2(\gamma-1)^3} - \frac{3v_1v_2^2\gamma^4}{2(\gamma-1)^3} -$$
$$\frac{uv_3^2\gamma^4}{8(\gamma-1)^3} + \frac{3v_1v_3^2\gamma^4}{8(\gamma-1)^3} - \frac{3v_3^2\gamma^4}{4(\gamma-1)^3} + \frac{uv_4^2\gamma^4}{2(\gamma-1)^3} - \frac{3v_1v_4^2\gamma^4}{2(\gamma-1)^3} - \frac{3v_2v_4^2\gamma^4}{2(\gamma-1)^3} - \frac{3v_3v_4^2\gamma^4}{4(\gamma-1)^3} - \frac{u^2v_1\gamma^4}{2(\gamma-1)^3} + \frac{u^2v_3\gamma^4}{12(\gamma-1)^3} + \frac{3v_1^2v_3\gamma^4}{4(\gamma-1)^3} -$$
$$\frac{3v_2^2v_3\gamma^4}{4(\gamma-1)^3} + \frac{uv_3\gamma^4}{2(\gamma-1)^3} - \frac{uv_1v_3\gamma^4}{2(\gamma-1)^3} - \frac{3v_1v_3\gamma^4}{2(\gamma-1)^3} - \frac{u^2v_4\gamma^4}{12(\gamma-1)^3} - \frac{3v_1^2v_4\gamma^4}{4(\gamma-1)^3} - \frac{3v_2^2v_4\gamma^4}{4(\gamma-1)^3} - \frac{9v_3^2v_4\gamma^4}{16(\gamma-1)^3} + \frac{uv_1v_4\gamma^4}{2(\gamma-1)^3} + \frac{uv_2v_4\gamma^4}{(\gamma-1)^3} -$$
$$\frac{3v_1v_2v_4\gamma^4}{(\gamma-1)^3} - \frac{3v_3v_4\gamma^4}{4(\gamma-1)^3} - \frac{31u^3\gamma^3}{18(\gamma-1)^3} + \frac{15v_1^3\gamma^3}{2(\gamma-1)^3} + \frac{9v_3^3\gamma^3}{8(\gamma-1)^3} + \frac{15v_4^3\gamma^3}{4(\gamma-1)^3} - \frac{17u^2\gamma^3}{18(\gamma-1)^3} - \frac{15uv_1^2\gamma^3}{2(\gamma-1)^3} + \frac{3v_1^2\gamma^3}{2(\gamma-1)^3} - \frac{5uv_2^2\gamma^3}{2(\gamma-1)^3} +$$
$$\frac{15v_1v_2^2\gamma^3}{2(\gamma-1)^3} + \frac{3v_2^2\gamma^3}{2(\gamma-1)^3} + \frac{5uv_3^2\gamma^3}{24(\gamma-1)^3} - \frac{17v_1v_3^2\gamma^3}{8(\gamma-1)^3} + \frac{23v_3^2\gamma^3}{8(\gamma-1)^3} - \frac{13uv_4^2\gamma^3}{6(\gamma-1)^3} + \frac{13v_1v_4^2\gamma^3}{2(\gamma-1)^3} + \frac{31v_2v_4^2\gamma^3}{4(\gamma-1)^3} + \frac{7v_3v_4^2\gamma^3}{2(\gamma-1)^3} +$$
$$\frac{v_4^2\gamma^3}{2(\gamma-1)^3} + \frac{23u^2v_1\gamma^3}{6(\gamma-1)^3} - \frac{2uv_1\gamma^3}{3(\gamma-1)^3} - \frac{22u^2v_3\gamma^3}{9(\gamma-1)^3} - \frac{4v_1^2v_3\gamma^3}{(\gamma-1)^3} + \frac{4v_2^2v_3\gamma^3}{(\gamma-1)^3} - \frac{13uv_3\gamma^3}{6(\gamma-1)^3} + \frac{11uv_1v_3\gamma^3}{3(\gamma-1)^3} + \frac{3v_1v_3\gamma^3}{(\gamma-1)^3} +$$
$$\frac{4u^2v_4\gamma^3}{9(\gamma-1)^3} + \frac{4v_1^2v_4\gamma^3}{(\gamma-1)^3} + \frac{4v_2^2v_4\gamma^3}{(\gamma-1)^3} + \frac{19v_3^2v_4\gamma^3}{8(\gamma-1)^3} + \frac{uv_4\gamma^3}{2(\gamma-1)^3} - \frac{8uv_1v_4\gamma^3}{3(\gamma-1)^3} - \frac{3v_1v_4\gamma^3}{2(\gamma-1)^3} - \frac{14uv_2v_4\gamma^3}{3(\gamma-1)^3} + \frac{14v_1v_2v_4\gamma^3}{(\gamma-1)^3} +$$
$$\frac{2v_2v_4\gamma^3}{(\gamma-1)^3} + \frac{2uv_3v_4\gamma^3}{3(\gamma-1)^3} - \frac{2v_1v_3v_4\gamma^3}{(\gamma-1)^3} - \frac{2v_2v_3v_4\gamma^3}{(\gamma-1)^3} + \frac{13v_3v_4\gamma^3}{4(\gamma-1)^3} + \frac{89u^3\gamma^2}{18(\gamma-1)^3} - \frac{27v_1^3\gamma^2}{2(\gamma-1)^3} - \frac{5v_3^3\gamma^2}{2(\gamma-1)^3} - \frac{83v_4^3\gamma^2}{12(\gamma-1)^3} +$$
$$\frac{26u^2\gamma^2}{9(\gamma-1)^3} + \frac{27uv_1^2\gamma^2}{2(\gamma-1)^3} - \frac{5v_1^2\gamma^2}{(\gamma-1)^3} + \frac{9uv_2^2\gamma^2}{2(\gamma-1)^3} - \frac{27v_1v_2^2\gamma^2}{2(\gamma-1)^3} - \frac{5v_2^2\gamma^2}{(\gamma-1)^3} + \frac{13uv_3^2\gamma^2}{36(\gamma-1)^3} + \frac{53v_1v_3^2\gamma^2}{12(\gamma-1)^3} - \frac{17v_3^2\gamma^2}{4(\gamma-1)^3} + \frac{7uv_4^2\gamma^2}{2(\gamma-1)^3} -$$
$$\frac{21v_1v_4^2\gamma^2}{2(\gamma-1)^3} - \frac{44v_2v_4^2\gamma^2}{3(\gamma-1)^3} - \frac{73v_3v_4^2\gamma^2}{12(\gamma-1)^3} - \frac{5v_4^2\gamma^2}{3(\gamma-1)^3} - \frac{53u^2v_1\gamma^2}{6(\gamma-1)^3} + \frac{2uv_1\gamma^2}{(\gamma-1)^3} + \frac{265u^2v_3\gamma^2}{36(\gamma-1)^3} + \frac{31v_1^2v_3\gamma^2}{4(\gamma-1)^3} - \frac{31v_2^2v_3\gamma^2}{4(\gamma-1)^3} +$$
$$\frac{61uv_3\gamma^2}{18(\gamma-1)^3} - \frac{17uv_1v_3\gamma^2}{2(\gamma-1)^3} + \frac{v_1v_3\gamma^2}{(\gamma-1)^3} - \frac{31u^2v_4\gamma^2}{36(\gamma-1)^3} - \frac{31v_1^2v_4\gamma^2}{4(\gamma-1)^3} - \frac{31v_2^2v_4\gamma^2}{4(\gamma-1)^3} - \frac{31v_3^2v_4\gamma^2}{8(\gamma-1)^3} - \frac{3uv_4\gamma^2}{2(\gamma-1)^3} + \frac{31uv_1v_4\gamma^2}{6(\gamma-1)^3} +$$
$$\frac{9v_1v_4\gamma^2}{2(\gamma-1)^3} + \frac{8uv_2v_4\gamma^2}{(\gamma-1)^3} - \frac{24v_1v_2v_4\gamma^2}{(\gamma-1)^3} - \frac{20v_2v_4\gamma^2}{3(\gamma-1)^3} - \frac{79uv_3v_4\gamma^2}{36(\gamma-1)^3} + \frac{79v_1v_3v_4\gamma^2}{12(\gamma-1)^3} + \frac{79v_2v_3v_4\gamma^2}{12(\gamma-1)^3} - \frac{21v_3v_4\gamma^2}{4(\gamma-1)^3} - \frac{89u^3\gamma}{18(\gamma-1)^3} +$$
$$\frac{21v_1^3\gamma}{2(\gamma-1)^3} + \frac{22v_3^3\gamma}{9(\gamma-1)^3} + \frac{67v_4^3\gamma}{12(\gamma-1)^3} - \frac{53u^2\gamma}{18(\gamma-1)^3} - \frac{21uv_1^2\gamma}{2(\gamma-1)^3} + \frac{11v_1^2\gamma}{2(\gamma-1)^3} - \frac{7uv_2^2\gamma}{2(\gamma-1)^3} + \frac{21v_1v_2^2\gamma}{2(\gamma-1)^3} + \frac{11v_2^2\gamma}{2(\gamma-1)^3} - \frac{8uv_3^2\gamma}{9(\gamma-1)^3} -$$
$$\frac{4v_1v_3^2\gamma}{(\gamma-1)^3} + \frac{3v_3^2\gamma}{(\gamma-1)^3} - \frac{5uv_4^2\gamma}{2(\gamma-1)^3} + \frac{15v_1v_4^2\gamma}{2(\gamma-1)^3} + \frac{145v_2v_4^2\gamma}{12(\gamma-1)^3} + \frac{14v_3v_4^2\gamma}{3(\gamma-1)^3} + \frac{11v_4^2\gamma}{6(\gamma-1)^3} + \frac{49u^2v_1\gamma}{6(\gamma-1)^3} - \frac{2uv_1\gamma}{(\gamma-1)^3} - \frac{70u^2v_3\gamma}{9(\gamma-1)^3} -$$

