



FACULTAD DE MATEMÁTICA, FÍSICA Y COMPUTACIÓN

TESIS DE DIPLOMA

Dinámica del campo escalar atrapado en mundos branas de
Randall-Sundrum tipo II

Autor: Dagoberto Escobar Atiénzar

Tutores
Dr. Genly León Torres
Dr. Yoelsy Leyva Nodal

Santa Clara, Cuba

2011

A mis padres y mi hermana,
a mis abuelos y mi tío.
a mi novia Lisabel.

por su apoyo incondicional e ∞ ...

“Todos somos muy ignorantes,
lo que ocurre es que no todos
ignoramos las mismas cosas.”

Albert Einstein

Agradecimientos

“Cuando bebas agua,
recuerda la fuente.”
Proverbio chino

Mis más sinceros agradecimientos a mis tutores el Dr. Yoelsy Leyva y Dr. Genly León por su paciencia y apoyo en estos largos meses de trabajo, además de sus contribuciones a la confección de esta tesis. También quiero agradecer al Dr. Israel Quiros quien fue mi tutor desde el primer año de la carrera de Física, bajo su tutela me formé, fue el quien me mostró la belleza oculta de algunos de los misterios más profundos de la física actual. De su ejemplo de dedicación a la investigación, aprendí que las grandes metas se logran con sacrificio y entrega.

También quiero agradecer a todos los colegas del Grupo de Gravitación y Cosmología de la Universidad Central de Las Villas por su ayuda a lo largo de estos cinco años de carrera.

Por último, pero no menos importante, mi agradecimiento más profundo a mis padres, a mi hermana, por tantos sacrificios, sin su apoyo constante no hubiese podido alcanzar esta meta, que no será la última. A mi novia Lisabel por su apoyo constante durante estos últimos cuatro años de interminables estudios.

También quiero agradecer a todas las personas que contribuyeron de una forma u otra a que esta tesis fuera posible y que no mencionaré para no hacer interminable la lista.

RESUMEN

La interrogante principal que da lugar a la presente investigación está relacionada con el origen y la naturaleza de la aceleración de la expansión cósmica durante la presente y futuras etapas de la evolución del universo. La investigación realizada comprende el estudio de modelos basados en teorías extra-dimensionales (modelos de mundos brana) enfocándose el estudio exclusivamente a los mundos branas de Randall-Sundrum tipo II. Este es uno de los modelos extra-dimensionales de más interés en la actualidad. En este modelo nuestro universo 4D se empotra de forma no-factorizable en un espacio-tiempo 5D de tipo Anti de Sitter, AdS_5 , (bulk) donde los campos de norma se confinan a una sub-variedad de dimensión menor, 3-brana, empotrada en el bulk 5D. Mediante el empleo de la técnica de los sistemas dinámicos se estudia la cosmología en branas homogéneas de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) y branas de Bianchi tipo I, en este último caso se tendrá en cuenta los efectos del tensor de Weyl 5D en la dinámica de la brana. Como contenido material se considera un campo escalar y un fluido perfecto atrapados en la brana.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	1
Problema	3
Objetivo general	4
Preguntas de investigación	5
Justificación	5
Hipótesis de investigación	6
Tipo de investigación	6
Estructura de la tesis	6
Convenciones utilizadas en la tesis	7
1. GRAVEDAD EXTRA-DIMENSIONAL Y MUNDOS BRANAS	10
1.1. Gravitación con dimensiones extras	10
1.2. La Teoría M y los mundos branas	14
1.3. Principio de mínima acción en mundos branas	16
1.4. Mundos branas de Randall-Sundrum	19
1.4.1. Branas de Randall-Sundrum tipo I	21
1.4.2. Branas de Randall-Sundrum tipo II	22
1.5. Formalismo covariante de Gauss-Codacci	25
1.5.1. Modelo geométrico	26

