

**Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas
Facultad de Ingeniería Eléctrica
Departamento de Automática y Sistemas Computacionales**



Trabajo de Diploma

Aplicación de la técnica de identificación algebraica para la estimación del modelo de un motor de corriente directa.

Autor: Yosley Moya Pérez

Tutores: Dr.C. Ángel Ernesto Rubio Rodríguez.

Ing. Ariel Adrian Valdivia Pacheco.

Santa Clara

2015

“Año 57 de la Revolución”

Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas
Facultad de Ingeniería Eléctrica
Departamento de Automática y Sistemas Computacionales



Trabajo de Diploma

Aplicación de la técnica de identificación algebraica para la estimación del modelo de un motor de corriente directa.

Autor: Yosley Moya Pérez

Email: ymoya@uclv.edu.cu

Tutores: Dr.C. Ángel Ernesto Rubio Rodríguez.

Email: rubio@uclv.edu.cu

Ing. Ariel Adrian Valdivia Pacheco.

Email: vpacheco@uclv.cu

Santa Clara

2015

"Año 57 de la Revolución"



Hago constar que el presente trabajo de diploma fue realizado en la Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas como parte de la culminación de estudios de la especialidad de Ingeniería en Automática, autorizando a que el mismo sea utilizado por la Institución, para los fines que estime conveniente, tanto de forma parcial como total y que además no podrá ser presentado en eventos, ni publicados sin autorización de la Universidad.

Yosley Moya Pérez

Autor

Los abajo firmantes certificamos que el presente trabajo ha sido realizado según acuerdo de la dirección de nuestro centro y el mismo cumple con los requisitos que debe tener un trabajo de esta envergadura referido a la temática señalada.

Yosley Moya Pérez

Autor

Boris Luis Martínez, Dr.C.

Jefe de Departamento

Firma del Responsable de
Información Científico-Técnica

PENSAMIENTO

*El individuo que tiene que justificar su existencia por su propio esfuerzo es un eterno
sirviente de sí mismo.*

Agustín Tosco

RESUMEN

Las técnicas de identificación algebraica son objeto de análisis en varios centros de investigación científica, con ellas se estiman modelos continuos en el tiempo a partir de las ecuaciones diferenciales que rigen al sistema físico y hacen uso del álgebra diferencial y el cálculo operacional. Pueden ser útiles en procesos en los que exista pérdida de datos o por algún motivo la toma de muestras no pueda realizarse de forma periódica. En este trabajo se utiliza la metodología derivativa algebraica, una técnica de identificación algebraica, para estimar los parámetros del motor de corriente directa; el tratamiento del ruido se trata con la inclusión de integradores puros en el numerador y en el denominador del cociente de las estimaciones. Los resultados obtenidos revelan la posibilidad de mejorar la convergencia del método si se realiza un estudio más detallado del filtraje de la señal.

TABLA DE CONTENIDOS

PENSAMIENTO	i
INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 1. Revisión bibliográfica	6
1.1 Introducción	6
1.2 Identificación de sistemas	6
1.3 Modelo de sistema.....	7
1.3.1 Clasificación de los modelos	7
1.3.2 Métodos de obtención de modelos.....	9
1.3.3 Modelo Lineal.....	9
1.3.4 Modelo de función de transferencia.....	10
1.3.5 Espacio de los Estados.....	11
1.3.6 Modelos no lineales	12
1.4 Señales.....	12
1.5 Criterios.....	13
1.5.1 Minimización del error de predicción.....	14
1.5.2 Método de la variable instrumental	15
1.5.3 Máxima Verosimilitud.....	16
1.5.4 El método de Bayes	17

1.6	Estimación en el dominio de la frecuencia	18
1.6.1	Datos procedentes del dominio del tiempo.....	19
1.6.2	Datos procedentes del dominio de la frecuencia	19
1.6.3	Conexión entre los dominios del tiempo y de la frecuencia	20
1.7	Identificación en tiempo continuo.....	20
1.7.1	La importancia de los modelos en tiempo continuo	21
1.7.2	La problemática de la identificación en tiempo continuo	22
1.8	Identificación Algebraica	22
1.9	Consideraciones parciales	23
CAPÍTULO 2. Estimador Algebraico.....		24
2.1	Introducción	24
2.2	Identificación Algebraica	24
2.2.1	Base matemática	24
2.2.2	Metodología algebraica.....	26
2.3	Estimador de parámetros de señal sinusoidal.....	26
2.3.1	Estimador de frecuencia en línea	26
2.3.2	Estimador de amplitud y fase en línea	28
2.4	Simulación.....	29
2.5	Estimación de frecuencia de señal ruidosa.....	30
2.6	Simulación.....	31
2.7	Estimador de parámetros de señal sesgada	33
2.7.1	Estimación de frecuencia en línea	33
2.7.2	Estimación en línea de la amplitud y la fase.....	35
2.8	Consideraciones parciales	39

CAPÍTULO 3. Metodología derivativa algebraica aplicada al motor de corriente directa	
40	
3.1 Introducción	40
3.2 Modelo de un motor de corriente directa	40
3.3 Procedimiento de identificación algebraica.	43
3.4 Estimación de parámetros de planta simulada	46
3.5 Estimación de parámetros con señal ruidosa	48
3.6 Estimación de parámetros reales del motor	50
3.7 Análisis económico	53
3.8 Consideraciones parciales	55
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	56
Conclusiones	56
Recomendaciones	56
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	57
ANEXOS	60
Anexo I Esquemas de Simulink.....	60

INTRODUCCIÓN

Las técnicas de identificación de sistemas han cobrado gran relevancia en diversas áreas del conocimiento donde se requiere de un modelo preciso para fines de análisis, predicción, simulación, diseño y control.

Un sistema, es toda realidad en la que interactúan variables de diferentes tipos para producir señales observables. Las señales observables que son de interés para el observador se denominan salidas del sistema, mientras que las señales que pueden ser manipuladas libremente por dicho observador son las entradas del mismo. El resto de las señales que influyen en la evolución de las salidas pero no pueden ser manipuladas por el observador se denominan perturbaciones (Guillén, 2000).

Durante muchos años estos sistemas se han modelado con el empleo de la descripción cualitativa; incluso hoy en día la mayoría de ellos se describen por este método simple. No obstante estos modelos cualitativos se han complementado con modelos cuantitativos basados en los avances matemáticos. Hasta la última década esta metodología parece la más adecuada para muchas disciplinas científicas, e incluso las leyes físicas buscan un modelo cuantitativo que se ajusta a la realidad; la búsqueda de modelos matemáticos que se ajusten a las observaciones trae consigo gran complejidad, ya que estas observaciones adjuntan nuevos problemas debido a inexactitudes que puedan presentar. Además, la naturaleza estocástica de algunos sistemas hace imposible predecir sus salidas y por lo tanto el ajuste del modelo.

Básicamente, el objetivo de la teoría de identificación de sistemas es prestar una metodología sistemática que ajuste el modelo matemático, en gran medida, a la componente determinista, eliminando el efecto de las perturbaciones tanto como sea posible. Es decir la

identificación de sistemas se ha convertido en una herramienta que construye modelos precisos a partir de datos ruidosos (Trapero Arenas, 2008).

Este trabajo, impulsado por las investigaciones que se han realizado en diversas universidades y grupos de investigación del mundo, trata acerca de la identificación de sistemas, específicamente aplicando la metodología derivativa algebraica. Varios son los estudios que aplican esta técnica de identificación:

En (Becedas and Feliu, 2002), se propone la estimación algebraica de la constante de rigidez de un manipulador flexible en situaciones de impacto, el método propuesto en este artículo fue desarrollado en primera instancia por (Fliess et al., 2003, Fliess and Sira-Ramirez, 2004), se basa en la teoría modular, algebra diferencial y cálculo operacional.

En (Becedas et al., 2007), se aplica la identificación algebraica a un sistema masa-resorte con el objetivo de estimar simultáneamente la constante elástica y el coeficiente de amortiguamiento.

Trapero y Sira-Ramírez (Trapero et al., 2008), emplean esta metodología en la obtención de la frecuencia, amplitud y fase de una suma de dos señales sinusoidales. La implementación del algoritmo se lleva a cabo utilizando filtros lineales en forma Brunowski.

El análisis de identificación algebraica con aplicación en control adaptativo mostrado en (Mamani et al., 2009) presenta un algoritmo que solo puede ser aplicado a sistemas invariantes donde los parámetros no cambian con respecto al tiempo.

En (Becedas et al., 2010), se explica con detalles la metodología a emplear cuando se desea identificar un motor de corriente directa aplicando identificación algebraica, además se comparan los resultados obtenidos utilizando esta técnica con los que se obtienen usando el método de mínimos cuadrados recursivo.

Los trabajos mencionados anteriormente reflejan que la identificación algebraica posee características ventajosas con respecto a los métodos clásicos de identificación de sistemas. Una peculiaridad esencial de esta técnica es que estima parámetros de un modelo continuo que sí poseen un amplio significado físico debido a que se obtienen directamente de las ecuaciones diferenciales provenientes de las leyes físicas que rigen el comportamiento del sistema, por su parte, la identificación clásica estima parámetros de un modelo discreto que no poseen tal significado físico. Además, a diferencia de las técnicas clásicas, la técnica de identificación algebraica, posee la ventaja de no necesitar el conocimiento de modelos

estadístico de ruidos que afectan los datos adquiridos. Otra particularidad importante de esta técnica, es que el muestreo de los datos no requiere que sea de manera periódica, es decir, que en procesos donde existan pérdidas de datos o por cierta incapacidad las mediciones no se puedan realizar fijando un período de tiempo constante, esta técnica puede ser provechosa.

En Cuba, el Grupo de Automatización Robótica y Percepción (GARP) de la Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas, en sus múltiples investigaciones ha enfrentado problemas durante procesos de identificación de sistemas complejos aplicando las técnicas de identificación clásicas. Entre estos problemas se encuentran:

- a) La pérdida de tramas de información por mala recepción de la comunicación durante la identificación de los aviones no tripulados.
- b) En los trabajos con submarinos se pierde la comunicación cuando estos se sumergen
- c) El muestreo aperiódico de variables en procesos biotecnológicos.

Estos problemas influyen de tal manera que se pierde precisión en la obtención del modelo que representa el comportamiento del sistema bajo estudio. Una posible solución para esto, es la aplicación de la técnica de identificación algebraica debido a sus ventajas ya mencionadas.

Por tanto, se plantea el siguiente **problema científico**: A pesar de las potencialidades de la técnica de identificación algebraica, no existen antecedentes de su aplicación en el Grupo de Automatización Robótica y Percepción por su desconocimiento. Se hace entonces necesario su estudio a través de una aplicación concreta para adquirir experiencia en su uso.

Después de realizar una revisión bibliográfica detallada, reflejada en el capítulo uno de esta tesis, se propone la siguiente hipótesis.

Hipótesis: La utilización de la técnica de identificación algebraica permite obtener los parámetros del modelo de un motor de corriente directa.

Como **Objetivo general** de este trabajo se tiene: Aplicar la técnica de identificación algebraica en la estimación de los parámetros del modelo de un motor de corriente directa.

Objetivos específicos:

1. Analizar críticamente las potencialidades y limitaciones de la técnica de identificación algebraica.
2. Describir matemáticamente los fundamentos de esta técnica de identificación.
3. Implementar en Matlab el algoritmo de identificación algebraica para validar por simulación esta técnica de identificación.
4. Estimar el modelo de un motor de corriente directa mediante esta técnica de identificación.

Para desarrollar este trabajo se plantean las siguientes tareas de investigación:

Tareas:

1. Revisión de los fundamentos teóricos relacionados con la técnica de identificación algebraica.
2. Análisis crítico de las potencialidades y limitaciones de la metodología de identificación algebraica.
3. Descripción de la base matemática de esta técnica.
4. Implementación en Matlab y validación por simulación de esta técnica de identificación.
5. Estimación del modelo de un motor de corriente directa utilizando la técnica de identificación algebraica.

Estructura de la Tesis:

En la introducción del trabajo se mostraron los objetivos trazados, la importancia de la identificación algebraica, así como el estado actual de aplicación según la bibliografía.

Capitulario: La investigación contiene tres capítulos, además de las conclusiones, recomendaciones, referencias bibliográficas y un anexo. A continuación se relaciona la información comprendida por capítulos:

- Capítulo I: Incluye los principales conceptos relacionados con la identificación de sistemas, se exponen aspectos fundamentales sobre la identificación por métodos algebraicos. Se presentan los resultados de la revisión bibliográfica relacionada con la identificación algebraica haciendo énfasis en el método derivativo algebraico y de las principales investigaciones relacionadas con esta técnica de identificación. Por

último se establecen las consideraciones parciales donde se realiza un análisis crítico de la revisión bibliográfica realizada.

- Capítulo II: En este capítulo primeramente se presenta la base matemática que sustenta la técnica de identificación algebraica, continúa con una explicación de la metodología derivativa algebraica que se emplea en la obtención de los parámetros de un modelo de sistema aplicando esta técnica. Luego a través de una aplicación concreta se muestra con mayor claridad la manera de utilizar esta metodología y se precisan los aspectos a tener en cuenta para aplicar esta técnica de identificación.
- Capítulo III: En este apartado se revelan los resultados alcanzados con la investigación. Inicialmente se desarrolla la metodología a aplicar en la obtención del modelo de un motor de corriente directa, posteriormente se aplica la técnica algebraica en la obtención de los parámetros del modelo de un motor. Además se presentan los resultados alcanzados con la planta simulada y con la planta real. Para concluir, a través de las consideraciones parciales se valoran los resultados.

CAPÍTULO 1. Revisión bibliográfica

1.1 Introducción

El capítulo está enfocado en los principales aspectos relacionados con la identificación de sistemas. Se abordan los conceptos fundamentales que sirven de base para el tema de la identificación algebraica y teniendo en cuenta de que la técnica estima parámetros de un modelo continuo se hace énfasis en las ventajas y deficiencias que representa identificar en tiempo continuo. También se abordan los fundamentos de la identificación algebraica y todos aquellos aspectos que han motivado a que el desarrollo de la tesis se dirija al uso de esta metodología.

1.2 Identificación de sistemas

La identificación de sistemas consiste en obtener un modelo que represente con determinada precisión las propiedades dinámicas del proceso o sistema en estudio. Según lo planteado por *Zadeh* esta contiene tres componentes importantes, (*Zadeh*, 1962):

- I. Clase de modelo utilizado.
- II. El tipo de señales disponibles.
- III. El criterio de estimación.

Si estos tres factores están bien diseñados pues se contará con buenos resultados.

Existen diversos métodos de identificación, que pueden clasificarse según distintos criterios, (*Kunusch*, 2003):

- Dependiendo del tipo de modelo obtenido:
 1. Métodos no paramétricos: Son aquellos que posibilitan la obtención de modelos no paramétricos que caractericen el sistema bajo estudio. Varios son los métodos que se pueden citar ejemplo de ello son: análisis de la respuesta transitoria, análisis de la

respuesta en frecuencia, análisis de la correlación, análisis espectral, análisis de Fourier, etc.

2. Métodos paramétricos: Mediante estos se obtienen modelos paramétricos que requieren la elección de una posible estructura del modelo, un criterio para el ajuste de parámetros, y para finalizar se estiman los parámetros del modelo que mejor se acoplan a los datos experimentales.
 - Dependiendo de la aplicación:
 1. Métodos de identificación off-line (a posteriori): Se emplean en aquellas aplicaciones en las que no se requiere que el modelo se esté ajustando continuamente. Previamente se hace la identificación de la planta y se considera que la validez de los parámetros no se afectará en el transcurso del tiempo.
 2. Métodos de identificación on-line (identificación recursiva): En estos con la evolución del proceso se van obteniendo los datos de entrada/salida y a partir de aquí se actualizan continuamente los parámetros del modelo. Podemos encontrarlos en diversas aplicaciones de control adaptativo.

1.3 Modelo de sistema

En ocasiones se necesita conocer cómo se comporta un sistema ante determinadas condiciones, por lo que es indispensable experimentar sobre él para observar la respuesta obtenida, se debe tener en cuenta que existen procesos con alto nivel de complejidad que incluso puede llegar a ser imposible la experimentación sobre estos, lo que hace útil el uso de alguna representación que simule esta realidad, a lo cual se nombrará modelo.

Básicamente, un modelo es una herramienta que permite predecir el comportamiento de un sistema sin necesidad de experimentar sobre él (Guillén, 2000).

1.3.1 Clasificación de los modelos

Existen diversas clasificaciones para los modelos de sistemas físicos, en función del grado de formalismo matemático que poseen (Soderstrom and Stoica, 1989):

- Mentales, intuitivos o verbales.
- Gráficos.
- Matemáticos.