$$\frac{13v_1^2v_3\gamma}{2(\gamma-1)^3}+\frac{13v_2^2v_3\gamma}{2(\gamma-1)^3}-\frac{41uv_3\gamma}{18(\gamma-1)^3}+\frac{8uv_1v_3\gamma}{(\gamma-1)^3}-\frac{31v_1v_3\gamma}{6(\gamma-1)^3}+\frac{13u^2v_4\gamma}{18(\gamma-1)^3}+\frac{13v_1^2v_4\gamma}{2(\gamma-1)^3}+\frac{13v_2^2v_4\gamma}{2(\gamma-1)^3}+\frac{53v_3^2v_4\gamma}{18(\gamma-1)^3}+\frac{3uv_4\gamma}{2(\gamma-1)^3}-$$
$$\frac{13uv_1v_4\gamma}{3(\gamma-1)^3}-\frac{9v_1v_4\gamma}{2(\gamma-1)^3}-\frac{6uv_2v_4\gamma}{(\gamma-1)^3}+\frac{18v_1v_2v_4\gamma}{(\gamma-1)^3}+\frac{22v_2v_4\gamma}{3(\gamma-1)^3}+\frac{29uv_3v_4\gamma}{12(\gamma-1)^3}-\frac{29v_1v_3v_4\gamma}{4(\gamma-1)^3}-\frac{29v_2v_3v_4\gamma}{4(\gamma-1)^3}+\frac{15v_3v_4\gamma}{4(\gamma-1)^3}+$$
$$\frac{5u^3}{3(\gamma-1)^3}-\frac{3v_1^3}{(\gamma-1)^3}-\frac{8v_3^3}{9(\gamma-1)^3}-\frac{5v_4^3}{3(\gamma-1)^3}+\frac{u^2}{(\gamma-1)^3}+\frac{3uv_1^2}{(\gamma-1)^3}-\frac{2v_1^2}{(\gamma-1)^3}+\frac{uv_2^2}{(\gamma-1)^3}-\frac{3v_1v_2^2}{(\gamma-1)^3}-\frac{2v_2^2}{(\gamma-1)^3}+\frac{4uv_3^2}{9(\gamma-1)^3}+$$
$$\frac{4v_1v_3^2}{3(\gamma-1)^3}-\frac{8v_3^2}{9(\gamma-1)^3}+\frac{2uv_4^2}{3(\gamma-1)^3}-\frac{2v_1v_4^2}{(\gamma-1)^3}-\frac{11v_2v_4^2}{3(\gamma-1)^3}-\frac{4v_3v_4^2}{3(\gamma-1)^3}-\frac{2v_4^2}{3(\gamma-1)^3}-\frac{8u^2v_1}{3(\gamma-1)^3}+\frac{2uv_1}{3(\gamma-1)^3}+\frac{25u^2v_3}{9(\gamma-1)^3}+$$
$$\frac{2v_1^2v_3}{(\gamma-1)^3}-\frac{2v_2^2v_3}{(\gamma-1)^3}+\frac{5uv_3}{9(\gamma-1)^3}-\frac{8uv_1v_3}{3(\gamma-1)^3}+\frac{8v_1v_3}{3(\gamma-1)^3}-\frac{2u^2v_4}{9(\gamma-1)^3}-\frac{2v_1^2v_4}{(\gamma-1)^3}-\frac{2v_2^2v_4}{(\gamma-1)^3}-\frac{8v_3^2v_4}{9(\gamma-1)^3}-\frac{uv_4}{2(\gamma-1)^3}+$$
$$\frac{4uv_1v_4}{3(\gamma-1)^3}+\frac{3v_1v_4}{2(\gamma-1)^3}+\frac{5uv_2v_4}{3(\gamma-1)^3}-\frac{5v_1v_2v_4}{(\gamma-1)^3}-\frac{8v_2v_4}{3(\gamma-1)^3}-\frac{8uv_3v_4}{9(\gamma-1)^3}+\frac{8v_1v_3v_4}{3(\gamma-1)^3}+\frac{8v_2v_3v_4}{3(\gamma-1)^3}-\frac{v_3v_4}{(\gamma-1)^3}+O(4),$$

