La enseñanza problémica en la Matemática.

Autores: Lic. Tamara Esther Fortes Espinosa.

Dr. Gerardo Hernández Cuellar.

Cuando se habla de métodos de enseñanza es imposible no mencionar los ordenadores y con ello la enseñanza problémica. En efecto, el mundo de los ordenadores y de la computación en general, hoy en día, irremediablemente, acompaña a las Matemáticas. Es evidente que el ordenador personal ha de ser cada vez más un elemento de apoyo en el aprendizaje y comprensión de las Matemáticas. Una utilización audaz del ordenador como elemento de apoyo a la docencia debería sin duda contribuir a una mejor comprensión del alumno de procesos como el límite y la derivada, o la geometría del plano y del espacio. Pero no conviene sustituir los contenidos de Matemáticas por el manejo del ordenador, y aquí se entra en un conflicto difícil de resolver, vista la escasez de horas disponibles para la docencia de estas disciplinas.

Por ejemplo, en la Universidad, comienza a ser habitual el uso de paquetes específicos de software matemático. Se trata de una experiencia a promover y racionalizar

Conviene sin embargo no bajar la guardia en el terreno del (tan controvertido) “rigor matemático" y dejar claro en qué momento y con qué objeto el ordenador se convierte en un aliado legítimo. Con esta precaución y salvedad conviene fomentar y ordenar la exploración al máximo de esa vía, máxime porque, si no se hace hoy un esfuerzo de incorporación rigurosa del ordenador al mundo de las Matemáticas en nuestros centros educativos, los ordenadores pueden acabar suplantando a las Matemáticas en algunos ámbitos, y más preocupante aún, el alumno puede acabar llegando a la errónea conclusión de que las Matemáticas se reducen a lo que meramente puede ejecutarse y visualizarse a través del ordenador.

Es indispensable significar el valor de que los estudiantes apliquen en la práctica el saber y el poder adquiridos, para comprender de forma más exacta cómo por medio de sus conocimientos es posible describir procesos de la realidad objetiva, a la necesidad del por qué vincular la teoría con la vida para fundamentar y/o demostrar los fenómenos que ocurren. Todo esto contribuye a la *consolidación* más duradera de los conocimientos, así como a la *formación de una concepción científica* del mundo. Por eso la relación entre la teoría y la práctica debe tenerse en cuenta también como un principio didáctico en cada clase, buscando siempre que sea posible, los nexos entre las demostraciones de proposiciones con sus aplicaciones y hechos de la vida diaria.

Por otra parte, debe evitarse que con la adquisición de conocimientos

Para enseñar (comprender) la utilidad de aprender un software como puede ser el Mathematica es importante relacionar las actividades a desarrollar con la solución de problemas donde se ponga de manifiesto la necesidad de su utilización. Por otra parte debe quedar claro que un software por si solo no proporciona las herramientas necesarias para llegar a obtener su solución, ya que una tarea fundamental es poder modelar el problema, para lo cual se necesita todo el conocimiento matemático que requiera dicha modelación; estas dos cosas deben complementarse, el conocimiento matemático para modelar el problema y la utilización de un software para facilitar su solución.

El software de Mathematica.

Si lo que pretendemos es enseñar cómo utilizar el software de Mathematica, una vez que se den las primeras lecciones de su utilización, se pueden concebir laboratorios donde el alumno tenga necesidad de utilizar los distintos comandos para resolver situaciones matemáticas donde apliquen los conocimientos adquiridos en las materias que han recibido.

Pongamos algunos ejemplos.

En vez de pedirles resolver determinadas ecuaciones e inecuaciones, podemos hacerlo bajo la siguiente orden.

1. Determine el dominio de las siguientes funciones

a) $f_1(x) = \dfrac{x^4 + 8x^3 + 1}{x^3 + x^2 - 17x + 15}$ b) $f_2(x) = \dfrac{\tan x}{2\,\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1}$

$$f_3(x) = \sqrt{24 - 50x + 35x^2 - 10x^3 + x^4}$$

El gráfico de las funciones siguientes de forma manual cuesta algún trabajo.

