

Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas

Facultad de Ingeniería Eléctrica

Departamento de Circuitos Eléctricos



TRABAJO DE DIPLOMA

*Resumen teórico y bibliográfico de las características y propiedades de los
Métodos y Teoremas más usados en la solución de los circuitos eléctricos.*

Autor: Paulus Kauluma Shihepo

Tutor: Dr. Avertano Hernández Stuart

Tutor: Msc. Leonardo Rodríguez Jiménez

Santa Clara

2013

"Año 55 de la Revolución"

Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas

Facultad de Ingeniería Eléctrica

Departamento de Circuitos Eléctricos



TRABAJO DE DIPLOMA

*Resumen teórico y bibliográfico de las características y propiedades de los
Métodos y Teoremas más usados en la solución de los circuitos eléctricos.*

Autor: Paulus Kauluma Shihepo

Pshihepo@uclv.edu.cu

pkshihepo@yahoo.ca

Tutor: Dr Avertano Hernandez

avertanoH@uclv.edu.cu

Tutor: Msc. Leonardo Rodríguez Jiménez

leonardo@uclv.edu.cu

Santa Clara

2013

"Año 55 de la Revolución"



Hago constar que el presente trabajo de diploma fue realizado en la Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas como parte de la culminación de estudios de la especialidad de Ingeniería Eléctrica, autorizando a que el mismo sea utilizado por la Institución, para los fines que estime conveniente, tanto de forma parcial como total y que además no podrá ser presentado en eventos, ni publicados sin autorización de la Universidad.

Firma del Autor

Los abajo firmantes certificamos que el presente trabajo ha sido realizado según acuerdo de la dirección de nuestro centro y el mismo cumple con los requisitos que debe tener un trabajo de esta envergadura referido a la temática señalada.

Firma del Autor

Firma del Jefe de Departamento
donde se defiende el trabajo

Firma del Responsable de
Información Científico-Técnica

PENSAMIENTO

El aprendizaje no solo exige escuchar y poner en práctica, sino también olvidar y después volver a recordar

John Gray

DEDICATORIA

A mi madre y a mi padre: por todo el amor, el cariño y la educación.

A mi familia: gran parte de mi ser y principal escuela.

A mis amigos y amigos: por serlo

A mis Compañeros: por haber compartido estos cinco años de estudio

AGRADECIMIENTOS

A la revolución Cubana y a la República de Namibia por la oportunidad de hacer este sueño una realidad

A mis tutores

A mi familia porque fueron ellos lo que hicieron posible que llegara hasta este nivel.

A mi madre Selma Makaya por estar siempre presente en mis pensamientos y por darme la vida

A mi abuela Irya Tolata por los consejos que me brinda.

A Miss y Mr Shilume por ser mi guía a lo largo de mi vida y por confiar en mi.

A Yandy Marin Santana, por apoyarme en todo momento.

A todos los profesores que durante toda la carrera han puesto en mis manos el conocimiento que contribuirán a mi desempeño como profesional.

A mi novia Carmen Elena Rosquete Bosso

A mis compañeros de mi aula.

A mi tía Laimmy Ingo, A Laimmy Shilomboleni, Frienda Amapindi, Ruusa Nombanza Iipinge, Moses Kambwa, Anacleto Alogo Masoko de Guinea Ecuatoria, Ignacio Trillo de Guinea Ecuatorial, Soul de Mali, shola de Nigeria, Brenda Jaspar de Uganda, Johanna Shihepo, Eva Alugodhi David Elago, Illeka Sem, Fanuel Kozo, Engombe Tioferus, Asser Hango, Iipinge Salaphina Maria, Senia Angalam Sakeusa Sheya Amiti eliakima, Jakombina Kamenye, Shilogo, Marystar Shilume, JNT, Noel Leon Buides de Cuba, Frans Enkono Indongo.

TAREA TÉCNICA

Plan de Trabajo:

1. Revisión y estudio de la bibliografía y preparación metodológica existente acerca de los métodos de solución de los Circuitos Eléctricos.
2. Actualizar los contenidos teóricos en textos básicos y materiales de estudio publicados en Internet.
3. Presentar un resumen sobre las formas de aplicación de los métodos generales y problemas así como estudiar los casos en que estos métodos y teoremas no se puedan aplicar.
4. Organizar adecuadamente la estructura de la tesis basándose en un diseño metodológico estratégico según la didáctica de la asignatura y las orientaciones y normas aprobadas por el MES.

Firma del Autor

Firma del Tutor

RESUMEN

En este trabajo se realizó una amplia recopilación bibliográfica sobre los métodos y teoremas utilizados en la solución de circuitos eléctricos, explicando las características de cada uno y los mecanismos para la aplicación de los más eficientes en la solución de determinados circuitos. En cada caso se explica los nuevos métodos existentes para la solución partiendo de fórmulas generales de amplio uso en asignaturas de años superiores. En el caso de los métodos de mallas y nodos se explicaron en detalle los métodos modificados de amplio uso en la bibliografía moderna, que sustituyen los conocidos métodos del supernodo y la supermalla, argumentándose las ventajas que se logran en su utilización. Además, se realiza un estudio matemático sobre la aplicación del MVN en circuitos con inductancias mutuas.

Por otra parte, la aplicación del método de las mallas en los circuitos no planos, resulta de gran interés y es una cuestión completamente nueva en la solución de éste tipo de circuito.

Por último, se realiza un análisis de la aplicación de los Teoremas de Thevenin y Norton, destacándose los casos en que surgen las llamadas conexiones absurdas.

TABLA DE CONTENIDOS

PENSAMIENTO	i
DEDICATORIA	ii
AGRADECIMIENTOS	iii
TAREA TÉCNICA	iv
RESUMEN.....	v
INTRODUCCIÓN	1
Organización del informe.....	3
CAPÍTULO 1. TEOREMAS Y METODOS GENERALES DE SOLUCION DE CIRCUITOS ELECTRICOS	4
1.1 Introducción	4
1.2 Circuitos lineales y ecuaciones lineales.	5
1.3 Linealidad y Superposición.	7
1.4 Teorema de Thevenin y Norton.	13
1.4.2 Fundamento teórico.	13
1.4.3 Teorema de Thevenin	13
1.4.4 Teorema de Norton	15
1.4.5 Equivalente de Norton de un circuito	16
1.4.6 Ejemplos del teorema de Thevenin y del teorema de Norton.....	17
1.4.6.1 Teorema de Thevenin.....	17

1.4.6.2	Teorema de Norton	20
1.5	Método de las corrientes de mallas.....	21
1.6	Método de los nodos	23
CAPITULO 2. APLICACIONES ESPECIALES DE LOS METODOS GENERALES Y LOS TEOREMAS		26
2.1	Análisis del método de corriente de malla (MCM).....	26
2.1.1	Introducción.....	26
2.1.2	Corrientes de malla y mallas esenciales.....	27
2.1.3	Solución usando el MCM	29
2.1.3.1	Método tradicional	30
2.1.3.2	Método de supermalla	32
2.1.3.3	METODO DE LAS MALLAS MODIFICADO (MMM)	33
2.2	Gráficos de circuito plano y no plano	35
2.2.1	Método de las corrientes de mallas aplicado en circuitos no planos	36
2.2.2	El siguiente ejemplo ilustra esta estrategia.....	37
2.3	Análisis del método de voltaje de nodo (MVN)	39
2.3.1	Introducción.....	39
2.3.1.1	Procedimiento.....	41
2.3.1.2	Ejemplos.....	42
2.3.1.3	Circuitos con fuente de voltaje independiente y dependiente real. Formula general de método de las nodos. Ejemplos.	46
2.3.2	Método tradicional de nodo	50
2.3.3	Metodo de supernodo.....	52
2.3.4	METODO DE LOS NODO MODIFICADO (MNM).....	54
2.4	TEOREMA DE THÉVENIN	60

2.4.1	FORMAS EN LAS QUE SE APLICA EL TEOREMA DE THÉVENIN	62
2.4.2	CONDICIONES PARA APLICAR EL TEOREMA DE THÉVENIN	66
2.4.3	¿SERÁ SIEMPRE APLICABLE EL TEOREMA DE THÉVENIN?	67
2.4.4	TEOREMA UNIFICADO DE THEVENIN	74
	Conclusiones	78
	Recomendaciones.....	78
	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	79

INTRODUCCIÓN

A lo largo de la teoría desarrollada para el análisis de circuitos eléctricos se presentan varias herramientas y métodos que ayudan a resolver redes eléctricas lineales. Estas técnicas son muy útiles y de gran aplicación en muchas ramas de la tecnología, como la electrónica, las telecomunicaciones, la automática, entre muchas otras. Dentro de estas herramientas cabe destacar, por su gran uso y eficiencia, los métodos generales conocidos como Análisis Nodal y Análisis de Mallas, las conocidas leyes de tensión y corriente de Kirchhoff, las transformaciones de fuentes reales, los divisores de tensión y corriente y los Teoremas de Thevenin de Norton y el principio de superposición, entre otros. Una red lineal, en particular, puede ser analizada usando cualquiera de las técnicas; produciendo, por supuesto, cada una de ellas un resultado lógico y perfectamente interpretable desde el punto de vista físico. En muchas situaciones reales resulta interesante el análisis de alguna parte de un circuito complejo, generalmente relacionada con la carga. Si se pudiera modelar el resto de la red con un circuito equivalente simple, la tarea se hace mucho más sencilla; para esto existen dos teoremas fundamentales.

Hasta ahora se ha visto cómo se pueden resolver circuitos, bien utilizando directamente las Leyes de Kirchhoff o bien, en algunos casos particulares, mediante la reducción de circuitos basada en la sucesiva aplicación de asociación y equivalencia entre dispositivos. En la práctica, la utilización directa de estos métodos resulta útil solamente cuando el circuito bajo análisis es lo suficientemente sencillo como para que el número de ecuaciones a plantear sea pequeño. Con el fin de simplificar el análisis de circuitos más complejos y de abstraerse de sus detalles para diseñar sistemas de mayor entidad y estudiar su comportamiento, este capítulo profundiza en una serie de nuevas herramientas. A grandes rasgos se pueden agrupar en:

- Métodos para aplicar las Leyes de Kirchhoff de manera sistemática, organizada y semiautomática. Estos métodos permitirán, en la mayor parte de los casos, facilitar el planteamiento del sistema de ecuaciones que permite resolver un circuito, y así reducir su orden y, por lo tanto, la complejidad de su resolución.
- Teoremas. Cuyo objetivo es: establecer las normas para analizar circuitos con múltiples excitaciones, y en definitiva con una excitación cualquiera; obtener modelos simplificados de circuitos complejos, con el fin de abordar la interconexión de redes circuitales; e introducir conceptos asociados a la transmisión de potencia en una cadena de dispositivos.

Generalmente en la ley de Ohm $V=I \cdot R$ se supone que el parámetro R , llamado resistencia, sea constante, se habla de circuito eléctrico resistivo lineal. En la realidad existe una gran variedad de elementos o de dispositivos eléctricos que no son en ninguna manera lineales, es decir que la relación entre voltaje aplicado y corriente no es constante. Estos elementos o dispositivos se llaman no-lineales.

Como objetivos generales de este trabajo se propone:

- Analizar los casos en que no se pueden aplicar los métodos generales y los teoremas en la solución de circuitos eléctricos.
- Exponer las nuevas formas de aplicación de los métodos generales en la solución de los circuitos eléctricos.

Para dar cumplimiento a los objetivos generales se trazaron los objetivos específicos siguientes:

- Análisis de los métodos generales y teoremas utilizados en la solución de los circuitos eléctricos a partir de la revisión y estudio bibliográfico
- A través de las consultas en Internet y otros materiales seleccionados profundizar en la aplicación de los métodos y teoremas destacando los casos en que no es posible su aplicación, así como las diferentes formas de aplicación de los métodos

Organización del informe

Este trabajo de diploma consta de las siguientes partes:

Pensamiento

Dedicatoria

Agradecimientos

Tarea técnica

Resumen

Introducción

Capítulo 1 teoremas y métodos generales de soluciones de circuito eléctrica.

Capítulo 2 Aplicaciones especial de los métodos generales y los teoremas.

Conclusiones

Recomendaciones

Referencias bibliográficas

CAPÍTULO 1. TEOREMAS Y METODOS GENERALES DE SOLUCION DE CIRCUITOS ELECTRICOS

1.1 Introducción

¿Existe algo así como un sistema lineal ?..., Pues un sistema lineal sería aquel en el cual todos los procesos se podrían expresar por ecuaciones lineales... Un sistema así no existe evidentemente. Se sobrentiende, entonces, que cuando se menciona un “sistema lineal”, se quiere decir que el sistema es lineal para algunos procesos determinados y no para todos los procesos que, posiblemente, se presenten en él. De esta forma se dice que los circuitos tratados aquí son lineales porqué lo son respecto a los procesos que relacionan los voltajes y las corrientes. En cambio, estos mismos circuitos no se comportan como lineales en lo que respecta a la potencia y a la energía (salvo en casos excepcionales). Ahora, en la práctica un circuito es lineal sólo en rangos, más o menos estrechos, de corriente, voltaje y frecuencia. Por ejemplo, un alambre de hierro ó una barra de carbón son resistencias lineales siempre y cuando la corriente que circule por ellas no las caliente apreciablemente. Un alambre de cobre aislado, enrollado en una barra de hierro, es una inductancia prácticamente lineal a bajas corrientes; pero deja de serlo si se aumenta la corriente hasta un límite fijado por la “saturación” magnética del núcleo de hierro. Afortunadamente el hombre se las ingenia para producir circuitos lineales en casi todos los rangos imaginables de corriente, voltaje y frecuencia. Para trabajar en esos circuitos lineales es que se estudia la teoría de los circuitos lineales en general, sin importar las restricciones que la naturaleza impone a la linealidad cuando se lleva un dispositivo o circuito fuera de su “rango lineal”.

1.2 Circuitos lineales y ecuaciones lineales.

Un circuito es lineal si las ecuaciones que relacionan sus voltajes y corrientes son lineales, y viceversa, ¡no hay excepciones! O sea que en el caso de circuitos lineales siempre es posible expresar una de estas cantidades como una función lineal de las demás. A continuación se lustra esto con un ejemplo sencillo.(paramio, 2007)

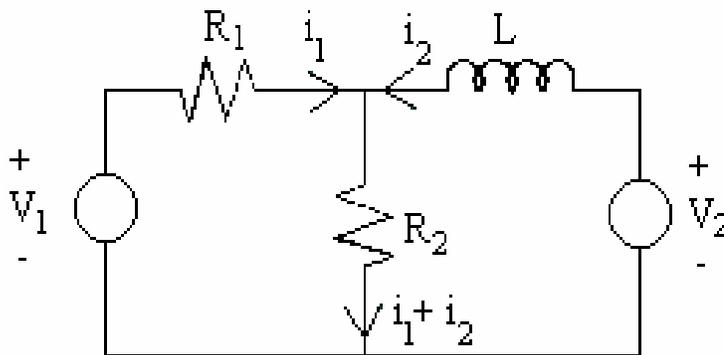


Figura 1. Circuitos lineales y ecuaciones lineales.

Ecuaciones de malla:

$$V_1 = (I_1+I_2)R_2+R_1I_1 \quad \dots(1)$$

$$V_2=(I_1+I_2)R_2+L\frac{di_2}{dt} \quad \dots(2)$$

Al despejar i_2 de (1):

$$I_2 = V_1 - I_1(R_1+R_2)/R_2 \quad \dots(3)$$

Y reemplazando i_2 en (2):

$$V_2 = I_1R_2 + \left(R_2 + L \frac{d}{dt}\right) \left[\frac{V_1 - I_1(R_1 - R_2)}{R_2}\right] \quad \dots(4)$$

Se obtiene finalmente que:

$$I_1 = \frac{-1}{R_1 \left(\frac{R_1 - R_2}{R_2} \right) L \frac{d}{dt}} \left[V_2 - \frac{(R_2 + L \frac{d}{dt})}{R_2} V_1 \right] \quad \dots(5)$$

Como se observa, cualquiera de las cuatro cantidades puede expresarse como una función lineal de las otras tres. A continuación, se da una representación de estas funciones por “bloques” que tengan “entradas” y “salidas, tal como se muestra en la figura 2.

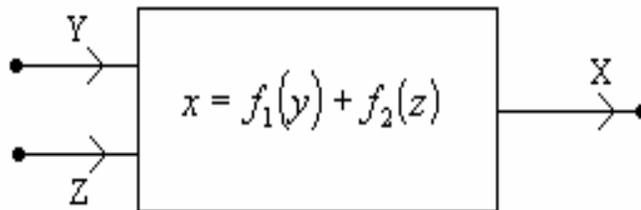


Figura 2: Representación del circuito como función (entradas y salidas)

En general uno de estos bloques representa una función, y las cantidades que entran como variables en la función se representan en sus terminales. A estas variables se les asignan muchas denominaciones, algunas de las cuales se observan en la figura 3.

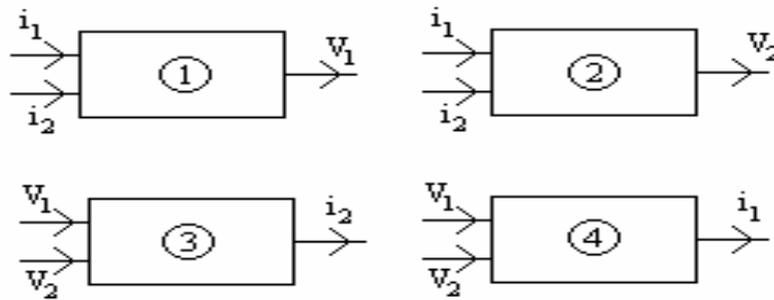


Figura 3. Representación del circuito como función (sistema).

Claro que esta representación no es exclusiva de los sistemas lineales, pero en general, cualquier sistema puede representarse de esta forma. En cuanto a las denominaciones que toman las variables, nótese que variables independientes y dependientes tienen una connotación matemática y el estímulo y la respuesta una notación física o fisiológica. Ambas connotación deben tratarse con cuidado (James Ley, 1963)

1.3 Linealidad y Superposición.

Estos son conceptos iguales que significan lo mismo; sólo que linealidad es un concepto más “matemático”, y superposición es más “físico”. Generalmente se define la superposición por la condición: “la respuesta de un sistema lineal a varios estímulos es la suma de las respuestas a cada uno de los estímulos”. Definición que queda aclarada utilizando la representación por bloques, como se muestra en la figura 4

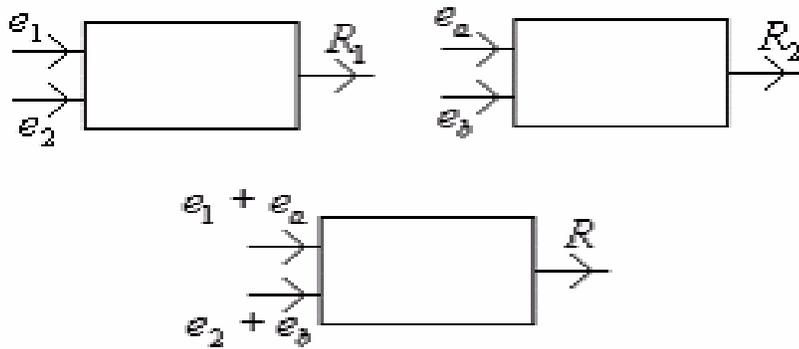


Figura 4: Representación en bloques de funciones de entrada y salida.

R_1 \longrightarrow respuesta a los estímulo e_1 y e_2

$$R_1 = f_1(e_1) + f_2(e_2) \quad \dots(6)$$

R_2 \longrightarrow respuesta a los estímulo e_a y e_b

$$R_2 = f_1(e_a) + f_2(e_b) \quad \dots(7)$$

$$R = R_1 + R_2 = f_1(e_1 + e_2) + f_2(e_a + e_b) \quad \dots(8)$$

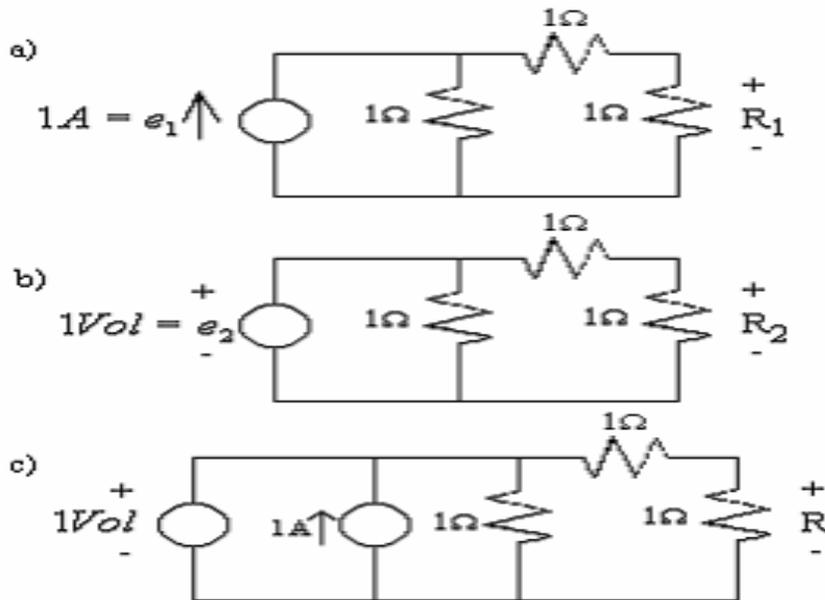


Figura 5: Estímulos de diferentes tipos en la misma entrada.

Claro que se requieren muchas más aclaraciones. Por ejemplo, los estímulos deben ser “sumables”, lo cual significa que sean del mismo tipo. En la figura 5 vemos un ejemplo de estímulos no “sumables”. En este caso los dos estímulos actuando simultáneamente, no producen una respuesta que equivalga a la misma respuesta a los estímulos individuales. Sin embargo: ¡el circuito es lineal! Se debe entonces, tener la precaución de considerar sólo estímulos del mismo tipo en cada una de las “entradas” del sistema. En cambio, en “entradas” distintas no hay problema que los estímulos sean diferentes en naturaleza. Un ejemplo de este puede verse en la figura 6.