$$g_2(u,v_1,v_2,v_3,v_4)=-\frac{3\gamma^3v_2^3}{2(\gamma-1)^2}+\frac{6\gamma^2v_2^3}{(\gamma-1)^2}-\frac{15\gamma v_2^3}{2(\gamma-1)^2}+\frac{3v_2^3}{(\gamma-1)^2}-\frac{3v_4\gamma^3v_2^2}{2(\gamma-1)^2}+\frac{5v_4\gamma^2v_2^2}{(\gamma-1)^2}-\frac{11v_4\gamma v_2^2}{2(\gamma-1)^2}+\frac{2v_4v_2^2}{(\gamma-1)^2}-$$
$$\frac{u^2\gamma^3v_2}{6(\gamma-1)^2}-\frac{3v_1^2\gamma^3v_2}{2(\gamma-1)^2}-\frac{3v_3^2\gamma^3v_2}{8(\gamma-1)^2}+\frac{3v_4^2\gamma^3v_2}{2(\gamma-1)^2}+\frac{uv_1\gamma^3v_2}{(\gamma-1)^2}-\frac{uv_3\gamma^3v_2}{2(\gamma-1)^2}+\frac{3v_1v_3\gamma^3v_2}{2(\gamma-1)^2}-\frac{3v_3\gamma^3v_2}{2(\gamma-1)^2}-\frac{3v_3v_4\gamma^3v_2}{2(\gamma-1)^2}+\frac{2u^2\gamma^2v_2}{3(\gamma-1)^2}+$$
$$\frac{6v_1^2\gamma^2v_2}{(\gamma-1)^2}+\frac{7v_3^2\gamma^2v_2}{4(\gamma-1)^2}-\frac{13v_4^2\gamma^2v_2}{2(\gamma-1)^2}-\frac{4uv_1\gamma^2v_2}{(\gamma-1)^2}+\frac{13uv_3\gamma^2v_2}{6(\gamma-1)^2}-\frac{13v_1v_3\gamma^2v_2}{2(\gamma-1)^2}+\frac{3v_3\gamma^2v_2}{(\gamma-1)^2}+\frac{13v_3v_4\gamma^2v_2}{2(\gamma-1)^2}+\frac{v_4\gamma^2v_2}{2(\gamma-1)^2}-$$
$$\frac{5u^2\gamma v_2}{6(\gamma-1)^2}-\frac{15v_1^2\gamma v_2}{2(\gamma-1)^2}-\frac{8v_3^2\gamma v_2}{3(\gamma-1)^2}+\frac{17v_4^2\gamma v_2}{2(\gamma-1)^2}+\frac{5uv_1\gamma v_2}{(\gamma-1)^2}-\frac{3uv_3\gamma v_2}{(\gamma-1)^2}+\frac{9v_1v_3\gamma v_2}{(\gamma-1)^2}-\frac{3v_3\gamma v_2}{2(\gamma-1)^2}-\frac{9v_3v_4\gamma v_2}{(\gamma-1)^2}-\frac{v_4\gamma v_2}{(\gamma-1)^2}+$$
$$\frac{u^2v_2}{3(\gamma-1)^2}+\frac{3v_1^2v_2}{(\gamma-1)^2}+\frac{4v_3^2v_2}{3(\gamma-1)^2}-\frac{7v_4^2v_2}{2(\gamma-1)^2}-\frac{2uv_1v_2}{(\gamma-1)^2}+\frac{4uv_3v_2}{3(\gamma-1)^2}-\frac{4v_1v_3v_2}{(\gamma-1)^2}+\frac{4v_3v_4v_2}{(\gamma-1)^2}+\frac{v_4v_2}{2(\gamma-1)^2}+\frac{3v_4^3\gamma^3}{2(\gamma-1)^2}+$$
$$\frac{u^2v_4\gamma^3}{6(\gamma-1)^2}+\frac{3v_1^2v_4\gamma^3}{2(\gamma-1)^2}+\frac{3v_3^2v_4\gamma^3}{8(\gamma-1)^2}-\frac{uv_1v_4\gamma^3}{(\gamma-1)^2}+\frac{uv_3v_4\gamma^3}{2(\gamma-1)^2}-\frac{3v_1v_3v_4\gamma^3}{2(\gamma-1)^2}+\frac{3v_3v_4\gamma^3}{2(\gamma-1)^2}-\frac{11v_4^3\gamma^2}{2(\gamma-1)^2}+\frac{5v_4^2\gamma^2}{4(\gamma-1)^2}-\frac{2u^2v_4\gamma^2}{3(\gamma-1)^2}-$$
$$\frac{6v_1^2v_4\gamma^2}{(\gamma-1)^2}-\frac{7v_3^2v_4\gamma^2}{4(\gamma-1)^2}+\frac{4uv_1v_4\gamma^2}{(\gamma-1)^2}-\frac{13uv_3v_4\gamma^2}{6(\gamma-1)^2}+\frac{13v_1v_3v_4\gamma^2}{2(\gamma-1)^2}-\frac{3v_3v_4\gamma^2}{(\gamma-1)^2}+\frac{13v_4^3\gamma}{2(\gamma-1)^2}-\frac{5v_4^2\gamma}{2(\gamma-1)^2}+\frac{5u^2v_4\gamma}{6(\gamma-1)^2}+$$
$$\frac{15v_1^2v_4\gamma}{2(\gamma-1)^2}+\frac{8v_3^2v_4\gamma}{3(\gamma-1)^2}-\frac{5uv_1v_4\gamma}{(\gamma-1)^2}+\frac{3uv_3v_4\gamma}{(\gamma-1)^2}-\frac{9v_1v_3v_4\gamma}{(\gamma-1)^2}+\frac{3v_3v_4\gamma}{2(\gamma-1)^2}-\frac{5v_4^3}{2(\gamma-1)^2}+\frac{5v_4^2}{4(\gamma-1)^2}-\frac{u^2v_4}{3(\gamma-1)^2}-\frac{3v_1^2v_4}{(\gamma-1)^2}-$$
$$\frac{4v_3^2v_4}{3(\gamma-1)^2}+\frac{2uv_1v_4}{(\gamma-1)^2}-\frac{4uv_3v_4}{3(\gamma-1)^2}+\frac{4v_1v_3v_4}{(\gamma-1)^2}+O(4)$$