1.5.2. Ecuación de Gauss	26
1.5.3. Ecuación de Codacci	27
1.6. Ecuación de Einstein en la brana	28
1.7. Conclusiones parciales	33
2. COSMOLOGÍA EN BRANAS DE RANDALL-SUNDRUM	35
2.1. Cosmología en una brana homogénea de FRW	37
2.1.1. El modelo	38
2.1.2. Estudio de sistema dinámico en brana FRW	41
2.1.3. Espacio de fase	43
2.1.4. Estabilidad de los puntos críticos	46
2.1.5. Dinámica de la variedad central de la solución de de Sitter P_1 . . .	50
2.1.6. Dinámica de la variedad central de la solución de de Sitter P_5 . . .	57
2.1.7. Potencial $V = V_0 \text{Sinh}^{-\alpha} \beta \phi$	62
2.1.8. Potencial exponencial $V = V_0 e^{-\chi \phi} + \Lambda$	64
2.1.9. Reconstrucción del potencial de auto-interacción	66
2.1.10. Discusión de los resultados de la sección	68
2.2. Cosmología en mundos branas de Bianchi tipo I	70
2.2.1. Cosmología en brana con anisotropía de Bianchi I	71
2.2.2. Sistemas dinámicos en branas de Bianchi I	73
2.2.3. Espacio de fase	75
2.2.4. Estabilidad de los soluciones	78
2.2.5. Discusión de los resultados obtenidos en la sección	83
2.3. Conclusiones parciales del capítulo	84
CONCLUSIONES	87
RECOMENDACIONES	89

A. INFLACIÓN EN BRANAS	90
A.1. Inflación en cosmología estándar	90
A.2. Condiciones de rodadura lenta	91
A.3. Condiciones de rodadura lenta en branas de Randall-Sundrum.	91
B. SISTEMAS DINÁMICOS	93
B.1. Nociones de sistemas dinámicos	93
B.2. Teoría de la variedad central	96
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	99

INTRODUCCIÓN

El descubrimiento sorpresivo en 1998 sobre el carácter acelerado de la expansión cósmica durante la presente etapa de la evolución, indica que si la teoría de Einstein es correcta, entonces nuestro universo debe estar lleno, básicamente, de un tipo de materia desconocida cuya presión, p , es negativa para contrarrestar los efectos de la gravedad y proveer de la aceleración de la expansión. Este tipo de materia satisface que la densidad, ρ , es del orden del módulo de la presión, $\rho \sim |p|$, por lo que se trata de materia no relativista. Los fluidos con esta propiedad se llaman fluido tipo energía. A este tipo de materia se le ha bautizado, entonces, como “Energía Oscura” (EO) pues tiene además la propiedad de no interactuar con la radiación electromagnética, por lo que no se puede “ver”.¹

La naturaleza de la EO hasta el momento, sigue siendo un misterio, esto permite justificar la pertinencia de la presente investigación.

¿Es la EO o modificaciones a la teoría de la gravedad la responsable de la aceleración de la expansión del universo?

Otra vía para estudiar este problema es plantear alternativas a la Relatividad General (RG), por ejemplo la generalización más simple de la teoría de la gravitación de Einstein son las Teorías Escalares-Tensoriales (TET) de las cuales la teoría de (Jordan) Brans-

¹Alrededor del 74 % del universo está formado por esta forma exótica de energía.

Dicke [1] es el prototipo. Según ésta, a los 10 grados de libertad relacionados con el tensor métrico del espacio-tiempo cuadri-dimensional (4D), se le adiciona un grado de libertad relacionado con el campo escalar de Brans-Dicke. De esta manera, adicionalmente a las 4 polarizaciones posibles del gravitón² en relatividad general (RG), se le agrega una polarización relacionada con el grado de libertad escalar.