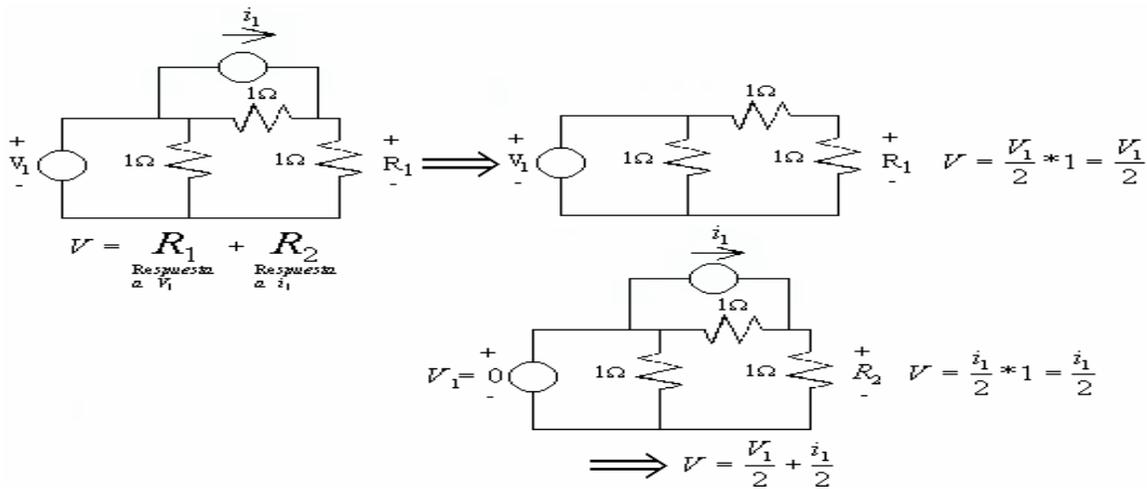


Figura 6. Estímulos de diferente tipo en diferentes entradas.

Otra solución se puede observar en la figura 7.

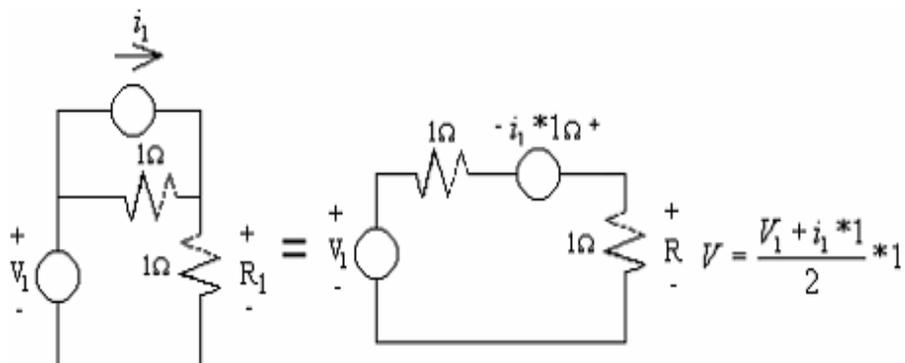


Figura 7. Estímulos aplicados a diferentes entradas.

La primera solución se obtuvo por “superposición”; usando sólo una fuente a la vez. La segunda, por “transformación” de elementos en paralelo. Para terminar esta breve reseña de la superposición en circuitos, se considerará el caso en el cual el

estímulo y la respuesta se presentan en los mismos terminales, y el caso en el cual se presentan en diferentes terminales. En el primer caso, tendremos “circuitos de un par de terminales” tal como se observa en la figura 8. Se puede considerar como “estímulos” las fuentes internas y una de las cantidades v ó i , y como respuesta la otra cantidad v ó i :

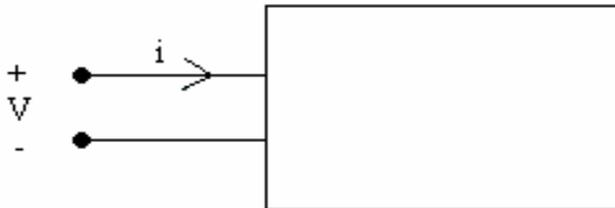


Figura 8. Circuito de un par de terminales.

En el segundo caso se tienen circuitos de dos ó más pares de terminales como muestra la figura 9. Estos circuitos merecen un tratamiento especial, que no constituye objetivó de estudio de la presente investigación.

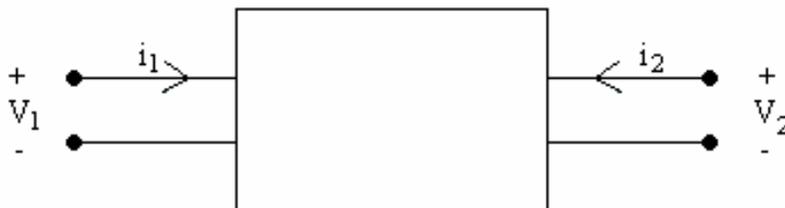


Figura 9. Circuito de dos pares de terminales.

Volviendo al caso de los circuitos de un par de terminales, obsérvese que una de las cantidades, v ó i , en el par de terminales, se debe considerar como un estímulo, o variable independiente, pues es evidente que en esos terminales se puede colocar una fuente de v ó una fuente de i , lo cual puede cambiar el voltaje o la corriente en los mismos terminales. En resumen, se quiere establecer que el voltaje y la corriente en los terminales no depende solamente de las fuentes internas, sino también de lo que se

conecte en los terminales. Lo anterior se ilustra en la figura 10.

Según la figura 10 a), el voltaje en los bornes de la fuente de corriente será:

$$V=V_1+I_1R \quad \dots (9)$$

Si se cambia la fuente de corriente por una resistencia, se tiene entonces según la figura 10 b) que:

$$V=V_1+IR \quad \dots (10)$$

$$V=-IR_1$$

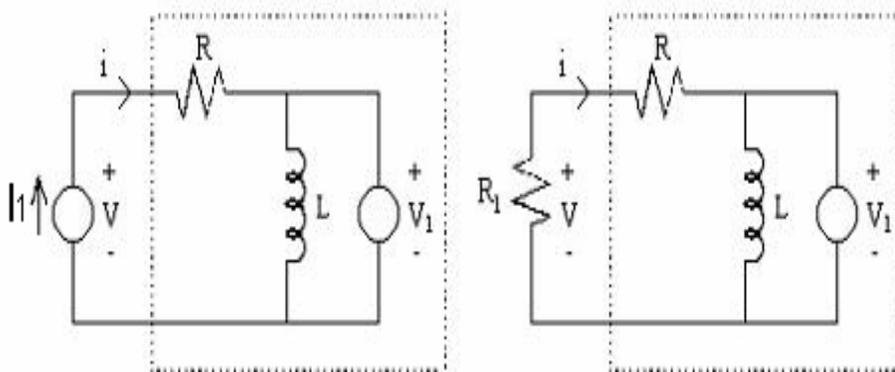


Figura 10. a) Considerando una fuente de corriente. b) Considerando una resistencia.

Se puede ver entonces, como V depende de elemento conectando en los terminales. Pero es de notar que la ecuación que define el voltaje en los bornes se puede seguir escribiendo de la misma forma, no importa lo que este conectando en los terminales, siempre y cuando se incluya la corriente como variable independiente, o como estímulo. Para el circuito anterior esta ecuación será:

$$V= R+V \quad \dots(11)$$

1.4 Teorema de Thevenin y Norton.

1.4.1 Objetivo

- Utilizar las leyes de Ohm y Kirchhoff
- Comprobación del teorema en corriente continua.

1.4.2 Fundamento teórico.

Ley de Ohm

En el caso de medios conductores ideales, la ley de Ohm define como resistencias a los elementos pasivos de dos terminales que cumplen la relación entre intensidad y caída de potencial

$$V = R I. \quad \dots(12)$$

Se estudian a continuación dos modelos que se utilizan para analizar el comportamiento de circuitos complejos a partir de circuitos más simples. Ambos modelos son equivalentes, y son válidos únicamente desde los puntos de vista exteriores a las fuentes. Es importante recalcar que los equivalentes de Thevenin y Norton son equivalentes al circuito original únicamente desde el punto de vista interno, y no externo. Por ejemplo, no se puede utilizar el equivalente para calcular la potencia disipada en una porción del circuito. Estos teoremas son consecuencias directas del teorema del seccionamiento y la superposición. En efecto, se ha visto que todo circuito se puede “cortar” por dos terminales, siempre y cuando se mantengan el voltaje y la corriente iguales en los terminales separados.

1.4.3 Teorema de Thevenin

El Teorema de Thevenin plantea que: todo circuito lineal visto entre dos nodos cualesquiera del mismo es equivalente a una fuente de tensión en serie con una resistencia. La fuente de tensión ideal, llamada tensión equivalente coincide con la diferencia de potencial que mediría entre esos dos nodos del circuito, en vacío o en circuito abierto.(A.J. Conejo, 2004)

Mientras que, la resistencia equivalente de Thevenin coincide con la resistencia que se mediría entre esos dos puntos, considerando la red como un dipolo pasivo.

En el caso de que la corriente que circula por un circuito sea continua, el teorema de Thevenin se puede expresar como sigue: Si A y B son dos nodos cualesquiera de un circuito lineal entre los que se conecta una resistencia de carga R_L , la caída de tensión entre los mismos es función lineal de la intensidad que circula por R_L . En la figura 11 se da una representación circuital del problema tratado y matemáticamente se puede expresar que el voltaje de Tevenin será:

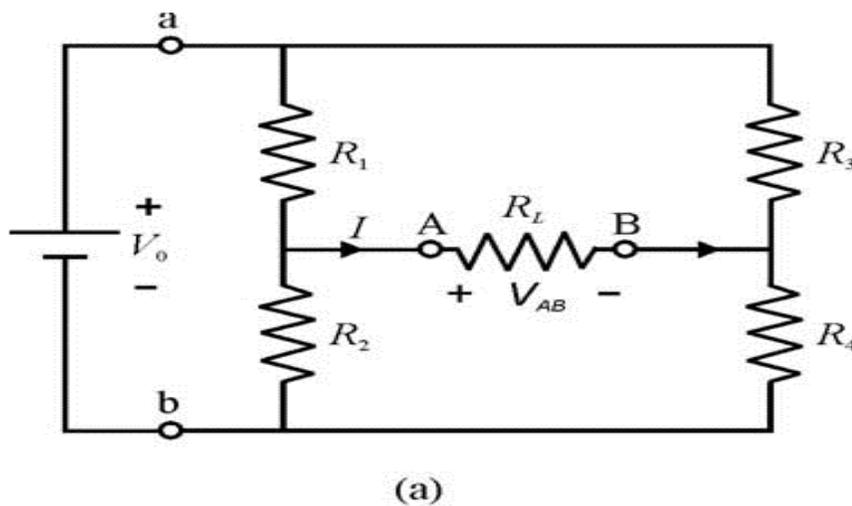


Figura 11: Circuito de Thevenin

$$V_{AB} = V_{TH} - IR_{TH} \quad \dots (13)$$

Donde I es la corriente que atraviesa a la resistencia de carga R_L y V_{Th} y R_{Th} son el voltaje y la resistencia del circuito equivalente de Thevenin. Es importante notar que V_{Th} y R_{Th} son parámetros característicos del circuito con el que se esté trabajando. El teorema puede reinterpretarse de la siguiente manera. Cualquier circuito real que sea lineal, aunque sea una complicada “caja negra” formada por multitud de resistencias y fuentes, siempre puede ser sustituido por su circuito equivalente de Thevenin, mucho más simple, el cual está formado sólo por una fuente de voltaje V_{Th} y una resistencia R_{Th} , como se muestra en el ejemplo de la figura 12. Se trata de una fuente de tensión con una resistencia en serie, elegidas de tal manera que el comportamiento entre los bornes de este nuevo circuito sea el

mismo que el comportamiento entre los bornes del circuito original.

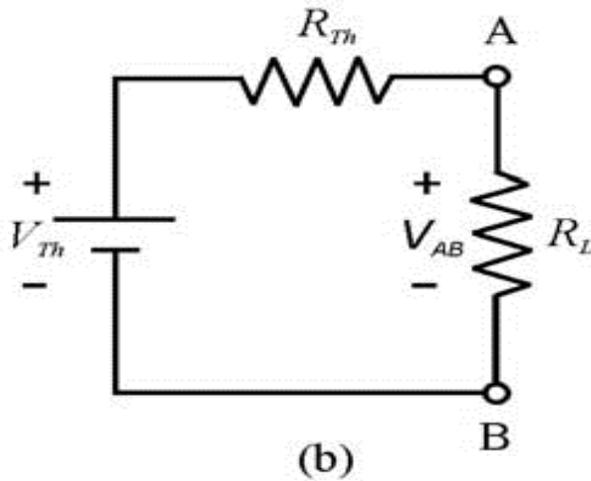


Figura 12. Equivalente de Thevenin de un circuito

1.4.4 Teorema de Norton

Existe otro circuito equivalente muy simple que igualmente puede sustituir a cualquier circuito lineal hecho de fuentes de voltaje y resistencias. Este recibe el nombre de circuito equivalente de Norton y consiste en una fuente de corriente, I_N , conectada en paralelo con una resistencia, R_N . Una fuente de corriente ideal suministra una corriente de valor constante, independientemente de cuál sea la resistencia de carga R_L que se conecte al circuito. El circuito de Norton tiene la forma mostrada según la figura 13.

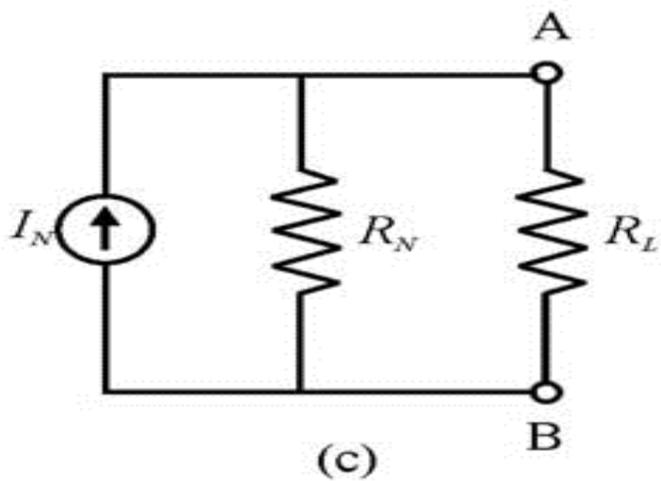


Figura 13. Circuito equivalente de Norton.

1.4.5 Equivalente de Norton de un circuito

Se trata de una fuente de corriente con una conductancia en paralelo, elegidas de tal manera que el comportamiento entre los bornes de este nuevo circuito sea el mismo que el comportamiento entre los bornes del circuito original. Aquí se cumple que:

$$I_N = V_{TH} / R_{TH} \quad \dots (14)$$

$$G_N = 1 / R_{TH} \quad \dots (15)$$

$$V_{TH} = I_N / G_N \quad \dots (16)$$

$$R_{Th} = 1 / G_N \quad \dots (17)$$

Sin embargo, un factor importante a tener en cuenta es el de las fuentes controladas. Si una fuente está controlada por una porción del circuito, no se puede realizar un equivalente de Thevenin o Norton que incluya al parámetro de control pero deje afuera a la fuente controlada. (J.W. Nilsson, 2005)

1.4.6 Ejemplos del teorema de Thevenin y del teorema de Norton

1.4.6.1 Teorema de Thevenin

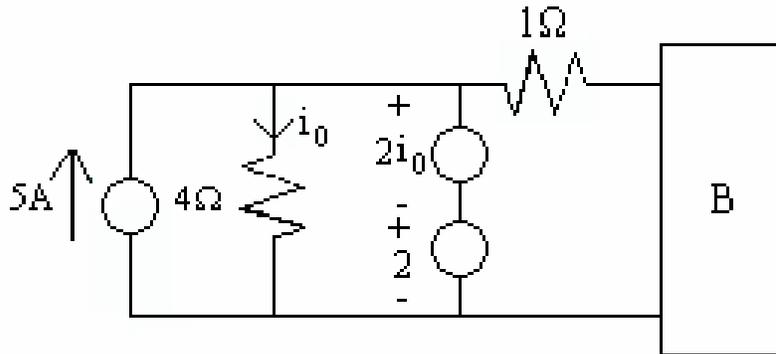


Figure: 14

1. Calcule el Voltaje en los terminales abiertos (B):

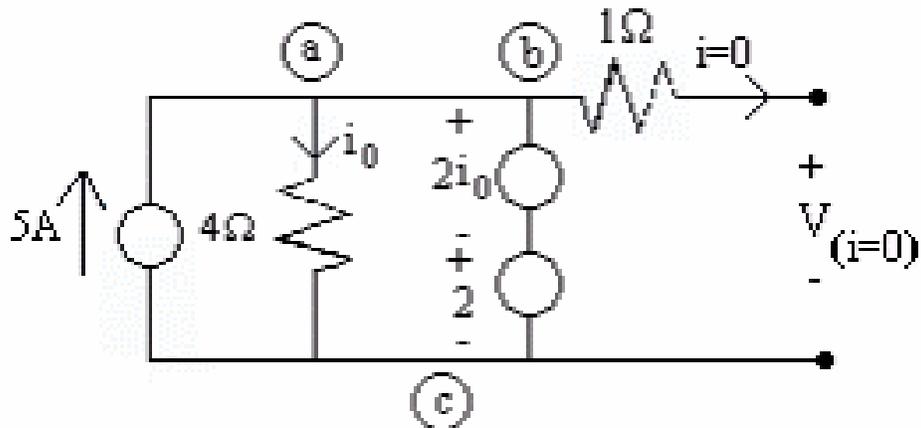


Figura: 15

Solución:

$$V_{ac} = V_{bc} \quad \dots (18)$$

$$4i_0 = 2i_0 + 2 \quad \dots (19)$$

$$i_0 = 1 \quad \dots (20)$$

$$V_{(i=0)} = 2i_0 + 2 \quad \dots (21)$$

$$= 2 \cdot 1 + 2 \quad \dots (22)$$

$$V_{i=0} = 4 \quad \dots (23)$$

Este valor de voltaje será el voltaje de Thévenin. Entonces $V_{th} = 4V$.

Otra vía de solución puede ser determinar el Voltaje de Tehevenin con fuentes anuladas, tal como se muestra en la figura 16.

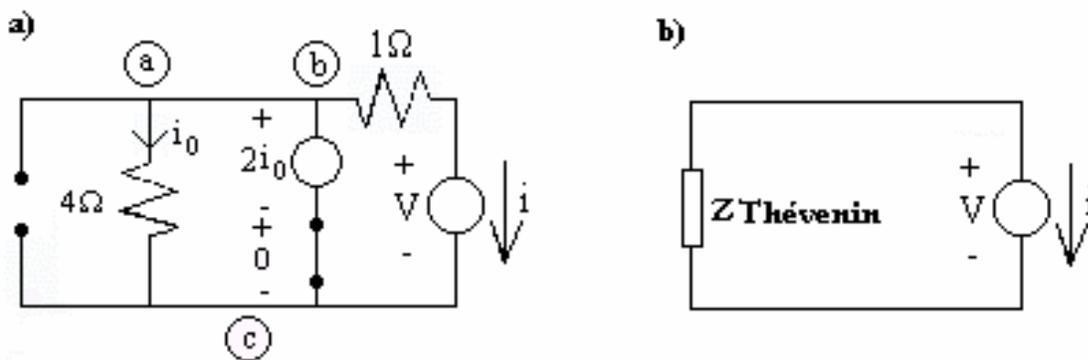


Figura. 16

Nótese que el elemento cuyo voltaje es $2i_0$ (fuente de voltaje controlada) en realidad no es un fuente verdadera pues su voltaje no es un *valor dado* o *independiente del circuito* por eso no se debe anular.

Solución:

$$V = 0 + 2i_0 - 1 \cdot I \quad \dots (24)$$

$$V_{ac} = V_{bc} \quad \dots (25)$$

$$4i_0 = 2i_0 \quad \dots (26)$$

$$i_0 = 0 \quad \dots (27)$$

$$V = -i \quad \dots (28)$$

$$Z_{\text{thervenin}} = V/-i = -i/-i = 1\Omega \quad \dots (29)$$

La Z_{thevenin} es $R = 1\Omega$. Obsérvese que el signo menos (-) sólo se debe al sentido de i y la polaridad de v . Como se aprecia en el circuito de la figura 16 b).

Luego, el equivalente de Thevenin que se obtiene finalmente se muestra en la figura 17.

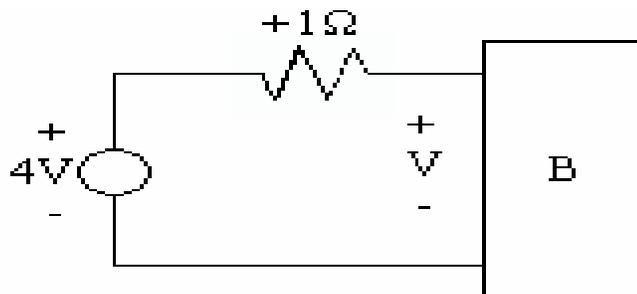


Figura. 17

1.4.6.2 Teorema de Norton

1. Calcule la corriente de cortocircuito que se muestra en la figura a continuación.

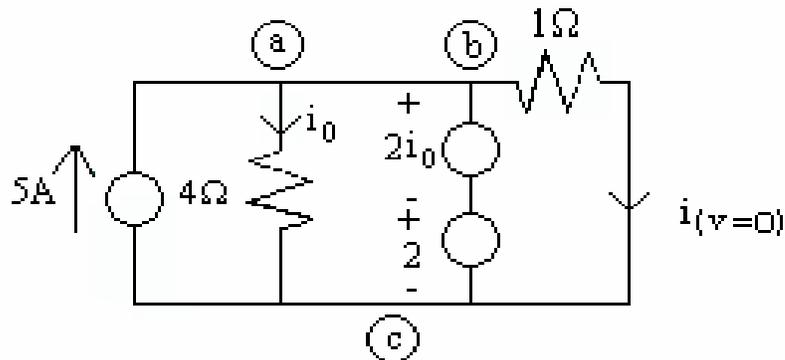


Figura. 18.