2. Hacer el gráfico de la función siguiente, donde $\{x\}$ es la distancia de x al entero más próximo.

$$f_1(x) = \{x\}$$

3. Hacer el gráfico de:

a) $f_1(x) =$ el primer número del desarrollo de la parte decimal de x

b) $f_2(x) =$ el segundo número del desarrollo de la parte decimal de x

- En un modelo matemático las magnitudes del sistema o medio que se estudia se modelan mediante variables matemáticas (es un proceso de abstracción), y la relación entre esas magnitudes pueden ser de muchas manaras: ecuaciones, sistemas de ecuaciones, funciones, etc.

  - Es muy frecuente que las relaciones entre las magnitudes tengan un carácter funcional, es decir, que se modelen por funciones, y además entre esas funciones surgen otras relaciones más complejas (relaciones determinadas por operadores matemáticos), como son: Límite, derivadas, integrales, ecuaciones diferenciales, etc.

- Con <u>Funciones y sus gráficos.</u>

  Lo que se pretende que los estudiantes una vez que reciban los conocimientos sobre las funciones elementales y sus propiedades puedan identificarlas y utilizarlas en problemas concretos cercanos a la realidad. Aunque no es necesario se puede hacer uso de un software como por ejemplo el Mathematica para ayudar en los cálculos.

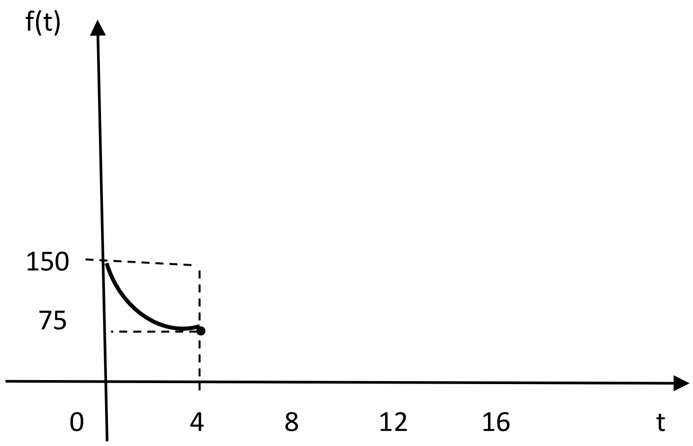
  Observación. Lo que se pretende es utilizar en cada problema el software de mathematica conjuntamente con la modelación del problema.

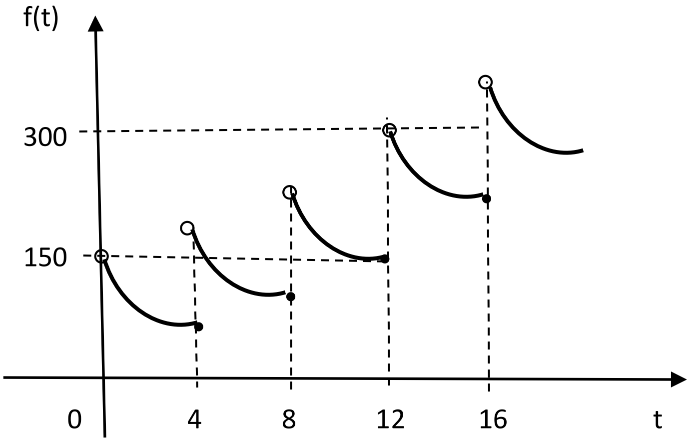
  <u>Problema 1</u>. Un paciente recibe una inyección de 150 mg de un medicamento, cada 4 horas. La gráfica muestra la cantidad f(t) del medicamento en la corriente sanguínea, después de 4 horas, la cual se corresponde con una porción de parábola cuyo vértice es el punto (4, 75) y pasa por el punto (0, 150)

  a) Determina la ecuación de la parábola que pasa por los puntos indicados.
  b) El comportamiento en los intervalos siguientes, el segundo, tercero y cuarto, o sea, $[4,8], [8,12]\ y\ [12,16]$ es similar al primero, pero las gráficas de las parábolas correspondientes tienen como vértice:
     $(4+4(n-1); 75+25(n-1))\ \ con\ n = 2,3,4, \dots$