Otra alternativa a los modelos basados en la teoría de Einstein son los modelos extra-dimensionales inspirados en Teorías de Cuerdas o Supergravedad conocido como mundos branas. Según estos modelos, las partículas del modelo estándar de unificación de las interacciones fundamentales (quarks, leptones, bosones W^\pm y Z^0 , fotones, etc.), se pueden propagar únicamente en una hipersuperficie tri-dimensional (nuestro universo), que está insertada en un espacio de dimensión mayor (Bulk), donde solamente el gravitón es libre de propagarse. Un ejemplo de estos modelos son los mundos brana penta-dimensionales de Randall-Sundrum (RS) [2, 3] y de Dvali-Gabadadze-Porrati (DGP) [4] estos modelos constituyen una reducción de la Supergravedad 11D. En estos modelos, las ecuaciones cosmológicas de Einstein son modificadas por la presencia de la dimensión adicional, ya sea durante la inflación primordial en el pasado (brana RS), o durante el período actual de expansión acelerada (brana DGP). De esta manera, tanto la inflación primordial como la presente, son una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo extra-dimensional.³

Otra motivación física de los modelos de brana es que a energías suficientemente altas la RG deja de funcionar y debe de ser remplazada por la teoría cuántica de la gravedad. Esta teoría, aún en desarrollo, debe ser capaz de borrar las singularidades clásicas predichas por la RG durante el colapso gravitacional o el Big Bang. Incluso por debajo de la escala fundamental que marca la transición a la gravedad cuántica, deben aparecer correcciones

²Partícula tensorial que corresponde al campo de la métrica en la teoría cuántica.

³De las cinco dimensiones en los modelos RS y DGP, una es la dimensión temporal y las cuatro restantes son dimensiones espaciales. En esta tesis no serán objeto de estudio los modelos con dimensiones extras de carácter temporal.

apreciables a la TGR. Estas correcciones deben tener un impacto importante sobre el colapso gravitatorio, los agujeros negros y el universo temprano. Es en este sentido que los modelos fenomenológicos de branas inspirados en la Teoría de Cuerdas, pueden ayudarnos a entender y apreciar la magnitud de estas correcciones a la TGR. En la actualidad la teoría M (Supergravedad) se muestra como un serio candidato a teoría cuántica de la gravedad.

Además este tipo de modelos tienen el atractivo de poder dar solución a problemas acuciantes de la física de partículas elementales como la jerarquía de las escalas electro-débil M_{ED} y de Planck M_P ; el problema de la constante cosmológica, que podría ser resuelto mediante mecanismos de ajuste de la constante fundamental de Planck y de la tensión de la brana; el problema en cosmología de la Materia Oscura (MO), podría ser resuelto mediante branas plegadas. A modo de conclusión, los modelos basados en branas tienen la capacidad de establecer un vínculo entre la cosmología y teorías fundamentales como la teoría de Supergravedad.

Problema

Determinar condiciones suficientes para la existencia de atractores del futuro correspondientes a soluciones isótropas en expansión acelerada para diferentes modelos cosmológicos basados en generalizaciones de los modelos de Randall-Sundrum tipo II para:

1. brana homogénea e isótropa Friedmann-Robertson-Walker plana (FRW)
2. brana homogénea con anisotropía del tipo Bianchi I,

considerando como contenido material una mezcla de fluido perfecto y un campo escalar atrapados en la brana, para una clase general de potenciales de auto-interacción.

Objetivo general

- Profundizar en el conocimiento del origen y la naturaleza de la expansión acelerada del universo, en el contexto de los mundos branas.
- Estudiar la viabilidad de los modelos basados en branas de Randall-Sundrum FRW y Bianchi I, para la descripción de la aceleración de la expansión del Universo de acuerdo al paradigma observacional moderno.

Sobre esta base nos hemos trazado los siguientes **objetivos específicos**:

- Analizar del espacio de fase asociado a un modelo cosmológico de branas Randall-Sundrum FRW con fluido perfecto y con un campo escalar atrapado en la brana para una clase general de potenciales de auto-interacción.
- Analizar del espacio de fase asociado a un modelo cosmológico de branas Randall-Sundrum con anisotropía del tipo Bianchi I con fluido perfecto y con un campo escalar atrapado en la brana para una clase general de potenciales de auto-interacción.
- Formular condiciones suficientes para la existencia de atractores del futuro correspondientes a soluciones isótropas en expansión acelerada, independientemente del grado inicial de anisotropía, a partir de la caracterización de la estructura asintótica del futuro para el flujo en los espacios de fases de los modelos 1-2.
- Diseñar de un método para la reconstrucción del potencial de auto-interacción.