Esta tesis se ajusta a los modelos matemáticos, los cuales son utilizados en aplicaciones más avanzadas que necesitan ser descritas por expresiones que reflejen las relaciones entre las variables del sistema ejemplo de ello son las ecuaciones diferenciales para sistemas continuos, o en diferencias para sistemas discretos.

En cuanto al tipo de sistema y la manera en que estos se encuentren representados matemáticamente estos se clasifican en, (Kunusch, 2003):

- **Determinísticos o estocásticos:** Se puede afirmar que se está en presencia de un modelo determinístico cuando la relación entrada/salida es expresada a través de una ecuación exacta. De lo contrario se certifica que se está en presencia de un modelo estocástico cuando existe un cierto grado de incertidumbre, estos se definen a través de conceptos probabilísticos o estadísticos.
- **Dinámicos o estáticos:** Los sistemas estáticos son aquellos en que la salida depende solamente de la entrada en ese instante, lo que evidencia una relación directa entre entrada y salida, independiente del tiempo. En cambio es dinámico cuando las salidas se modifican a través del tiempo después de aplicada una determinada entrada, en estos para llegar a conocer el valor actual de la salida es importante saber el tiempo que ha transcurrido desde la aplicación de la entrada.
- **Continuos o discretos:** Se conoce como sistema continuo a aquel que trabaja con señales continuas, expresándose mediante ecuaciones diferenciales, mientras que los discretos con señales muestreadas y se caracterizan por ecuaciones en diferencias.

1.3.2 Métodos de obtención de modelos

La obtención del modelo de un sistema se basa fundamentalmente en dos métodos, (Osorio Camargo and Florez Roa, 2013):

- ❖ Modelado teórico: Método analítico, en el que se muestra el comportamiento dinámico de un proceso mediante las leyes básicas de la física.
- ❖ Identificación de sistema: Basado en un método experimental donde se recogen datos reales de la planta en la que se trabaja y a partir de esto se obtiene el modelo.

El modelado teórico es utilizado en procesos muy sencillos o que no requieran de gran exactitud en el modelo. Frecuentemente, la estructura del modelo obtenido a partir del conocimiento físico de la planta posee un conjunto de parámetros desconocidos y que sólo se pueden determinar experimentando sobre el sistema real. De ahí la necesidad de recurrir a los métodos de identificación de sistemas.

Los modelos obtenidos mediante técnicas de identificación tienen, sin embargo, las siguientes desventajas:

- ❖ Su rango de validez suele ser limitado (sólo son aplicables a un determinado punto de trabajo, un determinado tipo de entrada o un proceso concreto).
- ❖ En muchos casos es difícil dar significado físico al modelo obtenido, puesto que los parámetros identificados no tienen relación directa con ninguna magnitud física. Estos parámetros se utilizan sólo para dar una descripción aceptable del comportamiento conjunto del sistema.

En la práctica, lo ideal es recurrir a una mezcla de ambos métodos de modelado para obtener el modelo final. El uso de datos reales para identificar los parámetros del modelo provee a este de una gran exactitud, pero el proceso de identificación se ve tanto más facilitado cuanto mayor sea el conocimiento sobre las leyes físicas que rigen el proceso.

1.3.3 Modelo Lineal

Un modelo general se puede escribir de la siguiente forma:

$$y(t) = G(\sigma)u(t) + H(\sigma)e(t) \quad 1-1$$

Donde σ se refiere al operador diferencia en tiempo continuo y al operador retardo en tiempo discreto. Generalmente $e(t)$ se supone una perturbación que se distribuye como una normal, de media cero y varianza λ .

Polinomios utilizados	Nombre del modelo
B	FIR
AB	ARX
ABC	ARMAX
ABD	ARMA
ABCD	ARARX
BF	ARARMAX
BFCD	OE (<i>Output error</i>)
	BJ (<i>Box-Jenkins</i>)

Tabla 1-1. Modelos de función de transferencia Fuente: (Trapero Arenas, 2008)

Con frecuencia, los coeficientes que definen G y H no se conocen, por lo que es necesario estimarlos, es decir, estos coeficientes definidos por θ son parámetros a determinar. De modo que la descripción del modelo queda (Trapero Arenas, 2008):

$$y(t) = G(\sigma, \theta)u(t) + H(\sigma, \theta)e(t) \quad 1-2$$

1.3.4 Modelo de función de transferencia

Directamente se representa de manera paramétrica G y H mediante funciones racionales con el numerador y denominador, definidos por una serie de parámetros, el grupo de modelos que se expresan mediante esta función de transferencia se pueden definir como sigue:

$$A(\sigma, \theta)y(t) = \frac{B(\sigma, \theta)}{F(\sigma, \theta)}u(t) + \frac{C(\sigma, \theta)}{D(\sigma, \theta)}e(t) \quad 1-3$$

en dependencia de los polinomios (A, B, C, D, F) que se utilicen, estos se encuentran en la Tabla 1-1. Si se quiere indagar más sobre las características de cada conjunto ver (Ljung, 1999).

1.3.5 Espacio de los Estados

La representación espacio de los estados consiste en utilizar un vector de estado $x(t)$ que expresa a través de ecuaciones diferenciales (para tiempo continuo) o en diferencias (para tiempo discreto) la relación entre señales de entrada, ruido y salida. El enfoque en (Kalman, 1960), expresa con amplia claridad la descripción de los sistemas lineales dinámicos en su trabajo sobre predicción y control cuadrático lineal.

Espacio de estados en tiempo continuo:

De manera general las leyes físicas vienen expresadas en tiempo continuo y no en tiempo discreto, quedando la representación de los modelos en espacio de los estados en tiempo continuo de la siguiente forma:

$$\dot{x}(t) = F(\theta)x(t) + G(\theta)u(t) \quad 1-4$$

Donde F y G son matrices con la dimensión apropiada ($n \times n$ y $n \times m$, respectivamente, para un estado n -dimensional y una entrada m -dimensional). Conjuntamente, θ es un vector de parámetros que normalmente se asocian con los parámetros físicos desconocidos. El modelado se realiza mediante las variables de estado x que poseen cierto significado físico (posición, velocidad, etc.), y por tanto, las salidas medibles serán combinaciones conocidas de los estados. Sea $n(t)$ la medida que se obtendría para un caso ideal libre de ruidos, tal que:

$$n(t) = Hx(t) \quad 1-5$$

Utilizando el operador diferencia p , ecuación 1-4 se puede escribir como:

$$[pI - F(\theta)]x(t) = G(\theta)u(t) \quad 1-6$$

que significa que la función de transferencia entre u y n en 1-5 es:

$$n(t) = Gc(p, \theta)u(t) \quad 1-7$$

$$Gc(p, \theta) = H[pI - F(\theta)]^{-1}G(\theta)$$

A partir de esto se ha logrado la obtención de un modelo del sistema en función de transferencia desarrollada en tiempo continuo, donde los parámetros representan los coeficientes físicos de dicho sistema.

El espacio de estados permite partir de un modelo estructural (especificado), en el que las variables y sus relaciones tengan una interpretación física o económica, llevar a cabo la estimación de los parámetros del modelo. Del mismo modo, es posible plantear a priori modelos en los que las series observadas se ven formadas por componentes “interpretables intuitivamente” y cuya dinámica es postulada a priori, y los parámetros de estos modelos pueden ser estimados (Millán and del Hoyo Bernat, 2005).

Ljung en (Ljung, 1999), refiriéndose a los aspectos prácticos de la identificación de sistemas multivariable, indica:

“Los sistemas multivariable son a menudo más complejos de modelar. Una de las razones de esta dificultad es que el acoplamiento entre varias entradas y salidas conduce a modelos complejos: las estructuras son más ricas y se requieren más parámetros para conseguir un buen ajuste.

Con carácter general, es preferible trabajar con modelos en el espacio de estados para el caso multivariable, ya que la complejidad en la estructura del modelo es más sencilla de tratar. Básicamente es una cuestión de elegir el orden del modelo.”

1.3.6 Modelos no lineales

En ocasiones la relación que existe entre los datos de entrada y salida incluye no linealidades por lo que hay que recurrir al conocimiento físico del sistema para expresar estas no linealidades de manera adecuada y que facilite el trabajo. En esto consiste la idea del modelado semifísico que busca incorporar las relaciones no lineales en el modelo, (Ljung, 1999). En (Giannakis and Serpedin, 2001), se encuentra una amplia bibliografía dedicada a las técnicas de identificación no lineal, modelos para identificar sistemas no lineales se discuten en (Haber and Unbehauen, 1990). Es común encontrarse con modelos de dinámica no lineal ejemplo de ello son el *Wiener-Hammerstein*, los modelos de caja negra, estructuras de identificación populares como las redes neuronales, *wavelets* entre otros.

1.4 Señales

El manejo de señales constituye uno de los componentes esenciales en la identificación de sistemas, los avances digitales que se han desarrollado permiten que la naturaleza continua

de la mayoría de los sistemas físicos sea interpretada y medida de manera discreta o sea tomando muestras cada cierto período de muestreo se discretizan las señales continuas y se convierten en señales discretas en el tiempo. Esta secuencia trae consigo un error aparejado al período de muestreo ya que entre muestra y muestra no se aprecia la trayectoria verdadera de la señal. También es de gran utilidad el uso de la transformada rápida de Fourier para trasladar la señal en el dominio del tiempo al dominio de la frecuencia, esto se puede profundizar en (Pintelon and Schoukens, 2012).

Teniendo en cuenta lo anterior, se puede plantear que generalmente se trabaja con señales discretas en el dominio del tiempo, o mediante su transformada rápida de Fourier estas señales se pueden trasladar también al dominio de la frecuencia. De forma que se pueden presentar sistemas físicos continuos en el tiempo, que se tienen que identificar con señales discretas en el tiempo o en el dominio de la frecuencia.

1.5 Criterios

El último de los ingredientes en la solución del problema de la identificación de sistemas es la elección de un criterio de ajuste de parámetros del modelo, esto consiste en crear una expresión matemática que permita evaluar la exactitud del modelo para describir el proceso generador de los datos observados en las señales, lo cual se puede materializar teniendo en cuenta el error que se comete en la predicción de un determinado modelo $M(\theta_*)$ utilizando la siguiente expresión:

$$\varepsilon(t, \theta_*) = y(t) - \hat{y}(t, \theta_*) \quad 1-8$$

Cuando se conoce el conjunto de datos:

$$Z^n = [y(1), u(1), y(2), u(2), \dots, y(N), u(N)] \quad 1-9$$

los errores de predicción se pueden calcular para $t = 1, 2 \dots N$. Por lo que es conveniente la selección de parámetros del modelo que incorporen un error de predicción pequeño. Esto se realiza de manera cuantificable al hallar una norma escalar o alguna función que mida el tamaño del error. Otra forma es fijando que $\varepsilon(t, \theta_*)$ no tenga correlación con el conjunto de datos, o sea, que las proyecciones de $\varepsilon(t, \theta_*)$ sean cero.

1.5.1 Minimización del error de predicción

La sucesión error de predicción obtenida en 1-8 puede ser vista como un vector en R^N . Por tanto, este vector se puede medir con una norma en R^N , ya sea cuadrática o no cuadrática. Una forma general de expresar el problema es la siguiente: Encontrar los parámetros $\theta = \hat{\theta}_N$ que minimizan la función:

$$V_N(\theta, Z^N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N l(\varepsilon_F(t, \theta)) \quad 1-10$$

donde $\varepsilon_F(t, \theta) = L(q)\varepsilon(t, \theta)$ es la sucesión del error de predicción filtrada por un filtro $L(q)$ que se utiliza para ponderar el ancho de banda de interés (Ljung, 1999). Por otro lado $l(\cdot)$, define la norma mediante una función escalar. Esta forma de estimar θ encuadra un buen número de métodos conocidos. Se ha denotado esta metodología como métodos de identificación de error de predicción. Con el fin de aclarar esta nomenclatura se recurre a un ejemplo muy conocido como es el método de mínimos cuadrados aplicado a una regresión lineal.

Una forma de expresar una regresión lineal es la siguiente:

$$\hat{y}(t, \theta) = \varphi^T(t)\theta \quad 1-11$$

donde (t) es el vector regresión, tal que:

$$\varphi(t) = [-y(t-1) - y(t-2) \dots - y(t-n_a)u(t-1) \dots u(t-n_b)]^T \quad 1-12$$

De acuerdo con 1-8 el error de predicción es:

$$\varepsilon(t, \theta_*) = y(t) - \varphi^T(t)\theta \quad 1-13$$

y el criterio según 1-10, con $L(q) = 1$ y $l(\varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon^2$, es

$$V_N(\theta, Z^N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N 1/2 [y(t) - \varphi^T(t)\theta]^2 \quad 1-14$$

Este es el criterio de mínimos cuadrados para la regresión lineal. En este caso particular existe una solución analítica dada por:

$$\hat{\theta}_N^{LS} = \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi^T(t) \right]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) y(t) \quad 1-15$$

1.5.2 Método de la variable instrumental

En el año 1941 es introducido por Reiersøl el método de la variable instrumental, a partir de esto su uso se ha hecho cada vez más frecuente en múltiples problemas de estimación de parámetros en estadística ver (Reiersøl, 1941, Kendall and Stuart, 1961).

Un análisis histórico se puede encontrar en los trabajos dirigidos por Young en (Young, 1976, Young, 1984).

Desde el punto de vista del autor, el método se basa en suponer que el error de predicción ($\varepsilon(t, \theta)$) de un modelo ideal debe recoger el patrón generador de datos del sistema de tal forma que los residuos no tengan relación alguna, es decir, independiente de las observaciones anteriores Z^{t-1} . En otras palabras, si el error de predicción tuviera cierta forma es debido a que el modelo no la captura y por tanto no describe correctamente los datos. Volviendo al caso de la regresión lineal, la estimación por mínimos cuadrados se puede expresar también como:

$$\hat{\theta}^{LS} = \text{sol} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) [y(t) - \varphi^T(t)\theta] = 0 \right\} \quad 1-16$$

donde $\text{sol}[f(x) = 0]$ significa la solución a la ecuación $f(x) = 0$. Si se supone que los datos siguen el siguiente proceso:

$$y(t) = \varphi^T(t)\theta_0 + v_0(t) \quad 1-17$$

Son definidos los instrumentos o variables instrumentales a los elementos ζ que satisfacen la siguiente ecuación:

$$\hat{\theta}_N^{IV} = \text{sol} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \zeta(t) [y(t) - \varphi^T(t)\theta] = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \zeta(t) v_0(t) = 0 \right\} \quad 1-18$$

Se puede observar de las ecuaciones 1-16 y 1-18 que $\zeta = \varphi$. De modo que el método de las variables instrumentales persigue que la correlación entre los instrumentos y el ruido sea cero.

1.5.3 Máxima Verosimilitud

La estimación por máxima verosimilitud fue introducida en, (Fisher, 1912). Este concepto es uno de los más utilizados en inferencia estadística y se estudia en cualquier asignatura de estadística básica. Una explicación más detallada de este método se puede encontrar en (Peña Sánchez de Rivera, 2001). Se supone una variable aleatoria continua x con función de densidad representada por $f(x|\theta)$ para indicar que depende de un vector de parámetros θ , y una muestra aleatoria simple $X = (x_1, \dots, x_n)$. La función de densidad conjunta de la muestra es:

$$f(x|\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) \quad 1-19$$

Cuando θ es conocido, esta función determina la probabilidad de aparición de cada muestra. En un problema de estimación se conoce un valor particular de X la muestra, pero θ es desconocido. Sin embargo, la función anterior sigue siendo útil, ya que si se sustituye X por el valor observado, $X_{n0} = (x_{10}, \dots, x_{n0})$ la función $f(x|\theta)$ proporciona para cada valor de θ , la probabilidad de obtener el valor muestral X_0 para ese θ . Si se varía θ , manteniendo X_0 fijo, se obtiene una función llamada función de verosimilitud, $\ell(\theta|X)$. Un procedimiento intuitivo de estimación es escoger aquel valor que haga máxima la probabilidad de aparición de los valores muestrales efectivamente observados; en otros términos, seleccionar como estimador del parámetro el valor que maximice la probabilidad de lo efectivamente ocurrido. Esto conduce a obtener el valor máximo de la función $\ell(\theta)$. Suponiendo que esta función es diferenciable y que su máximo no ocurre en un extremo de su campo de definición, el máximo se obtendrá resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta_1} &= 0 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta_n} &= 0 \end{aligned} \quad 1-20$$

El valor resultante ($\hat{\theta}$) corresponderá a un máximo si la matriz hessiana de segundas derivadas, evaluada en dicho punto $\hat{\theta}$ es definida negativa.

1.5.4 El método de Bayes

El método de máxima verosimilitud funciona muy bien con muestras grandes, pero con muestras pequeñas o medianas no proporciona siempre respuestas satisfactorias. Otra alternativa para solventar este problema es usar la estimación bayesiana, (Peña Sánchez de Rivera, 2001). El método de *Bayes* proviene del matemático inglés *Thomas Bayes* quien fue el primero en utilizar el teorema para realizar inferencias.