     O sea, $(4n; 75+25n+50))\ \ con\ n = 2,3,4, \dots$

     Indica una fórmula general para todas las parábolas en los diferentes intervalos.
  c) Encuentre
     $$\lim_{X\to 12^-} f(t) \quad y \quad \lim_{x\to 12^+} f(t)$$
  d) Realiza el gráfico de la situación para los valores de t con $0 \le t \le 16$. Esta gráfica muestra la cantidad f(t) del medicamento en la corriente sanguínea, después de t horas.
  e) Explique en términos médicos la interpretación del gráfico anterior





El siguiente problema se debe realizar antes de dar el tema de derivada para que utilicen los conocimientos sobre funciones y a la vez vean la necesidad de estudiar otras cosas (como la derivada) para poder tener un método general que resuelva estas situaciones, esto puede ser una buena motivación.

Ejemplo 2. Se quiere cercar un terreno rectangular donde uno de sus lados coincide con un río (según figura) Determinar las dimensiones del rectángulo de tal forma que se utilice la menor cantidad posible de cerca, conociendo que la superficie del terreno es de $800m^2$.

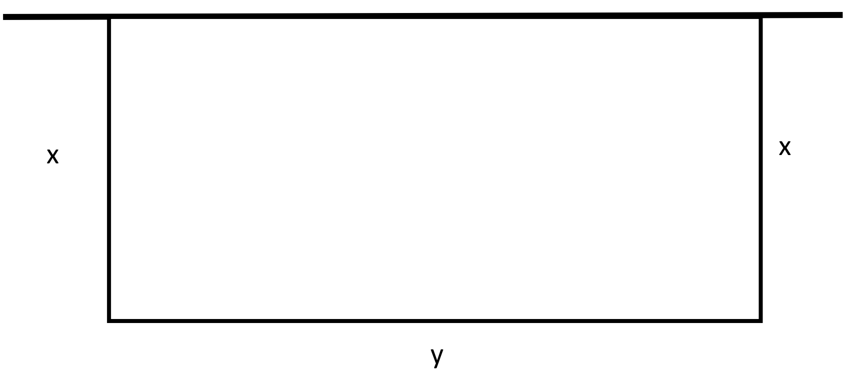
Solución.

Sean x, y los lados del rectángulo, entonces el perímetro es

P = 2x + y con A = xy, es decir 800 = xy

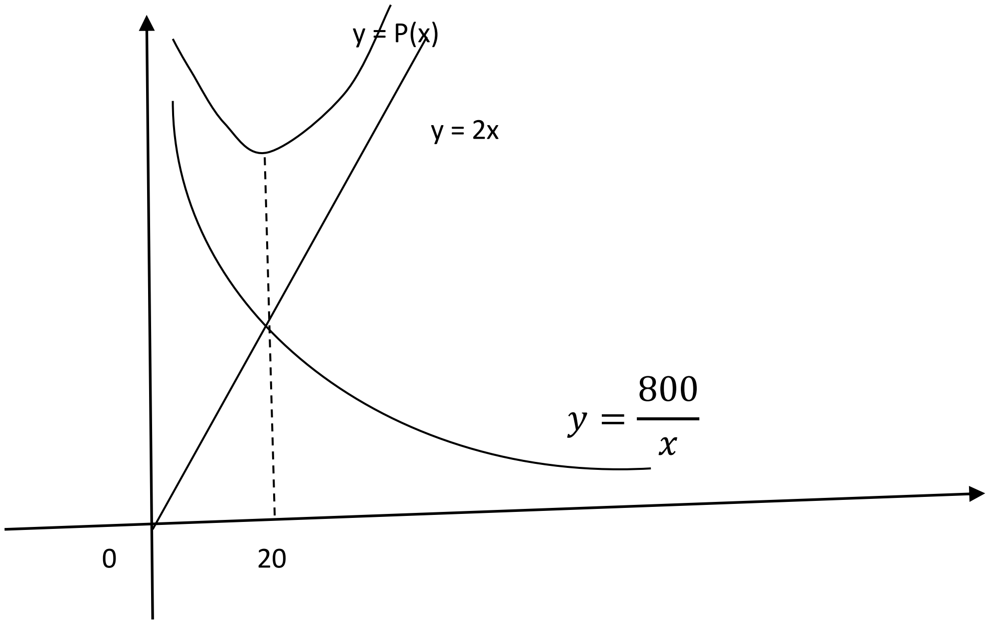
Luego, $y = \frac{800}{x}$ donde $P(x) = 2x + \frac{800}{x}$ con x, y > 0