Preguntas de investigación

¿Puede determinarse la estructura asintótica del flujo en el espacio de fase correspondiente a un modelo del universo basado en modelos de branas de Randall-Sundrum que incluya fluido perfecto y un campo escalar atrapado en la brana, considerando métricas FRW y Bianchi I en la brana, usando de modo combinado métodos analíticos y numéricos?

¿Puede diseñarse un algoritmo para la reconstrucción del potencial de auto-interacción en forma exacta o al menos en cuadraturas para esta clase de modelos?

Justificación

Los problemas de la homogeneidad y la isotropía del universo y del problema de la EO no han tenido, hasta el momento, una resolución definitiva. Especialmente, los estudios de EO permanecen siendo una de las prioridades identificadas a nivel mundial [5]. La resolución de estos problemas se reduce a determinar condiciones suficientes para la existencia de atractores del futuro correspondientes a soluciones isótropas en expansión acelerada. Particularmente si nos concentramos en modelos de branas podemos dar una respuesta a otros problemas por ejemplo al problema de la jerarquía de masas. La viabilidad de la investigación se sustenta en que los análisis desde la perspectiva de los sistemas dinámicos proporcionan uno de las mejores maneras de estudiar la estabilidad de los modelos cosmológicos. Además, estos métodos generales de investigación permiten el ajuste fino de las condiciones iniciales requeridas para conciliar con las observaciones. Por otra parte la viabilidad de la investigación se sustenta también en la disponibilidad de recursos computacionales para el tratamiento analítico y numérico de las soluciones.

Hipótesis de investigación

Se formulan como hipótesis de investigación la posibilidad de caracterizar las propiedades del flujo asociado a un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias, correspondiente a un modelo cosmológico, mediante el uso de técnicas cualitativas, así como también es posible la elaboración y validación de un método para la reconstrucción del potencial en forma exacta (o en cuadraturas) considerando una normalización y parametrización apropiada y exigiendo propiedades buenas de diferenciabilidad e integrabilidad para las funciones de entrada en todos los casos de interés en esta tesis.

Tipo de investigación

La investigación es de tipo explicativo.

Estructura de la tesis

La tesis se divide en una sección introductoria donde se ofrece una breve revisión del estado del arte del tema de investigación y se formula el problema de investigación.

Un primer capítulo, en el cual se agrupan un conjunto de tópicos sobre los mundos branas que son importantes para mejorar la comprensión de los temas tratados en el segundo capítulo. La adición de este capítulo hace que la tesis sea autocontenida y que pueda ser de ayuda como material de consulta para estudiantes de las carreras de física y matemática que han decidido enfocar su interés en investigaciones en temas de gravitación y cosmología. Al final de este capítulo se expone algunas consideraciones del autor sobre los modelos alternativos de Randall-Sundrum.

En el segundo capítulo se expone el grueso de la investigación realizada y contiene los

detalles del estudio de los modelos cosmológicos propuestos desde la perspectiva de los sistemas dinámicos. Al final de este capítulo se dan las conclusiones parciales que, a juicio del autor, se pueden extraer de la investigación aquí contenida.

En las secciones siguientes al capítulo 2 se extraen las conclusiones generales de la tesis y se hacen algunas recomendaciones sobre como dar continuidad a la investigación realizada. Luego, se incorporan dos anexos que complementan la tesis y finalmente se anotan las referencias bibliográficas.

Convenciones utilizadas en la tesis

A lo largo de esta tesis se emplean las siguientes abreviaturas:

Teoría general de la relatividad – TGR, o Relatividad general – RG.

Friedmann-Robertson-Walker – FRW.

Energía oscura – EO, Materia Oscura – MO, Radiación Oscura – RO.

Cuadri-dimensional – 4D, ó penta-dimensional – 5D, ó, en general, n-dimensional – nD.

Branas de Randall-Sundrum – RS, branas Dvali-Gabadadze-Porrati – DGP.

Anti de Sitter – AdS.

Modelo Estándar – ME.