En la estimación bayesiana se tiene en cuenta la información inicial que se dispone del problema. Si se ignora la información inicial, llamada también información a priori, que se tiene respecto a un parámetro a estimar no es importante si la muestra es grande, ya que entonces probablemente se quiera despreciar la información a priori frente a los datos, pero puede serlo cuando la información a priori sea significativa frente a los datos. La inferencia bayesiana es un procedimiento general para combinar la información a priori con la muestra para obtener una inferencia que tenga en cuenta toda la información existente en el problema. Este enfoque no tiene en cuenta al parámetro como una constante desconocida, sino como variable aleatoria sobre la que se puede establecer a priori una distribución de probabilidad que refleje el conocimiento del problema. La inferencia respecto a sus posibles valores se obtiene aplicando el cálculo de probabilidades (teorema de Bayes) para combinar la información inicial con la muestral y obtener la distribución del parámetro condicionada a la información disponible. En concreto, se supone que antes de tomar la muestra se dispone de cierta información respecto al parámetro (o vector de parámetros) que se representa mediante una distribución inicial o a priori $p(\theta)$. Después se toma la muestra $X = (x_1, \dots, x_n)$, y la probabilidad de obtener la muestra para cada valor posible del parámetro viene dada por la función de densidad conjunta de las observaciones $f(X|\theta)$. Se observa que una vez obtenida la muestra, en esta función los datos son fijos, porque ya han sido observados, mientras que la variable son los parámetros.

Por tanto, cuando la muestra se observa, $f(X|\theta) = \ell(\theta|X)$ es la función de verosimilitud. A continuación se combinan según las reglas del cálculo de probabilidades estos dos elementos de información para obtener la distribución final o a posteriori, que se obtiene mediante el teorema de Bayes. Llamando $p(\theta|X)$ a la distribución a posteriori, se obtiene que:

$$p(x|\theta) = \frac{f(x|\theta)p(\theta)}{\int f(x|\theta)p(\theta)d(\theta)} \quad 1-21$$

La distribución a posteriori contiene toda la información para hacer inferencias respecto al parámetro. Si se desea un estimador puntual, se tomará la media o la moda de dicha distribución; si se desea un intervalo de confianza, se tomará la zona que encierre una probabilidad fijada en dicha distribución. Las diferencias prácticas entre el enfoque clásico basado en la función de verosimilitud y el bayesiano pueden ser importantes en muestras pequeñas pero en muestras grandes no son significativas, (Trapero Arenas, 2008).

1.6 Estimación en el dominio de la frecuencia

La identificación de sistemas en el dominio de la frecuencia se trata de una manera muy formal en el libro de (Pintelon and Schoukens, 2012). También se interpreta la estimación en el dominio de la frecuencia en el libro de Ljung en (Ljung, 1999). Además de estas referencias, son interesantes las conexiones entre la identificación en el dominio del tiempo y de la frecuencia que se establecen en (Ljung, 2004, Schoukens et al., 2004).

Para modelos y sistemas lineales la relación entre los métodos en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia es bien conocida y muy utilizada, como sucede en el diseño de control. En el caso de la identificación de sistemas lineales los enlaces entre los dominios del tiempo y de la frecuencia son igualmente importantes. Sin embargo, las herramientas tradicionalmente no han estado integradas. Naturalmente, los métodos para estimar la respuesta en frecuencia directamente de los datos en el dominio del tiempo mediante análisis espectral es un tema clásico. De hecho, estas técnicas se vienen utilizando desde 1960.

Al mismo tiempo se puede distinguir una “comunidad” (generalmente ingenieros de control) que básicamente trabaja con datos en el dominio del tiempo y principalmente estima modelos paramétricos en el dominio del tiempo (modelos en el espacio de los estados y funciones de transferencia) y ocasionalmente se complementa con un análisis espectral. Otra comunidad (la mayoría ingenieros de “instrumentación y medida”) usa datos en el dominio de la frecuencia, entradas periódicas y experimentos controlados para construir modelos similares (funciones de transferencia) así como estimaciones de la respuesta en frecuencia.

Los analizadores de frecuencia son habitualmente utilizados para recoger y comprimir los datos. Por otro lado, el análisis modal y de vibración son aplicaciones comunes de este tipo. Hubo un periodo de tiempo, donde ambas comunidades científicas no estaban muy bien comunicadas. Por ejemplo el hecho de que la entrada al sistema no fuera periódica fue percibido como un obstáculo para utilizar técnicas en el dominio de la frecuencia. Además, estos métodos frecuenciales tenían el problema del “*leakage*”, donde señales con poco ruido en el dominio del tiempo resultaban en medidas ruidosas de la función de la respuesta en frecuencia. Sin embargo, se demuestra en (Pintelon and Schoukens, 2012, Ljung, 1999), que ambos dominios son equivalentes.

Entonces cabría preguntarse, si ambos dominios son equivalentes ¿para qué son necesarios los dos? La respuesta es que aunque ambos dominios aportan la misma información, puede ser más fácil acceder a esa información en un dominio que en otro ya que la información se representa de una forma diferente. Un ejemplo sencillo es una señal que sea la suma de tres ondas senoidales. En el dominio del tiempo sería muy difícil encontrar las tres frecuencias mientras que en el dominio de la frecuencia el problema se reduce a localizar tres picos en la respuesta frecuencial.

1.6.1 Datos procedentes del dominio del tiempo

El modelo discreto en el dominio del tiempo de una función de transferencia general puede ser:

$$y(t) = G(q, \theta)u(t) + H(q, \theta)e(t) \quad 1-22$$

Para datos muestreados equidistantes el error de predicción para este modelo es:

$$\varepsilon(t, \theta) = H^{-1}(q, \theta)(y(t) - G(q, \theta)u(t)) \quad 1-23$$

Una forma natural para estimar θ es minimizar el tamaño de estos errores de predicción:

$$V_N(\theta, Z^N) = \sum_{k=1}^N \varepsilon^2(t, \theta) \quad 1-24$$

1.6.2 Datos procedentes del dominio de la frecuencia

Si disponemos de las transformadas de Fourier de las señales de entrada y salida, la relación entre estas transformadas sería:

$$Y_N(e^{i\omega T}) = G(e^{i\omega T}, \theta)U_N(e^{i\omega T}) + V_N(e^{i\omega T}, \theta) \quad 1-25$$

$$E|V_N(e^{iwT})|^2 = \lambda |H(e^{iwT}, \theta)|^2 = \Phi_v(w, \theta)$$

donde λ es la varianza de $e(t)$ que se supone gaussiano. La relación expuesta arriba no es exacta, solamente aproximada, ya que el transitorio y las desviaciones debidas al hecho de que los datos pudieran no ser periódicos no se han tratado por simplificar. Aplicando el criterio de mínimos cuadrados se obtiene:

$$V_N(\theta, Z^N) = \sum_{k=1}^N \left| Y_N^k - G(e^{iw_k T}, \theta) U_N^k \right|^2 / (\lambda |H(e^{iw_k T}, \theta)|^2) \quad 1-26$$

donde, se ha reescrito

$$Y_N^k = Y(e^{iw_k T}). \quad 1-27$$

1.6.3 Conexión entre los dominios del tiempo y de la frecuencia

Para mostrar las similitudes entre ambos dominios se utiliza la relación de Parserval. La transformada de Fourier del error de predicción 1-23 es (ignorando el transitorio o asumiendo datos periódicos):

$$E_N(e^{iwT}, \theta) = H^{-1}(e^{iwT}, \theta) (Y_N(e^{iwT}) - G(e^{iwT}, \theta) U_N(e^{iwT})) \quad 1-28$$

Aplicando la relación de Parserval a 1-24 e ignorando los efectos transitorios, el criterio 1-24 expresado en el dominio de la frecuencia es:

$$V_N(\theta, Z^N) = \sum_{k=1}^N \left| Y_N^k - G(e^{iw_k T}, \theta) U_N^k \right|^2 / |H(e^{iw_k T}, \theta)|^2 \quad 1-29$$

Dividiendo esta expresión por la varianza λ se obtiene exactamente la misma ecuación 1-26. Por tanto, la expresión en el dominio del tiempo 1-23 se puede interpretar como un ajuste de curvas del modelo parametrizado a la estimación empírica de la función de transferencia, siendo ésta:

$$\hat{G}_N(e^{iwT}) = \frac{Y_N(e^{iwT})}{U_N(e^{iwT})} \quad 1-30$$

1.7 Identificación en tiempo continuo

En epígrafe anterior se muestra la posibilidad de estimar los parámetros de modelos en tiempo continuo mediante datos en el dominio de la frecuencia. Por lo tanto pudiese

aparecer la incógnita de si existe la posibilidad de estimar parámetros relacionados al tiempo continuo mediante datos obtenidos en tiempo discreto y aparejado a esto analizar la ventajas que daría identificar en tiempo continuo.

La modelización de un sistema normalmente está basada en la aplicación de los principios de la física. Esta descripción matemática proporciona una serie de parámetros clave en una forma genérica. Sin embargo, con el intensivo desarrollo digital que se está dando actualmente, incluso la modelización de los sistemas también es digital. De hecho, la mayoría de las aplicaciones que utilizan las técnicas de identificación trabajan exclusivamente en tiempo discreto, dado que las propiedades de estas se encuentran bien detalladas en (Ljung, 1999, Soderstrom and Stoica, 1989).

No obstante, para la mayoría, los coeficientes de los modelos discretos no ofrecen la misma interpretación física que los coeficientes de los modelos continuos. Además, la identificación en tiempo continuo también ha mantenido su avance, aunque desde el punto de vista del autor, ha estado bajo la sombra de la identificación en tiempo discreto. Un estado del arte de la identificación en tiempo continuo se puede desarrollar siguiendo a (Young, 1981, Unbehauen and Rao, 1987, Unbehauen and Rao, 1990, Unbehauen and Rao, 1998).

1.7.1 La importancia de los modelos en tiempo continuo

Los principales argumentos a favor de los modelos en tiempo continuo son los siguientes, (Mamani et al., 2009):

- Los modelos de los sistemas físicos que se derivan de los principios físicos son inherentemente continuos en el tiempo, porque las leyes físicas donde se basa el modelado están en tiempo continuo.
- Permiten un mejor entendimiento del comportamiento físico del sistema en consideración, ya que los parámetros del modelo están muy correlacionados con las propiedades físicas del sistema.
- Si existe un conocimiento parcial, se mantiene en los modelos en tiempo continuo. Si un modelo en tiempo continuo que contiene algunos parámetros conocidos se discretiza, estos parámetros se pierden en el proceso de discretización.
- Los métodos convencionales en tiempo discreto no están en armonía con el espíritu del tiempo continuo, donde períodos de muestreo pequeños no convergen a los

resultados correspondientes al modelo en tiempo continuo original. Además, el retorno del modelo convencional en tiempo discreto al modelo original en tiempo continuo puede ser muy complicado.

Por tanto, si la identificación en tiempo continuo posee todas estas ventajas, ¿por qué se identifica generalmente en tiempo discreto? La respuesta es muy simple, la estimación de las derivadas temporales de las señales introducen ruido en la estimación.

1.7.2 La problemática de la identificación en tiempo continuo

La principal dificultad en manejar modelos en tiempo continuo es debido a la presencia del operador derivada asociado con las señales de entrada y salida. Mientras que estas señales se pueden medir directamente, sus derivadas son indeseables desde el punto de vista práctico.

Esto es debido a que las estimaciones de las derivadas de una señal en tiempo continuo se comportan como amplificadores del ruido de alta frecuencia proporcionando estimaciones de baja calidad. Por tanto, es necesario tratar estas estimaciones de las derivadas. En general, estas estimaciones vienen acompañadas de un filtro de paso bajo para atenuar esta amplificación del ruido de alta frecuencia. Las maneras de abordar este filtrado son varias, un resumen de estas técnicas se puede consultar en (Unbehauen and Rao, 1998) y la regularización de estos filtrados en (Brie and Richard, 2005).

1.8 Identificación Algebraica

En la actualidad existe una línea de identificación con un punto de vista completamente diferente, basada en álgebra diferencial y cálculo operacional, se llega a desarrollar una serie de estimadores “a medida”.

Lo que ha motivado a que esta tesis esté enfocada específicamente a la identificación algebraica es el hecho de que las técnicas habituales de identificación se realizan en el dominio del tiempo discreto y por lo tanto, (Trapero Arenas, 2008):

- Son muy sensibles al periodo de muestreo.
- Requieren la transformación desde el tiempo discreto al tiempo continuo
- No es fácil obtener los valores de los parámetros físicos a menudo se requieren herramientas y modelos probabilísticos de ruidos.

- La convergencia en la estimación de los parámetros puede ser lenta.

En contraposición la técnica de identificación algebraica:

- Realiza las estimaciones en el dominio del tiempo continuo.
- Es independiente del período de muestreo o sea se puede muestrear de forma aperiódica.
- Los parámetros físicos se estiman directamente.
- No requiere de modelos estadísticos precisos del ruido.
- La convergencia en la estimación de los parámetros es muy rápida.

1.9 Consideraciones parciales

A partir una revisión bibliográfica de la literatura especializada que permite realizar un análisis crítico de la identificación algebraica, se arriban a las siguientes consideraciones:

A pesar de la evolución que ha tenido el uso de la técnica de identificación algebraica en la estimación de parámetros, se hace necesario su estudio debido a la complejidad que expone la base matemática que sustenta el desarrollo de la misma. Para esto se impone la implementación de este algoritmo de identificación con ejemplos concretos que permitan reflejar de manera más factible la metodología que utiliza.

CAPÍTULO 2. Estimador Algebraico

2.1 Introducción

En el presente capítulo se define el desarrollo matemático para la identificación algebraica mediante el método derivativo algebraico. Para esto se plantea la estimación de los parámetros de una señal sinusoidal haciendo uso de esta metodología. Se muestra el carácter algebraico del método basado en el álgebra diferencial y el cálculo operacional ya que con frecuencia se normaliza mediante la transformada de Laplace. Aunque los fundamentos matemáticos de la identificación algebraica sean complejos se comprobará posteriormente que el desarrollo es sencillo.

2.2 Identificación Algebraica

Anteriormente se definió que la identificación algebraica se realiza en tiempo continuo por lo que los principales desarrollos de esta tesis mayormente son en tiempo continuo, ver (Sira-Ramírez and Fliess, 2002, Fuchshumer, 2006, Fliess et al., 2006). En este apartado se muestra el desarrollo matemático utilizado en la estimación de parámetros mediante el método derivativo algebraico.

2.2.1 Base matemática

Se considera el campo de números reales o complejos descrito por k y se define como $k \left[\frac{d}{dt} \right]$ el anillo de operadores diferenciales lineales con coeficientes en k :

$$\sum_{j=0}^{finite} c_v \frac{d^j}{dt^j}, c_v \in k$$

Los anillos de operadores diferenciales lineales también pueden ser llamados anillos diferenciales. Se considera un conjunto finito de indeterminaciones, tal que (y_1, \dots, y_m) , en asociación con un anillo de operadores lineales diferenciales.

Estas indeterminaciones representan las variables que describen, en el dominio del tiempo, las señales de donde se obtienen los parámetros desconocidos. La forma más general en que los parámetros pueden aparecer en los coeficientes de una expresión diferencial incluye expresiones algebraicas involucrando sumas, multiplicaciones, raíces, etc., de dichos parámetros. En otras palabras las expresiones de los parámetros provienen de las soluciones de las ecuaciones algebraicas que envuelven los parámetros desconocidos.

Un objeto natural adecuado para expresar la complejidad de tales expresiones, que aparecen en los coeficientes de un polinomio diferencial, está dado por una extensión algebraica finita del campo de los números reales o complejos.

Sea $k = k(\theta)$ una extensión algebraica finita del campo $k = C, R$, de los números complejos o reales, generados por un conjunto finito, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)$, de parámetros constantes desconocidos.

Sea S/k una extensión algebraica diferencial de dimensión finita, donde una señal es un elemento de S . Sea L/k una extensión algebraica diferencial y N un subconjunto de L . El sobre-campo diferencial de k generado por N se describe tal que $k \langle N \rangle$.

El conjunto θ de parámetros desconocidos se dice ser algebraicamente identificable si, y solo si, cualquier componente de θ es algebraico sobre $k \langle t, y \rangle$. Se dice ser linealmente identificable si, y solo si,

$$P \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_r \end{pmatrix} = Q$$

donde

- P y Q son matrices rxr y $rx1$
- las entradas de P y Q pertenecen al rango $k \left[\frac{d}{dt} \right]^{(1,y)}$
- $\det(P) \neq 0$.