Tenemos que, cuando $\lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to 0} P(x) = +\infty$



Consideremos las funciones, $y = 2x$, $y = \frac{800}{x}$

 (se debe pedir graficar las dos funciones en un mismo sistema de coordenadas y también la función suma, y extraer la conjetura de que el valor de mínimo está en el punto de intersección de la dos gráficas que componen la suma. Posteriormente esto se demostrará)



El punto de intersección de estas dos curvas es,

$$2x = \frac{800}{x} \rightarrow 2x^2 = 800$$

$x^2 = 400 \rightarrow x = 20,$

Probemos que x = 20 es un mínimo de P. Hay que probar que para x =20 P(20) = 80 es la menor imagen de P, es decir, que $2x + \frac{800}{x} \geq 80$

Se tiene, $(x - 20)^2 \geq 0 \rightarrow x^2 - 40x + 400 \geq 0$

$2x^2 - 80x + 800 \geq 0 \rightarrow 2x^2 + 800 \geq 80x$

$$2x + \frac{800}{x} \geq 80$$

Las dimensiones del rectángulo son x = 20, y = 40

Problemas con parámetros

Para el estudio de estos problemas es necesario realizar el análisis de una variable en función de las restantes, lo que se expresa desde el punto de vista matemático para dos variables, en la forma

$$\boldsymbol{F(x_1, x_2, \lambda)}\ \boldsymbol{donde}\ \ x_1, x_2\, ,\ son\ variables\ \ y\ \lambda\ es\ una\ constante$$

En este trabajo se tratan la solución de los problemas con el planteamiento general anterior, “Resolver un problema con parámetros, significa encontrar para cada valor de los parámetros todas las soluciones de las incógnitas”.

Por lo general cuando se trata de resolver un problema con parámetros con un software si el resultado depende del parámetro este no lo resuelve o da una respuesta que puede tomarse como una sugerencia.

Podemos citar entre las ventajas que se obtienen con el desarrollo de habilidades en el análisis de un problema con parámetros:

- Lograr el dominio de los conceptos y propiedades de las relaciones que se utilizan.

- Dominar la técnica del método de diferenciación de casos.

- Desarrollar un pensamiento algorítmico.

- Lograr un acercamiento a la búsqueda de modelos que pueden ampliar las posibilidades de cómputo.

- Facilitar el camino a la esencia del tratamiento de un problema investigativo.

Problema 1. Encontrar los valores del parámetro “α”, $\alpha \in R$ para los cuales la siguiente sucesión $\left\{ \left(\dfrac{3\alpha}{\alpha^2 + 2} \right)^n \right\}$ ($n \in N$), es un infinitesimal.

Problema 2. Hallar a tal que,

$$\lim_{x \to -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$$

exista

Solución: Cuando x →-2, el numerador es, $12 - 2a + a + 3$ para algunos valores de a el resultado es un número que sobre el denominador que tiende a cero en estos casos el límite no existe, por lo que haciendo

$12 - 2a + a + 3 = 0$ Es decir buscando una forma indeterminada 0/0 resulta que a = 15

Para este valor de a, resulta que

$$\lim_{x \to -2} \frac{3x^2 + 15x + 18}{x^2 + x - 2} = -1$$

Problema 3. Encontrar los valores de los parámetros a y b de R para que el limite siguiente exista y sea cero

$$\lim_{x \to 0} \left(x^{-3} \operatorname{sen} 3x + a\, x^{-2} + b \right)$$

Problema 4. Según un estudio médico el comportamiento de cierto virus de acuerdo a la cantidad de personas infectadas se comporta según la siguiente función,

$$I(x) = \frac{a\, x}{b + x^2} + c, con\ x \geq 0\ y\ a, b, c\ son\ números\ enteros\ positivos$$

Donde, x representa el tiempo (en días o fracciones de días) de permanencia del virus, I(x) la cantidad de personas infectadas para el momento x.

