



UNIVERSIDAD CENTRAL "MARTA ABREU" DE LAS VILLAS  
VERITATE SOLA NOBIS IMPONETUR VIRILIS TOGA. 1948

*Facultad Matemática, Física y Computación*

*Licenciatura en Matemática*

## TRABAJO DE DIPLOMA

*Condiciones de convergencia y estabilidad para el esquema numérico de simulación de la circulación de las aguas de la Bahía de Cienfuegos.*

*Diplomante: Fidel Sosa Núñez.*

*Tutores : MSc. Alain Muñoz Caravaca*

*Lic. Fredy E. Sosa Núñez.*

*"Año 52 de la Revolución"*

*Santa Clara 2010*

CON SU ENTRAÑABLE TRANSPARENCIA





Hago constar que el presente trabajo fue realizado en la Universidad Central Marta Abreu de Las Villas como parte de la culminación de los estudios de la especialidad de Licenciatura en Matemáticas, autorizando a que el mismo sea utilizado por la institución, para los fines que estime conveniente, tanto de forma parcial como total y que además no podrá ser presentado en eventos ni publicado sin la autorización de la Universidad.

---

Firma del autor

Los abajo firmantes, certificamos que el presente trabajo ha sido realizado según acuerdos de la dirección de nuestro centro y el mismo cumple con los requisitos que debe tener un trabajo de esta envergadura referido a la temática señalada.

---

Firma del tutor

---

Firma del jefe del Seminario

# Dedicatoria

---

Este trabajo está dedicado a mi familia, por lo que para mi representa. Además, se lo dedico Rosa del Junco, lugar que me vio nacer .

# Agradecimientos

---

En primer lugar, quisiera agradecerle a mi familia por el apoyo que me han dado durante toda mi carrera y sobre todo ahora en la culminación de mis estudios, a mis amigos, especialmente Allen y Josué. Agradecerles también a todas las personas que de una manera u otra han colaborado en la realización de este trabajo, profesores, integrantes del grupo de modelación del Centro de estudios Ambientales de Cienfuegos. Un agradecimiento especial a Olga, Jorge y Mirel, que me acogieron en su casa para poder terminar mis estudios en tiempo. No quisiera dejar de agradecer al grupo Antioquía, mis colegas en la BK, Miguel Ángel, Julio, Aníbal, Amauris, Dairon, Yoán, a mis compañeros de carrera así como también a todos los profesores de la Universidad que de una manera u otra han contribuido a mi formación como profesional.

# Resumen:

---

Para el estudio de algunos fenómenos físicos dentro de la Bahía de Cienfuegos, el Centro de Estudios Ambientales de Cienfuegos implementó dos modelos hidrodinámicos. Estos modelos resuelven el sistema de ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de los flujos discretizándolas y empleando un esquema en diferencias finitas para su resolución. Los mismos no cumplieron con sus objetivos debido a algunos problemas de convergencia que presentaron. En este trabajo de diploma se hace primeramente un estudio de los modelos más usados para la modelación hidrodinámica y los errores de truncamiento que éstos cometen a la hora de discretizar las ecuaciones. Posteriormente se analizó el comportamiento de las variables de las que dependían estos errores en el área de estudio. Por último se proponen las soluciones para estos problemas y se analizan las condiciones para la estabilidad.

# Índice

<b>Resumen:</b> .....	<b>v</b>
<b>Introducción:</b> .....	<b>1</b>
<b>Problema Científico</b> .....	<b>4</b>
<b>Objetivo General:</b> .....	<b>5</b>
<b>Objetivos específicos:</b> .....	<b>5</b>
<b>Hipótesis de la investigación:</b> .....	<b>5</b>
<b>Principales contribuciones:</b> .....	<b>6</b>
<b>Descripción de cada capítulo.</b> .....	<b>6</b>
<b>Capítulo 1: Modelos Hidrodinámicos</b> .....	<b>9</b>
1.1. Modelos hidrodinámicos más empleados .....	9
1.1.1. Modelos que emplean el MEF.....	10
1.1.2. Modelos que emplean el MDF.....	11
1.2. Tipos de Rejilla o Malla.....	14
1.3. z-coordenada, $\rho$ -coordenada y $\sigma$ -coordenada.....	18
1.4. Conclusiones del capítulo .....	22
<b>Capítulo 2: Modelo Matemático</b> .....	<b>24</b>
2.1. Obtención de las ecuaciones de continuidad y conservación de la cantidad de movimiento .....	24
2.1.1. Ecuación de continuidad.....	24
2.1.2. Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento .....	27
2.2. Clasificación del flujo .....	29
2.2.1. Flujo laminar.....	30
2.2.2. Flujo turbulento.....	31
2.3. Hipótesis asumidas.....	36
2.3.1. Hipótesis hidrostática.....	36
2.3.2. Aproximación de Boussinesq .....	36
2.4. Ecuaciones de gobierno y método de resolución .....	39
2.4.1. Ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento .....	39
2.4.2. Ecuación de continuidad.....	40
2.4.3. Ecuación de variación de presión hidrostática.....	40
2.4.4. Ecuaciones de difusión para temperatura (T) y salinidad (S).....	41
2.4.5. Ecuación de estado.....	42
2.5. Método de resolución.....	42
2.6. Z- coordenadas .....	44
2.7. Sigma-coordenadas .....	45
2.7.1. Representación de la coordenada vertical sigma. ....	45
2.7.2. Control del error.....	46
2.7.2.1. Error con respecto a la transformación de las coordenadas horizontales a la coordenada sigma .....	46
2.7.2.2. Error con respecto al tiempo en la coordenada sigma .....	47
2.8. Coordenadas $\beta$ .....	50
2.8.1. Análisis del error de la coordenada $\beta$ .....	51
2.9. Conclusiones .....	53

<b>Capítulo 3: Método de Resolución y Estabilidad</b> .....	<b>55</b>
3.1. Método de resolución.....	55
3.2. Ecuaciones del módulo 2D.....	55
3.2.1. Ecuación de continuidad promediada en la vertical .....	55
3.2.2. Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento promediada en la vertical	57
3.2.3. Tensiones de Reynolds promediadas en la vertical .....	58
3.2.4. Hipótesis de Boussinesq .....	59
3.2.5. Ecuaciones de difusión para la temperatura y la salinidad promediadas en la vertical	62
3.3. Ecuaciones del módulo 3D.....	63
3.4. Condiciones de contorno.....	63
3.4.1. Tensión tangencial en la superficie.....	64
3.4.2. Tensión tangencial en el fondo .....	64
3.4.3. Flujo de sal y temperatura.....	65
3.4.3.1. Flujo de sal y temperatura en el fondo.....	66
3.4.3.2. Flujo de sal y temperatura en la superficie .....	66
3.5. Acoplamiento de los dos módulos .....	66
3.6. Salto de rana.....	69
3.7. Condición de Courant-Friedrich-Lewy .....	70
<b>Conclusiones</b> .....	<b>73</b>
<b>Recomendaciones</b> .....	<b>73</b>

# Introducción:

---

A través de los años las zonas costeras han provisto al hombre de preciados recursos naturales. Hoy en día muchos de estos ecosistemas son zonas industrializadas y con un alto nivel poblacional. Debido a esto existe un alto potencial de contaminación y aunque es tarea de todos cuidarlas, persiste el daño sobre estas áreas imponiéndose la pérdida del hábitat natural. Para que las actuales y futuras generaciones puedan disfrutar de sus preciados bienes, el hombre ha hecho uso del desarrollo científico y tecnológico que tiene a su disposición para desarrollar proyectos para su conservación y uso racional de sus recursos.

Para tener un conocimiento del efecto que puede provocar un agente contaminante u otro elemento que no es propio del ecosistema sobre este, se necesita un estudio detallado con el objetivo de reducir el impacto del mismo.

Los procesos ecológicos que ocurren en las zonas costeras mantienen un estrecho vínculo con las características hidrodinámicas de estos espacios naturales. Todos los nutrientes, gases disueltos, y materiales en suspensión se trasladan en el medio fluido, por lo que el conocimiento de las características dinámicas de éste, ofrece una oportunidad única para estudiar los lazos entre los procesos físicos y biológicos. La concentración de nutrientes depende de la velocidad con que son renovadas las aguas, la geometría del sistema que encierra a las mismas, y en general a la circulación que domina este sistema. Por otro lado la actividad biológica en los sedimentos depende en gran medida de la velocidad con que las aguas corren en la interface de ambos fluidos (agua – sedimentos).

El uso de modelos matemáticos cuya solución se obtenga a través de métodos numéricos, en los ecosistemas costeros cubanos permite dar respuesta a un grupo de interrogantes como son la influencia del aporte fluvial, la marea, el viento y la radiación

solar en la circulación de las aguas, el tiempo de renovación de las aguas en el ecosistema, el tiempo de residencia de un contaminante en la bahía y el área alcanzada por una descarga accidental en cualquier punto que sea vertida.

En Cuba también los investigadores han considerado la importancia de usar modelos matemáticos en la predicción y evaluación de fenómenos naturales tales como huracanes, penetraciones del mar y en la simulación de procesos físico-químicos que ocurren durante la deriva una mancha de hidrocarburos pronosticando su trayectoria.

La bahía de Cienfuegos tiene un antecedente único en el país en la modelación hidrodinámica de bahías y lagunas costeras cubanas. Tomczack y García, desarrollaron un modelo en 3 dimensiones para el estudio de la dinámica de las aguas y la estabilidad de las mismas a fin de evaluar el impacto de estos procesos en la pesca de camarón que era un importante recurso económico de la provincia (Tomzack, 1975). Sin embargo este enorme salto en el conocimiento encontró limitantes debido al alto costo computacional, el desarrollo del país y en general de los medios informáticos al nivel mundial, lo cual determinó que no pudiera desarrollarse un modelo hidrodinámico que fuera aplicable y útil en tiempo real, permitiendo predecir escenarios de vertidos accidentales, la evaluación de proyectos que suponen cambios en la circulación estuarina, en la calidad de las aguas o los sedimentos.

Numerosas investigaciones revelan el deterioro ecológico de la bahía de Cienfuegos entre los que se destacan: la reducción de las capturas de camarón blanco y rosado; la pérdida de especies o desplazamiento de otras (Rey Novoa, 2004); el incremento de las tasas de sedimentación, de los procesos erosivos en las cuencas hidrográficas (Alonso, 2006) y de los niveles de metales pesados en los sedimentos. En general estas investigaciones señalan a diferentes dimensiones de un proceso que tiene común denominador el agua, que transporta todos los nutrientes y cargas contaminantes que a este sistema arriban, en la cual se transforman y biomagnifican. En estas condiciones la implementación de un modelo hidrodinámico en la bahía de Cienfuegos, en cuyo

entorno se revela un acelerado desarrollo económico, se hace necesario. Aunque los modelos numéricos no constituyen una herramienta única en el análisis de los procesos ambientales, si contribuyen a una mejor interpretación de los mismos y bajo condiciones preestablecidas son poderosas herramientas de predicción de escenarios complejos y ayudan a fortalecer el diagnóstico y monitoreo de los ecosistemas marinos y costeros como la bahía en estudio.

La experiencia adquirida por el Ministerio de Ciencia, Tecnología y Medio Ambiente durante el manejo del accidente ocurrido el 12 de diciembre del 2001, en la Fábrica de Fertilizantes Nitrogenados de Cienfuegos, señalaron también la importancia que tienen los resultados obtenidos a partir de las modelaciones de los ecosistemas costeros. Pese a los esfuerzos de nuestro gobierno en la conservación de este recurso natural, la ocurrencia de más de un derrame de hidrocarburos o la descarga continua de un residual impone la necesidad de profundizar en el conocimiento del impacto y alcance de tales sucesos. Hoy no se cuenta, a este nivel, con modelos numéricos que permitan proceder positivamente ante tales amenazas. El análisis cuidadoso y el enfoque de los resultados en el marco de principios precautorios, permite ganar tiempo ante un desastre, lo que se traduce en una reducción de los impactos económicos y sociales que provocan estos eventos.

A partir del año 2005, y gracias a un acuerdo de colaboración entre el Centro de Estudios Ambientales de Cienfuegos (CEAC) y el IRD *Noumea Center* de Nueva Caledonia, se comenzó la implementación de un modelo hidrodinámico denominado MARS3D, desarrollado por la División de Medio Ambiente y Planificación Costera del IFREMER, Francia. Los resultados positivos obtenidos por estos especialistas, en los estudios realizados con este modelo, señalaron nuestra propia necesidad de contar con un sistema integral que utilizando los métodos numéricos pudieran dar una interpretación lo más realista posible de los procesos que ocurren en la bahía de Cienfuegos.

Este modelo hidrodinámico al implementarse presentó inestabilidades para la modelación de la onda, teniendo entonces que abortar la implementación.

Además del MARS3D se intentó implementar el *Princeton Ocean Model* (POM), diseñado en la Universidad de Princeton por Alan Blumberg y George Mellor, y al igual que el modelo inicial presentó inestabilidades.

El modelo MARS3D pudo ser implementado haciendo una prolongación del canal de entrada de la bahía y considerando el territorio restante tierra. Esta consideración aunque puede dar buenos resultados, parte de despreciar zonas con grandes gradientes de profundidad que afectan el comportamiento del flujo. De estas problemáticas se deriva nuestro problema científico.

## **Problema Científico**

- ¿Son factibles los modelos POM y MARS3D para su implementación en la bahía de Cienfuegos?
- ¿Cómo se comporta el error al discretizar las ecuaciones?
- ¿Qué condiciones deben cumplir los métodos numéricos empleados por estos modelos para su estabilidad?

## **Objetivo General:**

- Determinar las coordenadas más adecuadas para la modelación de las aguas de la bahía de Cienfuegos.

## **Objetivos específicos:**

- Hacer un tratamiento de los errores de truncamiento dados por la aplicación del cambio de coordenadas cartesianas a coordenadas sigma.
- Establecer la transformación de coordenadas más apropiada y aplicarla a las ecuaciones usando un esquema en Diferencias Finitas.
- Analizar la condición de estabilidad numérica y física, CFL para el paso de la onda de marea por el canal de la bahía de Cienfuegos, Cuba.
- Determinar una relación entre el paso temporal y espacial para que se cumplan la condición de convergencia del método numérico y la reproducción del proceso físico que se intenta simular.

## **Hipótesis de la investigación:**

- Si se conocen las condiciones de estabilidad numérica para la simulación de la onda de marea en la Bahía de Cienfuegos entonces es posible elaborar e implementar un nuevo modelo hidrodinámico para modelar la circulación de las aguas en este ecosistema.

## **Principales contribuciones:**

- La principal contribución de este trabajo es el CEAC contará con un trabajo teórico basado en la estabilidad y control del error en la discretización del medio continuo como ayuda para la elaboración de un modelo hidrodinámico capaz de representar los procesos y fenómenos físicos que ocurren en la bahía.
- Se detectaron los problemas que impedían la convergencia de modelos hidrodinámicos implementados en la Bahía de Cienfuegos y se proponen nuevas alternativas teniendo en cuenta los mismos y adaptadas a las condiciones específicas del problema que se pretende resolver en pos de obtener soluciones adecuadas al mismo

La justificación de la investigación está dada por la necesidad de modelar y comprender los procesos físicos que ocurren dentro de la bahía. Los modelos hidrodinámicos son capaces de responder las exigencias de estos estudios, pero la inestabilidad del POM y el MARS3D al implementarlos en la bahía de Cienfuegos en condiciones reales no permiten la realización de estos estudios.

## **Descripción de cada capítulo.**

En el primer capítulo se propone un estado del arte de los modelos hidrodinámicos que más se emplean hoy en día así como también algunas de sus principales características. Además se presentan las rejillas más usadas para la discretización vertical y la horizontal, así como algunas de sus principales ventajas y desventajas.

En el segundo capítulo se obtienen teóricamente las ecuaciones de gobierno y se expone el método que utilizan los modelos implementados en la bahía para la resolución numérica de las ecuaciones de gobierno. Se hace un tratamiento de los errores de truncamiento que surgen a partir de la discretización empleada por los modelos POM y

MARS3D para la coordenada vertical y se analiza la influencia de éstos, tomando en cuenta las características topográficas del área de estudio. Se propone por último la discretización que después de los análisis de error se considera la más correcta a la hora de discretizar la coordenada vertical y se analizan los parámetros de los que depende el error en la discretización.

En el capítulo 3 se obtienen las ecuaciones para los dos módulos resultantes de utilizar la técnica splitting para la resolución de las ecuaciones y por último se hace un análisis teórico de la estabilidad de las ecuaciones discretizadas.