$$g_3(u,v_1,v_2,v_3,v_4)=-\frac{2\gamma^2u^3}{3(\gamma-1)^2}+\frac{4\gamma u^3}{3(\gamma-1)^2}-\frac{2u^3}{3(\gamma-1)^2}-\frac{v_3\gamma^3u^2}{3(\gamma-1)^2}-\frac{v_4\gamma^3u^2}{6(\gamma-1)^2}-\frac{\gamma^3u^2}{3(\gamma-1)^2}+\frac{2v_1\gamma^2u^2}{(\gamma-1)^2}-$$
$$\frac{v_3\gamma^2u^2}{3(\gamma-1)^2}+\frac{2v_4\gamma^2u^2}{3(\gamma-1)^2}+\frac{2\gamma^2u^2}{3(\gamma-1)^2}-\frac{4v_1\gamma u^2}{(\gamma-1)^2}+\frac{2v_3\gamma u^2}{(\gamma-1)^2}-\frac{5v_4\gamma u^2}{6(\gamma-1)^2}-\frac{\gamma u^2}{3(\gamma-1)^2}+\frac{2v_1u^2}{(\gamma-1)^2}-\frac{4v_3u^2}{3(\gamma-1)^2}+\frac{v_4u^2}{3(\gamma-1)^2}-$$
$$\frac{v_3^2\gamma^3u}{(\gamma-1)^2}+\frac{2v_1\gamma^3u}{(\gamma-1)^2}+\frac{2v_1v_3\gamma^3u}{(\gamma-1)^2}-\frac{v_3\gamma^3u}{(\gamma-1)^2}+\frac{v_1v_4\gamma^3u}{(\gamma-1)^2}-\frac{v_3v_4\gamma^3u}{2(\gamma-1)^2}+\frac{10v_3^2\gamma^2u}{3(\gamma-1)^2}-\frac{6v_1\gamma^2u}{(\gamma-1)^2}-\frac{6v_1v_3\gamma^2u}{(\gamma-1)^2}+\frac{10v_3\gamma^2u}{3(\gamma-1)^2}-$$
$$\frac{4v_1v_4\gamma^2u}{(\gamma-1)^2}+\frac{13v_3v_4\gamma^2u}{6(\gamma-1)^2}-\frac{11v_3^2\gamma u}{3(\gamma-1)^2}+\frac{6v_1\gamma u}{(\gamma-1)^2}+\frac{6v_1v_3\gamma u}{(\gamma-1)^2}-\frac{11v_3\gamma u}{3(\gamma-1)^2}+\frac{5v_1v_4\gamma u}{(\gamma-1)^2}-\frac{3v_3v_4\gamma u}{(\gamma-1)^2}+\frac{4v_3^2u}{3(\gamma-1)^2}-\frac{2v_1u}{(\gamma-1)^2}-$$
$$\frac{2v_1v_3u}{(\gamma-1)^2}+\frac{4v_3u}{3(\gamma-1)^2}-\frac{2v_1v_4u}{(\gamma-1)^2}+\frac{4v_3v_4u}{3(\gamma-1)^2}-\frac{3v_3^3\gamma^3}{4(\gamma-1)^2}-\frac{3v_4^3\gamma^3}{2(\gamma-1)^2}-\frac{3v_1^2\gamma^3}{(\gamma-1)^2}-\frac{3v_2^2\gamma^3}{(\gamma-1)^2}+\frac{3v_1v_3^2\gamma^3}{(\gamma-1)^2}-\frac{15v_3^2\gamma^3}{4(\gamma-1)^2}-\frac{3v_2v_4^2\gamma^3}{(\gamma-1)^2}-$$
$$\frac{3v_3v_4^2\gamma^3}{(\gamma-1)^2}-\frac{3v_4^2\gamma^3}{(\gamma-1)^2}-\frac{3v_1^2v_3\gamma^3}{(\gamma-1)^2}-\frac{3v_2^2v_3\gamma^3}{(\gamma-1)^2}+\frac{3v_1v_3\gamma^3}{(\gamma-1)^2}-\frac{3v_1^2v_4\gamma^3}{2(\gamma-1)^2}-\frac{3v_2^2v_4\gamma^3}{2(\gamma-1)^2}-\frac{15v_3^2v_4\gamma^3}{8(\gamma-1)^2}-\frac{6v_2v_4\gamma^3}{(\gamma-1)^2}+\frac{3v_1v_3v_4\gamma^3}{2(\gamma-1)^2}+$$
$$\frac{3v_2v_3v_4\gamma^3}{2(\gamma-1)^2}-\frac{3v_3v_4\gamma^3}{2(\gamma-1)^2}+\frac{7v_3^3\gamma^2}{2(\gamma-1)^2}+\frac{11v_4^3\gamma^2}{2(\gamma-1)^2}+\frac{12v_1^2\gamma^2}{(\gamma-1)^2}+\frac{12v_2^2\gamma^2}{(\gamma-1)^2}-\frac{13v_1v_3^2\gamma^2}{(\gamma-1)^2}+\frac{19v_3^2\gamma^2}{2(\gamma-1)^2}+\frac{23v_2v_4^2\gamma^2}{2(\gamma-1)^2}+\frac{10v_3v_4^2\gamma^2}{(\gamma-1)^2}+$$
$$\frac{10v_4^2\gamma^2}{(\gamma-1)^2}+\frac{12v_1^2v_3\gamma^2}{(\gamma-1)^2}+\frac{12v_2^2v_3\gamma^2}{(\gamma-1)^2}-\frac{13v_1v_3\gamma^2}{(\gamma-1)^2}+\frac{6v_1^2v_4\gamma^2}{(\gamma-1)^2}+\frac{6v_2^2v_4\gamma^2}{(\gamma-1)^2}+\frac{19v_3^2v_4\gamma^2}{4(\gamma-1)^2}+\frac{22v_2v_4\gamma^2}{(\gamma-1)^2}-\frac{13v_1v_3v_4\gamma^2}{2(\gamma-1)^2}-$$
$$\frac{13v_2v_3v_4\gamma^2}{2(\gamma-1)^2}+\frac{3v_3v_4\gamma^2}{(\gamma-1)^2}-\frac{16v_3^3\gamma}{3(\gamma-1)^2}-\frac{13v_4^3\gamma}{2(\gamma-1)^2}-\frac{15v_1^2\gamma}{(\gamma-1)^2}-\frac{15v_2^2\gamma}{(\gamma-1)^2}+\frac{18v_1v_3^2\gamma}{(\gamma-1)^2}-\frac{25v_3^2\gamma}{3(\gamma-1)^2}-\frac{14v_2v_4^2\gamma}{(\gamma-1)^2}-\frac{11v_3v_4^2\gamma}{(\gamma-1)^2}-$$
$$\frac{11v_4^2\gamma}{(\gamma-1)^2}-\frac{15v_1^2v_3\gamma}{(\gamma-1)^2}-\frac{15v_2^2v_3\gamma}{(\gamma-1)^2}+\frac{18v_1v_3\gamma}{(\gamma-1)^2}-\frac{15v_1^2v_4\gamma}{2(\gamma-1)^2}-\frac{15v_2^2v_4\gamma}{2(\gamma-1)^2}-\frac{25v_3^2v_4\gamma}{6(\gamma-1)^2}-\frac{26v_2v_4\gamma}{(\gamma-1)^2}+\frac{9v_1v_3v_4\gamma}{(\gamma-1)^2}+\frac{9v_2v_3v_4\gamma}{(\gamma-1)^2}-$$
$$\frac{3v_3v_4\gamma}{2(\gamma-1)^2}+\frac{8v_3^3}{3(\gamma-1)^2}+\frac{5v_4^3}{2(\gamma-1)^2}+\frac{6v_1^2}{(\gamma-1)^2}+\frac{6v_2^2}{(\gamma-1)^2}-\frac{8v_1v_3^2}{(\gamma-1)^2}+\frac{8v_3^2}{3(\gamma-1)^2}+\frac{11v_2v_4^2}{2(\gamma-1)^2}+\frac{4v_3v_4^2}{(\gamma-1)^2}+\frac{4v_4^2}{(\gamma-1)^2}+$$

$\frac{6v_1^2v_3}{(\gamma-1)^2}+\frac{6v_2^2v_3}{(\gamma-1)^2}-\frac{8v_1v_3}{(\gamma-1)^2}+\frac{3v_1^2v_4}{(\gamma-1)^2}+\frac{3v_2^2v_4}{(\gamma-1)^2}+\frac{4v_3^2v_4}{3(\gamma-1)^2}+\frac{10v_2v_4}{(\gamma-1)^2}-\frac{4v_1v_3v_4}{(\gamma-1)^2}-\frac{4v_2v_3v_4}{(\gamma-1)^2}+O(4)$, y

$g_4(u,v_1,v_2,v_3,v_4)=-\frac{1}{3}u^2v_4\gamma+\frac{2u^2v_4}{3}+2uv_1v_4\gamma-4uv_1v_4-uv_3v_4\gamma-\frac{uv_3v_4}{3(\gamma-1)}+\frac{7uv_3v_4}{3}-3v_1^2v_4\gamma+6v_1^2v_4+3v_1v_3v_4\gamma+\frac{v_1v_3v_4}{\gamma-1}-7v_1v_3v_4-3v_2^2v_4\gamma+6v_2^2v_4+3v_2v_3v_4\gamma+\frac{v_2v_3v_4}{\gamma-1}-7v_2v_3v_4-6v_2v_4^2\gamma+\frac{21v_2v_4^2}{2}-2v_2v_4-\frac{3}{4}v_3^2v_4\gamma-\frac{7v_3^2v_4}{12(\gamma-1)}+\frac{v_3^2v_4}{12(\gamma-1)^2}+2v_3^2v_4-\frac{3}{4}v_3v_4^2\gamma-3v_3v_4\gamma-3v_4^3\gamma+\frac{9v_4^3}{2}-\frac{5v_4^2}{2}+O(4).$

El sistema (B.1) se escribe en forma diagonal como

$$\begin{aligned} u' &= Cu+f\left(u,\mathbf{v}\right)\\ \mathbf{v}' &= P\mathbf{v}+\mathbf{g}\left(u,\mathbf{v}\right), \end{aligned} \tag{B.2}$$

donde $(u,\mathbf{v})\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^4$, C es una matríz 1×1 nula, P es una matríz 4×4 con valores propios negativos, $f,\mathbf{g}$ se anula en $\mathbf{0}$ y tiene derivadas nulas en $\mathbf{0}$. El Teorema de la Variedad Central asevera que existe una variedad central local 1-dimensional invariante $W^c\left(\mathbf{0}\right)$ de (B.2) tangente al sub-espacio central (el espacio $\mathbf{y}=\mathbf{0}$) en $\mathbf{0}$. Además, $W^c\left(\mathbf{0}\right)$ puede ser representado como

$$W^c\left(\mathbf{0}\right)=\left\{(u,\mathbf{v})\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^4:\mathbf{v}=\mathbf{h}\left(u\right),\ |u|<\delta\right\};\quad \mathbf{h}\left(0\right)=\mathbf{0},\ D\mathbf{h}\left(0\right)=\mathbf{0},$$

para δ suficientemente pequeño. La restricción de (B.2) a la variedad central está dada por

$$x'=f\left(x,\mathbf{h}\left(x\right)\right). \tag{B.3}$$

De acuerdo al Teorema de la Variedad Central, si el origen $u=0$ de (B.3) es estable (asintóticamente estable) (inestable) entonces el origen de (B.2) es también estable (asintóticamente estable) (inestable). Luego, hallar la variedad central se reduce al cálculo de $\mathbf{h}\left(u\right)$.