1) Al detectarse el virus (en el momento inicial) cuántas personas existían infectadas.
2) ¿En qué momento el número de personas infectadas es máximo?
3) Indique en qué intervalo el número de personas infectadas está aumentando, y a partir de qué momento comienza a disminuir.
4) ¿El virus desaparece totalmente ó siempre queda un número de personas infectadas?
5) Realice una gráfica de I(x) que ilustre el comportamiento de las personas infectadas
6) Si a = 800, b= 100 y c =5, ¿a los cuántos días se obtiene el mayor número de personas infectadas, y aunque pasen muchos días cuántas personas aproximadamente quedan infectadas?

Problema 5. Encontrar los valores de los parámetros a y b de R en función del parámetro c, tales que el límite cuando x → c de la función g definida a continuación exista

$$g(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}, \quad \text{donde} \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|} & \text{si } |x| > c \\ a + bx^2 & \text{si } |x| \leq c \end{cases}$$

Al estar definida la función f por ramas para determinar el límite en el punto c hace falta buscar los límites laterales en el punto c.

Problemas de aplicación de la derivada

1) Dada la función $f(x) = \sqrt{1-x} \quad con\ x < 1\ \ y\ x\ real$

a) Encontrar una fórmula para la derivada n-ésima en términos de n.

b) Encontrar una fórmula para la derivada n-ésima en forma recurrente.

c) Determinar la serie de Taylor en el punto $x_0 = 0$

Solución.

$$\frac{df}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} = -\frac{1}{2(1-x)^{\frac{1}{2}}} \to \ Para\ x = 0, se\ tiene\ \frac{df}{dx}(0) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = -\frac{1}{4(1-x)^{3/2}} \to \ Para\ x = 0, se\ tiene\ \frac{d^2f}{dx^2}(0) = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{d^3f}{dx^3} = -\frac{3}{8(1-x)^{5/2}} \to \ Para\ x = 0, se\ tiene\ \frac{d^3f}{dx^3}(0) = -\frac{3}{8}$$

$$\frac{d^4f}{dx^4} = -\frac{3\,.5}{16(1-x)^{7/2}} \to \ Para\ x = 0, se\ tiene\ \frac{d^4f}{dx^4}(0) = -\frac{3\,.\,5}{16}$$

$$\frac{d^5f}{dx^5} = -\frac{3\,.\,5\,.\,7}{32(1-x)^{9/2}} \to \ Para\ x = 0, se\ tiene\ \frac{d^5f}{dx^5}(0) = -\frac{3.5.7}{32}$$

……………………….

a) Fórmula para la derivada n-ésima en términos de n.

$$\frac{d^nf}{dx^n} = -\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\ \cdots .\,(2n-1)}{2^n(1-x)^{\frac{2n-1}{2}}} = -\frac{\prod_{j=2}^{n}(2j-3)}{2^n(1-x)^{\frac{2n-1}{2}}} \ \ con\ n \geq 2$$

b) Fórmula para la derivada n-ésima en forma recurrente.

Se tiene,

$$\frac{\frac{d^2f}{dx^2}}{\frac{df}{dx}} = \frac{-\frac{1}{4(1-x)^{3/2}}}{-\frac{1}{2(1-x)^{1/2}}} = \frac{1}{2(1-x)}$$

$$\frac{\frac{d^3 f}{dx^3}}{\frac{d^2 f}{dx^2}} = \frac{-\frac{3}{8(1-x)^{5/2}}}{-\frac{1}{4(1-x)^{3/2}}} = \frac{3}{2(1-x)}$$

$$\frac{\frac{d^4 f}{dx^4}}{\frac{d^3 f}{dx^3}} = \frac{-\frac{(3)(5)}{16(1-x)^{7/2}}}{-\frac{3}{8(1-x)^{5/2}}} = \frac{5}{2(1-x)}$$

$$\frac{\frac{d^5 f}{dx^5}}{\frac{d^4 f}{dx^4}} = \frac{-\frac{(3)(5)(7)}{32(1-x)^{9/2}}}{-\frac{(3)(5)}{16(1-x)^{7/2}}} = \frac{7}{2(1-x)}$$

En forma recurrente es,

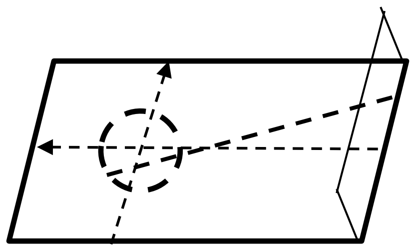
$\frac{df}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} = -\frac{1}{2(1-x)^{1/2}}$, $\frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d^{(n-1)} f}{dx^{(n-1)}} . \left(\frac{(2n-3)}{2(1-x)}\right)$