# Capítulo 1: Modelos Hidrodinámicos

---

El objetivo de este capítulo, en primer lugar es presentar un estado del arte de los modelos que resuelven numéricamente las ecuaciones que rigen el comportamiento de los flujos y las rejillas que éstos usan para la discretización de estas ecuaciones. También se exponen algunas de las ventajas y desventajas de las coordenadas verticales empleadas por diferentes modelos.

## **1.1. Modelos hidrodinámicos más empleados**

Las ecuaciones que rigen el comportamiento de los flujos son las llamadas ecuaciones de Navier Stokes. Debido a que en la actualidad aún no se ha podido solucionar analíticamente este sistema de ecuaciones diferenciales, ha sido necesario el uso de métodos numéricos.

Para el caso de los estuarios, usualmente se implementan modelos numéricos promediados en la vertical. Éstos se consideran una buena elección cuando se desea analizar el comportamiento hidrodinámico de una masa de agua en términos de superficie libre y volumen de agua. Dado el hecho de la existencia de grandes variaciones de profundidad en el área de estudio de esta tesis, es indispensable conocer la estructura vertical del flujo, información que estos modelos, por sus características, son incapaces de obtener.

En las últimas tres décadas, con el adelanto en el área de la informática, se ha producido un incremento notable en el desarrollo y aplicación de modelos tridimensionales.

Hoy en día, los dos métodos más utilizados por los modelos hidrodinámicos son el Método de Elementos Finitos (MEF) y el Método de Diferencias Finitas (MDF).

### **1.1.1. Modelos que emplean el MEF**

Los ejemplos de modelos basados en elementos finitos más conocidos, aplicados a ecosistemas estuarinos y zonas costeras son:

- QUODDY

El Modelo de Circulación de Dartmouth (QUODDY) (Lynch, 1996). QUODDY es un modelo 3D completamente no lineal que incluye marea, acción del viento, física baroclínica, e incorpora un avanzado modelo de la turbulencia. Es típicamente aplicado a escalas de tiempo estacionales y eventos sinópticos con el propósito de desarrollar circulaciones climatológicas realistas, evaluando las contribuciones de fuerzas individuales a la circulación global, y prediciendo escenarios limitados a corto plazo.

- ADCIRC

El Modelo de Circulación Avanzado (AdvancedCirculationModel – ADCIRC) (Luettich et al., 1992; Luettich y Westerink, 2003), es un modelo completamente 3D no-lineal con resultados satisfactorios simulando mareas 2D, urgencia por tormentas, circulación debido a la acción del viento y permite eventos de secado/mojado en aquellas áreas donde por efecto de las mareas el dominio de trabajo pasa eventualmente de tierra a mar y viceversa; actualmente avanza para incluir el pronóstico de la componente baroclínica. ADCIRC forma parte de los modelos utilizados por la Oficina Naval Oceanográfica de los Estados Unidos (NAVOCEANO, por sus siglas en inglés) corriendo operacionalmente como un simulador no lineal de marea y circulación con acción del viento.

- MOG3D

MOG3D, desarrollado por el Laboratorio de Estudios en Geofísica y Oceanografía Espacial (LEGOS, siglas en francés), para simular la generación y propagación de ondas internas. Basado en el modelo tridimensional de volúmenes finitos FVCOM (FALCONER, 1994). Las rejillas son irregulares horizontalmente y utiliza elementos triangulares, lo que permite una resolución espacial enteramente variable en el plano horizontal llegando a ser más densa en las zonas de mayor interés topográfico. En la dimensión vertical el modelo utiliza una rejilla estructurada siguiendo una sigma coordenada (sobre las cuales se abordarán más adelante en este trabajo). Este modelo coincide con otros en utilizar las ecuaciones primitivas para la superficie libre (POM, ROMS, SYMPHONIE). El esquema de turbulencia usado es el de Mellor-Yamada (Mellor, 1982).

### **1.1.2. Modelos que emplean el MDF**

En el grupo de modelos hidrodinámicos más reconocidos, que usan esquemas en diferencias finitas se encuentran:

- HAMSOM

El modelo HAMSOM (Hamburg Shelf Ocean Model) fue desarrollado en la Universidad de Hamburgo por Backhaus (1983, 1985) y ha sido aplicado en muchos mares costeros del mundo (ver, por ejemplo, Backhaus y Hainbucher, 1987; Rodriguez et al., 1991; Stronach et al., 1993; Simionato et al., 2001, 2004a, 2004b, 2005) demostrando ser una herramienta muy robusta para el estudio de la dinámica de las aguas de plataforma. El modelo HAMSOM se basa en un conjunto de siete ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Las incógnitas son las tres componentes de la velocidad, la presión, la densidad del agua, la salinidad y la temperatura. En el plano horizontal se utilizan las ecuaciones completas de Navier-Stokes y en el vertical, la

ecuación hidrostática. Estas relaciones se usan junto con la ecuación de continuidad, las ecuaciones de conservación de salinidad/temperatura y la ecuación de estado del agua de mar propuesta por la UNESCO en 1981. El modelo puede considerar las fuerzas de viento, presión atmosférica, mareas y gradientes baroclínicos.

- POM

POM es un modelo numérico de circulación desarrollado en la Universidad de Princeton por Alan Blumberg y George Mellor alrededor de 1977. El código está escrito en FORTRAN 77 ya ha sido posteriormente mejorado por una serie de personas y aplicado a un amplio rango de problemas oceanográficos. Una descripción muy citada del modelo fue dada por Blumberg y Mellor (1987). El modelo es a menudo referenciado como Princeton Ocean Model (POM).

POM pertenece a esa clase de modelos donde la realidad es una meta importante y comprende fenómenos de la meso-escala, la cual se comprende de 1 a 100 km de longitud y la de marea de 30 días comúnmente observada en estuarios y la zona costera (Beardsley, 1981). Además de la elevación de la superficie libre del mar que se trata como una variable del pronóstico, el modelo calcula la temperatura, la salinidad, la velocidad 3D y la promedio y la energía cinética turbulenta.

Requisitos de fuerza: Los principales mecanismos físicos que fuerzan la circulación (intercambio de momento, calor y agua con la atmósfera, agua dulce de los ríos, mareas) necesitan ser tomados en consideración para un estudio de simulación significativo. El modelo es estimulado por mediciones diarias del viento, calculadas a partir de observaciones meteorológicas de la velocidad y dirección del viento. La señal de marea es simulada como la suma de cuatro componentes armónicos simples (ondas seno y coseno), cada uno de los cuales posee su propio período, fase y amplitud característica y corresponde con las cuatro. Condiciones de frontera: El dominio de modelación es definido por la batimetría. Interpolaciones temporales y espaciales usando datos de campo colectados de una red de estaciones.

Aspectos numéricos: POM es un modelo de circulación general que resuelve las ecuaciones de movimiento, masa y conservación de calor (las llamadas ecuaciones primitivas) a través de diferencias finitas en una rejilla C de Arakawa (definidas en este capítulo). Utiliza una técnica de separación temporal splitting, la cual se abordará con mayor profundidad en el capítulo 2.

- SYMPHONIE

Symphonie es básicamente un modelo tridimensional de las ecuaciones primitivas del océano y las zonas costeras. Las tres componentes de la corriente, la elevación de la superficie libre, la temperatura y la salinidad son calculadas en una rejilla C de Arakawa. El modelo de turbulencia se logra a través de una ecuación pronóstico para la energía cinética turbulenta y una ecuación de diagnóstico para el mezclado y la dispersión a grandes escalas. Un esquema de saltos por intervalos es usado para el espaciado temporal. Los costos de cálculo son limitados gracias a una técnica de separación temporal que permite calcular el gradiente vertical de la corriente y sus componentes promediados en la vertical de manera separada con pasos de tiempo apropiados. En las fronteras abiertas se aplican condiciones de radiación combinada para restaurar los términos de circulación a gran escala. (Marsaleix P., 2006, Marsaleix P., 2008).

- MARS3D

El modelo hidrodinámico MARS3D fue desarrollado por la División de Medio Ambiente y Planificación Costera del IFREMER, Francia, alrededor de 10 años atrás (Lazure y Jégou, 1998). Inicialmente usado en el estudio del litoral Atlántico francés, el modelo ha sido aplicado a otras regiones, entre las que se destaca el Mar Mediterráneo y otras lagunas costeras. Este modelo tridimensional fue diseñado para representar, tan fielmente como sea posible, el transporte y mezcla de masas de agua en escalas de tiempo que varían desde una hora hasta un día (al menos).

El modelo utiliza un esquema numérico con diferencias finitas para resolver las ecuaciones primitivas Navier-Stokes bajo las aproximaciones hidrostáticas y de Boussinesq. El modelo usa un enfoque de separación del modo barotrópico-baroclínico. Las ecuaciones son solucionadas usando una técnica de separación de los modos interno y externo. El modo externo resuelve la ecuación integrada en la vertical, que reproduce las ondas gravitatorias. El modo interno reúne la información del modo externo (superficie libre, corrientes integradas) y resuelve ecuaciones en la vertical (estructura tridimensional de la corriente).

El modelo está desarrollado en FORTRAN 77, y puede implementarse sobre diversas plataformas (SUN, Linux PC, Compaqcluster, NEC SX5), así como con memoria compartida en sistemas paralelos utilizando la biblioteca de funciones OpenMP, (Douillet, 1998, Douillet P., 2001).

MARS3D es un sistema de modelación numérica general para la simulación de la variación del nivel del agua y la circulación oceánica desde la zona costera hasta unos cientos de kilómetros mar adentro. El mismo simula el comportamiento de flujos tridimensionales no estacionarios, permitiendo la modelación tridimensional de la hidrodinámica y los procesos de dispersión y transporte de contaminantes en el medio marino. Para ello debe ajustarse a las características del sistema en estudio a fin de indicarle correctamente las condiciones iniciales y de fronteras que supone el sistema de ecuaciones diferenciales que se plantea.

## **1.2. Tipos de Rejilla o Malla.**

Las ecuaciones hidrodinámicas resueltas por los modelos oceánicos son discretizadas horizontal y verticalmente en un número finito de elementos con formas diferentes. La resolución espacial de la rejilla horizontal tiene que ser suficientemente fina para poder resolver todos los procesos importantes. Sin embargo, usar una rejilla muy refinada

sobre grandes áreas no es posible debido a la limitación de los recursos computacionales, además del incremento en los errores de redondeo. Los modelos numéricos varían mucho en el tipo de rejilla que utilizan para realizar la discretización horizontal del dominio de cálculo. Los modelos basados en elementos finitos suelen utilizar rejillas no estructuradas, donde los elementos de cálculo o celdas resultan ser triángulos, como se muestra en la Figura 1.1. Estos suelen ser muy flexibles lo cual les permite adaptarse fácilmente a las irregularidades de la línea de costa, siendo muy fácil agregar mayor densidad de puntos en aquellas zonas de especial interés como se muestra en la figura 1.1.

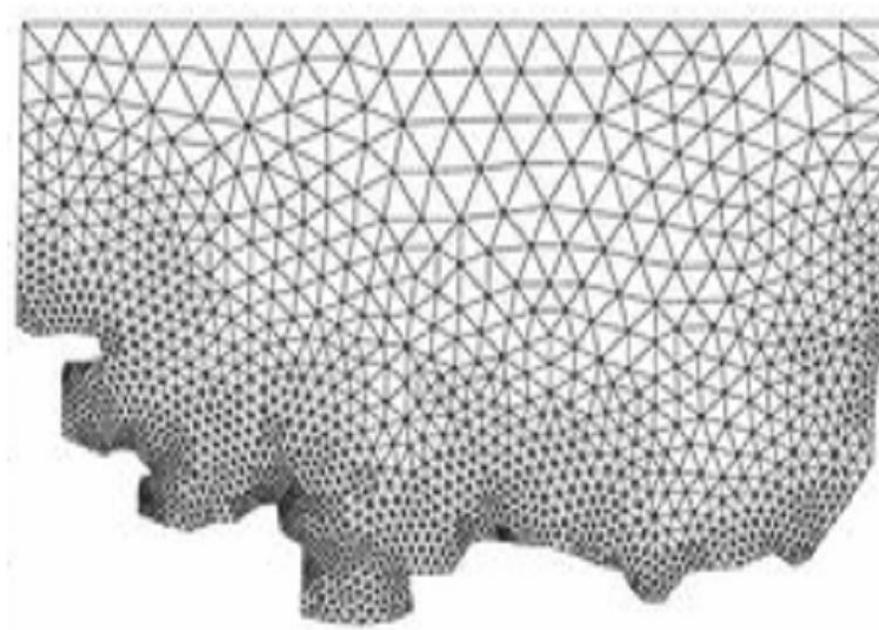


Figura 1.1. Rejilla triangular.

Las rejillas más usadas por los modelos que usan un esquema en diferencias finitas son aquellas basadas en elementos ortogonales. Las mismas pueden ser curvilíneas o rectangulares, como muestra la Figura 1.2.

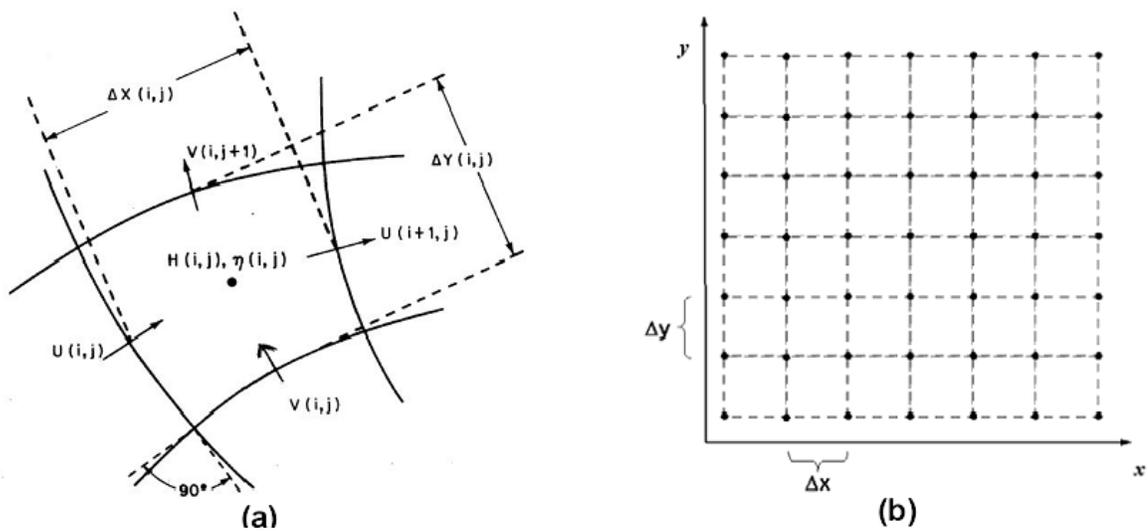


Figura 1.2. Rejillas basadas en elementos ortogonales: (a) rejilla curvilínea, (b) rejilla rectangular.

El *Princeton Ocean Model* (POM) puede utilizar ambos tipos de rejilla representadas en la figura anterior. En el caso del MARS3D sólo podemos utilizar rejillas ortogonales rectangulares.

Luego de discretizar las ecuaciones hidrodinámicas debemos definir dónde se calcularán cada una de las variables incógnitas en las ecuaciones ya sea en los nodos o en las aristas de estos elementos. Existe en la literatura una gran variedad de maneras de realizar esta distribución. Algunas de las más utilizadas por estos modelos hidrodinámicos son las conocidas rejillas de Arakawa (Mesinger, 1976), tal y como aparecen en la Figura 1.3.

