



Universidad Central
"Marta Abreu"
de Las Villas

Facultad de
Matemática-Física-Computación

Mejoras y formalización del Método de Puntos Finitos

Trabajo de diploma

Autor: Jorge Rivero Dones

Tutores: Dra. Lucía Argüelles Cortés
Dr. Miguel A. Martínez Hernández
Dr. Ing. Carlos A. Recarey Morfa

Villa Clara, Cuba
Curso 2006 - 2007



Hago constar que el presente trabajo fue realizado en la Universidad Central Marta Abreu de Las Villas como parte de la culminación de los estudios de la especialidad de Licenciatura en Matemáticas, autorizando a que el mismo sea utilizado por la institución, para los fines que estime conveniente, tanto de forma parcial como total y que además no podrá ser presentado en eventos ni publicado sin la autorización de la Universidad.

Firma del autor

Los abajo firmantes, certificamos que el presente trabajo ha sido realizado según acuerdos de la dirección de nuestro centro y el mismo cumple con los requisitos que debe tener un trabajo de esta envergadura referido a la temática señalada.

Firma del tutor

Firma del jefe del Seminario

«No sé cómo puedo ser visto por el mundo, pero en mi opinión, me he comportado como un niño que juega al borde del mar, y que se divierte buscando de vez en cuando una piedra más pulida y una concha más bonita de lo normal, mientras que el gran océano de la verdad se exponía ante mí completamente desconocido.»

Isaac Newton

Dedicatoria

Este trabajo está dedicado en especial a mi abuelita Aleida Esquivel Rivero, porque ella es lo más grande que tengo en esta vida. Y a todos mis seres queridos, que me han ayudado en lo que han podido para que salga adelante. Esto es para ustedes.

Agradecimientos

Primeramente quisiera agradecerles a mis padres por haberme dado la vida, a mis dos abuelas por criarme, a todos mis tíos y primos por ayudarme de una forma u otro, para que yo en este momento pueda escribir estas palabras.

En especial a mi novia Greter Feal Delgado, por soportarme todo el tiempo y por ayudarme tanto. Al profesor Franco Perazzo Maggi y mis amigos Juan Aranda Pastén y Luis C. Pérez Pozo por toda su ayuda y sus consejos, que me guiaron en el curso de esta investigación. A la profesora Lucía Arguelles Cortes y Carlos A. Recarey Morfa, por iniciarme como investigador en esta rama de la matemática y guiarme en los primeros pasos, para la realización de este trabajo.

No puedo dejar de agradecerles a mis amigos Irvin Pérez Morales, Kenier Castillo Rodríguez y Felix A. Díaz Rosell por poner todo lo que tenían a su alcance para ayudarme. A Yoan Hernández, Gerardo Hernández Cuellar, por revisarme el trabajo darme algunos consejos para la confección de esta tesis, y Alcides Viamontes Esquivel, por su ayuda incondicional y conversaciones sobre el tema.

Al profesor Miguel Ángel Martínez por asumir como tutor de mi tesis y por sus consejos para que este trabajo salga adelante.

Si se me olvida alguien le ruego que me perdone, y para usted también hay una palabra de agradecimiento.

Resumen

En este trabajo el autor da una metodología para una mayor comprensión y aplicación del Método de Puntos Finitos a un problema dado. Por otra parte han quedado plasmadas algunas definiciones, que deben quedar claras desde el punto de vista matemático, para entender mejor este método. Se realiza un estudio de los principales factores que influyen en la aproximación. Y por último se propone un algoritmo lo más sencillo posible, para obtener una programación del método de forma general.

Summary

In this work the author gives a methodology, for a better understanding and application of the Method of Finite Points to a given problem. Also, this work gives some definitions that should remain clear from the mathematical point of view, in order to understand better this method. The main factors for the approach are showed in it. Finally it proposes a simple algorithm to obtain a programming of the method in general form.

Índice

Introducción	1
Formulación del problema	2
Objetivos	2
Contenido	3
Capítulo 1: Estado del Arte	4
1.1. Introducción	4
1.2. Estado del arte de los métodos sin malla	4
1.3. Principales ventajas de los métodos sin malla	7
1.4. Definición de un método sin malla	8
1.5. Conclusiones	9
Capítulo 2: Formulación del Método de Puntos Finitos	10
2.1. Introducción	10
2.2. Método de Puntos Finitos	10
2.2.1. Obtención de la función aproximante en el MPF	11
2.2.1.1. Discretización del dominio	11
2.2.1.2. Generación de nube de puntos	13
2.2.1.3. Subdominios de influencia y funciones de ponderación	18
2.2.1.4. Bases de aproximación	24
2.2.1.5. Obtención de las funciones de forma	26
2.2.2. Discretización mediante el Método de Colocación Puntual	34
2.2.2.1. Método de Colocación Puntual	34
2.3. Convergencia del MPF	36
2.3.1. Consistencia	37
2.3.2. Estabilidad	38
2.4. Conclusiones	43
Capítulo 3: Algoritmos y análisis de los resultados	44
3.1. Introducción	44
3.2. Algoritmos en pseudocódigo	44
3.2.1. Algoritmo general	44

3.2.1.1. Explicación de cada paso del algoritmo general	45
3.2.2. Algoritmo modificado.....	48
3.3. Error de la aproximación.....	49
3.4. Aplicación del MPF a la ecuación de convección difusión	49
3.4.1. Condición de contorno estabilizada	51
3.4.2. Estabilización de las ecuaciones mediante el cálculo finitesimal.....	54
3.5. Ejemplo resuelto paso a paso	57
3.6. Convergencia del MPF y factores de influencia	71
3.6.1. Influencia de la nube.....	72
3.6.2. Influencia de la función de ponderación.....	73
3.6.3. Influencia de la base de aproximación.....	75
3.7. Conclusiones	76
Conclusiones y líneas futuras de investigación	77
Bibliografía	79
Apéndice A	82
Algunos conceptos, definiciones y resultados de Análisis Matemático y Topología..	82
Apéndice B	86
Condiciones de contorno	86
Anexos	88
Código del MPF en 1D desarrollado en el Mathematica 5.1.....	88

Introducción

Como resultado de investigaciones y el estudio de diversos problemas de la realidad cotidiana resulta muy usual que en la modelación matemática se obtenga una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales, muchos de los cuales en ocasiones no se pueden resolver por métodos analíticos, y es entonces cuando entran a jugar un papel fundamental los métodos numéricos en la resolución de los mismos. Dentro de los métodos más usados se puede mencionar, el Método de Elementos Finitos, el Método de Diferencias Finitas y el Método de Volúmenes Finitos. Por supuesto, que la aplicación y el desarrollo de estos vienen aparejados con la evolución de la computación, por esta razón en matemática numérica se busca ganar en precisión, eficiencia y velocidad en la convergencia.

Estos métodos presentan una característica en común, la necesidad de una malla o grilla a la hora de realizar la discretización. A pesar de muchos años de investigación y desarrollo de potentes algoritmos para resolver los problemas planteados por la generación de las mallas, aún no se ha encontrado una solución óptima (Sacco, 2002).

Los cuantiosos recursos en tiempo de máquina requeridos para las tareas de preproceso (entiéndase generación de malla principalmente), ha supuesto en cualquiera de los métodos anteriores un insalvable cuello de botella. Los algoritmos de generación de malla no brindan una respuesta acorde con los requerimientos de velocidad y eficiencia. Un ejemplo de ello se encuentra en la simulación de choques de automóviles donde la discretización requiere un tiempo aproximado de un mes de trabajo, mientras que la simulación se realiza en 24 horas.

Para solucionar estas dificultades aparecieron nuevos métodos numéricos cuyo objetivo fundamental consiste en independizar el cálculo de las funciones de aproximación de las

discretizaciones conformes (Sacco, 2002). Estos son los denominados métodos “sin malla” o “meshless, gridless o element-free” en inglés, los cuales han sido y son hoy en día objeto de numerosas investigaciones. Dentro de los cuales se pueden destacar el Método de Puntos Finitos (MPF), por su simplicidad y aplicación a una gran variedad de problemas. El cual será el centro de esta investigación.

En los estudios que se han realizado anteriormente sobre el Método de Puntos Finitos se ha evidenciado la falta de claridad y de rigor matemático en algunos conceptos básicos, así como la falta de un algoritmo amigable y fácil de implementar. Estas deficiencias hacen que pueda plantearse el siguiente problema.

Formulación del problema

¿Cómo mejorar la fundamentación matemática y la eficiencia en la aplicación del MPF?

Objetivos

Objetivo General

- Enriquecer la fundamentación matemática del Método de Puntos Finitos para una mayor comprensión e implementación del mismo.

Objetivos Específicos

- Dar la metodología a seguir para la obtención de las funciones de forma y del sistema de ecuaciones en el MPF.
- Mostrar algunas propiedades de la aproximación obtenida mediante el Método de Mínimos Cuadrados Ponderados Fijos.
- Analizar algunos aspectos sobre la convergencia del MPF.
- Proponer un algoritmo sencillo, para que el MPF pueda ser utilizado como una herramienta estándar en proyectos de ingeniería.
- Ilustrar mediante un ejemplo la aplicación del algoritmo.
- Analizar la convergencia a través de algunos experimentos numéricos.

Contenido

El contenido de esta tesis se dividió en una introducción, tres capítulos, y conclusiones y líneas futuras de trabajo. En el primer capítulo se ilustra el desarrollo de los métodos sin malla a través del estado del arte, dándose además la definición de un método sin malla y las ventajas de la utilización de los mismos en la resolución de problemas de contorno. Ya en el segundo capítulo se trata acerca de las principales cuestiones teóricas, mediante la formulación del Método de Puntos Finitos. En este capítulo se abordan las dos etapas fundamentales del MPF y se explican algunas propiedades de la aproximación mínimos cuadrados ponderados fijos, la convergencia del Método de Puntos Finitos. En el tercer capítulo se proponen dos algoritmos, uno general y otro modificado, para materializar la metodología estudiada en el capítulo dos; también se muestra la aplicación del MPF a la ecuación convección-difusión, la corrida del algoritmo modificado implementado en el Matemática a través de un ejemplo y el análisis de la convergencia del MPF. Finalmente se dan las conclusiones y se plantean una serie de líneas de trabajo a seguir en investigaciones futuras.

Capítulo 1: Estado del Arte

1.1. Introducción

En este capítulo se mostrará el estado del arte de los métodos sin malla, para ubicar al lector en la temática a tratar. Se dará una panorámica de los métodos que antecedieron al MPF hasta la actualidad. Se menciona la principal ventaja de los métodos sin malla y se muestra la definición formal de un método sin malla.

1.2. Estado del arte de los métodos sin malla

En la actualidad hay un gran número de métodos sin mallas, unas de las referencias más alejadas en el tiempo, es el método de partículas Smooth Particle Hidrodinamics (SPH) presentado por Lucy en el año 1977 (Sacco, 2002). En forma conceptual, se puede decir que este método se basa en la división de la materia en un número finito de partículas a las que se le asocian algunas propiedades físicas. En sus orígenes este método se desarrolló con el objetivo de modelar fenómenos astrofísicos, por ejemplo, el movimiento de cuerpos celestes o explosiones de estrellas. En el año 1982 Monaghan publicó un artículo en el cual dio un marco teórico al SPH, y con ello se renovó el interés de los investigadores acerca de las posibilidades que se abrían entorno a esta técnica.

En forma prácticamente paralela se desarrolló un método denominado Generalized Finite Difference (GFD). Con esta técnica se pretendía aprovechar las características de las Diferencias Finitas pero independizándose de las grillas conformes que hasta ese momento eran indispensables para su aplicación. Los primeros aportes a este método se deben a Perrone y Kao, sin embargo, en el año 1980, y gracias a un trabajo de Liszka y Orkisz, el GFD apareció como una opción válida y suficientemente robusta. Este método al igual que el SPH utiliza un esquema de colocación puntual con lo que se obtiene un sistema de ecuaciones discretas (Sacco, 2002).

Enlazando con la línea de trabajo surgida con el SPH apareció un nuevo método llamado Reproducing Kernel Particle Method (RKPM) desarrollado por Liu. En éste, y a través de las transformaciones conocidas como “Wavlet”, se añade una función de corrección a las funciones de forma obtenidas a través del SPH. Esta corrección permite resolver los problemas de precisión en zonas cercanas al contorno o cuando el número de partículas empleadas es pequeño. En general en la aplicación del RKPM se utilizan esquemas de resolución de Galerkin, sin embargo en un trabajo presentado por Aluru, se muestra una aproximación del tipo Reproducing Kernel combinada con un esquema de colocación puntual, con lo cual se obtuvieron resultados muy prometedores (Sacco, 2002).

Más recientemente se dio una nueva línea de investigación basada en la técnica denominada Moving Least Square (MLS). El primer trabajo en el que se utilizó este tipo de interpolación data del año 1992 y fue desarrollado por Nayroles y colaboradores. El método propuesto fue bautizado con el nombre de Diffuse Element Method (DEM) y con él se pretendió hacer una generalización del Método de Elemento Finito; aunque la formulación tenía una serie de simplificaciones en la imposición de las condiciones de contorno y en cálculo de las derivadas, que fueron muy cuestionadas por diferentes autores. A pesar de estos inconvenientes, el DEM presentaba algunas ventajas frente al FEM motivo por el cual se continuó trabajando en él. Entre estas ventajas hay que destacar la posibilidad de obtener funciones de forma con continuidad C^1 de manera simple.

Para la discretización espacial del DEM se utiliza una formulación integral de Galerkin, por este motivo era necesario definir una malla de fondo mediante la cual se evalúan las integrales, aunque dicha malla no necesariamente debía estar ligada a la geometría.

Otro método basado en interpolaciones tipo MLS surgió a raíz de sucesivas mejoras introducidas en el DEM, llevadas a cabo principalmente por Belytschko y colaboradores. El método resultante es conocido con el nombre de Element Free Galerkin Method

(EFGM). En general se solucionaron los inconvenientes en el cálculo de las derivadas y se utilizaron multiplicadores de Lagrange para la correcta imposición de las condiciones de contorno de tipo Dirichlet. Este método tiene como principal desventaja su elevado costo computacional, provocado por el cálculo de las derivadas en forma estricta, sin embargo los excelentes resultados obtenidos para problemas de propagación de fracturas, sin necesidad de producir sucesivos remallados, como se debe hacer cuando se utiliza el FEM, hizo que el interés por el mismo crezca en forma continua.

Dentro de esta línea de trabajo Duarte y Babuska hicieron un significativo aporte a la comprensión de las características y las propiedades de la interpolación realizada mediante MLS, reconociendo las funciones de forma que se obtienen con este método como caso particular de la Partición de la Unidad. A partir de estos trabajos surgieron dos nuevos métodos: el h-p Clouds y el Partition of Unity Finite Element Method (PUFEM).

Siguiendo la línea de los métodos basados en formulaciones débiles es necesario mencionar los trabajos realizados por Atluri y colaboradores que dieron lugar a dos familias de métodos utilizadas para la resolución de problemas de elasticidad. El primero de estos es el Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG), donde se combinan la interpolación mediante mínimos cuadrados ponderados móviles y una formulación débil local llevada a cabo a través de residuos ponderados locales. La aplicación de la forma Débil Asimétrica Local y las funciones de aproximación de mínimos cuadrados móviles dieron lugar al método llamado Local Boundarie Integral Equations (LBIE). Este método permite evaluar las integrales fácilmente al llevarse a cabo en dominios regulares (círculos en 2D y esferas en 3D).

El Meshless Finite Element Method (MFEM) presentado por Idelshon y colaboradores es una interesante propuesta. En la misma se recogen todas las bondades del FEM aunque se independizan las funciones de forma de las conectividades de los elementos.

Según los autores este método puede ser interpretado como un método de elemento finito utilizando elementos de formas geométricas distintas, o como un método sin malla con nubes de puntos formadas por todos los puntos que pertenecen a una esfera vacía.

Finalmente se tiene que mencionar el método objeto de estudio en esta tesis, que ha sido bautizado con el nombre de Finite Point Method (FPM) o Método de Puntos Finitos (MPF). Este método propuesto por Oñate, Zienkiewicz, Idelsohn y Taylor surge de la combinación de las funciones de forma obtenidas mediante el MLS y la técnica de colocación puntual.

Según (Perazzo, 2002) la técnica de MLS presenta dos grandes inconvenientes: en primer lugar la dificultad para establecer una definición global de las funciones de ponderación para cualquier punto de la partición y la otra lo complejo que resulta obtener las derivadas de la función de forma. En el Método de Puntos Finitos se recurre al uso de una función de ponderación fija, proceso denominado, “Fixed Weighted Least Squares” (FWLS), con vista a solucionar estos problemas.

A continuación se ponen de manifiesto las principales ventajas de los métodos sin malla frente a los métodos que utilizan malla.

1.3. Principales ventajas de los métodos sin malla

La principal ventaja de los métodos sin malla según (Aranda, 2006) radica en la nula necesidad de una conectividad o malla entre los elementos que discretizan el problema, la que es por los métodos tradicionales (MEF, MVF, MDF). Esta conectividad es necesaria en estos últimos para realizar el ensamble de la matriz de rigidez global del problema y la creación de ella implica un alto costo de recursos computacionales y tiempo, el cual puede llegar a ser mayor que la propia resolución del sistema global del problema. Para el caso de los métodos sin malla la discretización del cuerpo se realiza únicamente mediante puntos, y la construcción de la función incógnita se realiza

mediante la asignación a cada uno de ellos de una vecindad, de modo de construirla en base a la información obtenida de los datos geométricos de los puntos más cercanos. Esta construcción de la función incógnita mediante puntos vecinos permite una aproximación local de la solución para el nodo principal. La ausencia de una malla implica una reducción del costo computacional y del tiempo de cálculo del problema, esta característica, propia de los métodos sin malla, resulta muy atractiva para su desarrollo e implementación, lo que durante los últimos tiempos ha potenciado enormemente su investigación y desarrollo. Dentro de los métodos sin malla se encuentra el Método de Puntos Finitos (E. Oñate, S. Idelsohn y O. Zienkiewics), el cual posee a plenitud todas estas características mencionadas, en contraste con algunos métodos, que siendo considerados como métodos sin malla, de todas formas requieren de una conectividad o malla de fondo.

1.4. Definición de un método sin malla

Conocido el origen y las ventajas de los métodos sin malla es conveniente dar una definición de manera global. Según (Perazzo, 2002) la primera propuesta para definirlos es dada por (C. Duarte), que considera a un método como sin malla si *las ecuaciones básicas del sistema que gobiernan el modelo discreto del problema no dependen de la disponibilidad de una malla bien definida*, sin embargo, a pesar que algunos métodos son considerados como sin malla, de todas formas dependen de una débil malla de fondo para el cálculo de las ecuaciones integrales que gobiernan el modelo. Una propuesta con mayor precisión es realizada por (E. Oñate, S. Idelsohn y O. Zienkiewics), y plantea que un método puede ser considerado como sin malla si satisface las siguientes condiciones:

- La discretización de la función incógnita y sus derivadas deben poder ser definidas solamente en términos de la posición de los puntos localizados dentro del dominio de análisis y de los parámetros especificados en estos.
- La función de ponderación y sus derivadas pueden ser definidas solamente en términos de la posición de los puntos localizados dentro del dominio de análisis.

- No es necesario realizar ninguna integración de volumen o superficie, o
- Cualquier integración de volumen o superficie debiera ser independiente del procedimiento de interpolación escogido.

A partir de los puntos señalados anteriormente se pueden destacar los aspectos comunes e importantes para considerar a un método como sin malla, estos aspectos claves son: discretización de la función incógnita, función de ponderación, procedimiento de interpolación; e incorpora la posible utilización de una malla de fondo.

1.5. Conclusiones

En este capítulo se pudo estudiar el desarrollo de los métodos sin malla hasta el surgimiento del MPF. Además se aprecian cuales son las principales ventajas que proporciona la ausencia de malla. Y por último se vieron las características fundamentales para considerar a un método como sin malla. Con lo expuesto anteriormente se encamina a la formulación de los métodos sin malla y en particular del MPF, que es un método que carece completamente de algún tipo de malla, lo que transforma su formulación en un auténtico método sin malla.

Capítulo 2: Formulación del Método de Puntos Finitos

2.1. Introducción

En este capítulo se exponen de forma pormenorizada los conceptos teóricos de la formulación del MPF que permitirán comprender su funcionamiento y su posterior implementación, para la resolución de diversos problemas de contorno. Este método consta esencialmente de dos etapas fundamentales, las cuales se muestran a continuación:

1. Obtención de las funciones de forma que definen la función aproximante por el método de mínimos cuadrados ponderados con función de ponderación fija.
2. Discretización de las ecuaciones de gobierno por el método de colocación puntual.

Además se abordan algunas propiedades de la aproximación mínimos cuadrados ponderados fijos, y por último la convergencia del Método de Puntos Finitos.

A continuación se abordan los aspectos teóricos fundamentales del MPF.

