Título: Ventajas en la utilización de los conceptos en la solución de los problemas con parámetros en el cálculo de límites.

Autores:

MsC. Gustavo Vicente Rojas García

Dra. Blanca Esther González Rodríguez

Resumen:

Cuando se realizan ejercicios sobre el cálculo de límites de funciones (en particular límites de sucesiones) en general se logra que el estudiante repita procedimientos que le permitan eliminar las formas indeterminadas, al final el resultado obtenido es un mayor desarrollo de habilidades en procedimientos algebraicos como: descomposición factorial, utilización de la conjugada, etc., sin embargo la comprensión exacta de muchas propiedades del límite y de las formas indeterminadas no se tienen.

En este trabajo se muestra la solución de problemas con parámetros en el cálculo de límites, poniendo de manifiesto que en estos problemas se utilizan los conceptos, en particular las formas indeterminadas, de forma más eficiente, lográndose un mayor aprendizaje de los mismos.

Una situación que también se da es que los estudiantes piensan que si existen software de cálculo simbólico no tienen necesidad de aprender a resolver problemas de cálculo de límites, otra ventaja que tiene el tratamiento de los problemas con parámetros es la comprensión por parte de los estudiantes de la necesidad de aprender a resolver estos problemas.

Abstract:

When doing exercises on the calculation of the limit of functions (particularly succession limit) the students generally fallow procedures that allow them to eliminate in determinate forms. The result obtained by the students shows a development of skills in the use of algebraic procedures such as: factor decomposition, the use of conjugates, etc, but a precised understanding of many properties of limits and indeterminate forms is not achieved.

This paper shows how the solution of problems with parameters in the calculation of limits can be achieved more efficiently by applying the concept of indeterminate forms which provides for a better learning the corresponding procedures.

Another advantage of applying the concept of indeterminate forms is that students realize that in spite of the existence of software for symbolic calculus they must learn to solve problems on the calculation limits by themselves.

Introducción:

Podemos citar entre las ventajas que se obtienen con el desarrollo de habilidades en el análisis de un problema con parámetros:

- Lograr el dominio de los conceptos y propiedades de las relaciones que se utilizan.
- Dominar la técnica del método de diferenciación de casos.
- Desarrollar un pensamiento algorítmico.
- Lograr un acercamiento a la búsqueda de modelos que pueden ampliar las posibilidades de cómputo.
- Facilitar el camino a la esencia del tratamiento de un problema investigativo.

Por lo general los problemas prácticos que surgen en las ciencias técnicas se modelan por medio de ecuaciones, desigualdades, sistemas de ecuaciones, relaciones funcionales, series, etc.; que contemplan a su vez varias variables. Para el estudio de estos problemas es necesario realizar el análisis de una variable en función de las restantes, lo que se expresa desde el punto de vista matemático en la forma $F(x_1, x_2, \cdots) = 0$.

En este trabajo trataremos la solución de los problemas con el planteamiento general anterior, para lo cual consideraremos una variable con $G(x, a_1, a_2, \cdots) = 0$ o incógnita y las restantes como parámetros. De esta forma el problema que se tratará será de la forma, donde x es la incógnita y $a_1, a_2, \cdots$ son parámetros.

"Resolver un problema con parámetros, significa encontrar para cada valor de los parámetros todas las soluciones de la incógnita".

A continuación vamos a exponer un grupo de problemas con su correspondiente comentario donde se muestran los aspectos señalados anteriormente.

1) En este problema se quiere mostrar la necesidad de conocer propiedades de los conceptos que se tratan, así como el desarrollo de habilidades en procedimientos anteriores

Encontrar los valores del parámetro "α", α∈R para los cuales la siguiente sucesión $\left\{\left(\frac{3\alpha}{\alpha^2+2}\right)^n\right\}$ (n ∈ N), es un infinitesimal.

La solución de este problema requiere:

- El conocimiento de la propiedad, "la sucesión $\{a_n\}$ es un infinitesimal si y solo si $|a_n| < 1$".
- Saber resolver desigualdades con valor absoluto.

Por tanto, buscamos los valores del parámetro "α" para los cuales $\left|\frac{3\alpha}{\alpha^2+2}\right| < 1$.

Si el profesor estima conveniente puede dejar que el estudiante resuelva manualmente esta desigualdad y después comprobar su solución con un software apropiado o puede mandar directamente a resolverla con el software.

La solución es la siguiente: $|\alpha| < 1$ ó $|\alpha| > 2$

2) El siguiente problema muestra como el cálculo de límites con parámetros nos lleva a la necesidad de conocer que la existencia del límite no depende de la existencia de la imagen en el punto y que las formas indeterminadas dan la posibilidad de que el límite exista.

Encontrar los valores de los parámetros a y b de R en función del parámetro c, tales que el límite cuando $x \to c$ de la función g definida a continuación exista

$$g(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}, \qquad \text{donde} \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|} & \text{si } |x| > c \\ a + bx^2 & \text{si } |x| \le c \end{cases}$$

Al estar definida la función f por ramas para determinar el límite en el punto c hace falta buscar los límites laterales en el punto c.

