UNIVERSIDAD CENTRAL "MARTA ABREU" DE LAS VILLAS

VERITATE SOLA NOBIS IMPONETUR VIRILISTOGA. 1948

Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas

Facultad de Matemática, Física y Computación

“Solución de un problema de contorno complejo para Ecuaciones de tipo Parabólico”.

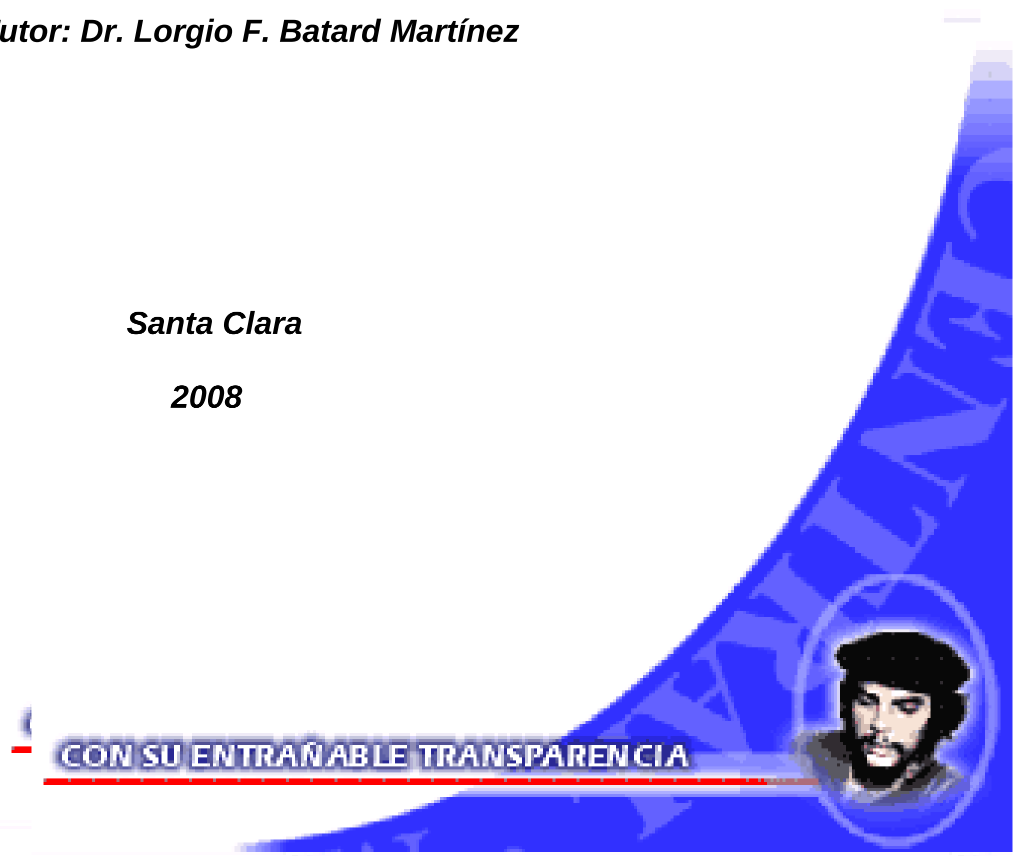
Tesis presentada en opción al título académico de Master en Matemática Aplicada.

Autor: Lic. Yanelis Estrada Hernández

Tutor: Dr. Lorgio F. Batard Martínez

Santa Clara

2008



“No se puede abrir un libro de ciencia
sin que salten en montón,
ilustraciones preciosas de los hechos del espíritu”
José Martí

Dedicatoria.

***A mi papá que no dejó de existir,
sigue viviendo en mi corazón
guiando mis pasos.***

Agradecimientos

A:

Mi Tutor, por ayudarme a crecer entre las ciencias, por su incondicional apoyo y dedicación, por ser el mejor de los buenos, por ser Lorgio Batard, esa persona que admiro, sigo y respeto incondicionalmente.

Los que ya no están, por haber estado algún día ofreciéndome infinitos momentos.

Mi mamá, por ser mi madre, por darme ese gran regalo: la oportunidad de existir.

Mi mamita Idania Peña Grass, por seguir siendo ella, por no sólo enseñarme a que de los momentos malos de la vida se puede forjar un momento bueno, si no por estar ahí en los malos y en los buenos.

Luis Francisco Delgado Peña, por haberse robado, ya para siempre, un lugar en mi corazón.

Luis Felipe Delgado Darias, por apoyarme, por ser un ejemplo al cual seguir.

Mis amigas Dayana Hernández Alcántara y Dayana Pérez Caballero, por tenerme presente en sus vidas, por quererme, por enseñarme que la amistad es eterna.

Ángela Miyar Chávez, por haberse convertido en educadora, en amiga, por quererme.

Mis profesores, por educarme y formarme.

Mi familia, por estar siempre a mi lado.

Mis amigos, porque sin ustedes, sin sus compañías, sin sus risas y sus llantos, sin sus manos, no hubiese tenido la fuerza para levantarme y seguir adelante.

Ustedes todos, porque de una forma u otra, me han ayudado a ser mejor cada día.

“A la vida que me ha dado tanto”

Resumen

En el presente trabajo se aborda un problema parabólico con condiciones de contorno de gran complejidad que es reducido, mediante el operador de Fourier, a un Problema de Contorno de Riemann con solución conocida. A partir de la solución del Problema de Riemann se obtiene la solución en cuadraturas del problema parabólico inicialmente planteado para casos particulares de suma importancia en las aplicaciones.

Abstract

In this paper a parabolic problem with complex boundary conditions has been transformed into a Riemann boundary problem of known solution by means of the Fourier operator. This allows the obtention of quadrature solutions in a variety of widely generalized particular cases of the original problem.

Índice

Introducción

Las ecuaciones de la Física – Matemática constituyen una herramienta fundamental en la investigación de muchos especialistas en diferentes ramas de la ciencia. A través de la resolución de las mismas se puede obtener información de cómo evoluciona un sistema físico determinado y de esta manera facilitamos su estudio. Dentro de las ecuaciones de la Física – Matemática las Ecuaciones Diferenciales Parciales asumen un papel muy importante, ellas se agrupan en tres grandes grupos: Elípticas, Hiperbólicas y Parabólicas. De manera general las Ecuaciones Elípticas modelan múltiples procesos estacionarios y no estacionarios, las Hiperbólicas modelan los procesos de oscilaciones y las Ecuaciones de tipo Parabólicas rigen procesos de transferencia de calor y difusión, entre otros.

En el *Banco de problemas* del estudio de las Ecuaciones de la Física – Matemática se plantea que las dificultades que existen en la solución de los problemas que conducen a las ecuaciones citadas anteriormente se debe a:

1. La inexistencia de una teoría sistemática en el tratamiento de los problemas de la Física – Matemática lo cual ha constituido un obstáculo en la resolución de dichos problemas.
2. La literatura especializada en el tema resuelve las ecuaciones antes mencionadas por diferentes métodos analíticos y numéricos como el método de Runghe Kutta, el método de las Transformadas de Laplace y Fourier entre otros, los que resultan muy engorrosos en ciertas ocasiones sobre todo inaccesibles para ingenieros y profesionales que trabajan en estas áreas.

3. Estos problemas se resuelven para situaciones físicas muy específicas reduciendo así los marcos de aplicación de los métodos citados anteriormente, nos referimos por ejemplo a las llamadas condiciones de fronteras e iniciales de primera, segunda y tercera especie.
4. En una gran cantidad de casos prácticos se observan fallas a la hora de aplicar los teoremas de existencia y unicidad, pues se ha podido notar que en ocasiones resulta que debemos añadir condiciones adicionales a las ya mencionadas condiciones complementarias, para de esta manera obtener una solución única que refleje la realidad física del problema.
5. La inexistencia de Software adecuados y atractivos, no solamente para un especialista en el tema, sino también para un usuario general, ha representado un freno real cuando se requiere modelar de la manera más fiel posible un determinado fenómeno.
6. Cuando las condiciones de contorno se complican, y se expresan en regiones infinitas, con valores diferentes en semiejes y semiplanos, la teoría clásica falla, y debemos buscar otros recursos teóricos para encontrar la solución analítica.

El cual corresponde a las siguientes ***Preguntas Científicas***:

1. ¿Cómo resolver problemas de tipo parabólico, cuando las condiciones de contorno están dadas por semiejes, para lo cual falla la teoría clásica?
2. ¿Cómo determinar clases de funciones suficientemente buenas para resolver el problema anterior?
3. ¿Cómo aplicar la teoría sobre la solución del Problema de Riemann con el auxilio de la Transformada de Fourier a los problemas de tipo parabólico?

4. ¿Cómo ofrecer los resultados de una manera funcional, de forma que sean útiles a los profesionales que utilizan este tipo de modelo?

Por tanto por todo lo dicho anteriormente, el ***Problema Científico***, se puede enunciar del siguiente modo: No existe ningún método clásico en la bibliografía existente que permita obtener la solución analítica del problema citado anteriormente: ¿Cómo resolver un problema parabólico con condiciones de contorno complejas dados por semiejes, para el cual no conocemos ningún método clásico de solución?

En el ***Marco Teórico*** de esta investigación podemos argumentar que los fundamentos científicos de nuestra investigación vienen dados por los resultados obtenidos en la segunda mitad del siglo XX sobre los problemas de contorno de la teoría de funciones analíticas, y por los resultados obtenidos por el grupo de Ecuaciones Diferenciales de la Facultad de Matemática, Física y Computación, tanto en el estudio de la estabilidad y la solución del Problema de Riemann, como en la definición de las clases de funciones suficientemente buenas para la aplicación de la Transformada de Fourier. Además, el referido grupo ha resuelto los problemas del tipo anterior en los casos elípticos e hiperbólicos, reduciendo el problema de contorno original a un problema de contorno de la teoría de funciones analíticas (Problema de Riemann), con el auxilio de la Transformada de Fourier. En la presente investigación se realiza el estudio del caso Parabólico utilizando una teoría similar.

El ***Campo de Acción***: Solución de problemas de tipo parabólico con condiciones de contorno complejas y el ***Objeto*** de nuestra investigación es: Los problemas de contorno de la Física – Matemática.

El ***Objetivo*** de nuestra investigación consiste en: Resolución de un Problema Parabólico con condiciones de contorno complejas, por reducción a un Problema de Riemann, utilizando la Transformada de Fourier.

El ***Tipo de Investigación*** en la cual estamos trabajando es teórico se ofrece la solución de un problema parabólico con condiciones de contorno complejas, en cuadraturas, lista totalmente para su aplicación a problemas de la Física – Matemática y a la tecnología.

Los ***Métodos de Investigación científica utilizados*** fueron el análisis y la síntesis para obtener las diferentes variables que intervienen en el problema estudiado, establecer las analogías y diferencias con otros problemas de contorno y determinar las técnicas posibles a emplear.

El método inductivo – deductivo apoyado en la abstracción nos permitió determinar las vías correctas para la solución del problema y su generalización en un método organizado de trabajo.

La abstracción se utilizo para la comprensión del problema científico planteado, lo cual permitió profundizar en sus diferentes aristas y establecer relaciones con otros resultados obtenidos.

El método histórico fue esencial para el estudio del desarrollo histórico de los problemas de contorno de la teoría de las funciones analíticas y su estado actual, mientras que el método lógico, apoyado en el estudio histórico, nos permitió investigar las leyes generales y esenciales del funcionamiento y desarrollo del fenómeno estudiado.