2.2. Método de Puntos Finitos

Sea la ecuación diferencial

$$A(u(x)) = f(x) \quad x \in \Omega \quad (2.1)$$

Con las condiciones de contorno

$$B(u(x)) = g(x) \quad x \in \Gamma \quad (2.2)$$

En (2.1) y (2.2), A y B son operadores diferenciales, $u(x)$ es la incógnita de este problema, y $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones que representan las acciones sobre el dominio Ω (de contorno Γ) y a lo largo del contorno Γ respectivamente.

Para darle solución a este problema aplicando el Método de Puntos Finitos deben tenerse en cuenta los siguientes aspectos:

- La discretización del dominio de solución mediante una colección de puntos equiespaciados o arbitrariamente distribuidos.
- La generación de las *nubes de puntos* a partir de los puntos obtenidos de la discretización. Y a partir de estas, la obtención de los correspondientes *subdominios de influencia*.
- La función de ponderación a utilizar.
- La obtención de las funciones de forma aplicando el Método de Mínimos Cuadrados Ponderados Fijos (MMCPF) en cada *subdominio de influencia*. Obteniendo de esta manera la aproximación en forma local.
- La aplicación del método de colocación puntual, para la resolución del problema de contorno planteado inicialmente.

A continuación se muestran en detalles cada uno de estos aspectos.

2.2.1. Obtención de la función aproximante en el MPF

En el MPF al igual que en todos los métodos sin malla se busca una aproximación $\tilde{u}(x)$ a una función escalar $u(x)$ en un dominio cerrado $\Omega \subset R^n$. Para lograrlo, en primer lugar, el dominio se discretiza a través de un subconjunto finito de puntos $T = \{x_1, x_2, \dots, x_M\}$, donde M es el número total de puntos. A continuación se explica como se realiza este proceso.

2.2.1.1. Discretización del dominio

El proceso de discretización del dominio de solución se realiza fundamentalmente de dos maneras:

1. Determinista
2. Estocástica

La primera de ellas incluye distribuciones de puntos estructuradas y homogéneas, las cuales presentan algún tipo de uniformidad entre los nodos, ver (Sacco, 2002). La segunda se refiere a distribuciones de puntos totalmente aleatorias, que son llevadas a la práctica con el uso de la computación.

En la actualidad muchos investigadores realizan la discretización del dominio a través del preproceso de algunos programas comerciales como el GID, que es uno de los más usados, ver (Aranda, 2006).

En el caso de los problemas unidimensionales la discretización suele ser mucho más sencilla, ya que de forma general se requiere de la generación de puntos en un intervalo. En este caso cualquiera de las dos formas de generación se realiza muy fácilmente. Al igual que cuando se trata de un dominio con una forma conocida, por ejemplo en 2D: un cuadrado, un círculo, una elipse, cualquier curva cerrada, etc.; en 3D: un cubo, una esfera, un cilindro, un elipsoide, cualquier superficie cerrada, etc. En estos casos la generación se realiza con mayor facilidad, que cuando se trata de un dominio arbitrario.

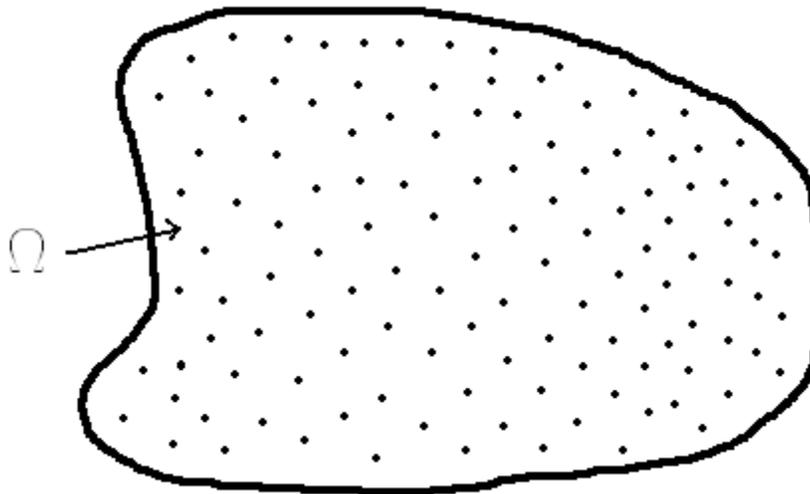


Figura 2.1: Discretización de un dominio arbitrario.

Una vez obtenido este subconjunto finito de puntos el próximo paso es la generación de nubes con vistas a construir un *cubrimiento localmente finito* formado por las bolas obtenidas a partir de estas nubes de puntos, las cuales deben ser relativamente pequeñas en comparación con el dominio del problema. Para ganar en claridad a continuación se puede ver como se procede en la generación de las nubes de puntos.

2.2.1.2. Generación de nube de puntos

Para abordar el tema de la generación de las nubes es necesario conocer primeramente, que es una nube de puntos, por este motivo se elabora la siguiente definición:

Definición 1:

Sea (X, d) un *espacio métrico*, Ω subconjunto cerrado de X , $T = \{x_1, x_2, \dots, x_M\}$ un subconjunto finito de Ω , entonces se llamará *nube de puntos* al subconjunto de T , que contiene a los np puntos más cercanos al punto $x_l \in T$ incluyéndolo a él, y se denota por $Q(x_l)$, es decir,

$$Q(x_l) = \{x \in T : d(x, x_l) < \varepsilon_l\}, \text{ donde } \varepsilon_l \in R_+ : |Q(x_l)| = np \ll M = |T|.$$

La generación de las nubes resulta uno de los puntos claves de los métodos sin malla. Este proceso debe realizarse de manera eficiente y rápida, ya que del mismo dependerán en gran medida, las ventajas de este tipo de métodos frente a los métodos que utilizan mallas.

Las nubes resultantes deben ser tales que garanticen la convergencia global de las aproximaciones por mínimos cuadrados, para la obtención de las funciones de forma.

Intuitivamente y a pesar de no ser fácilmente cuantificables, se pueden establecer ciertos razonamientos para conformar una nube de buena calidad (Perazzo, 2002), por ejemplo:

1. El nodo estrella completamente rodeado por los demás nodos de la nube.
2. El centro de gravedad de la nube lo más cercano posible al nodo estrella.

Inicialmente y por ser fácil de implementar se probó un algoritmo de búsqueda y generación de nubes basado en el criterio de la mínima distancia (Jensen, 1972), en el cual, los puntos que conforman la nube, quedan dentro de un círculo de radio r_l y centrado en el nodo estrella.

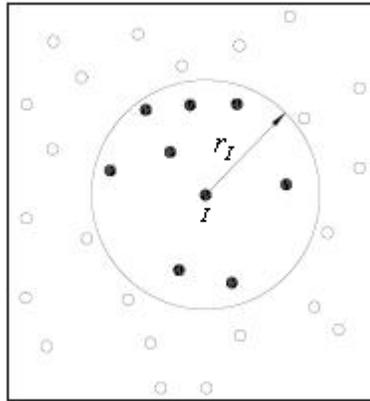


Figura 2.2: Criterio de la mínima distancia.

Este método tiene la desventaja de que el procedimiento de generación de nubes depende en gran medida de la densidad de los puntos, esto puede traer consigo la obtención de mala calidad, lo cual propicia un ajuste local deficiente y por consiguiente resultados poco precisos. Pero a pesar de esto actualmente éste es uno de los métodos más utilizados en la resolución de problemas unidimensionales.

Otros métodos son el “eight segment criterion” (Perrone & Kao, 1975), el “four quadrant criterion” (Liszka & Orkisz, 1980) con estos dos se pueden obtener nubes de mejor calidad, sin embargo, para minimizar la falta de simetría de las nubes y con vistas a obtener buenos resultados, estos métodos deben ser modificados cuando se aplican en el contorno (Liszka et al., 1996).

El algoritmo más utilizado para obtener nubes de puntos (en 2D y 3D) es el basado en la triangulación local de Delaunay (Perazzo, 2002) y (Sacco, 2002), técnica que relaciona a cada punto con sus vecinos más cercanos de forma óptima para la aplicación del Método de Elementos Finitos. Para aprovechar esta cualidad se propuso utilizar esta técnica para la construcción de nubes.

Los pasos necesarios para la generación de nubes en el interior del dominio que se muestran en la figura (2.3), son:

1. Definir un sistema local de ejes cartesianos, centrado en el nodo estrella, para identificar los puntos más próximos al origen por cada cuadrante, ver figura (2.3a).
2. Formar con el nodo estrella los cuatro triángulos iniciales para la búsqueda de puntos, ver figura (2.3b).
3. Verificar que la red de los cuatro triángulos formada es una triangulación de Delaunay, es decir, si todas las circunferencias circunscritas de todos los triángulos de la red son vacías, o que no contienen otros vértices aparte de los tres que la definen. Si esto se cumple, pasar al paso 4, sino, eliminar el punto que incumple con esta condición y luego seguir con el paso 4.
4. Para cada triángulo generado se traza la circunferencia circunscrita comprobándose si existe algún punto adicional en su interior, en caso de existir uno o más, se elimina el triángulo inicial y se forman dos nuevos con el punto más cercano al nodo estrella, ver figura (2.3c y 2.3d). Esta operación se repite hasta que finalmente ningún círculo contenga puntos adicionales en su interior, ver figura (2.3e y 2.3f).
5. Se genera la nube del nodo estrella con los puntos obtenidos a partir de la triangulación.
6. Si la cantidad de puntos no es suficiente, o si la calidad de la nube no es la adecuada, agrega una segunda capa puntos, obtenidos de las nubes de cada uno de los puntos que forman la misma.

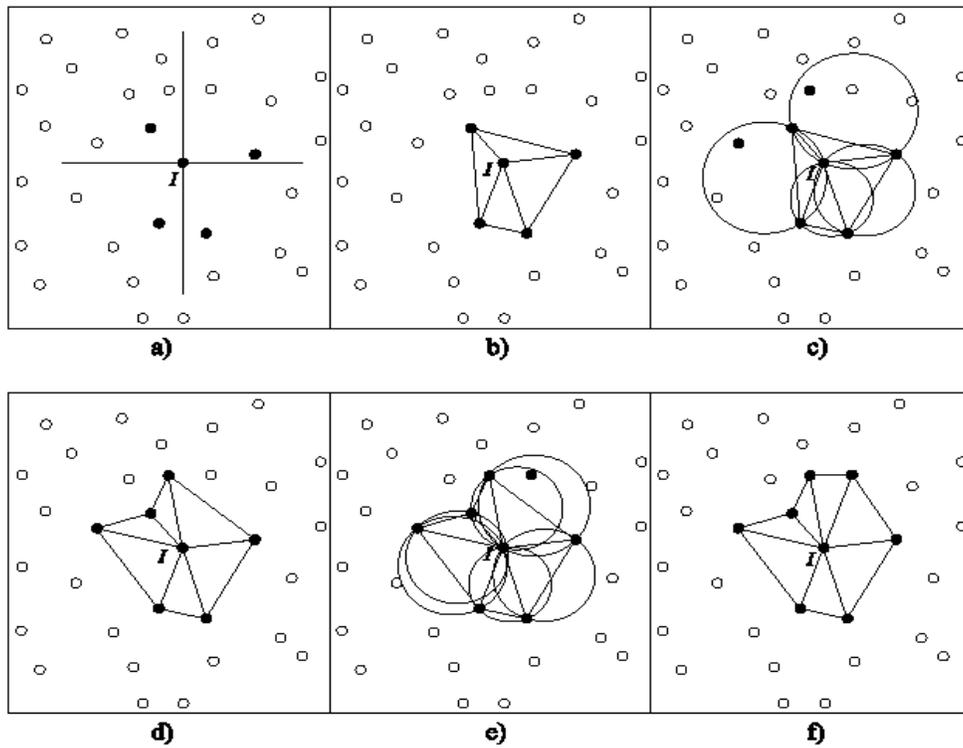


Figura 2.3: Generación de nubes en el interior del dominio mediante la triangulación de Delaunay.

Para generar las nubes en el contorno, se puede emplear el procedimiento anterior pero poniendo atención a la generación inicial de los triángulos, entonces los pasos a seguir serían:

1. Seleccionar dos puntos adicionales al nodo estrella, que pertenezcan al mismo contorno (uno hacia cada lado) y buscar los nodos más cercanos por cuadrante, ver figura (2.4a).
2. Formar con el nodo estrella los tres triángulos iniciales para la búsqueda de puntos, ver figura (2.4b).
3. Para cada triángulo generado se traza la circunferencia circunscrita comprobándose si existe algún punto adicional en su interior, en caso de existir uno o más, se elimina el triángulo inicial y se forman dos nuevos con el punto más cercano al nodo estrella, ver figura (2.4c y 2.4d).

4. En caso de no existir nodos adicionales, se van agregando nodos a partir de las nubes de los puntos del interior, ver figura (2.4e).
5. Si la nube obtenida tiene la cantidad de puntos deseada, terminar, sino, volver al paso 3.

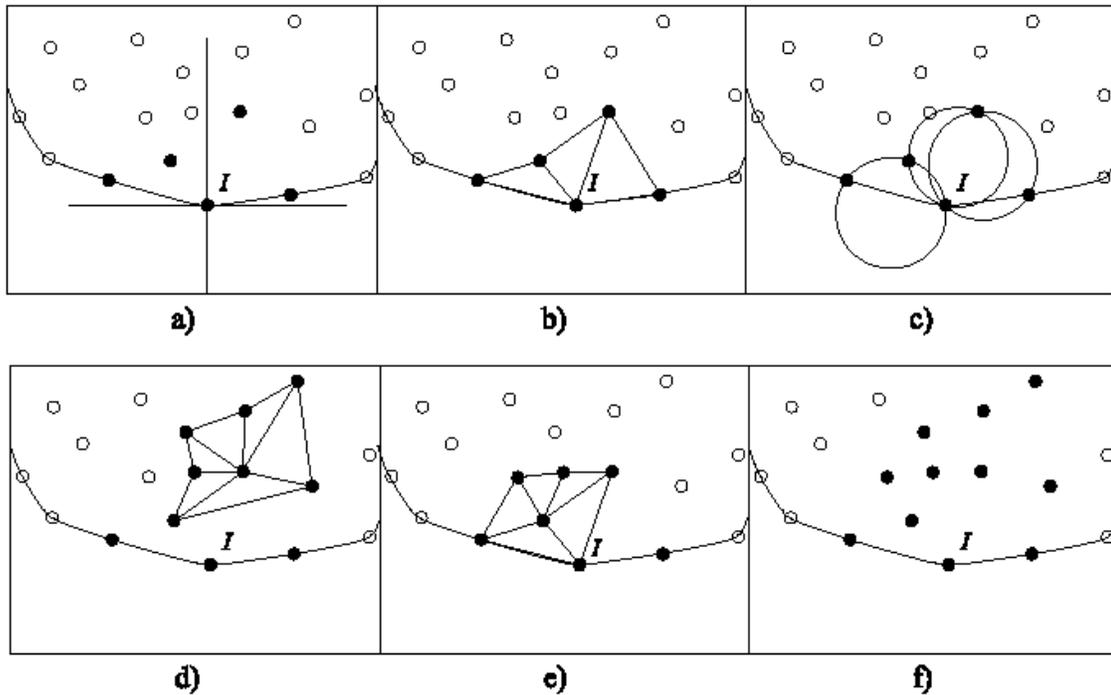


Figura 2.4: Generación de nubes en el contorno mediante la triangulación de Delaunay.

Es importante destacar que con este método la nube que se obtiene es independiente de los puntos elegidos inicialmente, y además es única.

El método de generación de nubes mediante la triangulación de Delaunay, resuelve efectivamente los problemas que presenta el método de búsqueda mediante la mínima distancia, tanto si se trata de discretizaciones en forma irregular como regular. A diferencia de otras técnicas, la triangulación de Delaunay permite obtener en estos casos la nube sin necesidad de modificar el algoritmo.

Después de haber obtenido para cada punto $x_I \in T$ su correspondiente nube de puntos $Q(x_I)$, se puede detallar lo referido a las bolas definidas a partir de las nubes obtenidas, y que formarán parte del cubrimiento de Ω , usado para definir la función de aproximación buscada en forma local. En lo que resta de este trabajo estas bolas se denominarán *subdominios de influencia*, este nombre se debe a que serán tomadas como *sopORTE* de ciertas funciones de peso (o *funciones de ponderación*), las cuales son las encargadas de conferirle el carácter local a la aproximación y de ponderar el error cometido en la aproximación, dándole mayor importancia a los puntos más cercanos a x_I (nodo estrella). Por este motivo estas bolas tienen influencia en la aproximación buscada. Estos aspectos se pueden ver en detalles a continuación.

2.2.1.3. Subdominios de influencia y funciones de ponderación

Esta sección está dedicada a la profundización de los conceptos de *subdominio de influencia* y de *función de ponderación*. Primeramente se puede apreciar la definición de *subdominio de influencia* elaborada por el autor.

Definición 2:

Sea (X, d) un *espacio métrico*, $\Omega \subset X$ cerrado y $T = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ un subconjunto finito de Ω y $Q(x_I)$ *nube de puntos* de $x_I \in T$, entonces se llamará *subdominio de influencia* a la *bola abierta*:

$$\Omega_I = B_d(x_I, r_I) = \{x \in \Omega : d(x, x_I) < r_I\}$$

Donde r_I se denomina *radio de influencia* y está definido por la distancia de x_I al punto más alejado de la nube, o sea,

$$r_I = \gamma \max_{x_j \in Q_I} \{d(x_I, x_j)\}$$

Donde $\gamma = 1 + \frac{x}{100}$ y x es el % en el que se quiere aumentar la distancia entre el nodo estrella y el punto más alejado de la nube, para que éste no pertenezca al contorno del

subdominio, garantizando que todos los puntos de la nube $Q(x_I)$ tengan ponderación no nula.

De las definiciones (1) y (2) se desprende la siguiente relación, cuya demostración es evidente:

$$Q(x_I) \subset \Omega_I \subset \Omega \quad (2.1)$$

Es importante destacar que la forma de estos subdominios de influencia depende en gran medida de la métrica o distancia que se utilice. Si se trabaja con la distancia euclidiana adquieren una forma circular en 2D ver figura (2.5) y de esfera en 3D, lo que se puede plantear como:

$$d_2(x, y) = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2}, \quad x, y \in R^n \quad (2.2)$$

Por otra parte si se trabaja con otra distancia como:

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} \{ |x_i - y_i| \}, \quad x, y \in R^n \quad (2.3)$$

Entonces los *subdominios de influencia* toman una forma cuadrada en 2D y de cubo en 3D. Un resultado conocido del Análisis Matemático es que R^n con la distancia euclidiana es un *espacio métrico*, con la norma euclidiana es un *espacio normado* y con un producto escalar es un *espacio prehilbertiano*. Además como R^n es un espacio de dimensión finita entonces es de Hilbert, luego (R^n, d) es un espacio métrico completo, donde se cumple la siguiente relación: $d(x, y) = \|x - y\| = [(x - y, x - y)]^{1/2}$.

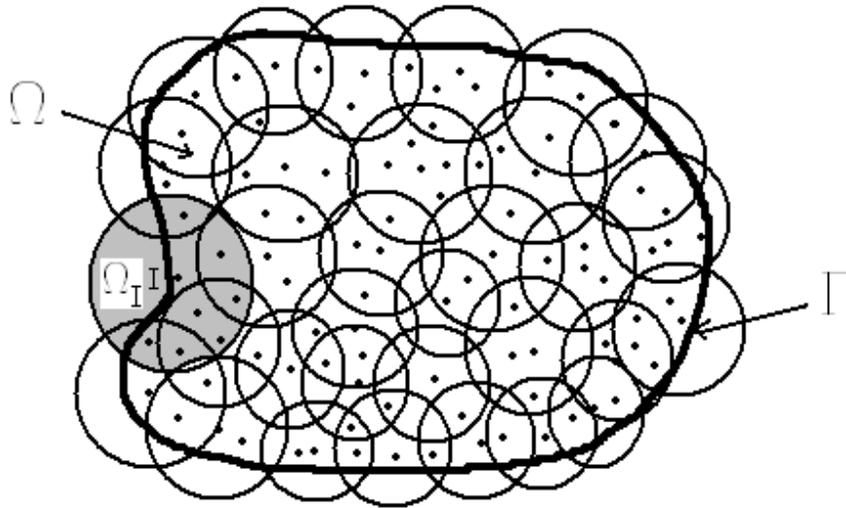


Figura 2.5: Discretización a través de *subdominios de influencia* circulares.

Después de haber visto que cosa es un subdominio de influencia y alguna de las formas posibles que puede tomar, se puede pasar a la definición de función de ponderación y sus propiedades.

En general una función de ponderación tiene como objetivo asignar diferentes grados de importancia a las aproximaciones en ciertas partes del dominio.