Donde rango $k \left[\frac{d}{dt} \right]^{(1,y)}$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de $(1, y_1, \dots, y_m)$

i. e. $D_0 \cdot 1 + \sum_{i=1}^m D_i y_i$. Los coeficientes D_i pertenecen a $k \left[\frac{d}{dt} \right]$. Por tanto, D_i es un operador diferencial de la forma

$$\sum_{j=i}^n \left(\frac{\sum_{k=0}^{k_j} a_{kj} t^k}{\sum_{l=0}^{l_j} b_{lj} t^l} \right) \frac{d^j}{dt^j}$$

con $a_{kj}, b_{lj} \in k$.

2.2.2 Metodología algebraica

1. Tomar transformadas de Laplace en la ecuación diferencial (señales libres de ruidos) y reordenar como un polinomio en "s".
2. Derivar respecto a "s" tantas veces como sea preciso para eliminar las condiciones iniciales.
3. Dividir la ecuación resultante por una potencia de "s" para evitar el tener que derivar en el dominio del tiempo.
4. Realizar la transformación inversa de la ecuación resultante, devolviéndola al dominio del tiempo: $P \cdot \theta = Q$ donde $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)^T$ es el conjunto de los parámetros desconocidos, y P y Q son, respectivamente, matrices rxr y $rx1$ cuyas entradas pertenecen al espacio vectorial generado $k \left[t, \frac{d}{dt} \right] (u, y)$.
5. Aislar el parámetro a estimar.

Las secciones que siguen tienen como objetivo mostrar al lector de la manera más simple el funcionamiento del método derivativo algebraico a través de un ejemplo concreto de estimación de parámetros procedentes de una señal sinusoidal.

2.3 Estimador de parámetros de señal sinusoidal

Sea la siguiente señal sinusoidal:

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \tag{2-1}$$

Siendo A la amplitud, ω la frecuencia angular, y φ la fase. Se desea estimar estos tres parámetros con la mejor exactitud y el tiempo de convergencia mínimo posible.

2.3.1 Estimador de frecuencia en línea

Teniendo la ecuación diferencial de segundo que describe el comportamiento de la señal sinusoidal:

$$\ddot{y}(t) = -w^2 y(t) \quad 2-2$$

Aplicando la transformada de Laplace a 2-2, (Mikusinski and Boehme, 1987, Yosida, 1984):

$$s^2 y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + w^2 y(s) = 0 \quad 2-3$$

Donde $\dot{y}(0)$ y $y(0)$ son condiciones iniciales y s la variable compleja. Si se deriva dos veces 2-3 respecto a la variable s , se eliminan las condiciones iniciales y se obtiene una expresión que contiene solo integrales de $y(t)$, de la siguiente forma¹:

$$\frac{s^2 d^2 y(s)}{d s^2} + \frac{4s dy(s)}{ds} + \left(2y(s) + w^2 \frac{d^2 y(s)}{d s^2} \right) = 0 \quad 2-4$$

al multiplicar por s^{-2} para eliminar las derivaciones implícitas en las potencias de s ,

$$\frac{d^2 y(s)}{d s^2} + \frac{4s^{-1} dy}{ds} + s^{-2} \left(2y(s) + w^2 \frac{d^2 y(s)}{d s^2} \right) = 0 \quad 2-5$$

de 2-5 es fácil despejar el término w^2 :

$$w^2 = - \frac{\left[\frac{d^2 y(s)}{d s^2} + \frac{4s^{-1} dy}{ds} + s^{-2} 2y(s) \right]}{s^{-2} \frac{d^2 y(s)}{d s^2}} \quad 2-6$$

al expresar este término en el dominio del tiempo se obtiene :

$$w^2 = \frac{n(t)}{d(t)} = - \frac{\left[t^2 y(t) - 4 \int t y(t) + 2 \int^{(2)} y(t) \right]}{\int^{(2)} t^2 y(t)} \quad 2-7$$

En (Becedas et al., 2007) se aplica esta metodología. Una manera de implementar 2-7 es mediante filtros en forma Brunowski como sigue:

¹ Se define $\int^{(a)} u(t)$ como el conjunto de integrales $\int_0^t \int_0^{\sigma_i} \dots \int_0^{\sigma_{j-1}} u(\sigma_j) d\sigma_j \dots d\sigma_1$

$$n(t) = -[x_1 + t^2 y(t)] \quad d(t) = x_3 \quad 2-8$$

$$\dot{x}_1 = x_2 - 4ty(t) \quad \dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_2 = 2y(t) \quad \dot{x}_4 = t^2 y(t)$$

2.3.2 Estimador de amplitud y fase en línea

En la estimación de la amplitud y la fase resultan muy útiles las condiciones iniciales dado que:

$$y(0) = A \sin(\varphi) \quad 2-9$$

$$\dot{y}(0) = Aw \cos \varphi$$

a partir de estas condiciones iniciales y conociendo la frecuencia se pueden obtener la amplitud y fase con las siguientes relaciones:

$$A = \sqrt{\frac{\dot{y}^2(0)}{w^2} + y(0)^2} \quad 2-10$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(w \frac{y(0)}{\dot{y}(0)} \right)$$

Por lo tanto el problema se centra en obtener las condiciones iniciales. De la ecuación 2-3 se puede despejar $\dot{y}(0)$ y derivando una vez esta ecuación pues resulta fácil obtener $y(0)$ obteniéndose:

$$y(0) = \frac{-ty(t) + 2 \int y(t) - w^2 \int^{(2)} ty(t)}{t} \quad 2-11$$

$$\dot{y}(0) = \frac{y(t) - y(0) + w^2 \int^{(2)} y(t)}{t}$$

Sustituyendo estas expresiones en 2-10 se obtienen las estimaciones de la amplitud y la fase.

2.4 Simulación

Con el objetivo de demostrar que el algoritmo planteado anteriormente presenta buenos resultados pues se ha realizado la simulación en el Simulink de Matlab, ver Figura A 1. Considere que se desea obtener la frecuencia, amplitud y fase de la siguiente señal:

$$y(t) = 20\sin(5t + 3)$$

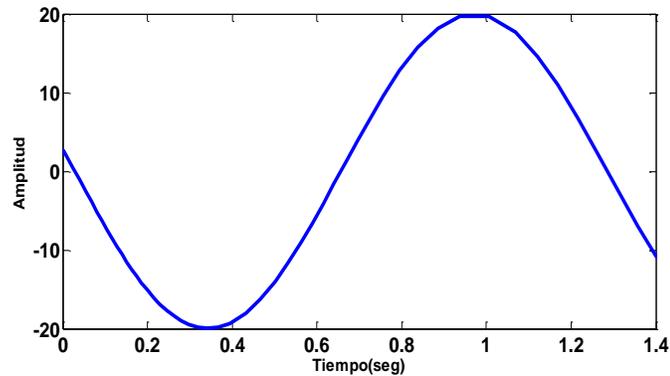


Figura 2-1. Señal sinusoidal

La Figura 2-1 muestra la señal $y(t)$. En la Figura 2-2 se muestra la estimación de la frecuencia w usando el método algebraico.

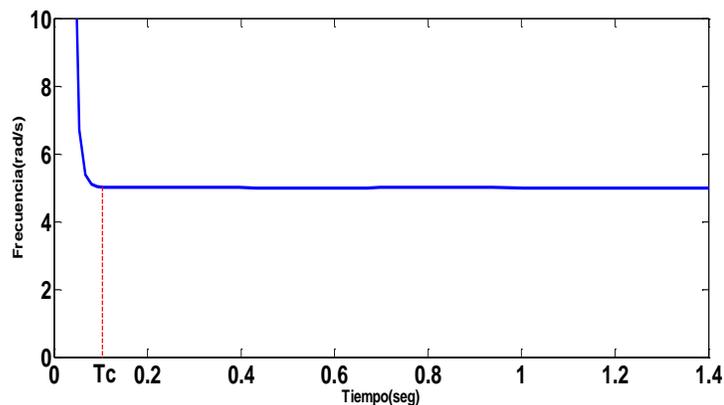


Figura 2-2. Estimación de frecuencia

Luego en la Figura 2-3 y en la Figura 2-4 se muestra la estimación de la amplitud y la fase así como el tiempo T_c en que convergen a los parámetros:

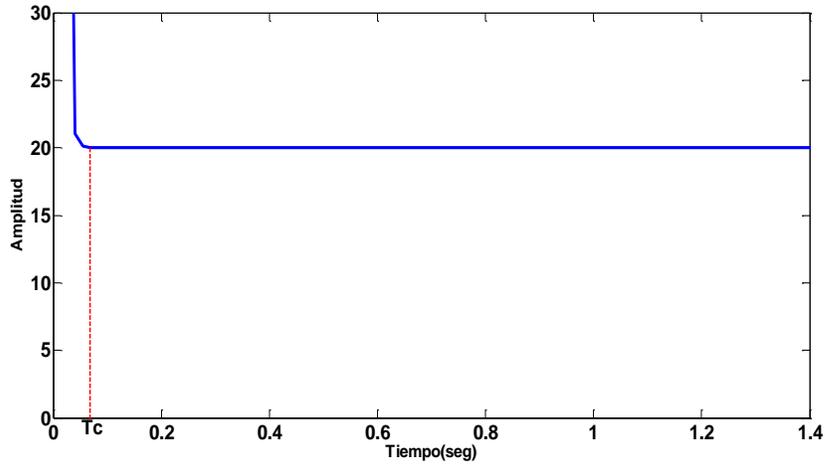


Figura 2-3. Estimación de amplitud

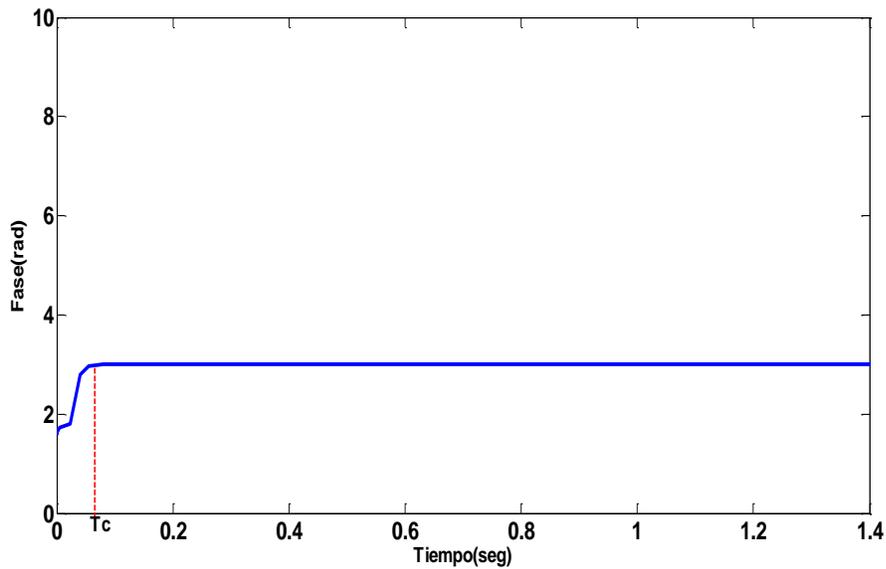


Figura 2-4. Estimación de fase

2.5 Estimación de frecuencia de señal ruidosa

Anteriormente se ha expuesto el funcionamiento del algoritmo en la estimación de los parámetros de una señal sinusoidal libre de ruido. Debido a que en la práctica es difícil efectuar una medición libre de ruido se pretende introducir otro apartado que aborde estas estimaciones pero en presencia de esta perturbación. Modificando la de expresión $y(t)$ se tiene:

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi) + e(t) \quad 2-12$$

Se ha incorporado la señal ruidosa con el término $e(t)$, siendo este un ruido estocástico de media cero y distribución desconocida. Recordando que las estimaciones de los parámetros se basan en un cociente de términos pues el tratamiento del ruido se puede afrontar incluyendo un filtro Butterworth de segundo orden en el numerador y el denominador de las ecuaciones 2-7 y 2-11 que presenta una frecuencia de corte ω_n y un coeficiente de amortiguamiento ζ y no afecta el resultado del cociente, en (Becedas and Feliu, 2002) se aplica esta idea. En el caso de la estimación de la frecuencia sería:

$$\omega^2 = - \frac{\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \left[t^2 y(t) - 4 \int t y(t) + 2 \int^{(2)} y(t) \right]}{\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \left[\int^{(2)} t^2 y(t) \right]} \quad 2-13$$

la ecuación 2-13 expresada en forma de filtros Brunowski queda del siguiente modo :

$$\begin{aligned} n(t) &= -[x_1 + t^2 y(t)] & d(t) &= x_3 & 2-14 \\ \dot{x}_1 &= x_2 - 4t y(t) & \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_2 &= 2y(t) & \dot{x}_4 &= t^2 y(t) \\ \dot{x}_5 &= x_6 & \dot{x}_7 &= x_8 \\ \dot{x}_6 &= -2\zeta\omega_n x_6 - \omega_n^2(x_5 - n(t)) & \dot{x}_8 &= -2\zeta\omega_n x_8 - \omega_n^2(x_7 - d(t)) \end{aligned}$$

Concluyendo la estimación de ω^2 se obtiene según:

$$\omega^2 = \begin{cases} \text{arbitrario}, & t \in [0, \varepsilon] \\ \frac{n_f(t)}{d_f(t)} = \frac{x_5}{x_7}, & t \in [\varepsilon, +\infty] \end{cases} \quad 2-15$$

2.6 Simulación

Para demostrar el algoritmo previamente discutido se han realizado una serie de simulaciones en Matlab/Simulink. Suponiendo que se desea estimar la frecuencia de la siguiente señal:

$$y(t) = 5 \sin(2t + 2) + e(t)$$

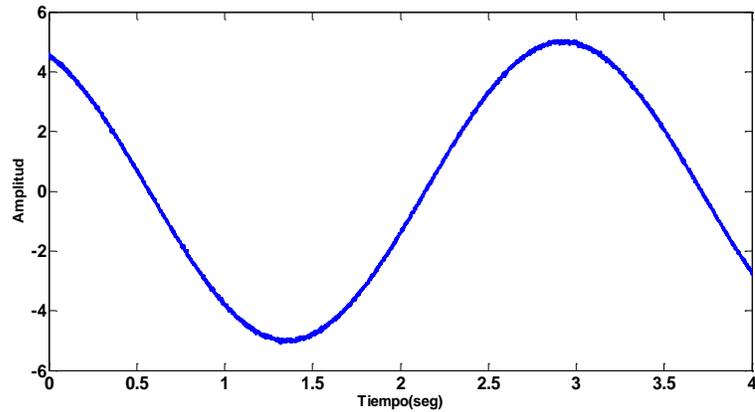


Figura 2-5. Estimación de fase

Donde $e(t)$ es un proceso estocástico de media cero generado por la instrucción `rand` en Matlab. Esta señal estocástica está distribuida uniformemente en el intervalo de $[-0.1, 0.1]$ las estimaciones han sido filtradas con integradores puros de la forma $\frac{1}{s^p}$ esta hipótesis está motivada y justificada por los desarrollos recientes dirigidos hacia una nueva teoría sobre el comportamiento del ruido. Los detalles se pueden encontrar en (Fliess, 2006). La Figura 2-5 muestra el comportamiento de la señal $y(t)$ y la Figura 2-6 muestra la estimación de la frecuencia w para la señal sinusoidal usando el método algebraico

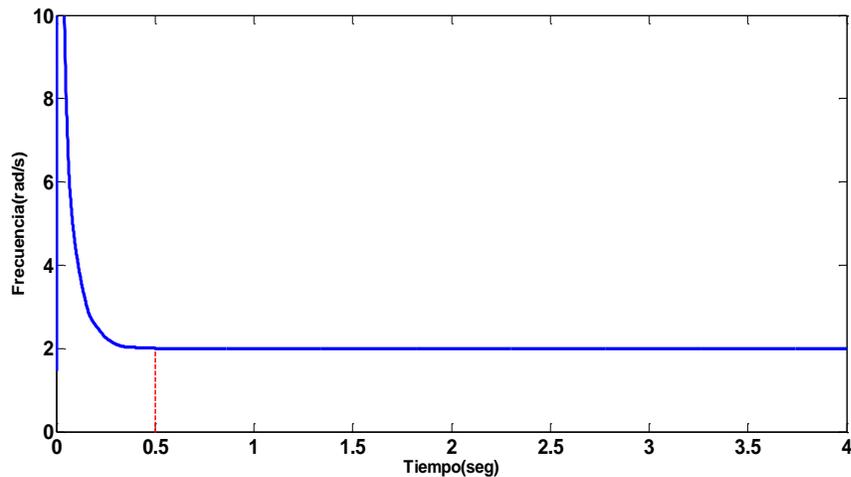


Figura 2-6. Estimación de fase

La estimación de la frecuencia se obtiene aproximadamente en 0.5 segundos mientras que el período T de la señal es de π segundos.