Los subíndices y superíndices griegos $\alpha, \beta, \dots, \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ designan los índices espacio-temporales 4D, el índice 0 representa la componente temporal, mientras que los índices 1, 2, 3 representan la componente espacial. A menos que se aclare lo contrario los subíndices y superíndices latinos en mayúsculas como $A, B, \dots, N, M = 0, 1, 2, 3, 5, \dots$ designan los índices de un espacio-tiempo de dimensión superior arbitraria, por ejemplo el índice 5

representa una dimensión extra. Los índices latinos en minúsculas representan los índices espaciales tri-dimensionales ordinarios: $i, j, \dots, n, m = 1, 2, 3$. En la presente tesis, como en cualquier trabajo sobre la temática aquí abordada, se utiliza la regla de suma de Einstein (por índices mudos repetidos se entiende sumatoria), que matemáticamente se puede resumir de la siguiente manera:

$$X^{\dots\alpha\nu\dots}_{\dots\mu\sigma\dots} Y^{\dots\gamma\mu\dots}_{\dots\nu\beta\dots} \equiv \sum_{\nu=0}^4 \sum_{\mu=0}^4 X^{\dots\alpha\nu\dots}_{\dots\mu\sigma\dots} Y^{\dots\gamma\mu\dots}_{\dots\nu\beta\dots} \quad (0.1)$$

en este caso, μ y ν son los índices mudos repetidos. Esta regla es válida independientemente de la dimensionalidad del espacio-tiempo, o sea, independiente del tipo de índice (griego o latino) utilizado. Otras convenciones utilizadas están dadas por las siguientes definiciones:

$$(\nabla\phi)^2 \equiv g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi, \quad (\nabla_5\phi)^2 \equiv g^{MN}\nabla_M\phi\nabla_N\phi \quad (0.2)$$

Donde ∇ representa a la derivada covariante,⁴ y $g_{\alpha\beta}$ representa al tensor métrico del espacio 4D, mientras que g_{AB} representa al tensor métrico del espacio de dimensiones superiores (en la mayor parte de esta tesis se consideran espacio-tiempos 5D). De la misma manera se define el producto

$$\nabla X \cdot \nabla Y \equiv g^{\mu\nu}\nabla_\mu X \nabla_\nu Y \quad (0.3)$$

así como el operador D´Lambertiano:

$$\square \equiv \nabla^2 = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu, \quad \square_5 \equiv \nabla_5^2 = g^{MN}\nabla_M\nabla_N \quad (0.4)$$

La derivada parcial ordinaria se denota por una coma, así, por ejemplo, $X_{,\nu} \equiv \partial X/\partial x^\nu$.

⁴A veces se usa el punto y coma para denotar derivada covariante. Así, por ejemplo: $\nabla_\nu X_\mu \equiv X_{\mu;\nu}$.

También resulta útil definir el tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (0.5)$$

Se define el tensor de energía-momento por:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} (\sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{materia}}) \quad (0.6)$$

Para la métrica de espacio-tiempos 4D se utiliza la signatura:

$$g_{\alpha\beta} = \text{diag}(- + + +) \quad (0.7)$$

mientras que para espacio-tiempos 5D

$$g_{AB} = \text{diag}(- + + + \pm) \quad (0.8)$$

A menos que se especifique lo contrario, a lo largo de la tesis utilizaremos el sistema natural de unidades donde $\hbar = c = 1$.

1. GRAVEDAD

EXTRA-DIMENSIONAL Y

MUNDOS BRANAS

1.1. Gravitación con dimensiones extras

La teoría de Supercuerdas logra unificar la gravedad con las interacciones fundamentales en una teoría cuántica consistente basada en cuerdas (objetos extendidos uni-dimensionales) que son el principal constituyente de la materia en lugar de partículas puntuales, eliminando el carácter puntual de las interacciones del Modelo Estándar. La teoría está libre de singularidades y anomalías en un espacio-tiempo de 10-dimensiones. Esta predicción de la dimensionalidad del espacio-tiempo es un aspecto fundamental de la teoría de Supercuerdas, reviviendo así las ideas originales de Kaluza-Klein de un espacio-tiempo con dimensiones extras.