Definición 3:

Sea $\varphi_I : \Omega \subset R^n \rightarrow [0, 1]$ tal que $\varphi_I \in C^l(\Omega)$, se dice que φ_I es una *función de ponderación* en Ω si cumple:

- i) $\varphi(x) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega$
- ii) $\varphi(x) \neq 0, \quad \forall x \in \Omega_I \subset \Omega$, donde Ω_I es el subdominio correspondiente a φ_I .
- iii) $\varphi_I(x) \leq \varphi_I(x_I) = 1, \quad \forall x \in \Omega_I$

En un principio la elección de la función de ponderación es arbitraria y su construcción se realiza de modo que tome valor máximo en un entorno o vecindad del punto x_I , donde se desea evaluar la aproximación, con tendencia a ser decreciente a medida que se

aleja de x_I , anulándose en la frontera y fuera del *subdominio de influencia* que la determina.

$$\varphi_I(x) = \begin{cases} 1 & d_I = 0 \\ \varphi(d_I, r_I) & 0 \leq d_I < r_I \\ 0 & d_I \geq r_I \end{cases} \quad (2.4)$$

Donde $d_I = \|x - x_I\|$ y r_I es el *radio de influencia*.

Propiedades deseables de las funciones de ponderación:

Las funciones de ponderación, para ser utilizadas con éxito en la obtención de las funciones de forma, deben cumplir las siguientes propiedades:

- i) $\varphi(d_I, r_I)$ es monótona decreciente.
- ii) $\varphi(d_I, r_I) \rightarrow \delta(d_I), r_I \rightarrow 0$
- iii) $\varphi(d_I, r_I) \rightarrow 1, r_I \rightarrow \infty$

La primera de estas propiedades indica que los pesos son simétricos con respecto al nodo estrella y que la influencia de los vecinos aumentará a medida que disminuye la distancia respecto al mismo. La segunda se refiere a que cuando el tamaño del subdominio de influencia es demasiado pequeño, la función de ponderación tiene un comportamiento similar a la función delta de Dirac, aumentando la importancia de los puntos más cercanos al nodo estrella. La tercera propiedad indica que la función está acotada superiormente por uno.

Ejemplos de funciones de ponderación:

1. Función cónica:

$$\varphi(d_I, r_I) = 1 - (d_I / r_I)^k$$

2. Función gaussiana:

$$\varphi(d_I, r_I) = \frac{\text{Exp}[-(d_I / \beta_I)^k] - \text{Exp}[-(r_I / \beta_I)^k]}{1 - \text{Exp}[-(r_I / \beta_I)^k]}$$

3. Función senoidal:

$$\varphi(d_I, r_I) = \frac{1}{2} (1 + \text{Cos}[\pi \frac{d_I}{r_I}])$$

4. Función spline de 4to orden:

$$\varphi(d_I, r_I) = 1 - 6 (d_I / r_I)^2 + 8 (d_I / r_I)^3 - 3 (d_I / r_I)^4$$

Donde k es un entero positivo y en el caso de la función gaussiana $\beta_I = c r_I$ (según Oñate), con $c = 0.5$. El parámetro β_I se le denomina *factor de apuntamiento*.

Obtención de la función de ponderación cónica en 1D

Se busca una función $\varphi : R \rightarrow R$, que cumpla con las propiedades antes expuestas (i-iii). Suponiendo que además cumpla la propiedad de que sea cóncava en todo su dominio, es decir:

$$d^2 \varphi(x) \leq 0, \quad \forall x \in R$$

Se obtiene que

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} < 0 \Rightarrow \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} = -k \quad x \in R, k \in R^+$$

Por otra parte, de la propiedad iii), y partiendo de que la función tiene un máximo en x_I , entonces

$$\varphi(x_I) = 1$$

$$\frac{d\varphi(x_I)}{dx} = 0$$

Luego se llega a una ecuación diferencial ordinaria con sus respectivas condiciones de contorno:

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} = -k \quad x \in R$$

$$\varphi(x) = 1 \quad x = x_I$$

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = 0 \quad x = x_I$$

Cuya solución es:

$$\varphi(x) = 1 - \frac{k}{2}(x - x_I)^2 \quad (2.5)$$

Y por último se buscan los puntos donde la función corta al eje de las abscisas, para determinar el intervalo donde la función es positiva:

$$0 = 1 - \frac{k}{2}(x - x_I)^2$$

$$x = x_I \pm \sqrt{\frac{2}{k}}$$

Tomando $r = \sqrt{\frac{2}{k}}$, despejando k y sustituyendo en la ecuación (1) quedando un caso particular de la función de ponderación cónica expuesta en los ejemplos:

$$\varphi(x) = 1 - \left(\frac{x - x_I}{r}\right)^2$$

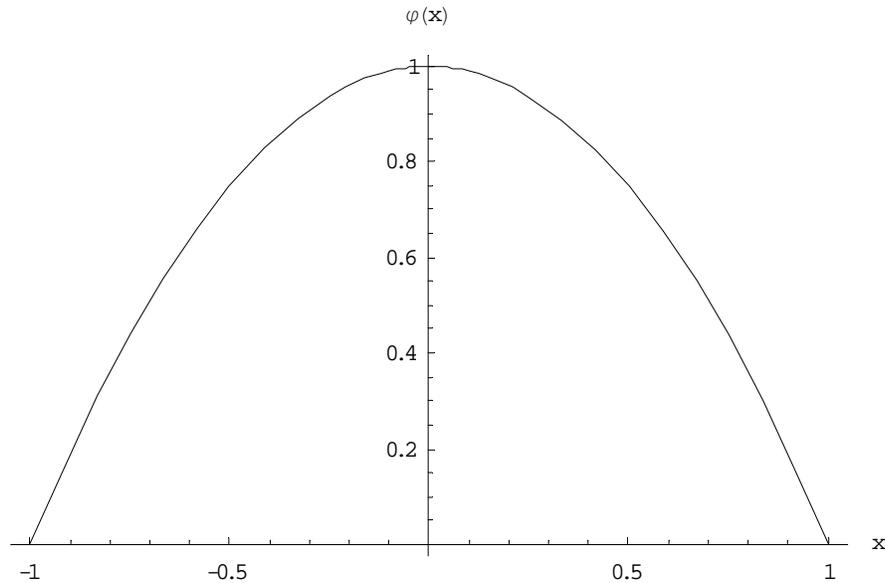


Figura 2.6: Función de ponderación cónica con $x_I = 0$ y $r = 1$.

Una vez discretizado el dominio Ω en un subconjunto finito de puntos $T = \{x_1, x_2, \dots, x_M\}$, obtenidas las nubes $Q(x_I)$ y los subdominios Ω_I para cada punto,

generándose $F = \{\Omega_I\}_{I=1}^M$ un cubrimiento localmente finito de Ω . Se puede obtener la aproximación mediante la siguiente combinación de funciones:

$$u(x) \cong \tilde{u}(x) = \sum_{I=1}^M N_I(x) u_I^h \quad (2.6)$$

Donde u_I^h es el valor aproximado de la función $u(x)$ en el punto x_I y donde las funciones $N_I(x)$ son denominadas indistintamente funciones de prueba o funciones de forma y están intrínsecamente definidas de forma local a través de las funciones de ponderación para cada Ω_I , cumpliéndose:

$$\begin{aligned} N_I(x) &\neq 0 & x \in \Omega_I \\ N_I(x) &= 0 & x \notin \Omega_I \end{aligned} \quad (2.7)$$

En cada *subdominio de influencia* Ω_I se plantea la función de aproximante $\tilde{u}(x)$ de la función $u(x)$ en forma local, de manera que:

$$u(x) \cong \tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x) \alpha_j = p^T(x) \alpha \quad (2.8)$$

Donde m es el número de términos de la *base de aproximación*, $p(x)$ es el vector que contiene las m funciones de la base y α es el vector de coeficientes desconocidos que multiplica a cada uno de los términos de la base.

Seguidamente se trata con profundidad el tema de las bases de aproximación.

2.2.1.4. Bases de aproximación

En la construcción de la función aproximante $\tilde{u}(x)$ en forma local interviene una determinada base de funciones de dimensión m , la cual puede definirse de la siguiente manera:

Definición 4:

Se dice que el conjunto de funciones $\{p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)\}$ es una base de aproximación en Ω_I si cumple las siguientes propiedades:

- i) $p_1 \equiv 1$.
- ii) $p_i \in C^k(\Omega_I)$, $i = 1, \dots, m$.
- iii) $\{p_i\}_{i=1}^m$ es linealmente independiente en Ω_I .

Habitualmente las más usadas son las bases polinómicas, por su flexibilidad y simplicidad. A continuación se pueden ver algunos ejemplos:

- En una dimensión:

$$p^T(x) = (1 \ x) \Rightarrow m = 2$$

$$p^T(x) = (1 \ x \ x^2) \Rightarrow m = 3$$

- En dos dimensiones:

$$p^T(x, y) = (1 \ x \ y) \Rightarrow m = 3$$

$$p^T(x, y) = (1 \ x \ y \ x y \ x^2 \ y^2) \Rightarrow m = 6$$

- En tres dimensiones:

$$p^T(x, y, z) = (1 \ x \ y \ z) \Rightarrow m = 4$$

$$p^T(x, y, z) = (1 \ x \ y \ z \ x y \ x z \ y z \ x^2 \ y^2 \ z^2) \Rightarrow m = 10$$

El criterio para la utilización de algún polinomio en particular se realiza en base a la necesidad de las derivadas de la función de forma, que a su vez es impuesta por el sistema de ecuaciones diferenciales que define el problema y por otro lado la dimensión espacial que presenta el modelo geométrico, esta sea 1D, 2D ó 3D, ver (Aranda, 2006).

Existen otros tipos de bases de aproximación, que pueden reproducir singularidades o discontinuidades y/o acelerar la convergencia en determinados problemas, como es el caso de mecánica de fractura (Cueto-Felgueroso, 2002), (Martin, 2006). Bases bidimensionales tales como:

$$p^T(x) = \left(1 \ x \ y \ \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \ \sqrt{r} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \ \sqrt{r} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \theta \ \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \theta \right)$$

2.2.1.5. Obtención de las funciones de forma

Es importante destacar que para la obtención de las funciones de forma se deben tener en cuenta tres casos:

Caso1:

Cuando $|Q(x_I)| = np = m = |p^T(x)|$ se está en presencia de una interpolación, que es precisamente lo que se hace en el Método de Elemento Finito. En este caso se procede de la siguiente manera:

Como $np = m$ se obtiene que

$$u(x) \cong \tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^{np} p_j(x) \alpha_j = p^T(x) \alpha \quad (2.9)$$

Y evaluando en los np puntos de la nube se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} u(x_1) \\ \vdots \\ u(x_{np}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{np} \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \tilde{u}(x_1) \\ \vdots \\ \tilde{u}(x_{np}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{np} p_j(x_1) \alpha_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{np} p_j(x_{np}) \alpha_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(x_1) & \dots & p_{np}(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(x_{np}) & \dots & p_{np}(x_{np}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{np} \end{pmatrix}$$

O sea

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{np} \end{pmatrix}}_u = \underbrace{\begin{pmatrix} p_1(x_1) & \dots & p_{np}(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(x_{np}) & \dots & p_{np}(x_{np}) \end{pmatrix}}_{P^T} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{np} \end{pmatrix}}_\alpha \quad (2.10)$$

En forma compacta

$$u = P^T \alpha \quad (2.11)$$

Si P^T es no singular entonces

$$\alpha = (P^T)^{-1} u \quad (2.12)$$

Sustituyendo (2.12) en (2.8) se obtiene

$$\tilde{u}(x) = p^T(x) \alpha = p^T(x) (P^T)^{-1} u \quad (2.13)$$

Y comparando (2.13) con (2.6) se tiene que

$$N^T(x) = p^T(x)(P^T)^{-1} \quad x \in \Omega_I \quad (2.14)$$

Donde $N^T(x)$ se puede escribir como

$$N^T(x) = \underbrace{\{N_1(x), \dots, N_{np}(x)\}}_{\text{funciones de forma}}$$

Observación:

Estas funciones son las que se utilizan en el Método de Elementos Finitos y cumplen con la condición estándar de interpolación (Sacco, 2002), es decir,

$$N_k(x_j) = \delta_{kj} = \begin{cases} 1; & \text{si } k = j \\ 0; & \text{si } k \neq j \end{cases}, \text{ para } k, j = 1 \dots np$$

Esto implica que la solución aproximada pasa por los puntos del dominio, y por lo tanto

$$\tilde{u}(x_j) = N^T(x_j) u = \sum_{k=1}^{np} N_k(x_j) u_k = u_j$$

Para profundizar en las propiedades de este tipo de aproximación ver (Zienkiewics y Taylor, 2003).

A continuación se muestra un ejemplo del proceso descrito anteriormente.

Ejemplo1:

Sean:

Punto estrella x_1

$$p^T = [1 \quad x] \Rightarrow m = 2$$

$$Q_1 = \{x_1, x_2\} \Rightarrow np = 2, \text{ donde } x_1 = 3 \quad x_2 = 4$$

Hallar $N^T(x)$.

Solución:

$$P^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{Det}(P^T) = 4 - 3 = 1 \neq 0 \Rightarrow P^T \text{ inversible}$$

$$(P^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N^T(x) = p^T(x)(P^T)^{-1} = (1 \quad x) \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (4-x \quad x-3)$$

Donde se verifica que:

$$\begin{aligned} N_1^1(x_1) &= 1 & N_2^1(x_1) &= 0 \\ N_1^1(x_2) &= 0 & N_2^1(x_2) &= 1 \end{aligned}$$

Las funciones de formas cumplen la condición estándar de interpolación (Sacco, 2002).

Caso2:

Cuando $np > m$, que es lo más común en la práctica. En este caso se requiere de la aplicación del método de mínimos cuadrados, específicamente en MPF se usa el Método de Mínimos Cuadrados Ponderados Fijos (MCPF).

Una aproximación por mínimos cuadrados busca ajustar una curva o polinomio a los valores discretos de una función en un conjunto de puntos dados, de forma que minimice el error global cometido en la aproximación.

Esta técnica ha sido utilizada en la resolución numérica de problemas de mecánica de sólidos y fluidos (Nay & Utku, 1972) (Liszka & Orkisz, 1984) (Batina, 1993), para aproximar el campo desconocido o la incógnita a través de unos valores nodales. Sin embargo, tal como se demuestra en (Oñate et al., 1995), el éxito de esta aproximación presenta una restricción o inconveniente. La aproximación se deteriora rápidamente en la medida que el número de puntos utilizados en el ajuste local, np , aumenta demasiado respecto al número de términos en la *base de aproximación*, m . Para evitar este problema se recurre al uso de una *función de ponderación* $\varphi_l(x)$, que permite mejorar la aproximación, en nuestro caso en una vecindad del punto x_l , donde se quiere evaluar la función o su derivada.

Esta función de ponderación se toma de forma tal que toma su máximo valor en el nodo estrella ($\varphi_l(x_l) = 1$) y va decreciendo a medida que se aleja de él.

Entonces se plantea un funcional que minimice el error ponderado mediante la función de ponderación $\varphi_l(x)$ mencionada anteriormente. Ahora, en la expresión del funcional interviene la función de ponderación, como se indica seguidamente:

$$J(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \sum_{j \in Q_l} \varphi_l(x_j) [u(x_j) - \tilde{u}(x_j)]^2 = \sum_{j \in Q_l} \varphi_l(x_j) \left[u(x_j) - \sum_{i=1}^m p_i(x_j) \alpha_i \right]^2$$

Efectuando, derivando parcialmente con respecto a cada α_i , $i = 1, \dots, m$ e imponiendo la condición de que esta derivada sea igual a cero se llega a la expresión:

$$\sum_{j \in Q_l} p_l(x_j) \varphi_l(x_j) u(x_j) = \sum_{j \in Q_l} \sum_{i=1}^m p_l(x_j) \varphi_l(x_j) p_i(x_j) \alpha_i \quad (2.15)$$

la cual escrita en forma matricial queda:

$$P\Phi u = P\Phi P^T \alpha \quad (2.16)$$

donde

$$P = \begin{pmatrix} p_1(x_1) & \dots & p_1(x_{np}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_m(x_1) & \dots & p_m(x_{np}) \end{pmatrix} \quad \Phi = \begin{pmatrix} \varphi_l(x_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \varphi_l(x_{np}) \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} u(x_1) \\ \vdots \\ u(x_{np}) \end{pmatrix} \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$$

Luego si $P\Phi P^T$ es no singular

$$\alpha = (P\Phi P^T)^{-1} P\Phi u \quad (2.17)$$

Sustituyendo (2.17) en (2.8) se tiene:

$$\tilde{u}(x) = \underbrace{p^T(x)(P\Phi P^T)^{-1} P\Phi}_{N^T(x)} u = N^T(x) u$$

Luego

$$N^T(x) = p^T(x)(P\Phi P^T)^{-1} P\Phi \quad (2.18)$$

Propiedades de la aproximación por MMCPF.

Las funciones obtenidas mediante el método de Mínimos Cuadrados Fijos solo son válidas en un entorno del punto estrella, esto es consecuencia directa de haber fijado la función de ponderación a dicho punto.

Otra característica de la aproximación es que cualquier punto arbitrario $x_k \in \Omega_I$, estará multievaluado, tanto en la función misma como en sus derivadas.

Esta aproximación cumple, aunque en forma local, con las propiedades de Existencia y Consistencia del MLS, sin embargo no puede brindar una solución globalmente continua ni siquiera en el dominio de influencia.

Existencia de la aproximación

La existencia y unicidad de la aproximación por Mínimos Cuadrados Ponderados Fijos está garantizada por el siguiente teorema:

Teorema 2 (D. González):

La matriz $P\Phi P^T$ en la ecuación (2.16) es definida positiva $\forall x_I \in T$ y los coeficientes α_i en (2.8) están unívocamente determinados.

Demostración:

$$P\Phi P^T = \begin{pmatrix} p_1(x_1) & \dots & p_1(x_{np}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_m(x_1) & \dots & p_m(x_{np}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_I(x_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \varphi_I(x_{np}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(x_1) & \dots & p_m(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(x_{np}) & \dots & p_m(x_{np}) \end{pmatrix}$$

Las filas de P son linealmente por hipótesis, así se tiene que $\text{rang}(P) = m$ y $\text{rang}(P^T) = m$. También Φ es definida positiva, ya que $\varphi_I(x) > 0$, $\forall x \in \Omega_I$. Esto implica que $P\Phi P^T$ es definida positiva.

Obtención de las derivadas

La derivada parcial de la función de forma, en la aproximación obtenida mediante el MMCPF, se obtiene derivando solamente los términos de la base de aproximación debido a que los coeficientes α son constantes en cada subdominio. Como consecuencia de ello el orden de derivabilidad depende exclusivamente de la base de aproximación, o

sea, si $p_i \in C^k(\Omega)$, $i = 1, \dots, m$, entonces $N_I(x) \in C^k(\Omega)$, $I = 1, \dots, M$. Utilizando una base de aproximación polinómica, se obtiene que $N_I(x) \in C^\infty(\Omega)$, $I = 1, \dots, M$.

Dada la aproximación de las incógnitas mediante la ecuación

$$\tilde{u}(x) = N^T(x) u^h \quad \forall x \in \Omega_I$$

Su derivada es

$$\frac{\partial^k \tilde{u}(x)}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} = \left[\frac{\partial^k p^T(x)}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \right] (P\Phi P^T)^{-1} P\Phi u^h, \quad k = i_1 + \dots + i_n$$

Y para 1D queda

$$\frac{\partial^k \tilde{u}(x)}{\partial x^k} = \left[\frac{\partial^k p^T(x)}{\partial x^k} \right] (P\Phi P^T)^{-1} P\Phi u^h$$

Donde k es el orden de la derivada.

El siguiente ejemplo ilustra el proceso de obtención de las funciones de forma por el método de mínimos cuadrados ponderados fijos.

Ejemplo 2:

Sean:

Punto estrella x_1

$$p^T = [1 \quad x \quad x^2] \Rightarrow m = 3$$

$$Q_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \Rightarrow np = 5$$

$$\text{Donde } x_1 = 0 \quad x_2 = 0.125 \quad x_3 = 0.25 \quad x_4 = 0.375 \quad x_5 = 0.5$$

Función de ponderación gaussiana, de parámetros $k = 2 \quad \gamma = 1.1 \quad c = 0.25$

Hallar $N^T(x)$.