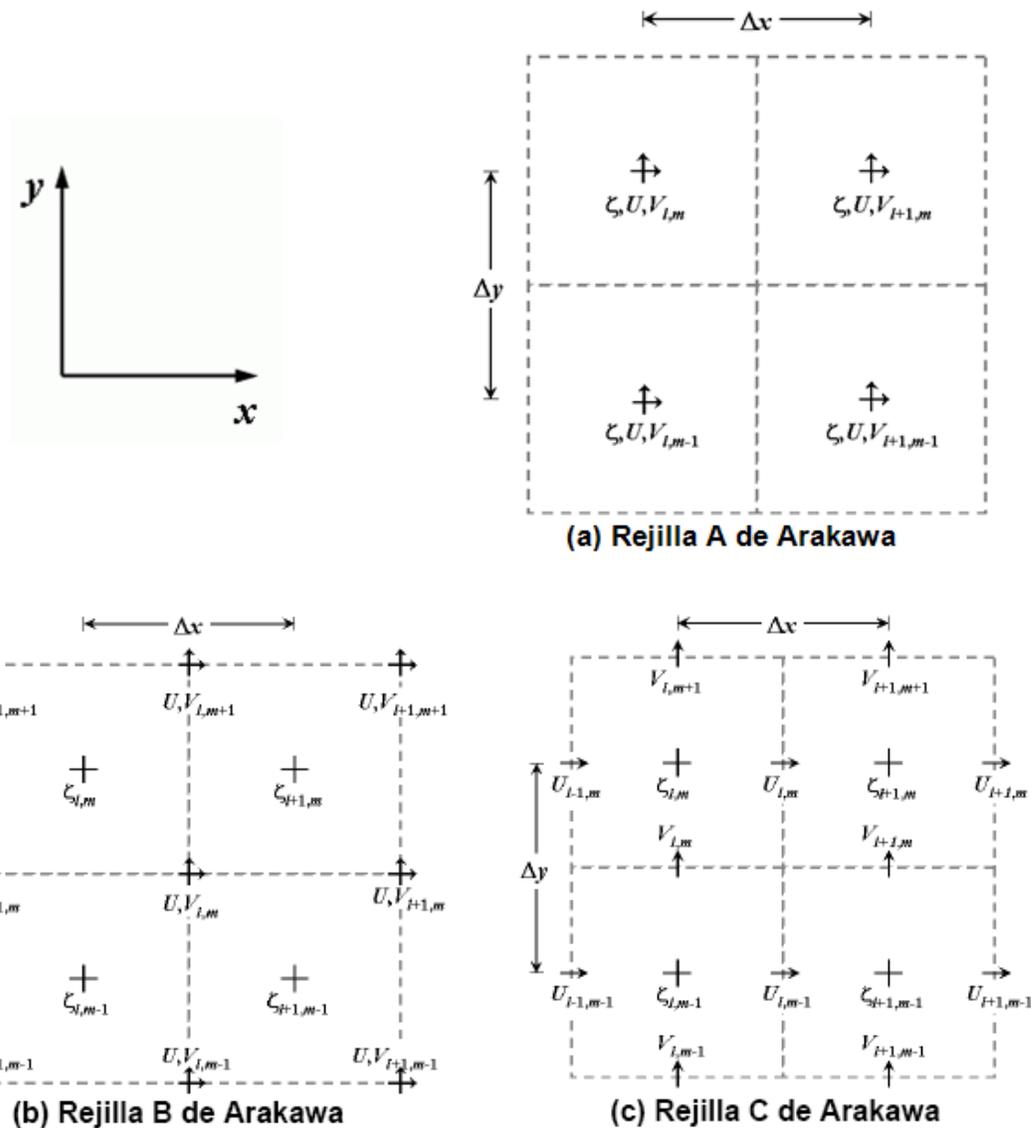


Figura 1.3. Mallas tipo Arakawa.

Cada una de las rejillas posee la posición relativa de las variables  $\zeta$ ,  $u$ ,  $v$  y el tamaño de los pasos horizontales. Los subíndices están referidos a las posiciones  $x$  y  $y$  respectivamente, con la celda superior izquierda en cada diagrama representando el elemento  $(i, j)$ -ésimo de la rejilla. La variable  $\zeta$  representa una cantidad escalar, como la elevación del mar, temperatura, salinidad, etc. Las variables  $u$  y  $v$  son las componentes

horizontales del vector velocidad.

Es importante señalar que estos tipos de rejillas no son las únicas que existen. Con el desarrollo de nuevos modelos se han realizado algunas modificaciones en las rejillas e incluso combinaciones de las mismas cuando se acoplan varios modelos.

Se decide el tipo de rejilla con el que se va a trabajar basándose en la precisión que se necesite en los procesos que en la misma se van a representar. En nuestro caso, al tratarse de modelos de pequeña y mediana escala (1 a 100 km) necesitamos una rejilla que nos permita calcular la mayoría de los procesos que ocurren en la zona costera.

### 1.3. z-coordenada, $\rho$ -coordenada y $\sigma$ -coordenada.

Actualmente, existen principalmente tres tipos de malla vertical utilizados por los modelos en diferencias finitas, en la figura 1.4 se representan éstas.

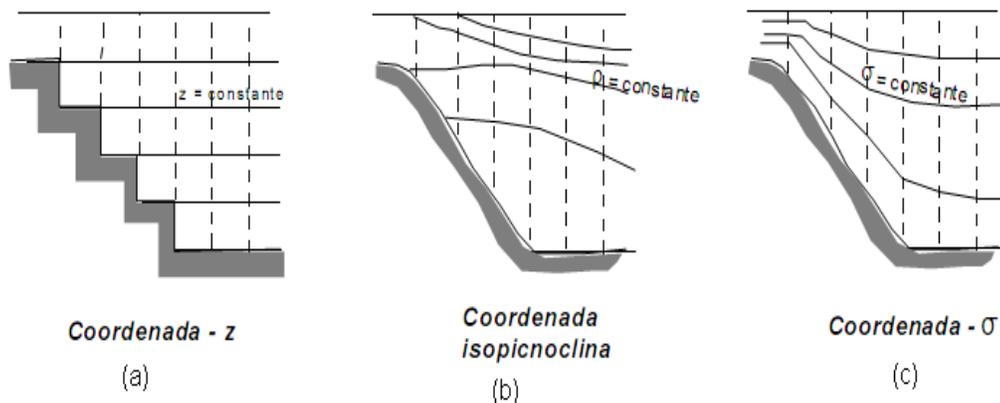


Figura 1.4 Tipos de malla vertical.

El primer tipo es la denominada coordenada z, en el cual el dominio vertical se divide en niveles de  $\Delta z$  constante. Esta coordenada ha sido utilizada, entre otros por Leendertse y Liu (1975) y Lin y Falconer (1997). Este tipo de malla tiene dos problemas importantes: (1) a menos que se use un gran número de puntos en la vertical, las zonas

poco profundas quedan pobremente representadas, y (2) la superficie libre es un contorno móvil cuya representación presenta dificultades en un esquema tan rígido.

El segundo tipo de malla es la coordenada isopicnoclina, donde las coordenadas pasan de ser  $(x, y, z)$  a  $(x, y, \rho)$ , donde  $\rho$  es la densidad potencial. La ventaja de este sistema es la alta resolución que se obtiene cerca de fuertes gradientes de densidad, aunque inversamente, las zonas con mezcla no se representan bien. Otra desventaja de los modelos que utilizan esta técnica es la complejidad de su código, debido a la necesidad de representar la intersección de las superficies de densidad con la superficie y el fondo (GREATBATCH, 1999).

La tercera aproximación es la denominada coordenada  $\sigma$ , en la cual las coordenadas rectilíneas  $(x, y, z)$  se transforman en coordenadas sigma  $(t^*, x^*, y^*, \sigma)$  de acuerdo con la transformación:  $t^* = t$ ;  $x^* = x$ ;  $y^* = y$  y  $\sigma = (z - \eta) / (\eta + h)$ , donde  $h$  es la profundidad y  $\eta$  es la altura de la superficie libre. Esta transformación tiene una larga historia en modelación meteorológica (PHILLIPS, 1957) y en el presente es una técnica de uso muy extendido en modelos 3D de circulación costera, como por ejemplo, Blumberg et al. (1993) y Sheng (1990). Las principales ventajas de esta representación son:

1. Las superficies  $-\sigma$  se adaptan a la superficie libre y a la batimetría.
2. Igual número de capas en zonas someras que en zonas profundas.
3. Fácil aplicación.

Por otra parte posee las siguientes desventajas

1. Errores de truncamiento producidos al calcular la presión baroclínica que inducen movimientos no reales debidos a densidad (HANEY, 1991,

BECKMANN, 1993).

2. Los términos que involucran gradientes horizontales puedan llegar a ser muy grandes en presencia de fuertes pendientes de profundidad debido a estos errores de truncamiento (FORTUNATO, 1994).

Para evitar estos problemas, Haney en 1991 propuso una condición denominada “consistencia hidrostática” asociada a la coordenada  $\sigma$ :

$$\left| \frac{\sigma}{H} \frac{\partial h}{\partial x} \right| \Delta x \leq \Delta z$$

La condición anterior resulta muy restrictiva y casi imposible de cumplir en zonas como los estuarios, donde existen bajos mareales o zonas que llegan a secarse ( $H \approx 0$ ). Además en zonas donde  $\partial h / \partial x \gg \gg$  la condición de Haney también es casi imposible de cumplir (CASTANEDO, 2000). Esta relación se tratará con mayor detenimiento en el capítulo 2

Sheng et al. (1990) resuelven el problema utilizando la coordenada  $\sigma$ , pero calculando los gradientes horizontales en planos de  $z$  constante. Esta solución presenta varios inconvenientes:

1. Se pierde la ventaja que supone la adaptación a la superficie libre de la coordenada  $\sigma$ .
2. Se introducen en el cálculo interpolaciones para calcular los gradientes horizontales, lo cual, además de reducir la exactitud de la solución aumenta el tiempo de cálculo.

Fortunato y Baptista (1994) proponen unas coordenadas denominadas LSC (*localized sigma coordinates*) en las cuales, los gradientes horizontales se resuelven en coordenadas cartesianas, al igual que Sheng et al. (1990), pero a diferencia de éstos cada

vertical se discretiza de forma independiente, lo cual permite más flexibilidad al sistema. Sin embargo, además de los problemas mencionados en el caso anterior, los autores señalan que el algoritmo que utilizan es sólo condicionalmente consistente y presenta inestabilidades.

En la bahía de Cienfuegos fueron implementados los modelos POM y MARS3D, ambos usan las coordenadas sigma para la discretización vertical. Estos modelos presentaron grandes inestabilidades y no fueron capaces de simular la circulación de las aguas de la bahía, por lo que el Centro de Estudios Ambientales de Cienfuegos (CEAC) se dio a la tarea de analizar las condiciones de estabilidad y convergencia del esquema numérico empleado por ambos modelos.

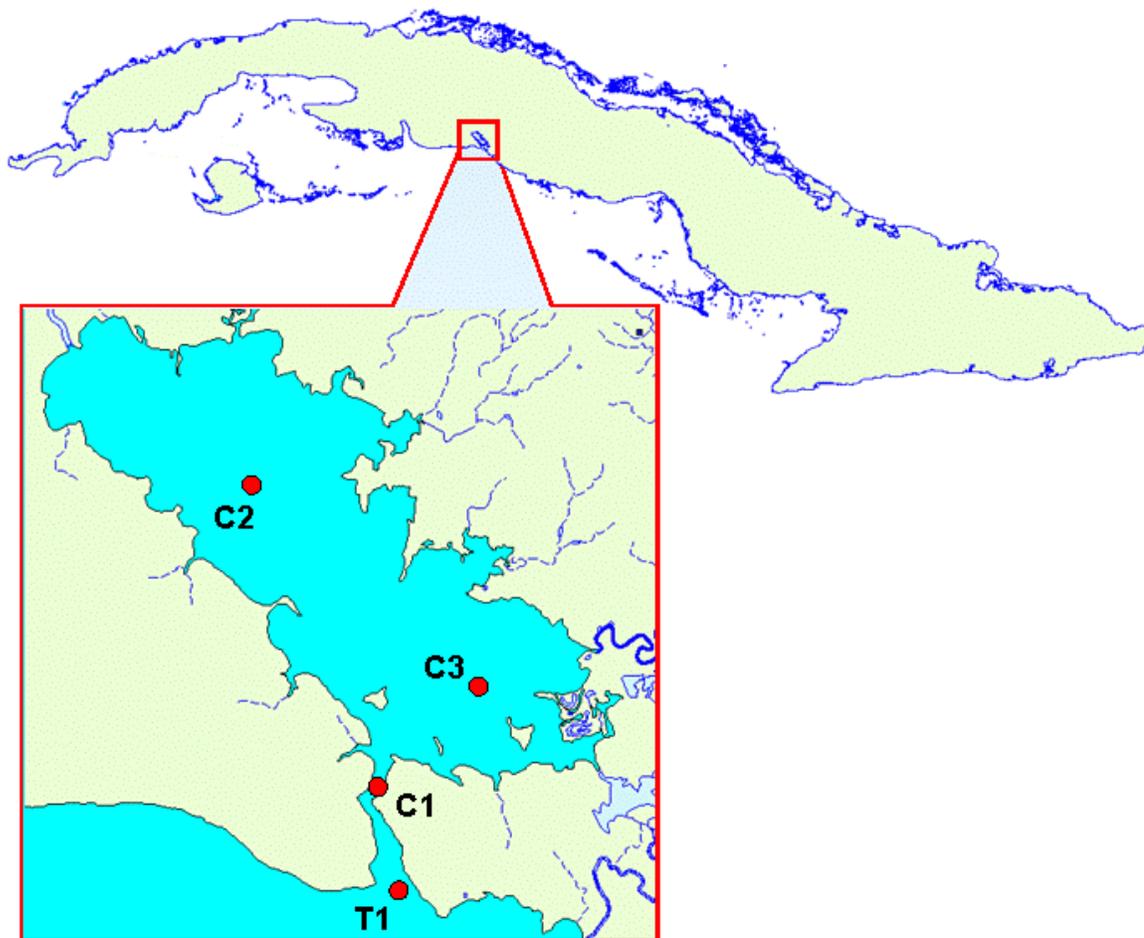


Figura 1.5. Mapa de localización de la bahía de Cienfuegos.

#### **1.4. Conclusiones del capítulo**

En este capítulo se expuso un estado del arte de los modelos hidrodinámicos más empleados en la modelación del movimiento de las aguas así como el tipo de rejillas horizontales y verticales empleadas para la discretización del medio. Por último se hizo un breve análisis de algunas de las ventajas y desventajas de las rejillas más empleadas por los modelos en la vertical.



# Capítulo 2: Modelo Matemático

---

## Obtención de las ecuaciones de continuidad y conservación de la cantidad de movimiento

El objetivo de este capítulo es hacer un análisis de los errores que se cometen en las representaciones de coordenada vertical más usadas por los modelos hidrodinámicos y proponer las más factibles para emplear en la Bahía de Cienfuegos.

### 2.1.1. Ecuación de continuidad

Para derivar la ecuación de continuidad para un flujo no estacionario tridimensional, se considera un volumen de control infinitesimal de aristas  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ , con las componentes de la velocidad  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , (en las direcciones  $x$ ,  $y$ ,  $z$  respectivamente) situadas en el centro del volumen y se considera que se conocen todas las derivadas en ese punto. Aplicando el desarrollo en series de Taylor, definido para cualquier característica del fluido  $\phi$ (velocidad, presión, etc.):

Dirección  $x$

$$\phi\left(x \pm \frac{\Delta x}{2}\right) = \phi(x) \pm \frac{1}{2} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \frac{\Delta x}{1} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2} \pm \frac{1}{8} \frac{\partial^3 \phi(x)}{\partial x^3} \frac{\Delta x^3}{6} + \dots \quad (2.1)$$

Asumiendo que los términos mayores del tercer orden son despreciables, los flujos de masa por unidad de área en la dirección  $x$ , para el volumen de control, son los que se muestran en la Figura 2.1

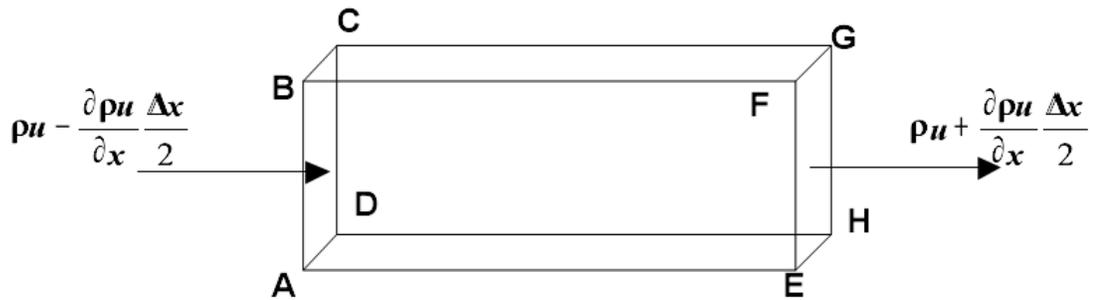


Figura 2.1. Flujo de masa en la dirección  $x$

Procediendo de la misma manera se pueden expresar las componentes del flujo en las otras dos direcciones.

Para la dirección  $x$ , el flujo de masa que entra a través de la cara ABCD, en un intervalo de tiempo  $\Delta t$ , viene dado por:

$$M_{\text{int}} = \left( \rho u - \frac{\partial \rho u}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \Delta z \Delta t \quad (2.2)$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido.