La ***Novedad Científica*** de nuestro trabajo posee gran importancia pues mejora en gran medida el tratamiento de las ecuaciones de la Física – Matemática con condiciones de contorno con alto grado de complejidad, porque cuando estas se expresan en regiones infinitas, con valores diferentes en semiejes y semiplanos, la teoría clásica falla, y debemos buscar otros recursos teóricos para encontrar la solución analítica.

A través de este trabajo introducimos un nuevo método, no reportado en la literatura clásica para enfrentar los diferentes problemas de la Física – Matemática y se establecen condiciones para determinar si el problema propuesto está correctamente planteado.

Al presentarse los resultados en cuadraturas, específicamente en integrales complejas, se ofrece una herramienta fundamental a los especialistas de diferentes campos que se enfrenten a modelos de tipo parabólico con un alto nivel de complejidad, pues no se requiere que conozcan en detalle la teoría utilizada.

También con el presente trabajo se posibilita la creación de un software que facilite la solución directa de problemas del tipo antes señalado, a partir de la forma en que se presentan los resultados obtenidos.

La aplicación de los resultados a obtener están limitados a Ecuaciones Diferenciales Parciales con Coeficientes Constantes, y a regiones en que algunas de las variables esté definida en un dominio infinito (bandas, semiplanos, cilindros), o que se pueden reducir a algunas de estas regiones por una transformación conforme.

La Tesis está distribuida de la siguiente manera:

En el Capítulo 1 se establecen definiciones y resultados auxiliares así como clases de funciones que son de suma relevancia para el estudio realizado. Además hacemos el planteamiento del problema en cuestión, consistente en encontrar la solución a una ecuación en derivadas parciales de tipo parabólico con condiciones de fronteras muy generales. La misma se buscará en una cierta clase de funciones de amplia aplicación práctica. Usamos la técnica propuesta en [1] y [2] para reducir nuestro problema a un Problema de Contorno de Riemann cuya solución es conocida, para ello usamos el operador de Fourier y finalmente encontramos una ecuación funcional que constituye un Problema de Riemann.

En el Capítulo 2 estudiamos las condiciones de solubilidad del Problema de Riemann mediante condiciones necesarias y suficientes para que el coeficiente y el término independiente de dicho problema estén en las clases de funciones adecuadas. Es interesante el estudio realizado sobre el valor del índice y los diferentes valores de acuerdo a los coeficientes del problema.

En el Capítulo 3 se determina la solución del problema en cuadraturas y se establecen condiciones para que el problema esté correctamente planteado. Todo esto se recoge en una serie de teoremas que resumen los resultados obtenidos.

Capítulo 1: Problema de Contorno General de tipo Parabólico. Reducción a un Problema de Riemann.

En el presente Capítulo hacemos el planteamiento del objeto centrado de nuestra investigación: el estudio de un problema de contorno de tipo parabólico con condiciones de contorno complejas, definidas de manera diferente en cada semieje de la recta real.

Para ello se plantean definiciones y resultados auxiliares utilizados por el grupo de Ecuaciones Diferenciales de la Facultad en la solución de problemas de tipo Elíptico e Hiperbólico.

En el Capítulo se utiliza la técnica de Chersky para reducir el problema de la Física – Matemática estudiado a un Problema de Riemann, cuya solución general ha sido estudiada anteriormente en [1] y [2].

1 .1 Definiciones y resultados auxiliares.

En el presente epígrafe trabajamos con una serie de definiciones y resultados auxiliares dados en [2] las cuales constituyen también una referencia obligada en el desarrollo del trabajo.

Se hace hincapié en las definiciones de Integral de Fourier y Clases de Hölder las cuales, junto a otras clases definidas con anterioridad, contribuyen el basamento teórico de nuestro trabajo. También se aborda el importante concepto de índice.

Dada la función $f:\Re \to$ C, si existe la integral

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}dt \left(f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{ixt}dt \right),$$ para algún

x real, se denomina Integral de Fourier de f, F (Integral de Fourier Inversa de F, f).

Si se determina una clase de de funciones $f(F)$, entonces la función $V(V^{-1})$ definida por: $F(x)=V\{f(t)\}$, $f(t)=V^{-1}\{F(x)\}$ se denomina operador directo (inverso) de Fourier. Se define el índice (ver [4]) de una función compleja continua y que no se anula sobre el eje real, $m(t)=m_1(t)+im_2(t)$, $t\in\Re$, de la forma siguiente:

$$Ind\ m(t)=\frac{1}{2\pi}[\arg m(t)]_{-\infty}^{+\infty}=\frac{1}{2\pi i}[\ln m(t)]_{-\infty}^{+\infty}=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}d[\ln m(t)]$$

Las integrales anteriores deben entenderse en el sentido de Stieltjes si $m(t)$ no es diferenciable y es de variación acotada. Del teorema del resto logarítmico (Principio del argumento) se tiene que si $m(t)$ es el valor de contorno de una función analítica en el semiplano superior (inferior), con excepción quizás de un número finito de polos en este semiplano, entonces se cumple la siguiente igualdad:

$$Ind\ m(t)=N-P\ (Ind\ m(t)=P-N)$$

Donde $Ind\ m(t)$ denota el índice de $m(t)$ y por N, P se denota el número de ceros y polos en el semiplano superior e inferior respectivamente considerando cada cero y polo tantas veces como su orden de multiplicidad.

En este trabajo se denota por K a los conjuntos numéricos $\Re$ ó C.

Sea f una función $f:\Re\to K$, se dice que f pertenece a la clase de Hölder, si existen constantes A y λ, $A>0$, y $\lambda\in(0,1]$ para las cuales se verifica:

1. $|f(x_2)-f(x_1)|\le A|x_2-x_1|^{\lambda}\ \forall x_1,x_2\in\Re$

   $\exists N>0: si\,|x_1|>N,|x_2|>N$ se cumple que:

2. $|f(x_2)-f(x_1)|\le A\left|\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}\right|^{\lambda}\ \forall x_1,x_2\in\Re$,

las constantes A y λ se denominan respectivamente coeficiente e índice de Hölder. La clase de las funciones que satisfacen la condición de Hölder para un mismo índice λ se denotan por $H_{\lambda}(\Re)$.

Se cumple que $D_A(\Re) \subset H_1(\Re) \subset H_{\lambda_2}(\Re) \subset H_{\lambda_1}(\Re) \subset C(\Re)$, para $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$, donde por $D_A(\Re)$ se entiende la clase de las funciones $f : \Re \to \Re$ con derivadas acotadas sobre $\Re$ que cumplen,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

Se verifica fácilmente que $\lambda \in (0,1]$ la clase $H_{\lambda}(\Re)$ con la suma y el producto por un escalar usuales de funciones es un álgebra asociativa.

Decimos que $f : \Re \to K$ es un elemento de $L_2(\Re)$ si $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty$. El espacio $L^{+}{}_2(\Re)$ es el espacio de funciones F^{+} de $L_2(\Re)$ que son prolongables analíticamente al semiplano superior $y > 0$ y cumplen con:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|F^{+}(x+iy)\right|^2 dx < cte \text{ la misma } \forall y > 0$$

También $L^{-}{}_2(\Re)$ es el espacio de funciones F^{-} de $L_2(\Re)$ que son prolongables analíticamente al semiplano inferior $y < 0$ y cumplen con:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|F^{-}(x+iy)\right|^2 dx < cte \text{ la misma } \forall y > 0$$

Se conoce el siguiente teorema (según [4]).

Para que la función $f_{+}(x)$ sea elemento de $L_{2+}(\Re)$ es necesario y suficiente que su transformada

$F^{+}(t)=V\{f_{+}(x)\}$ sea elemento de $L^{+}{}_{2}(\Re)$

Para que la función $f_{-}(x)$ sea elemento de $L_{2-}(\Re)$ es necesario y suficiente que su transformada

$F^{-}(t)=V\{f_{-}(x)\}$ sea elemento de $L^{-}{}_{2}(\Re)$

La clase de las funciones $L^{\lambda}{}_{2}(\Re)$ se define por $L^{\lambda}{}_{2}(\Re)=L_{2}(\Re)\cap H_{\lambda}(\Re)$.

La clase de las funciones $L_{2}(\Re)$ que pertenece a una de las funciones de Hölder se denotan por el símbolo $\{\{0\}\}$, o sea,

$\{\{0\}\}=\bigcup_{\lambda\in(0,1]}H_{\lambda}(\Re)\cap L_{2}(\Re)$

Los espacios $\{0\}_{\lambda}$ son aquellos de las funciones que tienen su transformada en $L^{\lambda}{}_{2}(\Re)$, o sea $V\{f(x)\}$ es elemento de $L^{\lambda}{}_{2}(\Re)$, si $f\in\{0\}_{\lambda}$.

La clase de las funciones $f\in\{0\}_{\lambda}$ tales que $f\equiv 0$ si $x<0(x>0)$ se denotan por $L^{\lambda}{}_{2-}(\Re)$ ($L^{\lambda}{}_{2+}(\Re)$). La clase de las funciones $f\in L_{2}(\Re)$ tales que $f\equiv 0$ si $x<0(x>0)$ se denotan por $L_{2-}(\Re)$ ($L_{2+}(\Re)$).

La clase de las funciones $F\in L_{2}^{\lambda}(\Re)$ que son prolongables analíticamente al semiplano inferior (superior) y que satisfacen que

$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|F^{-}(x+iy)\right|^{2}dx<M, \text{si } y<0$ $\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left|F^{+}(x+iy)\right|^{2}dx<M, \text{si } y>0\right)$ donde M es independiente de y, se denota por $L_{2}^{\lambda-}(\Re)(L_{2}^{\lambda+}(\Re))$.

La clase de las funciones f que no se anulan sobre $\Re$ y tales que $f(\pm\infty)=1$ y $(f-1)$ es elemento de $L_{2}^{\lambda+}(\Re)$ $(L_{2}^{\lambda-}(\Re))$ se denotan por $L_{2}^{\lambda+}(\Re+1)(L_{2}^{\lambda-}(\Re+1))$.

Del teorema y definiciones anteriores se tiene el teorema siguiente: Una condición necesaria y suficiente para que la función f pertenezca a $L_{2+}^{\lambda}(\Re)(L_{2-}^{\lambda}(\Re))$ es que su Transformada de Fourier F pertenezca a $L_2^{\lambda+}(\Re)(L_2^{\lambda-}(\Re))$.

Definición de Operador $P^{\pm}$:

$$P^{\pm}: L_2^{\lambda}(\Re) \to L_2^{\lambda\pm}(\Re)$$

$$f \to P^{\pm}(f) = (VoT^{\pm}oV^{-1})f$$

donde $T^{\pm}: \{0\}_{\lambda} \to L_{2\pm}^{\lambda}(\overline{\Re})$

$$h(x) \to T^{\pm}(h(x)) = \frac{1}{2}(signt \pm 1)h(x) = h_{\pm}(x)$$

Dado un Problema de Salto

$$F^{+}(x) - F^{-}(x) = H(x) \in L_2^{\lambda}(\Re)(L_2(\Re))$$

$$P^{\pm}(H(x)) = (VoT^{\pm}oV^{-1})H(x) = (VoT^{\pm})V^{-1}(H(x))$$

$$V^{-1}(H(x) = h(x) \in \{0\}_{\lambda}$$

$$P^{\pm}(H(x)) = VoT^{\pm}(h(x) = V(h_{\pm}(x)) \in L_{2\pm}^{\lambda}(\overline{\Re})$$

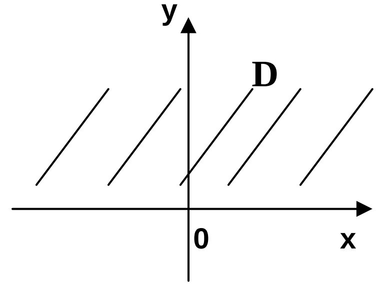
$$P^{\pm}(H(x)) = F^{\pm}(x) \in L_2^{\lambda\pm}(\overline{\Re})$$

1 .2 Planteamiento del problema general.