2.7 Estimador de parámetros de señal sesgada

Varias son las señales reales que están afectadas por una perturbación constante o sesgo. La no inclusión de esta perturbación constante en el algoritmo puede traer consigo un error entre el valor estimado y el real por lo que es de vital importancia el tratamiento del mismo. A continuación se propone una solución a este problema mostrándose la señal $y(t)$ como sigue:

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi) + e(t) + k \quad 2-16$$

de manera que k representa la constante de valor desconocido. Conjunto con esto se plantea la problemática que representa la estimación de la frecuencia ω , la fase φ y la amplitud A de la señal $y(t)$.

Primeramente se ha definido la señal libre de ruido estocástico $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) + k$, siendo $y(t) = x(t) + e(t)$. Aplicando la transformada de Laplace a $x(t)$ se verifica que:

$$x(s) = \frac{A\omega \cos \varphi}{s^2 + \omega^2} + \frac{sA \sin \varphi}{s^2 + \omega^2} + \frac{k}{s} \quad 2-17$$

Se supone que φ es estrictamente positiva y menor que 2π , con el objetivo de obtener los parámetros desconocidos se ha planteado realizar manipulaciones algebraicas que solo incluyen convoluciones de la señal $y(t)$ y permiten eliminar el sesgo k . Sea el vector $v_3 = A\omega \cos \varphi$, $v_2 = A \sin \varphi$ y $v_1 = \omega^2$. Se puede apreciar que si se conoce el vector $v = (v_1, v_2, v_3)$ de parámetros constantes pues fácilmente se pueden calcular los parámetros ω , φ y A utilizando las siguientes expresiones:

$$\omega = \sqrt{v_1}, A = \sqrt{\frac{v_3^2}{v_1} + v_2^2} \text{ y } \varphi = \tan^{-1} \frac{v_2 \sqrt{v_1}}{v_3}$$

2.7.1 Estimación de frecuencia en línea

Reutilizando la expresión 2-17 y expresándola en función de v se obtiene:

$$x(s) = \frac{v_3}{s^2 + v_1} + \frac{sv_2}{s^2 + v_1} + \frac{k}{s} \quad 2-18$$

Si se multiplica por el polinomio $s(s^2 + v_1)$ luego reajustando los términos se obtiene:

$$s^3 x(s) + v_1 s x(s) = (v_2 + k)s^2 + v_3 s + k v_1 \quad 2-19$$

Con el objetivo de aislar el parámetro v_1 se ha diferenciado tres veces la expresión 2-19 con respecto a la variable compleja s , quedando eliminados la constante k y los términos $v_3 s$ y $v_2 s^2$, (Kolchin, 1973), quedando:

$$s^3 \frac{d^3 x(s)}{ds^3} + 9s^2 \frac{d^2 x(s)}{ds^2} + 18s \frac{dx(s)}{ds} + 6x(s) + v_1 \left[s \frac{d^3 x(s)}{ds^3} + 3 \frac{d^2 x(s)}{ds^2} \right] = 0$$

Multiplicando por s^{-3} para eliminar las derivaciones en el dominio del tiempo implícitas en las potencias positivas de s y despejando v_1 queda:

$$v_1 = - \left[\frac{\frac{d^3 x(s)}{ds^3} + 9s^{-1} \frac{d^2 x(s)}{ds^2} + 18s^{-2} \frac{dx(s)}{ds} + 6s^{-3} x(s)}{s^{-2} \frac{d^3 x(s)}{ds^3} + 3s^{-3} \frac{d^2 x(s)}{ds^2}} \right] \quad 2-20$$

Luego aplicando la anti-transformada pues se obtiene la expresión equivalente de v_1 en el dominio del tiempo quedando un cociente de una combinación lineal de integrales sobre la señal $x(t)$,

$$v_1 = \frac{n_{1x(t)}}{d_{1x(t)}}$$

$$\frac{n_{1x(t)}}{d_{1x(t)}} = \frac{t^3 x(t) - 9 \int t^2 x(t) + 18 \int^{(2)} t x(t) - 6 \int^{(3)} x(t)}{-\int^{(2)} t^3 x(t) + 3 \int^{(3)} t^2 x(t)} \quad 2-21$$

Producto de que la señal $x(t)$ no es cuantificable y solo se cuenta con la señal ruidosa $y(t)$ pues hay que sustituir $x(t)$ por $y(t)$ en 2-21 en la estimación de v_1 . Posteriormente se aplica un clásico filtro paso bajo al numerador y al denominador sin afectar el resultado del cociente, de modo que:

$$v_1 = \frac{F(s) n_{1x(t)}}{F(s) d_{1x(t)}}$$

Donde:

$$F(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2}$$

$$n_{1f}(t) = t^3 y(t) - 9 \int t^2 y(t) + 18 \int^{(2)} t y(t) - 6 \int^{(3)} y(t)$$

$$d_{1f}(t) = - \int^{(2)} t^3 y(t) + 3 \int^{(3)} t^2 y(t)$$

Se han utilizado exactamente los mismos filtros paso bajo con frecuencia de corte w_n y coeficiente de amortiguamiento ζ que en la sección 2-4 .La implementación del algoritmo se lleva a cabo utilizando filtros variantes en el tiempo:

$$n_{1f}(t) = z_1 + t^3 y(t) \qquad d_{1f}(t) = z_4 \qquad 2-22$$

$$\dot{z}_1 = z_2 - 9t^2 y(t)$$

$$\dot{z}_4 = z_5$$

$$\dot{z}_2 = z_3 + 18ty(t)$$

$$\dot{z}_5 = z_6 - t^3 y(t)$$

$$\dot{z}_3 = -6y(t)$$

$$\dot{z}_6 = 3t^2 y(t)$$

$$\dot{z}_7 = z_8$$

$$\dot{z}_9 = z_{10}$$

$$\dot{z}_8 = -2\zeta w_n z_8 - w_n^2 (z_7 - n_{1f}(t)) \qquad \dot{z}_{10} = -2\zeta w_n z_{10} - w_n^2 (z_9 - d_{1f}(t))$$

Finalmente la estimación de $v_1 = w^2$ se obtiene según:

$$w^2 = \begin{cases} \text{arbitrario}, & t \in [0, \varepsilon] \\ \frac{n_{1f}(t)}{d_{1f}(t)}, & t \in [\varepsilon, +\infty] \end{cases} \qquad 2-23$$

2.7.2 Estimación en línea de la amplitud y la fase

Luego de haber calculado v_1 se ha resuelto parte del problema que representa estimar la amplitud y la fase debido a que se asume entonces que v_1 es conocido. Teniendo en cuenta la expresión 2-18 la cual representa la transformada de Laplace de $x(t)$, multiplicándola por s y diferenciando con respecto a s , (Buium, 1994), se logra:

$$x(s) + s \frac{dx(s)}{ds} = v_3 \left[\frac{1}{s^2 + v_1} - \frac{2s^2}{(s^2 + v_1)^2} \right] + v_2 \left[\frac{2s}{s^2 + v_1} - \frac{2s^3}{(s^2 + v_1)^2} \right]$$

Multiplicando la expresión por $(s^2 + v_1)^2$ y reajustando se obtiene:

$$(s^2 + v_1)^2 \left[x(s) + s \frac{dx(s)}{ds} \right] = -v_3 s^2 + 2sv_1 v_2 + v_1 v_3 \quad 2-24$$

Diferenciando dos veces con respecto a s se eliminan los términos $v_1 v_3$ y $2sv_1 v_2$. Lo que da lugar a la siguiente fórmula en el dominio de la frecuencia para v_3 :

$$v_3 = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \left\{ (s^2 + v_1)^2 \left[x(s) + s \frac{dx(s)}{ds} \right] \right\}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} v_3 = & -\frac{1}{2} \left[s^5 \frac{d^3 x(s)}{ds^3} + 11s^4 \frac{d^2 x(s)}{ds^2} + s^3 \left(28 \frac{dx(s)}{ds} + 2v_1 \frac{d^3 x(s)}{ds^3} \right) \right. \\ & + s^2 \left(12x(s) + 14v_1 \frac{d^2 x(s)}{ds^2} \right) + s \left(20v_1 \frac{dx(s)}{ds} + v_1^2 \frac{d^3 x(s)}{ds^3} \right) \\ & \left. + 4v_1 x(s) + 3v_1^2 \frac{d^2 x(s)}{ds^2} \right] \end{aligned} \quad 2-25$$

Integrando cinco veces para eliminar las potencias positivas de s , o sea, multiplicando la expresión 2-17 por s^{-5} se llega a:

$$\begin{aligned} s^{-5} v_3 = & -\frac{1}{2} \left[\frac{d^3 x(s)}{ds^3} + 11s^{-1} \frac{d^2 x(s)}{ds^2} + s^{-2} \left(28 \frac{dx(s)}{ds} + 2v_1 \frac{d^3 x(s)}{ds^3} \right) \right. \\ & + s^{-3} \left(12x(s) + 14v_1 \frac{d^2 x(s)}{ds^2} \right) \\ & + s^{-4} \left(20v_1 \frac{dx(s)}{ds} + v_1^2 \frac{d^3 x(s)}{ds^3} \right) \\ & \left. + s^{-5} \left(4v_1 x(s) + 3v_1^2 \frac{d^2 x(s)}{ds^2} \right) \right] \end{aligned} \quad 2-26$$

Transformando al dominio del tiempo el parámetro v_3 se calcula mediante la expresión:

$$\begin{aligned}
v_3 = & -\frac{12}{t^4} \left[-t^3 x(t) + 11 \left(\int t^2 x(t) \right) - 28 \left(\int^{(2)} t x(t) \right) + 12 \left(\int^{(3)} x(t) \right) \right. \\
& + v_1 \left(-2 \int^{(2)} t^3 x(t) + 14 \left(\int^{(3)} t^2 x(t) \right) - 20 \left(\int^{(4)} t x(t) \right) \right. \\
& \left. \left. + 4 \left(\int^{(5)} x(t) \right) \right) + v_1^2 \left(-\int^{(4)} t^3 x(t) + 3 \left(\int^{(5)} t^2 x(t) \right) \right) \right] \quad 2-27
\end{aligned}$$

Esta expresión se puede implementar mediante un cociente de las salidas de los siguientes filtros variantes en el tiempo en forma Brunowski. Nuevamente la señal $x(t)$ es sustituida por $y(t)$. La implementación del estimador del parámetro v_3 queda como el siguiente cociente :

$$v_3 = \frac{n_3(t)}{d_3(t)}$$

Resaltar que se aplican los clásicos filtros paso bajo que se utilizaron en la sección anterior.

$$\begin{aligned}
n_3(t) = [v_{31} + v_1 v_{32} + v_1^2 v_{33}] & \quad d_3(t) = -\frac{t^4}{12} & \quad v_{33} = z_9 & \quad 2-28 \\
v_{31} = z_1 - t^3 y(t) & & \quad \dot{z}_9 = z_{10} & \\
\dot{z}_1 = z_2 + 11t^2 y(t) & \quad v_{32} = z_4 & \quad \dot{z}_{10} = z_{11} & \\
\dot{z}_2 = z_3 - 28ty(t) & \quad \dot{z}_4 = z_5 & \quad \dot{z}_{11} = z_{12} & \\
\dot{z}_3 = 12y(t) & \quad \dot{z}_5 = z_6 - 2t^3 y(t) & \quad \dot{z}_{12} = z_{13} - t^3 y(t) & \\
& \quad \dot{z}_6 = z_7 + 14t^2 y(t) & \quad \dot{z}_{13} = 3t^2 y(t) & \\
& \quad \dot{z}_7 = z_8 - 20ty(t) & & \\
& \quad \dot{z}_8 = 4y(t) & &
\end{aligned}$$

Se pueden filtrar el numerador y el denominador en la expresión 2-28 logrando la siguiente estimación para el parámetro v_3 :

$$v_3 = \begin{cases} \text{arbitrario}, & t \in [0, \varepsilon] \\ \frac{n_{3f}(t)}{d_{3f}(t)}, & t \in [\varepsilon, +\infty] \end{cases} \quad 2-29$$

con

$$\dot{n}_{3f} = -2 \zeta w_n \dot{n}_{3f} - w_n^2 (n_{3f} - n_3(t)) \quad 2-30$$

$$\ddot{d}_{3f} = -2 \zeta w_n \dot{d}_{3f} - w_n^2 (d_{3f} - d_3(t))$$

El parámetro v_2 se puede obtener integrando cinco veces la expresión 2-16 arribando a que:

$$v_{2x(s)} = \frac{n_{2x}(s)}{d_{2x}(s)}$$

$$n_{2x}(s) = \frac{dx(s)}{ds} + s^{-1}x(s) + 2v_1s^{-2}\frac{dx(s)}{ds} + 2v_1s^{-3}x(s) + v_1^2s^{-4}\frac{dx(s)}{ds} + v_1^2s^{-5}x(s) \\ + v_3s^{-3} - v_1v_3s^{-5}$$

$$d_{2x}(s) = 2s^{-4}v_1$$

El parámetro v_2 se puede estimar según:

$$v_2 = \frac{3}{t^3v_1} \left[-tx(t) + \int x(t) + 2v_1 \left(-\int^{(2)} tx(t) + \int^{(3)} x(t) \right) \right. \\ \left. + v_1^2 \left(-\int^{(4)} tx(t) + \int^{(5)} x(t) \right) - v_1v_3 \frac{t^4}{24} + v_3 \frac{t^2}{2} \right] \quad 2-31$$

Nuevamente se sustituye la señal $x(t)$ por $y(t)$ y se implementa como sigue:

$$n_2(t) = \left[v_{21} + 2v_1v_{22} + v_1^2v_{23} \right. \\ \left. - v_1v_3 \frac{t^4}{24} + v_3 \frac{t^2}{2} \right] \quad d_2(t) = \frac{t^3v_1}{3} \quad v_{23} = z_5 \quad 2-32 \\ v_{22} = z_2 \quad \dot{z}_5 = z_6 \\ \dot{z}_2 = z_3 \quad \dot{z}_6 = z_7 \\ v_{21} = z_1 - ty(t) \quad \dot{z}_3 = z_4 - ty(t) \quad \dot{z}_7 = z_8 \\ \dot{z}_1 = y(t) \quad \dot{z}_4 = y(t) \quad \dot{z}_8 = z_9 - ty(t) \\ \dot{z}_9 = y(t)$$

Finalmente para estimar el parámetro v_2 se plantea la siguiente fórmula en el dominio del tiempo:

$$v_2 = \begin{cases} \text{arbitrario}, & t \in [0, \varepsilon] \\ \frac{n_{2f}(t)}{d_{2f}(t)}, & t \in [\varepsilon, +\infty] \end{cases}$$

siendo:

$$\ddot{n}_{2f}(t) = -2 \zeta w_n \dot{n}_{2f} - w_n^2 (n_{2f} - n_2(t))$$

$$\ddot{d}_{2f}(t) = -2 \zeta w_n \dot{d}_{2f} - w_n^2 (d_{2f} - d_2(t))$$

2.8 Consideraciones parciales

En este capítulo se ha demostrado de manera concreta la base matemática y la metodología que sustentan la técnica de identificación algebraica. Se hace uso de una aplicación sencilla que refleje de manera clara cada paso que se debe tener en cuenta a la hora de identificar un modelo de sistema físico aplicando la metodología algebraica. A partir de esto se cuenta con las herramientas necesarias para aplicar la técnica de identificación algebraica en la estimación de los parámetros del modelo de un motor de corriente directa.

CAPÍTULO 3. Metodología derivativa algebraica aplicada al motor de corriente directa

3.1 Introducción

Según muestra la revisión bibliográfica realizada en el primer capítulo, la técnica de identificación algebraica es capaz de obtener los parámetros de un modelo de sistema con un tiempo de convergencia menor que las técnicas clásicas de identificación y además posee la ventaja de realizar la toma de muestras de forma aperiódica. Por lo tanto, resulta de interés aplicar esta técnica de identificación a una planta simple, en este caso al motor de corriente directa y precisamente esto es lo que aborda este capítulo.

Para esto se propone una primera sección que plantea la metodología a emplear en la obtención del modelo de un motor de corriente directa, luego una segunda que refleja el procedimiento algebraico aplicado al motor de corriente directa reflejándose claramente la metodología presentada en el segundo capítulo de esta tesis. Luego se exponen los resultados obtenidos con la planta simulada y en el trabajo con la planta real.

3.2 Modelo de un motor de corriente directa

En esta sección se explica la metodología a emplear en la obtención del modelo de un motor de corriente directa. Se asume que el modelo lineal es afectado por una perturbación constante debido a los efectos de la fricción de coulomb (Olsson et al., 1998).