Solución:

$$V_{ac} = V_{bc} \quad \dots (30)$$

$$4i_0 = 2i_0 + 2 \quad \dots (31)$$

$$I_0 = 1 \quad \dots (32)$$

$$i_{v=0} = 2i_0 + 2 / 1\Omega \quad \dots (33)$$

$$i_{v=0} = 4 \quad \dots (34)$$

Otra vía de solución puede ser, calcular la corriente con fuentes anuladas: (Debida a v), como se observa en la figura 19.

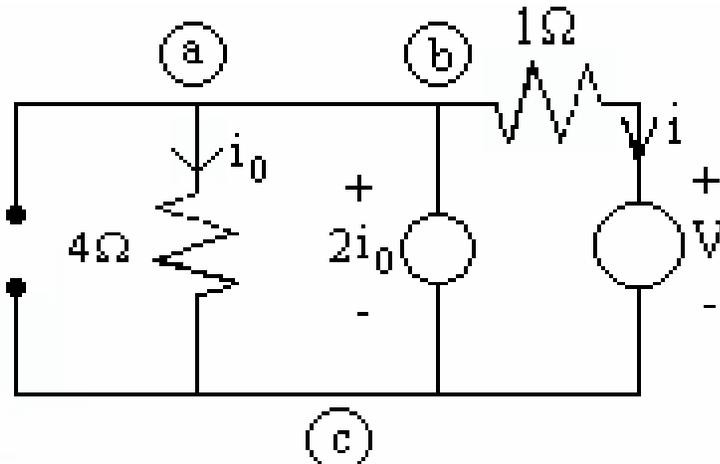


Figura. 19

Recuérdese que “fuente” es un elemento con voltaje *conocido, dato, ó de valor independiente* del circuito.

$$V_{ac} = V_{bc} \quad \dots (35)$$

$$4i_0 = 2i_0 \quad \dots (36)$$

$$i_0 = 0 \quad \dots (37)$$

$$I = -V \quad \dots (38)$$

1.5 Método de las corrientes de mallas.

El método de mallas consiste en plantear la existencia de una corriente de Malla. Esta corriente de malla no se trata de una corriente real, sino de una variable que simplifica los cálculos. Cada malla tendrá una corriente de malla asociada. Todas las corrientes de malla no necesariamente deben tener el mismo sentido, aunque este no coincida o no con el sentido real de la corriente en el elemento.

Los elementos que pertenezcan a dos mallas, tendrán dos sentidos de referencia asociados, uno para cada una de las corrientes de malla que los recorren. En el ejemplo de la figura 20, la resistencia R_2 tiene un sentido de referencia cuando se la considera en la malla 1, y otro sentido de referencia cuando se le considera en la malla 2.

Las ecuaciones del método de mallas se plantean poniendo de un lado del igual todas las fuentes de tensión de la malla, y del otro la corriente de malla multiplicada por la suma de las resistencias de la malla, menos la corrientes de malla adyacentes por las resistencias en común.

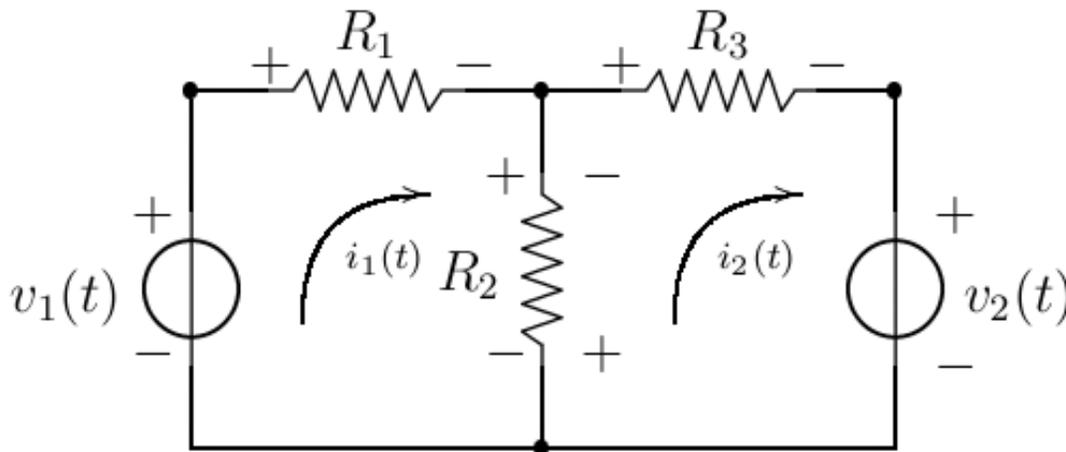


Figura 20: Dos mallas y sus corrientes de malla asociadas.

Estas son las ecuaciones de malla para el circuito de la figura 20.

$$\text{I) } V_1 = i_1(R_1+R_2) - i_2R_2 \quad \dots (38)$$

$$\text{II) } -V_2 = i_2(R_2+R_3) - i_1R_2 \quad \dots (38)$$

1.6 Método de los nodos

El concepto detrás del método de nodos es similar al del método de mallas. Consiste en plantear la existencia de una **Tensión de nodo**, que no necesariamente es la diferencia de potencial entre los bornes de los elementos, pero que se utiliza para simplificar los cálculos.

Las ecuaciones del método de nodos se plantean colocando de un lado del igual todas las corrientes entrantes o salientes que provengan de una fuente de corriente, y del otro lado del igual, la tensión del nodo multiplicada por las conductancias que llegan a ese nodo, menos la tensión de los nodos adyacentes por las conductancias en común.

Para comprender mejor el método se muestra un ejemplo:

En el circuito de la figura 21 calcular V_1 y V_2

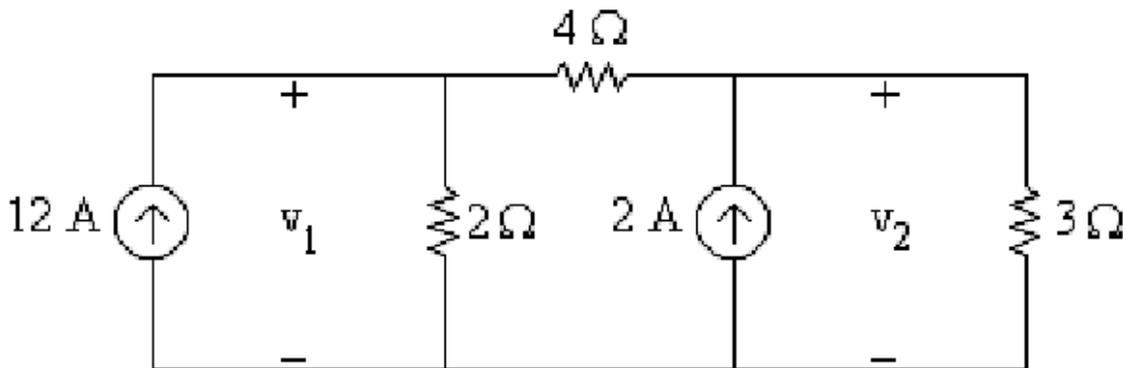


Figura. 21.

Solución.

Primero se buscan los nodos principales, se elige el nodo de referencia y se nombran los Nodos.

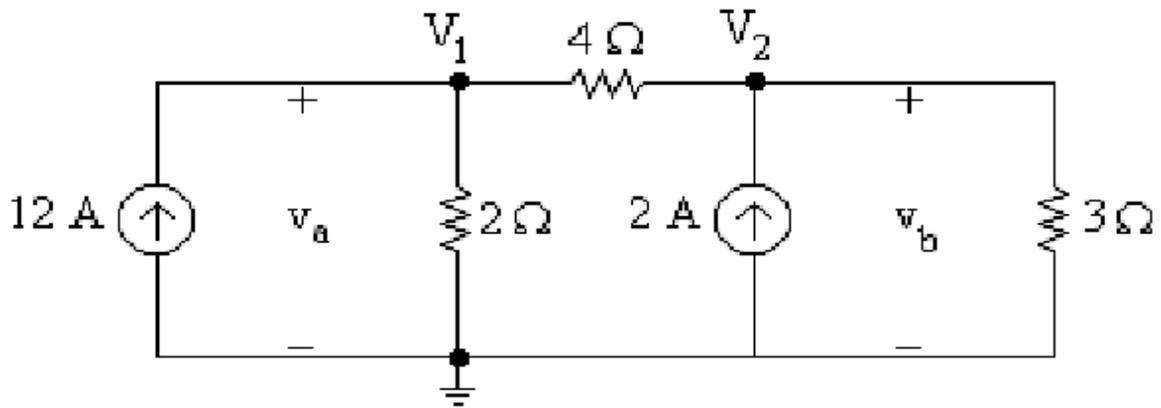


Figura. 22

Se aplica la LKC a los nodos V1 y V2.

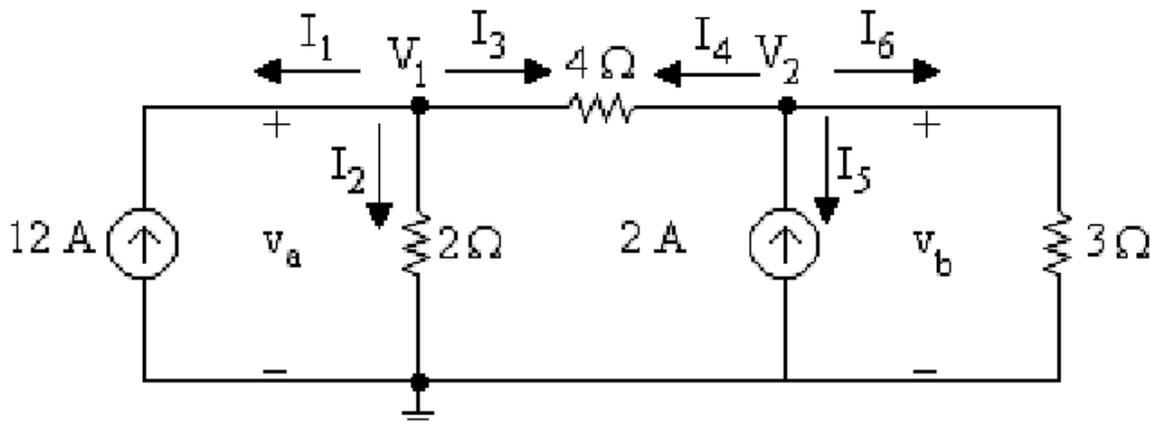


Figura: 23.

Para el nodo 1:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad \dots (39)$$

$$-12 + V_1/2 + (V_1 + V_2)/4 = 0 \quad \dots (40)$$

$$V_1 (1/2 + 1/4) - V_2 \cdot 1/4 = 12 \quad \dots (41)$$

$$3V_1 - V_2 = 48 \quad \dots (42)$$

Para el nodo 2:

$$I_4 + I_5 + I_6 = 0 \quad \dots (43)$$

$$(V_1 - V_2)/4 - 2 + V_2/3 = 0 \quad \dots (44)$$

$$-1/4V_1 + (1/4 + 1/3)V_2 = 2 \quad \dots (45)$$

$$-3V_1 + 7V_2 = 24 \quad \dots (46)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (42) y (46) se obtiene que:

$$V_1 = 20V$$

$$V_2 = 12V$$

CAPITULO 2. APLICACIONES ESPECIALES DE LOS METODOS GENERALES Y LOS TEOREMAS

En la literatura existente los teoremas se enuncian, demuestran y usan cuando se requieren, es decir, aparecen de repente, como una forma de salir de una dificultad en el proceso de análisis de los circuitos eléctricos, es por esto que su posterior aplicación, es difícil. Se debe buscar dentro de la literatura en extenso. Si se hubiera planeado el hacer una presentación sistematizada de todos ellos, bastaría buscar el apartado de teoremas dentro del conjunto y aplicarlo al caso particular. Se presentaran luego uno a uno especificado en qué tipo de circuito se pueden usar, como se aplican (ejercicio y problema resueltos) y se propondrán algunos para la comprensión del ejercicio. Se explica en que casos y a qué tipo de circuito se aplica, sus ventajas, la demostración y al menos un ejemplo de aplicación. Algo así como la forma en que se enseña en la universidad la teoría de circuitos eléctricos.

2.1 Análisis del método de corriente de malla (MCM)

2.1.1 Introducción

El **análisis de mallas** (algunas veces llamada como **método de corrientes de malla**), es una técnica usada para determinar la tensión o la corriente de cualquier elemento de un circuito plano. Un circuito plano es aquel que se puede dibujar en un plano de forma que ninguna rama quede por debajo o por arriba de ninguna otra. Esta técnica está basada en la ley de tensiones de Kirchhoff. La ventaja de usar esta técnica es que crea un sistema de ecuaciones para resolver el circuito, minimizando en algunos casos el proceso para hallar una tensión o una corriente de un circuito.¹

Para usar esta técnica se procede de la siguiente manera: se asigna a cada una de las mallas del circuito una corriente imaginaria que circula en el sentido que nosotros elijamos; se prefiere asignarle a todas las corrientes de malla el mismo sentido. De cada malla del circuito, se plantea una ecuación que estará en función de la corriente que circula por cada elemento. En un circuito de varias mallas se resuelve un sistema lineal de ecuaciones para obtener las diferentes corrientes de malla.

2.1.2 Corrientes de malla y mallas esenciales

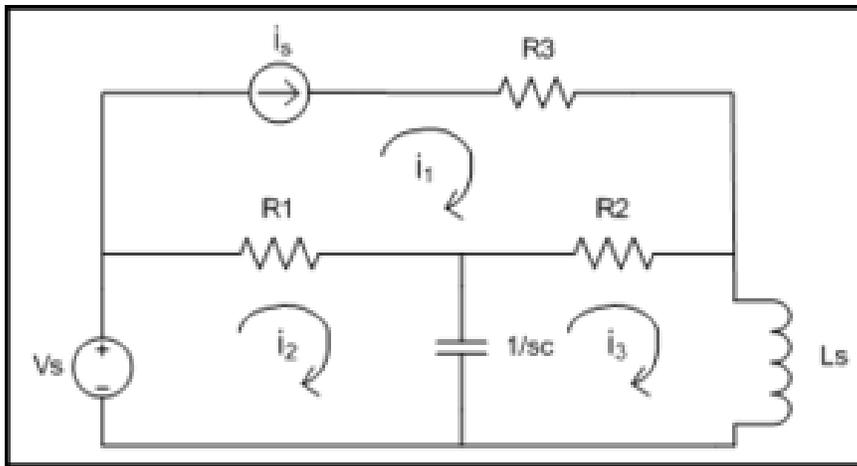


Figura 24: Circuito con corrientes de malla marcadas como i_1 , i_2 , e i_3 . Las flechas muestran la dirección de la corriente de malla.

La técnica de análisis de mallas funciona asignando arbitrariamente la corriente de una malla en una malla esencial. Una malla esencial es un lazo que no contiene a otro lazo. Cuando se observa un esquema de un circuito, las mallas se ven como una ventana. En la figura 24 las mallas esenciales son uno, dos y tres. Una vez halladas las mallas esenciales, las corrientes de malla deben ser especificadas.²

Una corriente de malla es una corriente que pasa alrededor de la malla esencial. La corriente de malla podría no tener un significado físico pero es muy usado para crear el sistema de ecuaciones del análisis de mallas.¹ Cuando se asignan corrientes de malla es importante tener todas las corrientes de malla girando en el mismo sentido. Esto ayudará a prevenir errores al escribir las ecuaciones. La convención es tenerlas todas girando en el

sentido de las manecillas del reloj.² En la figura 24 se muestra el mismo circuito antes pero con las corrientes de malla marcadas.

La razón para usar corrientes de malla en vez de usar LCK y LVK para resolver un problema es que las corrientes de malla pueden simplificar cualquier corriente planteada con LCK y LVK. El análisis de mallas asegura el menor número de ecuaciones, simplificando así el problema.

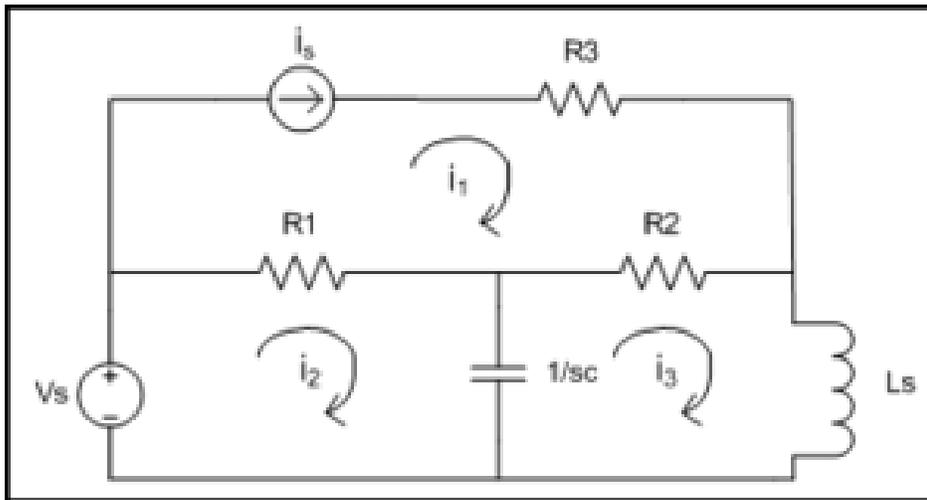


Figure 25: Circuito simple usando análisis de mallas

Después de nombrar las corrientes de malla, se plantea una ecuación para cada malla, en la cual se suma todas las tensiones de todos los componentes de una malla.² Para los elementos que no son fuentes de energía, la tensión será la impedancia del componente por la corriente que circula por él.³ Cuando un componente se encuentra en una rama que pertenece a dos mallas, su corriente será resultado de la resta de las corrientes de malla a las que pertenezca. Es importante tener esto en cuenta a la hora de expresar la tensión en la rama en función de la intensidad que circula por ella. Por ejemplo, la tensión de la resistencia R_2 en la figura 25 es: $V_R = R(i_3 - i_1)$, siendo i_1 la corriente de malla de la que estamos escribiendo su ecuación e i_3 la malla vecina; considerando positiva la corriente de la malla que estamos describiendo y negativa la corriente de malla vecina. Es importante tener en cuenta los signos.

Si hay una fuente de tensión en la corriente de malla, la tensión en la fuente es sumada o sustraída dependiendo si es una caída o subida de tensión en la dirección de la corriente de malla. Para una fuente de corriente que no esté contenida en dos mallas, la corriente de malla tomará el valor positivo o negativo de la fuente de corriente dependiendo si la corriente de malla está en la misma dirección o en dirección opuesta a la fuente de corriente.² A continuación se plantean las ecuaciones del circuito de la figura 25, así:

$$\text{Malla 1: } i_1 = i_s \quad \dots (47)$$

$$\text{Malla 2: } -V_s + R_1(i_2 + i_1) + 1/sc(i_2 - i_3) = 0 \quad \dots (48)$$

$$\text{Malla 3: } 1/sc(i_3 - i_2) + R_2(i_3 - i_1) + Lsi_3 \quad \dots (49)$$

Una vez halladas las ecuaciones, el sistema puede resolverse usando alguna técnica que resuelva sistema de ecuaciones lineales.

Observación: En circuitos resistivos (donde solo hayan resistencias), si al resolver el sistema una corriente de malla es negativa significa que esa corriente circula en sentido contrario al que se ha supuesto. En circuitos de corriente alterna con condensadores, bobinas, será importante el criterio de signos ya que a la hora de restar intensidades, como se trabaja con números complejos, a través de la fórmula de Euler, se tienen cambios de modulo y de fase en la intensidad resultante, no basta con fijar la de mayor módulo como positiva; se tiene que acudir al patrón de corriente positiva en sentido horario (o anti horario, a elección)

2.1.3 Solución usando el MCM

Considerado el circuito plano de la figura siguiente (con resistencia en Ω) con tres malla, calcular la corriente de malla, I_1, I_2 e I_3 utilizando KLV y después calcular la potencia absorbido por resistencia marcado $V(2\Omega)$.