El flujo que sale por la cara EFGH en el mismo intervalo de tiempo es:

$$M_{\text{out}} = \left( \rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \Delta z \Delta t \quad (2.3)$$

Por lo tanto, el flujo neto de masa en la dirección  $x$  es:

$$M_{\text{net}} = M_{\text{int}} - M_{\text{out}} = - \frac{\partial \rho u}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \quad (2.4)$$

Operando de forma similar en las dos direcciones restantes, el flujo neto de masa en el

volumen de control queda:

$$-\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right) \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \quad (2.5)$$

Para calcular el correspondiente cambio de masa dentro del volumen de control, si la masa del fluido en el tiempo  $t$  es  $\rho \Delta x \Delta y \Delta z$ , la masa en los instantes  $t + \Delta t / 2$  y  $t - \Delta t / 2$ , utilizando las series de Taylor, es la siguiente:

$$M_{t+\frac{\Delta t}{2}} = \rho \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial}{\partial t} (\rho \Delta x \Delta y \Delta z) \frac{\Delta t}{2} \quad (2.6)$$

$$M_{t-\frac{\Delta t}{2}} = \rho \Delta x \Delta y \Delta z - \frac{\partial}{\partial t} (\rho \Delta x \Delta y \Delta z) \frac{\Delta t}{2} \quad (2.7)$$

Por lo tanto, el incremento neto de masa en un tiempo  $\Delta t$  puede expresarse como:

$$M_{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \Delta x \Delta y \Delta z) \Delta t \quad (2.8)$$

Igualando el flujo neto de masa dado en (2.4) con el incremento neto de masa dentro del volumen de control, resulta la ecuación de continuidad tridimensional:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (2.9)$$

Esta ecuación se aplica a todo tipo de flujos, incluidos los flujos turbulentos compresibles no estacionarios. Para flujos estacionarios, compresibles e incompresibles, la ecuación (2.9) se reduce a:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (2.10)$$

Para flujos incompresibles (estacionarios y no estacionarios) la ecuación se convierte en:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.11)$$

### 2.1.2. Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

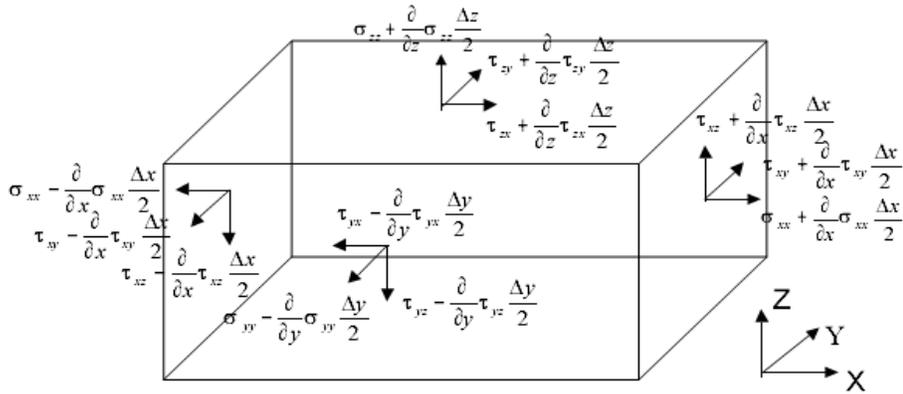
Para obtener las ecuaciones de cantidad de movimiento para un flujo no estacionario tridimensional, la segunda ley de Newton establece que la suma de las fuerzas externas actuando por unidad de masa, debe ser igual a la variación de cantidad de movimiento, esto es:

$$\Sigma F = \frac{d(mV)}{dt} = m \frac{dV}{dt} + V \frac{dm}{dt} \quad (2.12)$$

donde F es la fuerza resultante, m es la masa y V es la velocidad. Si se establece la conservación de la masa,  $dm/dt = 0$ , queda:

$$\Sigma F = m \frac{dV}{dt} \quad (2.13)$$

Esta ecuación se puede desarrollar considerando las componentes de las fuerzas representadas en la Figura I. 2. Para un volumen de control de caras  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ .



Fuerzas por unidad

Figura 2.2. Fuerzas actuando sobre un elemento de fluido.

Utilizando la notación en la que el primer subíndice indica el plano perpendicular a ese subíndice y el segundo define la dirección de la tensión, entonces las fuerzas en la dirección  $x$ , incluyen las tensiones tangenciales  $\tau_{yx}$  y  $\tau_{zx}$ , la tensión normal  $\sigma_{xx}$  y la fuerza másica  $X$ . Si se asume que el volumen del elemento permanece constante, entonces aplicando la ecuación (2.13) al volumen de control, resulta:

$$\rho \Delta x \Delta y \Delta z \frac{du}{dt} = \rho X \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.14)$$

La tensión normal al fluido,  $\sigma_{xx}$ , está compuesta de dos componentes: la presión hidrostática,  $P$ , que es una tensión negativa, y de la componente  $\sigma'_{xx}$ , que es proporcional a la variación en el tiempo del flujo. Esta tensión normal se puede definir como (SCHLICHTING, 1979):

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \bar{\sigma} + \sigma'_{xx} \\ \sigma_{yy} &= \bar{\sigma} + \sigma'_{yy} \\ \sigma_{zz} &= \bar{\sigma} + \sigma'_{zz} \end{aligned}$$

(2.15)

donde  $\bar{\sigma} = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = -P$

Sustituyendo (1.15) en (2.14) y dividiendo por  $\Delta x \Delta y \Delta z$ , queda la ecuación de conservación de cantidad de movimiento para flujo laminar o turbulento, en la dirección  $x$ :

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho X - \frac{\partial P}{\partial x} + \left( \frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \quad (2.16)$$

Para flujos no estacionarios tridimensionales,  $u = \phi(x, y, z, t)$  y la aceleración total se puede descomponer en sus componentes local y advectiva:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.18)$$

## 2.2. Clasificación del flujo

El flujo de un fluido puede clasificarse en dos grandes categorías, laminar o turbulento. El flujo turbulento se caracteriza por la mezcla que se produce debido a la acción de remolinos (*eddies*) de varias escalas existentes en el flujo. En cambio, el flujo laminar no presenta esa mezcla intensa, y el flujo tiene una apariencia mucho más suave, con las partículas fluyendo en capas o láminas. Las principales diferencias entre los dos tipos de flujo se pueden resumir en dos: los remolinos producen un perfil de velocidad más uniforme en el caso de flujo turbulento y la turbulencia introduce una fluctuación continua de la velocidad.

El número de Reynolds, se utiliza para caracterizar un flujo:

$$Re = \frac{Lu}{\nu}$$

donde  $u$  es una velocidad característica,  $L$  es una longitud de mezcla y  $\nu$  es la viscosidad cinemática. Para flujos con superficie libre, el valor crítico de  $Re$  es 500. Los flujos con  $Re$  mayores de 500 se consideran turbulentos.

### 2.2.1. Flujo laminar

Para el caso de flujo laminar las componentes de las tensiones normales pueden definirse como (FALCONER, 1994):

$$\sigma'_{xx} = \mu \left[ 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] \right]$$

$$\sigma'_{yy} = \mu \left[ 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] \right]$$

$$\sigma'_{zz} = \mu \left[ 2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] \right]$$

(2.19)

donde  $\mu$  es el coeficiente de viscosidad.

De la misma manera las tensiones tangenciales de la ecuación (2.16) se pueden expresar como:

$$\tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

(2.20)

con expresiones similares para las direcciones  $y$  y  $z$ .

Sustituyendo (2.18), (2.19), (2.20) en (2.17) resulta la ecuación de Navier – Stokes, en la dirección  $x$ , para un flujo compresible:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} \\ = \rho X - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) \end{aligned} \quad (2.21)$$

y para flujo incompresible:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = \rho X - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.22)$$

### 2.2.2. Flujo turbulento

En estudios prácticos en zonas costeras y estuarios, el flujo es altamente turbulento y la ecuación (2.22) tiene que ser modificada. Para obtener la ecuación de cantidad de movimiento, en la dirección  $x$ , para flujos turbulentos incompresibles, se multiplica la ecuación de continuidad (2.9) por  $u$  y se le suma a (2.22), resultando:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} + \frac{\partial \rho uw}{\partial z} = \rho X - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.23)$$

Si los efectos de la rotación de la Tierra se desprecian y se asume que  $z$  es la coordenada vertical, entonces las fuerzas másicas quedan:

$$X = 0$$

$$Y = 0$$

$$Z = -g$$

(2.24)

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad.

Sin embargo, cuando este efecto no puede eliminarse, aparece una aceleración debida al movimiento relativo conocida como aceleración de Coriolis y se incluye en las

ecuaciones como:

$$\begin{aligned} X &= +2v\omega\sin\phi \\ Y &= -2u\omega\sin\phi \\ Z &= -g \end{aligned} \tag{2.25}$$

donde  $\omega$  es la rotación de la Tierra  $\approx 7.3 * 10^{-5}$  rad/s, y  $\phi$  es la latitud de la zona de interés.

Sustituyendo (2.25) en (2.23) y haciendo  $f = 2\omega\sin\phi$ , se obtiene:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} + \frac{\partial \rho u w}{\partial z} = \rho f_v - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \tag{2.26}$$

En la práctica es imposible resolver esta ecuación en detalle, debido al enorme rango de escalas que intervienen en su cálculo, siendo las escalas espaciales y temporales más pequeñas menores del milímetro y del orden de milisegundos respectivamente. Incluso para los más potentes ordenadores de hoy en día sería una tarea impensable. Afortunadamente, en nuestros estudios, generalmente lo que interesa no son las escalas microscópicas sino las características medias del flujo como son las distribuciones medias de velocidad y temperatura. Por lo tanto, lo que se utiliza para describir un flujo es una aproximación estadística sugerida por Osborne Reynolds, que consiste en separar las ecuaciones en dos grupos: uno que representa el movimiento medio y otro que describe las desviaciones respecto de esa media:

$$u = \bar{u} + u'_t$$

donde:

$\bar{u} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} u \, dt$  es la componente de la velocidad promediada en el tiempo

$u'_t$  = velocidad fluctuante, tal que  $\bar{u} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} u \, dt$

$\Delta t$  = período de promediación adecuado para separar correctamente el movimiento medio de las fluctuaciones.

Expresando las velocidades, la presión y la densidad como suma de una media y una fluctuación, sustituyendo en la ecuación (2.26) y promediando en el tiempo, resulta:

$$\begin{aligned} & \frac{\overline{\partial(\bar{\rho} + \rho_t')(\bar{u} + u_t')}}{\partial t} + \frac{\overline{\partial(\bar{\rho} + \rho_t')(\bar{u} + u_t')(\bar{u} + u_t')}}{\partial x} + \frac{\overline{\partial(\bar{\rho} + \rho_t')(\bar{u} + u_t')(\bar{v} + v_t')}}{\partial y} + \\ & \frac{\overline{\partial(\bar{\rho} + \rho_t')(\bar{u} + u_t')(\bar{w} + w_t')}}{\partial z} = \overline{f(\bar{\rho} + \rho_t')(\bar{v} + v_t')} - \frac{\partial}{\partial x} \overline{(\bar{P} + P_t')} + \\ & \mu \left( \frac{\partial^2 \overline{(\bar{u} + u_t')}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{(\bar{u} + u_t')}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{(\bar{u} + u_t')}}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Si por ejemplo, se desarrolla el término

$$\overline{(\bar{\rho} + \rho_t')(\bar{u} + u_t')} = \overline{\bar{\rho}\bar{u} + \bar{\rho}u_t' + \rho_t'\bar{u} + \rho_t'u_t'} = \bar{\rho}\bar{u} + \overline{\rho_t'u_t'}$$

ya que

$$\overline{\bar{\rho}u_t'} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \bar{\rho}u_t' dt = \frac{\bar{\rho}}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} u_t' dt = 0$$

Operando de la misma forma con el resto de los términos y teniendo en cuenta que, en el agua, generalmente, las fluctuaciones de densidad son muy pequeñas comparadas con la densidad media, mientras que las fluctuaciones de la velocidad pueden ser del mismo orden que la media, los términos que contienen correlaciones entre fluctuaciones de densidad y de velocidad son pequeños comparados con aquellos que contienen correlaciones entre componentes de la velocidad. Por lo tanto, se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{w}}{\partial z} \\
& = \bar{\rho} f \bar{v} - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial \overline{\bar{\rho} u_t' u_t'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\bar{\rho} u_t' v_t'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\bar{\rho} u_t' w_t'}}{\partial z}
\end{aligned}
\tag{2.29}$$

Restándole ahora a la ecuación (2.29) una ecuación de continuidad multiplicada por  $\bar{u}$ , se obtiene la ecuación de Navier – Stokes para flujo turbulento incompresible:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} & = f \bar{v} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \overline{\bar{\rho} u_t' u_t'} \right) \\
& + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{\bar{\rho} u_t' v_t'} \right) + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \overline{\bar{\rho} u_t' w_t'} \right)
\end{aligned}
\tag{2.30}$$

Comparando la ecuación anterior con la ecuación original de Navier – Stokes, ecuación, se aprecia que los valores instantáneos de velocidad, presión y densidad han sido sustituidos por sus valores promediados en el tiempo, y que han aparecido tres nuevos términos:

$$-\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \overline{\bar{\rho} u_t' u_t'} \right), -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial y} \left( \overline{\bar{\rho} u_t' v_t'} \right), -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} \left( \overline{\bar{\rho} u_t' w_t'} \right)$$

Los términos  $-\overline{\bar{\rho} u_t' u_t'}$ ,  $-\overline{\bar{\rho} u_t' v_t'}$ ,  $-\overline{\bar{\rho} u_t' w_t'}$  son conocidos como tensiones de Reynolds y representan el transporte de cantidad de movimiento debido al movimiento turbulento. Pueden interpretarse como un mecanismo disipador, y en flujo turbulento son mucho mayores que las tensiones viscosas, excepto en las proximidades de una superficie sólida.

Despreciando, por tanto, las tensiones viscosas y eliminando la barra de las cantidades promediadas para simplificar, se obtienen las siguientes ecuaciones en los tres ejes:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ = & fv - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (-\rho \overline{u_t' u_t'}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (-\rho \overline{u_t' v_t'}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (-\rho \overline{u_t' w_t'}) \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ = & -fu - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (-\rho \overline{v_t' u_t'}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (-\rho \overline{v_t' v_t'}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (-\rho \overline{v_t' w_t'}) \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \\ = & -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (-\rho \overline{w_t' u_t'}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (-\rho \overline{w_t' v_t'}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (-\rho \overline{w_t' w_t'}) \end{aligned} \quad (2.33)$$

## **2.3. Hipótesis asumidas**

### **2.3.1. Hipótesis hidrostática**

Los dominios de aplicación del modelo desarrollado, son áreas cerradas o semicerradas como bahías y estuarios. La característica más relevante de estas masas de agua es el diferente orden de magnitud de sus dimensiones horizontales y verticales: su extensión horizontal suele ser de varios kilómetros mientras que su profundidad es del orden de decenas de metros. Esto se traduce en que los procesos de generación de cantidad de movimiento y de transporte se realicen a una escala diferente en las direcciones vertical y horizontal.

Por lo tanto, la circulación en estos dominios es predominantemente horizontal lo que supone que las aceleraciones verticales son despreciables frente a la aceleración de la gravedad. Esto conduce a la hipótesis de distribución hidrostática de presiones, cuya validez ha sido probada incluso en el caso de flujos propagándose sobre fondos con apreciables irregularidades en vertical (KOUTITAS, 1981).

Al introducir esta hipótesis en la ecuación en el eje  $z$ , (2.33), se eliminan las aceleraciones verticales y las tensiones tangenciales, lo que da como resultado una ecuación de variación de la presión hidrostática:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad (1.34)$$

### **2.3.2. Aproximación de Boussinesq**

Para flujos que cumplan unas determinadas condiciones, Boussinesq en 1903 sugirió que se pueden despreciar las variaciones de densidad en el fluido excepto en el término de gravedad donde aparece el producto  $\rho g$ .

Un primer caso en el que no se podría aplicar esta simplificación, sería un flujo estacionario con número de Mach grande. El número de Mach se define como  $u/c$ , donde  $u$  es una velocidad típica en el fluido y  $c$  es la velocidad del sonido en el medio. En números de Mach grandes los efectos de compresibilidad no son despreciables debido a que grandes cambios de presión causan grandes cambios en la densidad. Sin embargo, este efecto deja de ser importante para números de Mach menores de 0.3. Para agua  $c=1470$  m/s y la velocidad  $u$  es mucho menor, por lo que en líquidos esta hipótesis es aceptable.