En este epígrafe procederemos a realizar el planteamiento del problema de contorno general de tipo Parabólico con condiciones de contorno complejas:

Dada la Ecuación Diferencial Parcial de tipo Parabólico

$$u_{xx}(x,y)+ku_y(x,y)=g(x,y),\ \mathrm{k}\neq 0 \qquad \textbf{(1.2.1)}$$



en la región

$$D=\{(x,y)\in\Re^2 : 0<y<+\infty\} \qquad \textbf{(1.2.2)}$$

y las condiciones de contorno

$$\beta_{00}u(x,0^+)+\beta_{10}u_x(x,0^+)+\beta_{01}u_y(x,0^+)=g_{11}(x),\ x<0 \qquad \textbf{(1.2.3)}$$

$$\gamma_{00}u(x,0^+)+\gamma_{10}u_x(x,0^+)+\gamma_{01}u_y(x,0^+)=g_{12}(x),\ x>0 \qquad \textbf{(1.2.4)}$$

donde β_{ij} y γ_{ij}; $i=\overline{0,1}$; $j=\overline{0,1}$ son números reales

$$g\in L_2(\Re),\ g_{11}\in L_2(-\infty,0)\ \text{y}\ g_{12}\in L_2(0,+\infty)$$

Se desea encontrar condiciones sobre los elementos conocidos de **(1.2.1)**, **(1.2.3)** y **(1.2.4)** para que la ecuación **(1.2.1)** tenga solución única en la región **(1.2.2)**, que satisfagan las condiciones **(1.2.3)- (1.2.4)** y que pertenezcan a la clase.

$$S=\{u\in F(D): u_{xx}\in L_2(\Re), u_y\in L_2(\Re), u\in L_2(\Re), 0<y+\infty\} \qquad \textbf{(1.2.5)}$$

donde $F(D)$ es la clase de funciones que están definidas sobre el semiplano D.

El problema está bien planteado porque el número de condiciones de contorno (2) es igual al orden de la ecuación diferencial con respecto a y (1), por el número de regiones (1), más uno (ver [3]).

1 .3 Reducción a un Problema de Riemann.

A continuación se aplica la técnica descrita en [3] para reducir el problema planteado en ***1.2*** a un problema de Riemann para el semiplano,

a) Aplicación de la Transformada de Fourier a la ecuación **(1.2.1)**. Realizando esta operación se obtiene la ecuación diferencial ordinaria:

$$k\frac{dU(x,y)}{dy}-x^2U(x,y)=G(x,y) \qquad \textbf{(1.3.1)}$$

b) Obtención de la solución de la ecuación diferencial **(1.3.1)**

La raíz de la ecuación característica

$$kz-x^2=0 \qquad \textbf{(1.3.2)}$$

correspondiente a **(1.3.1)** es

$$z(x)=\frac{x^2}{k} \qquad \textbf{(1.3.3)}$$

Luego la solución general de **(1.3.1)** es:

$$U(x,y)=C(x)e^{z(x)y}+V(x,y) \qquad \textbf{(1.3.4)}$$

donde $V(x,y)$ es una solución particular de **(1.3.4)** que viene dada por

$$V(x,y)=\frac{e^{\frac{x^2}{k}y}}{k}\int G(x,y)e^{-\frac{x^2}{k}y}dy \qquad \textbf{(1.3.5)}$$

y $C(x)$ es una función arbitraria que debemos determinar.

c) Adaptación de las condiciones de contorno **(1.2.3)** y **(1.2.4)** para la aplicación de la Transformada de Fourier.

Con ese objetivo se introducen las funciones f_+ y f_-

$$f_+(x) = \begin{cases} \text{función desconocida de } L_{2+}(\Re), & x > 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

$$f_-(x) = \begin{cases} 0 & , x > 0 \\ \text{función desconocida de } L_{2-}(\Re), & x < 0 \end{cases}$$

Estas funciones permiten escribir **(1.2.3)** y **(1.2.4)** en la forma

$$\beta_{00}u(x,0^+) + \beta_{10}u_x(x,0^+) + \beta_{01}\frac{du}{dy}(x,0^+) = g_{11-}(x) + f_+(x), |x| < +\infty \qquad \textbf{(1.3.6)}$$

$$\gamma_{00}u(x,0^+) + \gamma_{10}u_x(x,0^+) + \gamma_{01}\frac{du}{dy}(x,0^+) = g_{12+}(x) + f_-(x), |x| < +\infty \qquad \textbf{(1.3.7)}$$

donde

$$g_{11-}(x) = \begin{cases} g_{11}, & x < 0 \\ 0 & , x \geq 0 \end{cases}$$

$$g_{12+}(x) = \begin{cases} g_{12}, & x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

d) Aplicación de la Transformada de Fourier a las nuevas condiciones de contorno.

Realizando esta operación en **(1.3.6)** y **(1.3.7)** se obtiene:

$$\beta_{00}U(x,0^+) - ix\beta_{10}U(x,0^+) + \beta_{01}\frac{dU}{dy}(x,0^+) = G_{11}^-(x) + F^+(x) \qquad \textbf{(1.3.8)}$$

$$\gamma_{00}U(x,0^+) - ix\gamma_{10}U(x,0^+) + \gamma_{01}\frac{dU}{dy}(x,0^+) = G_{12}^+(x) + F^-(x) \qquad \textbf{(1.3.9)}$$

De acuerdo a la definición de f_+ y f_- las funciones $F^-(x)$ y $F^+(x)$ se pueden considerar (ver [4]) como los valores límites de las funciones $F^-(z)$ y $F^+(z)$, analíticas en el semiplano inferior y superior respectivamente, que satisfacen las condiciones:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|F^-(x+iy)\right|^2 dx < M, \text{si } y < 0 \qquad \text{y} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \left|F^+(x+iy)\right|^2 dx < M, \text{si } y > 0$$

Respectivamente, donde M es el mismo para todas las y

e) Obtención de una ecuación funcional en la cual las únicas funciones desconocidas son F^+ y F^-:

A partir de **(1.3.4)** se obtiene fácilmente

$$\frac{dU}{dy}(x,y) = z(x)C(x)e^{z(x)y} + \frac{dV}{dy}(x,y) \qquad \textbf{(1.3.10)}$$

Sustituyendo **(1.3.5)** y **(1.3.10)** en **(1.3.8)** y **(1.3.9)**, y efectuando las operaciones necesarias se obtiene el sistema:

$$P_1(x)C(x) - F^+(x) = H_1(x) \qquad \textbf{(1.3.11)}$$

$$P_2(x)C(x) - F^-(x) = H_2(x) \qquad \textbf{(1.3.12)}$$

donde

$$P_1(x) = \beta_{00} - ix\beta_{10} + \frac{x^2}{k}\beta_{01} \quad \text{y} \quad P_2(x) = \gamma_{00} - ix\gamma_{10} + \frac{x^2}{k}\gamma_{01}$$

$$H_1(x) = G_{11}^-(x) - (\beta_{00} - ix\beta_{10})V(x,0^+) - \beta_{01}\frac{dV}{dy}(x,0^+)$$

$$H_2(x) = G_{12}^+(x) - (\gamma_{00} - ix\gamma_{10})V(x,0^+) - \gamma_{01}\frac{dV}{dy}(x,0^+)$$

donde a partir de **(1.3.5)** se tiene:

$$V(x,0^+) = \frac{1}{k}\lim_{y\to 0^+}\int G(x,y)e^{-\frac{x^2}{k}y}\,dy$$

Si $V(x,0^+)$, $xV(x,0^+)$ y $\frac{dV(x,0^+)}{dy}$ pertenecen a $L_2(\Re)$, es evidente que $H_1(x)$ y $H_2(x)$ pertenecen a $L_2(\Re)$

De **(1.3.11)** obtenemos:

$$C(x) = \frac{F^+(x)}{P_1(x)} + \frac{H_1(x)}{P_1(x)} \qquad \textbf{(1.3.13)}$$

sustituyendo **(1.3.13)** en **(1.3.12)** obtenemos el Problema de Riemann

$$F^+(x) = D(x)F^-(x) + H(x) \qquad \textbf{(1.3.14)}$$

donde $D(x) = \frac{P_1(x)}{P_2(x)}$ y $H(x) = \frac{P_1(x)}{P_2(x)}H_2(x) - H_1(x)$

Capítulo 2: Condiciones de solubilidad del Problema de Riemann obtenido a partir de un problema parabólico complejo. Análisis del índice.

En este Capítulo se determinan condiciones necesarias y suficientes sobre los coeficientes de **(1.2.1)**, **(1.2.3)** y **(1.2.4)**, para que el coeficiente y el término independiente de **(1.3.14)** satisfagan las condiciones correspondientes al problema de Riemann.

De acuerdo a [2], para obtener la solución de **(1.3.14)** en la clase $L_2^{\lambda\pm}(\overline{\Re})\,(L_2^{\pm}(\Re))$, se requiere que $D(x)$ pertenezca a la clase $L_2^{\lambda}(\overline{\Re}+1)$ y el término independiente pertenezca a $L_2^{\lambda}(\overline{\Re})\,(L_2(\Re))$; siendo $L_2^{\lambda}(\overline{\Re}+1)$ la clase de las funciones f que satisfacen las condiciones siguientes:

i. f no tiene ni ceros, ni polos sobre los $\Re$.

ii. $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=1$.

iii. $(f-1)\in L_2^{\lambda}(\overline{\Re})$

2.1 Determinación de las condiciones para que $D(x)$ satisfaga la condición i:

Tenemos que: $D(x)=\dfrac{P_1(x)}{P_2(x)}$

Luego, podemos escribir

$$D(x)=\frac{\beta_{01}x^2-ik\beta_{10}x+k\beta_{00}}{\gamma_{01}x^2-ik\gamma_{10}x+k\gamma_{00}} \qquad \textbf{(2.1.1)}$$

Si separamos parte real y parte imaginaria en el numerador de **(2.1.1)** e igualamos a cero, obtenemos el sistema:

$$\beta_{01}x^2 + k\beta_{00} = 0 \qquad \textbf{(2.1.2)}$$

$$k\beta_{10}x = 0 \qquad \textbf{(2.1.3)}$$

Como $k \neq 0$, el sistema **(2.1.2), (2.1.3)** tiene evidentemente raíces reales solamente en las siguientes variantes:

1. $\beta_{00} = 0$, hay raíz en $x = 0$,
2. $\beta_{01} \neq 0$, $\beta_{10} = 0$, $\dfrac{k\beta_{00}}{\beta_{01}} < 0$; hay dos raíces reales del tipo $x = \pm\sqrt{-\dfrac{k\beta_{00}}{\beta_{01}}}$.