Al sustituir $\mathbf{v}=\mathbf{h}\left(u\right)$ en la segunda componente de (B.2) y usándose la regla de la cadena,

$\mathbf{v}' = D\mathbf{h}(u)\, u'$ se puede demostrar que la función $\mathbf{h}(u)$ que define la variedad local central satisface

$$D\mathbf{h}(u)\left[f(u,\mathbf{h}(u))\right] - P\mathbf{h}(u) - \mathbf{g}(u,\mathbf{h}(u)) = 0. \tag{B.4}$$

De acuerdo al teorema de aproximación, la ecuación (B.4) puede ser resuelta usando la aproximación de $\mathbf{h}(u)$ mediante series de Taylor en $x = 0$. Como $\mathbf{h}(0) = \mathbf{0}$ y $D\mathbf{h}(0) = \mathbf{0}$, es obvio que $\mathbf{h}(u)$ comience con términos cuadráticos. Sustituimos

$$\mathbf{h}(u) =: \begin{bmatrix} h_1(u) \\ h_2(u) \\ h_3(u) \\ h_4(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1u^2 + a_2u^3 + O(u^4) \\ b_1u^2 + b_2u^3 + O(u^4) \\ c_1u^2 + c_2u^3 + O(u^4) \\ d_1u^2 + d_2u^3 + O(u^4) \end{bmatrix}$$

en (B.4) e igualando los coeficientes de igual potencia de u a cero hallamos las incógnitas $a_1, b_1, c_1, d_1....$ Obteniéndose $a_1 = \frac{1}{54}\left(\frac{1}{\gamma-1} - 17\right), a_2 = \frac{1}{243}\left(\frac{7}{\gamma-1} - 69\right), b_1 = 0, b_2 = 0, c_1 = -\frac{1}{9}, c_2 = -\frac{14}{81}, d_1 = 0, d_2 = 0$. Luego, (B.3) conduce a

$$u' = \frac{2u^2}{3} + \frac{5u^3}{27} + \frac{11u^4}{81} + O\left(u^5\right). \tag{B.5}$$

De (B.5) se deduce que el origen $u = 0$ es localmente asintóticamente inestable (punto silla). Luego, el origen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ del sistema 5-dimensional es inestable.

Caso $\gamma = 1$. Introduciendo las nuevas variables $(u, v_1, v_2, v_3, v_4) \equiv \mathbf{x}$ dadas por las ecuaciones

$$\begin{aligned}
u &= r+2,\\
v_1 &= \frac{r}{3}+x,\\
v_2 &= -2Q-2x+\Sigma+2,\\
v_3 &= -\frac{y-1}{2},\\
v_4 &= 2Q+2x-2
\end{aligned}$$

y expandiendo en series de Taylor hasta orden cuatro en la norma vectorial el sistema (2.44)-(2.48), con $M(r)=\frac{1}{2}r(r+1)$, se reduce a

$$\begin{pmatrix} u' \\ v_1' \\ v_2' \\ v_3' \\ v_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(u,v_1,v_2,v_3,v_4) \\ g_1(u,v_1,v_2,v_3,v_4) \\ g_2(u,v_1,v_2,v_3,v_4) \\ g_3(u,v_1,v_2,v_3,v_4) \\ g_4(u,v_1,v_2,v_3,v_4) \end{pmatrix} \tag{B.6}$$

donde

$f(u,v_1,v_2,v_3,v_4) = -\frac{u^3}{3}+u^2v_1+\frac{2u^2}{3}-2uv_1+O(4)$,

$g_1(u,v_1,v_2,v_3,v_4) = -\frac{7u^3}{6}+\frac{5u^2v_1}{6}+2u^2v_3-\frac{5u^2}{6}-\frac{3uv_1^2}{2}-\frac{uv_1}{3}-\frac{uv_2^2}{2}-\frac{2uv_2v_4}{3}-\frac{uv_3v_4}{2}+uv_3-\frac{uv_4^2}{6}+\frac{uv_4}{2}+\frac{3v_1^3}{2}-\frac{v_1^2}{2}+\frac{3v_1v_2^2}{2}+2v_1v_2v_4+\frac{3v_1v_3v_4}{2}+3v_1v_3+\frac{v_1v_4^2}{2}-\frac{3v_1v_4}{2}-\frac{v_2^2}{2}+\frac{3v_2v_3v_4}{2}-v_2v_4+v_3-\frac{v_4^2}{2},+O(4)$,

$g_2(u,v_1,v_2,v_3,v_4) = \frac{u^2v_2}{6}-\frac{u^2v_4}{6}-uv_1v_2+uv_1v_4+\frac{3v_1^2v_2}{2}-\frac{3v_1^2v_4}{2}+\frac{3v_2^3}{2}+\frac{v_2^2v_4}{2}+3v_2v_3-2v_2v_4^2+\frac{v_2v_4}{2}-3v_3v_4-v_4^3+\frac{5v_4^2}{4}$,

$g_3(u,v_1,v_2,v_3,v_4) = \frac{u^3}{3}-u^2v_1-\frac{u^2v_3}{3}-\frac{u^2v_4}{12}+\frac{u^2}{6}+\frac{uv_1v_4}{2}+3v_1^2v_3-\frac{3v_1^2v_4}{4}-\frac{3v_1^2}{2}+3v_2^2v_3-\frac{3v_2^2v_4}{4}-\frac{3v_2^2}{2}-\frac{5v_2v_4^2}{4}-2v_2v_4+3v_3^2v_4+6v_3^2+v_3v_4^2-\frac{3v_3v_4}{2}-\frac{v_4^3}{2}-\frac{v_4^2}{2}+O(4)$, y

$g_4(u, v_1, v_2, v_3, v_4) = \frac{u^2 v_4}{3} - 2uv_1v_4 + 3v_1^2 v_4 + 3v_2^2 v_4 + \frac{9v_2 v_4^2}{2} - 2v_2v_4 + \frac{3v_3 v_4^2}{2} + 6v_3v_4 + \frac{3v_4^3}{2} - \frac{5v_4^2}{2} + O(4)$.

Usando el mismo procedimiento que antes obtenemos $a_1 = -\frac{7}{27}, a_2 = -\frac{16}{81}, b_1 = 0, b_2 = 0, c_1 = \frac{1}{18}, c_2 = \frac{7}{81}, d_1 = 0, d_2 = 0$ para los coeficientes de

$$\mathbf{h}(x) =: \begin{bmatrix} h_1(u) \\ h_2(u) \\ h_3(u) \\ h_4(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1u^2 + a_2u^3 + O(u^4) \\ b_1u^2 + b_2u^3 + O(u^4) \\ c_1u^2 + c_2u^3 + O(u^4) \\ d_1u^2 + d_2u^3 + O(u^4) \end{bmatrix}.$$

Sustituyendo estos valores de las incógnitas $a_1, b_1, c_1, ...$ se obtiene para $\gamma = 1$ que la dinámica en la Variedad Central del origen esta dada por la ecuación (B.5). Luego el origen $u = 0$ de (B.5) es localmente asintóticamente inestable (punto silla). Luego $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ también lo es para el sistema 5D.

B.2. Formulación conforme como Teoría Escalar-Tensorial en el marco de Einstein

Es bien conocido que, bajo la transformación conforme $\widetilde{g}_{\mu\nu} = f'(R)\, g_{\mu\nu}$, las Teoría de Gravedad Extendida con Lagrangianas de la forma

$$L = \frac{1}{2} f(R) \sqrt{-g} + \mathcal{L}_{matter}(\mu, \nabla\mu, g_{\alpha\beta}), \tag{B.7}$$

se reducen a las ecuaciones de Einstein con campo escalar Φ como una fuente adicional de materia, donde [1]

$$\Phi = \sqrt{\frac{3}{2}} \ln f'(R) \,. \tag{B.8}$$

Es fácil establecer la relación $\Phi = \int \frac{\mathrm{d}r}{M(r)}$.