Para introducir esta hipótesis en las ecuaciones de movimiento se asume que el estado básico del fluido es hidrostático (no movimiento) definido por presión  $p_0$  y densidad  $\rho_0$ . Por tanto, el movimiento se produce sólo por las variaciones de presión  $p'$  y densidad  $\rho'$ :

$$\begin{aligned} P &= p_0 + p' \\ \rho &= \rho_0 + \rho' \end{aligned} \tag{2.35}$$

donde  $\rho' \ll \rho_0$  y  $p' \ll p_0$ .

Sustituyendo (2.35) en la ecuación de movimiento (2.31)

$$(\rho_0 + \rho') \left( \frac{Du}{Dt} - fv \right) = - \frac{\partial(p_0 + p')}{\partial x} + \text{fricción}$$

y aplicando Boussinesq queda:

$$\rho_0 \frac{Du}{Dt} - \rho_0 fv = - \frac{\partial p'}{\partial x} + \text{fricción} \tag{2.36}$$

Una vez introducidas las dos hipótesis, hidrostática y de Boussinesq, se necesita

expresar el término desconocido de variaciones de presión  $p'$  en función de cantidades conocidas. Para ello se utiliza la ecuación vertical de movimiento, (2.34), expresada de la siguiente manera:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -g(\rho_0 + \rho') \quad (2.37)$$

Integrando la ecuación anterior desde cualquier profundidad  $z$  hasta la superficie libre  $z = \eta(x, y, t)$

$$\int_z^\eta dP = - \int_z^\eta g(\rho_0 + \rho') dz$$

Desarrollando la expresión y teniendo en cuenta que la presión en la superficie libre  $P(\eta)$  es igual a la presión atmosférica  $p_a$ , y que la presión en cualquier profundidad  $aP(z)$  es igual a  $p_0 + p'$

$$\rho' = p_a - p_0 + g\rho_0(\eta - z) + g \int_z^\eta \rho' dz \quad (2.38)$$

De esta forma se ha obtenido la expresión de la variaciones de presión en función de la presión atmosférica  $p_a$ , la presión hidrostática  $p_0$ , el nivel de la superficie libre  $\eta$  y la a estratificación de la densidad.

Introduciendo (2.38) en la ecuación de movimiento (2.36), resulta la expresión siguiente para el eje  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = f_v - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_a}{\partial x} - g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{g}{\rho_0} (\eta - z) \frac{\partial \rho_0}{\partial x} \\ - \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \int_z^\eta \rho' dz + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} (-\overline{\rho u_t' u_t'}) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial y} (-\overline{\rho u_t' v_t'}) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} (-\overline{\rho u_t' w_t'}) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Para el eje y resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + fv = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_a}{\partial y} - g \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{g}{\rho_0} (\eta - z) \frac{\partial \rho_0}{\partial y} \\ - \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial y} \int_z^\eta \rho' dz + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} (-\overline{\rho v_t' u_t'}) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial y} (-\overline{\rho v_t' v_t'}) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} (-\overline{\rho v_t' w_t'}) \end{aligned} \quad (2.40)$$

Estas dos ecuaciones, junto con la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.41)$$

constituyen las ecuaciones de gobierno que resuelve el modelo tridimensional desarrollado en esta tesis.

## 2.4. Ecuaciones de gobierno y método de resolución

### 2.4.1. Ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento

Las ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento son las (2.39) y (2.40) obtenidas en el apartado anterior:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = fu - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_a}{\partial x} - g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{g}{\rho_0} (\eta - z) \frac{\partial \rho_0}{\partial x} \\ - \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \int_z^\eta \rho' dz + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} (-\overline{\rho u_t' u_t'}) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial y} (-\overline{\rho u_t' v_t'}) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} (-\overline{\rho u_t' w_t'}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + fv = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_a}{\partial y} - g \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{g}{\rho_0} (\eta - z) \frac{\partial \rho_0}{\partial y} \\ - \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial y} \int_z^\eta \rho' dz + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} (-\overline{\rho v_t' u_t'}) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial y} (-\overline{\rho v_t' v_t'}) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} (-\overline{\rho v_t' w_t'}) \end{aligned}$$

### 2.4.2. Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad es la (2.50) obtenida en el apartado anterior

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

### 2.4.3. Ecuación de variación de presión hidrostática

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

(2.42)

donde

$P$ : presión en el punto;

$(u, v, w)$ : componentes de la velocidad media de un flujo turbulento en las direcciones de los tres ejes  $x, y, z$ ;

$(u_t', v_t', w_t')$ : componentes de la fluctuación turbulenta de la velocidad;

$f$ : parámetro de Coriolis,  $f = 2\omega \text{sen}\phi$ ;

$\omega$ : velocidad angular de la tierra;

$\phi$ : latitud en el punto;

$\rho$ : densidad total del agua;

$\rho_0$ : densidad media del agua;

$\rho'$ : variación vertical de la densidad respecto a la densidad media;

$\eta$ : altura de la superficie libre;

$g$ : aceleración de la gravedad;

$h$ : profundidad de un punto respecto al nivel medio del mar;

NMM: Nivel Medio del Mar.

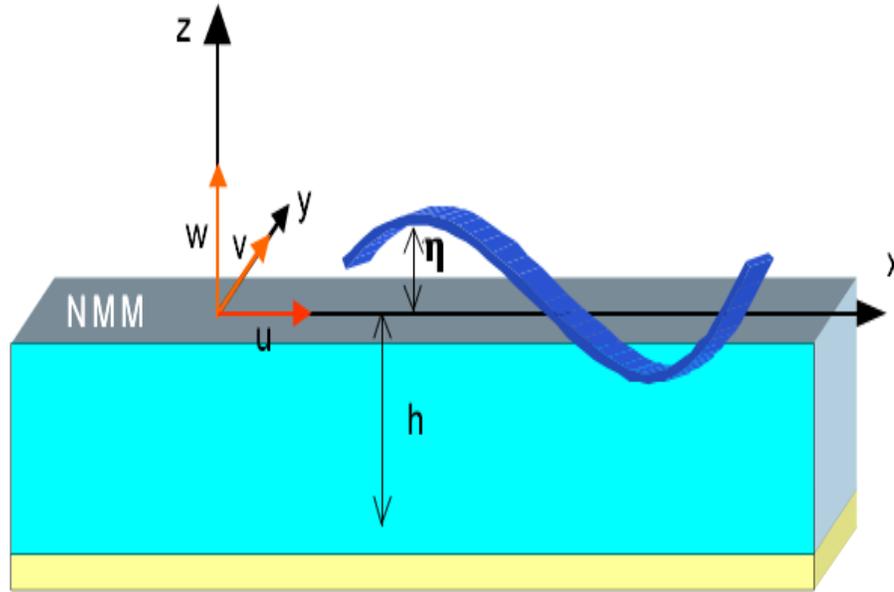


Figura2.3. Sistema de coordenadas.

#### 2.4.4. Ecuaciones de difusión para temperatura (T) y salinidad (S)

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} D \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} D \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} D \frac{\partial T}{\partial z} + F_T \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} + w \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} D \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} D \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} D \frac{\partial S}{\partial z} + F_S \quad (2.44)$$

siendo:

$T$ : temperatura media de un flujo turbulento;

$S$ : concentración media de la sal para un flujo turbulento;

$D$ : coeficiente de difusión para la temperatura y la salinidad;

$F_T, F_S$ : fuentes o sumideros de temperatura y salinidad respectivamente.

### 2.4.5. Ecuación de estado

La densidad del agua del mar se puede definir en función de la salinidad del agua ( $S$ ), la temperatura potencial ( $T$ ) y la presión ( $P$ ):

$$\rho = \rho(S, T, P)$$

Esta relación se denomina ecuación de estado. La temperatura potencial,  $S$ , es la temperatura que tendría una masa de agua, situada en una determinada profundidad, si fuera adiabáticamente transportada por advección hasta la superficie. Para los órdenes de magnitud de las profundidades en las que se va a trabajar con el modelo 3D desarrollado en esta tesis, se puede establecer que  $S = T$ , donde  $T$  es la temperatura in situ, y que la influencia de la presión en la densidad es despreciable.

En esta tesis se va a utilizar como ecuación de estado la fórmula empírica propuesta por la UNESCO (1981), que tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \rho(T, S) = & 999.842594 + 6.793952 * 10^{-2}T - 9.095229 * 10^{-3}T^2 + 1.001685 * \\ & 10^{-4}T^3 - 1.120083 * 10^{-6}T^4 + 6.536332 * 10^{-9}T^5 + (0.824493 - 4.0899 * \\ & 10^{-3}T + 7.6438 * 10^{-5}T^2 - 8.2467 * 10^{-7}T^3 + 5.3875 * 10^{-9}T^4)S + (-5.72466 * \\ & 10^{-3} + 1.0227 * 10^{-4}T - 1.6546 * 10^{-6}T^2)S^{1.5} + 4.8314 * 10^{-4}S^2 \end{aligned} \quad (2.45)$$

## 2.5. Método de resolución

Para resolver numéricamente las ecuaciones (2.39) – (2.45), los modelos implementados en la Bahía de Cienfuegos utilizan la técnica denominada *splitting*. Este método divide el programa en dos módulos acoplados. En uno de los módulos se resuelven las ecuaciones promediadas en vertical (módulo 2D), y en el segundo módulo, (3D), se

determina la distribución vertical de las velocidades horizontales, utilizando los gradientes de la superficie libre calculados en el primer módulo. Esta forma de proceder permite ahorro en tiempo de computación, ya que al eliminar de las ecuaciones 3D el cálculo de la elevación de la superficie libre, el incremento de tiempo en ese módulo puede ser varias veces mayor que el del 2D.

Los principales motivos por los cuales los científicos eligen esta técnica son los siguientes:

- El método se basa en las características de los flujos que se van a resolver, en los cuales la escala de tiempo de las variaciones verticales de una variable es bastante mayor que la escala temporal de la variación de la parte media.
- El ahorro en tiempo de computación que proporciona el esquema.
- Posibilidad de resolver sólo la parte 2D de un problema si se desea.

A continuación se presentan las ecuaciones que resuelve cada módulo del programa Para dividir la solución en una parte promediada en vertical y otra que es la variación respecto a esa media, las variables se descomponen de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}u &= U + u' \\v &= V + v' \\ \rho &= \rho_0 + \rho'\end{aligned}$$

donde

$u, v$ : son las velocidades totales en las direcciones  $x, y$  respectivamente;

$u', v'$ : desviación de las velocidades respecto a su valor promediado;

$U, V$ : velocidades horizontales promediadas en vertical.

$$U = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\eta} u \, dz$$

$$V = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\eta} v \, dz$$

siendo

$H$ : la cantidad de agua en una columna de agua,  $H = h + \eta$ ;

$h$ : profundidad en un punto;

$\eta$ : altura de la superficie libre.

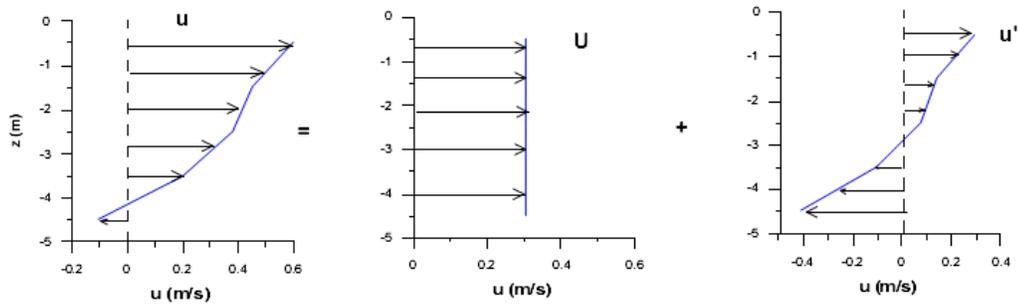


Figura 2.4. Descomposición de las variables.

## 2.6. Z- coordenadas

En la z-coordenada se divide el dominio vertical en niveles de  $\Delta z$  constante (ver figura 1.4 (a)). El principal inconveniente que tiene esta representación de coordenada vertical es que para representar bien zonas poco profundas es necesario un gran número de puntos en zonas profundas, además de la rigidez de de las mismas. En este trabajo, el área de estudio esta compuesta por zonas con una gran variedad de profundidades, que van desde estuarios hasta fosas con más de 2000 metros de profundidad. Por esta razón, estas coordenadas no son factibles para la representación vertical del área que se estudia en esta tesis.

## 2.7. Sigma-coordenadas

### 2.7.1. Representación de la coordenada vertical sigma.

En este apartado haremos un análisis de las coordenadas sigma usadas por los modelos hidrodinámicos implementados en la bahía de Cienfuegos así como un tratamiento de los errores de truncamiento.

Las coordenadas ordinarias  $(x, y, z, t)$  se transforman a las nuevas coordenadas  $(x^*, y^*, \sigma, t^*)$  donde:

$$x^* = x \quad y^* = y \quad \sigma = \frac{z - \eta}{h + \eta} \quad t^* = t \quad (2.46)$$

siendo:

$\eta$ : es la elevación de la superficie con respecto del Nivel Medio del Mar

$h$ : profundidad de un punto respecto del Nivel Medio del Mar

Por lo tanto  $\sigma = 0$  corresponde a  $z = \eta$ , y  $\sigma = -1$  a  $z = -h$

Nótese que las derivadas con respecto a las nuevas variables cambian al utilizar las coordenadas sigma según las siguientes expresiones.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x^*} - \frac{1}{H} \left( \sigma \frac{\partial H}{\partial x^*} + \frac{\partial \eta}{\partial x^*} \right) \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \quad (2.47a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y^*} - \frac{1}{H} \left( \sigma \frac{\partial H}{\partial y^*} + \frac{\partial \eta}{\partial y^*} \right) \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \quad (2.47b)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t^*} - \left( \frac{1}{H} (1 + \sigma) \frac{\partial \eta}{\partial t^*} \right) \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \quad (2.47c)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{1}{H} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \quad (2.47d)$$

siendo  $\phi$  cualquier variable del problema ( $u, v, \rho, \dots$ )

## 2.7.2. Control del error

### 2.7.2.1. Error con respecto a la transformación de las coordenadas horizontales a la coordenada sigma

Comenzando por la derivada en  $x$ , ecuación (2.47), en un esquema centrado en  $\Delta x^*$  y  $\Delta \sigma$ , el error de truncamiento resulta ser, asumiendo  $H \gg h$  (para un mayor detalle ver Fortunato y Baptista, 1994):

$$\begin{aligned} \text{Error} = & \frac{\sigma}{3} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} \left[ \left( \sigma \Delta x \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 - (h \Delta \sigma)^2 \right] + \Delta x^2 \left( \frac{1}{3} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + \sigma \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial z} + \left( \sigma \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial z^2} \right) \\ & + H.O.T \end{aligned} \quad (2.50)$$

El segundo y tercer término de la expresión del error están condicionados por  $\Delta x^2$ , pero el primero no lo está. Se puede notar que el primer término de la expresión de error está condicionado por  $\frac{\partial h}{\partial x}$  y por  $\left( \sigma \Delta x \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 - (h \Delta \sigma)^2$ . De esta última condición, Haney en 1991 obtuvo la condición de “consistencia hidrostática” que la coordenada sigma debe cumplir.

$$\left| \frac{\sigma}{H} \frac{\partial H}{\partial x} \right| \Delta x < \Delta \sigma \quad (2.51)$$

Esta condición es muy restrictiva en zonas donde existen grandes gradientes de profundidad  $\frac{\partial H}{\partial x} \gg \gg$  o estuarios en los que  $H \ll \ll$ , además es imposible utilizar este sistema de coordenadas debido al error numérico (además del físico) que se comete.