Se cumple entonces el siguiente Teorema:

Teorema 1: El numerador (denominador) de $D(x)$ no tiene ni ceros (ni polos) para $x \in \Re$, si y solo si se cumple una de las condiciones siguientes:

1. $\beta_{00}\beta_{10} \neq 0$ $(\gamma_{00}\gamma_{10} \neq 0)$
2. $\beta_{10} = 0$, $k\beta_{00}\beta_{01} > 0$ $(\gamma_{10} = 0,\ k\gamma_{00}\gamma_{01} > 0)$

2.2 Determinación de las condiciones para $D(x)$ que satisfaga la condición ii.

Como $\lim\limits_{|x|\to+\infty} D(x) = \lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{\beta_{01}x^2 - ik\beta_{10}x + k\beta_{00}}{\gamma_{01}x^2 - ik\gamma_{10}x + k\gamma_{00}}$ **(2.2.1)**

se tiene trivialmente el siguiente Teorema:

Teorema 2: El límite del segundo miembro de **(2.2.1)** existe y es distinto de cero si y solo si; se cumple una de las condiciones siguientes:

a) $\beta_{01}\gamma_{01} \neq 0$, en este caso el límite indicado en **(2.2.1)** es $l = \dfrac{\beta_{01}}{\gamma_{01}}$.

b) $\beta_{01} = \gamma_{01} = 0$, $\beta_{10}\gamma_{10} \neq 0$, en este caso el límite indicado en **(2.2.1)** es $l = \dfrac{\beta_{10}}{\gamma_{10}}$.

c) $\beta_{01} = \gamma_{01} = \beta_{10} = \gamma_{10} = 0$, $\beta_{00}\gamma_{00} \neq 0$, en este caso el límite indicado en **(2.2.1)** es $l = \dfrac{\beta_{00}}{\gamma_{00}}$.

La demostración de este Teorema es trivial.

Si $l \neq 1$, entonces multiplicando **(1.3.14)** por $\dfrac{1}{l}$ obtenemos:

$$\frac{F^+(x)}{l} = \frac{D(x)}{l} F^-(x) + \frac{H(x)}{l}$$

considerando entonces las funciones:

$$F_1^+(x)\frac{F^+(x)}{l}, F_1^-(x) = F^-(x),\ D_1(x) = \frac{D(x)}{l} \qquad \textbf{(2.2.2)}$$

Se obtiene la ecuación funcional:

$$F_1^+(x) = D_1(x) F_1^-(x) + \frac{H(x)}{l} \qquad \textbf{(1.3.14')}$$

para lo cual se cumple $\lim\limits_{|x| \to +\infty} D_1(x) = 1$

Luego de **(2.2.2)** y **(1.3.14')** se obtendría la solución del problema original.

2.3 Determinación de condiciones para $D(x)$ que se satisfaga la condición iii.

Teorema 3: Si se cumple simultáneamente una de las condiciones del Teorema 1 y una de las condiciones del Teorema 2, entonces $(D(x)-1) \in L_2^{\lambda}(\overline{\Re})$.

Demostración:

Probemos primeramente que $(D(x)-1) \in H_{\lambda}(\overline{\Re})$ .Como $D_A(\Re) \subset H_{\lambda}(\overline{\Re})$, basta probar que $(D(x)-1) \in D_A(\overline{\Re})$. Si se cumple simultáneamente una de las condiciones del

Teorema 1 y una de las condiciones del Teorema 2, se puede asegurar que $\lim_{|x|\to+\infty} D\ (x) = l$, y $l \neq 0$. Si $l \neq 1$ se considera **(1.3.14')** en lugar de **(1.3.14)**, luego no se pierde generalidad cuando consideramos que $\lim_{|x|\to+\infty} D\ (x) = 1$.

Si se cumple simultáneamente una de las condiciones del Teorema 1 y una de las condiciones del Teorema 2, es fácil probar que $[D(x)-1]'$ es una función acotada sobre $\Re$ y además:

$$[D(x)-1]' = \frac{P_1(x)P_2{}'(x) - P_1{}'(x)P_2(x)}{[P_2(x)]^2}$$

luego $[D(x)-1] \in D_A(\overline{\Re})$.

Por ultimo, como $\lim_{|x|\to+\infty} D(x) = l$. los coeficientes de mayor grado de $P_1(x)$ y $P_2(x)$ son iguales y consecuentemente $|D(x)-1| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{|x|}\right)$ en una vecindad del infinito, y como $D(x)$ es derivable se tiene que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |D(x)-1|^2\, dx < +\infty$$

Por tanto queda probado que $(D(x)-1) \in L_2^\lambda(\overline{\Re})$.

2.4 Determinación de las condiciones para que el término independiente de (1.3.14) sea elemento de $L_2(\Re)$.

Teorema 4: Si se cumple simultáneamente una de las condiciones del Teorema 1 y una de las condiciones del Teorema 2, y además, $V(x,y)$, $xV(x,0^+)$, y $\frac{dV(x,0^+)}{dy}$ pertenecen a $L_2(\Re)$**,** entonces el término independiente de **(1.3.14)** pertenece a $L_2(\Re)$**.**

Demostración:

Tenemos que el término independiente de **(1.3.14)** tiene la forma:

$$H(x) = \frac{P_1(x)}{P_2(x)} H_2(x) - H_1(x)$$

De acuerdo a las condiciones impuestas es evidente que $H_1(x)$ y $H_2(x)$ son elementos de $L_2(\Re)$**;** y $\frac{P_1(x)}{P_2(x)}$ es una función acotada sobre $\Re$. De aquí se tiene obviamente que $H(x) \in L_2(\Re)$.

Si el problema original es homogéneo ($g(x,y) \equiv 0$) el Teorema 4 quedaría en la siguiente forma:

Corolario (del Teorema 4): Si se cumple simultáneamente una de las condiciones del Teorema 1 y una de las condiciones del Teorema 2, entonces el término independiente de **(1.3.14)** pertenece a $L_2(\Re)$**.**

2.5 Cálculo del índice del coeficiente.

Nuestro análisis está dado a los casos en que se cumplen simultáneamente una de las condiciones del Teorema 1 y una de las condiciones del Teorema 2.

Como las raíces de $P_1(x)$ y $P_2(x)$ vienen dadas respectivamente por las expresiones:

$$\frac{k\beta_{10}i \pm \sqrt{-k^2\beta_{10}{}^2 - 4k\beta_{01}\beta_{00}}}{2\beta_{01}}$$

y

$$\frac{k\gamma_{10}i \pm \sqrt{-k^2\gamma_{10}{}^2 - 4k\gamma_{01}\gamma_{00}}}{2\gamma_{01}}$$

tenemos las siguientes posibilidades:

a. $\beta_{10} \neq 0, k\beta_{01}\beta_{00} > 0$ $(\gamma_{10} \neq 0, k\gamma_{01}\gamma_{00} > 0)$ entonces $P_1(x)\,(P_2(x))$ tiene raíces imaginarias en semiplanos diferentes.

b. $\beta_{10} \neq 0$, $k\beta_{01}\beta_{00} < 0$ $(\gamma_{10} \neq 0, k\gamma_{01}\gamma_{00} < 0)$ entonces $P_1(x)\,(P_2(x))$ tiene 2 raíces complejas en el mismo semiplano si $4|k\beta_{01}\beta_{00}| > k^2\beta_{10}{}^2$ $(4|k\gamma_{01}\gamma_{00}| > k^2\gamma_{10}{}^2)$, e imaginarias en el mismo semiplano si $4|k\beta_{01}\beta_{00}| < k^2\beta_{10}{}^2$ $(4|k\gamma_{01}\gamma_{00}| < k^2\gamma_{10}{}^2)$.

c. $\beta_{01} = 0$, $\beta_{10}\beta_{00} \neq 0\,(\gamma_{01} = 0, \gamma_{10}\gamma_{00} \neq 0)$ entonces $P_1(x)\,(P_2(x))$ tiene una sola raíz imaginaria $-\frac{\beta_{00}}{\beta_{10}}i\ (-\frac{\gamma_{00}}{\gamma_{10}}i)$.

d. $\beta_{10} = 0$, $k\beta_{01}\beta_{00} > 0\,(\gamma_{10} = 0,\ k\gamma_{01}\gamma_{00} > 0)$ entonces $P_1(x)\,(P_2(x))$ tiene 2 raíces imaginarias conjugadas.

e. $\beta_{10} = \beta_{01} = 0$, $\beta_{00} \neq 0$ ($\gamma_{10} = \gamma_{01} = 0$, $\gamma_{00} \neq 0$) entonces $P_1(x)$ ($P_2(x)$) no tiene raíces.

Luego tenemos las siguientes variantes para el índice de $D(x)$.

Casos de índice cero:

2.5.1-a) $\beta_{10} \neq 0$, $k\beta_{01}\beta_{00} > 0$, $\gamma_{10} \neq 0$ y $k\gamma_{01}\gamma_{00} > 0$

2.5.1-b) $\beta_{10} \neq 0$, $k\beta_{01}\beta_{00} < 0$, $\gamma_{10} \neq 0$, $k\gamma_{01}\gamma_{00} < 0$ y $\beta_{10}\beta_{01}\gamma_{10}\gamma_{01} < 0$

2.5.1-c) $\beta_{01} = \gamma_{01} = 0$, $\beta_{10}\beta_{00} < 0$ y $\gamma_{10}\gamma_{00} < 0$

2.5.1-d) $\beta_{01} = \gamma_{01} = 0$, $\beta_{10}\beta_{00} > 0$ y $\gamma_{10}\gamma_{00} > 0$

2.5.1-e) $\beta_{10} = 0$, $k\beta_{01}\beta_{00} > 0$, $\gamma_{10} \neq 0$ y $k\gamma_{01}\gamma_{00} > 0$

2.5.1-f) $\beta_{10} \neq 0$, $k\beta_{01}\beta_{00} > 0$, $\gamma_{10} = 0$ y $k\gamma_{01}\gamma_{00} > 0$

2.5.1-g) $\beta_{10} = \gamma_{10} = 0$, $k\beta_{01}\beta_{00} > 0$ y $k\gamma_{01}\gamma_{00} > 0$

2.5.1-h) $\beta_{01} = \beta_{10} = \gamma_{01} = \gamma_{10} = 0$ y $\beta_{00}\gamma_{00} \neq 0$

Casos de índice uno:

2.5.2-a) $\beta_{01} = \gamma_{01} = 0$, $\beta_{10}\beta_{00} < 0$ y $\gamma_{10}\gamma_{00} > 0$

2.5.2-b) $\beta_{10} = 0$, $k\beta_{01}\beta_{00} > 0$, $k\gamma_{01}\gamma_{00} < 0$ y $k\gamma_{01}\gamma_{10} < 0$

2.5.2-c) $k\beta_{01}\beta_{00} < 0$, $k\beta_{01}\beta_{10} > 0$, $\gamma_{10} = 0$ y $k\gamma_{01}\gamma_{00} > 0$

2.5.2-d) $\beta_{10} \neq 0$, $k\beta_{01}\beta_{00} > 0$, $k\gamma_{01}\gamma_{00} < 0$ y $k\gamma_{10}\gamma_{01} < 0$

2.5.2-e) $\gamma_{10} \neq 0$, $k\beta_{01}\beta_{00} < 0$, $k\beta_{10}\beta_{01} > 0$ y $k\gamma_{01}\gamma_{00} > 0$

Caso de índice dos:

2.5.3-a) $k\beta_{01}\beta_{00} < 0$, $k\beta_{01}\beta_{10} > 0$, $k\gamma_{01}\gamma_{00} < 0$ y $k\gamma_{01}\gamma_{10} < 0$

Casos de índice menos uno:

2.5.4-a) $\beta_{01} = \gamma_{01} = 0$, $\beta_{10}\beta_{00} > 0$ y $\gamma_{10}\gamma_{00} < 0$

2.5.4-b) $k\beta_{01}\beta_{00} < 0$, $k\beta_{01}\beta_{10} < 0$, $\gamma_{10} = 0$ y $k\gamma_{01}\gamma_{00} > 0$

2.5.4-c) $\beta_{10} = 0$, $k\beta_{01}\beta_{00} > 0$, $k\gamma_{01}\gamma_{00} < 0$, y $k\gamma_{01}\gamma_{10} > 0$

2.5.4-d) $\beta_{10} \neq 0$, $k\beta_{01}\beta_{00} > 0$, $k\gamma_{01}\gamma_{00} < 0$ y $k\gamma_{10}\gamma_{01} > 0$

2.5.4-e) $\gamma_{10} \neq 0$, $k\beta_{01}\beta_{00} < 0$, $k\beta_{10}\beta_{01} < 0$ y $k\gamma_{01}\gamma_{00} > 0$

Casos de índice menos dos:

2.5.5-a) $k\beta_{01}\beta_{00} < 0$, $k\beta_{10}\beta_{01} < 0$, $k\gamma_{01}\gamma_{00} < 0$, y $k\gamma_{10}\gamma_{01} > 0$

Capítulo 3: Solución del Problema de Riemann para los distintos tipos de índices analizados en el capítulo anterior.