Solución:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.125 & 0.25 & 0.375 & 0.5 \\ 0 & 0.15625 & 0.0625 & 0.140625 & 0.25 \end{pmatrix}; \quad P^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0.125 & 0.15625 \\ 1 & 0.25 & 0.0625 \\ 1 & 0.375 & 0.140625 \\ 1 & 0.5 & 0.25 \end{pmatrix};$$

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} -1.12535 \times 10^{-7} + \text{Exp}[-52.8926 x^2] & |x| < 5.5 \\ 0 & |x| \geq 5.5 \end{cases}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.467302 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0366703 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.588339 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.69573 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

$$P\Phi P^T = \begin{pmatrix} 1.47486 & 0.0640892 & 0.00921258 \\ 0.0640892 & 0.00921258 & 0.0014589 \\ 0.00921258 & 0.0014589 & 0.00026182 \end{pmatrix}; \quad \text{Det}(P\Phi P^T) = 2.83794 \times 10^{-7}$$

$$(P\Phi P^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.999479 & -11.7678 & 30.4035 \\ -11.7678 & 1061.61 & -5501.36 \\ 30.4035 & -5501.36 & 33404 \end{pmatrix};$$

$$(P\Phi P^T)^{-1} P\Phi = \begin{pmatrix} 0.999479 & 1.5584 \times 10^{-3} & -1.54918 \times 10^{-3} & 0.507181 \times 10^{-3} & 4.60641 \times 10^{-6} \\ -11.7678 & 15.3048 & -3.30771 & -0.22786 & -1.45207 \times 10^{-3} \\ 30.4035 & -59.2201 & 27.2392 & 1.56783 & 0.954822 \times 10^{-2} \end{pmatrix}$$

$$N^1(x) = \begin{pmatrix} N_1^1(x) \\ N_2^1(x) \\ N_3^1(x) \\ N_4^1(x) \\ N_5^1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.999479 - 11.7678 x + 30.4035 x^2 \\ 0.0015584 + 15.3048 x - 59.2201 x^2 \\ -0.00154918 - 3.30771 x + 27.2392 x^2 \\ 0.000507181 - 0.22786 x + 1.56783 x^2 \\ 4.60641 \times 10^{-6} - 0.00145207 x + 0.00954822 x^2 \end{pmatrix}$$

Observación:

$$N_1^1(x_1) = 0.999479$$

$$N_2^1(x_1) = 0.0015584$$

$$N_3^1(x_1) = -0.00154918$$

$$N_4^1(x_1) = 0.000507181$$

$$N_5^1(x_1) = 4.60641 \times 10^{-6}$$

Es fácil notar que las funciones de forma no cumplen la condición estándar de interpolación (Sacco, 2002).

Caso3:

Cuando $np < m$, el sistema no puede resolverse y se requiere aumentar np lo cual transforma este problema en alguno de los restantes.

Aquí se ve un ejemplo sencillo que nos ilustra que cuando $np < m$, el sistema no tiene solución aplicando el método de mínimos cuadrados (MMC), que es cuando la función de ponderación $\varphi_I(x) = 1, \forall x \in \Omega_I$.

Sean:

$$Q(x_i) = \{x_1, x_2\} \Rightarrow np = 2$$

$$p^t(x) = \{1, x, x^2\} \Rightarrow m = 3$$

Luego

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \\ x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix} \quad P^t = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} \quad PP^t = \begin{pmatrix} 2 & x_1 + x_2 & x_1^2 + x_2^2 \\ x_1 + x_2 & x_1^2 + x_2^2 & x_1^3 + x_2^3 \\ x_1^2 + x_2^2 & x_1^3 + x_2^3 & x_1^4 + x_2^4 \end{pmatrix}$$

Pero, para que el sistema tenga solución es necesario que la matriz PP^t sea inversible o que el determinante sea distinto de cero, ahora se procederá a probar que $Det(PP^t) = 0$:

$$PP^t = \begin{pmatrix} 2 & x_1 + x_2 & x_1^2 + x_2^2 \\ x_1 + x_2 & x_1^2 + x_2^2 & x_1^3 + x_2^3 \\ x_1^2 + x_2^2 & x_1^3 + x_2^3 & x_1^4 + x_2^4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \end{pmatrix}}_A + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 \\ x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \end{pmatrix}}_B = A + B$$

Y utilizando la propiedad lineal de la función determinante se tiene:

$$Det(PP^t) = \underbrace{Det(A)}_{=0} + \underbrace{Det(B)}_{=0} = 0, \text{ donde en ambas matrices se ve trivialmente que sus}$$

determinantes son ceros, ya que al menos hay dos filas o columnas proporcionales, lo que implica que la matriz PP^t no es inversible, por lo tanto el sistema no tiene solución.

2.2.2. Discretización mediante el Método de Colocación Puntual

Es importante notar que, dadas las características de las funciones de forma que se obtienen mediante el método de mínimos cuadrados ponderados fijos, el esquema de discretización mediante colocación puntual resulta ser, sin lugar a dudas, el más apropiado. Especialmente si se tiene en cuenta que dichas funciones son discontinuas y multievaluadas. Por otro lado esta combinación nos permite formular, lo que se puede denominar como un verdadero método sin malla.

En esta sección se tratará una variante del método de los residuos ponderados en la resolución de ecuaciones diferenciales, en donde el residuo viene dado por la diferencia entre el operador diferencial aplicado a la función a aproximar y el mismo operador aplicado a la función aproximante.

2.2.2.1. Método de Colocación Puntual

Sea el problema de contorno dado por las expresiones (2.1) y (2.2). Se desea obtener $u(x)$ la cual se aproxima a través de

$$\tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^M N_j(x) u_j \quad (2.17)$$

Donde las $N_j(x)$ son funciones conocidas y las u_j son las incógnitas. A partir de la cual se definen los residuos:

$$R_{\Omega} = A(\tilde{u}(x)) - f(x)$$

$$R_{\Gamma} = B(\tilde{u}(x)) - g(x)$$

Luego se puede plantear la condición

$$\int_{\Omega} \omega_i R_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma} \varpi_i R_{\Gamma} d\Gamma = 0, \quad i = 1, \dots, M \quad (2.18)$$

Donde ω_i y ϖ_i son funciones de peso y en el método de colocación puntual se escogen $\omega_i = \varpi_i = \delta(x - x_i)$ siendo $\delta(x - x_i)$ la función delta de Dirac. Esto equivale a anular los residuos en un conjunto finito de puntos x_i . Luego la condición anterior se transforma en:

$$\underbrace{A(\tilde{u}(x_i))}_{x_i \in \Omega} + \underbrace{B(\tilde{u}(x_i))}_{x_i \in \Gamma} = \underbrace{f(x_i)}_{x_i \in \Omega} + \underbrace{g(x_i)}_{x_i \in \Gamma}, \quad i = 1, \dots, M \quad (2.19)$$

Para una mayor comprensión la expresión anterior se escribirá de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A(\tilde{u}(x_i)) &= f(x_i), \quad x_i \in \Omega, i = 1, \dots, M_{\Omega} \\ B(\tilde{u}(x_l)) &= g(x_l), \quad x_l \in \Gamma, l = 1, \dots, M_{\Gamma} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Donde M_{Ω} es la cantidad de puntos en el interior del dominio Ω , M_{Γ} es la cantidad de puntos en el contorno Γ , y $M_{\Omega} + M_{\Gamma} = M$.

Sustituyendo $\tilde{u}(x)$ por $\sum_{j=1}^M N_j(x) u_j$ se obtiene:

$$\begin{aligned} A\left(\sum_{j=1}^M N_j(x_i) u_j\right) &= f(x_i), \quad x_i \in \Omega, i = 1, \dots, M_{\Omega} \\ B\left(\sum_{j=1}^M N_j(x_l) u_j\right) &= g(x_l), \quad x_l \in \Gamma, l = 1, \dots, M_{\Gamma} \end{aligned} \quad (2.21)$$

De la linealidad de A y B se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^M A(N_j(x_i)) u_j &= f(x_i), \quad x_i \in \Omega, i = 1, \dots, M_{\Omega} \\ \sum_{j=1}^M B(N_j(x_l)) u_j &= g(x_l), \quad x_l \in \Gamma, l = 1, \dots, M_{\Gamma} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Y escrito en forma matricial

$$K u = b \quad (2.23)$$

Donde

$$K = \begin{pmatrix} K_{ij} \\ K_{lj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(N_j(x_i)) \\ B(N_j(x_l)) \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} f(x_i) \\ g(x_l) \end{pmatrix}$$

Luego de obtener el sistema de ecuaciones, se resuelve y se obtiene la solución.

Ejemplo2:

Hallar \tilde{u} solución aproximada al siguiente problema de contorno:

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dx^2} - u &= 0 & 0 < x < 1 \\ u(x) &= 0 & x = 0 \\ u(x) &= 1 & x = 1 \end{aligned}$$

Tomando como funciones de forma $N_j(x) = x^{j-1}$, los puntos $\{0, 1/3, 2/3, 1\}$ y $M = 4$.

Solución:

Para este caso el sistema de ecuaciones queda

$$\begin{pmatrix} -1 & -1/3 & 17/9 & 53/27 \\ -1 & -2/3 & 14/9 & 100/27 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.855357 \\ -0.0160714 \\ 0.160714 \end{pmatrix}$$

2.3. Convergencia del MPF

Para asegurar la convergencia del MPF, es necesario que se cumplan las condiciones de consistencia y estabilidad. La consistencia depende de los requisitos impuestos por la ecuación diferencial y corresponde a la capacidad de la base de aproximación para representar exactamente la función a interpolar. Las condiciones de consistencia se

satisfarán si se cumplen las condiciones de completitud y reproductividad. Una aproximación de orden k es considerada completa si y solo si es capaz de representar exactamente cualquier polinomio de orden inferior o igual a k . La reproductividad está relacionada con la capacidad de la aproximación para representar los valores nodales de la función a interpolar. La estabilidad de un método tiene relación con la capacidad del mismo para acercarse gradualmente a la solución exacta.

2.3.1. Consistencia

Cuando se estudia la convergencia de un método sin malla, la *consistencia* de la aproximación utilizada, es un aspecto que debe ser analizado con detenimiento. Se entiende por *orden de consistencia* de una aproximación, al grado del polinomio que debe ser representado exactamente, esta forma la capacidad de reproducir polinomios de grado k es equivalente a la consistencia de orden k . Los requerimientos de consistencia dependen del orden de las ecuaciones diferenciales parciales que deben ser resueltas y del esquema de discretización empleado.

En la aproximación realizada en el MPF mediante Mínimos Cuadrados Ponderados Fijos, los coeficientes α son constantes en cada subdominio de influencia Ω_I y el orden de la aproximación es directamente el orden del polinomio de mayor orden en $p^T(x)$ la base de aproximación. Lo que se muestra a continuación:

Sea

$$\tilde{u}(x) = N^T(x) u^h \quad \forall x \in \Omega_I$$

Donde

$$N^T(x) = p^T(x)(P\Phi P^T)^{-1} P\Phi$$

Si se supone que se quiere aproximar simultáneamente el siguiente conjunto de funciones de la base, agrupadas en el vector:

$$u^T(x) = p^T(x) = (p_1(x) \quad \dots \quad p_m(x))$$

Siendo esta vez la matriz con los valores de las funciones en cada punto $x_j \in Q(x_I)$

$$U = \begin{pmatrix} p^T(x_1) & \dots & p^T(x_{np}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(x_1) & \dots & p_m(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(x_{np}) & \dots & p_m(x_{np}) \end{pmatrix} = P^T$$

Luego

$$\tilde{u}(x) = N^T(x)U = p^T(x)(P\Phi P^T)^{-1}P\Phi U = p^T(x)(P\Phi P^T)^{-1}P\Phi P^T = p^T(x)$$

Y de esta manera queda probado lo que se había dicho anteriormente, o sea, que cualquier función que aparezca en la base puede ser reproducida exactamente y su orden es $k = s$, donde s es el grado del polinomio de mayor grado. Por lo que la consistencia del MPF está asegurada.

2.3.2. Estabilidad

En lo que concierne a la estabilidad del método, existen diversos factores que influyen negativamente en la solución. Como lo son:

1. El mal condicionamiento de la matriz $P\Phi P^T$.
2. El mal condicionamiento de la matriz de rigidez K .
3. Si los puntos que conforman la nube poseen una distribución degenerada, o sea, si la nube está desbalanceada o el punto estrella difiere mucho de su centro de gravedad la matriz $P\Phi P^T$ es singular y si no lo fuera, en algunos casos puede que la matriz resulte mal condicionada producto de la cercanía entre dos o más puntos.

Soluciones planteadas hasta el momento:

En el primer caso esto se puede solucionar con el uso de bases de aproximación definidas en forma local y adimensionalizadas. A continuación se explica como se realiza este proceso.

La construcción de las funciones de forma y sus derivadas mediante el método de mínimos cuadrados ponderados fijos implica invertir la matriz de momentos $P\Phi P^T$ presente en la ecuación (2.13), que a su vez depende de la función de ponderación y la

base de aproximación, sin embargo si esta matriz se encuentra mal condicionada (Perazzo, 2002), la matriz resultado de la inversión de $P\Phi P^T$ puede presentar problemas numéricos que afectan directamente a las funciones de forma y sus derivadas. Analizando la matriz de momentos se puede distinguir claramente que ésta se obtiene a partir del producto de tres matrices como

$$P\Phi P^T = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{m-1} & \dots & x_{np}^{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_l(x_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \varphi_l(x_{np}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & x_1^{m-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & x_{np}^{m-1} \end{pmatrix}$$

Donde intervienen dos matrices de Vandermonde (P y P^T) multiplicadas por una matriz diagonal (Φ). Como resultado de este producto se obtiene una matriz con características similares a las matrices de Vandermonde. Estas matrices son bien conocidas por su problema de mal condicionamiento. La expresión anterior sirve para comprender el posible mal condicionamiento de la matriz $P\Phi P^T$ cuando las coordenadas globales del punto se alejan del origen del sistema de coordenadas. Considérese por ejemplo el dominio 1D $[-95,95]$ discretizado mediante una distribución de puntos equiespaciadas, si se una base de aproximación cuadrática ($m = 3$) y nubes de 5 puntos ($n = 5$), se obtiene como número de condición para un punto en el origen ($x = 0$) y otro muy cerca de uno de los extremos del intervalo ($x = 90$) los siguientes valores

$$\begin{aligned} \text{Cond}(P\Phi_l P^T) &= 4.1696 \quad \text{para } x_l = 0 \\ \text{Cond}(P\Phi_l P^T) &= 3.5717 \times 10^{10} \quad \text{para } x_l = 90 \end{aligned}$$

Donde se puede apreciar una gran diferencia, lo que puede producir errores numéricos a la hora de invertir la matriz de momentos, ya que las funciones de forma deben ser idénticas para ambos puntos. Para evitar este tipo de problema se propone el uso de bases polinómicas definidas en forma local, es decir centrada con respecto al nodo estrella. Con este nuevo sistema de coordenadas una base polinómica de orden k en 1D será:

$$p^T(x) = [1 \quad (x - x_l) \quad \dots \quad (x - x_l)^k]$$

De esta forma se garantiza que las matrices tengan el mismo número de condición. Por otra parte se observa que el número de condición de la matriz depende de las unidades que se utilizan en el problema, ya que continúan dependiendo de los valores $(x - x_I)$, que pueden ser muy distintos de la unidad. Para lograr que los valores $(x - x_I)$ sean cercanos a la unidad se adimensionaliza la base, o sea, se introduce una longitud característica de la nube, como puede ser la distancia del nodo estrella al punto más alejado de la nube (Aranda, 2006). De esta forma la base se independiza de la geometría del dominio. Con esta transformación una base polinómica de orden k en 1D será:

$$p^T(x) = \left[1 \left(\frac{x - x_I}{d \max_I} \right) \dots \left(\frac{x - x_I}{d \max_I} \right)^k \right]$$

Y una base cuadrática en 2D será:

$$p^T(x, y) = \left[1 \left(\frac{x - x_I}{d \max_I} \right) \left(\frac{y - y_I}{d \max_I} \right) \left(\frac{x - x_I}{d \max_I} \right)^2 \left(\frac{(x - x_I)(y - y_I)}{d \max_I^2} \right) \left(\frac{y - y_I}{d \max_I} \right)^2 \right]$$

Para la adimensionalización de las base de aproximación se pueden utilizar otras distancias características de la nube como lo es el radio de influencia (Sacco, 2002). Sin embargo según (Perazzo, 2002) para algunas discretizaciones de puntos la solución numérica pueden presentar algunas deficiencias. Para subsanar, este inconveniente detectado en discretizaciones, donde

$$\frac{dx \max}{dy \max} \geq 4 \quad \text{ó} \quad \frac{dy \max}{dx \max} \geq 4$$

Se ha propuesto utilizar como parámetro para adimensionalizar la base, las distancias máximas por ejes en la nube con respecto al nodo estrella, es decir

$$p^T(x, y) = \left[1 \left(\frac{x - x_I}{dx \max_I} \right) \left(\frac{y - y_I}{dy \max_I} \right) \left(\frac{x - x_I}{dx \max_I} \right)^2 \left(\frac{(x - x_I)(y - y_I)}{dx \max_I dy \max_I} \right) \left(\frac{y - y_I}{dy \max_I} \right)^2 \right]$$

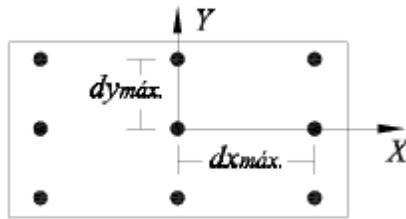


Figura 2.5: Parámetros para adimensionalizar la base de aproximación en una nube.

Para el segundo caso se recurre a una estabilización basada en el Cálculo Finitesimal (FC) agregándole nuevas componentes a la matriz K obteniendo de esta manera un nuevo sistema de ecuaciones. A continuación se puede observar cómo se realiza este proceso.

Con vistas a eliminar inestabilidades en los contornos, que introduce el método de colocación puntual, se modifica el sistema de ecuaciones final (2.20) agregando nuevos términos que están en función de las ecuaciones originales que gobiernan el problema. Esta técnica para obtener un nuevo sistema de ecuaciones es similar a una estabilización y está basada en el procedimiento de Cálculo Finitesimal (CF), en inglés “Finite Increment Calculus” (Martin, 2006). Los conceptos claves del Cálculo Finitesimal se resumen en:

1. Imponer las ecuaciones sobre un dominio de tamaño “finito”.
2. Aproximar el campo desconocido o incógnito del problema utilizando una expansión en serie de Taylor.
3. Conservar los términos de un orden superior a aquellos utilizados en una aproximación infinitesimal estándar.

Siguiendo este procedimiento para un problema unidimensional, ver expresión (2.1), y sin perder generalidad, la ecuación estabilizada en el dominio Ω es

$$R - \frac{1}{2}h \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \quad x \in \Omega \quad (2.25)$$

Donde $R = \{A(u)\}$ (2.26)

Siendo h , la longitud característica del dominio “finito”, donde son impuestas las ecuaciones. Luego, para superar el inconveniente en el contorno se utiliza la misma técnica (CF), que permite obtener (2.25), pero aplicando las ecuaciones sobre un dominio finito en el contorno de longitud $\frac{h}{2}$. De esta manera la ecuación estabilizada en el contorno de Neumann queda $\{B(u)\} - \frac{1}{2}hR = 0$, ya que en el contorno de Dirichlet la ecuación se mantiene igual. Se debe destacar que si en las ecuaciones anteriores $h \rightarrow 0$, es decir, cuando la longitud característica del dominio de balance es infinitesimal, vuelven a al forma original las ecuaciones que gobiernan el problema (2.1) y (2.2). Con lo anterior y luego de recurrir a una formulación de colocación puntual se obtiene un nuevo sistema de ecuaciones discreto y estabilizado, similar a (2.23). Este último se resuelve y se obtiene la solución al problema planteado.

Respecto a la longitud característica h , para el caso bidimensional, se calcula en base a un parámetro típico de la nube, $h = (h_x \ h_y)^T = d \min$, donde las componentes del vector h son distintas en la nube, entre el nodo estrella y el punto mas cercano a éste, ver figura 2.6.

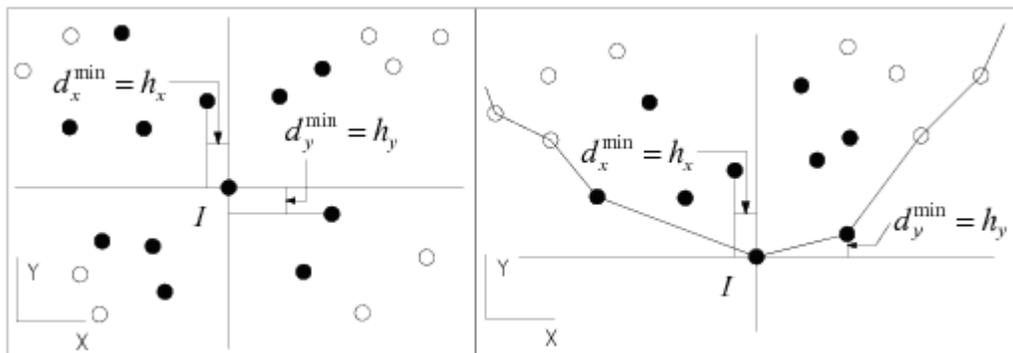


Figura 2.6: h característico para una nube interior y del contorno respectivamente.

Y por último en el tercer caso estos problemas pueden ser detectados de antemano chequeando que se cumpla la relación: $Cond(P\Phi P^T) \leq k_A$, donde k_A es una constante

prefijada o calculada a partir del número de condición de una nube considerada como ideal; en caso contrario la nube será rechazada.