Unos años después que Einstein propusiera la idea de un espacio-tiempo 4D dinámico, Kaluza comenzó a considerar las ecuaciones dinámicas en un espacio-tiempo con una dimensión adicional para unificar las interacciones gravitatoria y electromagnética (ver [6]). Los grados de libertad de la métrica asociados con la dimensión extra describen un

vector de campo en un espacio 4D. En otras palabras Kaluza se percató que al considerar una dimensión adicional los símbolos de Christoffel son proporcionales al tensor del campo electromagnético si se consideran las componentes de la métrica $g_{\mu 5} = A_\mu$. En el escenario de Kaluza-Klein la dimensión extra se encuentra compactada en un círculo de radio muy pequeño del orden de $10^{-19}m$ y un campo escalar ¹ determina el tamaño de la dimensión extra o sea en este modelo el campo escalar juega un papel de campo de módulo. La existencia de dimensiones extras del espacio-tiempo tiene un profundo impacto en las leyes de la gravitación. ² La acción de la gravedad en un espacio-tiempo con $1+3+d$ -dimensiones es la acción de Einstein-Hilbert generalizada en este espacio.

$$S_{gravedad} = \frac{1}{2\kappa_{(4+d)}^2} \int d^4x d^d y \sqrt{-g_{(4+d)}} [{}^{(4+d)}R - 2\Lambda_{4+d}] \quad (1.1)$$

Por tanto la ecuación del campo de Einstein también puede ser generalizada a dicho espacio

$${}^{(4+d)}G_{AB} \equiv {}^{(4+d)}R_{AB} - \frac{1}{2}{}^{(4+d)}g_{AB} {}^{(4+d)}R = -\Lambda_{4+d} {}^{(4+d)}g_{AB} + \kappa_{(4+d)}^2 {}^{(4+d)}T_{AB} \quad (1.2)$$

donde ${}^{(4+d)}G_{AB}$, ${}^{(4+d)}R_{AB}$ son los tensores de Einstein y de Ricci del espacio-tiempo $(4+d)$ -dimensional respectivamente, ${}^{(4+d)}R$ es el escalar de curvatura o de Ricci, ${}^{(4+d)}g_{AB}$ y Λ_{4+d} son la métrica y la constante cosmológica de dicho espacio.

Una consecuencia de las dimensiones extras es que la escala de Planck 4D ($M_P \equiv M_4$) no es la escala fundamental, sino la escala de Planck $M_{(4+d)}$ correspondiente al espacio de $4+d$ dimensiones y está relacionada con la constante de acoplamiento gravitacional

¹Estos campos aparecen constantemente en toda teoría cuántica que pretenda describir de manera unificada las interacciones fundamentales de la naturaleza. Por ejemplo, tenemos los campos de Higgs y los bosones de Nambu-Goldstone en el modelo estándar de las interacciones electro-débiles, el dilatón en teoría de Supercuerdas.

²Los modelos de gravedad con dimensiones extras se pueden reducir a teorías escalares-tensoriales efectivas de la gravedad 4D como la teoría de Brans-Dicke.

extra-dimensional mediante:

$$\kappa_{(4+d)}^2 = \frac{8\pi}{M_{(4+d)}^{2+d}} \quad (1.3)$$

De forma análoga al caso de la gravedad estándar 4D, en el límite de campo débil estático se debe de recuperar la ecuación de Poisson 4 + d -dimensional (ver [7, 8]), el potencial gravitatorio a distancias menores que la escala de longitud de las dimensiones extras L viene dado:

$$V(r) \propto \frac{\kappa_{4+d}^2}{r^{1+d}} \quad \text{para } r \leq L \quad (1.4)$$

a distancias mucho mayores que la escala de longitud de las dimensiones extras.

$$V(r) \propto \frac{\kappa_{4+d}^2}{L^d r} \quad \text{para } r \geq L \quad (1.5)$$

La ecuación anterior a escalas ordinarias debe de coincidir con el potencial Newtoniano, obteniéndose la siguiente relación entre las escalas de Planck M_4 y $M_{(4+d)}$.