2.1.3.1 Método tradicional

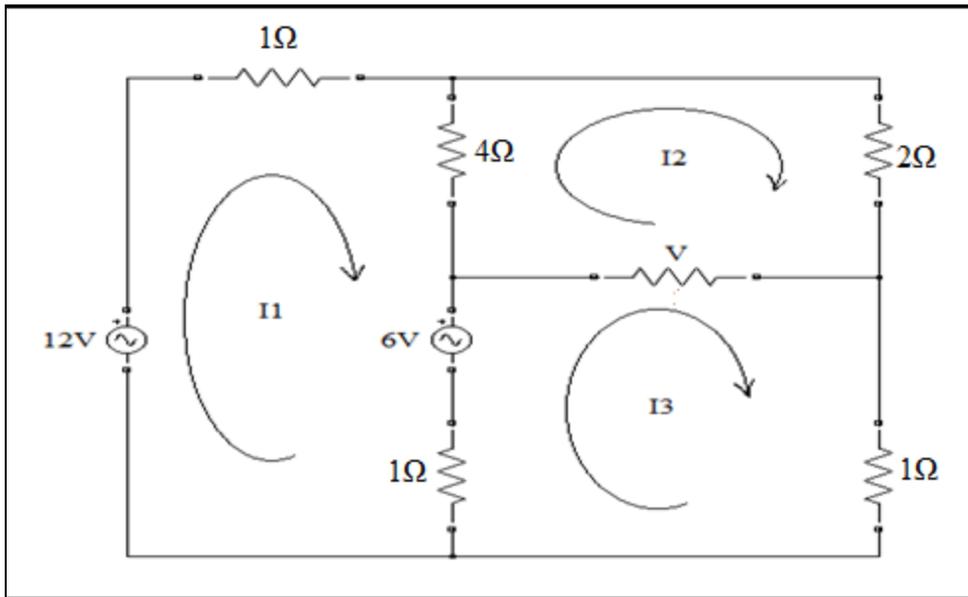


Fig 26: el circuito resistivo contiene solamente fuente independiente de voltaje para el analisis de malla

Formula general de método de malla:(Alvarez, 2006)

$$I_1 R_{11} + I_2 R_{12} + I_3 R_{13} \dots + I_n R_n = \sum V \quad \dots (50)$$

Lazo 1: Aplicando LKV en la malla 1 el voltaje alrededor de esta malla 1 utilizando la ley de ohm, define las corrientes de malla producidas:

$$-14 + I_1 + 4(I_1 - I_2) + 6 + (I_1 - I_3) = 0 \quad \dots (51)$$

Simplificado el ecuacion:

$$6I_1 - 4I_2 - I_3 = 8 \quad \dots (52)$$

Lazo 2. Aplicado LKV en la malla 2 el voltaje alrededor de esta malla 2 utilizando la ley de ohm, define las corrientes de malla producidas:

$$4(I_2 - I_1) + 2I_2 + 2(I_2 - I_3) = 0 \quad \dots (53)$$

$$-4I_1 + 8I_2 - 2I_3 = 0 \quad \dots (54)$$

Lazo 3. Finalmente se escribe LKV en la malla 3 y se obtiene que:

$$-I_1 - 2I_2 + 4I_3 = 6V \quad \dots (55)$$

Expresenadolas en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 & -1 \\ -4 & 8 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Usando la matriz inversa se tiene que:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.35 & 0.225 & 0.2 \\ 0.225 & 0.288 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ahora se determina la potencia consumida por la Resistencia de 2Ω . Conociendo el valor de las corrientes de malla, es posible a calcular todos los voltajes y corrientes en el circuito. Nuestra intención es calcular el voltaje en la resistencia V

$$V = 2(I_3 + I_2) = 2V \quad \dots (56)$$

Y la potencia absorbida por resistencia de 2Ω es

$$V^2/2 = 2W. \quad \dots (57)$$

2.1.3.2 Método de supermalla

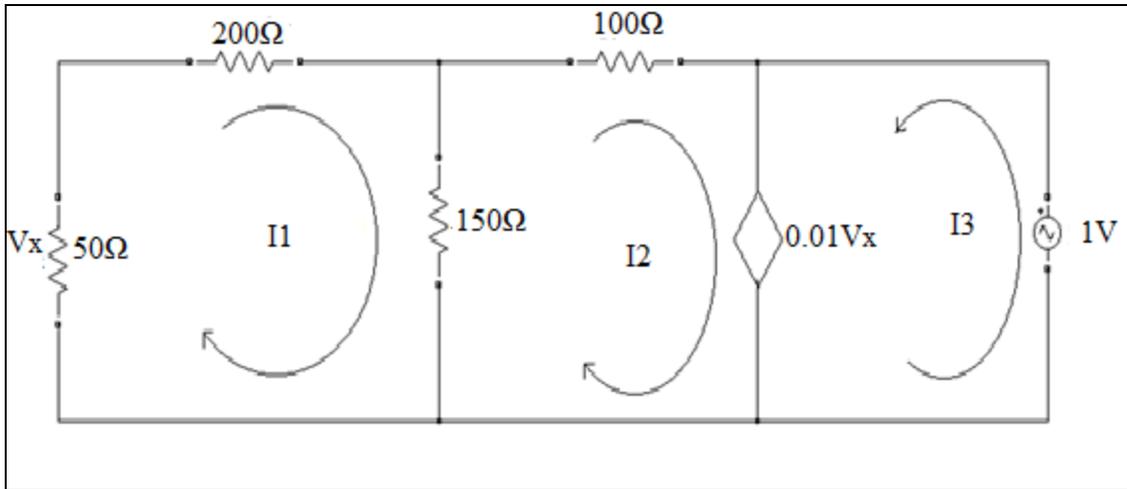


Fig 27: supermalla

Al aplicar el MCM

Malla 1:

$$50I_1 + 200I_1 + 150(I_1 - I_2) = 0 \quad \dots (58)$$

$$400 I_1 - 150I_2 = 0 \quad \dots (59)$$

Supermalla:

$$150(I_2 - I_1) + 100I_2 + 1 = 0 \quad \dots (60)$$

$$0.01V_x = -I_1 - I_3 \quad \dots (61)$$

$$\text{Pero } V_x = -50I_1 \quad \dots (62)$$

Sustituyendo (4) en (3)

$$-0.5I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad \dots (63)$$

Sacado con matrix:

$$I_3 = 0.00419A$$

$$I_2 = 2.6667I_1 \quad \dots (64)$$

Sustituyendo (6) en en (5)

$$I_1 = - 0.00419/ 2.1667 \quad \dots (65)$$

$$I_1 = -0.00193A$$

$$I_2 = - 0.005155A$$

2.1.3.3 METODO DE LAS MALLAS MODIFICADO (MMM)

El método de las mallas modificado es más fácil que la supermalla. El ejemplo siguiente muestra cómo escribir la ecuación de lazo cuando la fuente de corriente es común en dos o mas lazo. En este caso introducimos la fuente auxiliar de voltaje variable por la fuente común de corriente a dos o mas lazo. El resultado contiene una ecuación simultánea. Se considera el circuito siguiente el cual contiene la fuente independiente de corriente en rama común de 1 y 3 y el voltaje-controlado de fuente de corriente en la rama 1 y 2. Dado esto, encontrar la corriente de malla I_1 , I_2 , e I_3 y la potencia disipada por la fuentes independientes.

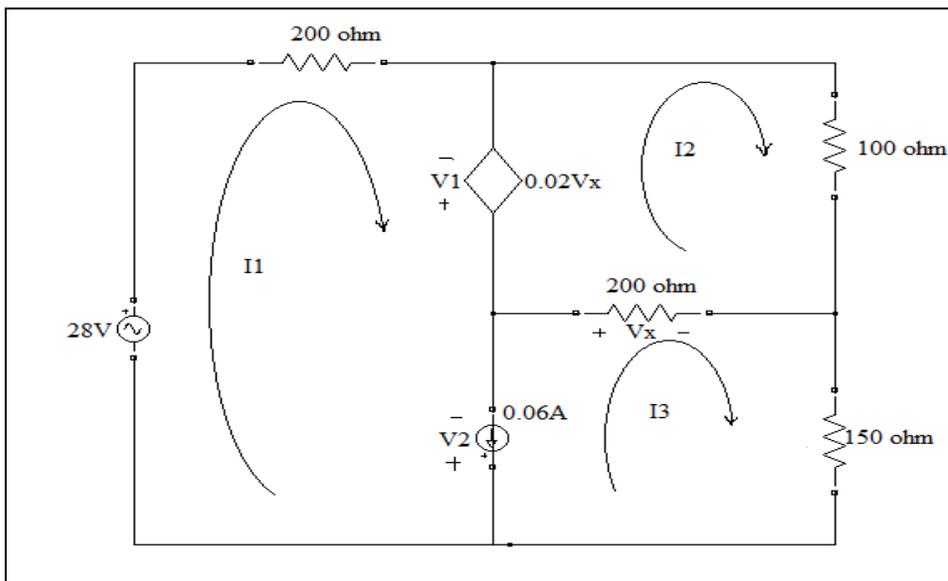


Figura 28: El método de malla modificado

Solución

Introducimos dos fuentes auxiliares de voltaje variable V_1 y V_2 asociado con dos fuente de corriente común en dos ramas. Este voltaje variable facilitar la aplicación de LKV para construir la ecuación de lazo.

Paso 1. Aplicar LKV en lazo 1.

$$28 = 200I_1 - V_1 - V_2 \quad \dots (66)$$

Paso 2. Aplicar LKV y la ley de ohm en lazo 2,

$$100I_2 + 200(I_2 - I_3) + V_1 \quad \dots (67)$$

$$300I_2 - 200I_3 + V_1 = 0 \quad \dots (68)$$

Paso 3. Aplicar LKV en lazo 3

$$150I_3 + V_2 + 200(I_3 + I_2) = 0 \quad \dots (69)$$

$$-200I_2 + 350I_3 + V_2 = 0 \quad \dots (70)$$

Paso 4. Escribir la ecuación determinada por la fuente de corriente independiente. Aquí en el lazo 1 y 3

$$0.06 = I_1 - I_3 \quad \dots (71)$$

Paso 5. Escribir la ecuación determinada por la fuente de corriente dependiente.

$$I_1 - I_2 = 0.02V_x \text{ y } V_x = 200(I_3 - I_2) \quad \dots (72)$$

$$I_1 + 3I_2 - 4I_3 = 0 \quad \dots (73)$$

Paso 6. Aplicando matrices y resolviendo se tiene que:

$$\begin{pmatrix} 200 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 300 & -200 & 1 & 0 \\ 0 & -200 & 350 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 0 \\ 0 \\ 0.06 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo con la matriz inversa:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 300 & -200 & 1 & 0 \\ 0 & -200 & 350 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 28 \\ 0 \\ 0 \\ 0.06 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.02 \\ 0.04 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Paso 7. Calcular la potencia en la fuente independiente

$$P_{\text{fuente}} = 28 I_1 = 28 * 0.1 = 2.8 \text{ W} \quad \dots (74)$$

$$P_{\text{I fuente}} = 0.06V_2 = -0.6\text{W} \quad \dots (75)$$

Y esto indica que las fuentes independientes absorben la potencia en el circuito(Lin, 2001)

2.2 Gráficos de circuito plano y no plano

Para los circuitos que contienen elementos concentrados, las ecuaciones LKC y LKV son independientes de la naturaleza de los elementos de circuito en las ramas individuales. La información importante en la ecuación LKV y LkC es: ¿en cual de los dos nodos se

conecta? Debido a esto, a menudo es conveniente para sustituir a cada rama de la red por un segmento de línea. La representación simplificada resultante de la información de conexión se llama el gráfico de circuito. El análisis de mallas de la sección anterior trataba, al menos en la superficie, exclusivamente con circuitos planos, es decir, los estirables en un plano sin ramas que tienen para cerrar entre sí. Un circuito no plano es aquel que tiene ramas que se cruzan entre si. Dos sencillos ejemplos de gráficos de circuitos no planos, llamadas gráficas no planas básicas de Kuratowski, aparecen en la figura 29. Cada gráfico tiene exactamente un cruce rama. Cualquier intento de volver a dibujar estas cifras como gráficos planos fallará

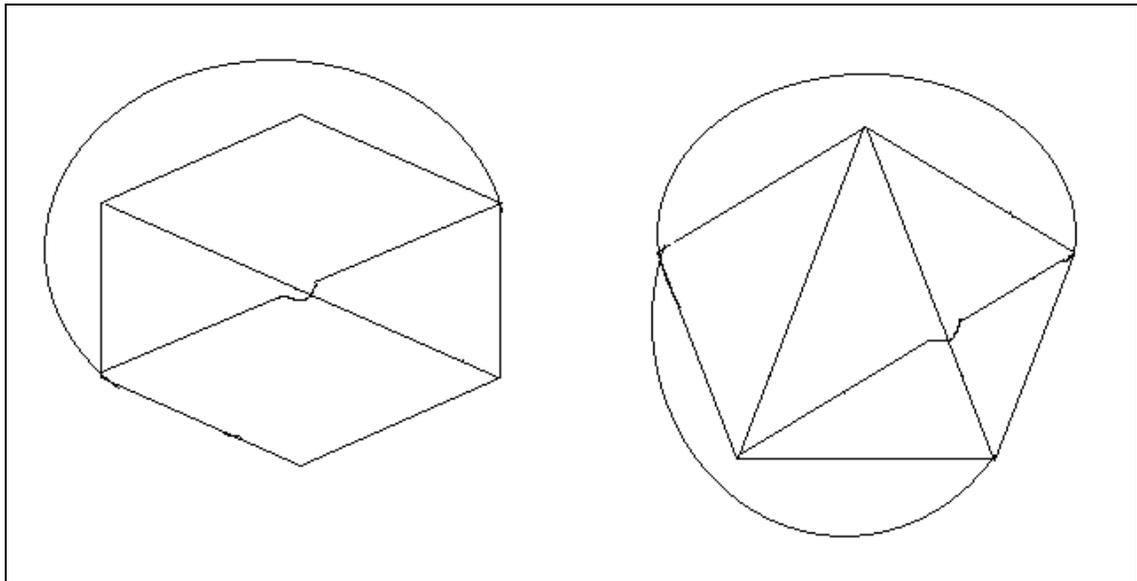


Figura 29. Dos circuitos simples no planos (gráfico de Kuratowski).

2.2.1 Método de las corrientes de mallas aplicado en circuitos no planos

Como sabemos el MCM no es aplicable, según la literatura, a circuitos eléctricos no plano. A continuación ofreceremos los pasos a dar para poder resolver un circuito no plano aplicando el MCM. Para circuitos no planos, tales como los que se muestran en la figura 29, el concepto de una malla está mal definido debido a los cruces de ramificación. ¿Cómo se hace una ecuación de lazo de estos circuitos? En los cursos avanzados de análisis de

circuito, este tema se aborda de una manera muy sistemática mediante el uso de un concepto llamado el árbol de un gráfico o de circuito. Este enfoque introduce una gran cantidad de nomenclatura que no es muy beneficiosa para los estudiantes cuyas técnicas están fuera del análisis de circuitos analógicos. La idea básica consiste en utilizar la técnica de análisis de mallas tanto como sea posible y manejar las ramas problemáticas (las que cruz sobre otras ramas) de una manera especial

Estrategia para escribir la ecuación de lazo de las redes no plano

Paso 1: dado un circuito no plano N , volver a dibujar el circuito con el objetivo de reducir el número de ramas cruces tanto como sea posible. A pesar de reducir al mínimo el número de cruces sería lo mejor. No es necesario que lo haga.

Paso 2: después de trazado el nuevo circuito, supongamos que hay m cruces. Retire bastantes ramas para eliminar todos los cruce de rama, dejando así un circuito plano, que denominamos por N^*

Paso 3: escribir un conjunto de corrientes de malla para el circuito plano N^* .

Paso 4: para cada rama de N que se ha eliminado en el paso 2, formar un lazo de corriente asociada que consiste en esta rama y algún subconjunto de ramas de N^*

Paso 5: aplicar LKV a cada uno de los lazos obtenidos en el paso 3 y 4 para obtener un conjunto de ecuaciones de lazo para la red no plana.

2.2.2 El siguiente ejemplo ilustra esta estrategia.

La figura 30 muestra un circuito no plano N . Todas las resistencias tienen un valor de 1Ω . Escriba las ecuaciones de lazo y encuentre las corrientes en todas las resistencias.

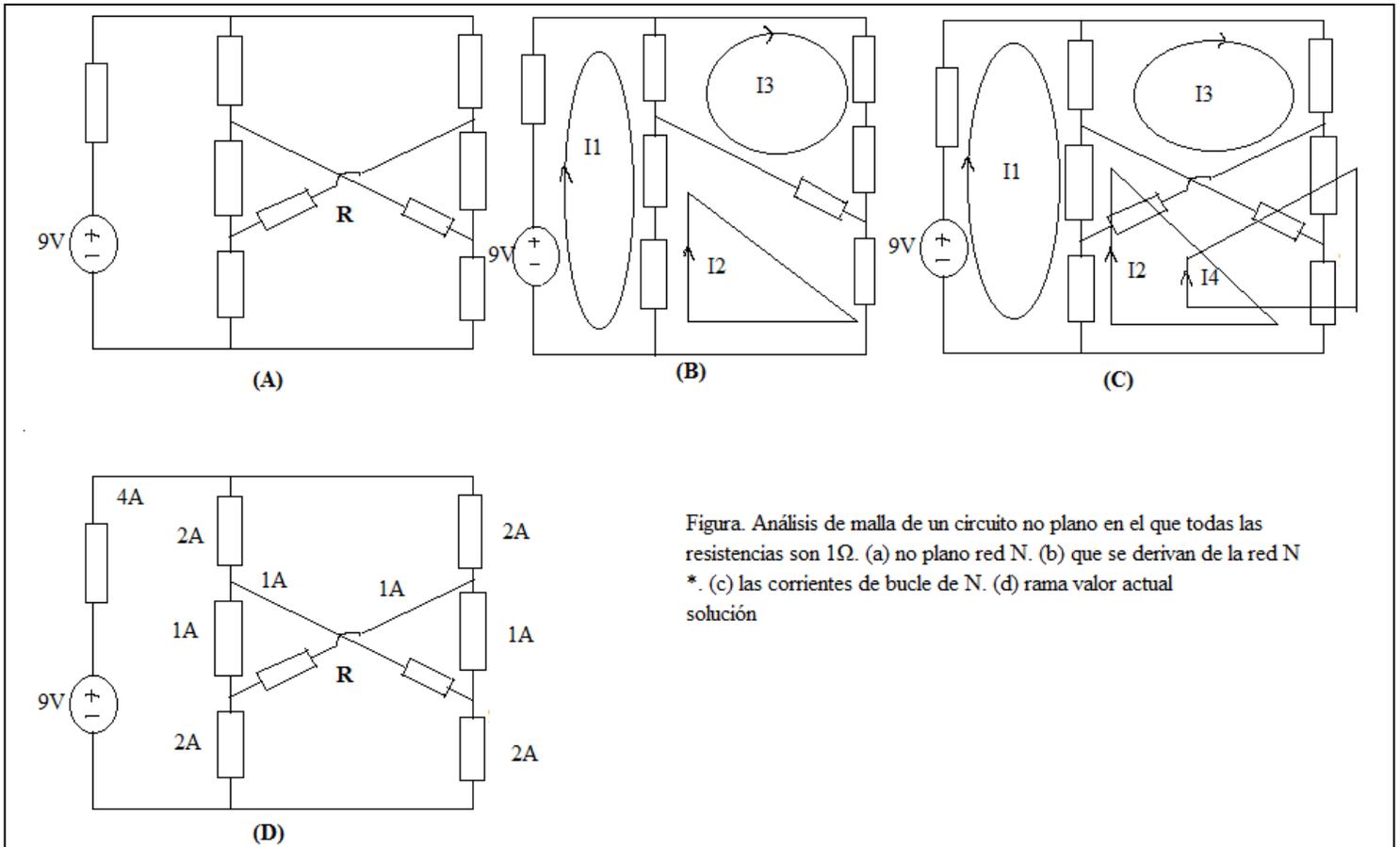


Figura 30. Análisis de malla de un circuito no plano en el que todas las resistencias son 1Ω . (a) no plano red N. (b) que se derivan de la red N*. (c) las corrientes de lazo de N. (d) rama valor actual.

Solucion:

Extracción de la resistencia marcada R en la figura 30 a) para eliminar cruzar la rama que produce el circuito plano N* de la figura 30 b). La red N* contiene tres corrientes de malla identificadas fácilmente como I1, I2, e I3. Restauración de la resistencia R y la corriente de malla adicional nombrada I4. Este lazo de corriente en R y el árbol de las otras resistencias de N*, como se muestra por las líneas gruesas de la Figura 30 describe el siguiente sistema de ecuaciones.

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones por algún método conocido se obtiene que:

$$I_1 = 4A, I_2 = 3A, I_3 = 2A \text{ e } I_4 = -1A$$

2.3 Análisis del método de voltaje de nodo (MVN)

2.3.1 Introducción

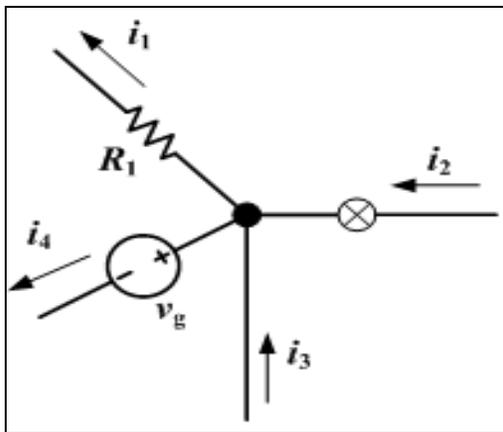


Figura 30: Representación de un nodo.

Es un método general de análisis de circuitos que se basa en determinar los voltajes de todos los nodos del circuito respecto a un nodo de referencia. Conocidos estos voltajes se pueden determinar todas las corrientes que circulan por los distintos elementos del circuito. Si el circuito tiene N nodos se han de determinar $(N-1)$ voltaje de nodo. El nodo de

referencia se elige de forma arbitraria, si bien es frecuente elegir el nodo al cual hay conectadas un mayor número de ramas o un nodo con una fuente de voltaje. En la versión que se va a desarrollar a continuación se van a determinar los voltajes de los nodos principales del circuito. Como nodo de referencia se elegirá un nodo principal. En la mayoría de los casos este procedimiento conlleva un menor número de ecuación.

Cuando se analiza un circuito por las leyes de Kirchhoff, se podrían usar análisis de nodos (tensiones nodales) por la ley de corrientes de Kirchhoff (LKC) o análisis de malla (corrientes de malla) usando la ley de tensiones de Kirchhoff (LKV). En el análisis de nodos se escribe una ecuación para cada nodo, con condición que la suma de esas corrientes sea igual a cero en cualquier instante, por lo que una carga Q nunca puede acumularse en un nodo. Estas corrientes se escriben en términos de las tensiones de cada nodo del circuito. Así, en cada relación se debe dar la corriente en función de la tensión que es nuestra incógnita, la conductancia ó admitancia. Por ejemplo, para un resistor, $I_{rama} = V_{rama} * G$, donde G es la conductancia del resistor.

El análisis de nodos es posible cuando todos los nodos tienen resistencia o impedancia. Este método produce un sistema de ecuaciones, que puede resolverse a mano si es pequeño, o también puede resolverse rápidamente usando álgebra lineal en un computador. Por el hecho de que forme ecuaciones muy sencillas, este método es una base para muchos programas de simulación de circuitos (Por ejemplo, SPICE). Cuando los elementos del circuito no tienen conductancia, se puede usar una extensión más general del análisis de nodos: el análisis de nodos modificado.

Los ejemplos simples de análisis de nodos se enfocan en elementos lineales. Las redes no lineales (que son más complejas) también se pueden resolver por el análisis de nodos al usar el método de Newton para convertir el problema no lineal en una secuencia de problemas lineales.