### 2.7.2.2. Error con respecto al tiempo en la coordenada sigma

Para resolver numéricamente cualquier ecuación en derivadas parciales se debe reemplazar un dominio continuo en el espacio y el tiempo por un dominio discreto. Para obtener las variables dependientes y sus derivadas en el dominio discreto se puede utilizar el teorema de Taylor. Suponiendo que una función  $f$  y sus derivadas son finitas y continuas, si  $f$  es dada en el punto  $t_1$ , entonces puede ser definida en el punto  $t_1 + \Delta t$  de la siguiente manera:

$$f_{t_1+\Delta t} = f_{t_1} + \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{t_1} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Big|_{t_1} + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \Big|_{t_1} + O(\Delta t^4) \quad (2.52a)$$

En el punto  $t_1 - \Delta t$  se define como:

$$f_{t_1-\Delta t} = f_{t_1} - \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{t_1} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Big|_{t_1} - \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \Big|_{t_1} + O(\Delta t^4) \quad (2.52b)$$

Restando las ecuaciones anteriores y despejando la primera derivada la nueva ecuación queda:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{(f_{t_2} - f_{t_0})}{2\Delta t} - \frac{\Delta t^2}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} + O(\Delta t^4) \quad (2.53)$$

En las coordenadas sigma la derivada con respecto a la nueva variable  $t$  se obtiene mediante la siguiente transformación:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t^*} - \left( \frac{1}{H} (1 + \sigma) \frac{\partial \eta}{\partial t^*} \right) \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \quad (2.54)$$

donde  $\phi$  es una variable en el tiempo

Al aplicar la expresión (2.53) a la ecuación (2.54) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} = & \frac{(\phi_{t_2} - \phi_{t_0})}{2\Delta t} - \frac{(1 + \sigma)}{H} \left( \frac{\eta_{t_2} - \eta_{t_0}}{2\Delta t} \right) \left( \frac{\phi_{\sigma_2} - \phi_{\sigma_0}}{2\Delta \sigma} \right) \\
- \frac{\Delta t^2}{6} \frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3} + & \frac{(1 + \sigma)}{H} \left( \frac{\eta_{t_2} - \eta_{t_0}}{2\Delta t} \right) \frac{\Delta \sigma^2}{6} \frac{\partial^3 \phi}{\partial \sigma^3} + \frac{(1 + \sigma)}{H} \left( \frac{\phi_{\sigma_2} - \phi_{\sigma_0}}{2\Delta \sigma} \right) \frac{\partial^3 \eta}{\partial t^3} \\
- & \frac{(1 + \sigma) \Delta t^2}{H} \frac{\Delta \sigma^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial t^3} \frac{\partial^3 \phi}{\partial \sigma^3} + H.O.T
\end{aligned}
\tag{2.55}$$

Nótese que la segunda y la tercera fila de la expresión anterior expresan el error de la transformación. Por otra parte se puede apreciar que todos los términos están condicionados por  $\Delta t^2$  excepto:

$$\frac{(1 + \sigma)}{H} \left( \frac{\Delta \eta}{\Delta t} \right) \frac{\Delta \sigma^2}{6} \frac{\partial^3 \phi}{\partial \sigma^3}
\tag{2.56}$$

por lo tanto, para controlar el error en zonas poco profundas como los estuarios se de cumplir:

$$\frac{(1 + \sigma)}{H} \left( \frac{\Delta \eta}{\Delta t} \right) \frac{\Delta \sigma^2}{6} \frac{\partial^3 \phi}{\partial \sigma^3} \lll$$

Para profundidades pequeñas como las presentes en estuarios este error de tiempo en difícil de controlar debido a que la ecuación (2.56) depende de  $\frac{1}{H}$ , factor que se incrementa cuando aumenta la profundidad.

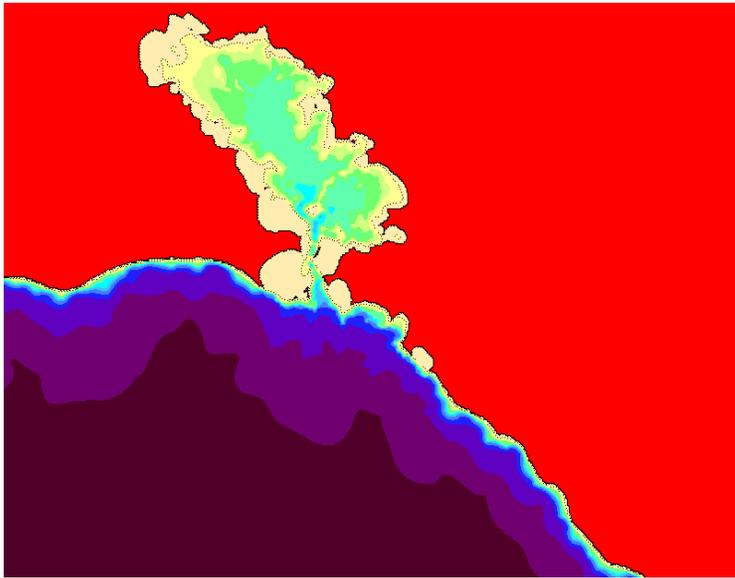


Figura 2.5 .Mapa de profundidad de la Bahía de Cienfuegos.

Como se puede apreciar en la figura (2.5) dentro de la Bahía de Cienfuegos hay pequeñas variaciones de profundidad, no obstante, también se aprecia la existencia de grandes áreas de estuarios (de coloración amarillo claro) luego de la división de Cayo Carenas, donde  $H \ll \ll$ . Esto trae consigo que la condición impuesta para acotar el error con respecto al tiempo en la sigma coordenada sea muy restrictiva e imposible de cumplir en estas áreas.

Por otra parte, en la salida del canal se aprecian grandes variaciones de profundidad donde esta cae de 30 metros a 500 metros en cuestión de pocos kilómetros. Por otra parte, después del banco de Punta Sabanilla a unos 500 metros de la costa, la profundidad cae a 100m y luego a más de 1000 y hasta 2000 metros de profundidad (coloraciones marrón y violeta en la figura (2.5)).

Estas variaciones de profundidad son realmente considerables y provocan que la condición de Haney sea también muy restrictiva y que para poder cumplirla se necesite de un refinamiento extremo del mado horizontal, lo que traería consigo un aumento el la propagación de los errores de redondeo.

Después de este análisis podemos llegar a la conclusión de que las coordenadas sigma son ineficientes para su utilización en la discretización vertical de la Bahía de Cienfuegos, ya que por sus características específicas en la profundidad, los errores de truncamiento con respecto a las coordenadas  $x$  y  $t$  no pueden ser acotados.

## 2.8. Coordenadas $\beta$

En el año 2000 para la modelación de las zonas someras del norte de España, la universidad de Cantabria desarrollo un nuevo modelo con unas coordenadas capaces de disipar los errores que cometía la coordenada sigma con respecto a las coordenadas horizontales y el tiempo. Estas son las llamadas coordenadas  $\beta$ .

Estas nuevas coordenadas consisten en aplicar a la derivada  $\frac{\partial}{\partial z}$  la transformación  $\sigma$  y al resto coordenadas cartesianas. En la figura (2.6) se representan las coordenadas  $\beta$ .

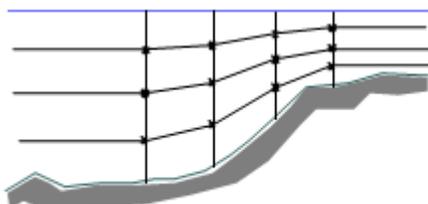


Figura 2.6. Coordenadas  $\beta$

Estas coordenadas conservan muchas de las ventajas de las coordenadas sigma como son:

- Igual número de capas en zonas profundas que en zonas someras (estuarios).
- Se adaptan a la batimetría.
- Fácil aplicación.
- El ahorro en tiempo de computación que proporciona el esquema.

### 2.8.1. Análisis del error de la coordenada $\beta$

Asumiendo que la variación en  $z$  del sistema de coordenadas en un  $\Delta t$  es pequeña, se puede obtener el valor de las variables después de un movimiento de  $\Delta z$  del eje vertical, aplicando el desarrollo en series de Taylor:

$$u_{z_1+\Delta z}^{t+\Delta t} = u_{z_1}^t + \Delta z \frac{\partial u^t}{\partial z} \Big|_{z_1} + \frac{\Delta z^2}{2} \frac{\partial^2 u^t}{\partial z^2} \Big|_{z_1} + O(\Delta z^3) \quad (2.57)$$

Despreciando los términos de orden superior a  $\Delta z$  la expresión queda:

$$u_{z_1+\Delta z}^{t+\Delta t} = u_{z_1}^t + \Delta z \frac{\partial u^t}{\partial z} \Big|_{z_1} + O(\Delta z^2) \quad (2.58)$$

Dado que la posición de los puntos viene dada por la transformación  $\sigma = \frac{z-\eta}{H}$ , el valor de  $\Delta z$  se puede calcular de la siguiente forma:

$$\Delta z = z^{t+1} - z^t = (\sigma H^{t+1} + \eta^{t+1}) - (\sigma H^t + \eta^t) \approx \sigma \frac{\partial H}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial \eta}{\partial t} \Delta t + O(\Delta t^2) \quad (2.59)$$

por lo tanto  $\Delta z \approx (1 + \sigma) \frac{\partial \eta}{\partial t} \Delta t$  y sustituyendo en la ecuación (2.58) queda:

$$u_{z_1+\Delta z}^{t+\Delta t} = u_{z_1}^t + (1 + \sigma) \frac{\partial \eta}{\partial t} \Delta t \frac{\partial u^t}{\partial z} \Delta t + O(\Delta t^2, \Delta \sigma^2) \quad (2.60)$$

Se puede apreciar que estas coordenadas el error no depende de  $H$ , sino de  $\Delta t$ ,  $\frac{\partial \eta}{\partial t}$  y  $\frac{\partial u}{\partial z}$ .

Por lo tanto se podría utilizar el esquema en cualquier  $H$  empleando un  $\Delta t$  pequeño (CASTANEDO, 2000).

En el próximo capítulo se tratarán las ecuaciones de Navier Stokes transformadas por este nuevo sistema de coordenadas. Para la resolución de las ecuaciones en este trabajo

se empleará la técnica splitting mencionada al principio de este capítulo. Más adelante en el tercer capítulo se explicará con más detalle, como se acoplan los módulos a la hora de la implementación del modelo hidrodinámico.

En la tabla 2.1 se hace un análisis de cada una de las coordenadas que se estudiaron en esta tesis para la representación vertical.

Características de los modelos	z-coordenadas	$\sigma$ -coordenadas	$\beta$ -coordenadas
Método de resolución	3D completo	Splitting 2D+3D	Splitting 2D+3D
Observaciones	Poca resolución en zonas someras.  Esquema rígido  Para que las zonas poco profundas queden bien representadas se necesitan un gran número de puntos en zonas profundas $\Delta z = \text{cte}$ .	Igual número de puntos en vertical en zonas someras que en zonas profundas  Gradientes horizontales en coordenada sigma, no válido para $\frac{\partial H}{\partial x} \gg \gg$	Igual número de puntos en vertical en zonas someras que en zonas profundas  El error no depende de H, depende de $\Delta t, \frac{\partial \eta}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial z}$
Validación	No válido	No válido	Válido

Tabla 2.1. Análisis de las coordenadas verticales

Luego de hecho el análisis del comportamiento del error de cada una de las representaciones verticales y analizando la tabla (2.1) podemos llegar a la conclusión de que tanto las z-coordenadas como las  $\sigma$ -coordenadas son incorrectas para la representación vertical de la Bahía de Cienfuegos, en cambio, las coordenadas  $\beta$ , se adaptan a la batimetría y los errores de truncamiento en esta representación vertical no dependen de la profundidad.

## **2.9. Conclusiones**

Se hizo un análisis de los errores que cometen las representaciones de coordenada vertical más empleados por los modelos hidrodinámicos. Se propuso la coordenada que más se adecua para el estudio de la Bahía de Cienfuegos y se obtuvo la discretización que más se adecua a los cambios de profundidad en la zona de estudio. Se obtuvieron las ecuaciones de ambos módulos según la transformación  $\beta$  y se analizaron las condiciones de estabilidad CFL para las ecuaciones de ambos módulos.



# Capítulo 3: Método de Resolución y Estabilidad

---

Este capítulo pretende obtener las ecuaciones que empleará cada módulo a la hora de la implementación, además de hacer un análisis de la estabilidad del sistema.

## Método de resolución

Para la resolución de las ecuaciones se determinó emplear la técnica splitting. Las principales ventajas de emplear este método fueron presentadas en el capítulo anterior.

El método divide al programa en dos módulos acoplados, uno interno y otro externo. En el módulo externo se resuelven las ecuaciones promediadas en la vertical y en el interno se determina la distribución vertical de las velocidades horizontales utilizando los gradientes de superficie libre calculados en el primer módulo.

A continuación se ofrecen las ecuaciones que emplea cada módulo

### 3.2. Ecuaciones del módulo 2D

Para promediar en la vertical las ecuaciones de continuidad y conservación de la cantidad de movimiento se usó la regla de Leibnitz cuya expresión es la siguiente.

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, z) dz = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, z) dz + \frac{\partial \beta(x)}{\partial x} f(\beta, z) - \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x} f(\alpha, z) \quad (3.1)$$

#### 3.2.1. Ecuación de continuidad promediada en la vertical

Para promediar la ecuación de continuidad de la masa se aplica la regla de Leibnitz a los

dos primeros términos. Al tercer término no se le aplica porque es una derivada exacta.

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial v}{\partial y} dz + \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0 \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u dz - u(x, y, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} - u(x, y, -h) \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} v dz - v(x, y, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ - v(x, y, -h) \frac{\partial h}{\partial y} + w(x, y, \eta) - w(x, y, -h) = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

A continuación se utilizan las condiciones cinemáticas en la superficie libre  $z = \eta$ , y en el fondo  $z = -h$ , para lo cual se aplica la definición de derivada material a la función profundidad  $z$ .

Particularmente en la superficie libre,  $z = \eta$ :

$$w_{\eta} = \frac{Dz}{Dt} \Big|_{z=\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + v_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (3.4a)$$

Repitiendo el proceso en el fondo,  $z = -h$ :

$$w_{-h} = \frac{Dz}{Dt} \Big|_{z=-h} = -\frac{\partial h}{\partial t} - u_{-h} \frac{\partial h}{\partial x} - v_{-h} \frac{\partial h}{\partial y} \quad (3.4b)$$

Al sustituir estas condiciones de contorno en la ecuación (3.3)

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} v dz + \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (3.5)$$

Expresando los términos de la ecuación anterior en función de las velocidades promediadas en la vertical ( $U$ ,  $V$ ) y la profundidad máxima  $H$  resulta:

$$\frac{\partial UH}{\partial x} + \frac{\partial VH}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (3.6)$$

Es importante señalar que no se ha realizado ninguna hipótesis para la obtención de esta

ecuación, por lo tanto, se trata de una expresión exacta.

### 3.2.2. Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento promediada en la vertical

En este apartado se promediará la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en la dirección  $x$ . La ecuación en la dirección  $y$  se obtiene similarmente. Primeramente se le suma a la ecuación de movimiento una ecuación de continuidad multiplicada por  $u$ . Como resultado se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \int_{-h}^{\eta} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} \right) dz &= \int_{-h}^{\eta} fv dz - \frac{1}{\rho_0} \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial p_a}{\partial x} dz - g \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} dz \\
 - \frac{g}{\rho_0} \int_{-h}^{\eta} (\eta - z) \frac{\partial \rho_0}{\partial x} dz - \frac{g}{\rho_0} \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial x} \int_z^{\eta} \rho' dz dz &+ \frac{1}{\rho_0} \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial x} (-\rho u_t \bar{v}_t') dz \\
 + \frac{1}{\rho_0} \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial y} (-\rho u_t \bar{v}_t') dz &+ \frac{1}{\rho_0} \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial z} (-\rho u_t \bar{w}_t') dz
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Integrando cada término:

$$\begin{aligned}
 \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial t} dz &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} u dz - u_{(\eta)} \frac{\partial \eta}{\partial t} - u_{(-h)} \frac{\partial h}{\partial t} \\
 \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u^2}{\partial x} dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u^2 dz - u^2_{(\eta)} \frac{\partial \eta}{\partial x} - u^2_{(-h)} \frac{\partial h}{\partial x} \\
 \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial uv}{\partial y} dz &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} uv dz - u_{(\eta)} v_{(\eta)} \frac{\partial \eta}{\partial y} - u_{(-h)} v_{(-h)} \frac{\partial h}{\partial y} \\
 \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial uw}{\partial z} dz &= u_{(\eta)} w_{(\eta)} - u_{(-h)} w_{(-h)}
 \end{aligned}$$

Si se suman estos términos y se utiliza las expresiones de  $w_{(\eta)}$  y  $w_{(-h)}$  obtenidas en (3.4a) y (3.4b), resulta:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} u \, dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u^2 \, dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} uv \, dz \quad (3.8)$$

El primer término se puede expresar en función de la velocidad U promediada en la vertical, pero los otros dos términos son desconocidos a priori.

$$\frac{\partial UH}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u^2 \, dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} uv \, dz \quad (3.9)$$

Promediando los restantes términos:

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{\eta} fv \, dz &= fVH \\ \frac{1}{\rho_0} \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial p_a}{\partial x} \, dz &= \frac{H}{\rho_0} \frac{\partial p_a}{\partial x} \\ g \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \, dz &= gH \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{g}{\rho_0} \int_{-h}^{\eta} (\eta - z) \frac{\partial \rho_0}{\partial x} \, dz &= \frac{gH^2}{2\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial x} \\ \int_{-h}^{\eta} \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \int_z^{\eta} \rho' \, dz \, dz &= \frac{g}{\rho_0} \int_z^{\eta} \frac{\partial}{\partial x} \int_z^{\eta} \rho' \, dz \, dz \end{aligned}$$

### 3.2.3. Tensiones de Reynolds promediadas en la vertical

### 3.2.4. Hipótesis de Boussinesq

La propuesta más antigua y de uso más extendido hoy en día en modelación numérica en hidráulica, es el concepto de viscosidad de remolino de Boussinesq (1877), el cual, en analogía con las tensiones viscosas en flujos laminares, asume que las tensiones de Reynolds o turbulentas son proporcionales a los gradientes de la velocidad media (CASTANEDO, 2000):

$$\rho \overline{u'_t u'_t} = \Gamma \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.10)$$

donde:

$\Gamma$ : viscosidad de remolino absoluta;

$u'_t$ : fluctuación turbulenta de la velocidad y  $u$  la velocidad media de un flujo turbulento.