<u>Primero</u>. Consideremos c > 0

El límite de g por la izquierda de c:

$$\lim_{x \to c^-} g(x) = \lim_{x \to c^-} \frac{a + bx^2 - (a + bc^2)}{x - c} = \lim_{x \to c^-} b(x + c) = 2bc$$

El límite de g por la derecha de c:

$$\lim_{x \to c^+} g(x) = \lim_{x \to c^+} \frac{\frac{1}{|x|} - (a + bc^2)}{x - c} = \lim_{x \to c^+} \frac{\frac{1}{x} - (a + bc^2)}{x - c} = \lim_{x \to c^+} \frac{1 - (a + bc^2)x}{x(x - c)}$$

Se observa que la función g no está definida en c, por lo que para lograr que exista el límite es necesario que se obtenga la forma indeterminada 0/0; esto se logra haciendo que, $1 - (a + bc^2)c = 0$; es decir que

$1 - ac - abc^3 = 0$ (1)

Este último resultado advierte que c es una raíz de la ecuación $1 - (a + bc^2)x = 0$, por lo tanto x – c divide exactamente al polinomio $1 - (a + bc^2)x$.

Luego, $\lim_{x\to c^+} \frac{1-(a+bc^2)x}{x(x-c)} = \lim_{x\to c^+} \frac{(x-c)\left(-(a+bc^2)+\frac{\overbrace{1-c(a+bc^2)}^{0}}{x-c}\right)}{x(x-c)} = \lim_{x\to c^+} \frac{-(a+bc^2)}{x} = -\frac{a+bc^2}{c}$

Para que exista el límite de g en c, se tiene que cumplir que los límites laterales sean iguales, es decir, que $2bc = -\frac{a+bc^2}{c}$

Por tanto, $a = -3bc^2$. Sustituyendo en (1) resulta $a = \frac{3}{2c}$ y $b = -\frac{1}{2c^3}$

<u>Segundo</u>. Consideremos c < 0

En este caso la función así definida no tiene sentido.

<u>Tercero</u>. Consideremos c = 0

La función a considerar es, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ a+bx^2 & \text{si } x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ a+bx^2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Esta es una función discontinua en x = 0 para todo a y b reales, por lo tanto es no derivable en x = 0 para todo a y b reales.

En resumen

$f'(c)$ existe, cuando c > 0 y n tal caso $a = \frac{3}{2c}$ y $b = -\frac{1}{2c^3}$

<u>Observaciones</u>:

- En el primer caso se puede apreciar además de utilizar el concepto de derivada de una función en un punto, que en el cálculo del límite se necesita tener muy consolidadas todos los conceptos al respecto como es el significado de las formas indeterminadas, además lo relacionado a las raíces de los polinomios.
- En el tercer caso se reconoce la forma de una función definida por ramas, se manejan las propiedades del valor absoluto y se utiliza la relación entre continuidad y derivabilidad.

3) El siguiente problema muestra como el cálculo de límites con parámetros lleva a tener la necesidad de conocer que la existencia del límite no depende de la existencia de la imagen del punto y que las formas indeterminadas nos dan la posibilidad de que el límite exista.

Encontrar los valores de los parámetros a y b de R para que el límite siguiente exista y sea cero

$$\lim_{x\to 0}\left(x^{-3}\operatorname{sen}3x + ax^{-2} + b\right)$$

La solución de este problema requiere:

- Una comprensión exacta de las formas indeterminadas, es decir conocer que puede existir el límite aunque la función no esté definida en el punto, para esto es necesario obtener una forma indeterminada que es la que da la posibilidad de su existencia.
- La regla de L'Hopital

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}\operatorname{sen}3x + \frac{a}{x^2} + b\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}3x + ax + bx^3}{x^3}\right)$. Se obtiene la forma indeterminada 0/0, se puede aplicar la regla de L'Hopital y se obtiene que

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}3x + ax + bx^3}{x^3}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{3\cos 3x + a + 3bx^2}{3x^2}\right).$$

Se observa que la función no esta definida en cero por lo que para lograr que exista el límite es necesario que se obtenga de nuevo la forma indeterminada 0/0; esto se logra haciendo a = – 3.

Por tanto, haciendo a = – 3 y aplicando reiteradas veces la regla de L'Hopital, se obtiene la respuesta

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3\cos 3x - 3 + 3bx^2}{3x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-9\operatorname{sen}3x + 6bx}{6x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-27\cos 3x + 6b}{6}\right) = \frac{-27+6b}{6}$$

$$\frac{-27+6b}{6} = 0 \Rightarrow b = \frac{27}{6}$$

Conclusiones:

El método directo de demostración por diferenciación de casos utilizado en la solución de problemas con parámetros permite:

- Lograr habilidades en la utilización de este método de demostración.
- Lograr el dominio de los conceptos y propiedades que se utilizan en la solución de los problemas.
- Lograr un acercamiento a la búsqueda de modelos que pueden ampliar las posibilidades de cómputo.
- Hacer un uso no mecanicista de las nuevas tecnologías.
- Contribuir a fomentar un pensamiento investigativo.

Bibliografía:

[1] De Guzmán, Miguel. Tendencias innovadoras en Educación Matemática. Edición HTML: Joaquin Alejo. 1993.

[2] O. Mederos y B. González. La Modelación en la Educación Matemática. Impreso en Saltillo Coahuila, México. Julio 2005.

[3] Apóstol, Tom M. Calculus. Volumen I. Editorial Reverté, S. A. 1972

[4] Sánchez, Carlos. Análisis Matemático. Tomo I. Editorial Pueblo y Educación. 1982

[5] Kudriávsev, L. D. Curso de Análisis Matemático. Editorial MIR. Moscú. 1983.