2.4. Conclusiones

En este capítulo se pudo apreciar que la formulación del MPF consta de dos etapas fundamentales: Una es la obtención de la función aproximante y la otra es la aplicación del método de colocación puntual para discretización de las ecuaciones, mostrando un ejemplo en cada caso. Se elaboró una metodología para la obtención de las funciones de forma y para la obtención del sistema de ecuaciones final. Se mostraron algunas propiedades de la aproximación obtenida mediante el método de mínimos cuadrados ponderados fijos. Y por último se analizaron algunos aspectos relacionados con la convergencia del MPF.

Capítulo3: Algoritmos y análisis de los resultados

3.1. Introducción

En este capítulo serán expresados los aspectos teóricos del capítulo anterior de forma algorítmica para su mejor comprensión, por lo que se elaboraron dos algoritmos para la implementación del Método de Puntos Finitos, uno más general y otro modificado. Este último es el más usado por investigadores, ya que garantiza de antemano la no singularidad del problema. Luego en el resto del capítulo se muestra la ecuación convección difusión y se efectúa una corrida paso a paso de un ejemplo, para ilustrar el procedimiento completo. Por último se analiza a través de un ejemplo los factores que influyen en la convergencia del MPF.

3.2. Algoritmos en pseudocódigo

Para efectuar cualquier propuesta de un algoritmo para el MPF, hay que tener en cuenta las siguientes cuestiones:

Entradas:

1.
$$\begin{cases} A(u) = f & x \in \Omega \\ B(u) = g & x \in \Gamma \end{cases}$$
2. Base de aproximación $p^T(x) = (p_1(x) \quad \dots \quad p_m(x))$
3. Función de ponderación a utilizar (en este caso la gaussiana)

Salida:

Solución del problema de contorno $\tilde{u}(x) = N^T(x) u$

3.2.1. Algoritmo general

Paso1 (Discretización del dominio):

Obtención de $T = \{x_1, \dots, x_M\}$

Paso2 (Obtención de las nubes):

Obtención de $\{Q(x_l)\}_{l=1}^M$

Paso3 (Obtención de las funciones de forma):

Obtención de $N^T(x)$

Paso4 (Obtención y resolución del sistema de ecuaciones):

Obtención y resolución del sistema $K u = b$

Paso5 (Imprimir la solución):

Imprimir $u(x_I) = N^T(x_I) u$

3.2.1.1. Explicación de cada paso del algoritmo general

Paso1 (Discretización del dominio):

Dado un dominio cerrado $\Omega \subset R^n$ buscar un subconjunto finito de puntos $T = \{x_1, \dots, x_M\}$. Este proceso fue abordado antes en la sección (2.2.1.1).

Paso2 (Obtención de las nubes):

Una vez obtenido T se le asigna a cada uno de los puntos $x_I \in T$ un subconjunto $Q(x_I) \subset T$ que contiene a los np puntos más cercanos a x_I . Este proceso se realiza de la siguiente manera:

- Si el problema es unidimensional se aplica el método de la mínima distancia: (ver sección 2.2.1.2).
- Si el problema es bidimensional o tridimensional se aplica la triangulación de Delaunay: (ver sección 2.2.1.2).

Paso3 (Obtención de las funciones de forma):

Para $I = 1$ hasta M hacer

Inicio

Si $np \geq m$ entonces,

Inicio

$$d \max_I = \max_{x_j \in Q(x_I)} \{d(x_I, x_j)\};$$

-Adimensionalización de la *base de aproximación* $p^T(x)$.

Si $np = m$ entonces

Inicio

$$r_I = d \max_I \quad (\text{Tomando } \gamma = 1)$$

$$\Omega_I = B_d(x_I, r_I)$$

-Calcular P

-Calcular $(P^T)^{-1}$ por el método de Gauss con pivote parcial o total.

$$N_I^T(x) = \begin{cases} p^T(x) (P^T)^{-1} P, & x \in \Omega_I \\ 0 & x \notin \Omega_I \end{cases}$$

Fin;

Sino

Si $np > m$ entonces

Inicio

$$r_I = \gamma d \max_I$$

$$c_I = \beta r_I$$

$$\Omega_I = B_d(x_I, r_I)$$

$$\varphi_I(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{d(x, x_I)^2}{c_I}} - e^{-\frac{r_I^2}{c_I}}}{1 - e^{-\frac{r_I^2}{c_I}}}, & x \in \Omega_I \\ 0 & x \notin \Omega_I \end{cases}$$

-Calcular P

-Calcular Φ

-Calcular $P\Phi P^T$

-Calcular $(P\Phi P^T)^{-1}$ por el método de Gauss con pivote parcial o total.

$$N_I^T(x) = \begin{cases} p^T(x) (P\Phi P^T)^{-1} P\Phi, & x \in \Omega_I \\ 0 & x \notin \Omega_I \end{cases}$$

Fin;

Sino

“Error”

Fin;

Fin;

Paso4 (Obtención y resolución del sistema de ecuaciones):

El ensamble de la matriz de rigidez se realiza de la siguiente manera:

1. Se llenan los elementos de la matriz que contienen los puntos de cada nube, para todo el dominio Ω , con los valores obtenidos a partir de la ecuación diferencial.
2. Se sobrescribe en los elementos de la matriz resultante del paso anterior, con los valores obtenidos a partir del sistema de ecuaciones de las condiciones de contorno.

Una vez ensamblado el sistema de ecuaciones ($K u = b$), éste se encuentra en condiciones de ser resuelto, sin embargo, debido a ciertas particularidades que presenta la matriz de rigidez K esto no resulta del todo trivial. Algunas de estas características son expuestas a continuación:

- El orden de K es de $M \times M$, donde M es el número total de puntos de la discretización.
- Los únicos elementos de K , que son no nulos corresponden a los puntos de cada nube, por lo general los puntos de cada nube, asociados a un nodo estrella, son correlativos o muy cercanos, por tanto K presenta una tendencia a ser una *matriz de banda*.
- K no es simétrica, ni definida positiva.

Para lograr una resolución adecuada del sistema de ecuaciones con las características señaladas anteriormente, se recurre a herramientas numéricas desarrolladas especialmente para ello. Algunas de estas herramientas son: la factorización LU y Gradiente Biconjugado (J. Aranda).

Paso5 (Imprimir la solución):

Imprimir $\tilde{u}(x) = N^T(x) u$.

En particular si se fija el número de puntos que debe tener cada nube ($np > m$), para garantizar de antemano que el problema sea no singular, entonces se procede de la siguiente manera (este caso es el más usado):

Si el algoritmo anterior se modifica en el paso3 y los restantes pasos permanecen iguales, se obtiene un nuevo algoritmo.

3.2.2. Algoritmo modificado

Paso1 (Discretización del dominio):

Ídem

Paso2 (Obtención de las nubes):

Ídem

Paso3 (Obtención de las funciones de forma):

Para $I = 1$ hasta M hacer

Inicio

$$d \max_I = \max_{x_j \in Q(x_I)} \{d(x_I, x_j)\};$$

-Adimensionalización de la *base de aproximación* $p^T(x)$.

Si $np > m$ entonces

Inicio

$$r_I = \gamma d \max_I$$

$$c_I = \beta r_I$$

$$\Omega_I = B_d(x_I, r_I)$$

$$\varphi_I(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{(d(x,x_I))^2}{c_I}} - e^{-\frac{(r_I)^2}{c_I}}}{1 - e^{-\frac{(r_I)^2}{c_I}}}, & x \in \Omega_I \\ 0 & x \notin \Omega_I \end{cases}$$

-Calcular P

-Calcular Φ

-Calcular $P\Phi P^T$

-Calcular $(P\Phi P^T)^{-1}$ por el método de Gauss con pivote parcial o total.

$$N_I^T(x) = \begin{cases} p^T(x) (P\Phi P^T)^{-1} P\Phi, & x \in \Omega_I \\ 0 & x \notin \Omega_I \end{cases}$$

Fin;
Sino
“Error”

Fin;

Paso4 (Obtención y resolución del sistema de ecuaciones):

Ídem

Paso5 (Imprimir la solución):

Ídem

3.3. Error de la aproximación

Para estudiar como evoluciona la solución y la forma en que afectan a la misma los diversos factores presentes en la formulación propuesta, se define una norma del error (Sacco, 2002), de modo que:

$$e_u = \frac{\|u - \tilde{u}\|}{\|u\|} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^M (u_j - \tilde{u}_j)^2}{\sum_{j=1}^M (u_j)^2}} \quad (3.1)$$

Donde u_j es la solución exacta del problema evaluada en el punto x_j , mientras que \tilde{u}_j es la solución calculada en dicho punto.

3.4. Aplicación del MPF a la ecuación de convección difusión

En esta sección se abordará la resolución de las ecuaciones que gobiernan el fenómeno de convección difusión unidimensional, el caso estacionario mediante la aplicación del Método de Puntos Finitos, lo que permite estudiar algunas características de la aproximación propuesta.

El fenómeno de convección difusión queda definido a través de:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[k \frac{du(x)}{dx} \right] - p \frac{du(x)}{dx} + Q(x) &= 0, \quad x \in \Omega \\ k \frac{du(x)}{dn} &= q_n, \quad x \in \Gamma_n \\ u(x) &= u_p, \quad x \in \Gamma_d \end{aligned} \quad (3.2)$$

Donde k y p son parámetros físicos del problema, $Q(x)$ es la fuente externa, q_n es el valor del flujo impuesto y u_p es el valor al cual se prescribe la incógnita. Con Ω se identifica al dominio en el cual está definido el problema, Γ_n es el contorno donde se prescribe el flujo normal (condición de Neumann) y Γ_d es el contorno en el cual se prescribe la incógnita (condición de Dirichlet).

Primeramente se obtiene la función aproximante de la incógnita mediante el método de mínimos cuadrados ponderados fijos, tal como se muestra en el Capítulo 1, fijando de antemano np el número de puntos que se desea obtener en cada nube y m el número de términos de la base de aproximación que se va a utilizar, garantizando a priori que $np > m$. La aproximación se expresa como:

$$u(x) \cong \tilde{u}(x) = N^T(x)u^h = \sum_{j=1}^M N_j^i(x)u_j^h \quad (3.3)$$

Luego de obtener las funciones de forma, para aplicar el esquema de colocación puntual en la discretización de las ecuaciones se deben tener en cuenta las siguientes consideraciones: n es el número total de puntos a colocar, n_Ω es el número de puntos interiores al dominio, M_n y M_d es el número de puntos que se encuentran en el contorno Γ_n y Γ_d respectivamente, donde $M_\Omega + M_n + M_d = M$. En estas condiciones al sustituir (3.3) en (3.2) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones, donde u^h es el vector que contiene las incógnitas:

$$K u^h = b \quad (3.4)$$

Donde

$$K_{ij} = \frac{d}{dx} \left[k \frac{dN_j^i(x_i)}{dx} \right] + p \frac{dN_j^i(x_i)}{dx}, \quad i = 1, \dots, M_\Omega; j = 1, \dots, M$$

$$b_i = -Q(x_i)$$

$$K_{lj} = k \frac{dN_j^l(x_l)}{dx}, \quad l = 1, \dots, M_n; j = 1, \dots, M$$

$$b_l = q_n$$

$$K_{sj} = N_j^s(x_s), \quad s = 1, \dots, M_d; j = 1, \dots, M$$

$$b_s = u_p$$

3.4.1. Condición de contorno estabilizada

En la formulación presentada, en el contorno de Neumann se trata de satisfacer solo la ecuación correspondiente a dicha condición, y como se puede observar, en ciertos casos queda de manifiesto un notorio deterioro en las propiedades de convergencia del método (Sacco, 2002).

Estas mismas dificultades ya habían sido manifestadas por otros autores aunque utilizando otras técnicas, como por ejemplo las diferencias finitas. Para abordar este tipo de problema se han planteado diversas alternativas entre las que se puede mencionar el agregado de un punto ficticio fuera del dominio o, el uso de multiplicadores de Lagrange, entre otros.

A través de la teoría del Cálculo Finitesimal se puede deducir lo que se denomina como “forma estabilizada de las condiciones de contorno” (Sacco, 2002). Con este fin se plantea una ecuación de balance de flujos en un dominio de dimensión finita; para el caso unidimensional que aquí se trabaja, este dominio se limita a un segmento \overline{AB} en el que el punto x_B pertenece al contorno y el punto x_A al dominio. La longitud de \overline{AB} se define como $\frac{h}{2}$. En la figura (3.1) se muestra un esquema del dominio en el que se plantea el balance.

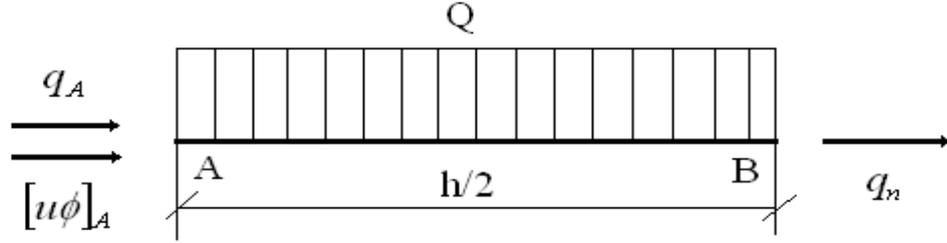


Figura 3.1: Dominio de balance para un punto del contorno.

El equilibrio de los flujos en el segmento \overline{AB} , asumiendo que la fuente Q es constante en dicho segmento, tiene la siguiente expresión:

$$q_n - q(x_A) - [u\phi]_{x_A} - \frac{h}{2} Q = 0 \quad (3.5)$$

Donde q_n es el flujo normal prescrito en el contorno, $q(x_A)$ es el flujo producido por la difusión en el punto x_A y $[u\phi]_{x_A}$ es el flujo advectivo en el mismo punto. Si se desarrollan estos términos en serie de Taylor alrededor del punto x_B , se logra la siguiente expresión:

$$q(x_A) = q(x_B) - \frac{h}{2} \left. \frac{dq}{dx} \right|_{x_B} + O(h^2) \quad (3.6)$$

$$[u\phi]_{x_A} = [u\phi]_{x_B} - \frac{h}{2} \left. \frac{d[u\phi]}{dx} \right|_{x_B} + O(h^2) \quad (3.7)$$

Aplicando la ley de Fourier para el flujo se tiene que:

$$q(x_A) = -k \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{x_A} \quad (3.8)$$

Con lo anterior la ecuación (3.6) se puede escribir como:

$$-k \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{x_A} = -k \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{x_B} + \frac{h}{2} \left. \frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) \right|_{x_B} + O(h^2) \quad (3.9)$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación de balance (3.5) y eliminando los términos de orden superior se obtiene,

$$q_n + k \frac{d\phi}{dx} - [u\phi] - \frac{h}{2} \left[-\frac{d[u\phi]}{dx} + \frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) + Q \right] = 0 \quad (3.10)$$

Donde todos los términos están evaluados en el punto x_B que es el punto de contorno en el cual está prescrito la condición de Neumann.

Como se puede observar el término que aparece multiplicado por $h/2$ es exactamente el residuo en el interior del dominio. Si se hace que

$$R = -\frac{d[u\phi]}{dx} + \frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) + Q \quad (3.11)$$

Se llega entonces a la siguiente expresión:

$$q_n + k \frac{d\phi}{dx} - [u\phi] - \frac{h}{2} R = 0 \quad (3.12)$$

Para la anterior definición se debe tener en cuenta que si el flujo prescrito es de naturaleza difusiva, como ocurre generalmente, el término $[u\phi]$ desaparece y la expresión finalmente queda:

$$q_n + k \frac{d\phi}{dx} - \frac{h}{2} R = 0 \quad (3.13)$$

En la expresión el signo del término conductivo depende de la forma en que se defina la dirección normal que puede ser entrante o saliente respecto al dominio. Para evitar inconvenientes dicha definición se expresa como:

$$q_n + k \frac{d\phi}{dn} - \frac{h}{2} R = 0 \quad (3.14)$$

En esta ecuación final se introdujo la derivada según la dirección normal.

Ejemplo:

El problema planteado anteriormente con las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} &= \text{sen}(\pi x) \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u(x) &= 0 \quad x = 0 \\ \frac{du(x)}{dx} &= 0 \quad x = 1 \end{aligned}$$

Puede ser planteado en términos de la condición de contorno estabilizada, esto implica que ahora se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} &= \text{sen}(\pi x) \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u(x) &= 0 \quad x = 0 \\ \frac{du(x)}{dx} - \frac{h}{2} \left[\frac{d^2 u(x)}{dx^2} - \text{sen}(\pi x) \right] &= 0 \quad x = 1 \end{aligned} \tag{3.15}$$

En la ecuación de la condición de contorno, para la estabilización se introdujo un parámetro h que se conoce como longitud característica. Este parámetro, según la teoría del *Cálculo Finitesimal*, se puede interpretar como la distancia existente entre el punto del contorno y el punto interior más cercano, como se vio antes en la figura (2.6).

3.4.2. Estabilización de las ecuaciones mediante el cálculo finitesimal

Para estudiar las formas en que se manifiestan las inestabilidades numéricas se plantea el problema de convección-difusión con condiciones de Dirichlet en $x = 0$ y $x = 1$. En el esquema de la figura (3.2) se puede apreciar las características del problema planteado.

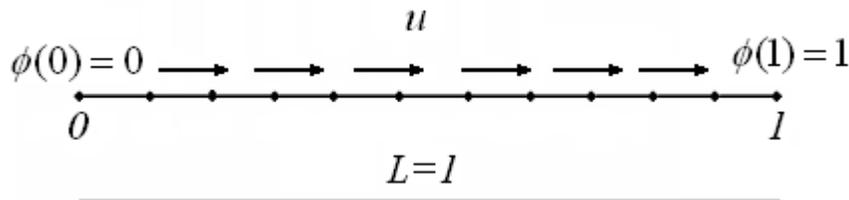


Figura 3.2: Esquema del dominio y las condiciones de contorno.

Haciendo que la fuente externa $Q(x) = 0$ se tiene:

$$\begin{aligned}
 u \frac{d\phi(x)}{dx} - k \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} &= 0 \quad \text{para } 0 < x < 1 \\
 \phi(x) &= 0 \quad \text{para } x = 0 \\
 \phi(x) &= 1 \quad \text{para } x = 1
 \end{aligned}
 \tag{3.16}$$

Donde k, u son constantes.

El método de Cálculo Finitesimal (Sacco, 2002), se basa en la modificación de la ecuación diferencial que rige el problema, y nos ofrece una forma alternativa muy eficiente de tratar los problemas asociados con las inestabilidades numéricas.

Con esta técnica los términos de estabilización surgen directamente del planteo de una ecuación de balance de flujos en un contexto discreto a las ecuaciones diferenciales de gobierno del fenómeno.

Al tomar la ecuación (3.17) y añadirle una fuente externa $Q(x)$ arbitraria, se logra extender el desarrollo al caso más general. A continuación se plantea el balance de flujos en un segmento AB de longitud h , como se muestra en la figura (3.3), además, en esta figura se representan los flujos entrantes y salientes en cada extremo del subdominio que se ha tomado.

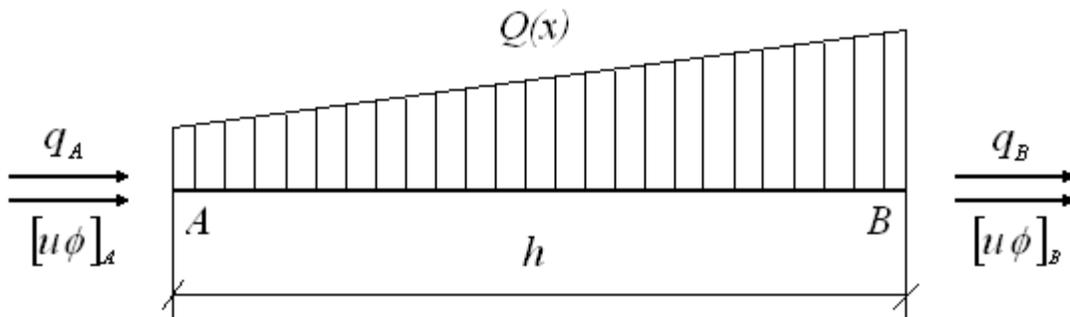


Figura 3.3: Dominio de balance para un punto interior del dominio.