$$M_P^2 = M_{(4+d)}^{2+d} L^d \quad (1.6)$$

De la ecuación (1.4) se deduce que a escalas menores que L se debe observar una desviación de la ley usual de la gravedad 4D $\frac{1}{r} \longrightarrow \frac{1}{r^{1+d}}$. Según esta idea nuestro espacio-tiempo es $\mathcal{R}^4 \times M_d$ donde M_d es una variedad compacta n -dimensional de volumen L^d . A partir de esta idea Arkani-Hamed, Dimopoulos y Dvali (ADD) en [7] propusieron una posible solución para el problema de la jerarquía entre las escalas de Planck $M_P \sim 10^{19} GeV$ y la escala electro-débil $M_{ED} \sim 100 GeV$. Tal discrepancia $\frac{M_{ED}}{M_P} \sim 10^{-17}$ puede ser eliminada si la escala de Planck fundamental es comparable a la escala electro-débil en el volumen extra-dimensional. Si $M_{(4+d)} \sim M_{ED}$ de la ecuación (1.6) se obtiene que la escala de longitud de las dimensiones extras necesaria para resolver el problema de la jerarquía de

masas es

$$L \sim 10^{\frac{30}{d}-19} \left(\frac{1\text{TeV}}{M_{EW}} \right)^{1+\frac{2}{d}} m \quad (1.7)$$

En la ecuación anterior se puede ver que para una sola dimensión adicional $d = 1$ se tiene una escala de longitud de la dimensión extra $L \sim 10^{11} m$. Este resultado implicaría desviaciones de la gravedad Newtoniana a escala del Sistema Solar. En el caso $d = 2$ se tiene $L \sim 10^{-4} m$, la teoría de la gravedad no ha sido comprobada aún a esta escala. En la actualidad la teoría de la gravedad no ha sido probada a distancias mucho más pequeñas que el milímetro, puede que los experimentos futuros encuentren estas desviaciones en estos rangos de distancia (ver [9]). De los resultados anteriores se puede concluir que los modelos con una sola dimensión extra compacta no son viables pues presentan desviaciones apreciable a escalas ordinarias de la ley de la gravitación de Newton.

En el escenario propuesto en [7] la partículas del ME no pueden propagarse libremente en las d dimensiones extras quedando localizadas en una sub-variedad 4D. Se asume que M_{ED} es la escala característica de la teoría a distancias cortas del orden de M_{ED}^{-1} en el mundo 4D con d dimensiones adicionales. El único campo que puede propagarse en el bulk $4 + d$ -dimensional es el gravitón con un acoplamiento suprimido por la escala de Planck fundamental $M_P \sim M_{ED}$. Además se considera que no son inducidos los operadores de dimensión superior típicos de cualquier extensión del ME que solamente son suprimidos por M_{ED} y pueden provocar el decaimiento del protón ³.

Este es un escenario interesante y simple de un espacio-tiempo con d dimensiones extras compactas en un radio L con una topología toroidal, donde las partículas del ME son confinadas a espacios 4D y solo el gravitón puede propagarse con libertad en todas las dimensiones.

³El ME predice que el protón es una partícula inestable, aunque su período de semi-desintegración excede a la edad actual del universo por esta razón no se ha observado el decaimiento del protón.

1.2. La Teoría M y los mundos branas

Los espacio-tiempos de dimensión superior $D \geq 5$ son cada vez más recurridos en la actualidad. La habilidad de los escenarios propuestos para responder a la interrogante: ¿porqué el espacio extra no es observable? descansa en la idea de las branas [7, 10]. La existencia de estos objetos extendidos denominados branas juega un papel importante en la Teoría de Supercuerdas 1 + 9-dimensional. Por ejemplo, una 0-brana representa un punto, 1-brana es una cuerda y d -brana es una hipersuperficie d -dimensional. Las branas abren la posi-