Al aplicar la ecuación (3.10) a las tensiones de Reynolds se obtiene:

$$\begin{aligned} T_x &= \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} (-\rho \overline{u'_t u'_t}) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial y} (-\rho \overline{u'_t v'_t}) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} (-\rho \overline{u'_t w'_t}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \epsilon_h \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \epsilon_h \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \epsilon_z \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} T_y &= \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} (-\rho \overline{v'_t u'_t}) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial y} (-\rho \overline{v'_t v'_t}) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} (-\rho \overline{v'_t w'_t}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \epsilon_h \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \epsilon_h \left( 2 \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \epsilon_z \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Suponiendo que el movimiento es hidrostático, es decir:

$$\frac{Dw}{Dt} \approx 0 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial t} \approx 0, \frac{\partial w}{\partial x} \approx 0, \frac{\partial w}{\partial y} \approx 0, \frac{\partial w}{\partial z} \approx 0$$

las expresiones (3.11) y (3.12) quedan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} T_x &= \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} (-\overline{\rho u'_t u'_t}) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial y} (-\overline{\rho u'_t v'_t}) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} (-\overline{\rho u'_t w'_t}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \epsilon_h \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \epsilon_h \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \epsilon_z \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} T_y &= \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} (-\overline{\rho v'_t u'_t}) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial y} (-\overline{\rho v'_t v'_t}) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} (-\overline{\rho v'_t w'_t}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \epsilon_h \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \epsilon_h \left( 2 \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \epsilon_z \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.14)$$

En este apartado promediaremos solamente las tensiones de Reynolds con respecto al eje  $x$  ya que con respecto al eje  $y$  se obtiene de forma muy similar.

Aplicando la regla de Leibnitz a cada término de la ecuación (3.13):

$$I_1 = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial x} \left( \epsilon_h \frac{\partial u}{\partial x} \right) dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} \left( \epsilon_h \frac{\partial u}{\partial x} \right) dz - \left( \epsilon_h \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \left( \epsilon_h \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{-h} \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$I_2 = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial y} \left( \epsilon_h \frac{\partial u}{\partial y} \right) dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} \left( \epsilon_h \frac{\partial u}{\partial y} \right) dz - \left( \epsilon_h \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \left( \epsilon_h \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{-h} \frac{\partial h}{\partial y}$$

$$I_3 = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial z} \left( \epsilon_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) dz = \left( \epsilon_z \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{\eta} - \left( \epsilon_z \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{-h} = (\tau_{\eta} - \tau_{-h}) / \rho_0$$

$$I_4 = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial y} \left( \epsilon_h \frac{\partial v}{\partial x} \right) dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} \left( \epsilon_h \frac{\partial v}{\partial x} \right) dz - \left( \epsilon_h \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \left( \epsilon_h \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{-h} \frac{\partial h}{\partial y}$$

desarrollando cada integral y aplicando las condiciones cinemáticas presentadas en las ecuaciones (3.4a) y (3.4b) se tiene:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \epsilon_h \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u \, dz \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left( \epsilon_h u_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \epsilon_h u_{-h} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \\
&\quad - \left( \epsilon_h \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \left( \epsilon_h \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{-h} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \epsilon_h \frac{\partial UH}{\partial x} \right) - u_{\eta} \frac{\partial \epsilon_h}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \epsilon_h \frac{\partial u_{\eta}}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\
&\quad - \epsilon_h u_{\eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - u_{-h} \frac{\partial \epsilon_h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} - \epsilon_h \frac{\partial u_{-h}}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} - \epsilon_h u_{-h} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \epsilon_h \frac{\partial u_{\eta}}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \epsilon_h \frac{\partial u_{-h}}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \\
I_2 &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \epsilon_h \frac{\partial UH}{\partial y} \right) - u_{\eta} \frac{\partial \epsilon_h}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \epsilon_h \frac{\partial u_{\eta}}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \epsilon_h u_{\eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} - u_{-h} \frac{\partial \epsilon_h}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} - \epsilon_h \frac{\partial u_{-h}}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \\
&\quad - \epsilon_h u_{-h} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - \epsilon_h \frac{\partial u_{\eta}}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \epsilon_h \frac{\partial u_{-h}}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \\
I_3 &= \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial z} \left( \epsilon_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) dz = \left( \epsilon_z \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{\eta} - \left( \epsilon_z \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{-h} = (\tau_{\eta} - \tau_{-h}) / \rho_0 \\
I_4 &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \epsilon_h \frac{\partial VH}{\partial x} \right) - v_{\eta} \frac{\partial \epsilon_h}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \epsilon_h \frac{\partial v_{\eta}}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \epsilon_h v_{\eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} - v_{-h} \frac{\partial \epsilon_h}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} - \epsilon_h \frac{\partial v_{-h}}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} \\
&\quad - \epsilon_h v_{-h} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} - \epsilon_h \frac{\partial v_{\eta}}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \epsilon_h \frac{\partial v_{-h}}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y}
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que la hipótesis hidrostática ( $\frac{\partial w}{\partial x} \approx 0$ ) implica que:

$$\left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{-h} = u_{-h} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial u_{-h}}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + v_{-h} \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} + \frac{\partial v_{-h}}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} \approx 0 \quad (3.15)$$

y

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial x} = u_{-h} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial u_{\eta}}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + v_{\eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial x} + \frac{\partial v_{\eta}}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \approx 0 \quad (3.16)$$

se llega a la expresión final:

$$\begin{aligned}
\int_{-h}^{\eta} T_x dz &= \frac{\partial}{\partial x} (2\epsilon_h \frac{\partial UH}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} [\epsilon_h (\frac{\partial VH}{\partial x} + \frac{\partial UH}{\partial y})] + (\tau_{\eta} - \tau_{-h})/\rho_0 \\
&- \frac{\partial \epsilon_h}{\partial x} [2u_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + 2u_{-h} \frac{\partial h}{\partial x}] - \frac{\partial \epsilon_h}{\partial y} [u_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + u_{-h} \frac{\partial h}{\partial y} + v_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + v_{-h} \frac{\partial h}{\partial x}] \\
&- \epsilon_h [\frac{\partial u_{\eta}}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u_{-h}}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x}] - \epsilon_h [\frac{\partial u_{\eta}}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u_{-h}}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y}] - \epsilon_h \frac{\partial}{\partial x} [u_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + u_{-h} \frac{\partial h}{\partial x}] \\
&- \epsilon_h \frac{\partial}{\partial y} [u_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + u_{-h} \frac{\partial h}{\partial y}] - \epsilon_h \frac{\partial \eta}{\partial x} [\frac{\partial u_{\eta}}{\partial x} + \frac{\partial v_{\eta}}{\partial y}] - \epsilon_h \frac{\partial h}{\partial x} [\frac{\partial u_{-h}}{\partial x} + \frac{\partial v_{-h}}{\partial y}] + \epsilon_h \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial x}
\end{aligned}
\tag{3.17}$$

Los tres primeros términos de (3.17) son utilizados por Blumberg y Mellor (1987), para expresar la difusión horizontal en 2D. Nótese que esto es correcto siempre que se puedan despreciar los gradientes de la superficie libre y el fondo, cosa que no ocurre en la Bahía de Cienfuegos donde  $\square \frac{\partial H}{\partial x} \gg \gg$ . Por lo tanto la expresión utilizada por Blumberg y Mellor (1987) no es válida para el estudio de esta tesis.

### 3.2.5. Ecuaciones de difusión para la temperatura y la salinidad promediadas en la vertical

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} + V \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial x} HD_x \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial y} HD_y \frac{\partial C}{\partial y} + F_C
\tag{3.18}$$

$C$ : es la temperatura (en grados Celsius) o la salinidad, promediada en vertical;

$D_x, D_y$ : coeficientes de difusión horizontal;

$F_C$ : representa fuentes o sumideros.

### 3.3. Ecuaciones del módulo 3D

Las ecuaciones de módulo 3D se obtienen transformando las ecuaciones (2.39) – (2.44) de coordenadas cartesianas a coordenadas  $\beta$ .

Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{H} \frac{\partial w}{\partial \sigma} = 0 \quad (3.19)$$

Ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{w}{H} \frac{\partial u}{\partial \sigma} - fv = & -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_a}{\partial x} - g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{g}{\rho_0} (\eta - z) \frac{\partial \rho_0}{\partial x} - \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \int_z^\eta \rho' dz \\ & + \frac{\partial}{\partial x} [2\epsilon_h \frac{\partial u}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [\epsilon_h (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})] + \frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} [\epsilon_z \frac{\partial u}{\partial \sigma}] \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{H} \frac{\partial v}{\partial \sigma} + fu = & -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_a}{\partial y} - g \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{g}{\rho_0} (\eta - z) \frac{\partial \rho_0}{\partial y} - \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial y} \int_z^\eta \rho' dz \\ & + \frac{\partial}{\partial x} [\epsilon_h (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})] + \frac{\partial}{\partial y} [2\epsilon_h \frac{\partial v}{\partial y}] + \frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} [\epsilon_z \frac{\partial v}{\partial \sigma}] \end{aligned} \quad (3.21)$$

Ecuaciones de difusión para la temperatura (T) y para la salinidad (S)

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{w}{H} \frac{\partial T}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial x} D_h \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} D_h \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} D_z \frac{\partial T}{\partial \sigma} \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{w}{H} \frac{\partial S}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial x} D_h \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} D_h \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} D_z \frac{\partial S}{\partial \sigma} \quad (3.23)$$

### 3.4. Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno de las ecuaciones son las impuestas en la superficie libre  $z = \eta(x, y)$  y en el fondo  $z = -h(x, y)$

### 3.4.1. Tensión tangencial en la superficie

La tensión tangencial en la superficie, es condición de contorno de las ecuaciones 3D y modelo de cierre de las ecuaciones promediadas:

$$\frac{1}{H} \rho_0 \epsilon_z \left( \frac{\partial u}{\partial \sigma}, \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right) = (\tau_{x\sigma(\eta)}, \tau_{y\sigma(\eta)})$$

Estas tensiones son las provocadas por el efecto del viento y para su formulación es usual la utilización de la siguiente ley cuadrática (FALCONER, 1994):

$$\tau_{x\sigma(\eta)} = C_a \rho_a W_x W$$

$$\tau_{y\sigma(\eta)} = C_a \rho_a W_y W$$

donde

$C_a$ : coeficiente de arrastre del viento  $C_a = 0.0026$ ;

$\rho_a$ : densidad del aire;

$W_x$ : componente de la velocidad del viento en la dirección x,  $W_x = W \cos \varphi$ ;

$W_y$ : componente de la velocidad del viento en la dirección y,  $W_y = W \sin \varphi$ ;

$\varphi$ : ángulo formado por el viento y el eje x;

$W$ : velocidad del viento a 10 metros de altura de la superficie del mar.

### 3.4.2. Tensión tangencial en el fondo

La tensión tangencial en el fondo es, como la tensión en la superficie, condición de contorno del modo 3D y modelo de cierre de las ecuaciones promediadas:

$$\frac{1}{H} \rho_0 \epsilon_z \left( \frac{\partial u}{\partial \sigma}, \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right) = (\tau_{x\sigma(-h)}, \tau_{y\sigma(-h)})$$

$$\tau_{x\sigma(-h)} = \rho_0 C_D |\bar{V}| u_{(-h)}$$

$$\tau_{y\sigma(-h)} = \rho_0 C_D |\bar{V}| v_{(-h)}$$

donde

$|\bar{V}|$ : es el módulo de la velocidad horizontal en el fondo:

$$|\bar{V}| = \sqrt{(v_{(-h)})^2 + (v_{(-h)})^2}$$

$C_D$ : es el coeficiente de arrastre dado por Blumberg y Mellor en 1987;

$$C_D = \left( \frac{1}{K} \ln \frac{h + z_{(-h)}}{z_0} \right)^{-2}$$

donde:

$K$ : es la constante de Von Karman;

$h$ : es la profundidad del punto respecto del Nivel Medio del Mar (NMM);

$z_{(-h)}$ ,  $v_{(-h)}$ ,  $v_{(-h)}$ : son la coordenada  $z$  del punto de la malla más cercano al fondo y sus correspondientes velocidades, respectivamente;

$z_0$  es un parámetro que depende de la rugosidad del fondo.

### 3.4.3. Flujo de sal y temperatura

### 3.4.3.1. Flujo de sal y temperatura en el fondo

El flujo de sal y temperatura en el fondo se considera nulo

$$\rho_0 D_z \left( \frac{\partial T}{\partial z}, \frac{\partial S}{\partial z} \right) = (0, 0)$$

### 3.4.3.2. Flujo de sal y temperatura en la superficie

El flujo de sal en la superficie libre se supone despreciable, en cambio se supone un flujo de temperatura entre la atmósfera y el mar,  $\Omega$ :

$$\rho_0 D_z \left( \frac{\partial T}{\partial z}, \frac{\partial S}{\partial z} \right) = (\Omega, 0)$$

donde  $\Omega$  se calcula mediante la siguiente formulación (Mellor, 1996):

$$\Omega = \rho_a C_t |W| (T_{10} - T_s)$$

En esta expresión  $\rho_a$  es la densidad del aire (a 20°C y a presión atmosférica,  $\rho_a = 1.21 \text{ kg/m}^3$ );  $C_t$  es un coeficiente empírico adimensional, que para condiciones de viento medias puede valer aproximadamente  $C_t = 0.001$ ;  $T_{10}$  es la temperatura del aire a 10 metros por encima de la superficie del mar y  $T_s$  es la temperatura de la superficie del mar.

Para calcular  $D_z$ , se asume que en condiciones homogéneas (sin estratificación), los remolinos turbulentos transportan momento prácticamente de la misma forma que transportan calor o masa, por lo que se puede asumir (BLOSS, 1988):

$$D_z \approx \epsilon_z$$

## 3.5. Acoplamiento de los dos módulos

La estrategia de la técnica *splitting* es la siguiente: en cada incremento de tiempo de

cálculo,  $\Delta t$ , se hacen dos pasos. Primero, en el primer módulo, se calculan las velocidades promediadas,  $U$ ,  $V$ , la densidad,  $\rho_0$ , (calculada a partir de la temperatura y de la salinidad promediadas) y la superficie libre,  $\eta$ , con las ecuaciones (2.39), (2.40), (2.43), (2.44). Después, en el módulo 3D, se resuelven las ecuaciones (3.19) – (3.33) y se calcula la distribución vertical de las velocidades y de la densidad, y la tensión tangencial en el fondo.

El módulo 2D le pasa al 3D los valores de las velocidades promediadas y de los valores de  $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial \rho_0}{\partial x}$  y  $\frac{\partial \rho_0}{\partial y}$ . Con estos datos, el módulo 3D calcula el valor de las variables  $u^{(1)}$ ,  $v^{(1)}$ ,  $w^{(1)}$  y  $\rho^{(1)}$

Al resolver las ecuaciones en dos módulos distintos, puede existir una ligera tendencia a la desviación entre la integral vertical de las variables obtenidas con el modo 3D,  $U^{(1)}$ , y las promediadas calculadas por el 2D,  $U$ :

$$\begin{aligned}\frac{1}{H} \int_{-h}^{\eta} u^{(1)} dz &= U^{(1)} \approx U \\ \frac{1}{H} \int_{-h}^{\eta} v^{(1)} dz &= V^{(1)} \approx V \\ \frac{1}{H} \int_{-h}^{\eta} \rho^{(1)} dz &= \rho_0^{(1)} \approx \rho_0\end{aligned}$$

Esta desviación se puede producir debido a los diferentes errores de truncamiento existentes en ambos módulos. Para evitar este error, se reemplaza, en cada paso de tiempo,  $\Delta t$ , la integral vertical de las variables calculadas por el 3D (velocidad y densidad) por los valores promediados calculados por el módulo 2D (Blumberg, 1987, JIN, 1993). Por ejemplo, la velocidad total horizontal en el eje  $x$ , se calcula:

$$u = U + u'$$

donde

$u$ : valor total de la velocidad horizontal en la dirección del eje  $x$ ;

$U$ : velocidad horizontal en la dirección del eje  $x$  promediada en vertical, calculada por el módulo 2D;

$u'$ : desviación de la velocidad respecto de su valor promediado. El valor de esta variable se calcula de la siguiente forma:

$$u' = u^{(1)} - \frac{1}{H} \int_{-h}^{\eta} u^{(1)} dz$$

siendo  $u^{(1)}$  la velocidad total calculada por el módulo 3D.