2.3.1.1 Procedimiento

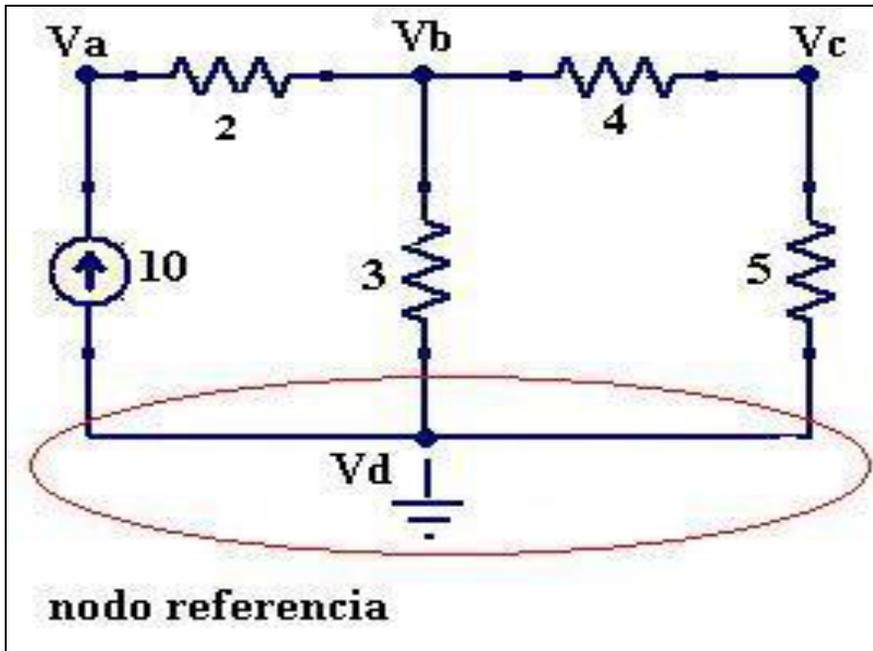


Figura 31: Se elige el nodo con más conexiones como nodo de referencia (cuya tensión es 0) y se asignan 3 variables V_a , V_b y V_c

1. Localice los segmentos de cable conectados al circuito. Estos serán los nodos que se usarán para el método.
2. Seleccione un nodo de referencia (polo a tierra). Se puede elegir cualquier nodo ya que esto no afecta para nada los cálculos; pero elegir el nodo con más conexiones podría simplificar el análisis.
3. Identifique los nodos que están conectados a fuentes de voltaje que tengan una terminal en el nodo de referencia. En estos nodos la fuente define la tensión del nodo. Si la fuente es independiente, la tensión del nodo es conocida. En estos nodos no se aplica la LKC.
4. Asigne una variable para los nodos que tengan tensiones desconocidas. Si la tensión del nodo ya se conoce, no es necesario asignarle una variable.
5. Para cada uno de los nodos, se plantean las ecuaciones de acuerdo con las Leyes de Kirchhoff. Básicamente, sume todas las corrientes que pasan por el nodo e igualelas

- a 0. Si el número de nodos es n , el número de ecuaciones será por lo menos $n - 1$ porque siempre se escoge un nodo de referencia el cual no se le elabora ecuación.
6. Si hay fuentes de tensión entre dos tensiones desconocidas, una esos dos nodos como un supernodo, haciendo el sumatorio de todas las corrientes que entran y salen en ese supernodo. Las tensiones de los dos nodos simples en el supernodo están relacionadas por la fuente de tensión intercalada.
7. Resuelva el sistema de ecuaciones simultáneas para cada tensión desconocida.

2.3.1.2 Ejemplos

Ejemplo 1: Caso básico

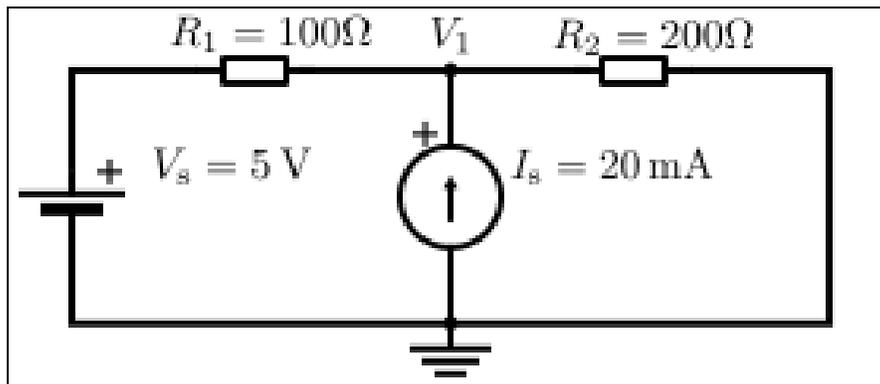


Figura 32: Circuito sencillo con una tensión desconocida V_1 .

La única tensión desconocida en este circuito es V_1 . Hay tres conexiones en este nodo y por esta razón, 3 corrientes a considerar. Ahora se analiza todas las corrientes que pasan por el nodo, así:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Corriente en R1: } \frac{V_1 - V_s}{R_1} \\ \text{Corriente en R2: } \frac{V_1}{R_2} \\ \text{Corriente en Is: } I_s = -I_s \end{array} \right. \quad \dots (76)$$

Con ley de corrientes de Kirchhoff (LCK), tenemos:

$$\frac{V_1 - V_S}{R_1} + \frac{V_1}{R_2} - I_S = 0 \quad \dots (77)$$

Se resuelve con respecto a V_1 :

$$V_1 = \left(\frac{V_S}{R_1} + I_S \right) : \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad \dots (78)$$

Finalmente, la tensión desconocida se resuelve sustituyendo valores numéricos para cada variable. Después de haber obtenido estas ecuaciones y conocer cada tensión, es fácil calcular cualquier corriente desconocida.

$$V_1 = \left(\frac{5 \text{ V}}{100 \Omega} + 20 \text{ mA} \right) : \left(\frac{1}{100 \Omega} + \frac{1}{200 \Omega} \right) \approx 4.667 \text{ V} \quad \dots (79)$$

Ejemplo 2

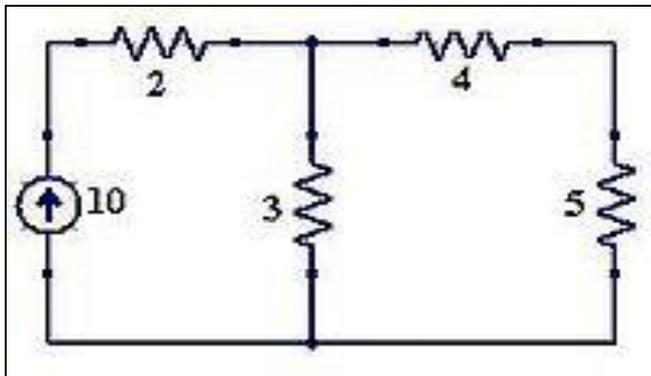


Figura 33: Gráfico del Ejemplo 2

Ejemplo: Del circuito de la figura 34 debemos hallar los voltajes en sus diferentes nodos'

Solución:

1. Se localizan todos los nodos del circuito.
2. Se busca el nodo con más conexiones y se le llama nodo de referencia V_d (Figura 5).
3. No hay fuentes de tensión.
4. Se le asignan variables a los nodos V_a , V_b y V_c
5. Se plantean las ecuaciones según las **leyes de Kirchhoff**, así:
 - Para calcular el voltaje en el nodo V_a , decimos que la resistencia de 2Ω tiene la polaridad de la Figura 5. Así

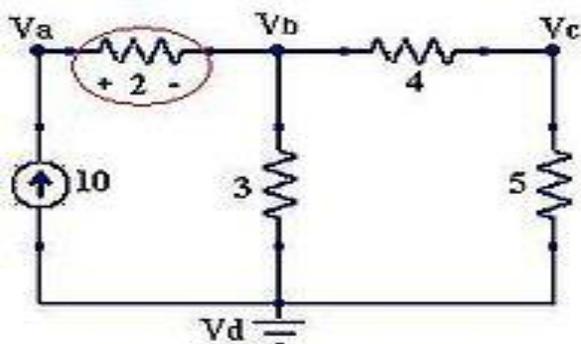


Figura 34.

$$\frac{V_a - V_b}{2} = 10 \quad \dots (80)$$

simplificando:

$$\frac{1}{2}V_a - \frac{1}{2}V_b = 10 \quad \dots (81)$$

Para calcular el voltaje en el segundo nodo (V_b) las resistencias que van a dicho nodo tendrán la polaridad de la Figura 6:

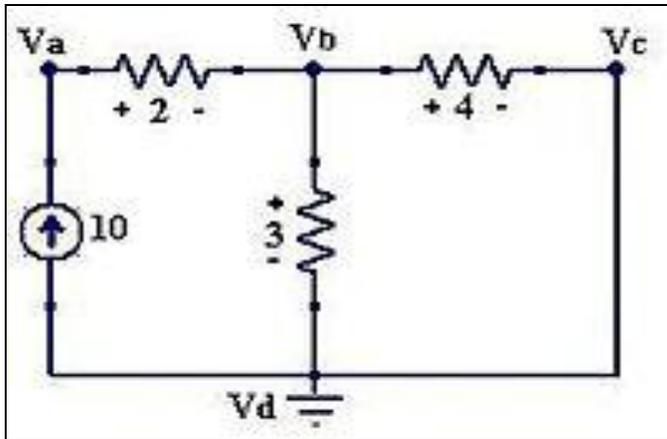


Figura 35

$$\frac{V_b - V_a}{2} + \frac{V_b}{3} + \frac{V_b - V_c}{4} = 0 \quad \dots (82)$$

factorizando obtenemos

$$-\frac{1}{2}V_a + \frac{13}{12}V_b - \frac{1}{4}V_c = 0 \quad \dots (83)$$

Para la polaridad del nodo V_c asumimos así:

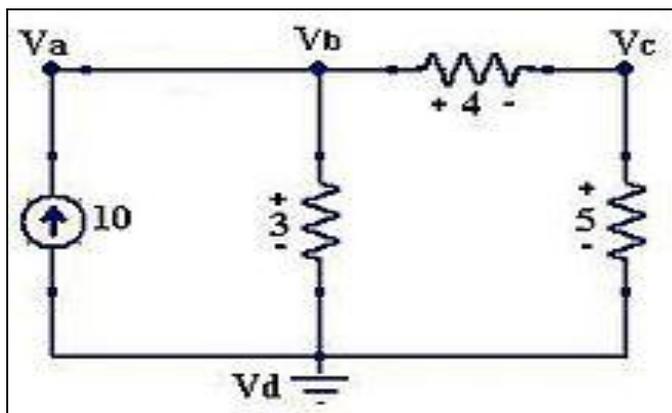


Figura 36

$$\frac{V_c - V_b}{4} + \frac{V_c}{5} = 0 \quad \dots (84)$$

factorizando obtenemos:

$$-\frac{1}{4}V_b + \frac{9}{20}V_c = 0 \quad \dots (85)$$

Sistema de ecuaciones: Obtenemos un sistema de ecuaciones del cual podemos determinar los valores de los voltajes en los nodos.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}V_a - \frac{1}{2}V_b = 10 \\ -\frac{1}{2}V_a + \frac{13}{12}V_b - \frac{1}{4}V_c = 0 \\ -\frac{1}{4}V_b + \frac{9}{20}V_c = 0 \end{cases} \quad \dots (86)$$

Solucionando el sistema lineal, nos da como resultado los voltajes: $V_a = 42.5V$,
 $V_b = 22.5V$ y $V_c = 12.5V$... (87)

2.3.1.3 Circuitos con fuente de voltaje independiente y dependiente real. Formula general de método de las nodos. Ejemplos.

Circuito con fuente independiente

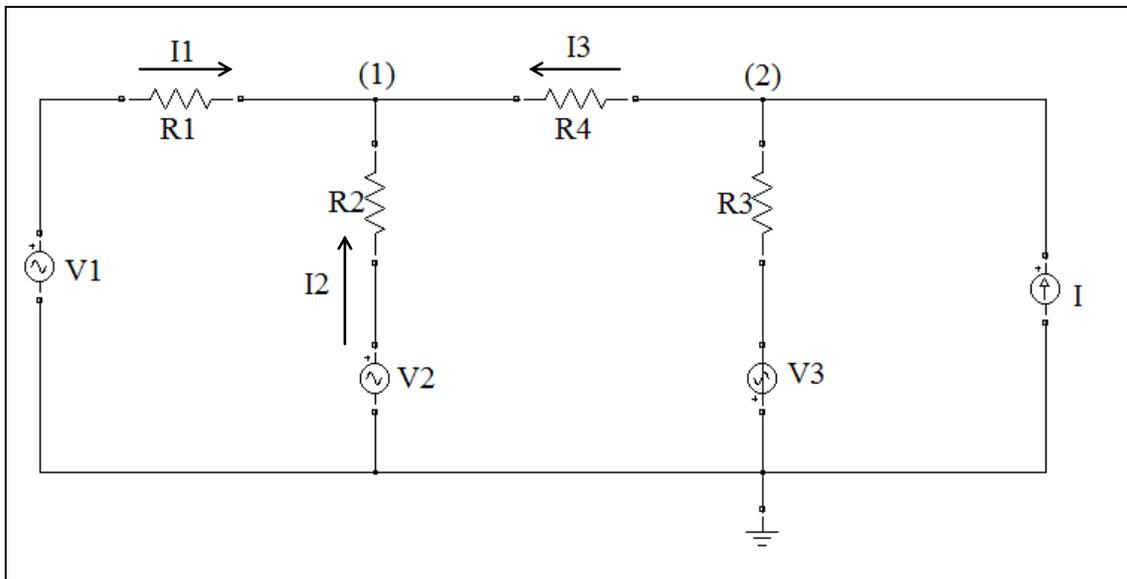


Figura 37. Circuito con fuente independiente

Formula general

$$(1) \quad \varphi_1 (G_1 + G_2 + G_4) - \varphi_2 (G_4) = V_1 G_1 + V_2 G_2 \quad \dots (88)$$

$$(2) \quad -\varphi_1 (G_4) + \varphi_2 (G_4 + G_3) = -V_3 G_3 + I \quad \dots (89)$$

Aplicado $\sum I = 0$ $I_1 + I_2 + I_3 = 0$... (90)

$$(-\varphi_1 + V_1)G_1 + (-\varphi_1 + V_2)G_2 + (\varphi_2 + \varphi_1)G_4 = 0 \quad \dots (91)$$

$$-\varphi_1 (G_1 + G_2 + G_4) + \varphi_2 (G_4) + V_1 G_1 + V_2 G_2 = 0 \quad \dots (92)$$

Circuitos con fuente de voltaje dependiente real

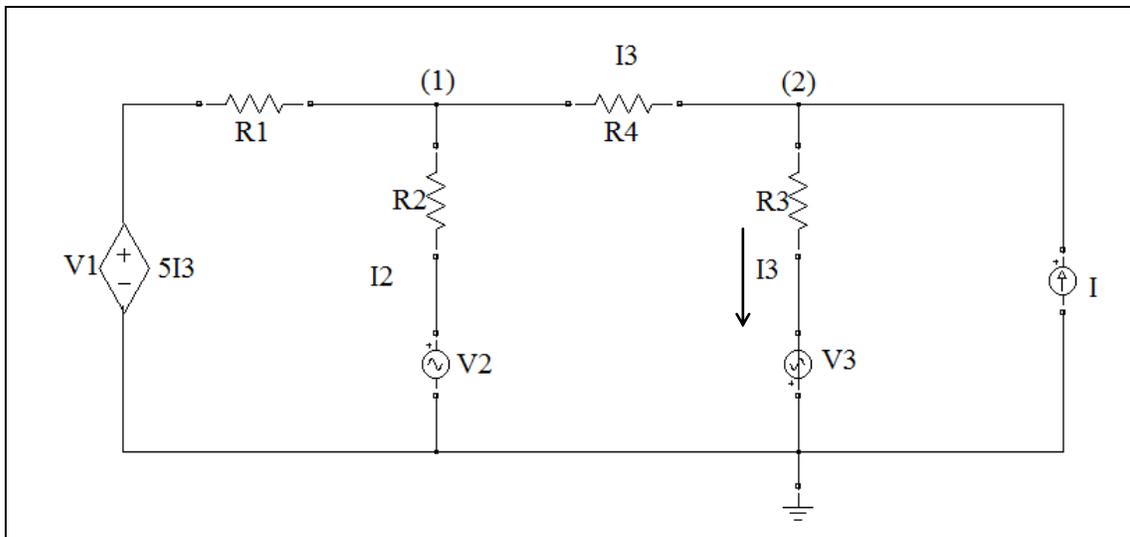


Figura 38. Circuitos con fuente de voltaje dependiente real

Aplicando la fórmula general:

$$(1) \varphi_1 (G_1 + G_2 + G_4) - \varphi_2 (G_4) = (5I_3)G_1 + V_2 G_2 \quad \dots (93)$$

$$(2) I_3 = (\varphi_2 - V_3)G_3 \quad \dots (94)$$

$$(3) -\varphi_1 G_4 + \varphi_2 (G_4 + G_2) = I - V_3 G_3 \quad \dots (95)$$

Circuito con Fuente ideal de voltaje. Ubicación del nodo referencia. Ejemplos

El nodo de referencia se conecta en terminal de la fuente ideal.

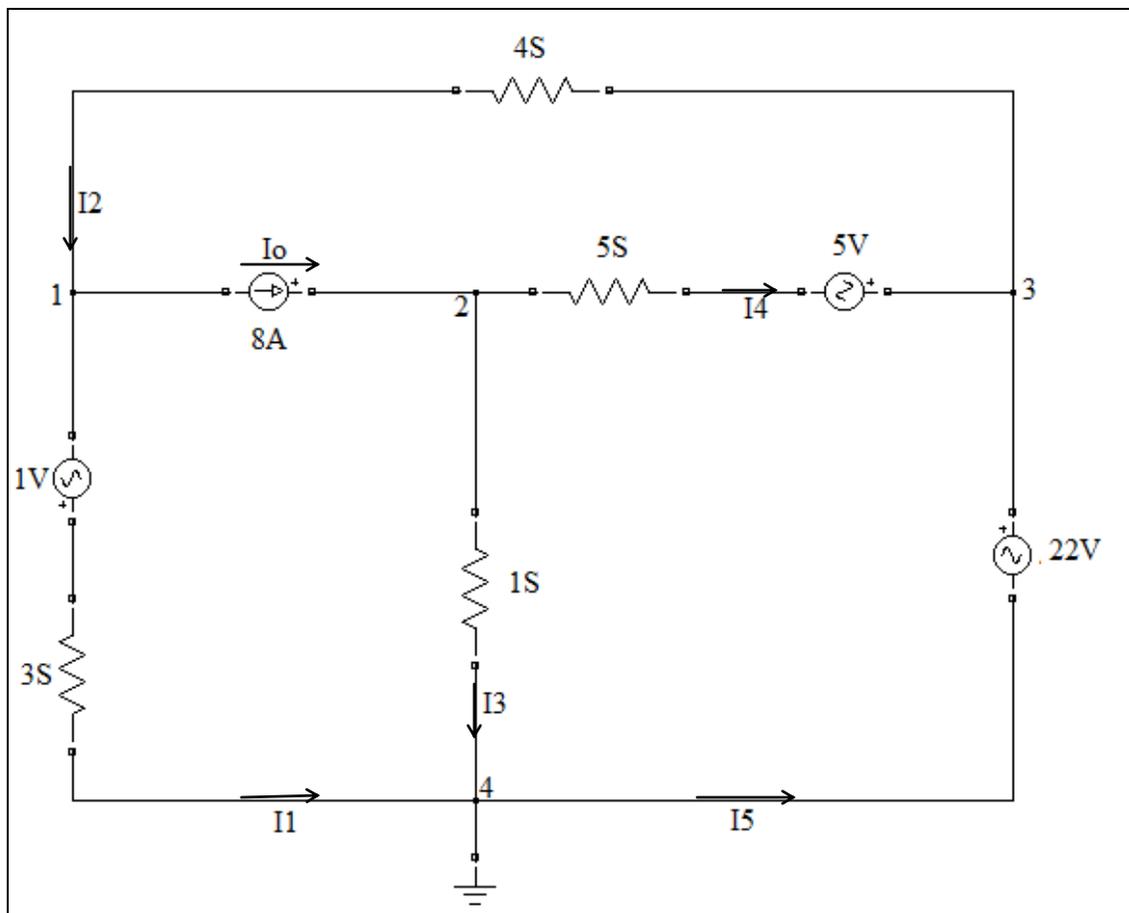


Figura 39. El nodo de referencia se conecta en terminal de la fuente ideal.

$$I_0 = 8A$$

$$I_0 + I_1 + I_2 = 0 \quad \dots (96)$$

Como usted calcula I_5 ?

$$1) I_0 + I_1 - I_2 = 0 \quad \dots (97)$$

$$2) -I_0 + I_3 + I_4 = 0 \quad \dots (98)$$

$$-8 + (V_1 + 1)3 - (V_3 + V_1)4 = 0 \quad \dots (99)$$

$$-8 + V_2(1) + (V_2 - V_3 + 5)(5) = 0 \quad \dots (100)$$

Sabemos que $V_3 = 22V \dots$

Respuesta: $V_1 = 11V$

$$V_2 = 15.5V$$

$$I_3 + I_5 + I_6 = 0 \quad \dots (101)$$

$$I_6 + I_1 + I_4 = 0 \quad \dots (102)$$

$$I_3 + I_5 + I_1 + I_4 = 0 \quad \dots (103)$$

Cuando el nodo de referencia no se conecta a un terminal de la fuente ideal (Fuente Flotando)

La fuente de tensión flotante significa que el nodo de las fuentes no está conectado al nodo de referencia. Cuando una fuente flotante de tensión dependiente o independiente está presente con respecto al nodo de referencia dada, una aplicación directa de LKC a cualquiera de los nodos terminales de las fuentes de tensión es infructuosa. Hay varias formas de manejar esta situación. Un método conveniente es incluir las fuentes y su nodo terminal. La curva envolvente define lo que muchos textos llaman un supernodo.