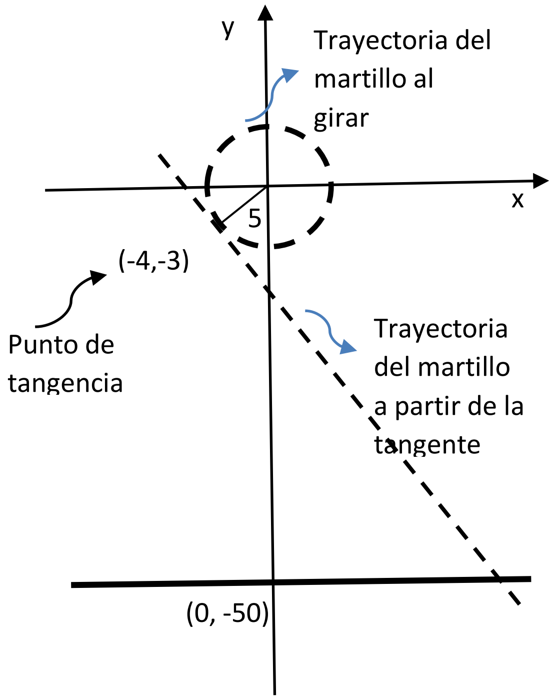
c) La serie de Taylor en el punto $x_0 = 0$

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{3}{8} - \frac{3\,.\,5}{16} - \frac{3.5.7}{32} - \cdots - \frac{1.3.5.7\ ...\ (2n-3)}{2^n} - \cdots$$
$$= 1 - \frac{1}{2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\prod_{j=2}^{n}(2j-3)}{2^n}$$

Problema 2. Un lanzador de martillo practica en un lugar pequeño. Cuando el lanzador gira, el martillo recorre una circunferencia de 5 pies de radio. Una vez lanzado el martillo choca contra una reja de alambre que se encuentra a 50 pies del centro de la zona de lanzamiento. Suponga que unos ejes coordenados se colocan como se muestra en la figura:

a) Si el martillo se suelta en (-4,-3) y se mueve a lo largo de la tangente, ¿en dónde golpearía a la reja?
b) Si el martillo debe chocar contra la citada reja en el punto (0,-50), ¿en qué sitio de la circunferencia debe soltarse?





Solución. Ecuación de la recta que pasa por los puntos (0,0) y (-4, -3)

$y = \frac{3}{4}$x Esta recta es perpendicular a la recta tangente en el punto (-4, -3), por lo que la pendiente de la recta tangente es, - 4/3

Utilizando la fórmula de pendiente y punto, tenemos:

$$\frac{y+3}{x+4} = -\frac{4}{3} \rightarrow \quad y = -\frac{4}{3}x - \frac{25}{3}$$

Para y = - 50 se obtiene resolviendo la ecuación x = 31.25

$b)\ y = \frac{b}{a}$x entonces la pendiente de la recta tangente es, m = - a/b

Ecuación de la recta tangente, $y - b = -\frac{a}{b}(x - a)$

Para x = 0, y = - 50

-50 – b = - (a/b)(-a) $\rightarrow$ $a^2 - 50\,b - b^2 = 0$ (1)

Se tiene: $x^2 + y^2 = 25$

Para, x = a, y = b $\qquad a^2 + b^2 = 25$

$$a^2 = 25 - b^2$$

Sustituyendo en (1) tenemos;

$$25 - b^2 - 50b - b^2 = 0 \rightarrow 2b^2 + 50b - 25 = 0$$

$$b = \frac{-50 \pm \sqrt{2700}}{4} \rightarrow \quad b_1 = \frac{1}{2} b_2 = -25.5$$