Asumiéndose que (B.8) puede ser resuelta para R, o sea se puede hallar una dependencia explícita $R(\Phi)$, se obtiene el potencial de auto-interacción

$$V(R(\Phi)) = \frac{1}{2\left(f'\right)^2}\left(Rf' - f\right), \tag{B.9}$$

Consideremos la transformación conforme

$$\widetilde{g}_{\mu\nu} := f'(R) g_{\mu\nu} = e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\Phi} g_{\mu\nu} \tag{B.10}$$

donde Φ es el campo escalar con potencial efectivo

$$V(\Phi) = \frac{1}{8\alpha}\left(1 - e^{-\sqrt{2/3}\Phi}\right)^2 . \tag{B.11}$$

Luego el nuevo tensor métrico está dada por la acción

$$ds^2 = -d\eta^2 + [\widetilde{e_1{}^1}(t)]^{-2} dr^2 + [\widetilde{e_2{}^2}(t)]^{-2}[d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta)\, d\varphi^2], \tag{B.12}$$

donde hemos definido el tiempo conforme $\mathrm{d}\eta = e^{\frac{\Phi}{\sqrt{6}}}\mathrm{d}t$ y los nuevos vectores de marco

$$\left\{\widetilde{e_1{}^1}, \widetilde{e_2{}^2}\right\} := e^{-\frac{\Phi}{\sqrt{6}}} \left\{e_1{}^1, e_2{}^2\right\}.$$

[1] Para una discusión sobre la regularidad de las transformaciones conformes y el problema de la equivalencia conforme entre los diferentes marcos se recomienda ver, por ejemplo [90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99] y las referencias allí citadas.

Al usarse la métrica conforme (B.12), las nuevas variables cinemáticas se definen por

$$\widetilde{\sigma} := e^{-\frac{\Phi}{\sqrt{6}}}\sigma_+, \ \widetilde{H} = e^{-\frac{\Phi}{\sqrt{6}}}H + \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\eta}. \tag{B.13}$$

Donde $\widetilde{H}$ define una escala de longitud $\widetilde{\ell}$ a lo largo de las líneas de flujo, describiendo la expansión (contracción) del volumen de la congruencia a través de la relación estándar $\widetilde{H} \equiv \frac{\widetilde{\ell}'}{\widetilde{\ell}}$ donde, en lo que sigue, la coma denota derivada con respecto a η. $\widetilde{\ell}$ está relacionado con ℓ a través de

$$\frac{\widetilde{\ell}}{\widetilde{\ell}_0} = \frac{\ell}{\ell_0}\exp\left[\frac{\Phi}{\sqrt{6}\Phi_0}\right] \tag{B.14}$$

donde el subíndice 0 denota la evaluación en un tiempo de referencia η_0. Como es usual [80], se puede definir el parámetro de desaceleración (conforme):

$$\widetilde{q} := -\frac{\widetilde{\ell}\widetilde{\ell}''}{(\widetilde{\ell}')^2} = -1 - \frac{\widetilde{H}'}{\widetilde{H}^2}. \tag{B.15}$$

Los campos de materia se transforman en

$$\widetilde{\rho_m} := e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\Phi}\rho_m \tag{B.16}$$

y

$$\widetilde{\rho_\Phi} := \frac{1}{2}\Phi'^2 + V(\Phi) \tag{B.17}$$

donde $\widetilde{\rho_m}$ y $\widetilde{\rho_\Phi}$ denota las densidades de energía de la materia y del campo escalar, respectivamente.

Finalmente, la 2-curvatura en la nueva métrica está dadas por

$$\widetilde{K} := e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\Phi 2}K = \frac{1}{nR^{n-1}}{}^2K. \tag{B.18}$$

Usándose el procedimiento descrito con anterioridad, se obtiene que la ecuación de Raychaudhuri (2.33), la de evolución de las anisotropías (*shear*) (2.30), la restricción de Gauss (2.31), la ecuación de traza (2.28) y la ecuación de conservación de la materia (2.35) son conformalmente equivalentes a

$$\widetilde{H}^2 + \widetilde{H}' = -2\widetilde{\sigma}^2 - \frac{1}{3}\Phi'^2 + \frac{1}{3}V(\Phi) + \frac{1}{3}(1 - \frac{3\gamma}{2})\widetilde{\rho_m}, \tag{B.19}$$

$$\widetilde{\sigma}' = \widetilde{H}^2 - 3\widetilde{\sigma}\widetilde{H} - \widetilde{\sigma}^2 - \frac{1}{6}\Phi'^2 - \frac{1}{3}V(\Phi) - \frac{\widetilde{\rho_m}}{3}, \tag{B.20}$$

$$\widetilde{H}^2 + \frac{1}{3}\widetilde{K} = \widetilde{\sigma}^2 + \frac{1}{6}\Phi'^2 + \frac{1}{3}V(\Phi) + \frac{\widetilde{\rho_m}}{3}, \tag{B.21}$$

$$\Phi'' = -3\widetilde{H}\Phi' - V'(\Phi) + \frac{\sqrt{6}}{6}(4 - 3\gamma)\widetilde{\rho_m}, \tag{B.22}$$

$$\widetilde{\rho_m}' = -3\gamma\widetilde{H}\widetilde{\rho_m} - \frac{\sqrt{6}}{6}(4 - 3\gamma)\widetilde{\rho_m}\Phi', \tag{B.23}$$

El estudio de la estabilidad del sistema (B.19)-(B.23) y la comparación de los resultados físicos que se obtengan en este escenario y los reportados en esta tesis, podrían aclarar un poco sobre el problema de la equivalencia física o no de ambos marcos. Este es un tema abierto de discusión y no es objetivo de la presente tesis.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Adam G. Riess and al. [Supernova Search Team Collaboration], "Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant," *Astron.J.* **116** (1998) 1009–1038, `arXiv:astro-ph/9805201v1`.

[2] Brian P. Schmidt and al. [Supernova Search Team Collaboration], "The High-Z Supernova Search: Measuring Cosmic Deceleration and Global Cur vature of the Universe Using Type Ia Supernovae," *Astrophys.J.* **507** (1998) 46–63, `arXiv:astro-ph/9805200v1`.

[3] A. H. Guth, "The Inflationary Universe: A Possible Solution To The Horizon And Flatness Problems," *Phys. Rev.* **D 23** (1981) 347.

[4] A. D. Linde, "A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution Of The Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy And Primordial Monopole Problems," *Phys. Lett.* **B 108** (1982) 389.

[5] A. J. Albrecht and P. J. Steinhardt, "Cosmology for Grand Unified Theories With Radiatively Induced Symmetry Breaking," *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 1220, `PRL:p1220_1`.

[6] D. S. Goldwirth and T. Piran, "Spherical inhomogeneous cosmologies and inflation," *Phys. Rev.* **D 40** (1989) 3263.

[7] D. S. Goldwirth and T. Piran, "Inhomogeneity and the onset of inflation," *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990) 2852.

[8] N. Deruelle and D. S. Goldwirth, "Conditions for inflation in an initially inhomogeneous universe," *Phys. Rev.* **D 51** (1995) 1563, `arXiv:gr-qc/9409056`.

[9] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation.* San Francisco, 1973.

[10] P. J. E. Peebles, *Principles of physical cosmology.* Princeton, USA: Univ. Press, 1993.

[11] Y. L. Nodal, *Expansión acelerada del universo: teorías f(R) y energía oscura.* PhD thesis, Universidad Central ¨Marta Abreu¨ de las Villas, 2009.

[12] A. de la Cruz, *Some cosmological and astrophysical aspects of modified gravity theories.* PhD thesis, Universidad Complutense de Madrid, 2010.