2.3.2 Método tradicional de nodo

Si se toma el nodo 2 como referencia

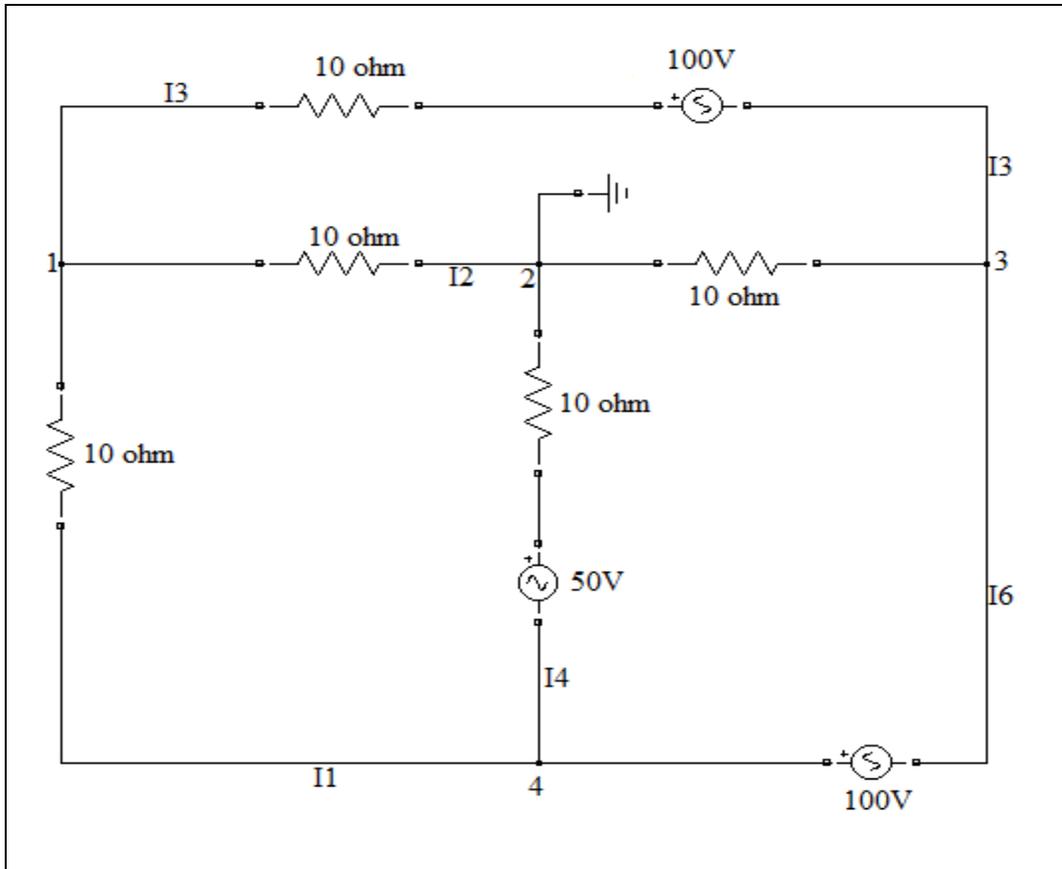


Figura.40 con nodo de referencia.

encuentra: V_1, V_3, V_4 e I_6

Solucion:

$$V_2 = 0$$

$$V_3 + 100V = V_4 \quad \dots (104)$$

$$\text{Nodo 1) } I_2 + I_1 + I_3 = 0 \quad \dots (105)$$

$$\text{Nodo 3) } I_6 - I_5 - I_3 = 0 \quad \dots (106)$$

$$\text{Nodo 4) } -I_1 - I_4 - I_6 = 0 \quad \dots (107)$$

$$I_2 = 0 - V_1 / 10\Omega \quad ; \quad I_1 = V_1 - V_4 / 10\Omega \quad \dots (108)$$

$$I_3 = 0 - V_4 - 50 / 10\Omega \quad ; \quad 0 - I_4(10\Omega) - 50 = V_4 \quad \dots (109)$$

$$I_3 = V_1 - V_3 - 100 / 10\Omega \quad ; \quad I_5 = V_2 - V_3 / 10\Omega \quad \dots (110)$$

$$\text{Supernodo : } I_3 + I_5 + I_1 + I_4 = 0 \quad \dots (111)$$

2.3.3 Metodo de supernodo

2.3.3.1 Fuentes de voltajes flotantes (solo fuente independiente)

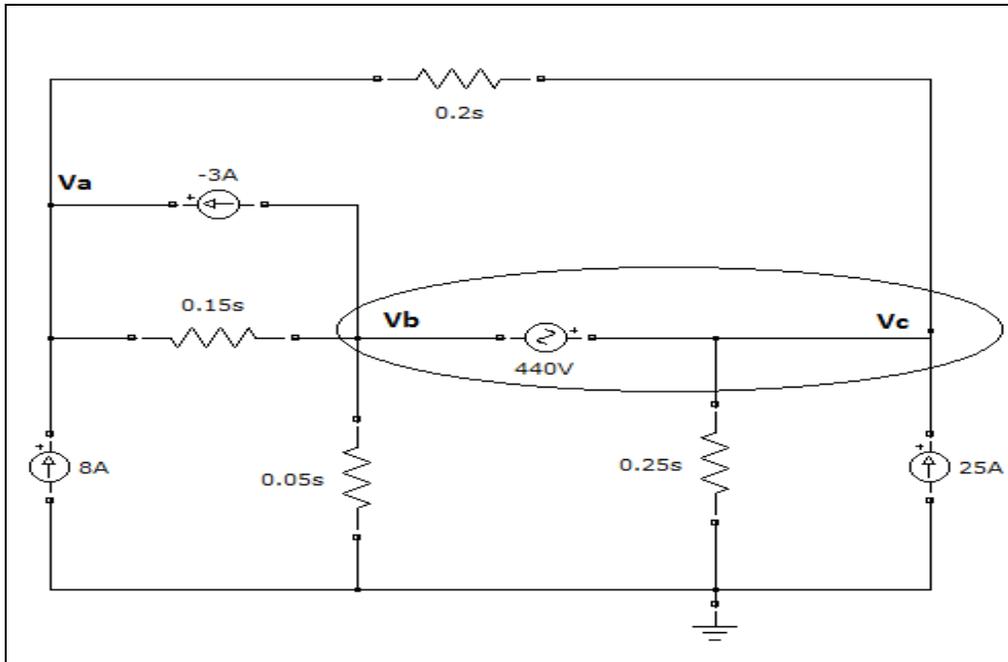


Figura. 41. Fuentes de voltajes flotantes (solo fuente independiente)

Solución:

$$8 + 0,15(V_a + V_b) + 3 + 0,2(V_a + V_c) = 0 \quad \dots (112)$$

$$\text{Nodo 1. } 0,35V_a - 0,15V_b - 0,2V_c = -11 \quad \dots (113)$$

(1) Ecuaciones del supernodo

$$-3 + 0,15 (V_b - V_a) + 0,05V_b + 0,25V_c - 25 + 0,2 (V_c + V_a) = 0 \quad \dots (114)$$

$$-0,35V_a + 0,2 V_b + 0,45V_c = 28 \quad \dots (115)$$

$$(2) \quad V_b + 440 = V_c \quad \dots (116)$$

Resolviendo queda:

$$V_a = -90V$$

$$V_b = -310V$$

$$V_c = 130V$$

Veamos el caso de un circuito con fuentes de voltaje flotantes con fuentes dependiente

Encuentre el voltaje de nodo en los puntos siguientes: V_a , V_b y V_c y la potencia a entregar por la fuente de 30V. El método de solución será la combinación de dos fuente en el supernodo.

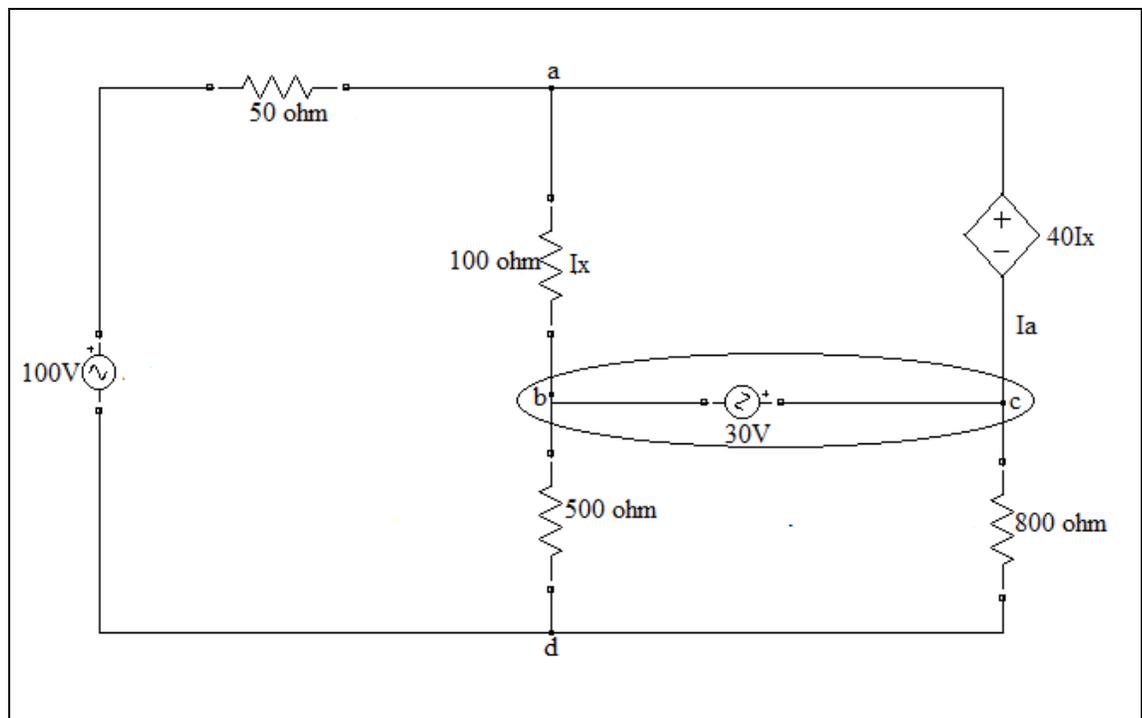


Figura 42. fuentes de voltaje flotantes con fuentes dependiente

$$\text{Supernodo (1)} \quad (V_a - 110) / 50 + I_x - I_x + V_b/500 + V_c/800 \quad \dots (117)$$

$$(3) V_b + 30 = V_c = V_a \quad \dots (118)$$

Sust quedo:

$$1) 0.02V_a + 0.00325V_b = 2.1625V \quad \dots (119)$$

$$V_a - V_b = V_a - V_b - 30 = 40I_x \quad \dots (120)$$

$$I_x = (V_a + V_b) / 100$$

Sust

$$2) 0.6V_a - 0.6V_b = 30 \quad \dots (121)$$

Resolviendo 1 y 2. $V_a = 100V$

$$V_b = 50V$$

$$I_x = 0.5A, \quad i_{bd} = V_b/500 = 0.1A, \text{ entonces } i_{bc} = i_x - i_{bd} = 0.4A \quad \dots (122)$$

$$P_{30} = 30 * i_{bc} = 12W \quad \dots (123)$$

2.3.4 METODO DE LOS NODO MODIFICADO (MNM)

En este método se incluyen en el circuito fuente de corriente como incongnitas. El **MNM** mantiene las voltaje voltajes del **MVN** y elimina sus limitaciones, la mayoría de los programa de análisis de corriente usan esto método.

En el **MNM** las incógnitas son los voltajes en los nodos y los valores de las fuentes de corrientes introducidas, estas fuentes incluyen:

1. Corriente en series con FVI
2. Corriente en series con FVD
3. Corriente en elemento en C.C
4. Corriente de control de F.D
5. Corriente declarada como cantidad de salida

Nota: El punto 3, es un caso especial de punto 1 porque en un elemento en corto circuito el voltaje de la fuente independiente es cero.

Procedimiento para escribir la ecuación del método modificado de nodo.

Paso 1: para cada elemento x , que es I_x actual, ha sido elegida como una corriente auxiliar, reemplazar temporalmente ese elemento por una fuente de corriente independiente que tenga valor I_x . Además, reemplace cada βI_x fuentes de corriente controlada por corriente por fuentes de corriente independientes que tienen el valor de βI_x . Escribe la ecuación nodal convencional para MNM

Paso 2: para cada elemento x que es I_x actual ha sido elegida como una corriente auxiliar, escribir una ecuación que describe su relación constitutiva en el circuito original del supernodo

Paso 3: combinar la ecuación del paso 1 y el paso 2 en la forma de una única matriz lineal.

Vemos un ejemplo con fuente independiente

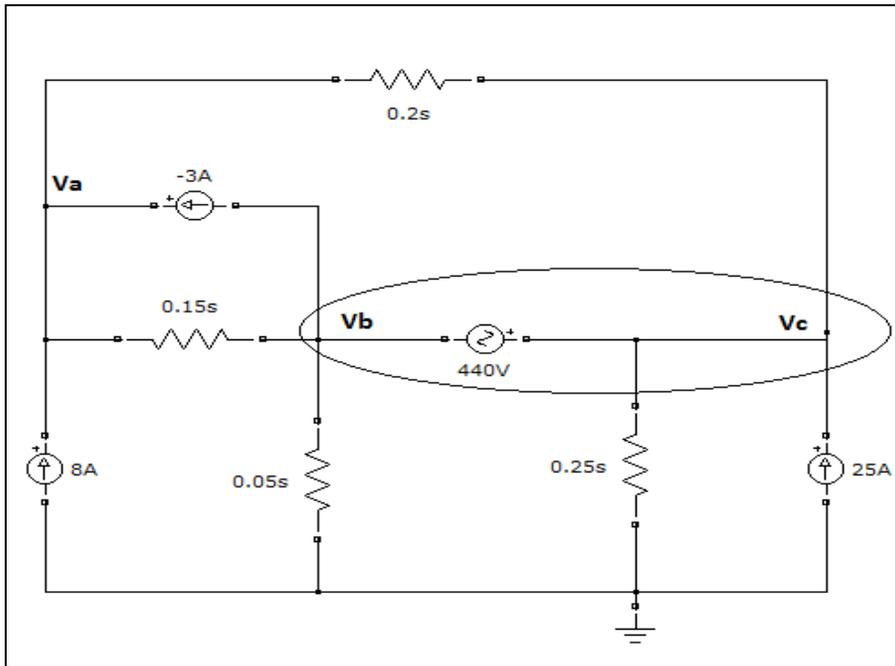
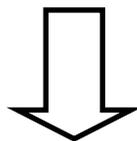


Figura 43. con fuente independiente



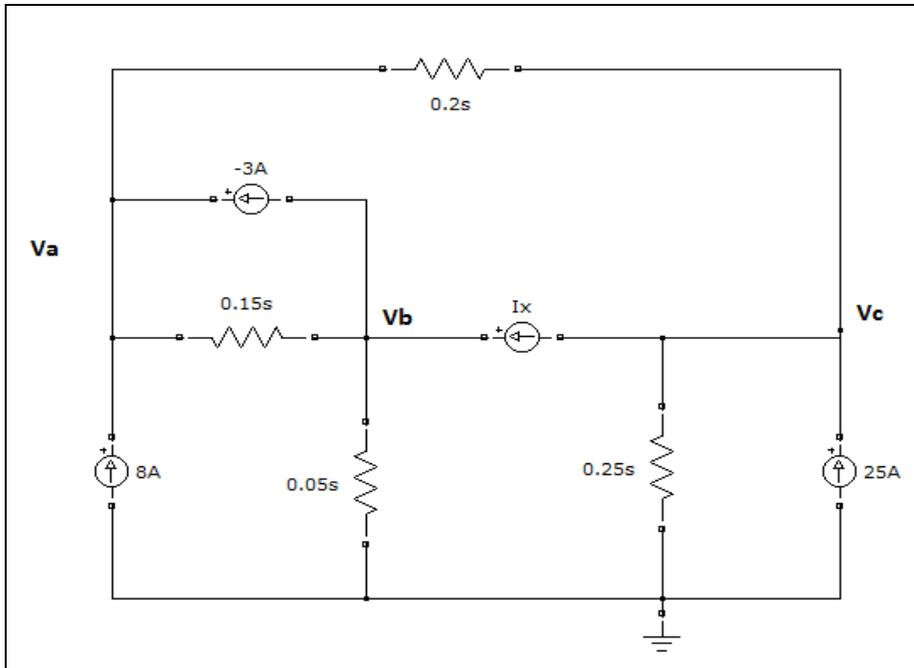


Figura.44.MNM

Se ha reemplazado la fuente de 440 V por una fuente de corriente I_x la que se considera la misma que circula por la fuente de voltaje de 440 V. El circuito solamente contiene fuentes de corrientes.

Paso 1: Escribir ecuaciones nodales de MNM. Por este circuito, el MMN sólo requiere que reemplacemos temporalmente las fuentes de tensión de 440 V por una fuente de corriente independiente, nombrada I_x . Esta I_x es la verdadera corriente que fluye a través de la fuente de 400V independiente (en el paso 2 vamos a reintroducir la restricción de 440 V entre los nodos C y B inducida por esta fuente de tensión.). Esta sustitución resulta en el MMN como se muestra en la figura a continuación, aquí sólo contienen resistencias y fuentes de corriente independientes. Después del procedimiento, se obtienen las ecuaciones nodales siguientes:

Resolviendo las ecuación de nodos.

$$1. 0.35V_a - 0.15V_b - 0.2V_c = -11 \quad \dots (124)$$

$$2. -0.15V_a - 0.2V_b - I_x = 3 \quad \dots (125)$$

$$3. -0.2V_a + 0.45V_c + I_x = 25 \quad \dots (126)$$

Paso 2: escribir relación constitutiva del elemento del circuito original, que fueron sustituidas por fuentes de corriente independientes en MNM. La relación constitutiva de la fuente de voltaje de 440V es:

$$V_c - 440 = V_b \quad \dots (127)$$

Paso 3. Escribir la ecuación en forma de matriz.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.35 & -0.15 & -0.2 & 0 \\ -0.15 & 0.2 & 0 & -1 \\ -0.2 & 0 & 0.45 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \\ I_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 3 \\ 25 \\ 440 \end{pmatrix}$$

Resolviendo: $V_a = -90 \text{ V}$

$$V_b = -310 \text{ V}$$

$$V_c = -130 \text{ V}$$

$$I_x = -51.5^a$$

Veremos que la matriz resultante del MNM es de mayor dimensión que de la método de supernodo. Uno puede preguntarse si existe alguna ventaja para el MMN. La respuesta es, sí. En primer lugar, el método de supernodo, como se ha descrito anteriormente, se basa en la inspección de reconocimiento del supernodo. En segundo lugar, la MMN es sistemático y de fácil adaptación a la aplicación informática.

- No existe la necesidad de el supernodo
- El método de MNM es sistemático y es fácil programación, nótese que las ecuaciones se hallar directamente
- Veamos la importancia de las ecuaciones $V_c - 440 = V_b$ donde se introduce nuevamente la fuente ideal de voltaje

Vemos un ejemplo con fuente dependiente

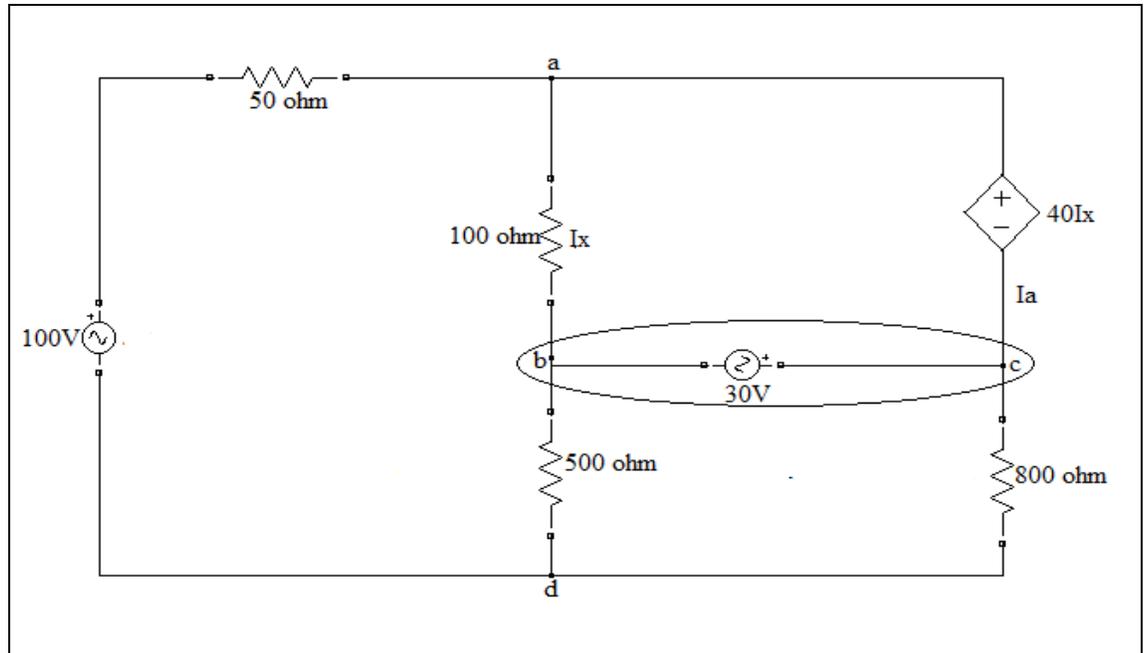


Figura 45. con fuente dependiente

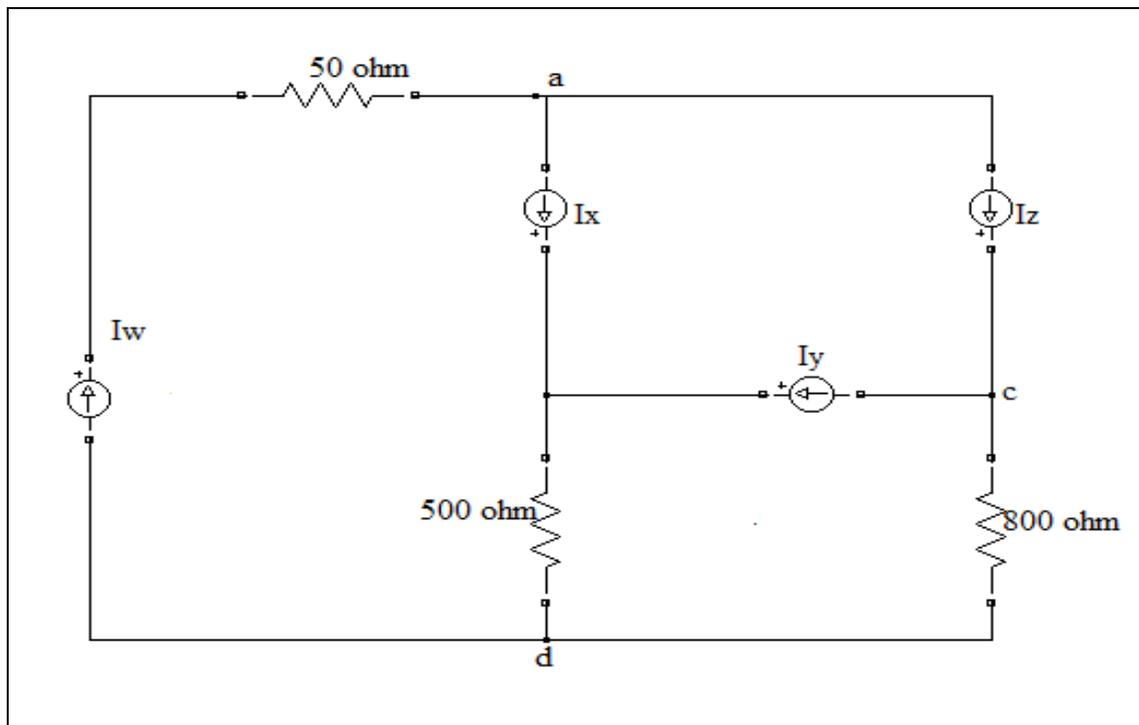


Figura 46.MNM con fuente dependiente

Se ha reemplazado la fuente dependiente e independiente de voltaje por una fuente de corriente I_w , I_y , e I_z . En adición a esto, se ha reemplazado la rama asociado con la fuente dependiente de voltaje por la fuente independiente I_x , ahora se puede escribir la ecuación de nodo modificado