Para b = ½, $a^2 = 25 - \frac{1}{4} \rightarrow \quad a = 4.95$

- Solución utilizando derivadas

Punto de tangencia: (-4, -3), Recta tangente: $y = m(x - x_0) + y_0$

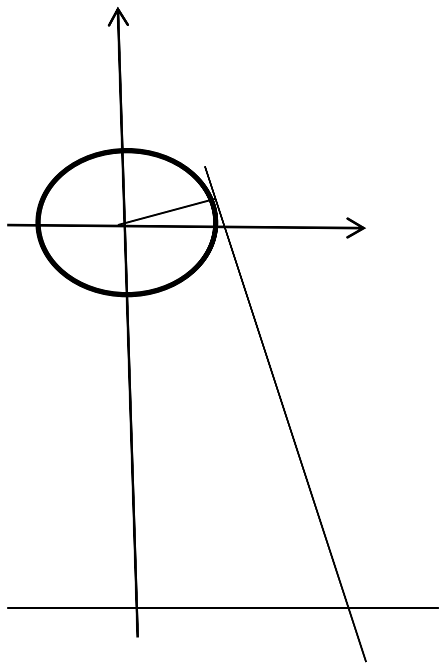
Curva como función: $y = -\sqrt{25 - x^2}$

Derivando: y'= $\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$, y' (-4) = - 4/3 Recta tangente:

$$y = -\frac{4}{3}(x - x_0) - 3$$

En el punto: (0, -50), se tiene sustituyendo -50 $= -\frac{4}{3}(x + 4) - 3$,

resulta x = 31.25 pies

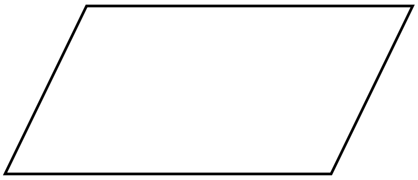


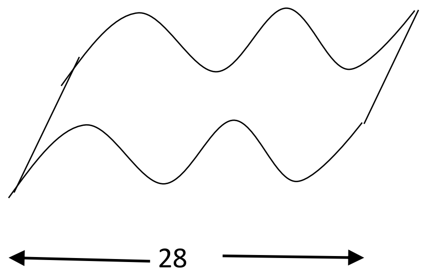
Problemas que se resuelven por longitud de arco.

Problema 1. Un fabricante de techos de lámina metálica acanalada desea producir piezas de 28 pulgadas de ancho y 2 de altura de onda, a partir de láminas planas, como se ve en la figura. El perfil del techo tiene la forma de una sinusoide con dos gráficos de la función y = sen x.

a) Compruebe que la ecuación de la sinusoide es, $y = sen(\frac{\pi}{7} x)$

b) Calcule el ancho w de una lámina metálica plana, necesarias para producir las piezas de 28 pulgadas.





Problema 2.

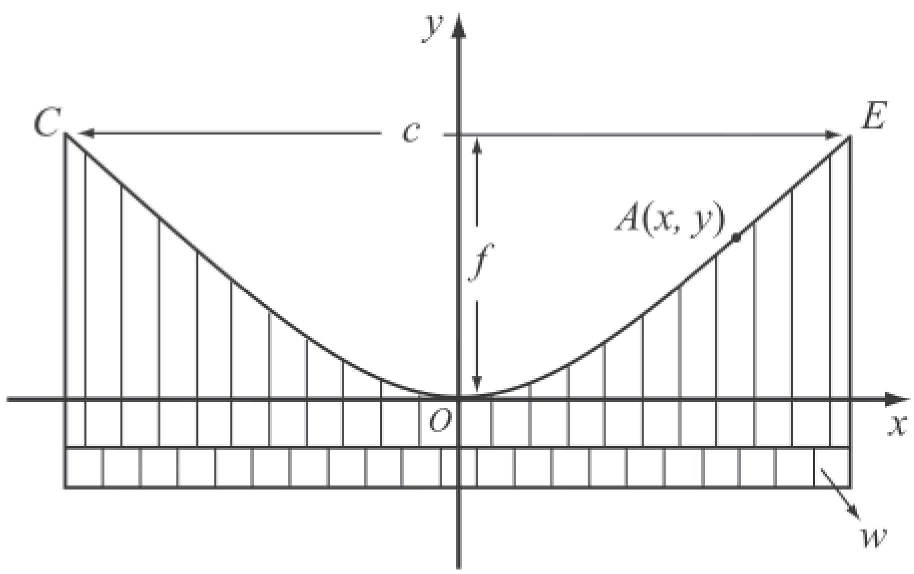
Cálculo de la longitud de los cables en un puente colgante.