El reductor de engranajes del motor de corriente directa es usado en muchos sistemas de control, este comúnmente es suplido por un servo-amplificador que controla la entrada de corriente al motor, esta es proporcional a la tensión suplida al servoamplificador por el

ordenador de control. Las ecuaciones que completan el sistema son las siguientes (Becedas et al., 2008):

$$\text{Motor: } k_m I = J_r \ddot{\hat{\theta}}_m + v_r \dot{\hat{\theta}}_m + \Gamma_{cr} \quad 3-1$$

$$\text{Servo-amplificador: } i = k_a V \quad 3-2$$

$$\text{Reductor: } \hat{\Gamma}_{cr} = \frac{\Gamma_{cr}}{n} \text{ y } \hat{\theta}_m = n \theta_m \quad 3-3$$

Donde:

k_m es la constante electromecánica del motor (N m/A).

i es la corriente suplida al motor por el servoamplificador (A).

J_r es la inercia desconocida del motor (Kg m²).

v_r es el coeficiente de fricción viscoso (N m s).

$\hat{\Gamma}_{cr}$ es el torque por fricción de coulomb que afecta la dinámica del motor (N m).

k_a es la ganancia del amplificador (A/V).

$\hat{\theta}_m$ es la posición angular del motor (rad).

$\dot{\hat{\theta}}_m$ es la velocidad angular del motor (rad/s).

$\ddot{\hat{\theta}}_m$ es la aceleración angular del motor (rad/s²).

n es la relación de reducción del motor.

V es el voltaje de entrada del motor siendo este una variable de control del sistema (V).

Combinando las ecuaciones 3-1 y 3-3 se obtiene la siguiente expresión:

$$kV = J_r \ddot{\hat{\theta}}_m + v_r \dot{\hat{\theta}}_m + \hat{\Gamma}_{cr}(\hat{\theta}_m) \quad 3-4$$

Donde $k = k_m k_a$

El torque por fricción de coulomb es un término no lineal, se considera una entrada perturbadora del sistema. Cuando el motor está rotando ($\dot{\hat{\theta}}_m \neq 0$) este torque solo depende del signo de la velocidad angular del motor:

$$\mu_r = \text{sign}(\dot{\hat{\theta}}_m) \quad 3-5$$

Cuando la velocidad angular del motor es cero ($\dot{\hat{\theta}}_m = 0$) la fricción se opone al torque producido por el voltaje de entrada, dependiendo del signo como sigue:

$$\hat{f}_{cr} = \begin{cases} kV, & |kV| \leq |\mu_r| \\ \mu_r = \text{sign}(V), & |kV| > |\mu_r| \end{cases} \quad 3-6$$

En busca de la función transferencial del sistema, se considera el siguiente sistema libre de perturbación:

$$KV = J_r \ddot{\hat{\theta}}_m + v_r \dot{\hat{\theta}}_m \quad 3-7$$

Donde $K = k/n$. Para simplificar el desarrollo se define $A_r = K/J_r$, $B_r = v_r/J_r$ donde J_r y v_r son la inercia desconocida y la fricción viscosa del motor respectivamente. El modelo de la función transferencial del motor queda escrito como:

$$G(s) = \frac{\theta_m(s)}{V(s)} = \frac{\frac{k}{J_r}}{s^2 + s \frac{v_r}{J_r}} = \frac{A_r}{s^2 + B_r s} \quad 3-8$$

Siendo A_r y B_r los parámetros reales y desconocidos del motor. Próximamente en el esquema de identificación de parámetros que se plantea se denota como A y B tales parámetros. De estas relaciones y debido a que los términos n y k son conocidos, las estimaciones físicas de los parámetros J y v son dadas:

$$J = K/A \quad 3-9$$

$$v = BJ \quad 3-10$$

3.3 Procedimiento de identificación algebraica.

Considere el sistema de segundo orden dado en 3-4, J_r y v_r son parámetros desconocidos que no son linealmente identificables. Teniendo en cuenta esto, y el hecho de que $K = k/n$, después de algunas reestructuraciones que se tienen:

$$\ddot{\theta}_m + B_r \dot{\theta}_m + \Gamma_r^* = A_r V \quad 3-11$$

donde $\Gamma_r^* = \frac{\hat{r}_{cr}}{nJ_r}$. Se considera este último parámetro una entrada perturbadora constante.

Se procede a estimar los parámetros del sistema desconocidos A_r y B_r como sigue:

1. Tomando la transformada de Laplace de 3-11:

$$\left(s^2 \theta_m(s) - s \theta_m(0) - \dot{\theta}_m(0) \right) + B_r (s \theta_m(s) - \theta_m(0)) + \frac{\Gamma_r^*}{s} = A_r V(s) \quad 3-12$$

Multiplicando por s :

$$\left(s^3 \theta_m(s) - s^2 \theta_m(0) - s \dot{\theta}_m(0) \right) + B_r (s^2 \theta_m(s) - s \theta_m(0)) + \Gamma_r^* = A_r s V(s) \quad 3-13$$

La independencia de condiciones iniciales se logra tomando la tercera derivada respecto a la variable compleja s , donde la ecuación 3-13 resulta libre de las condiciones iniciales $\theta_m(0)$ y $\dot{\theta}_m(0)$ y del coeficiente de fricción de coulomb Γ_r^* , quedando:

$$\frac{d^3}{ds^3} \left[s^3 \theta_m(s) + B_r \frac{d^3}{ds^3} [s^2 \theta_m(s)] \right] = A_r \frac{d^3}{ds^3} [sV(s)] \quad 3-14$$

Los términos de la ecuación 3-14 pueden ser desarrollados como:

$$\frac{d^3}{ds^3} [s^3 \theta_m(s)] = s^3 \frac{d^3 \theta_m(s)}{ds^3} + 9s^2 \frac{d^2 \theta_m(s)}{ds^2} + 18s \frac{d \theta_m(s)}{ds} + 6 \theta_m(s) \quad 3-15$$

$$\frac{d^3}{ds^3} [s^2 \theta_m(s)] = s^2 \frac{d^3 \theta_m(s)}{ds^3} + 6s \frac{d^2 \theta_m(s)}{ds^2} + 6 \frac{d \theta_m(s)}{ds} \quad 3-16$$

$$\frac{d^3}{ds^3} [s^2 \theta_m(s)] = s \frac{d^3 V(s)}{ds^3} + 3 \frac{d^2 V(s)}{ds^2} \quad 3-17$$

Note que la multiplicación por s en el dominio operacional corresponde con la derivación en el dominio del tiempo. Para evitar esto pues se sustituyen las expresiones 3-15, 3-16 y 3-17 en 3-14 y luego se multiplica a ambos lados por s^{-3} obteniéndose:

$$\begin{aligned} B_r \left(s^{-1} \frac{d^3 \theta_m(s)}{ds^3} + 6s^{-2} \frac{d^2 \theta_m(s)}{ds^2} + 6s^{-3} \frac{d\theta_m(s)}{ds} \right) \\ - A_r \left(s^{-2} \frac{d^3 V(s)}{ds^3} + 3s^{-3} \frac{d^2 V(s)}{ds^2} \right) \\ = - \left[\frac{d^3 \theta_m(s)}{ds^3} + 9s^{-1} \frac{d^2 \theta_m(s)}{ds^2} + 18s^{-2} \frac{d\theta_m(s)}{ds} + 6s^{-3} \theta_m(s) \right] \end{aligned} \quad 3-18$$

La ecuación 3-18 se convierte considerando la anti transformada de Laplace y el teorema de diferenciación compleja en 3-19:

$$B_r p_{11}(t) - A_r p_{12}(t) = -q_1(t) \quad 3-19$$

Donde p_{11} , p_{12} y q_1 son:

$$p_{11}(t) = -\int t^3 \theta_m + 6 \int^{(2)} t^2 \theta_m - 6 \int^{(3)} t \theta_m \quad 3-20$$

$$p_{12}(t) = \int^{(2)} t^3 V - 3 \int^{(3)} t^2 V \quad 3-21$$

$$q_1(t) = t^3 \theta_m - 9 \int t^2 \theta_m + 18 \int^{(2)} t \theta_m - 6 \int^{(3)} \theta_m \quad 3-22$$

Se ha simplificado la notación para hacer más entendible el desarrollo matemático. La expresión 3-18 se ha multiplicado a ambos lados llevando a una nueva ecuación lineal para A_r y B_r .

Este sistema lineal puede representarse como una matriz en la forma:

$$PX = Q \quad 3-23$$

Donde P es una matriz con coeficientes que dependen del tiempo, X es el vector columna de parámetros desconocidos y Q es un vector columna con coeficientes también dependientes del tiempo. Esto es, de manera general:

$$\begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_r \\ A_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} \quad 3-24$$

$p_{21}(t) = \int p_{11}(t)$, $p_{22}(t) = \int p_{12}(t)$, $q_2(t) = \int q_1(t)$ siendo:

$$p_{21}(t) = -\int^{(2)} t^3 \theta_m + 6\int^{(3)} t^2 \theta_m - 6\int^{(4)} t \theta_m \quad 3-25$$

$$p_{22}(t) = \int^{(3)} t^3 V - 3\int^{(4)} t^2 V \quad 3-26$$

$$q_2 = \int t^3 \theta_m - 9\int^{(2)} t^2 \theta_m + 18\int^{(3)} t \theta_m - 6\int^{(4)} \theta_m \quad 3-27$$

El estimado de los parámetros A_r y B_r puede obtenerse rápidamente resolviendo las ecuaciones lineales siguientes:

$$A_r = \frac{[-p_{21}(t)q_1(t) + p_{11}(t)q_2(t)]}{[p_{11}(t)p_{22}(t) - p_{12}(t)p_{21}(t)]} \quad 3-28$$

$$B_r = \frac{[p_{22}(t)q_1(t) - p_{12}(t)q_2(t)]}{[p_{11}(t)p_{22}(t) - p_{12}(t)p_{21}(t)]} \quad 3-29$$

Para facilitar la implementación física del estimador en la plataforma en la que se trabaja pues se han utilizado los siguientes filtros variantes en el tiempo:

$$\begin{aligned} p_{11}(t) &= x_1 & p_{12}(t) &= y_1 \\ \dot{x}_1 &= -t^3 \theta_m(t) + x_2 & \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{x}_2 &= 6t^2 \theta_m(t) + x_3 & \dot{y}_2 &= t^3 V(t) + y_3 \\ \dot{x}_3 &= -6t \theta_m(t) & \dot{y}_3 &= -3t^2 V(t) \end{aligned} \quad 3-30$$

$$\begin{aligned} q_1(t) &= t^3 \theta_m(t) + a_1 & p_{21}(t) &= z_1 \\ \dot{a}_1 &= -9t^2 \theta_m(t) + a_2 & \dot{z}_1 &= z_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{a}_2 &= 18t\theta_m(t) + a_3 & \dot{z}_2 &= -t^3\theta_m(t) + z_3 \\
\dot{a}_3 &= -6\theta_m(t) & \dot{z}_3 &= 6t^2\theta_m(t) + z_4 \\
& & \dot{z}_4 &= -6t\theta_m(t) \\
p_{22}(t) &= b_1 & q_2(t) &= c_1 \\
\dot{b}_1 &= b_2 & \dot{c}_1 &= t^3\theta_m(t) + c_2 \\
\dot{b}_2 &= b_3 & \dot{c}_2 &= -9t^2\theta_m(t) + c_3 \\
\dot{b}_3 &= t^3V(t) + b_4 & \dot{c}_3 &= 18t\theta_m(t) + c_4 \\
\dot{b}_4 &= -3t^2V(t) & \dot{c}_4 &= -6\theta_m(t)
\end{aligned} \tag{3-32}$$

3.4 Estimación de parámetros de planta simulada

Con el objetivo de verificar la veracidad de la metodología de identificación algebraica pues se pretende mostrar una serie de simulaciones en Matlab/Simulink que corroboran esto, antes pues se impone la obtención de la función transferencial del motor de corriente directa.

Primeramente se considera la dinámica del sistema bajo ninguna perturbación tomando la ecuación 3-7. Debido al hecho de que $A_r = K/J_r$ y $B_r = v_r/J_r$, la siguiente ecuación es obtenida:

$$\ddot{\theta}_m + B_r\dot{\theta}_m = A_rV \tag{3-33}$$

cuya función de transferencia es:

$$G_r(s) = \frac{\theta_m(s)}{V(s)} = \frac{\frac{k}{J_r}}{s^2 + s\frac{v_r}{J_r}} = \frac{A_r}{s^2 + B_r s} \tag{3-34}$$

A partir de esto tomando como base la metodología que se ha planteado con anterioridad pues se decide estimar el modelo de la planta simulada. Para esto los valores de los

parámetros usados en las simulaciones son $A_r = 2$ (N/V Kg s) y $B_r = 2.5$ (N s/Kg m), la función trasferecial en tiempo continuo de 3-34 es:

$$G_r(s) = \frac{\theta_m(s)}{V(s)} = \frac{2}{s^2 + 2.5s}$$

Se han tomado estos valores teniendo en cuenta los parámetros del modelo real del motor de corriente directa usado en la práctica, este modelo se obtiene generando una señal PRBS (*Pseudo Random Binary Sequence*) que excita la planta real, luego se almacena este vector de salida de velocidad y por último haciendo uso de la herramienta *Ident* del Matlab pues se llega al mismo. La Figura 3-1 se obtiene integrando el vector de velocidad y muestra la señal de posición angular del motor simulada:

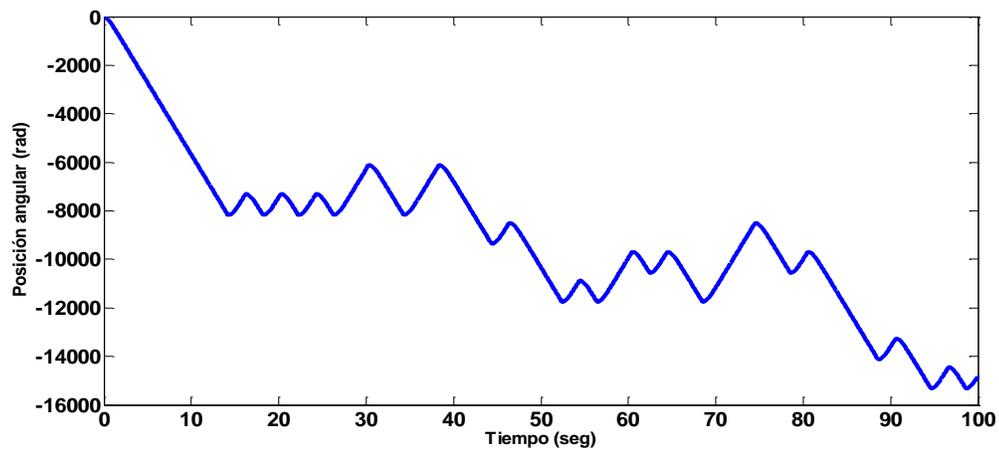
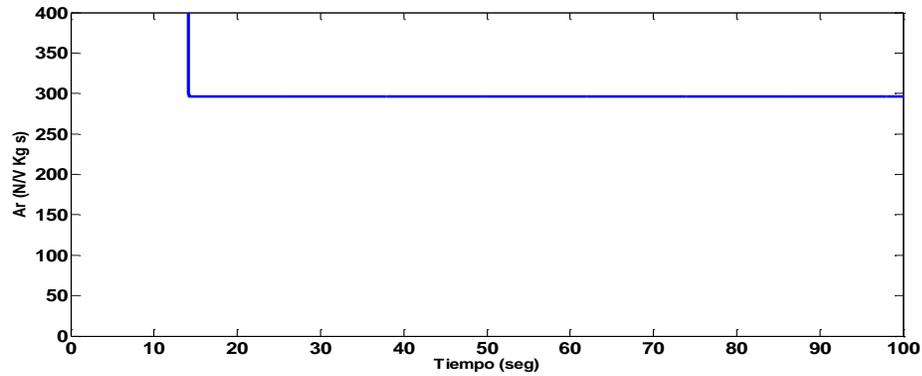
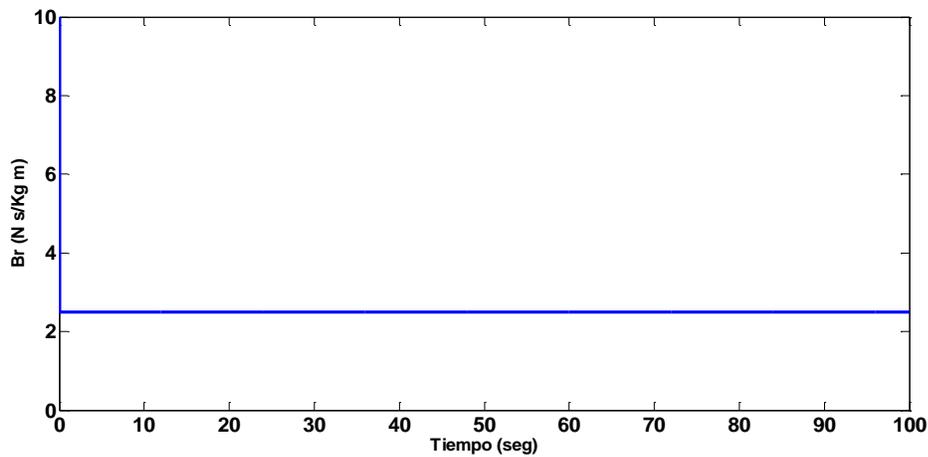