Como primera aproximación se supone que el término de fuente $Q(x)$ varía linealmente en el segmento AB, con lo cual la sumatoria de flujos será:

$$\sum \text{flujos} = [\text{flujo}]_{x_A} - [\text{flujo}]_{x_B} + \frac{h}{2}(Q(x_A) + Q(x_B)) = 0 \quad (3.18)$$

Como es sabido el flujo se compone de dos partes; una convectiva y la otra difusiva, de forma que:

$$[\text{flujo}]_x = q(x) + [u\phi](x) \quad (3.19)$$

Reemplazando en la expresión anterior

$$q(x_A) + [u\phi](x_A) - q(x_B) + [u\phi](x_B) + \frac{h}{2}(Q(x_A) + Q(x_B)) = 0 \quad (3.20)$$

Luego se puede introducir el siguiente cambio $x_A = x_B - h$, además como x_B es un punto arbitrario puede reemplazarse directamente por x , con lo cual

$$q(x-h) + [u\phi](x-h) - q(x) + [u\phi](x) + \frac{h}{2}(Q(x-h) + Q(x)) = 0 \quad (3.21)$$

Los términos expresados en el punto $x-h$ pueden desarrollarse en serie de Taylor entorno al punto x de forma tal que,

$$q(x-h) = q(x) - h \left. \frac{dq}{dx} \right|_x + \frac{h^2}{2} \left. \frac{d^2q}{dx^2} \right|_x - O(h^3)$$

$$[u\phi](x-h) = [u\phi](x) - h \left. \frac{d[u\phi]}{dx} \right|_x + \frac{h^2}{2} \left. \frac{d^2[u\phi]}{dx^2} \right|_x - O(h^3)$$

$$Q(x-h) = Q(x) - h \left. \frac{dQ}{dx} \right|_x - O(h^2)$$

Reemplazando estas expresiones en la ecuación (3.21) y despreciando los términos de mayor orden se llega a,

$$-\frac{dq(x)}{dx} - \frac{d[u\phi](x)}{dx} + Q(x) + \frac{h}{2} \left(\frac{d^2q(x)}{dx^2} + \frac{d^2[u\phi](x)}{dx^2} - \frac{dQ(x)}{dx} \right) = 0 \quad (3.22)$$

Haciendo uso de la ley de Fourier, es posible es posible poner los flujos en función de $\phi(x)$ haciendo,

$$q(x) = -k \frac{d\phi(x)}{dx}$$

Y suponiendo que $u(x) = cte$ la ecuación (3.22) se puede describir de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi(x)}{dx} \right) - u \frac{d\phi(x)}{dx} + Q(x) - \frac{h}{2} \frac{d}{dx} \left[\frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi(x)}{dx} \right) - u \frac{d\phi(x)}{dx} + Q(x) \right] = 0 \quad (3.23)$$

Recordando que el residuo está dado por

$$R = \frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi(x)}{dx} \right) - u \frac{d\phi(x)}{dx} + Q(x) \quad (3.24)$$

Reemplazando (3.24) en la ecuación (3.23) se logra:

$$R - \frac{h}{2} \frac{dR}{dx} = 0 \quad (3.25)$$

Es muy importante destacar que en la ecuación (3.25) cuando $h \rightarrow 0$ se recupera la ecuación diferencial de convección difusión estándar en su forma infinitesimal.

Luego se puede reescribir las ecuaciones en (3.17) como:

$$u \frac{d\phi(x)}{dx} - k \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} - \frac{h}{2} \frac{d}{dx} \left[u \frac{d\phi(x)}{dx} - k \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} \right] = 0 \quad \text{para } 0 < x < 1$$

$$\phi(x) = 0 \quad \text{para } x = 0$$

$$\phi(x) = 1 \quad \text{para } x = 1$$

3.5. Ejemplo resuelto paso a paso

Con el desarrollo de este ejemplo el lector podrá fortalecer lo que aprendió en el Capítulo 1 viendo materializada la metodología de la obtención de las funciones de forma y de la obtención del sistema de ecuaciones a través de este ejemplo.

Resolver la ecuación convección difusión dados $p = 0$, $k = 1$, $Q(x) = -\text{sen}(\pi x)$, con lo cual nos queda definido un problema de Poisson. En el extremo izquierdo del intervalo se aplica la condición de contorno de Dirichlet imponiendo $u_p = 0$ y en el extremo derecho del intervalo se aplica la condición de contorno de Neumann haciendo $q_n = 0$. En la figura (3.4) se esquematiza el dominio, la fuente aplicada sobre el mismo y las condiciones de contorno.

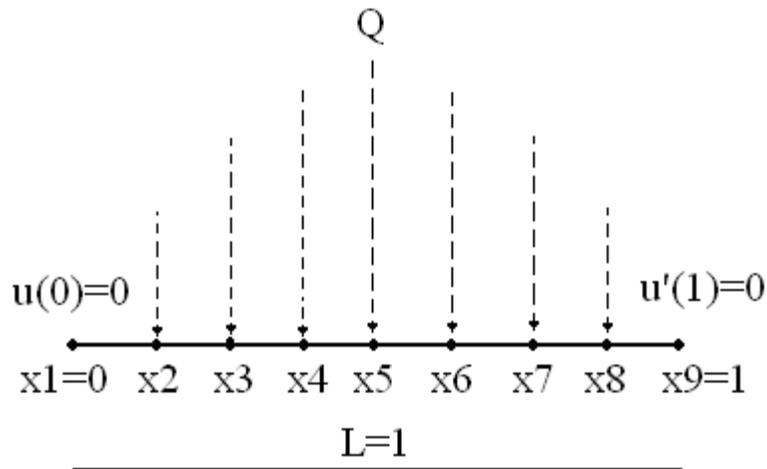


Figura 3.4: Esquema del dominio, la fuente externa y las condiciones de contorno.

Reemplazando los valores propuestos en las ecuaciones de (3.1), el problema resulta:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} &= \text{sen}(\pi x) \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u(x) &= 0 \quad x = 0 \\ \frac{du(x)}{dx} &= 0 \quad x = 1 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Solución analítica: $u(x) = -\frac{1}{\pi^2} \text{sen}(\pi x) - \frac{x}{\pi}$

Para la resolución de este ejemplo por el MPF se tomaron las siguientes consideraciones:

1. Nueve puntos equiespaciados ($M = 9$), con $h = \frac{L}{n-1} = \frac{1}{8}$.
2. La base cuadrática ($m = 3$).
3. Cantidad de puntos de cada nube 4 puntos ($np = 4$) incluyendo el nodo estrella.
4. Función de ponderación Gaussiana con $r = 1.5 d \max$ y $\beta = 0.5 r$.

Obtención de la solución aproximada:

Este proceso se realiza tal y como se explicó en la utilización del MPF e la ecuación convección-difusión:

Discretización:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
0	1/8	1/4	3/8	1/2	5/8	3/4	7/8	1

Punto estrella $x = 0$.

Puntos de la nube: $\{1, 2, 3, 4\}$

Radio de influencia: $r = 0.5625$

Factor de apuntamiento: $\beta = 0.28125$

Matriz P :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Φ :

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1. & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.817411 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.443598 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.153509 \end{pmatrix}$$

Matriz $P\Phi P^T$:

$$P\Phi P^T = \begin{pmatrix} 2.41452 & 0.721711 & 0.441487 \\ 0.721711 & 0.441487 & 0.31522 \\ 0.441487 & 0.31522 & 0.251225 \end{pmatrix}$$

Matriz $P\Phi$:

$$P\Phi = \begin{pmatrix} 1. & 0.817411 & 0.443598 & 0.153509 \\ 0. & 0.27247 & 0.295732 & 0.153509 \\ 0. & 0.0908234 & 0.197155 & 0.153509 \end{pmatrix}$$

Matriz $(P\Phi P^T)^{-1} P\Phi$:

$$(P\Phi P^T)^{-1} P\Phi = \begin{pmatrix} 0.974236 & 0.0772931 & -0.0772931 & 0.0257644 \\ -3.55535 & 3.16604 & 1.33396 & -0.944653 \\ 2.74895 & -3.74684 & -0.753158 & 1.75105 \end{pmatrix}$$

Funciones de forma:

$$N(0.) = \begin{pmatrix} 0.974236 \\ 0.0772931 \\ -0.0772931 \\ 0.0257644 \end{pmatrix}$$

Operador A(u) aplicado a las funciones de forma:

$$A[N(0.)] = \begin{pmatrix} 39.0961 \\ -53.2884 \\ -10.7116 \\ 24.9039 \end{pmatrix}$$

Punto estrella $x = 0.125$

Puntos de la nube: {2, 1, 3, 4}

Radio de influencia: $r = 0.375$

Factor de apuntamiento: $\beta = 0.1875$

Matriz P:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Φ :

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1. & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.634486 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.634486 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.153509 \end{pmatrix}$$

Matriz $P\Phi P^T$:

$$P\Phi P^T = \begin{pmatrix} 2.42248 & 0.153509 & 0.470752 \\ 0.153509 & 0.470752 & 0.153509 \\ 0.470752 & 0.153509 & 0.23282 \end{pmatrix}$$

Matriz $P\Phi$:

$$P\Phi = \begin{pmatrix} 1. & 0.634486 & 0.634486 & 0.153509 \\ 0. & -0.317243 & 0.317243 & 0.153509 \\ 0. & 0.158621 & 0.158621 & 0.153509 \end{pmatrix}$$

Matriz $(P\Phi P^T)^{-1}P\Phi$:

$$(P\Phi P^T)^{-1}P\Phi = \begin{pmatrix} 0.712231 & 0.0959231 & 0.287769 & -0.0959231 \\ 0.302365 & -1.10079 & 0.697635 & 0.100788 \\ -1.63946 & 1.21315 & -0.360536 & 0.786845 \end{pmatrix}$$

Funciones de forma:

$$N(0.125) = \begin{pmatrix} 0.712231 \\ 0.0959231 \\ 0.287769 \\ -0.0959231 \end{pmatrix}$$

Operador $A(u)$ aplicado a las funciones de forma:

$$A[N(0.125)] = \begin{pmatrix} -52.4628 \\ 38.8209 \\ -11.5372 \\ 25.1791 \end{pmatrix}$$

Punto estrella $x = 0.25$

Puntos de la nube: $\{3, 2, 4, 1\}$

Radio de influencia: $r = 0.375$

Factor de apuntamiento: $\beta = 0.1875$

Matriz P :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Φ :

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1. & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.634486 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.634486 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.153509 \end{pmatrix}$$

Matriz $P\Phi P^T$:

$$P\Phi P^T = \begin{pmatrix} 2.42248 & -0.153509 & 0.470752 \\ -0.153509 & 0.470752 & -0.153509 \\ 0.470752 & -0.153509 & 0.23282 \end{pmatrix}$$

Matriz $P\Phi$:

$$P\Phi = \begin{pmatrix} 1. & 0.634486 & 0.634486 & 0.153509 \\ 0. & -0.317243 & 0.317243 & -0.153509 \\ 0. & 0.158621 & 0.158621 & 0.153509 \end{pmatrix}$$

Matriz $(P\Phi P^T)^{-1} P\Phi$:

$$(P\Phi P^T)^{-1} P\Phi = \begin{pmatrix} 0.712231 & 0.287769 & 0.0959231 & -0.0959231 \\ -0.302365 & -0.697635 & 1.10079 & -0.100788 \\ -1.63946 & -0.360536 & 1.21315 & 0.786845 \end{pmatrix}$$

Funciones de forma:

$$N(0.25) = \begin{pmatrix} 0.712231 \\ 0.287769 \\ 0.0959231 \\ -0.0959231 \end{pmatrix}$$

Operador $A(u)$ aplicado a las funciones de forma:

$$A[N(0.25)] = \begin{pmatrix} -52.4628 \\ -11.5372 \\ 38.8209 \\ 25.1791 \end{pmatrix}$$

Punto estrella $x = 0.375$

Puntos de la nube: $\{4, 3, 5, 2\}$

Radio de influencia: $r = 0.375$

Factor de apuntamiento: $\beta = 0.1875$

Matriz P :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Φ :

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1. & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.634486 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.634486 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.153509 \end{pmatrix}$$

Matriz $P\Phi P^T$:

$$P\Phi P^T = \begin{pmatrix} 2.42248 & -0.153509 & 0.470752 \\ -0.153509 & 0.470752 & -0.153509 \\ 0.470752 & -0.153509 & 0.23282 \end{pmatrix}$$

Matriz $P\Phi$:

$$P\Phi = \begin{pmatrix} 1. & 0.634486 & 0.634486 & 0.153509 \\ 0. & -0.317243 & 0.317243 & -0.153509 \\ 0. & 0.158621 & 0.158621 & 0.153509 \end{pmatrix}$$

Matriz $(P\Phi P^T)^{-1} P\Phi$:

$$(P\Phi P^T)^{-1} P\Phi = \begin{pmatrix} 0.712231 & 0.287769 & 0.0959231 & -0.0959231 \\ -0.302365 & -0.697635 & 1.10079 & -0.100788 \\ -1.63946 & -0.360536 & 1.21315 & 0.786845 \end{pmatrix}$$

Funciones de forma:

$$N(0.375) = \begin{pmatrix} 0.712231 \\ 0.287769 \\ 0.0959231 \\ -0.0959231 \end{pmatrix}$$

Operador $A(u)$ aplicado a las funciones de forma:

$$A[N(0.375)] = \begin{pmatrix} -52.4628 \\ -11.5372 \\ 38.8209 \\ 25.1791 \end{pmatrix}$$

Punto estrella $x = 0.5$

Puntos de la nube: $\{5, 4, 6, 3\}$

Radio de influencia: $r = 0.375$

Factor de apuntamiento: $\beta = 0.1875$

Matriz P :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Φ :

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1. & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.634486 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.634486 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.153509 \end{pmatrix}$$

Matriz $P\Phi P^T$:

$$P\Phi P^T = \begin{pmatrix} 2.42248 & -0.153509 & 0.470752 \\ -0.153509 & 0.470752 & -0.153509 \\ 0.470752 & -0.153509 & 0.23282 \end{pmatrix}$$

Matriz $P\Phi$:

$$P\Phi = \begin{pmatrix} 1. & 0.634486 & 0.634486 & 0.153509 \\ 0. & -0.317243 & 0.317243 & -0.153509 \\ 0. & 0.158621 & 0.158621 & 0.153509 \end{pmatrix}$$

Matriz $(P\Phi P^T)^{-1} P\Phi$:

$$(P\Phi P^T)^{-1} P\Phi = \begin{pmatrix} 0.712231 & 0.287769 & 0.0959231 & -0.0959231 \\ -0.302365 & -0.697635 & 1.10079 & -0.100788 \\ -1.63946 & -0.360536 & 1.21315 & 0.786845 \end{pmatrix}$$

Funciones de forma:

$$N(0.5) = \begin{pmatrix} 0.712231 \\ 0.287769 \\ 0.0959231 \\ -0.0959231 \end{pmatrix}$$

Operador $A(u)$ aplicado a las funciones de forma:

$$A[N(0.5)] = \begin{pmatrix} -52.4628 \\ -11.5372 \\ 38.8209 \\ 25.1791 \end{pmatrix}$$

Punto estrella $x = 0.625$

Puntos de la nube: $\{6, 5, 7, 4\}$

Radio de influencia: $r = 0.375$

Factor de apuntamiento: $\beta = 0.1875$

Matriz P:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Φ :

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1. & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.634486 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.634486 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.153509 \end{pmatrix}$$

Matriz $P\Phi P^T$:

$$P\Phi P^T = \begin{pmatrix} 2.42248 & -0.153509 & 0.470752 \\ -0.153509 & 0.470752 & -0.153509 \\ 0.470752 & -0.153509 & 0.23282 \end{pmatrix}$$

Matriz $P\Phi$:

$$P\Phi = \begin{pmatrix} 1. & 0.634486 & 0.634486 & 0.153509 \\ 0. & -0.317243 & 0.317243 & -0.153509 \\ 0. & 0.158621 & 0.158621 & 0.153509 \end{pmatrix}$$

Matriz $(P\Phi P^T)^{-1} P\Phi$:

$$(P\Phi P^T)^{-1} P\Phi = \begin{pmatrix} 0.712231 & 0.287769 & 0.0959231 & -0.0959231 \\ -0.302365 & -0.697635 & 1.10079 & -0.100788 \\ -1.63946 & -0.360536 & 1.21315 & 0.786845 \end{pmatrix}$$

Funciones de forma:

$$N(0.625) = \begin{pmatrix} 0.712231 \\ 0.287769 \\ 0.0959231 \\ -0.0959231 \end{pmatrix}$$

Operador A(u) aplicado a las funciones de forma:

$$A[N(0.625)] = \begin{pmatrix} -52.4628 \\ -11.5372 \\ 38.8209 \\ 25.1791 \end{pmatrix}$$

Punto estrella $x = 0.75$

Puntos de la nube: {7, 6, 8, 5}

Radio de influencia: $r = 0.375$

Factor de apuntamiento: $\beta = 0.1875$

Matriz P :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Φ :

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1. & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.634486 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.634486 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.153509 \end{pmatrix}$$

Matriz $P\Phi P^T$:

$$P\Phi P^T = \begin{pmatrix} 2.42248 & -0.153509 & 0.470752 \\ -0.153509 & 0.470752 & -0.153509 \\ 0.470752 & -0.153509 & 0.23282 \end{pmatrix}$$

Matriz $P\Phi$:

$$P\Phi = \begin{pmatrix} 1. & 0.634486 & 0.634486 & 0.153509 \\ 0. & -0.317243 & 0.317243 & -0.153509 \\ 0. & 0.158621 & 0.158621 & 0.153509 \end{pmatrix}$$

Matriz $(P\Phi P^T)^{-1} P\Phi$:

$$(P\Phi P^T)^{-1} P\Phi = \begin{pmatrix} 0.712231 & 0.287769 & 0.0959231 & -0.0959231 \\ -0.302365 & -0.697635 & 1.10079 & -0.100788 \\ -1.63946 & -0.360536 & 1.21315 & 0.786845 \end{pmatrix}$$

Funciones de forma:

$$N(0.75) = \begin{pmatrix} 0.712231 \\ 0.287769 \\ 0.0959231 \\ -0.0959231 \end{pmatrix}$$

Operador $A(u)$ aplicado a las funciones de forma:

$$A[N(0.75)] = \begin{pmatrix} -52.4628 \\ -11.5372 \\ 38.8209 \\ 25.1791 \end{pmatrix}$$

Punto estrella $x = 0.875$

Puntos de la nube: $\{8, 7, 9, 6\}$

Radio de influencia: $r = 0.375$

Factor de apuntamiento: $\beta = 0.1875$

Matriz P :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Φ :

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1. & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.634486 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.634486 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.153509 \end{pmatrix}$$

Matriz $P\Phi P^T$:

$$P\Phi P^T = \begin{pmatrix} 2.42248 & -0.153509 & 0.470752 \\ -0.153509 & 0.470752 & -0.153509 \\ 0.470752 & -0.153509 & 0.23282 \end{pmatrix}$$

Matriz $P\Phi$:

$$P\Phi = \begin{pmatrix} 1. & 0.634486 & 0.634486 & 0.153509 \\ 0. & -0.317243 & 0.317243 & -0.153509 \\ 0. & 0.158621 & 0.158621 & 0.153509 \end{pmatrix}$$

Matriz $(P\Phi P^T)^{-1} P\Phi$:

$$(P\Phi P^T)^{-1} P\Phi = \begin{pmatrix} 0.712231 & 0.287769 & 0.0959231 & -0.0959231 \\ -0.302365 & -0.697635 & 1.10079 & -0.100788 \\ -1.63946 & -0.360536 & 1.21315 & 0.786845 \end{pmatrix}$$

Funciones de forma:

$$N(0.875) = \begin{pmatrix} 0.712231 \\ 0.287769 \\ 0.0959231 \\ -0.0959231 \end{pmatrix}$$

Operador A(u) aplicado a las funciones de forma:

$$A[N(0.875)] = \begin{pmatrix} -52.4628 \\ -11.5372 \\ 38.8209 \\ 25.1791 \end{pmatrix}$$

Punto estrella $x = 1$.