En el presente capítulo buscaremos la solución del Problema de Riemann **(1.3.14)** de acuerdo a los casos de índice estudiados en el capítulo anterior, $D(x)$ cumple simultáneamente una de las condiciones del Teorema 1 y una de las condiciones del Teorema 2.

3.1 Casos de índice cero.

- **Casos 2.5.1-a), 2.5.1-e), 2.5.1-f) y 2.5.1-g)**

En estos casos la expresión **(1.3.14)** toma la forma:

$$F^+(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)(x-bi)}{\gamma_{01}(x-ci)(x-di)}F^-(x) + \frac{\beta_{01}(x-ai)(x-bi)}{\gamma_{01}(x-ci)(x-di)}H_2(x) - H_1(x) \qquad \textbf{(3.1.1)}$$

donde $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$ y $d < 0$

en el caso 2.5.1-e) se tiene que $a = -b$, en el caso 2.5.1-f) $c = -d$ y en el caso 2.5.1-g) $a = -b$ y $c = -d$ simultáneamente.

La expresión **(3.1.1)** se puede escribir en la forma:

$$\frac{(x-di)}{(x-bi)}F^+(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)}F^-(x) + \frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)}H_2(x) - \frac{(x-di)}{(x-bi)}H_1(x)$$

haciendo

$$F_1^+(x) = \frac{(x-di)}{(x-bi)}F^+(x) \qquad \textbf{(3.1.2)}$$

$$F_1^-(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)}F^-(x)$$ y

$$H_3(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)} H_2(x) - \frac{(x-di)}{(x-bi)} H_1(x)$$

nos queda el Problema de Salto:

$$F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_3(x) \qquad \textbf{(3.1.3)}$$

Luego podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 5: Si $k < 0$ y $V(x,y)$, $xV(x,0^+)$, y $\dfrac{dV(x,0^+)}{dy}$ pertenecen a $L_2(\Re)$, entonces el problema **(1.2.1)** – **(1.2.4)** para los casos 2.5.1-a), 2.5.1-e), 2.5.1-f) y 2.5.1-g) tiene solución única en la clase **(1.2.5)** dada por $u(x,y) = V^{-1}[U(x,y)]$.

Donde $U(x,y)$ está dada por las fórmulas **(1.3.4)** y **(1.3.14)**, y

$$F^+(x) = \frac{x-bi}{x-di}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} h_3(t)e^{ixt}dt \qquad \textbf{(3.1.4)}$$

siendo

$$h_3 = V^{-1}[H_3]$$

Demostración:

La solución del Problema de Salto **(3.1.3)** según la Definición dada de Operador proyección en el Capítulo 1 es:

$$P^{\pm}(H_3(x)) = (VoT^{\pm}oV^{-1})H_3(x) = VoT^{\pm}(h_3) = V(h_{3\pm})$$

$$V(h_{3+}(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} h_3(t)e^{ixt}dt = F_1^+(x) \qquad \textbf{(3.1.5)}$$

$$V(h_{3-}(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} h_3(t)e^{ixt}dt = F_1^-(x)$$

donde $h_3 = V^{-1}[H_3]$.

luego de la sustitución de **(3.1.5)** en **(3.1.1)** se obtiene la expresión **(3.1.4)**. Por otra parte de **(1.3.4)** y **(1.3.13)** tenemos

$$U(x,y) = \frac{F^+(x) + H_1(x)}{(x-ai)(x-bi)} e^{\frac{x^2}{k}y} + V(x,y) \qquad \textbf{(3.1.6)}$$

En **(3.1.6)** $F^+(x) \in L_2^+(\Re)$, $H_1(x) \in L_2^-(\Re)$. Luego $U(x,y)$, $x^2U(x,y)$, y $\frac{dU(x,y)}{dy}$ pertenecen a $L_2(\Re)$ para todo y, $0 < y < +\infty$, por lo tanto $u(x,y)$ pertenece a la clase **(1.2.5)**.

Como $u(x,y) = V^{-1}[U(x,y)]$, nos queda:

$$u(x,y) = V^{-1}[U(x,y)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F^+(t) + H_1(t)}{(t-ai)(t-bi)} e^{\frac{t^2}{k}y} e^{-ixt} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} V(t,y) e^{-ixty} dt$$

donde finalmente la solución a nuestro problema para los casos 2.5.1-a), 2.5.1-e), 2.5.1-f) y 2.5.1-g) es:

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F^+(t) + H_1(t)}{(t-ai)(t-bi)} e^{\frac{t^2}{k}y - ixt} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} V(t,y) e^{-ixty} dt]$$

Para el caso Homogéneo, es decir para $V(x,y) \equiv 0$ tenemos el siguiente teorema similar al Teorema 5:

Teorema 5´: Si $k < 0$, entonces el problema **(1.2.1)** – **(1.2.4)** para los casos 2.5.1-a), 2.5.1-e), 2.5.1-f) y 2.5.1-g) tiene solución única en la clase **(1.2.5)** dada por $u(x,y) = V^{-1}[U(x,y)]$.

- **2.5.1-b)**

En este caso hay dos posibilidades

- 2.5.1-b$_1$) Todas las raíces de $P_1(x)$ y $P_2(x)$ están en el semiplano superior (esto ocurre cuando $k<0$, si se cumple además, $\beta_{10}\beta_{01}<0$ y $\gamma_{10}\gamma_{01}<0$)
- 2.5.1-b$_2$) Todas las raíces de $P_1(x)$ y $P_2(x)$ están en el semiplano inferior (esto ocurre cuando $k<0$, si se cumple además, $\beta_{10}\beta_{01}>0$ y $\gamma_{10}\gamma_{01}>0$)

Subcaso 2.5.1-b$_1$): La expresión **(1.3.14)** toma la forma **(3.1.1)** pero ahora *a*, *b*, *c* y *d* son números complejos con parte imaginaria mayor que cero si $4\left|k\beta_{01}\beta_{00}\right|>k^2\beta_{10}^2$ y $4\left|k\gamma_{01}\gamma_{00}\right|>k^2\gamma_{10}^2$, o números imaginarios sobre el eje imaginario positivo si $4\left|k\beta_{01}\beta_{00}\right|<k^2\beta_{10}^2$ y $4\left|k\gamma_{01}\gamma_{00}\right|<k^2\gamma_{10}^2$. (También se puede obtener un caso mixto).

Haciendo:

$$F_1^+(x)=F^+(x) \qquad \textbf{(3.1.7)}$$

$$F_1^-(x)=\frac{\beta_{01}(x-ai)(x-bi)}{\gamma_{01}(x-ci)(x-di)}F^-(x)$$

$$H_4(x)=\frac{\beta_{01}(x-ai)(x-bi)}{\gamma_{01}(x-ci)(x-di)}H_2(x)-\frac{(x-ai)(x-di)}{(x-ci)(x-bi)}H_1(x)$$

nos queda el Problema de Salto:

$$F_1^+(x)-F_1^-(x)=H_4(x)$$

Luego por un análisis similar al realizado en la demostración del Teorema 5, resulta evidente un teorema con enunciado similar al anterior pero con H_4 en lugar de H_3 y

$$F^+(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}h_4(t)e^{ixt}dt \quad \text{donde} \quad h_4=V^{-1}[H_4]$$

Luego de **(1.3.4)** y **(1.3.13)** obtenemos

$$U(x,y)=\frac{F^{+}(x)+H_1(x)}{(x-ai)(x-bi)}e^{\frac{x^2}{k}y}+V(x,y)$$

Subcaso 2.5.1-b$_2$): La expresión **(1.3.14)** toma la forma **(3.1.1)** pero ahora *a*, *b*, *c* y *d* son números complejos con parte imaginaria menor que cero si $4\left|k\beta_{01}\beta_{00}\right|>k^2\beta_{10}^2$ y $4\left|k\gamma_{01}\gamma_{00}\right|>k^2\gamma_{10}^2$, o números imaginarios sobre el eje imaginario negativo si $4\left|k\beta_{01}\beta_{00}\right|<k^2\beta_{10}^2$ y $4\left|k\gamma_{01}\gamma_{00}\right|<k^2\gamma_{10}^2$. (También se puede obtener un caso mixto), y nos queda:

$$\frac{(x-ci)(x-di)}{(x-ai)(x-bi)}F^{+}(x)=\frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}}F^{-}(x)+\frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}}H_2(x)-\frac{(x-ci)(x-di)}{(x-ai)(x-bi)}H_1(x)$$

Denotando:

$$F_1^{+}=\frac{(x-ci)(x-di)}{(x-ai)(x-bi)}F^{+}(x)$$

$$F_1^{-}(x)=\frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}}F^{-}(x)$$

$$H_5(x)=\frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}}H_2(x)-\frac{(x-ci)(x-di)}{(x-ai)(x-bi)}H_1(x)$$

nos queda el Problema de Salto:

$$F_1^{+}(x)-F_1^{-}(x)=H_5(x)$$

Por un análisis similar al realizado en la demostración del Teorema 5, resulta evidente un teorema con enunciado similar al anterior pero con H_5 en lugar de H_3 y

$$F^{+}(x)=\frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}h_5(t)e^{ixt}dt \quad \text{donde} \quad h_4=V^{-1}[H_4]$$

Luego de **(1.3.4)** y **(1.3.13)** obtenemos

$$U(x,y)=\frac{F^{+}(x)+H_1(x)}{(x-ai)(x-bi)}e^{\frac{x^2}{k}y}+V(x,y)$$

- **Casos 2.5.1-c), 2.5.1-d)**

  En estos casos el Problema de Riemann **(1.3.14)** adopta la forma:

$$F^{+}(x)=\frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)}F^{-}(x)+\frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)}H_2(x)-H_1(x) \qquad \textbf{(3.1.8)}$$

y

$$\frac{(x-ci)}{(x-ai)}F^{+}(x)=\frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}}F^{-}(x)+\frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}}H_2(x)-\frac{(x-ci)}{(x-ai)}H_1(x) \qquad \textbf{(3.1.9)}$$

respectivamente.

de **(3.1.8)** y **(3.1.9)** llegamos a los Problemas de Salto:

$$F_1^{+}(x)-F_1^{-}(x)=H_6(x) \qquad \textbf{(3.1.10)}$$

$$F_1^{+}(x)-F_1^{-}(x)=H_7(x) \qquad \textbf{(3.1.11)}$$

donde

$$F_1^{+}(x)=F^{+}(x)$$

$$F_1^{-}(x)=\frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)}F^{-}(x)$$

$H_6(x)=\dfrac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)}H_2(x)-H_1(x)$ en el caso **(3.1.10)** y

$$F_1^{+}(x)=\frac{(x-ci)}{(x-ai)}F^{+}(x)$$

$$F_1^{-}(x)=\frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}}F^{-}(x)$$

$H_7(x)=\dfrac{\beta_{01}}{\gamma_{01}}H_2(x)-\dfrac{(x-ci)}{(x-ai)}H_1(x)$ en el caso **(3.1.11)**.