De esta forma, el valor total de una variable es la suma de la media obtenida con el módulo promediado y de la fluctuación calculada con las ecuaciones totales. Así, en cada paso de tiempo del programa, se hace un reajuste entre los dos módulos para garantizar su correcto acoplamiento. Una vez realizado este reajuste el módulo 3D calcula la velocidad vertical,  $w$ , a partir de los valores de las velocidades horizontales  $u$  y  $v$ , utilizando la ecuación de continuidad, (3.19). En la figura 3.1 se puede ver un esquema que representa cómo están relacionados los dos módulos.

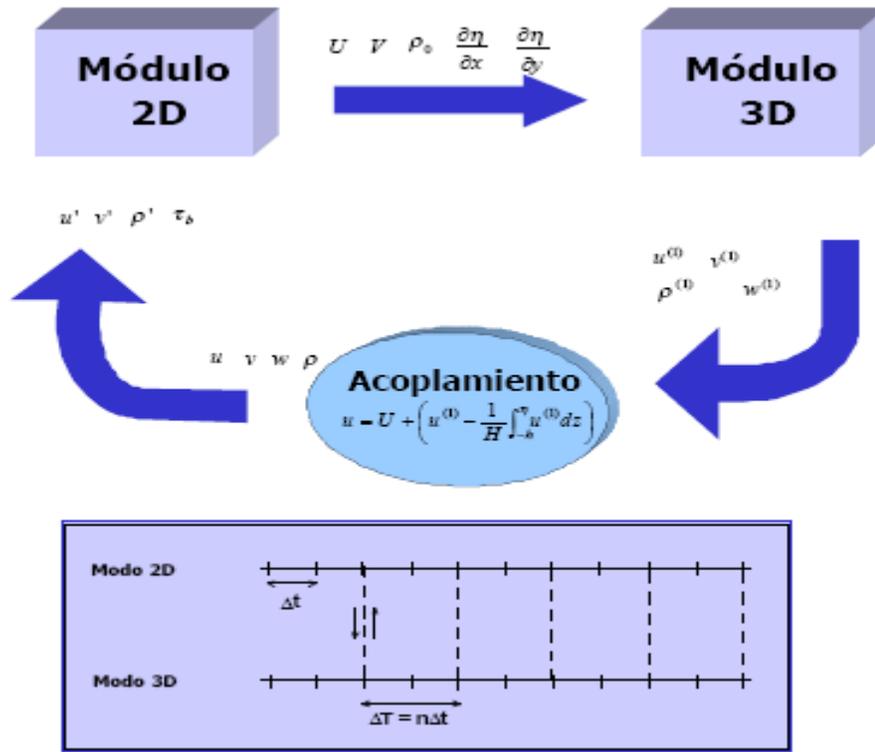


Figura 3.1. Método *splitting*.

### 3.6. Salto de rana

El *leap frog* o salto de rana (Asselin, 1972) es un filtro débil usado por la mayoría de los modelos para evitar los problemas de divergencia obtenidos ante pasos de tiempo pares e impares propios de un esquema centrado en diferenciación temporal.

$$F_s^n = F^n + \frac{\alpha}{2}(F^{n+1} - 2F^n + F_s^{n-1}) \quad (3.24)$$

donde:

$F_s^n$ : es el valor de la función suavizada en el nodo “n”.

Según las recomendaciones de la Guía de Usuario de POM (Mellor, 2003), el valor de  $\alpha$  se adopta igual a 0.05.

### 3.7. Condición de Courant-Friedrich-Lewy

La estabilidad esta dada en el sentido de que cualquier variación producida en la solución de la ecuación diferencial, debida a variaciones de las condiciones iniciales, también debe producirse en la solución de la ecuación en diferencias. Es, en consecuencia, una condición necesaria de convergencia.

La condición de estabilidad de Courant-Friedrich-Lewy o condición CFL establece que el dominio de dependencia del sistema de ecuaciones diferenciales o físico incluya al dominio de la ecuación en diferencias o numérico, con el objetivo de las variaciones producidas en las condiciones iniciales del sistema de ecuaciones diferenciales estén también en la solución de la ecuación en diferencias. Nótese que es una condición necesaria para la convergencia del sistema, si esto no fuera así, resultaría imposible para la solución numérica converger a la solución exacta, pues al refinar la malla siempre habría información física relevante que quedaría fuera del dominio de dependencia numérico. La interpretación geométrica con una red espacio-temporal de pasos  $\Delta x$  y  $\Delta t$  sería:

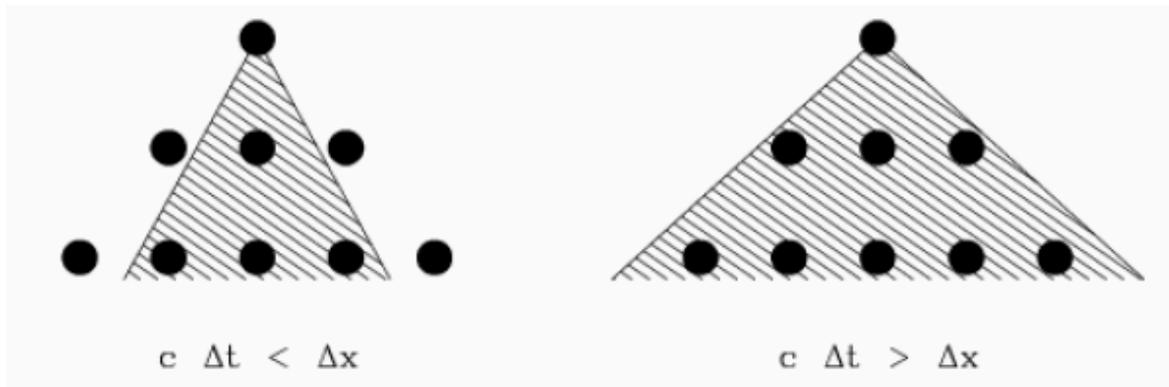


Figura 3.2. Representación geométrica de la condición CFL en dos dimensiones.

El área rayada representa el dominio de dependencia físico, mientras que el área delimitada por los puntos en negro representa el dominio de dependencia numérico. Cada punto en negro representa un nodo, y los tres puntos inmediatos bajo él,

representan la dependencia que tiene del propio nodo y de los nodos anterior y siguiente. Esta dependencia está dada por el salto de rana empleado para filtrar la solución (Ecuación 3.24). En este caso, la condición CFL se traduce a que  $c \Delta t \leq \Delta x$

Para el caso bidimensional, el dominio de dependencia físico es el cono característico:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = c^2(t - t_0)^2$$

El esquema de salto de rana hace depender la solución del esquema numérico  $u^{n_0+1}(m_{x_0}, m_{y_0})$  de los nodos  $u^{n_0}(m_{x_0} \pm 1, m_{y_0} \pm 1)$  que están situados en los vértices de un rombo en el plano  $t_0 = n_0 \Delta t$  centrado en  $(m_{x_0} \Delta x = x_0, m_{y_0} \Delta y = y_0)$  y semidiagonales  $\Delta x$  y  $\Delta y$  y del nodo  $u^{n_0-1}(m_{x_0}, m_{y_0})$ .

La superficie característica interseca al plano  $t = t_0$  en una circunferencia de centro  $(m_{x_0} \Delta x = x_0, m_{y_0} \Delta y = y_0)$  y de radio  $c \Delta t$ . El criterio CFL impone que la pirámide de dependencia incluya al cono característico, lo cual se cumple si el rombo intersecado en cualquier instante de tiempo, circunscribe a la circunferencia intersecada, es decir, si:

$$c \Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}}}$$

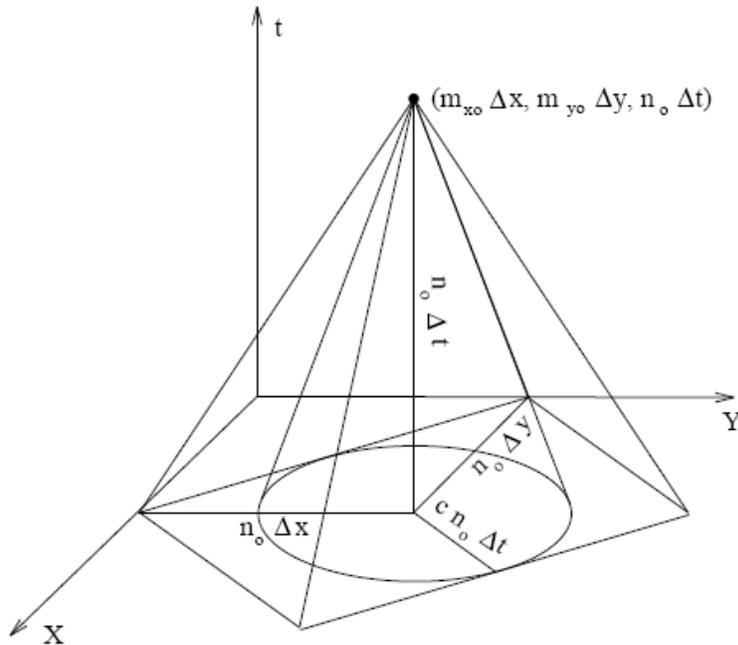


Figura 3. . Dominios de dependencia de las soluciones teórica y numérica

En la parte 2D del modelo se resuelven las ecuaciones de ondas largas, derivadas de las ecuaciones de Navier – Stokes, promediadas en vertical. En este módulo, se calcula la propagación de ondas de gravedad en superficie, y la condición de Courant – Friedrichs – Lewy (CFL) queda de la siguiente manera:

$$c \frac{\Delta t}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \leq 1$$

Donde  $c$  es la celeridad de las ondas de gravedad externas,  $c = \sqrt{gH}$  y  $\Delta t$  es el paso de tiempo empleado en el modo externo.

En las ecuaciones de transporte de  $T$  y  $S$ , la difusión se aproxima mediante un esquema explícito, por lo que la estabilidad está estrictamente relacionada con el número de Peclet:

$$\left( \frac{2D_h}{\Delta x^2} + \frac{2D_h}{\Delta y^2} + \frac{2D_z}{\Delta z^2} \right) \Delta T \leq 1$$

donde T es el paso de tiempo para el módulo interno

La ecuación anterior es la condición necesaria en el módulo 3D, mientras que en la parte promediada se transforma en:

$$\left(\frac{2D_h}{\Delta x^2} + \frac{2D_h}{\Delta y^2}\right)\Delta t \leq 1$$

donde t es el paso de tiempo para el módulo externo

### **Conclusiones:**

- Se demostró ineficiencia de las coordenadas sigma en la modelación de zonas con fuertes gradientes de profundidad.
- Se planteó la transformación de coordenadas “β” que más se adecua a los cambios de profundidad dentro y fuera de la bahía de Cienfuegos.
- Se obtuvieron las ecuaciones del módulo interno y el módulo externo según la transformación β.
- Se propusieron las condiciones de estabilidad CFL para las ecuaciones de ambos módulos.

### **Recomendaciones:**

- Hacer un análisis preciso del paso óptimo a tomar para el diseño del mallado.
- Implementar los cambios propuestos en este trabajo con el fin de verificar las mejoras previstas teóricamente de las soluciones del problema en cuestión.



## ***Referencias bibliográficas***

- ALONSO, C., DÍAZ ASENCIO, M., MUÑOZ CARAVACA, A., DELFANTI, R., PAPUCCI, C., FERRETTI, O. 2006. Recent changes in sedimentation regime in Cienfuegos Bay, Cuba. *Continental Shelf Research* 26, 14.
- ASSELIN, R. 1972. Frequency filters for time integrations. *Mon Weather Rev.*, 100, 3.
- BEARDSLEY, R. C., BOICOURT, W.C. 1981. On estuarine and continental-shelf circulation in the Middle Atlantic Bight. *Evolution of physical oceanography*. 35.
- BECKMANN, A. Y. H., B.D. 1993. Numerical simulation of flow around a tall isolated seamount. Part I: Problem formulation and model accuracy. *Journal of Physical Oceanography*, 23, 17.
- BLOSS, S., R. LEHFELDT Y PATTERSON, J.C. 1988. Modelling turbulent transport in stratified estuary. *Journal of Hydraulic Engineering. ASCE*, 114, 18.
- BLUMBERG, A. F., MELLOR, G.L. 1987. A description of a three-dimensional coastal ocean circulation model. *Coastal and estuarine sciences*. N. Heaps, ed., American Geophysical Union, Washington, D.C.
- CASTANEDO, S. 2000. *Desarrollo de un modelo hidrodinámico tridimensional para el estudio de la propagación de ondas largas en estuarios y zonas someras*. Universidad de Cantabria.
- DOUILLET, P. 1998. Tidal dynamics of the south-west lagoon of New Caledonia: observations and 2D numerical modelling. *Oceanol Acta*, 21, 10.
- DOUILLET P., O., S., CODIER. 2001. A numerical model for fine suspended sediment transport in the southwest lagoon of New Caledonia. *Coral Reefs*, 20, 11.
- FALCONER, R. A. 1994. *An introduction to nearly-horizontal flows*, Chapman & Hall. Londres.
- FORTUNATO, A. B. Y. B., A.M. Year. Localized sigma coordinates for the vertical structure of hydrodynamic models. *In: MODELLING*, E. A. C., ed. Proceedings of the 3rd International Conference, 1994 New York.
- GREATBATCH, R. J. Y. M., G.L. 1999. An overview of Coastal Ocean Models. *Coastal Ocean Prediction*, 27.
- HANEY, R. L. 1991. On the pressure gradient force over steep topography in sigma coordinate ocean models. *Journal of Physical Oceanography*, 21, 9.
- JIN, X. Y. K., C.. 1993. Quasi-3D numerical modelling of shallow-water circulation. *Journal of Hydraulic Engineering*, 119, 14.
- KOUTITAS, C. G. Y. O. C., B. 1981. Turbulence model for flow over dredged channels. *Journal of Hydraulic Engineering. ASCE*, 107, 13.
- LYNCH, D. R., J. T. C. IP, C. E. NAIMIE, AND F. E. WERNER 1996. Comprehensive coastal circulation model with application to the Gulf of Maine. *Continental Shelf Research*, 6, 21.
- MARSALEIX P., A. F., ESTOURNEL C. 2006. Considerations on Open Boundary Conditions for Regional and Coastal Ocean Models. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 23, 9.
- MARSALEIX P., A. F., FLOOR J.W., HERRMANN M.J., ESTOURNEL C.,

- PAIRAUD I., ULSES C. 2008. Energy conservation issues in sigma-coordinate free-surface ocean models. *Ocean Modelling*, 20, 28.
- MELLOR, G. L. Year. Users Guide for a Three Dimensional, Primitive Equation, Numerical Ocean Model. *In: Program in Atmospheric and Oceanic Sciences*, 2003 Princeton University. 1-53.
- MELLOR, G. L., YAMADA, T. 1982. Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems. *Rev. Geophys. Space Phys.*, 20, 24.
- MESINGER, F. A. A., A. 1976. Numerical methods used in atmospheric models. *Global Atmospheric Research Programme (GARP)*, 17.
- PHILLIPS, N. A. 1957. A coordinate system having some special advantages for numerical forecasting. *J. Meteor*, 14, 2.
- REY NOVOA, J. 2004. *La toma de decisiones en el manejo integrado de zonas costeras*. Tesis en opción al título de Master en Manejo Integrado de Zonas Costeras, Universidad de Cienfuegos.
- SCHLICHTING, H. (ed.) 1979. *Boundary layer theory*, New York.
- TOMZACK, M., GARCÍA, C. 1975. A numerical model of the circulation in Cienfuegos Bay, Cuba. *Estuarine and Coastal Marine Science*, 3, 27.