[13] G. Leon, " On the Past Asymptotic Dynamics of Non-minimally Coupled Dark Energy," *Class.Quant.Grav.* **29** (2009) 035008.

[14] I. Quiros, T. Gonzales, and G. León, "Nuevos estudios sobre posible origen de la aceleración de la expansión del universo, ya sea como curvatura del espacio-tiempo o como energía oscura fantasma," *Premio Nacional de la Academia de Ciencias de Cuba* (2007) .

[15] S. Nesseris and L. Perivolaropoulos, "Crossing the Phantom Divide: Theoretical Implications and Observational Status," *JCAP* **0701** (2007) 018, `arXiv:astro-ph/0610092v3`.

[16] G. Leon, Y. Leyva, E. N. Saridakis, O. Martin, and R. Cardenas, "Falsifying Field-based Dark Energy Models,".

[17] Z.-K. Guo, Y.-S. Piao, X. Zhang, and Y.-Z. Zhang, "Cosmological Evolution of a Quintom Model of Dark Energy," *Phys.Lett.* **B608** (2005) 177–182,

`arXiv:astro-ph/0410654v1`.

[18] X. fei Zhang, H. Li, Y.-S. Piao, and X. Zhang, "Two-field Models of Dark Energy with Equation of State Across -1," *Mod.Phys.Lett.* **A21** (2006) 231–242, `arXiv:astro-ph/0501652v1`.

[19] R. Lazkoz and G. León, "Quintom cosmologies admitting either tracking or phantom attractors," *Phys.Lett.* **B638** (2006) 303–309, `arXiv:astro-ph/0602590v1`.

[20] R. Lazkoz, G. León, and I. Quiros, "Quintom cosmologies with arbitrary potentials," *Phys.Lett.* **B649** (2007) 103–110, `arXiv:astro-ph/0701353v2`.

[21] G. Leon, *Análisis cualitativo y caracterización de dos cosmologías incluyendo campos escalares*. PhD thesis, Universidad Central ¨Marta Abreu¨ de las Villas, 2010.

[22] T. P. Sotiriou and V. Faraoni, "*f(R)* Theories Of Gravity," *Rev. Mod. Phys.* **82** (2010) 451–497.

[23] A. D. Felice and S. Tsujikawa, " *f(R)* theories," *Living Rev. Rel.* **13** (2010) 3, `Livingreviews:lrr-2010-3`.

[24] S. M. Carroll, A. D. Felice, V. Duvvuri, D. A. Easson, M. Trodden, and M. S. Turner, "The Cosmology of Generalized Modified Gravity Models," *Phys. Rev.* **D 71** (2005) 063513, `arXiv:astro-ph/0410031`.

[25] D. E. Atiénzar, "Dinámica del campo escalar atrapado en mundos branas de Randall-Sumdrum tipo II," tech. rep., Universidad Central ¨Marta Abreu¨ de las Villas, 2011.

[26] T. Gonzalez, T. Matos, I. Quiros, and A. Vazquez-Gonzalez, " Self-interacting Scalar Field Trapped in a Randall-Sundrum Braneworld: The Dynamical Systems

Perspective," *Phys.Lett.* **B676** (2009) 161–167.

[27] Y. Leyva, D. Gonzalez, T. Gonzalez, T. Matos, and I. Quiros, " Dynamics of a Self-interacting Scalar Field Trapped in the Braneworld for a Wide Variety of Self-interaction Potentials," *Phys.Rev.* **D80** (2009) 044026.

[28] G. Leon and E. N. Saridakis, "Phase-space analysis of Horava-Lifshitz cosmology," *JCAP* **0911** (2009) 006.

[29] G. Leon and E. N. Saridakis, "Phantom energy with varying-mass dark matter particles: acceleration and cosmic coincidence problem," *Phys.Lett.* **B** (2010) 693.

[30] G. Leon, P. Silveira, and C. R. Fadragas, " Phase-space of flat Friedmann-Robertson-Walker models with both a scalar field coupled to matter and radiation, 2010,".

[31] G. Leon and E. N. Saridakis, "Dynamics of the anisotropic Kantowsky - Sachs geometries in R^n gravity," *Class.Quant.Grav.* (2011) 28, `IOPscience:0264-9381/28/6/065008`.

[32] L. Amendola, S. Tsujikawa, R. Gannouji, and D. Polarski, "Conditions for the cosmological viability of *f(R)* dark energy models," *Phys. Rev.* **D75** (2007) 083504.

[33] Committee for a Decadal Survey of Astronomy and Astrophysics; National Research Council, *New Worlds, New Horizons in Astronomy and Astrophysics*. The National Academies Press (U.S.), 2010.

[34] C. Brans and R. H. Dicke, "Mach's principle and a relativistic theory of gravitation," *Phys. Rev.* **124** (1961) 925–935.

[35] C. Brans, "Scalar-tensor theories of gravity: Some personal history," *AIP Conf. Proc.* **1083** (2008) 34–46.

[36] C. M. Will, *Theory and experiment in gravitational physics*. Cambridge, UK: Univ.

Press, 1993.

[37] Y. Fujii and K. Maeda, *The scalar-tensor theory of gravitation.* Cambridge, USA: Univ. Press, 2003.

[38] D. Langlois, "Brane cosmology: an introduction," *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **148** (2003) 181–212, `arXiv:hep-th/0209261`.

[39] L. Randall and R. Sundrum, "An alternative to compactification," *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 4690–4693, `arXiv:hep-th/9906064`.

[40] L. Randall and R. Sundrum, "A large mass hierarchy from a small extra dimension," *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 3370–3373, `arXiv:hep-ph/9905221`.

[41] A. M. Sánchez, "Ecuación de Friedmann modificada y Cosmología sobre una Brane-World," Master's thesis, Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias, 2009.

[42] M. J. Guzmán, "Cosmología de branas y el modelo de Randall-Sundrum: Una Introducción,".

[43] R. Maartens and K. Koyama, "Brane-world gravity," *Living Rev. Relativity* **13** (2010) 5, `arXiv:1004.3962`.

[44] Y. Leyva, D. Gonzalez, T. Gonzalez, T. Matos, and I. Quiros, "Dynamics of a self-interacting scalar field trapped in the braneworld for a wide variety of self-interaction potentials," *Phys. Rev.* **D80** (2009) 044026, `arXiv:0909.0281 [gr-qc]`.

[45] G. R. Dvali, G. Gabadadze, and M. Porrati, "4D gravity on a brane in 5D Minkowski space," *Phys. Lett.* **B485** (2000) 208–214, `arXiv:hep-th/0005016`.

[46] I. Quiros, R. Garcia-Salcedo, T. Matos, and C. Moreno, "Self accelerating solutions in a DGP brane with a scalar field trapped on it: the dynamical systems

perspective," *Phys. Lett.* **B670** (2009) 259–265, arXiv:0802.3362 [gr-qc].

[47] T. P. Sotiriou and V. Faraoni, " *f(R)* theories of gravity ," *Rev. Mod. Phys.* **82** (2010) 451–497, arXiv:0805.1726v4.

[48] S. Nojiri and S. D. Odintsov, "Unified cosmic history in modified gravity: from *f(R)* theory to Lorentz non-invariant models," *Phys.Rept.* **505** (2011) 59–144, arXiv:1011.0544v4.

[49] A. S. Eddington, *The Mathematical Theory of Relativity.* Cambridge, Univ. Press., 1923.

[50] G. A. Vilkovisky, "Effective action in quantum gravity," *Class.Quant.Grav.* **9** (1992) 895–903, IOPscience:0264-9381/9/4/008.

[51] S. Nojirichi and S. D. Odintsov, "Introduction to modified gravity and gravitational alternative for dark energy," *ECONF* **C0602061** (2006) 06, arXiv:hep-th/0601213v5.

[52] S. Capozziello, "Curvature Quintessence," *Int. Jour. Mod. Phys.* **D11** (2002) 483–492, arXiv:gr-qc/0201033.