Consideremos un cable flexible de peso despreciable y que lleva una carga horizontal uniformemente distribuida de intensidad w.
Suponemos que C y E están a la misma altura, entonces la distancia horizontal CE se llamará cuerda o luz del cable (c).

La profundidad del punto más bajo del cable respecto a la horizontal que pasa por C y E se llama flecha (f).

Con respecto a los ejes x e y de la figura, f es la ordenada del punto desuspensión.

La relación $\frac{c}{f}$, se llama relación de flecha



Llamemos O el punto más bajo del cable y pasemos por O un eje horizontal x y uneje vertical y.

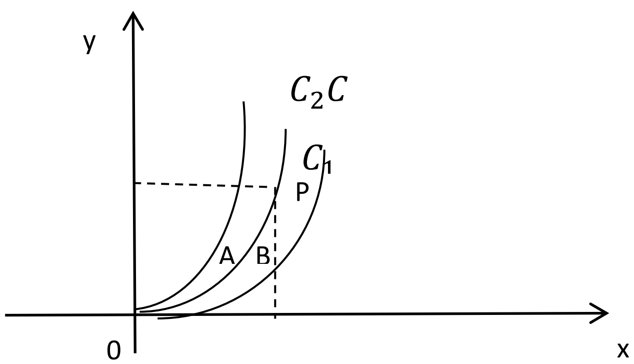
Determine la longitud de uno de los cables en el puente de Occidente. Es decir, determine la longitud de arco de curva $y = Qx^2$, donde

$Q = \frac{4f}{c^2}$Con $x\epsilon \left[-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}\right]$

donde
c = 956 (pulgadas) ≈ 291m.
f = 35 (pulgadas) ≈ 10.5m.
f/c = 0.0366 = n

Aplicaciones de la integral definida como limite superior

Problema . Sean $C_1\ y\ C_2$ dos curvas que pasan por el origen tal como se indica en la figura. Una curva C se dice que “biseca en área” la región entre$C_1\ y\ C_2$, si para cada punto P de C las dos regiones A y B sombreadas, tienen la misma área. Determinar la ecuación (función) de la curva superior C_2, conociendo que la curva bisectriz C tiene de ecuación $y = x^2\ \ con\ x\epsilon R, x \geq 0$ y que la curva C_1 tiene de ecuación $y = \frac{1}{2}x^2\ \ con\ x\epsilon R, x \geq 0$



Solución.

a) Sea P = (u, y), observe que la “y” de C_2 es la misma que de C_1

$$B = \int_0^u t^2\,dt - \int_0^u \frac{1}{2}t^2 dt = \frac{t^3}{3}\bigg|_0^u - \frac{1}{2}\frac{t^3}{3}\bigg|_0^u$$

Pero, de $y = u^2 \rightarrow u = \sqrt{y}$ entonces$B = \frac{1}{6}y\sqrt{y}$

Integrando ahora respecto a y, se tiene

De $y = u^2$ $resulta\ que\ u = \sqrt{y}$ y la ecuación desconocida C_2 tiene por ecuación, $y = h(x), su\ inversa\ es\ x = h^{-1}(y) = g(y)$

$$A = \int_0^y \sqrt{t}\ dt - \int_0^y g(t)dt = \frac{2}{3}\sqrt{y^3} - \int_0^y g(t)dt$$

Como, A = B resulta que, $\frac{2}{3}\sqrt{y^3} - \int_0^y g(t)dt = \frac{1}{6}y\sqrt{y}$

Despejando, resulta que, $\int_0^y g(t)dt = \frac{2}{3}\sqrt{y^3} - \frac{1}{6}y\sqrt{y} = \frac{1}{2}\sqrt{y^3}$

Derivando a ambos lados respecto a y, se tiene,

$$g(y) = \frac{1}{2}\frac{3}{2}y^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{4}\sqrt{y}$$

Como, $x = h^{-1}(y) = g(y), entonces\ y = h(x)$

Es decir, $x = \frac{3}{4}\sqrt{y} \Longrightarrow elevando\ al\ cuadrado\ y\ despejando\ y,$

$$y = \frac{16}{9}x^2$$