Figura 3-1. Posición angular del motor

Resaltar que la señal dada por el sensor de medición se encuentra en (V/s) luego multiplicando esta por una ganancia $k = 148.12$ (rad/V s) pues ya queda expresado en (rad/s), por lo tanto la ganancia de la función trasferecial anterior toma el valor $A_r = 296.24$. A continuación se mostrarán las estimaciones de los parámetros A_r y B_r respectivamente:

Figura 3-2. Estimación de A_r Figura 3-3. Estimación de B_r

3.5 Estimación de parámetros con señal ruidosa

Debido a que en la práctica comúnmente las mediciones traen incorporadas señales ruidosas, se hace necesario dedicar una sección que aborde estas estimaciones incorporando el ruido en la simulación. Una vez añadido el ruido generado por la instrucción `rand` en Matlab, siendo este un proceso estocástico de media cero distribuido uniformemente en el intervalo de $[-0.6, 0.6]$ se hace necesario filtrar las estimaciones con integradores puros de la forma $\frac{1}{s^2}$ añadidos en el numerador y en el denominador de los cocientes de las estimaciones. La señal de velocidad angular del motor (con ruido) se observa en la Figura 3-4 como sigue:

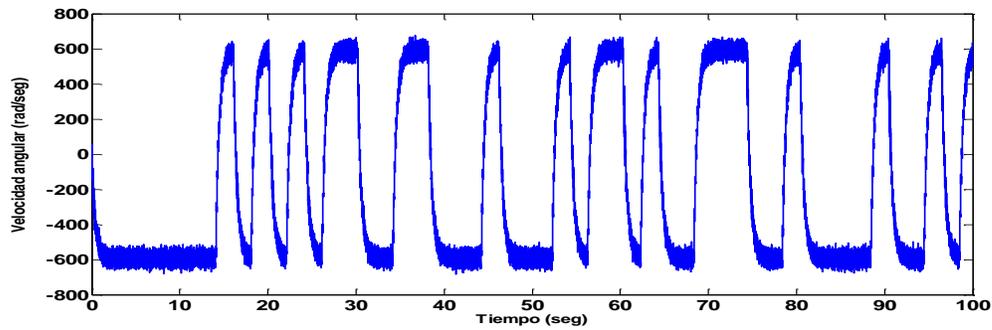


Figura 3-4. Velocidad angular del motor

Una vez integrada esta señal pues se obtiene la posición angular del motor, Figura 3-5,

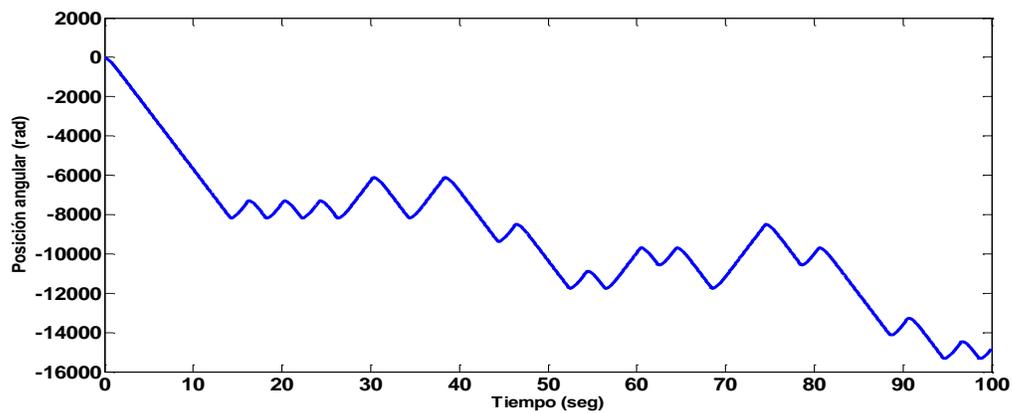
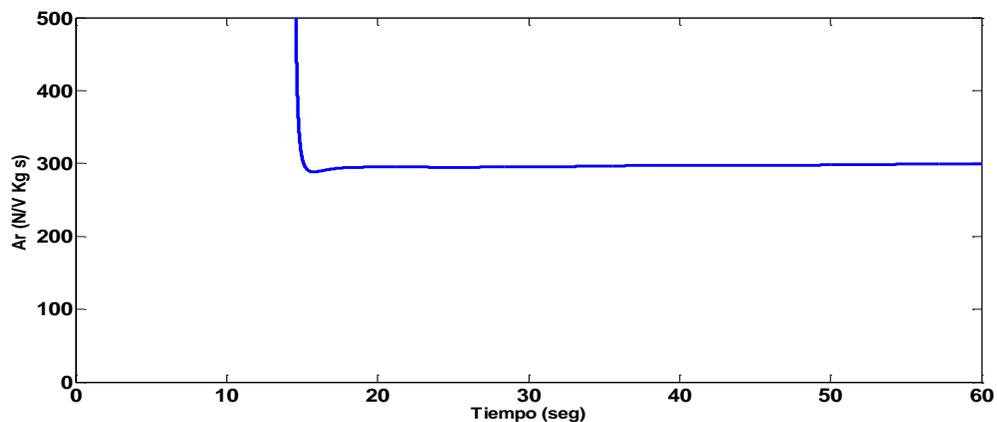
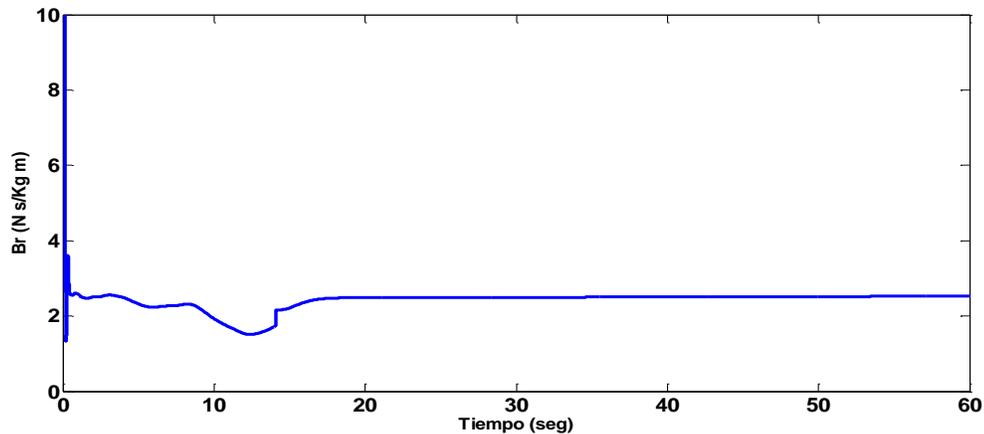


Figura 3-5. Posición angular del motor

Luego aplicando la metodología algebraica pues se estiman los parámetros A_r y B_r del modelo como se muestra en Figura 3-6 y Figura 3-7 respectivamente:

Figura 3-6. Estimación de A_r

Figura 3-7. Estimación de B_r

3.6 Estimación de parámetros reales del motor

En la estimación de los parámetros reales del motor se ha seguido una serie de pasos, ver Figura A 2:

- 1 Excitar la planta real (motor de corriente directa) con una señal PRBS (*Pseudo Random Binary Sequence*).
- 2 Almacenar la señal de velocidad dada por el sensor de medición en un vector (vector velocidad) para luego integrarla y obtener la posición angular.
- 3 Crear un vector de tiempo necesario para el algoritmo.
- 4 Transferir los vectores de posición y tiempo al estimador.
- 5 Estimar los parámetros con el estimador algebraico.

A continuación la Figura 3-8 muestra la señal de velocidad que brinda el tacómetro:

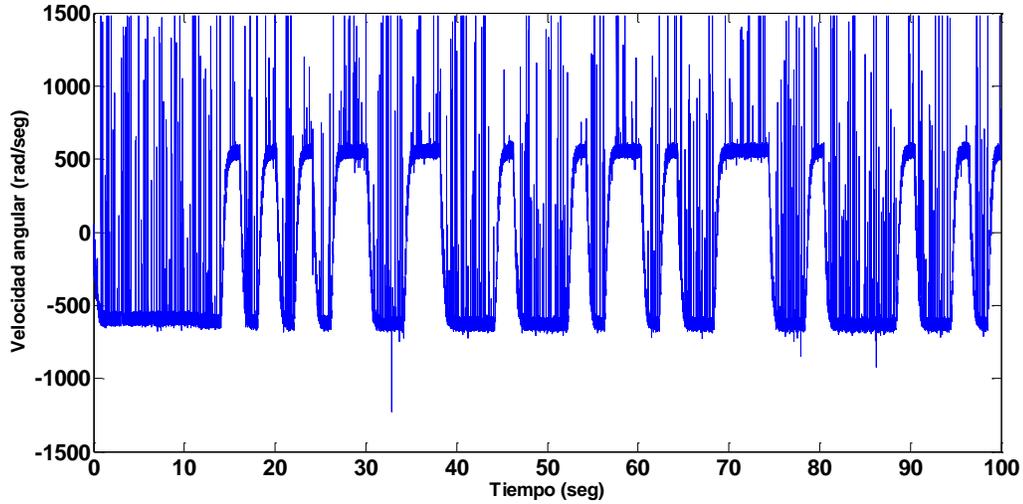


Figura 3-8. Velocidad angular del motor

Como se puede observar es una señal afectada por ruido de alta frecuencia debido a problemas internos que presenta el sensor de medición y además por el ruido que induce la línea de alimentación ($f = 60 \text{ Hz}$), con el objetivo de mejorar esta señal pues se filtra con un clásico filtro paso bajo de Butterworth con frecuencia de corte $w_n = 50 \text{ Hz}$ y la señal se muestra en la Figura 3-9 :

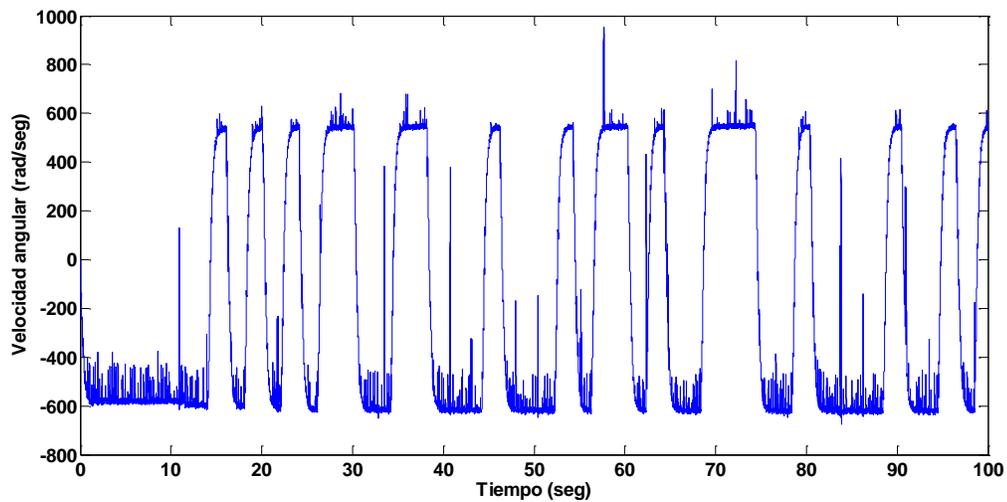


Figura 3-9. Velocidad angular del motor (filtrada)

Esta es una señal mejorada pero aún persiste el ruido provocado por el sensor de medición, luego se integra y se obtiene la posición angular del motor ver Figura 3-10

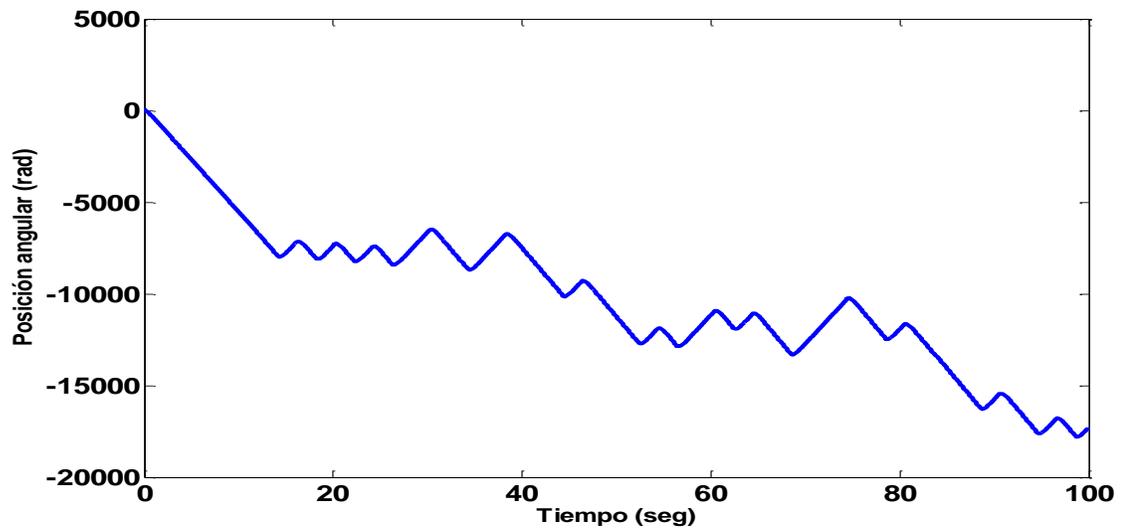
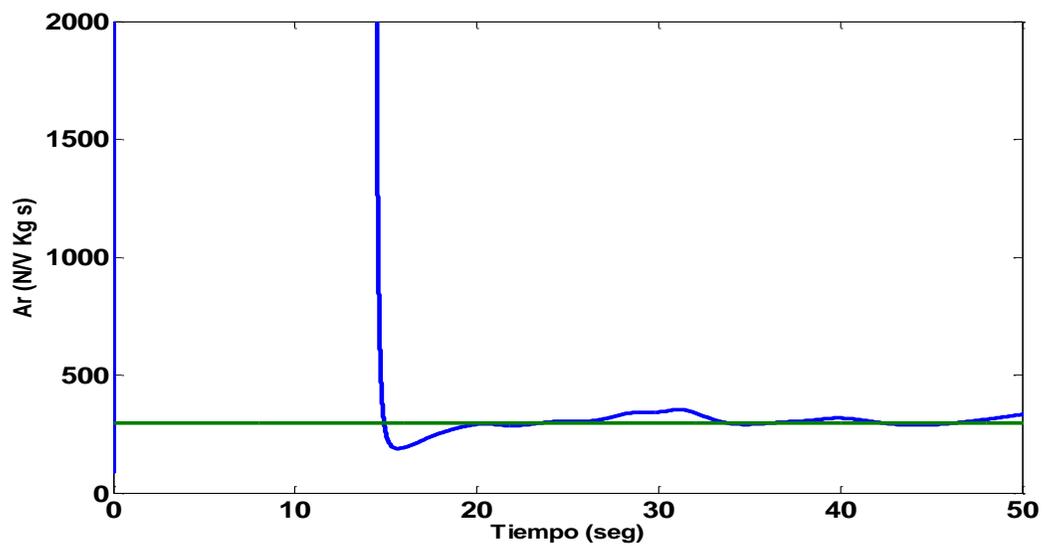


Figura 3-10. Posición angular del motor (filtrada)

La estimación de los parámetros A_r y B_r se muestra en la Figura 3-11 y Figura 3-12 respectivamente:

Figura 3-11. Estimación A_r

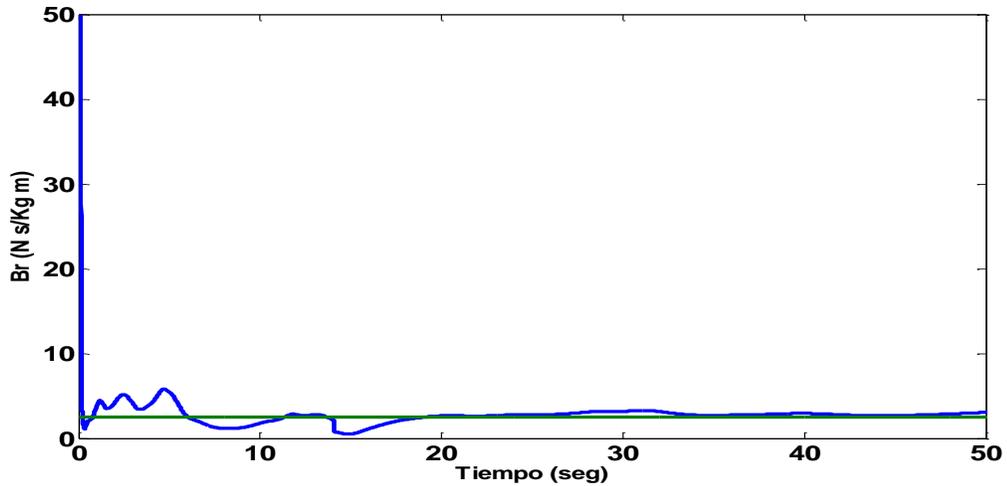


Figura 3-12. Estimación Br

3.7 Análisis económico

Un aspecto fundamental en la realización del proyecto es el análisis económico, este abarca en general los gastos que generó el desarrollo del mismo. Todos los gastos del proyecto están calculados en moneda nacional. O sea no requirió inversión en divisas de ningún tipo. Los gastos al proyecto fueron básicamente:

Investigadores	Horas	Valor
Profesor investigador	50	232.50
Alumno investigador	240	600.00

Tabla 3-1. Mano de obra directa.