Puntos de la nube: {9, 8, 7, 6}

Radio de influencia: $r = 0.5625$

Factor de apuntamiento: $\beta = 0.28125$

Matriz P:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -1 \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Φ :

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1. & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.817411 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.443598 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.153509 \end{pmatrix}$$

Matriz $P\Phi P^T$:

$$P\Phi P^T = \begin{pmatrix} 2.41452 & -0.721711 & 0.441487 \\ -0.721711 & 0.441487 & -0.31522 \\ 0.441487 & -0.31522 & 0.251225 \end{pmatrix}$$

Matriz $P\Phi$:

$$P\Phi = \begin{pmatrix} 1. & 0.817411 & 0.443598 & 0.153509 \\ 0. & -0.27247 & -0.295732 & -0.153509 \\ 0. & 0.0908234 & 0.197155 & 0.153509 \end{pmatrix}$$

Matriz $(P\Phi P^T)^{-1} P\Phi$:

$$(P\Phi P^T)^{-1} P\Phi = \begin{pmatrix} 0.974236 & 0.0772931 & -0.0772931 & 0.0257644 \\ 3.55535 & -3.16604 & -1.33396 & 0.944653 \\ 2.74895 & -3.74684 & -0.753158 & 1.75105 \end{pmatrix}$$

Funciones de forma:

$$N(1.) = \begin{pmatrix} 0.974236 \\ 0.0772931 \\ -0.0772931 \\ 0.0257644 \end{pmatrix}$$

Operador A(u) aplicado a las funciones de forma:

$$A[N(1.)] = \begin{pmatrix} 39.0961 \\ -53.2884 \\ -10.7116 \\ 24.9039 \end{pmatrix}$$

Punto $x=0$

Puntos de la nube: 1, 2, 3, 4

Radio de influencia: $r = 0.5625$

Factor de apuntamiento: $\beta=0.28125$

Matriz P:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Φ :

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1. & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.817411 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.443598 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.153509 \end{pmatrix}$$

Matriz $P\Phi$:

$$P\Phi = \begin{pmatrix} 1. & 0.817411 & 0.443598 & 0.153509 \\ 0. & 0.27247 & 0.295732 & 0.153509 \\ 0. & 0.0908234 & 0.197155 & 0.153509 \end{pmatrix}$$

Matriz $P\Phi P^T$:

$$P\Phi P^T = \begin{pmatrix} 2.41452 & 0.721711 & 0.441487 \\ 0.721711 & 0.441487 & 0.31522 \\ 0.441487 & 0.31522 & 0.251225 \end{pmatrix}$$

Matriz $(P\Phi P^T)^{-1}P\Phi$:

$$(P\Phi P^T)^{-1}P\Phi = \begin{pmatrix} 0.974236 & 0.0772931 & -0.0772931 & 0.0257644 \\ -3.55535 & 3.16604 & 1.33396 & -0.944653 \\ 2.74895 & -3.74684 & -0.753158 & 1.75105 \end{pmatrix}$$

Funciones de forma:

$$N(0.) = \begin{pmatrix} 0.974236 \\ 0.0772931 \\ -0.0772931 \\ 0.0257644 \end{pmatrix}$$

Operador $A(u)$ aplicado a las funciones de forma:

$$A[N(0.)] = \begin{pmatrix} 39.0961 \\ -53.2884 \\ -10.7116 \\ 24.9039 \end{pmatrix}$$

Luego se plantea el sistema de ecuaciones como se obtuvo en la sección (3.4):

$$Ku^h = b$$

Donde:

$$K = \begin{pmatrix} 0.974236 & 0.0772931 & -0.0772931 & 0.0257644 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 38.8209 & -52.4628 & -11.5372 & 25.1791 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 25.1791 & -11.5372 & -52.4628 & 38.8209 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 25.1791 & -11.5372 & -52.4628 & 38.8209 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 25.1791 & -11.5372 & -52.4628 & 38.8209 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 25.1791 & -11.5372 & -52.4628 & 38.8209 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 25.1791 & -11.5372 & -52.4628 & 38.8209 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 25.1791 & -11.5372 & -52.4628 & 38.8209 \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 2.51907 & -3.55722 & -8.44278 & 9.48093 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 0. \\ 0.382683 \\ 0.707107 \\ 0.92388 \\ 1. \\ 0.92388 \\ 0.707107 \\ 0.382683 \\ 0. \end{pmatrix}$$

Cuya solución es:

$$u^h = \begin{pmatrix} -0.000612713 \\ -0.0761925 \\ -0.155149 \\ -0.213701 \\ -0.261689 \\ -0.290769 \\ -0.308314 \\ -0.315126 \\ -0.319042 \end{pmatrix}$$

En la figura (3.5) se muestra la los resultados teóricos (línea continua) y calculados (punto en rojo) según las consideraciones tomadas anteriormente.

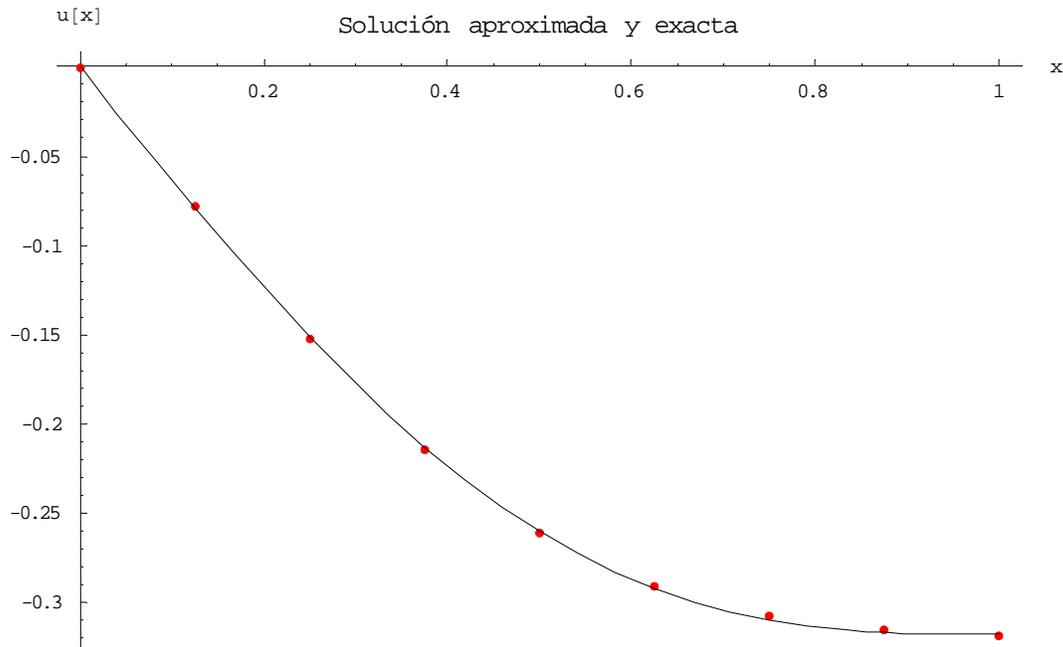


Figura 3.5: Comparación del resultado teórico con el obtenido a través de MPF.

3.6. Convergencia del MPF y factores de influencia

Se realizaron discretizaciones, mediante una distribución de puntos equiespaciados. Para el estudio de la convergencia se utilizaron 6 distribuciones distintas de puntos conformadas por 11, 21, 41, 81, 161 y 321 puntos. Se tomará como caso testigo el ejemplo resuelto anteriormente dado por (3.5).

3.6.1. Influencia de la nube

La cantidad de puntos mediante los cuales se definen las funciones de forma es generalmente arbitraria, por este motivo es importante ver la manera en que afectan las nubes a la solución.

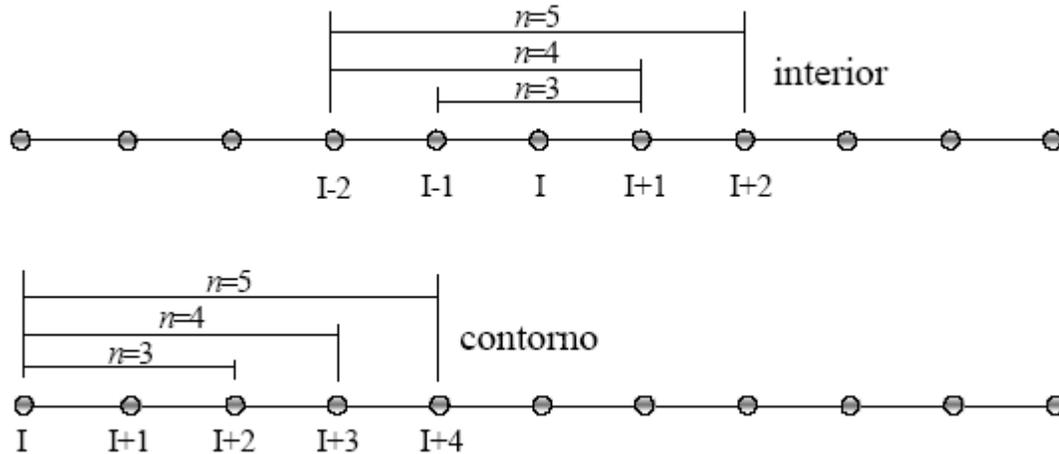


Figura 3.6: Nubes de 3, 4 y 5 puntos correspondientes a I en el interior y en el contorno del dominio.

Para analizar este punto se definieron nubes de 3, 4 y 5 puntos ($np = 3, 4, 5$ respectivamente), en las nubes interiores se tomaron nubes simétricas y asimétricas tal como se muestra en la figura (3.6). En los puntos del contorno las nubes se encuentran desplazadas hacia el interior del dominio, como se refleja en la figura (3.6).

Para este estudio se tomó la base cuadrática ($m = 3$) y función de ponderación gaussiana con los mismos parámetros tomados para la resolución del ejemplo paso a paso. La convergencia obtenida utilizando las distintas nubes de puntos se observar en la figura

(3.7), donde se grafica el error definido por (3.1), con respecto a $h = \frac{L}{M-1}$ (el paso). Es

importante resaltar que cuando $np = 3$ se está en presencia de una interpolación, y de esta forma el esquema obtenido es equivalente a un esquema en diferencias finitas de

segundo orden. Y como era de esperar para nubes de 3 puntos la convergencia es cuadrática. Algo muy similar ocurre para nubes de 5 puntos, mientras que para las nubes de 4 puntos no sucede así, obteniéndose los peores resultados. Un resultado directo de este experimento es que se deben usar nubes simétricas para obtener los mejores resultados.

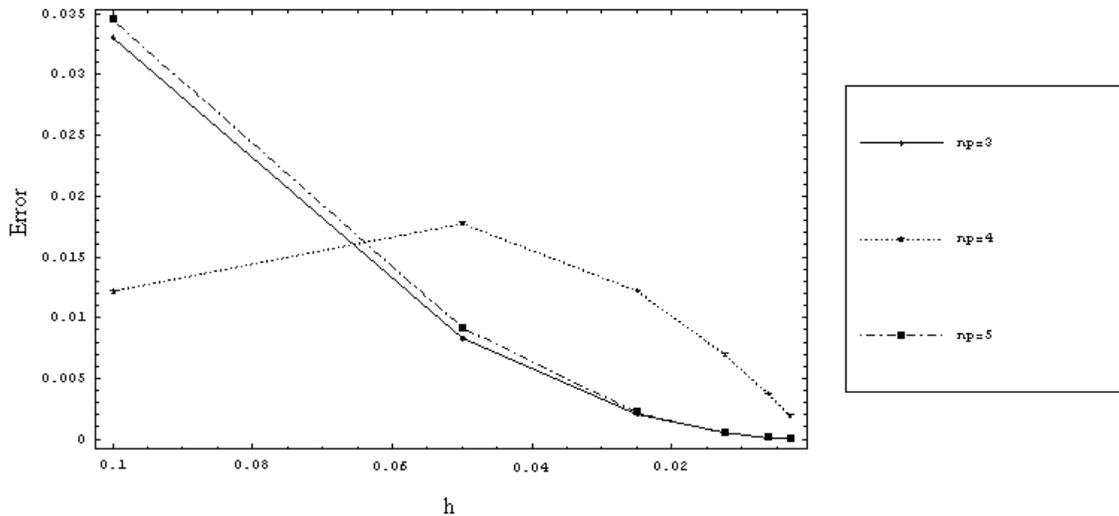


Figura 3.7: Convergencia de la solución, para nubes de 3, 4 y 5 puntos.

Como se puede observar en la figura (3.7) en todos los casos la aproximación mejora a medida que aumenta el número de puntos de la discretización, lo que indica que el método MPF converge.

3.6.2. Influencia de la función de ponderación

En la mayoría de los trabajos desarrollados en el marco del MPF la función de ponderación más usada es la función de ponderación de Gauss, por su flexibilidad debido a la presencia en ella del factor de apuntamiento, el cual permite ajustar su forma de una manera sencilla (Sacco, 2002). A continuación se puede observar como influye éste parámetro en la convergencia del MPF. La expresión de la función de ponderación gaussiana, como se vio en el capítulo 1 viene dada por:

$$\varphi_I(x) = \begin{cases} 1 & d_I = 0 \\ \varphi(d_I, r_I) & 0 \leq d_I < r_I \\ 0 & d_I \geq r_I \end{cases}$$

Donde $\varphi(d_I, r_I) = \frac{\text{Exp}[-(d_I / \beta_I)^k] - \text{Exp}[-(r_I / \beta_I)^k]}{1 - \text{Exp}[-(r_I / \beta_I)^k]}$, $\beta_I = c r_I$ y $r_I = \gamma d \max_I$.

En la figura (3.8) se muestra como se comporta el error al variar c en el intervalo de $[0.1, 0.9]$ y dejar fijos a $k = 2$ y $\gamma = 1.5$.

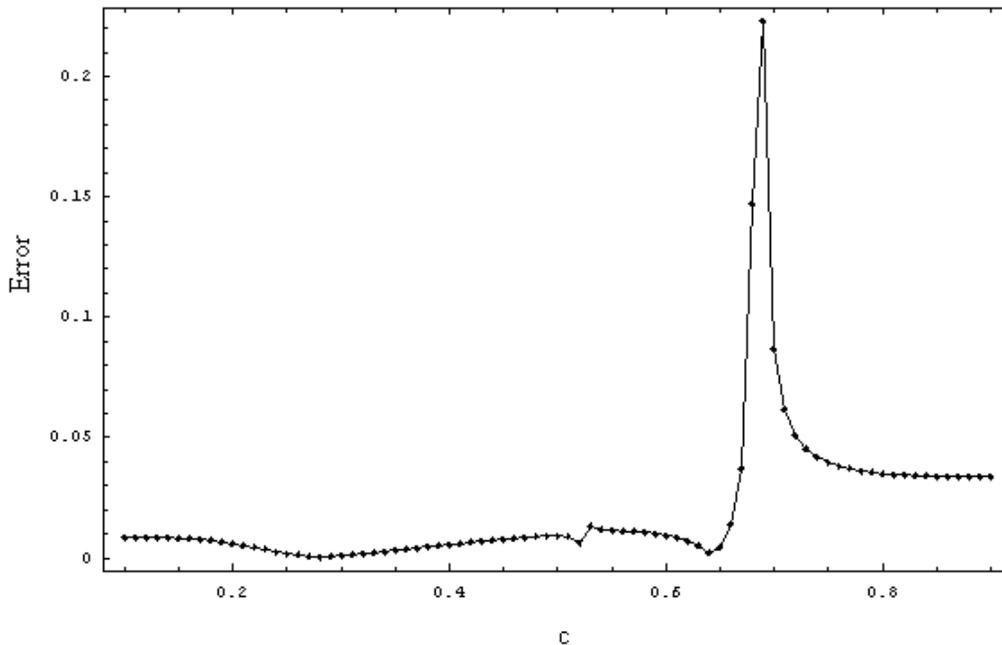


Figura 3.8: Evolución del error de la solución en función del parámetro c .

En esta curva se representa el error para nubes formadas por 5 puntos y con una distribución equiespaciada de 321 puntos. Donde se puede observar claramente que para valores de c en los intervalos de $[0.2, 0.4]$ y $[0.6, 0.8]$ se obtiene el menor error.

Otro parámetro que debe tenerse en cuenta es k . La figura (3.9) muestra la evolución del error al variar k desde 1 hasta 10, fijando $c = 0.5$, $\gamma = 1.5$, donde se puede apreciar que el error mínimo se obtiene para valores de k entre 4 y 6.

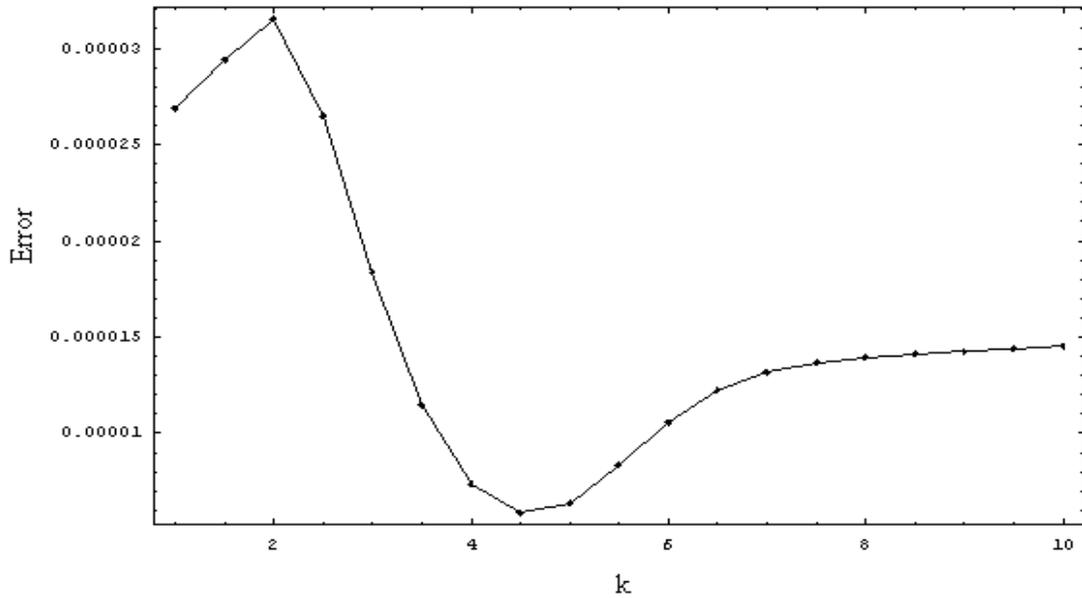


Figura 3.9: Convergencia de la solución al variar el parámetro k.

3.6.3. Influencia de la base de aproximación

El orden de la función aproximante viene dado por la base de aproximación que se utilice en el proceso de minimización. En este trabajo se utilizaron bases polinómicas completas de forma tal que, para una función de forma de orden l la base unidimensional tiene la forma: $p^T(x) = (1 \ x \ \dots \ x^l)$

En el problema planteado en (3.5) es necesario calcular la segunda derivada de la función incógnita, esto limita la elección de la base, ya que estas deben ser de orden mayor o igual que dos, con lo que se excluyen las aproximaciones lineales y constantes. En la figura (3.9) se grafica la convergencia obtenida, para bases polinómicas de grado 2, 3 y 4, utilizando nubes de 5 puntos, y en la función de ponderación se fijaron los parámetros $\gamma = 1.5$, $k = 2$ y $\beta_l = 0.5 r_l$.

Se obtuvieron resultados con polinomios completos de segundo, tercer y cuarto grado como se puede observar en la figura (3.9). En esta gráfica sin dudas resalta el hecho de

haber obtenido prácticamente la misma convergencia de $O(h^2)$ para las bases de segundo y tercer grado. Mientras que para la base de cuarto grado se obtiene una convergencia de $O(h^4)$.

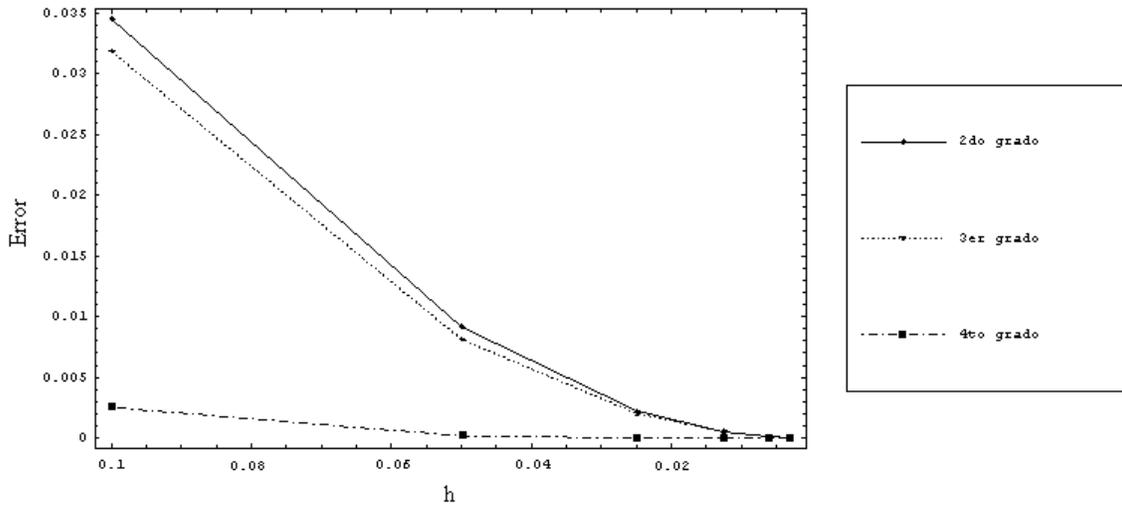


Figura 3.10: Convergencia de la solución utilizando distintas bases polinómicas.

3.7. Conclusiones

En este capítulo se hizo la propuesta de un algoritmo sencillo y lo más general posible, para la aplicación del MPF. Se explicó a través de la ecuación convección el procedimiento abordado en el Capítulo 2. Se ilustró como se realiza la estabilización del sistema de ecuaciones. Se mostró mediante un ejemplo el funcionamiento del MPF, o sea, como se procede paso por paso. Y por último se analizan algunos parámetros que influyen en la convergencia del MPF.