Ecuación del método de nodo modificado

Paso 1.

$$I_w + 0.02(V_e - V_a) = 0.02V_e - 0.02V_a + I_w = 0 \quad \dots (128)$$

Nodo a :

$$0.02(V_a - V_e) + I_x + I_z = 0 \quad \dots (129)$$

Nodo b and c :

$$0.002V_b - I_x - I_y = 0 \quad \dots (130)$$

$$0.00125V_c + I_y + I_z = 0 \quad \dots (131)$$

Paso2. Escribiendo la relación constitutiva por el elemento del circuito original, o sea, lo que reemplazamos por fuente independiente en nodo modificado, entonces la relación constitutiva de 110V de la fuente independiente de voltaje.

$$\diamond V_e = 110$$

Mientras con la fuente independiente de 30V

$$\diamond -V_b + V_c = 30 \quad \dots (131)$$

Y de la fuente dependiente

$$\diamond V_a - V_c - 40 I_x = 0 \quad \dots (132)$$

Por ultimo, la fuente de corriente de la rama de I_x

$$\diamond V_a - V_b - 100I_x = 0 \quad \dots (133)$$

Aplicando Matlab o matices se observa que:

$$V_e = 110V, V_a = 100V, V_b = 50V, V_c = 80V, I_w = -0.2A, I_x = 0.5A, I_y = -0.4A,$$

$$I_y = -0.4A \text{ y } I_z = -0.3A$$

2.4 TEOREMA DE THÉVENIN

El teorema de Thévenin debe su nombre al ingeniero telegrafista francés E. León Thévenin, quien en 1883, en *Annales Télégraphiques*, formuló el teorema de la siguiente manera: (James Ley, 1963)

$$i = \frac{V - V'}{r + R} \quad \dots (134)$$

La declaración anterior cubre solamente el caso de corriente directa constante y debe ser entendido de la siguiente manera: si una resistencia lineal R_L (carga) es conectada entre dos puntos de una red de resistencias lineales con cualquier número de fuentes independientes, la corriente a través de R_L puede ser encontrada reemplazando el resto de la red por un circuito equivalente que consiste en una fuente de tensión independiente en serie con una resistencia. La tensión de la fuente será igual a la tensión de circuito abierto a través de los terminales de carga cuando la carga ha sido desconectada de la red y la resistencia es la resistencia interna de la red que se observa desde los terminales de carga con todas las fuentes independientes igualadas a cero.

Cuando el concepto de impedancia fue introducido en la Ingeniería Eléctrica, el teorema de Thévenin fue generalizado al caso del estado sinusoidal constante, o lo que se conoce como corriente alterna.

Muchos autores en la literatura enuncian el teorema de Thévenin de diferentes maneras. Entre muchos otros ejemplos se tiene los siguientes:

a) “Supongamos que nos dan un circuito y que deseamos encontrar la corriente, voltaje o la potencia en alguna resistencia de la red a la cual le llamaremos carga. El teorema de Thévenin nos dice que podemos reemplazar toda la red, excluyendo la carga, por un circuito equivalente que contenga sólo una fuente de voltaje independiente en serie con una

resistencia de tal forma que la relación corriente-voltaje en la carga se conserve sin cambio.”²

b) “Todo dipolo activo lineal puede ser sustituido por una fuente real de tensión. El valor y la polaridad de la fuente son iguales a la tensión que existe entre los terminales del dipolo cuando este se encuentra en circuito abierto. El resistor conectado en serie con dicha fuente, tiene una resistencia igual a la equivalente entre los terminales del dipolo cuando se han desactivado todas las fuentes internas, o sea, cuando las fuentes de tensión se han sustituido por cortocircuitos y las de corrientes por circuitos abiertos.

En la definición anterior se hace alusión a que cualquier red eléctrica de dos terminales, compuesta por resistencias lineales, puede ser reemplazada por una fuente de tensión E_0 en serie con una resistencia R_i , donde E_0 es la tensión a circuito abierto entre los dos terminales y R_i es la resistencia de la red cuando las fuentes son reducidas a cero.

En la definición anterior, el autor considera un circuito lineal, el cual se divide en dos redes eléctricas A y B conectadas por conductores ideales. Al separar la red B (carga) de A, entonces en los extremos de A aparecerá una diferencia de potencial V_{oc} o tensión a circuito abierto y todas las tensiones y corrientes en la red B permanecerán constantes si en A se anulan todas las fuentes independientes.

Desde cualquier punto de vista, todos los autores, incluso el propio Thévenin, concuerdan en que si se examina cualquier red desde un par de terminales, se sabe que, con respecto a esos terminales toda la red es equivalente a un circuito simple consistente en una fuente de tensión independiente en serie con una resistencia. Siendo la tensión de la fuente igual a la tensión a circuito abierto, o sea, la tensión entre los terminales cuando se excluye la carga de la red original y la resistencia coincide con la resistencia que se observa desde los propios terminales con las fuentes independientes anuladas. Este teorema es un resultado muy importante y constituye una herramienta muy potente en el análisis de circuitos eléctricos, tanto en corriente directa como en corriente alterna.

Cuando Thévenin expuso su teorema, Siglo XIX, no se conocían, entonces, los modelos matemáticos (fuentes dependientes) por los que son representados, hoy en día, elementos que surgieron en el siglo XX, como los transistores bipolares, de efecto de campo,

amplificadores, entre otros. Sin embargo el teorema ha sido extendido, por diversos autores, al caso en que la red bajo análisis contenga elementos que se representan por fuentes dependientes o controladas. Para estos casos también es aplicable el teorema, pero se diferencia en la manera en que este se aplica.

2.4.1 FORMAS EN LAS QUE SE APLICA EL TEOREMA DE THÉVENIN

Antes de entrar a analizar los posibles casos en los que el teorema de Thévenin es aplicado, es necesario definir y representar algunos términos que serán empleados.

Se denomina carga, en un circuito eléctrico, a aquella resistencia, en el caso de corriente directa, o a aquella impedancia, en el caso de corriente alterna, a la cual se le desea determinar la corriente que circula por ella y/o la tensión a través de sus terminales. La figura 1 muestra este concepto para el caso de corriente directa. (David Irwin, 1997)

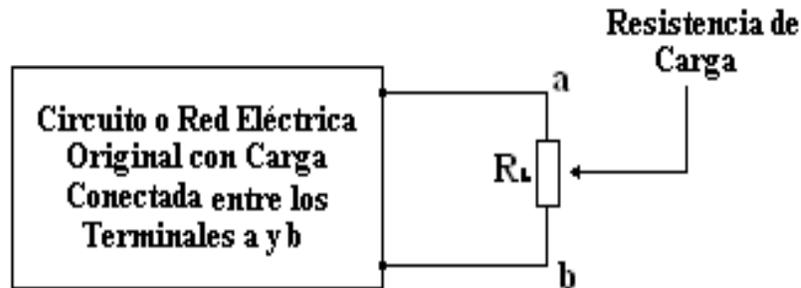


Figura 47. Circuito con resistencia R_L conectada a los terminales de carga a y b.

La figura 2 muestra el concepto de tensión a circuito abierto (V_{ca}), la cual no es más que la tensión que aparece entre los terminales de carga cuando esta se ha desconectado del resto de la red.

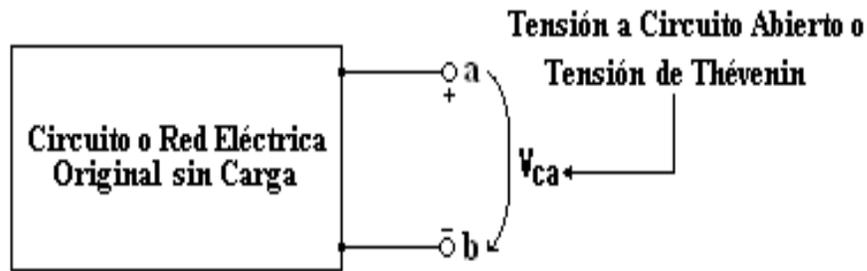


Figura 48. Circuito con la carga R_L desconectada de la red, y representación de la tensión a circuito abierto.

La figura 49 representa el concepto de corriente de cortocircuito (I_{cc}), la cual no es más que la corriente que circula desde un terminal de carga "a" hacia el otro "b", cuando la carga es desconectada de la red y ambos terminales son cortocircuitados.

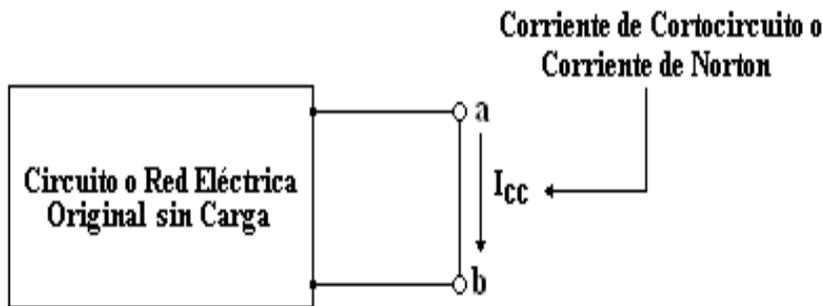


Figura 49. Circuito con los terminales de carga cortocircuitados y representación de la corriente de cortocircuito.

La forma en la que el teorema de Thévenin se aplica depende de la estructura de la red eléctrica original bajo investigación. Para su aplicación, los autores, en sus textos, consideran fundamentalmente tres casos.

- Caso 1. Redes que sólo contiene fuentes independientes.
- Caso 2. Redes que sólo contiene fuentes dependientes.

- Caso 3. Redes que contienen los dos tipos de fuentes.

Cada uno de los casos anteriores tiene su modo particular de solución.

Caso 1. Si en la red original sólo existen fuentes independientes, el procedimiento para encontrar el circuito equivalente de Thévenin, entre dos terminales cualesquiera de la red, consiste en determinar la tensión entre los terminales sin carga, o sea, la tensión a circuito abierto (V_{ca}) o tensión de Thévenin (V_{Th}) y determinar la resistencia equivalente de Thévenin (R_{Th}) que se observa entre estos terminales, anulando todas las fuentes (las fuentes de tensión independientes cuando son anuladas se sustituyen por cortocircuitos y las de corrientes por circuitos abiertos). Para estos casos el circuito equivalente (fig. 4) consistirá en una fuente de tensión independiente, de valor V_{Th} , conectada en serie con una resistencia equivalente de valor R_{Th} . (Olivera, 1989)

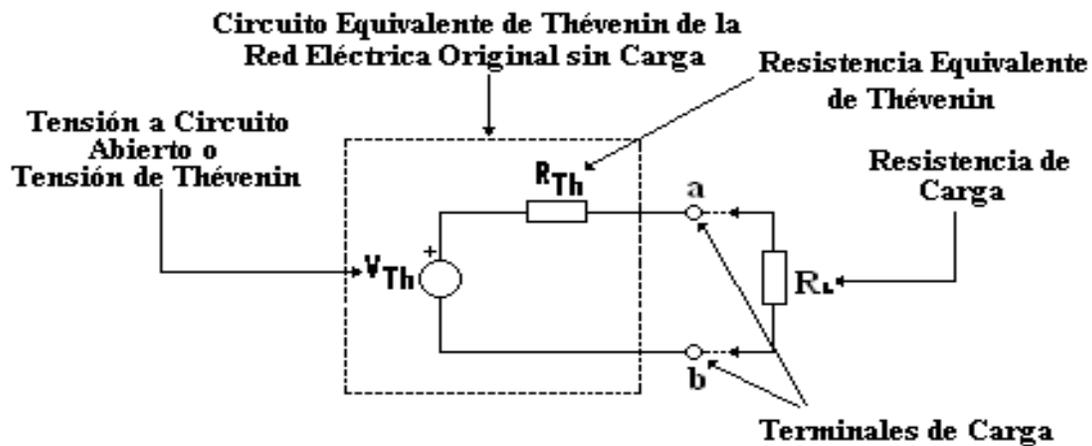


Figura 50. Circuito equivalente de Thévenin de una red que sólo contiene fuentes independientes (carga R_L conectada).

Caso 2. Si en la red original sólo existen fuentes dependientes, la tensión a circuito abierto y la corriente de cortocircuito (I_{cc}) o corriente de Norton (I_N) serán cero, por lo que la resistencia equivalente de Thévenin no se puede determinar por la relación:

$$R_{Th} = \frac{V_{Th}}{I_N} \quad \dots (135)$$

Como es una relación indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$. En estos casos se aplica una fuente independiente externa, de tensión (1 V) o de corriente (1 A), entre los terminales, y se determina, para el caso de la fuente de tensión, la corriente I que circula por ella. La resistencia equivalente de Thévenin será:

$$R_{Th} = \frac{1}{I} \quad \dots (136)$$

Para el caso de aplicar una fuente externa de corriente, lo que se halla es la tensión V a través de ella. La resistencia equivalente de Thévenin será:

$$R_{Th} = 1 \cdot V \quad \dots (137)$$

Por tanto, el circuito equivalente de Thévenin para este caso será solamente la resistencia equivalente de Thévenin como muestra la figura 5. (Neal P., 1960)

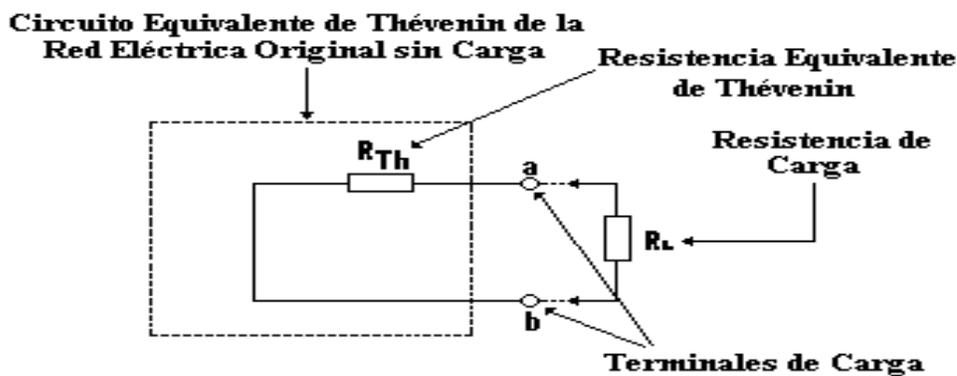


Figura 51. Circuito equivalente de Thévenin de una red que sólo contiene fuentes dependientes (carga R_L conectada).

Caso 3. Si en la red original están presentes los dos tipos de fuentes, el circuito equivalente de Thévenin es el mismo que en el caso 1 (fig. 50). La diferencia radica en la manera de encontrar la resistencia equivalente de Thévenin. Para este caso, la resistencia equivalente de Thévenin se obtiene a partir de la expresión (135), es decir, se obtendrá a partir del

cociente entre la tensión a circuito abierto (V_{ca}) o tensión de Thévenin (V_{Th}) y la corriente de cortocircuito (I_{cc}) o corriente de Norton (I_N).

2.4.2 CONDICIONES PARA APLICAR EL TEOREMA DE THÉVENIN

En la sección anterior se expusieron los diferentes casos para los cuales el teorema de Thévenin es aplicado en dependencia de la estructura de la red original. Pero, cabe la pregunta, ¿existen condiciones de aplicación del teorema de Thévenin?

Como teorema al fin, este no está exento de restricciones, bien definidas todas por los autores en la literatura especializada en el tema. Muchos plantean y exigen, independientemente de que la carga sea lineal o no lineal, que para el uso del teorema de Thévenin en cualquiera de los tres casos vistos anteriormente, la red eléctrica original y la carga deben cumplir algunos requisitos, sin los cuales no se podría utilizar este teorema. Estos requisitos son:

- 1) La red eléctrica original, sin la carga, y que puede contener tanto fuentes dependientes como independientes, debe ser una red completamente lineal, es decir, todos los elementos circuitales que la componen deben ser elementos lineales. Dentro de los más conocidos están las resistencias, capacitores o condensadores y los inductores o bobinas.
- 2) Si la red eléctrica original contiene fuentes dependientes, el teorema no podrá ser aplicado a aquella parte del circuito donde se encuentren tanto la incógnita del problema como la variable de dependencia de la fuente dependiente. Es decir, no se podrá separar la variable de dependencia, de la cual depende una fuente dependiente en particular, de la porción de la red que contiene dicha fuente.

Los requisitos anteriores son los que se plantean en la literatura especializada y sobre la base de los cuales se ha desarrollado, utilizado y demostrado el teorema de Thévenin. Por cuanto, cuando se formule el teorema, deben exponerse también las condiciones sobre las que se puede utilizar. Sin embargo el teorema, desde el punto de vista de los autores de este

análisis, no está completo, pues existe un requisito que no se ha tenido en consideración desde los propios inicios del teorema ni por los subsiguientes autores que lo han tratado de manera eficiente.

2.4.3 ¿SERÁ SIEMPRE APLICABLE EL TEOREMA DE THÉVENIN?

Para explicar lo que se pretende en este apartado se propone el análisis de los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1. Para la red eléctrica que se muestra en la figura 52, se desea encontrar el valor de la corriente I utilizando el teorema de Thévenin.

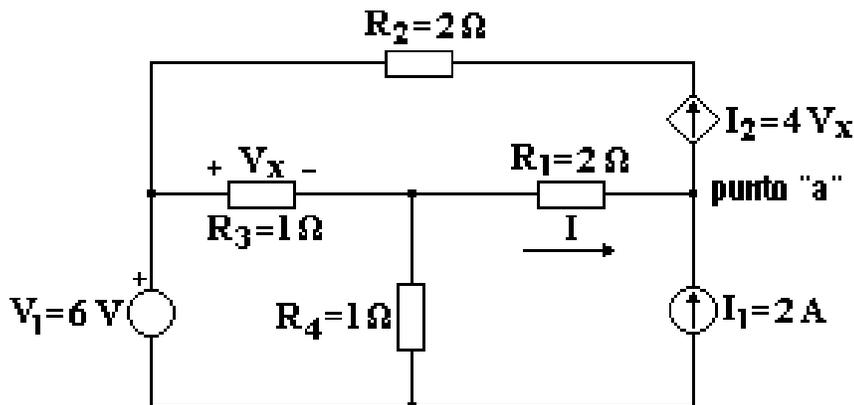


Figura 52. Circuito correspondiente al ejemplo 1.

Lo primero que se debe hacer es comprobar si las condiciones de aplicación del teorema se satisfacen:

- 1) La red eléctrica bajo estudio contiene una fuente dependiente (I_2) y dos fuentes independientes (I_1 y V_1) y es una red completamente lineal pues todos los elementos circuitales que la conforman son lineales (resistencias).

2) La red contiene una fuente de corriente dependiente de la tensión V_x a través de los terminales de la resistencia R_3 y la variable que se desea encontrar es la corriente I que circula por la resistencia R_1 . Por tanto la resistencia R_1 será la carga en este caso, y al desconectarla del circuito la dependencia entre la fuente dependiente y su variable permanece dentro de la red a analizar (fig. 53).

Como se ha observado las dos condiciones se cumplen, por lo que no existe ningún inconveniente para aplicar el teorema.

Después de comprobar si las condiciones se satisfacen, se procede a identificar el caso en cuestión. Como se observa en la figura 53 y se ha descrito con anterioridad, el circuito a analizar contiene los dos tipos de fuentes, por lo que la metodología que se desarrollará para su solución es similar al caso 3 explicado.

En la solución, primero se desconecta la carga del resto de la red y se determina la tensión a circuito abierto o tensión de Thévenin (fig. 53):

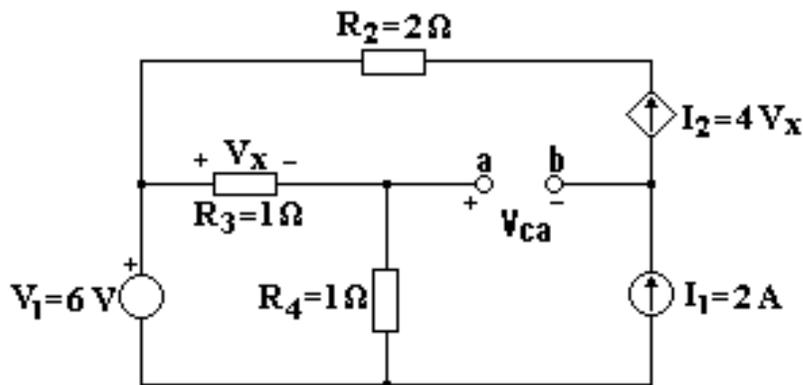


Figura 53. Circuito con carga desconectada y representación de la tensión a circuito abierto.