[53] D. t. Vollick, "1/R Curvature Corrections as the Source of the Cosmological Acceleration," *Phys. Rev.* **D68** (2003) 063510, arXiv:astro-ph/0306630.

[54] S. M. Caroll, V. Duvvuri, M. Trodden, and M. S. Turner, "Is cosmic speed-up due to new gravitational physics?," *Phys. Rev.* **D70** (2004) 043528, arXiv:astro-ph/0306438.

[55] A. A. Starobinsky, "A new type of isotropic cosmological models without singularity," *Phys. Lett.* **B91** (1980) 99–102.

[56] T. P. Sotiriou, *Modified Actions for Gravity: Theory and Phenomenology.* PhD thesis, International School for Advanced Studies., 2007. arXiv:0710.4438v1.

[57] T. P. Sotiriou and S. Liberati, "Metric-affine *f(R)* theories of gravity," *AnnalsPhys.* **322** (2007) 935–966, `gr-qc:0604006v2`.

[58] A. Guarnizo, L. Castañeda, and J. M. Tejeiro, "Boundary Term in Metric *f(R)* Gravity: Field Equations in the Metric Formalism," *Gen. Rel. Grav.* **42** (2010) 2713–2728, `lanl:1002.0617v4`.

[59] E. Dyer and K. Hinterbichler, "Boundary Terms, Variational Principles and Higher Derivative Modified Gravity," *Phys. Rev* **D79** (2009) 024028, `lanl:0809.4033`.

[60] M. S. Madsen and J. D. Barrow, "De Sitter Ground States And Boundary Terms In Generalized Gravity," *Nucl. Phys.* **B 323** (1989) 242–252.

[61] M. I. of Technology Department of Physics, "Introduction to Tensor Calculus for General Relativity," Edmund Bertschinger, 2000.

[62] E. Poisson, *A Relativity's toolkit - The Mathematics of Black-Hole Mechanics.* Cambridge, Univ. Press, 2004.

[63] A. Guarnizo and L. Castañeda, "Ecuación de Desvío Geodésico en Teorías *f(R)*,".

[64] G. R. Bengochea, *Modelos para la expansión acelerada del Universo.* PhD thesis, Universidad de Buenos Aires, 2009.

[65] L. Pogosian and A. Silvestri, "The pattern of growth in viable *f(R)* cosmologies," *Phys.Rev.* **D77** (2008) 023503, `arXiv:0709.0296v3`.

[66] E. T. Lino, *Consistencia Teórica de Modificaciones Cuadráticas de la Relatividad General.* PhD thesis, Universidad de la Habana, 2010.

[67] J. A. R. Cembranos, A. de la Cruz-Dombriz, and P. J. Romero, "Kerr-Newman black holes in *f(R)* theories," `arXiv:1109.4519`.

[68] J. W. y G.F.R. Ellis (eds)., *Dynamical Systems in Cosmology.* Cambridge, UK:

Univ. Press, 1997.

[69] A. A. Coley, "Dynamical systems in cosmology," `arXiv:gr-qc/9910074`.

[70] A. A. Coley, *Introduction to Dynamical Systems. Lecture Notes for Math.* 1994.

[71] T. Kapitaniak and S. R. Bishop, *The ilustrated dictionary of nonlinear dynamics y chaos.* John Wiley and Sons, 1999.

[72] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos.* Springer, 2003.

[73] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems.* Springer, Berlin, 1991.

[74] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology.* John Wiley and Sons, 1972.

[75] I. Ciufolini and J. Wheeler, *Gravitation and Inertia.* Princeton University Press, 1995.

[76] G. F. R. Ellis, "The bianchi model: Then and now," *Phys. and Astron.* **38** (2006) 1003–1015, `springerlink:hr0w070646n52745`.

[77] H. Stephani, D. Kramer, M. A. H. MacCallum, C. A. Hoenselaers, and E. Herlt, *Exact solutions of Einstein's field equations.* Cambridge University Press, second edition, 2003.

[78] A. B. Henriques, "The classical tests of cosmology with a simple Kantowski-Sachs model," *Astrophysics and Space Science* **235** (1996) 129–140.

[79] R. Maartens, "Causal Thermodynamics in Relativity," 1996. `arXiv:astro-ph/9609119v1`.

[80] H. van Elst and C. Uggla, "General Relativistic 1+3 Orthonormal Frame. Approach Revisited," *Class. Quant. Grav.* **14** (1997) 2673–2695, `arXiv:gr-qc/9603026`.

[81] G. F. R. Ellis and H. van Elsty, *Cosmological Models.* NATO Advanced Study

Institute on Theoretical and Observational Cosmology, Cargése, France, 2008. `arXiv:gr-qc/9812046`.

[82] J. Ehlers, "Contributions to the Relativistic Mechanics of Continuous Media," *Gen. Rel. Grav.* **25** (1993) 12.

[83] M. F. Shamir, "Some Bianchi Type Cosmological Models in *f(R)* Gravity," *Astrophys. Space Sci.* **330** (2010) 183–189, `lanl:1006.4249v1`.

[84] A. A. Coley, W. C. Lim, and G. Leon, "Spherically Symmetric Cosmology: Resource Paper," `arXiv:0803.0905v1`.

[85] J. E. Copeland, A. R. Liddle, and D. Wands, "Exponential potentials and cosmological scaling solutions," *Phys. Rev.* **D 57** (1998) 4686.

[86] Aulbach B., *Continuous and Discrete Dynamics Near Manifolds of Equilibria.* Lecture Notes in Mathematics vol 1058, 1981.

[87] A. A. Coley, *Dynamical Systems in Cosmology.* 1999. `arXiv:gr-qc/9910074v1`.

[88] R. H. Jiménez, C. Moreno, D. S. Guzmán, and R. G. Salcedo, "Cálculo didáctico de la edad del Universo y la importancia de la constante cosmológica en un modelo FRW," *Lat. Am. J. Phys. Educ.* **5** (2011) 3.

[89] N. Goheer, J. A. Leach, and P. K. S. Dunsby, "Dynamical systems analysis of anisotropic cosmologies in R^n-gravity ," *Class. Quantum Grav.* **24** (2007) 5689.

[90] G. Magnano, M. Ferraris, and M. Francaviglia, "Legendre transformation and dynamical structure of higher derivative gravity," *Class. Quant. Grav.* **7** (1990) 557–570.

[91] S. Cotsakis., "Conformal transformations single out a unique measure of distance," *Phys. Rev.* **D47** (1993) 1437–1439.

[92] P. Teyssandier., "Comment on "Conformal transformations single out a unique measure of distance".," *Phys. Rev.* **D52** (1995) 6195–6197.

[93] H. J. Schmidt., "Comment to the paper "Conformal transformations single out a unique measure of distance"," *Phys. Rev.* **D52** (1995) 6198.

[94] S. Cotsakis., "Reply to: Comments on "Conformal transformations single out a unique measure of distance"," *Phys. Rev.* **D52** (1995) 6199–6200.

[95] S. Capozziello, R. de Ritis, and A. A. Marino., "Some aspects of the cosmological conformal equivalence between "Jordan Frame" and "Einstein Frame"," *Class. Quant. Grav.* **14** (1997) 3243–3258.

[96] G. Magnano and L. M. Sokolowski., "On physical equivalence between nonlinear gravity theories and a general relativistic selfgravitating scalar field," *Phys. Rev.* **D50** (1994) 5039–5059.

[97] V. Faraoni, E. Gunzig, and P. Nardone., "Conformal transformations in classical gravitational theories and in cosmology," *Fund. Cosmic Phys.* **20** (1999) 121.

[98] V. Faraoni., "de Sitter space and the equivalence between f(R) and scalar-tensor gravity," *Phys. Rev.* **D75** (2007) 067302.

[99] V. Faraoni and S. Nadeau., "The (pseudo)issue of the conformal frame revisited," *Phys. Rev.* **D75** (2007) 023501.