Conclusiones y líneas futuras de investigación

En el presente trabajo de investigación se estudió la formulación del Método de Puntos Finitos, el cual pertenece a la familia de los denominados métodos sin malla surgidos como respuestas a algunas deficiencias mostradas por los métodos tradicionales como el Método de Elementos Finitos, el Método de Volúmenes Finitos, etc. Las numerosas propuestas realizadas en este campo son una clara demostración de las expectativas que el nuevo concepto ha despertado en el mundo de los métodos numéricos.

El Método de Puntos Finitos es un método muy sencillo y se ha aplicado con éxito en el marco de la mecánica de sólidos y de fluidos. En estos momentos es objeto de numerosas investigaciones expandiéndose cada día más su radio de acción. Este método consta de dos etapas fundamentales: una es la obtención de la función aproximante a través del método de Mínimos Cuadrados Ponderados Fijos y la otra es la discretización de las ecuaciones de gobierno del problema mediante el Método de Colocación Puntual.

Con respecto a la aproximación en este trabajo se abordaron los aspectos esenciales para la obtención de las funciones de forma como lo son: la discretización del dominio en puntos, la generación de nubes de puntos, la definición de los subdominios de influencia, las funciones de ponderación y la base de aproximación.

El Método de Colocación Puntual en sí mismo no presenta ninguna dificultad, siendo sin lugar a dudas la técnica de discretización más sencilla. Sin embargo los problemas que se presentan para una correcta imposición de las condiciones de contorno hicieron que la mayoría de los autores se inclinen por las formulaciones débiles (Método de Galerkin). Estas deficiencias se han ido resolviendo paulatinamente con los trabajos de (Sacco, 2002) y (Perazzo, 2002), con la estabilización del ecuaciones mediante el Cálculo Finitesimal.

El objetivo fundamental que se había planteado en esta tesis, consistía en la formalización matemática del MPF. Para darle cumplimiento a este objetivo se elaboraron definiciones con mayor rigor matemático, que como aparecían en la bibliografía consultada. Además se mostró una metodología para la aplicación del MPF a un problema dado, la cual llega a un punto culminante con la propuesta de un algoritmo para llevar a la práctica esta metodología. Y por último se hacen algunos análisis sobre la convergencia.

Para la corrida de los ejemplos se implementó en el Mathematica 5.1, el MPF en una dimensión, con una distribución de puntos equiespaciada y función de ponderación gaussiana. Es importante resaltar que el código del MPF se encontraba inicialmente desarrollado en Matlab por Luis C. Pérez Pozo en los anexos de uno de sus trabajos para un problema en específico, pero debido a las posibilidades que brinda el Mathematica con el cálculo simbólico y con vistas a generalizarlo es que se implementa este método utilizando el paquete Mathematica.

Se recomienda seguir profundizando en la formulación del método con vistas a continuar haciéndole mejoras hasta lograr del MPF una herramienta numérica lo suficientemente potente y confiable, para ser usada en proyectos de ingeniería. Es también recomendable la utilización de este trabajo como material de apoyo a la docencia tanto para el pregrado como para el postgrado (Doctorado Curricular) impartido por la Dra. Lucía Arguelles Cortés.

Bibliografía

ALURU, M. J. M. Y. N. R. Simulation of electroosmosis using a Meshless Finite Point Method.

ARANDA, J. (2006) Desarrollo de un módulo de cálculo para el análisis lineal de geometrías 3D mediante un método sin malla. *Departamento de Mecánica*. Valparaiso, Chile, Universidad Técnica Federico Santa María.

BURDEN, R. L. (2003) *Análisis Numérico*, Australia.

C. HÉRAULT, V. L., Y. MARECHAL, AND G. MEUNIER (2001) The node distributions for meshless methods. *The European Physical Journal*.

C. J. WORDELMAN, N. R. A., U. RAVAIOLI (2000) A Meshless Method for the Numerical Solution of the 2-D and 3-D Semiconductor Poisson Equation. *The world's knowledge*.

CUETO-FELGUEROSO, L. (2002) Una visión general de los métodos sin malla: formulación y aplicaciones. La Coruña España, Universidade da Coruña.

CUETO-FELGUEROSO, L. (2005) Partículas, volúmenes finitos y mallas no estructuradas: simulación numérica de problemas de dinámica de fluidos. La Coruña España, Universidade da Coruña.

CHAO, M. (1997) Introducción a los métodos sin malla: fundamentación y desarrollo de formulaciones de mínimos cuadrados ponderados.

- DU, C. (1998) A Comparison of Finite Point Method and Finite Element Method for Two Dimensional River Flow Problems. *Numerical Simulation of River Flow*.
- E. OÑATE, F. P. A. J. M. (1999) Advances in the Stabilized Finite Point Method for Structural Mechanics.
- IBÁÑEZ, D. G. (2004) Aproximaciones Mixtas en Métodos de Lagrange-Galerkin de Vecindad Natural. Aplicación a la Mecánica de Sólidos y de Fluidos. Zaratoga, Centro Politécnico Superior de la Universidad de Zaratoga.
- J. MIGUEL CANET, F. P. Y. E. O. (2002) El Método del Punto Finito Estabilizado en la Mecánica de Sólidos.
- KOLMOGOROV, A. N. (1978) *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*, Moscú, Ed. MIR.
- LIPSCHUTZ, S. (1969) *Teoría y problemas de teoría de conjuntos y temas afines*, La Habana, Ciencia y Técnica.
- LIU, G. R. (2003) *Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*, CRC Press, USA, 696.
- MARTIN, A. (2003) Análisis de la sensibilidad del factor de apuntamiento en los cálculos de forma en un método sin malla.
- MARTIN, A. (2006) Análisis y formulación de un estimador del error en el Método sin malla de Puntos Finitos. *Departamento de Mecánica*. Valparaiso, Chile, Universidad Técnica Federico Santa María.

MUÑIZ, J. L. F. (1987) *Análisis Matemático*, La Habana, Editorial Pueblo y Educación.

NIGRO, N. (2005) *Métodos Numéricos en Fenómenos de Transporte*, Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería.

ORTEGA, E. (2004) Método de Puntos Finitos. Un análisis sobre el efecto de los parámetros que definen las nubes en aproximaciones de Segundo y cuarto orden.

PERAZZO, F. (2002) Una metodología numérica sin malla para la resolución de las ecuaciones de elasticidad mediante el método de puntos finitos. Universidad Politécnica de Catalunya.

PERSSON, P.-O. (2005) Mesh Generation for Implicit Geometries. *Department of Mathematics*. Massachusetts Institute of Technology.

SACCO, C. (2002) *Desarrollo del Método de Puntos Finitos en Mecánica de Fluidos*, Barcelona.

W. X. WANG, Y. T. (2004) Isoparametric finite point method in computational mechanics. *The world's knowledge*.

Zienkiewics, O. C., Taylor, R. L. (2000) *The Finite Element Method*, Butterworth-Heinemann, UK.

Apéndice A

Algunos conceptos, definiciones y resultados de Análisis Matemático y Topología.

Definición 1 (Espacio métrico):

Un espacio métrico es un par (X, d) formado por un conjunto X y una aplicación $d : X \times X \rightarrow R_+$, llamada distancia o métrica sobre X , que cumple los siguientes axiomas:

$$(D1) \text{ Si } x \neq y \Rightarrow d(x, y) > 0, \forall x, y \in X$$

$$(D2) \text{ } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \forall x, y \in X$$

$$(D3) \text{ } d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$$

$$(D4) \text{ } d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in X$$

Definición 2 (Subespacio métrico):

Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$; entonces la métrica $d_A : A \times A \rightarrow R_+$ definida por $d_A(x, y) = d(x, y), \forall x, y \in A$ se llama métrica inducida por d sobre A y (A, d_A) se llama subespacio métrico de (X, d) .

Nota: Cualquier subconjunto de R^n es un espacio métrico.

Definición 3 (Cubrimiento):

Se dice que una colección $F \subset P(X)$ constituye un cubrimiento de una parte $A \subset X$, si $A \subset \bigcup F$. En particular F es un cubrimiento de X si y solo si $\bigcup F = X$.

Definición 4 (Cubrimiento puntualmente finito)

Sea $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ un cubrimiento de un espacio métrico (X, d) . Se dice que $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ es *puntualmente finito*, si cada punto $x \in X$ está contenido solamente en un número finito de los conjuntos U_α :

$\forall x \in X, \{\alpha \in I : x \in U_\alpha\}$ es finito.

El cubrimiento $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ es *localmente finito*, si para cada $x \in X$ existe una vecindad

$v \in \mathcal{V}(x)$ que interseca solamente a un número finito de los U_α :

$\forall x \in X \exists v \in \mathcal{V}(x) : \{\alpha \in I : v \cap U_\alpha \neq \emptyset\}$ es finito.

Definición 5 (Refinamiento)

Sea $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ un cubrimiento de un espacio métrico (X, d) . Un cubrimiento $(W_\beta)_{\beta \in J}$ de X

se dice que es más fino o que es un *refinamiento* de $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ si

$\forall \beta \in J, \alpha \in I : W_\beta \subset U_\alpha$.

$(W_\alpha)_{\alpha \in I}$ se llama *encogimiento* de $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ si

$\overline{W}_\alpha \subset U_\alpha \quad \forall \alpha \in I$.

Teorema 1

Todo cubrimiento abierto puntualmente finito de un espacio métrico posee un encogimiento.

Propiedad equivalente a la normalidad en espacios métricos:

Sea $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ un cubrimiento abierto localmente finito de un espacio métrico (X, d) y sea

$(W_\alpha)_{\alpha \in I}$ un encogimiento de dicho cubrimiento. Según el teorema de Urysohn existe

una función continua $f_\alpha : X \rightarrow [0, 1]$ que es igual a 1 sobre \overline{W}_α y que se anula fuera de

U_α . Estas funciones nos sirven para descomponer toda función real continua sobre X en

una familia de funciones que solo localmente, son diferentes de 0.

Definición 6 (Soporte de una función)

Sean (X, d) un espacio métrico y $f : X \rightarrow R$ una aplicación. Entonces el conjunto

cerrado $sop(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$ se llama soporte de f .

Lema 1

Si $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ es una familia de funciones reales continuas sobre (X, d) tal que la familia de sus soportes $(\text{sop } f_\alpha)_{\alpha \in I}$ es *localmente finita*, entonces la función suma

$$f = \sum_{\alpha \in I} f_\alpha : X \rightarrow R \text{ es continua.}$$

Definición 7 (Partición de la unidad)

Sean (X, d) un espacio métrico. Una familia $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$ de funciones continuas

$\varphi_\alpha : X \rightarrow R$ se llama *partición de la unidad* sobre (X, d) si cumple:

i.) La familia de $(\text{sop } \varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$ es localmente finita;

ii.)
$$\sum_{\alpha \in I} \varphi_\alpha(x) = 1 \quad \forall x \in X.$$

iii.)

Definición 8 (Partición de la unidad subordinada a un cubrimiento)

Sea (U_α) un cubrimiento de (X, d) ; entonces una partición de la unidad $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$ se llama subordinada al cubrimiento $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ si para todo $\alpha \in I$ se tiene $\text{sop } \varphi_\alpha \subset U_\alpha$.

Corolario 1

En un espacio métrico (X, d) , todo cubrimiento abierto, localmente finito, posee una partición de unidad subordinada.

Definición 9 (linealmente independiente):

Se dice que el conjunto de funciones $\{p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)\}$ es linealmente independiente en $[a, b]$ si, siempre que $c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + \dots + c_m p_m(x) = 0$, para cualquier $x \in [a, b]$, se tiene que $c_0 = c_1 = \dots = c_m = 0$. De lo contrario se dice que el conjunto de funciones es linealmente dependiente.

Definición 10 (Funciones de clase C^k)

Una función $f : \Omega \rightarrow R$ se dice que es k veces derivable con continuidad o de clase $C^k = C^k(\Omega)$ si sus derivadas de orden j , donde $0 \leq j \leq k$, existen y son continuas en el dominio Ω . Una función de clase C^0 denota simplemente una función continua. Una función de clase C^∞ es aquella que posee derivadas continuas de cualquier orden.

Definición 11 (Norma de A)

Sea A una matriz cuadrada de orden n , $A = [a_{ij}]$, se define la norma de A como:

$$\|A\|_\infty = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right\}, \quad i = 1, \dots, n$$

Definición 12 (Número de condición)

El número de condición del sistema lineal $Ax = b$ se denota $Cond(A)$ y se define como:

$$Cond(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$$

El número de condición de la matriz permite medir el mal condicionamiento del sistema.

Es fácil ver que:

$$Cond(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty \geq \|AA^{-1}\|_\infty = \|I\|_\infty = 1$$

Esto es, el número de condición siempre es mayor o igual que 1. Luego se llega a la conclusión:

- Si $Cond(A) \cong 1$ se asegura que el sistema lineal está bien condicionado.
- Si $Cond(A) \gg 1$ indica un mal condicionamiento.

Definición 13 (Matriz de banda)

Sea A una matriz cuadrada de orden n , $A = [a_{ij}]$, recibe el nombre de *matriz de banda* si $\exists p, q \in Z : p > 1 \wedge q < n$, que tienen la propiedad de que $a_{ij} = 0$ siempre que $i + p \leq j$ ó $j + q \leq i$. El *ancho de banda* de este tipo de matrices se define como $w = p + q - 1$.

Apéndice B

Condiciones de contorno

En cuanto a las condiciones de contorno, no pueden ser especificadas arbitrariamente. Debe haber restricción tanto en el número de ellas como en el orden de los operadores que aparecen en las mismas.

Por el momento, de manera general se planteará que si $A(u) = f$ es una ecuación diferencial donde A es un operador de orden $2m$. Γ la frontera de Ω (suficientemente suave), entonces se requiere: especificar m condiciones en cada punto de frontera. Para facilitar el tratamiento mediante operadores, las condiciones se escriben en la forma:

$$B_j(u) = g_j, \quad j = 0, \dots, m-1 \quad (2.24)$$

Cada B_j es un operador diferencial (denominado operador de contorno), y su orden q_j satisface $0 \leq q_j \leq 2m-1$.

Definición: Si el orden de B_j es j , $\forall j = 0, \dots, m-1$, el conjunto de condiciones de contorno se llama sistema de Dirichlet (de orden m).

EJEMPLO: Si se considera el problema de contorno, donde $\Omega = (0, 1)$; la ecuación diferencial es:

$$\frac{d^4 u}{dx^4} + 2 \frac{d^2 u}{dx^2} + 3 \frac{du}{dx} + u = f$$

y las condiciones de contorno (o de frontera) están dadas por:

$$u(0) = 0, u(1) = 0, u'(0) = 1, u'(1) = 2$$

Aquí se puede observar que: $m = 2$; $2m = 4$ (orden); $m-1 = 1$, luego $j = 0, 1$ (pueden definirse B_0, B_1). En B_0 y B_1 pueden existir derivadas hasta el orden $2m-1 = 3$.

B_0 y B_1 se definen así:

$$B_0 = (u(0), u(1)) = (0, 0); \quad B_1 = (u'(0), u'(1)) = (1, 2)$$

Como el orden de B_0 es 0 y el de B_1 es 1, el sistema de condiciones de contorno se denomina de Dirichlet.

Suponiendo que el orden de la ecuación diferencial se ha denominado $2m$. Entonces el conjunto de condiciones de contorno se particiona en dos subconjuntos y reciben las denominaciones siguientes:

- i) Las condiciones de contorno esenciales son aquellas de orden $< m$.
- ii) Las condiciones de contorno naturales son aquellas de orden $\geq m$.

EJEMPLO: Sea el PC:

$$-(pu')' + qu = f$$

$$u(0) = u'(\pi) = 0$$

En este caso $2m = 2 \Rightarrow m = 1$

$u(0) = 0$ tiene orden $0 < 1 \Rightarrow$ es una condición esencial

$u'(\pi) = 0$ tiene orden $1 = m \Rightarrow$ es una condición natural

Anexos

Código del MPF en 1D desarrollado en el Mathematica 5.1.

```

MPF1D [n_, np_, m_, A_, B_]:=
  Block[{num, delta, coord, puntos, SortRows, nubes, dmax, puntoXI, nubeI,
    X, d, dist, base, wgauss, Fformas, Nij, XI, puntoXj, xj, P, WI, AI, BI, mat,
    MatZeros, K, pglobal, KG, b, n\[CapitalGamma], pcont, nubecont, Nijcont,
    Kcont, uh, Nijxi, suma, uhh, baseij, ux},

  (*****
  (*****      Discretización del intervalo      *****)
  (*****
  xi = B[[1, 1, 1]];
  xf = B [[2, 1, 1]];
  num = Range[n];
  delta = (xf - xi)/(n - 1);
  coord = Range[xi, xf, delta];
  puntos = Transpose [{num, coord}];

  (*****
  (*****      Generación de las nubes      *****)
  (*****
  nubes = {}; dmax = {};
  For [i = 1, i ≤ n,
    XI = puntos [[i, 2]];
    puntoXI = puntos[[i,1]];
    nubeI = {puntoXI};
    d = {};
    For [j = 1, j ≤ n,

```

```

If [i ≠ j,
  X = puntos[[j, 2]];
  dist = Abs[XI - X];
  AppendTo[d, {puntos[[j, 1]], dist}]
; j++];
d = SortRows[d, 2];
nubeI = Flatten[AppendTo[nubeI, Table[d[[i, 1]], {i, np - 1}]]];
dmax = AppendTo[dmax, d[[np - 1, 2]]];
nubes = AppendTo[nubes, nubeI]
; i++];

(*****
***** Funciones auxiliares para el cálculo de las funciones de forma *****
*****)
base_s[x_, xI_, r_] := Table[((x - xI)/r)^(i - 1), {i, s}];

wgauss[dmax_, x0_, xj_] := Block[{r, \[Beta], d1, z, f},
  r = 1.5 dmax; \[Beta] = 0.5 r;
  d1[x : {_}, y : {_}] := Norm[x - y];
  z[x_] = d1[{x}, {x0}];
  f[x_] = Piecewise[{{

$$\frac{e^{-\left(\frac{z[x]}{\beta}\right)^2} - e^{-\left(\frac{r}{\beta}\right)^2}}{1 - e^{-\left(\frac{r}{\beta}\right)^2}}, z[x] < r\}}, 0];
  Map[f, xj]
];

(*****
***** Cálculo de las funciones de forma *****
*****)$$

```

```

Fformas = {};
Nij = {};
For[i = 1, i ≤ n,
  puntoXI = nubes[[i, 1]];
  XI = puntos[[puntoXI, 2]];
  X = {};
  For[j = 1, j ≤ np,
    puntobj = nubes[[i, j]];
    xj = puntos[[puntobj, 2]];
    X = AppendTo[X, xj]
  ; j++];
P = Table[basem[x, XI, dmax[[i]]] /. x → X[[k]], {k, np}];
WI = DiagonalMatrix[wgauss[dmax[[i]], XI, X]];
AI = Transpose[P]. WI . P;
BI = Transpose[P]. WI;
formai = basem[x, XI, dmax[[i]]]. Inverse[AI] . BI;
u[x_] = formai;
Fformas = AppendTo[Fformas, A[[1, 1]] /. x → coord[[i]]];
Clear[u];
Nij = AppendTo[Nij, formai]
; i++];

```

```

(*****
(***** Obtención del sistema de ecuaciones ==> KG*uh=b *****)
(*****

```

```

K = MatZeros[n];

```

```

For[i = 1, i ≤ n,

```

```

  For[j = 1, j ≤ np,

```

```

    pglobal = nubes[[i, j]];

```

```

      K[[i, pglobal]] = K[[i, pglobal]] + Fformas[[i, j]]
      ;j++;
i++;
(*****
KG = K;
b = Table[A[[1, 2]] /. x → coord[[i]], {i, n}];
nΓ = Length[B];
For[i = 1, i ≤ nΓ,
  pcont = Flatten[Position[coord, B[[i, 1, 1]]][[1]];
  nubecont = nubes[[pcont]];
  u[x_] = Nij[[pcont]];
  Nijcont = B[[i, 1]];
  Clear[u];
  b[[pcont]] = B[[i, 2]];
  Kcont = Nijcont;
  For[j = 1, j ≤ np,
    pglobal = nubecont[[j]];
    KG[[pcont, pglobal]] = Kcont[[j]]
    ;j++]
; i++];

(*****
(***** Resolución del sistema de ecuaciones (KG*uh=b) *****)
(*****
uh = LinearSolve[KG, b];
(*****
(***** Obtención de la solución (u[xi]) *****)
(*****
Nijxi = Table[Nij[[i]] /. x → coord[[i]], {i, n}];

```

```
ux = {};  
For[i = 1, i ≤ n,  
  suma = 0;  
  For[j = 1, j ≤ np,  
    pglobal = nubes[[i, j]];  
    uhh = uh[[pglobal]];  
    baseij = Nijxi[[i, j]];  
    suma = suma + uhh*baseij  
  ; j++];  
  ux = AppendTo[ux, suma]  
; i++];  
Transpose[{coord, ux}]  
];
```