Luego de forma evidente se cumple un teorema con enunciado y demostración similar al Teorema 5 con H_6 en lugar de H_3 y

$F^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_6(t) e^{ixt} dt$ en el caso 2.5.1-c) y H_7 en lugar de H_3 y

$F^+(x) = \frac{(x-ai)}{(x-ci)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_7(t) e^{ixt} dt$ en el caso 2.5.1-d).

Luego de **(1.3.4)** y **(1.3.13)** obtenemos

$$U(x,y) = \frac{F^+(x) + H_1(x)}{(x-ai)} e^{\frac{x^2}{k}y} + V(x,y)$$

El caso 2.5.1-h) no lo consideramos por carecer de importancia práctica.

3.2 Casos de índice menos uno.

- **Caso 2.5.4-a)**
  En este caso la expresión **(1.3.14)** toma la forma

$$F^+(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)} F^-(x) + \frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)} H_2(x) - H_1(x)$$

pero ahora $a < 0$ y $c > 0$. Haciendo:

$$F_1^+(x) = F^+(x)$$

$$F_1^-(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)} F^-(x)$$

$$H_8(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)} H_2(x) - H_1(x)$$

nos queda el Problema de Salto:

$$F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_8(x) \qquad \textbf{(3.2.1)}$$

Podemos enunciar entonces el siguiente teorema:

Teorema 6: Si $k < 0$ y $V(x,y)$, $xV(x,0^+)$, y $\dfrac{dV(x,0^+)}{dy}$ pertenecen a $L_2(\Re)$, entonces el problema **(1.2.1)** – **(1.2.4)** para el caso 2.5.4-a) tiene solución única en la clase **(1.2.5)** dada por $u(x,y) = V^{-1}[U(x,y)]$.

Donde $U(x,y)$ está dada por las fórmulas **(1.3.4)** y **(1.3.14)**, y

$$F^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_8(t) e^{ixt} dt \qquad \textbf{(3.2.2)}$$

siendo $h_8 = V^{-1}[H_8]$; si se cumple la condición adicional

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_8(\tau)}{\tau - ai} d\tau = 0 \qquad \textbf{(3.2.3)}$$

La primera parte de la demostración es evidente por las técnicas de trabajo mostradas anteriormente, luego, sólo nos ocuparemos de la necesidad de la expresión **(3.2.3)**. En efecto, como la solución del Problema de Riemann se expresa por **(3.2.2)** y

$$F^-(x) = -\frac{\gamma_{10}}{\beta_{10}} \frac{x - ci}{x - ai} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} h_8(t) e^{ixt} dt \,,$$

tenemos que $F^-(x)$ tiene un polo de orden uno en $x = ai$, por lo tanto, se requiere, para que el problema de salto **(3.2.1)** tenga solución única, que $\int_{-\infty}^{0} h_8(t) e^{ixt} dt$ tenga un cero de igual orden en dicho punto. Como por la relación entre las Integrales de tipo Cauchy y de Fourier se tiene:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_8(\tau)}{\tau - ai} d\tau = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} h_8(\tau) e^{izt} dt$$

si $\operatorname{Im} z < 0$, entonces, desarrollando la primera de las integrales anteriores en serie de potencias de $(z - ai)$ e igualando a cero el coeficiente del término de grado cero del desarrollo, se obtiene **(3.2.3)** con lo cual se elimina el polo de $F^-(x)$.

En el caso homogéneo nos queda:

Teorema 6': Si $k < 0$ entonces el problema **(1.2.1)** – **(1.2.4)** para el caso 2.5.4-a) tiene solución única en la clase **(1.2.5)** dada por $u(x,y) = V^{-1}[U(x,y)]$.

- **Casos 2.5.4 b) y 2.5.4-e)**

En estos casos la expresión **(1.3.14)** toma la forma **(3.1.1)** donde $a < 0$, $b < 0$ si $4|k\beta_{01}\beta_{00}| < k^2\beta_{10}^2$; e $\operatorname{Im} a < 0$, $\operatorname{Im} b < 0$ si $4|k\beta_{01}\beta_{00}| > k^2\beta_{10}^2$. Además $c > 0$, $d < 0$ y $c = -d$ en el caso 2.5.4 b).

En estos casos la expresión (1.3.14) se puede escribir de la forma:

$$\frac{(x-di)}{(x-bi)}F^+(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)}F^-(x) + \frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)}H_2(x) - \frac{(x-di)}{(x-bi)}H_1(x)$$

Haciendo

$$F_1^+(x) = \frac{(x-di)}{(x-bi)}F^+(x)$$

$$F_1^-(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)}F^-(x) \text{ y}$$

$$H_9(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)}H_2(x) - \frac{(x-di)}{(x-bi)}H_1(x)$$

nos queda el Problema de Salto:

$$F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_9(x) \qquad \textbf{(3.2.4)}$$

Luego por un análisis similar al anterior, se tiene para estos casos, de manera evidente, un teorema similar al Teorema 6, pero con H_9 en lugar de H_8 y

$F^{+}(x) = \frac{x-bi}{x-di}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} h_9(t)e^{ixt}dt$ siendo $h_9 = V^{-1}[H_9]$; si se cumple la condición adicional

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{H_9(\tau)}{\tau - ai}d\tau = 0$$

Luego de **(1.3.4)** y **(1.3.13)** obtenemos

$$U(x,y) = \frac{F^{+}(x)+H_1(x)}{(x-ai)(x-bi)}e^{\frac{x^2}{k}y} + V(x,y)$$

- **Casos 2.5.4 c) y 2.5.4-d)**

En estos casos la expresión **(1.3.14)** adopta la forma **(3.1.1)** donde $a<0$, $b>0$ ($a=-b$ en el caso 2.5.4 c)), $c>0$ y $d>0$ si $4\left|k\gamma_{01}\gamma_{00}\right| < k^2\gamma_{10}^2$; e $\operatorname{Im}c>0$, $\operatorname{Im}d>0$ si $4\left|k\gamma_{01}\gamma_{00}\right| > k^2\gamma_{10}^2$.

Haciendo:

$F_1^{+}(x) = F^{+}(x)$

$F_1^{-}(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)(x-bi)}{\gamma_{01}(x-ci)(x-di)}F^{-}(x)$

$H_{10}(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)(x-bi)}{\gamma_{01}(x-ci)(x-di)}H_2(x) - \frac{(x-ai)(x-di)}{(x-ci)(x-bi)}H_1(x)$

nos queda el Problema de Salto:

$F_1^{+}(x) - F_1^{-}(x) = H_{10}(x)$ **(3.2.5)**

Luego es posible enunciar un teorema similar al Teorema 6 pero situando $H_{10}(x)$ en lugar de $H_8(x)$ y

$F^{+}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} h_{10}(t)e^{ixt}dt$ siendo $h_{10} = V^{-1}[H_{10}]$; si se cumple la condición adicional

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_{10}(\tau)}{\tau - ai} d\tau = 0$$

Luego de **(1.3.4)** y **(1.3.13)** obtenemos

$$U(x,y) = \frac{F^{+}(x) + H_1(x)}{(x-ai)(x-bi)} e^{\frac{x^2}{k}y} + V(x,y)$$

3.3 Caso de índice menos dos.

En este caso el problema **(1.3.14)** toma la forma **(3.1.1)** donde $a<0$, $b<0$ si $4|k\beta_{01}\beta_{00}| < k^2\beta_{10}^2$; e $\operatorname{Im} a < 0$, $\operatorname{Im} b < 0$ si $4|k\beta_{01}\beta_{00}| > k^2\beta_{10}^2$. Además $c>0$, $d>0$ si $4|k\gamma_{01}\gamma_{00}| < k^2\gamma_{10}^2$; e $\operatorname{Im} c > 0$, $\operatorname{Im} d > 0$ si $4|k\gamma_{01}\gamma_{00}| > k^2\gamma_{10}^2$.

Luego nos queda de nuevo un Problema de Salto **(3.2.5)** (con $b<0$ ó $\operatorname{Im} b < 0$), pero ahora al obtener la solución del problema se obtiene $F^{-}(x)$ con polos de orden uno en $x = ai$ y $x = bi$. Luego se puede enunciar un teorema similar al Teorema 6 sustituyendo $H_8(x)$ por $H_{11}(x)$ (con $b<0$ ó $\operatorname{Im} b < 0$) y agregando a la condición **(3.2.3)** la condición adicional:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_{11}(\tau)}{\tau - bi} d\tau = 0$$

3.4 Casos de índice uno.

- **Caso 2.5.4-a)**

  En este caso la expresión **(1.3.14)** toma la forma

$$F^{+}(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)} F^{-}(x) + \frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)} H_2(x) - H_1(x)$$

pero ahora $a>0$ y $c<0$.

$$\frac{(x-ci)}{(x-ai)} F^{+}(x) = \frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}} F^{-}(x) + \frac{\beta_{01}(x-ci)}{\gamma_{01}(x-ai)} H_2(x) - H_1(x)$$

llegamos al Problema de Salto:

$$\frac{(x-ci)}{(x-ai)}F^{+}(x)-\frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}}F^{-}(x)=H_{12}(x) \qquad \textbf{(3.4.1)}$$

donde

$$H_{12}(x)=\frac{\beta_{01}(x-ci)}{\gamma_{01}(x-ai)}H_{2}(x)-H_{1}(x)$$

que es de $L_2(\Re)$ si se cumplen las condiciones impuestas en el Teorema 5. Luego aplicando el Operador Proyección a $H_{12}(x)$ nos queda

$$H_{12}(x)=\psi^{+}(x)-\psi^{-}(x) \qquad \textbf{(3.4.2)}$$

donde

$$\psi^{\pm}(x)=P^{\pm}(H_{12}(x))$$

o sea

$$\psi^{\pm}(x)=(VoT^{\pm}oV^{-1})H_{12}(x)$$

de donde

$$\psi^{+}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}h_{12}(t)e^{ixt}dt$$

$$\psi^{-}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}h_{12}(t)e^{ixt}dt$$

siendo $h_{12}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}H_{12}(t)e^{ixt}dt$

Luego sustituyendo **(3.4.2)** en **(3.4.1)** nos queda:

$$\frac{(x-ci)}{(x-ai)}F^{+}(x)-\psi^{+}(x)=\frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}}F^{-}(x)-\psi^{-}(x)$$

Aplicando el Teorema de Prolongación Analítica y el Teorema Generalizado de Lioville tenemos

$$\frac{(x-ci)}{(x-ai)}F^+(x)-\psi^+(x)=\frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}}F^-(x)-\psi^-(x)=\frac{c_1}{x-ai}\,,$$ c_1 es una constante arbitraria.

Luego $\frac{(x-ci)}{(x-ai)}F^+(x)-\psi^+(x)=\frac{c_1}{x-ai}$

$$F^+(x)=\frac{(x-ai)}{(x-ci)}\psi^+(x)+\frac{c_1}{x-ci} \qquad \textbf{(3.4.3)}$$

$$F^-(x)=\frac{\gamma_{01}}{\beta_{01}}\psi^-(x)+\frac{\gamma_{01}}{\beta_{01}}\frac{c_1}{x-ai}$$

Al tener $F^+(x)$ dado por la expresión **(3.4.3)** entonces $U(x,y)$ queda determinado por las expresiones **(1.3.4)** y **(1.3.13),** siendo

$$F^+(x)=\frac{(x-ai)}{(x-ci)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}h_{12}(t)e^{ixt}dt+\frac{c_1}{x-ci} \qquad \textbf{(3.4.4)}$$

y se puede enunciar el siguiente teorema:

Teorema 7: Si $k<0$ y $V(x,y)$, $xV(x,0^+)$, y $\frac{dV(x,0^+)}{dy}$ pertenecen a $L_2(\Re)$, entonces el problema **(1.2.1)** – **(1.2.4)** para el caso 2.5.1-a) tiene solución única que depende de una constante arbitraria c_1 en la clase **(1.2.5)** y viene dada por las expresiones **(1.3.13)** y **(3.4.4)**.