* No hay salario empleado en este proyecto. Esto es solo cálculo del estimado de costos por la mano de obra empleada en el desarrollo del proyecto.

Horas	Valor
290	832.50

Tabla 3-2. Gasto estimado de mano de obra.

Otros gastos directos	Costos

Peligrosidad	No
Transferencia tecnológica	No
Impuestos sociales	No
Transportación	No
Alimentación*	No
Equipamiento	No fue necesario invertir en equipos
Equipos de protección individual	No se aplica

Tabla 3-3.Otros gastos directos.

* Financiado anteriormente.

Materiales e inversiones:

- No hubo gastos e inversiones
- La licencia del MatLab® no se compró para este proyecto.
- No se gastó en otros materiales (impresoras, memorias flash, etc.)

Costos indirectos:

Se calculan sobre la base de los costos directos:

- La administración del proyecto fue realizada en lo fundamental en las tareas propias del alumno investigador. Total: Cero
- Tarifas bancarias: No

Lo anterior implica que el principal gasto de este proyecto está en la mano de obra de los investigadores.

Impacto económico:

Nuevos horizontes de la investigación científica se abren con estas nuevas capacidades. El impacto es directo en todas las ramas del conocimiento y la investigación científica, sea en investigaciones básicas o en aplicadas. Los resultados a alcanzar constituyen valiosas

herramientas para los centros de investigación, sobre todo los relacionados con la biotecnología, la energía y con el medio ambiente en cualquiera de sus modalidades.

El desarrollo de este trabajo no genera beneficios económicos de forma directa. Está destinado a aumentar la productividad de los investigadores, que emplearán los resultados de este en investigaciones de carácter básico.

3.8 Consideraciones parciales

Luego de haber aplicado el método de identificación algebraica en la estimación de la inercia y el coeficiente de fricción viscoso del motor de corriente directa se concluye que en el método:

- No se necesita ningún conocimiento estadístico de los ruidos que afectan los datos, ni requiere de condiciones iniciales.
- Las estimaciones son obtenidas en un tiempo máximo de convergencia ($T_{cmax} = 15$ seg) cuando se trabaja con la planta simulada.
- Las simulaciones se pueden llevar a cabo perfectamente en una plataforma como Matlab obteniéndose buenos resultados.
- Los resultados en la estimación de los parámetros de la planta real aún no son satisfactorios.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Conclusiones

- 1 La identificación algebraica según muestra la literatura es idónea para estimar modelos de sistemas en los que existe gran pérdida de datos. Esto se logra debido a que puede estimar tomando muestras aperiódicamente.
- 2 A pesar de que la base matemática de la identificación algebraica presenta gran complejidad, siguiendo la metodología de desarrollo de algunas aplicaciones se hace más entendible el uso de la misma.
- 3 La simulación del algoritmo en una plataforma como Matlab se puede llevar a cabo perfectamente obteniéndose buenos resultados.
- 4 Es posible incorporar la señal de ruido en las simulaciones y esto es de gran importancia debido a que en la práctica las señales vienen acompañadas por una componente ruidosa.

Recomendaciones

Con el propósito de proyectar continuidad y desarrollo en el proyecto pues se recomienda lo siguiente:

- 1 Continuar aplicando la técnica de identificación algebraica en sistemas más complejos (avión, submarino).
- 2 Profundizar en el filtrado de la señal ya que ante altos niveles de ruido el estimador no converge a los parámetros del modelo.
- 3 Demostrar en qué casos esta es la técnica de identificación más ventajosa.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BECEDAS, J. & FELIU, V. 2002. Estimación Algebraica de la Constante de Rigidez de un Manipulador Flexible en Situaciones de Impacto.
- BECEDAS, J., MAMANI, G., FELIU-BATLLE, V. & SIRA-RAMIREZ, H. Algebraic identification method for mass-spring-damper system. WCECS 2007, Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science 2007, 2007.
- BECEDAS, J., MAMANI, G. & FELIU, V. 2010. Algebraic parameters identification of DC motors: methodology and analysis. *International Journal of Systems Science*, 41, 1241-1255.
- BECEDAS, J., PAYO, I., FELIU, V. & SIRA-RAMIREZ, H. Generalized proportional integral control for a robot with flexible finger gripper. Proceedings of the 17th IFAC World Congress, Seoul, Korea, 2008. 6-11.
- BRIE, D. & RICHARD, A. 2005. Regularization aspects in continuous-time model identification. *Automatica*, 41, 197-208.
- BUIUM, A. 1994. *Differential algebra and Diophantine geometry*, Hermann Paris.
- FISHER, R. A. 1912. On an absolute criterion for fitting frequency curves.
- FLIESS, M. 2006. Analyse non standard du bruit. *Comptes Rendus Mathematique*, 342, 797-802.
- FLIESS, M., FUCHSHUMER, S., SCHLACHER, D. & SIRA-RAMÍREZ, H. 2006. Discrete-time linear parametric identification: An algebraic approach.
- FLIESS, M., MBOUP, M., MOUNIER, H. & SIRA-RAMIREZ, H. Questioning some paradigms of signal processing via concrete examples. Algebraic Methods in Flatness, Signal Processing and State Estimation, 2003. Editorial Lagares, pp. 1-21.
- FLIESS, M. & SIRA-RAMIREZ, H. 2004. An algebraic framework for linear identification. *ESAIM controle optimisation et calcul des variations*, 9, 151.
- FUCHSHUMER, S. 2006. *Algebraic linear identification, modelling, and ap-plications of flatnessbased control*. Tesis Doctoral, Johannes Kepler University.
- GIANNAKIS, G. B. & SERPEDIN, E. 2001. A bibliography on nonlinear system identification. *Signal Processing*, 81, 533-580.

- GUILLÉN, M. E. L. 2000. Identificación de Sistemas. Aplicación al modelado de un motor de continua. Notas de curso Control Avanzado. Departamento de Electrónica. Universidad de Alcalá.
- HABER, R. & UNBEHAUEN, H. 1990. Structure identification of nonlinear dynamic systems—a survey on input/output approaches. *Automatica*, 26, 651-677.
- KALMAN, R. E. 1960. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Fluids Engineering*, 82, 35-45.
- KENDALL, M. G. & STUART, A. 1961. *The advanced theory of statistics: Inference and relationship*, Charles Griffin.
- KOLCHIN, E. R. 1973. *Differential algebra & algebraic groups*, Academic press.
- KUNUSCH, C. 2003. Identificación de sistemas dinámicos.
- LJUNG, L. 1999. System Identification: Theory for the User, PTR Prentice Hall Information and System Sciences Series. Prentice Hall, New Jersey.
- LJUNG, L. State of the art in linear system identification: Time and frequency domain methods. American Control Conference, 2004. Proceedings of the 2004, 2004. IEEE, 650-660.
- MAMANI, G., BECEDAS, J., FELIU BATLLE, V. & SIRA RAMÍREZ, H. 2009. Open and closed loop algebraic identification method for adaptive control of DC motors. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 23, 1097-1103.
- MIKUSINSKI, J. & BOEHME, T. K. 1987. Operational Calculus, Vol. 2, PWN Varsovie & Oxford University Press. Oxford.
- MILLÁN, D. S. S. I. & DEL HOYO BERNAT, D. J. 2005. *Análisis de sistemas cointegrados mediante métodos de subespacios*, Universidad de Valladolid.
- OLSSON, H., ÅSTRÖM, K. J., DE WIT, C. C., GÄFVERT, M. & LISCHINSKY, P. 1998. Friction models and friction compensation. *European journal of control*, 4, 176-195.
- OSORIO CAMARGO, D. M. & FLOREZ ROA, J. C. 2013. Obtención del modelo no paramétrico de un sistema por el método de identificación de respuestas en frecuencia.
- PEÑA SÁNCHEZ DE RIVERA, D. 2001. Fundamentos de estadística. *Alianza Editorial*.
- PINTELON, R. & SCHOUKENS, J. 2012. *System identification: a frequency domain approach*, John Wiley & Sons.
- REIERSØL, O. 1941. Confluence analysis by means of lag moments and other methods of confluence analysis. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1-24.
- SCHOUKENS, J., PINTELON, R. & ROLAIN, Y. Time domain identification, frequency domain identification. equivalences! differences. Proc. American Control Conference, 2004.

- SIRA-RAMÍREZ, H. & FLIESS, M. 2002. On discrete-time uncertain visual ba-sed control of planar manipulators: an on-line algebraic identification approach. Las Vegas: IEEE CDC.
- SODERSTROM, T. & STOICA, P. 1989. *System identification*, Prentice hall London.
- TRAPERO ARENAS, J. R. 2008. Técnicas de identificación algebraicas y espectrales de señales armónicas. Aplicaciones en mecatrónica y economía.
- TRAPERO, J., SIRA-RAMÍREZ, H. & FELIU BATLLE, V. 2008. On the algebraic identification of the frequencies, amplitudes and phases of two sinusoidal signals from their noisy sum. *International Journal of Control*, 81, 507-518.
- UNBEHAUEN, H. & RAO, G. 1990. Continuous-time approaches to system identification—a survey. *Automatica*, 26, 23-35.
- UNBEHAUEN, H. & RAO, G. 1998. A review of identification in continuous-time systems. *Annual reviews in Control*, 22, 145-171.
- UNBEHAUEN, H. & RAO, G. P. 1987. *Identification of continuous systems*, Elsevier Science Inc.
- YOSIDA, K. 1984. Operation Calculus - A Theory of Hyperfunctions. *Sprin-ger*. New York.
- YOUNG, P. 1976. Some observations on instrumental variable methods of time-series analysis. *International Journal of Control*, 23, 593-612.
- YOUNG, P. 1981. Parameter estimation for continuous-time models—a survey. *Automatica*, 17, 23-39.
- YOUNG, P. 1984. *Recursive estimation and time-series analysis: an introduction*, Springer-Verlag New York, Inc.
- ZADEH, L. A. 1962. From circuit theory to system theory. *Proceedings of the IRE*, 50, 856-865.

ANEXOS

Anexo I Esquemas de Simulink

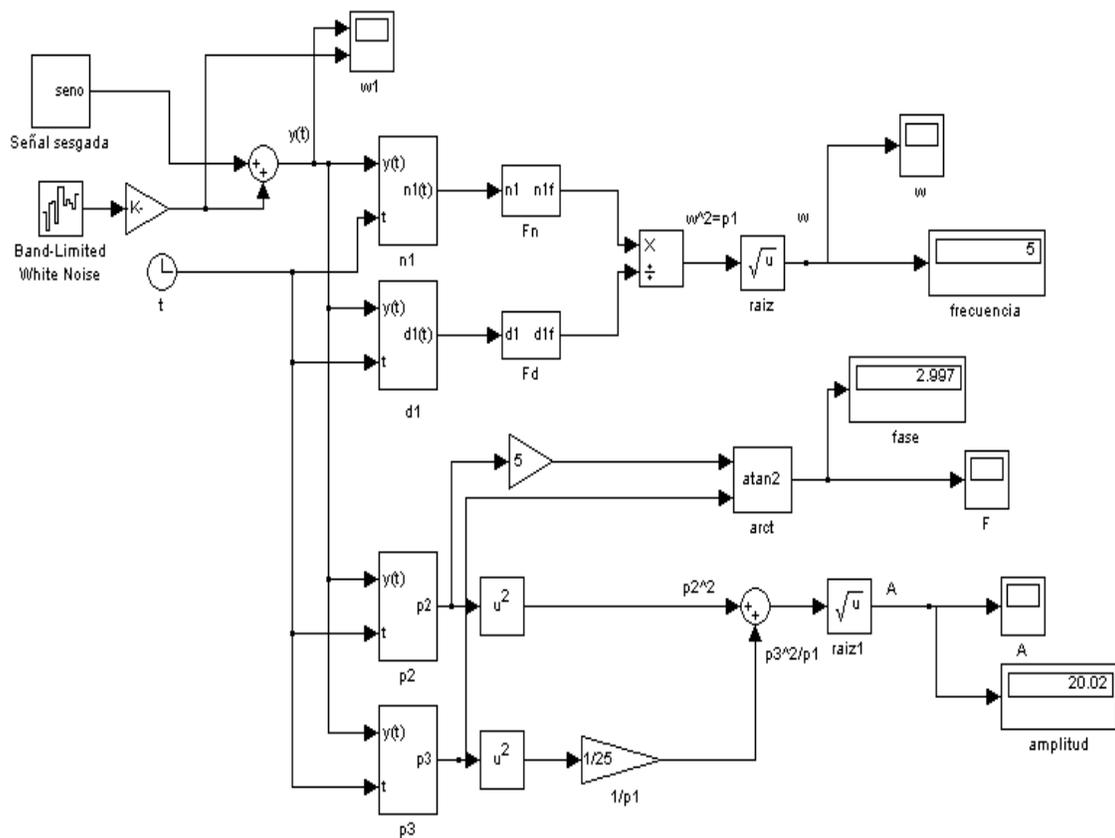


Figura A 1. Estimador de parámetros de señal sinusoidal

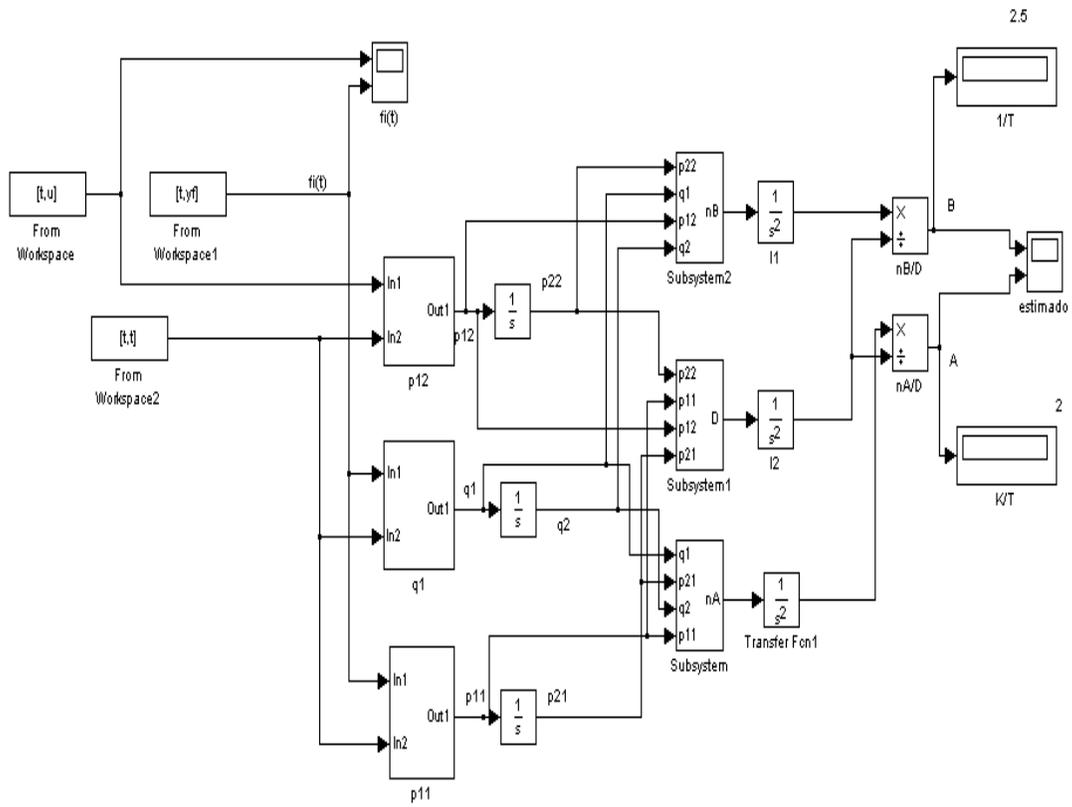


Figura A 2. Estimador de parámetros reales del motor