Al desconectar la carga del resto de la red el punto “a” en el circuito de la figura 6, deja de ser un nodo en la figura 53, esto hace que las fuentes de corriente I_1 e I_2 queden conectadas en serie, lo cual **no es posible**, debido a que solo pueden estar conectadas en serie,

teóricamente, si son iguales. Si no son iguales aparece, como en este caso, **una conexión absurda**.

En el caso de dos fuentes de corriente independientes, conectadas en serie y de diferente valor cada una, es evidente que la conexión que aparece es totalmente absurda. Cuando existen, como en este caso, una fuente de corriente dependiente en serie con una fuente de corriente independiente, la conexión absurda no resulta tan evidente. Se puede pensar que si las fuentes I_1 e I_2 están en serie, entonces ellas son iguales, por lo que entregarían la misma corriente. Esto se haría planteando que:

$$I_1 = I_2 \quad \dots (138)$$

De donde se obtiene que $v_x = 0.5 \text{ V}$.

O sea, se podría asumir que como las fuentes están en serie, ellas entregan la misma corriente, al igualarse se puede determina la variable de dependencia de la fuente dependiente. Ahora es necesario comprobar si el valor obtenido para V_x es cierto o no.

Las resistencias de 1Ω (R_3 y R_4), al desconectar la carga del resto de la red, quedan conectadas en serie (fig. 53), por tanto se puede aplicar un divisor de tensión sencillo para determinar V_x .

$$V_x = 6 \cdot \frac{1}{1+1} = 3 \text{ V} \quad \dots (6)$$

Como se aprecia, los resultados obtenidos para la variable de dependencia V_x **son totalmente diferentes**, por lo que se demuestra que no es posible realizar el análisis para encontrar la tensión a circuito abierto V_{ca} , quedando evidenciado que para casos como estos, donde desconectar la carga del resto de la red conduce a una **conexión absurda**, no es válido aplicar el teorema de Thévenin.

No solo al desconectar la carga y determinar la tensión a circuito abierto se pueden encontrar conexiones absurdas. También al cortocircuitar los terminales de carga para determinar la corriente de cortocircuito pueden aparecer conexiones absurdas.

Ejemplo 2. Dada la red eléctrica de la figura 54, se desea hallar el valor de la tensión V utilizando el teorema de Thévenin.

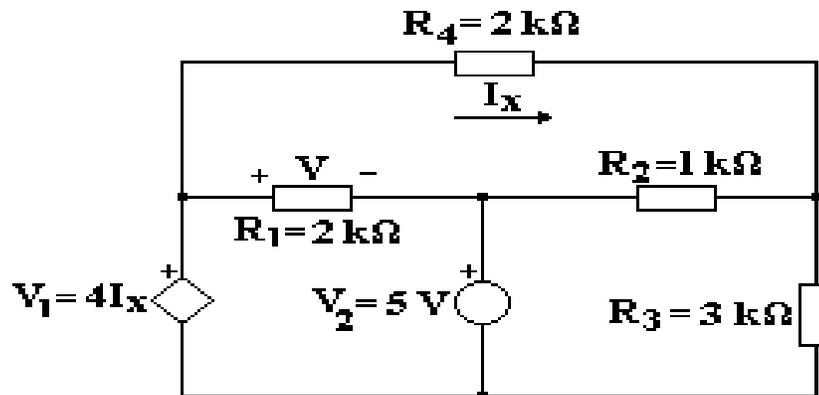


Figura 54. Circuito correspondiente al ejemplo 2.

Similar al ejemplo anterior, es necesario comprobar si las condiciones de aplicación del teorema se satisfacen:

- 1) La red eléctrica bajo estudio contiene una fuente dependiente (V_1) y una fuente independiente (V_2) y es una red completamente lineal pues todos los elementos circuitales que la conforman son lineales (resistencias).
- 2) La red contiene una fuente de tensión dependiente de la corriente I_x , que circula por la resistencia de R_4 , y la variable que se desea encontrar es la tensión V a través de los terminales de la resistencia R_1 . Por tanto la resistencia R_1 será la carga en este caso, y al desconectarla del circuito la dependencia entre la fuente dependiente y su variable permanece dentro de la red a analizar (fig. 55).

Después de comprobar que las condiciones se satisfacen, se procede a identificar el caso en cuestión. Como se observa en la figura 9 el circuito a analizar contiene los dos tipos de

fuentes, por lo que la metodología que se seguirá para su solución es similar al ejemplo 1 (caso 3).

En la solución, primero se desconecta la carga del resto de la red y se determina la tensión a circuito abierto o tensión de Thévenin. (William H., 1986.)

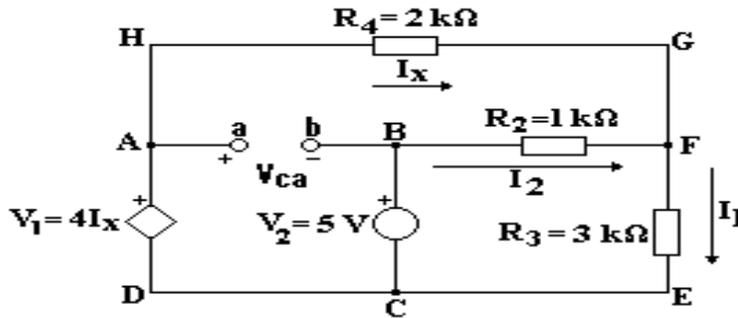


Figura 55. Circuito con carga desconectada y representación de la tensión a circuito abierto.

Al desconectar la carga del resto de la red, el circuito resultante no presenta ninguna conexión absurda. Es decir, no quedan fuentes de corrientes en serie ni fuentes de tensión en paralelo. Por tanto se puede determinar la tensión a circuito abierto sin dificultades. Para esto se usará la Ley de Kirchhoff de Voltaje (*LKV*) y la Ley de Kirchhoff de Corriente (*LKC*), a partir de la siguiente metodología.

Primero: Se escribe una *LKV* en la malla ABCDA.

$$V_1 - V_{ca} - V_2 = 0 \quad \dots (139)$$

Segundo: Se escribe una *LKV* en la malla DHGED.

$$V_1 - R_4 \cdot I_x - R_3 \cdot I_1 = 0$$

donde

$$2 \cdot I_x - 3 \cdot I_1 = 0 \quad \dots (140)$$

Tercero: Se escribe una *LKV* en la malla CBFEC.

$$V_2 - R_2 \cdot I_2 - R_3 \cdot I_1 = 0 \quad \dots (141)$$

Cuarto: Se escribe una *LKC* en el nodo F.

$$I_x + I_2 = I_1 \quad \dots (142)$$

Después de resolver el sistema de ecuaciones formado por (53), (54), (55) y (56), se obtiene que $v_{ca} = 7 \text{ V}$

Una vez determinada la tensión a circuito abierto se procede a hallar la corriente de cortocircuito, según la figura 10, para luego determinar la resistencia equivalente de Thévenin usando la expresión (2).

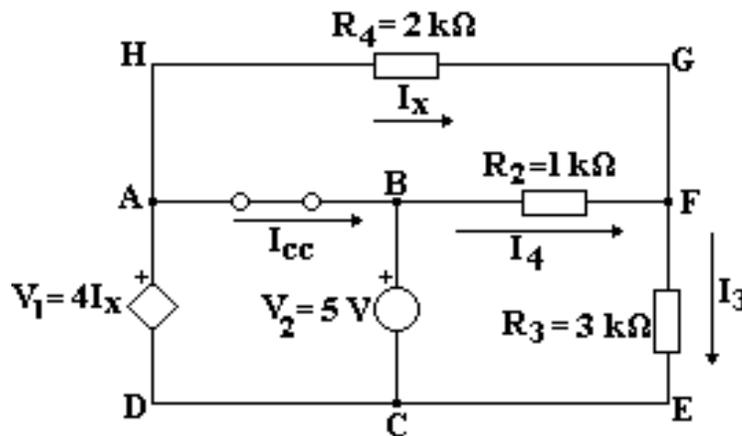


Figura 56. Circuito con carga desconectada y representación de la corriente de cortocircuito.

Al cortocircuitar los terminales de carga las fuentes de tensión V_1 y V_2 quedan conectadas en paralelo, lo cual **no es posible**, debido a que solo pueden estar conectadas en paralelo, teóricamente, si son iguales. Si no son iguales aparece, como en este caso, **una conexión absurda**.

En el caso de dos fuentes de tensión independientes, conectadas en paralelo y de diferente valor cada una, es evidente que la conexión que aparece es totalmente absurda. Cuando existen, como en este caso, una fuente de tensión dependiente en paralelo con una fuente de tensión independiente, la conexión absurda no resulta tan evidente. Se puede pensar que si

las fuentes V_1 y V_2 están en paralelo, entonces ellas son iguales, por lo que entregarían la misma tensión. Esto se haría planteando que:

$$V_1 = V_2 \quad \dots (144)$$

De donde se obtiene que $I_x = 1.25$ mA

O sea, se podría asumir que como las fuentes están en paralelo, ellas entregan la misma tensión, de manera que al igualarse se determina la variable de dependencia de la fuente dependiente. Ahora es necesario comprobar si el valor obtenido para I_x es cierto o no:

Primero: Se escribe una *LKV* en la malla DHGED.

$$V_1 - R_4 \cdot I_x - R_3 \cdot I_3 = 0$$

donde ... (145)

$$2 \cdot I_x - 3 \cdot I_3 = 0$$

Segundo: Se escribe una *LKV* en la malla CBFEC.

$$V_2 - R_2 \cdot I_4 - R_3 \cdot I_3 = 0 \quad \dots (146)$$

Tercero: Se escribe una *LKC* en el nodo F.

$$I_x + I_4 = I_3 \quad \dots (147)$$

Después de resolver el sistema de ecuaciones formado por (145), (146) y (147), se obtiene que $I_x = 3$ mA.

Como se aprecia, los resultados obtenidos para la variable de dependencia I_x **son totalmente diferentes**, por lo que se demuestra que no es posible realizar el análisis para encontrar la corriente de cortocircuito I_{cc} , quedando evidenciado que para casos como estos, donde cortocircuitar los terminales de carga para hallar I_{cc} , conduce a una **conexión absurda**, no es válido aplicar el teorema de Thévenin.

En cualquiera de los ejemplos anteriores, no es posible determinar las variables en cuestión aplicando el teorema de Thévenin. Sin embargo, usando cualquiera de las restantes técnicas de análisis de circuitos eléctricos lineales, los métodos generales: Análisis de Malla o

Análisis Nodal o las propias leyes de Kirchhoff, es posible hallarlas y darles una interpretación desde el punto de vista físico.

Ejemplos como los analizados existen, generalmente, en una gran infinidad de aplicaciones reales, lo cual puede ser catastrófico pues se podrían dañar equipos y componentes. Desde el punto de vista teórico-práctico se debe tener mucho cuidado a la hora de aplicar este importante teorema, pues, como se trata en la literatura especializada el teorema no está completo. Además de las dos condiciones señaladas se le debe agregar una tercera:

- 3) Al desconectar la carga del resto de la red, con vistas a determinar la tensión a circuito abierto y/o al cortocircuitar los terminales de carga, con vista a determinar la corriente de cortocircuito, el circuito resultante no debe contener ninguna conexión absurda. Entiéndase por conexión absurda aquellas que se forman cuando quedan conectadas, en serie, al menos dos fuentes de corriente de diferentes valores y, en paralelo, al menos dos fuentes de tensión de diferentes valores. (William H., 1993.)

2.4.4 TEOREMA UNIFICADO DE THEVENIN

Este método permite obtener simultánea y sistemáticamente la impedancia (Z_{th}) y la fuente de thevenin (V_{th}).

Se basan en el hecho de que si el circuito (el original y el de thevenin) son equivalentes, deben producir los mismo efectos externos, es decir, si se conecta a ambos el mismo circuito externo, los resultado son idénticos. (Chan, 1989)

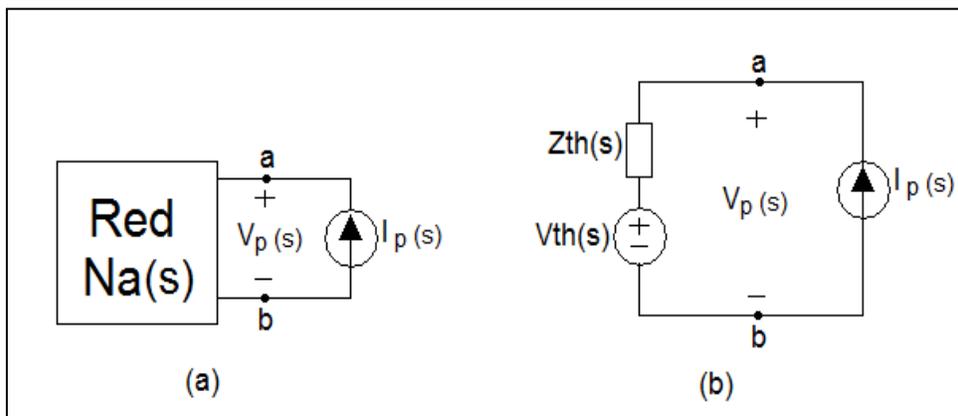


Figura 57. Equivalentes de Thevenin.

En la figura 57 se muestran ambos circuitos, a los que se ha conectado un fuente independiente de corriente como carga.

Al ser equivalente, $V_p(s)$ será el mismo en ambos

En la figura 57b, tomando una sumatoria de voltaje en el anillo (malla) se tiene:

$$-V_p(s) + Z_{th}(s)I_p(s) + V_{th}(s) = 0 \text{ por tanto } V_p(s) = Z_{th}(s)I_p(s) + V_{th}(s)$$

Si se resuelve el circuito mostrado en la figura 57 a) y se despeja $V_p(s)$ se tendrá un expresión de la forma:

$$V_p(s) = AI_p(s) + B$$

Por simple comparación el primero de estos terminos A es $Z_{th}(s)$ y el segundo B es $V_{th}(s)$.

Un ejemplo mostrara la facilidad del método, se realizara uno de los ejemplo del articulo como homenaje a los autores.

Determinar el equivalente de thevenin entre los terminales a y b del circuito de la figura 58

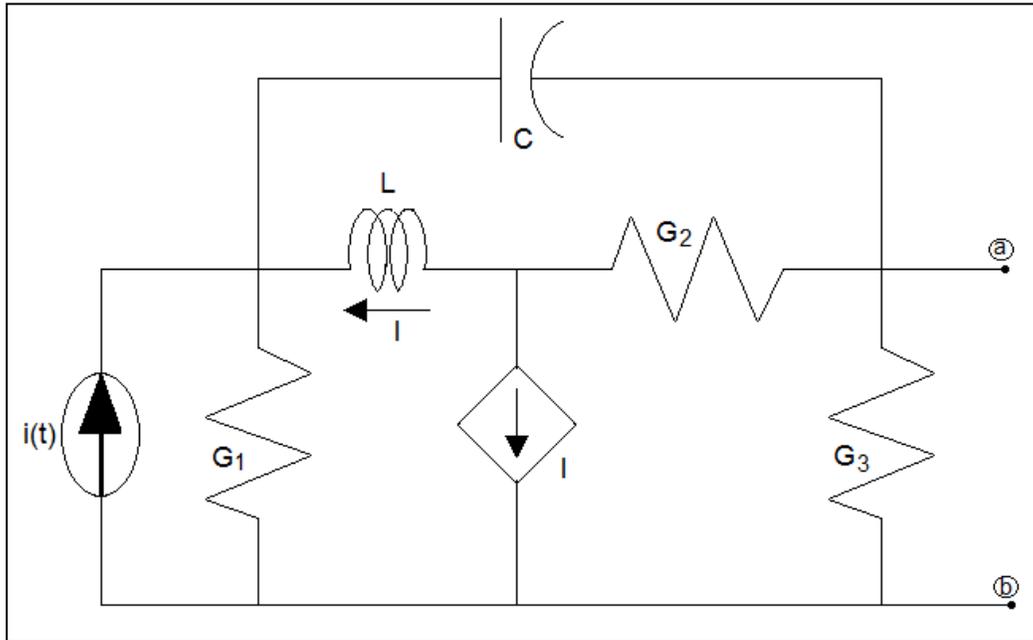


Figura 58

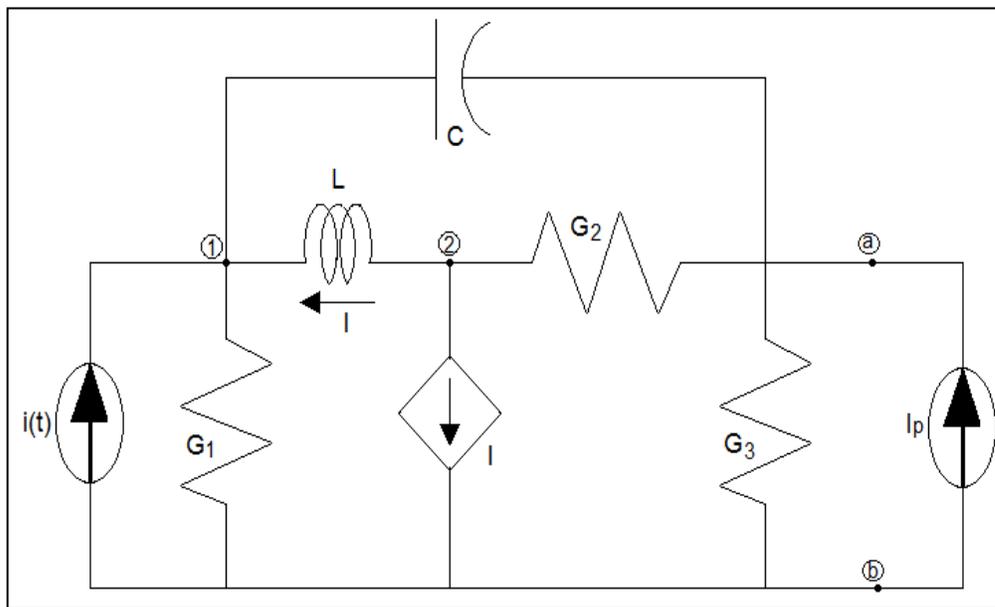


Figura 59. Ejemplo del teorema unificado de Thévenin

Solución:

Primero se aplica una fuente de corriente de prueba (I_p) entre los terminales a y b de la figura 59

Aplicado sumatoria de corriente en los nodo 1, 2 se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} (G_1 + 1/LS + CS) & -1/LS & -CS \\ 0 & G_2 & -G_2 \\ -CS & -G_2 & (G_2 + CS + G_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \\ V_a(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I(s) \\ 0 \\ I_p(s) \end{pmatrix}$$

Resolviendo para $V_a(s)$ se obtiene:

$$V_a(s) = (S^2LC + SG_1L + 1)I_p(s) + S^2LC(s) / \Delta(s) \quad \dots (148)$$

Organizando:

$$V_a(s) = (S^2LC + SG_1L + 1 / \Delta(s)) I_p(s) + S^2LC/\Delta(s) I(s) \quad \dots (149)$$

$$\text{Donde } \Delta(s) = S^2L(G_1C + G_3) + SG_1LG_3 + G_3 \quad \dots (150)$$

De este modo se conocen $Z_{th}(s)$ y $V_{th}(s)$:

$$Z_{th}(s) = (S^2LC + SG_1L + 1 / \Delta(s)) \quad \dots (151)$$

$$V_{th}(s) = S^2LC/\Delta(s) \quad \dots (152)$$

Conclusiones

- En el trabajo se muestra los resultados de la recopilación bibliográfica realizada sobre los métodos generales y teoremas aplicados en la solución de circuitos lineales.
- La tesis contiene los métodos generales tradicionales y no tradicionales (MCM) y (MVN) aplicados en la solución de circuitos eléctrico
- En la tesis se hallan los resultados de la aplicación de los métodos no tradicionales verificando su correspondencia con los resultados con métodos tradicionales. Se argumenta las ventajas en la aplicación de estos en lo fundamental cuando se trata de la programación .
- En la tesis se muestran los circuitos en los que en la aplicación del método de Thevenin surgen, las así llamadas, conexiones absurdas las que imposibilitan la aplicación del teorema.
- En el estudio realizado sobre los circuitos no planos se concluyó que aplicando la metodología que se muestra en la tesis es posible su solución.

Recomendaciones

- Incluir éste material en en el contenido de las conferencias y seminarios realizados sobre los métodos y teoremas..
- Continuar el estudio de los métodos no convencionales de solución de los circuitos eléctricos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- A.J. CONEJO, A. C., J.L. POLO, N. ALGUACIL. 2004. *Circuitos Eléctricos para el Ingeniero*. McGraw-Hill. Madrid.
- ALVAREZ, R. J. A. 2006. Implementación de un Tutorial en Matlab para Aplicación en la solución de ejercicios de circuito 1. Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas.
- CHAN, L.-M. J. Y. S. P. 1989. TEOREMA UNIFICADO DE THEVENIN. 32.
- DAVID IRWIN, J. 1997. *Análisis Básico de Circuitos en Ingeniería*. , Ed. Prentice-Hall, Inc., México.
- J.W. NILSSON, S. A. R. 2005. *Circuitos Eléctricos*, Pearson Prentice Hall.
- JAMES LEY, B., LUTS G., SAMUEL & REHBERG F., CHARLES 1963. *Linear Circuit Analysis*, Asociación de Estudiantes de Tecnología, New York University, USA.
- LIN, R. A. D. C. A. P.-M. 2001. *Linear circuit analysis*, Perdue University.
- NEAL P., J. 1960. *Electrical Engineering Fundamentals*. , McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, USA,.
- OLIVERA, M. 1989. *Fundamentos de la Teoría de Circuitos I*. , Ed. Pueblo y Educación, Ciudad de La Habana, Cuba.
- PARAMIO, J. B. C. A. F. T. 2007. método y teorema fundamentales de análisis.
- WILLIAM H., H. J. E., KEMMERLY 1986. *Engineering Circuit Analysis*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, USA, .
- WILLIAM H., H. J. E., KEMMERLY 1993. *Análisis de Circuitos en Ingeniería*. , McGraw-Hill Book Company, Inc., México, .