Demostración:

Como de **(1.3.4)** y **(1.3.13)**

$$U(x,y)=C(x)e^{z(x)y}+V(x,y)\,,\quad z(x)=\frac{x^2}{k}$$

entonces

$$U(x,y)=\frac{F^{+}(x)+H_1(x)}{P_1(x)}e^{\frac{x^2}{k}y}+V(x,y)$$

$$U(x,y)=\frac{F^{+}(x)+H_1(x)}{x-ai}e^{\frac{x^2}{k}y}+V(x,y) \qquad \textbf{(3.4.5)}$$

Como $F^{+}(x)$ depende de una constante arbitraria, $U(x,y)$ también depende de una constante arbitraria por ser V un operador lineal. Además en **(3.4.5)** $F^{+}\in L_2^{+}(\Re)$, $H_1(x)\in L_2^{-}(\Re)$, luego $U(x,y)$, $x^2U(x,y)$, y $\frac{dU(x,y)}{dy}$ pertenecen a $L_2(\Re)$, para todo $y: 0<y<+\infty$, esto implica que $u(x,y)$ pertenece a la clase **(1.2.5)**.

Para el caso homogéneo queda el siguiente resultado:

Corolario (delTeorema 7): Si $k<0$, entonces el problema **(1.2.1)** – **(1.2.4)** para el caso 2.5.1-a) tiene solución única que depende de una constante arbitraria c_1 en la clase **(1.2.5)** y viene dada por $u(x,y)=V^{-1}[U(x,y)]$, donde $U(x,y)$ se define por las expresiones **(1.3.4)**, **(1.3.13)** y **(3.4.3)**.

- **Casos 2.5.2-c) y 2.5.2-e)**

  En estos casos la expresión **(1.3.14)** adopta la forma:

$$F^{+}(x)=\frac{\beta_{01}(x-ai)(x-bi)}{\gamma_{01}(x-ci)(x-di)}F^{-}(x)+\frac{\beta_{01}(x-ai)(x-bi)}{\gamma_{01}(x-ci)(x-di)}H_2(x)-H_1(x)$$

donde $a>0$, $b>0$ si $4|k\beta_{01}\beta_{00}|<k^2\beta_{10}^2$; e $\operatorname{Im}a>0$, $\operatorname{Im}b>0$ si $4|k\beta_{01}\beta_{00}|>k^2\beta_{10}^2$, además $c>0$, $d<0$ y $c=-d$ en el caso 2.5.2- b).

$$\frac{(x-di)}{(x-bi)}F^{+}(x)=\frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)}F^{-}(x)+\frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)}H_2(x)-\frac{(x-di)}{(x-bi)}H_1(x)$$

El cual es un Problema de Salto donde $H_{13}(x)=\dfrac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)}H_2(x)-\dfrac{(x-di)}{(x-bi)}H_1(x)$, nos

queda aplicando la misma idea del caso anterior:

$$\frac{(x-di)}{(x-bi)}F^+(x)-\psi^+(x)=\frac{c_2}{x-bi}$$ donde c_2 es una constante arbitraria

$$\psi^+(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}h_{13}(t)e^{ixt}dt$$

donde $h_{13}(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}H_{13}(t)e^{ixt}dt$ y

$$F^+(x)=\frac{(x-bi)}{(x-di)}\psi^+(x)+\frac{c_2}{x-di}$$

y entonces $U(x,y)$ queda determinado por las expresiones **(1.3.4)** y **(1.3.13),** siendo

$$F^+(x)=\frac{(x-bi)}{(x-di)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}h_{13}(t)e^{ixt}dt+\frac{c_2}{x-di} \qquad \textbf{(3.4.6)}$$

- **Casos 2.5.2-b) y 2.5.2-d)**

  En estos casos la expresión **(1.3.14)** adopta la forma:

$$F^+(x)=\frac{\beta_{01}(x-ai)(x-bi)}{\gamma_{01}(x-ci)(x-di)}F^-(x)+\frac{\beta_{01}(x-ai)(x-bi)}{\gamma_{01}(x-ci)(x-di)}H_2(x)-H_1(x)$$

donde $a<0$, $b>0$ ($a=-b$ en el caso 2.5.2-b), $c<0$, $d<0$ si $4\left|k\gamma_{01}\gamma_{00}\right|<k^2\gamma_{10}^2$; e

$\operatorname{Im}c<0$, $\operatorname{Im}d<0$ si $4\left|k\gamma_{01}\gamma_{00}\right|>k^2\gamma_{10}^2$

$$\frac{(x-ci)(x-di)}{(x-ai)(x-bi)}F^+(x)=\frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}}F^-(x)+\frac{\beta_{01}(x-ai)(x-bi)}{\gamma_{01}(x-ci)(x-di)}H_2(x)-H_1(x)$$

El cual es un Problema de Salto donde $H_{14}(x)=\frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)}H_2(x)-\frac{(x-di)}{(x-bi)}H_1(x)$, nos

queda aplicando la misma idea del caso anterior:

$$\frac{(x-ci)(x-di)}{(x-ai)(x-bi)}F^+(x)-\psi^+(x)=\frac{c_3}{x-bi}$$ donde c_3 es una constante arbitraria.

$$\psi^+(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}h_{14}(t)e^{ixt}dt$$

donde $h_{14}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}H_{14}(t)e^{ixt}dt$ y

$$F^+(x)=\frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)}\psi^+(x)+\frac{c_3(x-ci)}{(x-ai)(x-di)}$$

y entonces $U(x,y)$ queda determinado por las expresiones **(1.3.4)** y **(1.3.13),** siendo

$$F^+(x)=\frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}h_{14}(t)e^{ixt}dt+\frac{c_3(x-ci)}{(x-ai)(x-di)} \qquad \textbf{(3.4.7)}$$

3.4 Caso de índice dos.

En este caso la expresión **(1.3.14)** toma la forma

$$F^+(x)=\frac{\beta_{01}(x-ai)^2}{\gamma_{01}(x-ci)^2}F^-(x)+\frac{\beta_{01}(x-ai)^2}{\gamma_{01}(x-ci)^2}H_2(x)-H_1(x)$$

pero ahora $a>0$ y $c<0$.

$$\frac{(x-ci)^2}{(x-ai)^2}F^+(x)=\frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}}F^-(x)+\frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}}H_2(x)-\frac{(x-ci)^2}{(x-ai)^2}H_1(x)$$

Tomando la misma idea de demostración de los casos de índice uno pero ahora el orden del polo es dos, obtenemos:

$$\frac{(x-ci)^2}{(x-ai)^2}F^+(x)-\psi^+(x)=\frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}}F^-(x)-\psi^-(x)$$

Aplicando el Teorema de Prolongación Analítica y el Teorema Generalizado de Lioville tenemos

$\frac{(x-ci)^2}{(x-ai)^2}F^+(x)-\psi^+(x)=\frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}}F^-(x)-\psi^-(x)=\frac{c_1}{x-ai}+\frac{c_2 x}{(x-ai)^2}$, c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

Luego $F^+(x)=\frac{(x-ai)^2}{(x-ci)^2}\psi^+(x)+\frac{c_1}{x-ci}+\frac{c_2 x}{(x-ci)^2}$ **(3.4.8)**

Al tener $F^+(x)$ dado por la expresión **(3.4.8)** entonces $U(x,y)$ queda determinado por las expresiones **(1.3.4)** y **(1.3.13),** siendo

$$F^+(x)=\frac{(x-ai)^2}{(x-ci)^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}h_{15}(t)e^{ixt}dt+\frac{c_1}{x-ci}+\frac{c_2 x}{(x-ci)^2} \quad \textbf{(3.4.9)}$$

se puede enunciar el siguiente teorema con enunciado y demostración similar al Teorema 7:

Teorema 8: Si $k<0$ y $V(x,y)$, $xV(x,0^+)$, y $\frac{dV(x,0^+)}{dy}$ pertenecen a $L_2(\Re)$, entonces el problema **(1.2.1)** – **(1.2.4)** para el caso de índice dos tiene solución única que depende de dos constante arbitraria c_1 y c_2 en la clase **(1.2.5)** y viene dada por las expresiones **(1.3.13)** y **(3.4.7)**.

Para el caso homogéneo queda el siguiente teorema:

Teorema 8´: Si $k<0$, entonces el problema **(1.2.1)** – **(1.2.4)** para el caso 2.5.1-a) tiene solución única que depende de dos constante arbitraria c_1 y c_2 en la clase **(1.2.5)** y viene dada por $u(x,y)=V^{-1}[U(x,y)]$, donde $U(x,y)$ se define por las expresiones **(1.3.4)**, **(1.3.13)** y **(3.4.8)**.

Conclusiones

A partir de las condiciones impuestas en cada caso estudiado, hemos encontrado la solución en cuadraturas de un Problema Parabólico con Condiciones de Contorno Complejas, tanto para una ecuación homogénea como para una no homogénea. Es interesante la técnica utilizada consistente en reducir el problema original con el auxilio de la Transformada de Fourier.

La solución de dicho problema en las clases $L_2^{\lambda}(\Re)$ ya había sido estudiada por el Grupo de Ecuaciones Diferenciales de la Facultad de Matemática – Física y Computación, para problemas de tipo Elíptico e Hiperbólico. El caso Elíptico corresponde a una publicación en el último número de la Revista Ciencias Matemáticas.

Los resultados obtenidos constituyen inobjetablemente un aporte teórico a la teoría de los Problemas de Contorno de las Ecuaciones Diferenciales Parciales, pues no existen técnicas analíticas en la actualidad, que aborden problemas de esta naturaleza donde las condiciones de contorno difieren en diferentes partes del eje.

La solución obtenida mediante integrales de tipo Fourier permite que los profesionales que utilizan modelos parabólicos puedan encontrar la solución con relativa facilidad con la ayuda de un paquete matemático adecuado, sin que sea necesario que posean un dominio profundo de la teoría antes expuesta.

La presente tesis nos da la posibilidad de continuar nuestra investigación en dos direcciones. Una de ellas sería resolver los Problemas Parabólicos, Elípticos e Hiperbólicos en las clases de funciones generalizadas definidas por el Grupo de Ecuaciones Diferenciales antes citado. La otra dirección posible es la elaboración de un software especializado para la solución de estos problemas de la Física – Matemática con Condiciones de Contorno Complejas.

Recomendaciones

A partir de las Clases de Funciones Generalizadas definidas por el Grupo de Ecuaciones Diferenciales de la Facultad de Matemática – Física y Computación, es recomendable que se continúe el estudio de los casos Parabólicos, Elípticos e Hiperbólicos en dichas clases, lo que amplía enormemente las posibilidades de aplicación de la teoría elaborada. Esto debe contribuir la tesis doctoral de la autora de la presente investigación.

Referencia Bibliográfica

[1] Mederos, O. B. y Batard, L. F. “El problema de Riemann con parámetro pequeño en el espacio $L_2^{\lambda}(\Re)$”. Revista Ciencias Matemáticas No 3. 1990.

[2] Batard, L. F. “Las ecuaciones diferenciales y el Problema de Riemann con parámetro pequeño”. Tesis de Doctorado. 1990.

[3] Mederos, O. B. y Batard, L. F. “Reducción de una clase de problemas de contorno en ecuaciones en derivadas parciales con parámetro pequeño al Problema de Riemann”. Revista Ciencias Matemáticas No 3. 1990.

[4] Gajov, F.D. y Chersky, Yu.I. “Ecuaciones de tipo Convolución”. Moscú. Ciencia.1978.

[5] Tijonov. Samarski. “Ecuaciones de la Física Matemática”

[6] Gajov, F.D. “Problemas de Contorno”

[7] Budak. Samarski. “Problemas de la Física Matemática”

[8] Martínez, Y. H. y Batard, L. F. “Solución de un problema de contorno complejo para Ecuaciones de tipo hiperbólico. Aplicaciones. Tesis de maestría. 2000.

[9] R.A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, 1976.

[10] S. Agmon, Lectures on Elliptic Boundary Value Problems, Van Nostrand, 1965.

[11] J.P. Aubin, Approximation of Elliptic Boundary Value Problems, Wiley, 1972.

[12] H. Brezis, Operateurs Maximaux Monotones, North-Holland Math. Studies 5, 1973.

[13] F.E. Browder, Nonlinear Operators and Nonlinear Equations of Evolution in Banach Spaces, Proc. Symp. Pure Math., 18, part 2, Amer. Math. Soc., 1976.

[14] P. Butzer and H. Berens, Semi-groups of Operators and Approximations, Springer, 1967.

[15] A. Carasso and A. Stone (editors), Improperly Posed Boundary Value Problems, Pitman, 1975.

[16] R.W. Carroll, Abstract Methods in Partial Di_erential Equations, Harper-Row, 1969.

[17] R.W. Carroll and R.E. Showalter, Singular and Degenerate Cauchy

Problems, Academic Press, 1976.

[18] J. Cea, Optimization. Theorie et Algorithmes, Dunod, 1971.

[19] P.G. Ciarlet, Numerical Analysis of the Finite Element Method for Elliptic Boundary Value Problems, North-Holland, 1977. 211

[20] D.L. Colton, Partial Di_erential Equations in the Complex Domain, Pitman, 1976.

[21] R. Courant and D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics, Vol.2, Wiley, 1962.

[22] J. Daniel, Approximate Minimization of Functionals, Prentice Hall, 1970.

[23] R.W. Dickey, Bifurcation Problems in Nonlinear Elasticity, Pitman, 1976.

[24] G. Duvaut and J.L. Lions, Les Inequations en Mecanique et en Physique, Dunod, 1972.

[25] I. Ekeland and R. Temam, Analyse Convexe et Problemes Variationnels, Dunod, 1974.

[26] G. Fichera (editor), Trends in Applications of Pure Mathematics to Mechanics, Pitman, 1976.

[27] A. Friedman, Partial Di_erential Equations, Holt-Rinehart-Winston, 1969.

[28] R. Glowinski, J.L. Lions and R. Tremolieres, Analyse Numerique des Inequations Variationnelles, Dunod, 1976.

[29] J.R. Goldstein, Semi-groups of Operators and Abstract Cauchy Problems, Tulane University, 1970.

[30] G. Hellwig, Di_erential Operators of Mathematical Physics, Addison-Wesley, 1967.

[31] E. Hille and R.S. Phillips, Functional Analysis and Semigroups, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Vol.31, 1957.

[32] L. Hormander, Linear Partial Di_erential Operators, Springer, 1963.
[25] J. Horvath, Topological Vector Spaces and Distributions, Vol.1, Addison-Wesley, 1967.

[33] A. Je_rey, Quasilinear Hyperbolic Systems and Waves, Pitman, 1976.
BIBLIOGRAPHY 213

[34] G. Ladas and V. Lakshmikantham, Di_erential Equations in Abstract Spaces, Academic Press, 1972.

[35] O. Ladyzenskaya, V. Solonnikov and N. Uralceva, Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type, Izd. Nauka, 1967.

[36] P. Lax and R.S. Phillips, Scattering Theory, Academic Press, 1967.

[37] J.L. Lions, Equations Di_erentielles-Operationnelles, Springer, 1961.

[38] J.L. Lions, Optimal Control of Systems Governed by Partial Di_erential Equations, Springer, 1971.

[39] J.L. Lions, Quelques Methods de Resolution des Problemes aux Limites Non-lineares, Dunod, 1969.

[40] J.L. Lions and E. Magenes, Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applications, Vol.1, Springer, 1972.

[41] R.H. Martin, Nonlinear Operators and Di_erential Equations in Banach Spaces, Wiley, 1976.

[42] S. Mizohata, The Theory of Partial Di_erential Equations, Cambridge, 1973.

[43] J. Necas, Les Methodes Directes dans la Theorie des Equations aux Derivees Partielles, Masson, 1967.

[44] J.T. Oden and J.N. Reddy, Mathematical Theory of Finite Elements, Wiley, 1976.

[45] L. Payne, Improperly Posed Problems in Partial Di_erential Equations, CBMS Series, Soc. Ind. Appl. Math., 1976.

[46] R.T. Rockafellar, Convex Analysis, Princeton University Press, 1970.

[47] M. Schultz, Spline Analysis, Prentice-Hall, 1973.

[48] W.A. Strauss, The Energy Method in Nonlinear Partial Di_erential Equations, Notas de Matematica 47, IMPA, 1969.

[49] G. Strang and G. Fix, An Analysis of the Finite Element Method, Prentice-Hall, 1973.

[50] F. Treves, Basic Linear Partial Di_erential Equations, Academic Press, 1975.

[51] A.N. Tychonov and A.A. Samarski, Partial Di_erential Equations of Mathematical Physics, Holden-Day, 1964.

[52] M.M. Vainberg, Variational Method and Method of Monotone Operators in the Theory of Nonlinear Equations, Wiley, 1973.

[53] D.V. Widder, The Heat Equation, Academic Press, 1975.

[54] K. Yosida, Functional Analysis (4th edition), Springer, 1974.

[55] http://www.dict.uh.cu/Revistas/CM2000_2001/CM01191d.doc

[56] http://es.wikipedia.org/wiki/Millennium_Prize_Problems

[57] http://es.wikipedia.org/wiki/Conjetura_de_Riemann

[58] http://grupos.emagister.com/documento/el_problema_de_riemann_toto_/1044-28724

[59] http://www.electronicafacil.net/ciencia/Article8954.html

[60] http://dmle.cindoc.csic.es/en/revistas/listado.php

[61] http://www.microsiervos.com/archivo/libros/the-riemann-hypothesis.html

[62] http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/

[63] http://meneame.net/story/otro-paso-mas-para-demostrar-hipotesis-riemann

[64] http://es.wikipedia.org/wiki/Millennium_Prize_Problems

[65] http://es.wikipedia.org/wiki/Conjetura_de_Riemann

[66] http://www.microsiervos.com/archivo/ciencia/demostrada-hipotesis-riemann-li-xian-jin.html

[67] http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/

[68] http://biblioteca.universia.net/ficha.do?id=965008

[69] http://pelindruskis.wordpress.com/2007/08/06/la-hipotesis-de-riemann/

[70] http://www.psicofxp.com/forums/ciencia.176/117739-hipotesis-de-riemann.html

[71] http://www.jadbp.org/node/169

[72] http://abalontico.matem.unam.mx/cprieto/index.php

[73]http://www.telefonica.net/web2/lasmatematicasdemario/Analisis/Funciones/SupRiemann.htm

[74] http://www.ugr.es/~geometry/dirichlet.pdf

[75] http://www.iit.upcomillas.es/pfc/resumenes/4851539ac6497.pdf

[76] http://ocw.unican.es/ciencias-experimentales/ampliacion-de-analisis-de-varias-variables-reales/ampliacion-variables-beatriz-porras/lebesgue-material-de-clase-pantalla/MCP9-Int_Lebesgue.pdf

[77] http://www.famat.ugto.mx/manuel/riemann.pdf

[78]http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/acordoba/miscelanea/ensayos/La%20Tesis%20de%20Riemann%20sobre%20las%20Series%20Trigonometricas.pdf

[79]http://www.scm.org.co/Subidos/4998.Abstract%20Carlos%20Julio%20Hypotesis%20de%20Riemann%20Congreso.pdf

[79] http://www.ma.usb.ve/~mrosas/analisis2/riemann2.ps

[80]http://connection.ebscohost.com/content/article/1019541536.html;jsessionid=2FC49ACEF034CAE9052F312B64594EB6.ehctc1

[81] http://www.dict.uh.cu/Revistas/CM2002_2003/MAT%2021203-2.doc

[82] http://www.elprisma.com/apuntes/curso.asp?id=2994

[83] http://www.geocities.com/grandesmatematicos/cap26.html

[84]http://www.cibernetia.com/tesis_es/MATEMATICAS/GEOMETRIA/GEOMETRIA_DE_RIEMANN/1

[85] ttp://garf.ub.es/BASE07-08/Eva.pdf

[86] http://www.mat.ucm.es/vdrmat/propuesta-trabajo-master-2008-09-arrieta.pdf

[87] http://www.mat.ucm.es/vdrmat/propuesta-trabajo-master-2008-09-arrieta.pdf

[88] http://www.usal.es/~iuffym/masterMMAF/docs_MMAF/4-EcuacionesDP.pdf

[89] http://www.uniovi.es/rsme09/sesiones/Sesion04.pdf

[90]http://www.cibernetia.com/tesis_es/MATEMATICAS/ANALISIS_NUMERICO/RESOLUCION_DE_ECUACIONES_DIFERENCIALES_EN_DERIVADAS_PARCIALES/1

[91] http://www.mvtextos.com/view_product.php?product=%208448142128

[92] http://www.sicht.ucv.ve:8080/novedades/libros.jsp?id=84-481-4212-8

[93] http://www.imaff.csic.es/pcc/LucasLamata/arquimedes2.pdf

[94]http://www.uam.es/departamentos/ciencias/matematicas/docencia/iperal/libroEDP/pdf/introduc.pdf

[95] http://www.springerlink.com/index/n543062273q22016.pdf

[96] http://www.infolibro.com.ve/info_ficha.php?mundo=3&codigo=8688

[97] http://personal.us.es/ealgaba/287amprob09y10.pdf

[98] http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/fquiros/Numerico2_05_06/cap6_05_06.pdf.

[99] http://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=6117, Andrés Marcos Encinas Bachiller, Universitat Politècnica de Catalunya (España) en 2001, 14 de septiembre del 2008

[100] http://www.tecnun.es/asignaturas/metmat/contenido/t7.htm

[101] http://books.google.com.cu/books?id=ACdpwmqUMscC&pg=PA119&lpg=PA119&dq=%22Problemas+de+contorno%22&source=bl&ots=byoTPXYh1W&sig=M1Y8SqBach-DSJ6d8NRU2yuLsek&hl=es&ei=V9PxSdTiMprYlAe_y-XJDA&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=10#PPA739,M1,

[102] http://resultados.redciencia.cu/premios/n_acc/resumen.php?year=2000&idtrabajo=268&idpremio=9

[103] http://www.tecnun.es/asignaturas/metmat/hojas/en_web/Metodos_numericos_problemas_contorno/Metodos_numericos_problemas_contorno.pdf

[104] https://www.laislalibros.com/libros/ECUACIONES-EN-DERIVADAS-PARCIALES/LB820000074/978-84-205-3534-0

[105] http://tcam.qui.uam.es/luism/p805.pdf