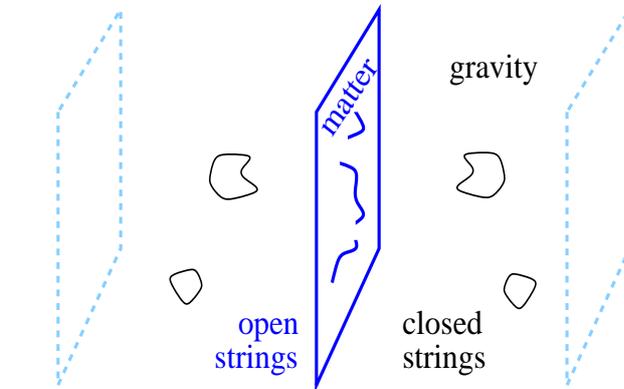


Figura 1.1.: Los extremos de las cuerdas abiertas se encuentran unidos a la hipersuperficie, solo las cuerdas cerradas se propagan en el bulk.

bilidad de relacionar las aparentemente distintas teorías de supercuerdas conocidas como Tipo *I*, *IIA*, *IIB* y las supercuerdas heteróticas $SO(32)$ y $E_8 \times E_8$ mediante las transformaciones de dualidad en una teoría fundamental de supergravedad 1 + 10-dimensional, donde cada una de las teorías de cuerdas supersimétricas perturbativas corresponden a diferentes límites de la teoría de la supergravedad 11D, que hoy conocemos como Teoría M (ver [11]). La supersimetría implica que la cuantización de la cuerda solo es consistente en 10 dimensiones espacio-temporales. Por su parte la Teoría M definida originalmente en términos del límite fuertemente acoplado de la supercuerda tipo *IIA* es una teoría 11-dimensional. Las cuerdas cerradas representan el sector gravitacional de la teoría. En

otras palabras las perturbaciones de la geometría del bulk se describe en términos de las excitaciones de las cuerdas cerradas (asociadas al gravitón) (ver Fig.1.2). Mientras que las cuerdas abiertas describen el sector no gravitacional confinando la materia y la radiación a la brana (ver Fig.1.2).

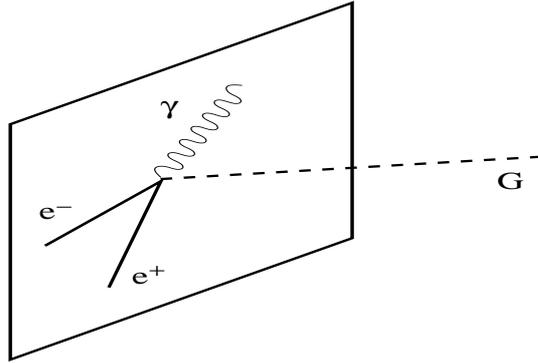


Figura 1.2.: Las partículas del ME se encuentran atrapadas en la hipersuperficie. Sólo el gravitón se puede propagar en el bulk.

Según demostraron Horava y Witten [10] el límite fuertemente acoplado de la teoría de la cuerda heterótica $E_8 \times E_8$ es la Teoría M en un orbifold $\mathcal{R}^{10} \times S_1/Z_2$, donde la oncenava dimensión está compactificada en el orbifold ⁴ S_1/Z_2 y en los límites del espacio-tiempo en puntos fijos del orbifold se encuentran las dos hipersuperficies \mathcal{R}^{10} que son 1+9-branas en las cuales se confinan los grupos de calibración (gauge) E_8 . Luego Witten [12] demostró que considerando una compactificación a 4D, o sea 6 de las 11 dimensiones son compactadas en una variedad de Calabi-Yau deformada, el tamaño de esta variedad es mucho menor que el espacio entre las dos 1 + 9-branas. En otras palabras el radio del orbifold S_1 es mucho mayor que el radio del espacio de Calabi-Yau. Este modelo se puede visualizar como un espacio-tiempo 5D en el cual los campos materiales solo pueden propagarse en las hipersuperficies 3D ubicadas en los bordes de la variedad y perpendiculares a la dimensión extra.

⁴La simetría orbifold Z_2 representa la simetría ante la inversión de la dimensión extra $y \rightarrow -y$, también se le conoce como simetría espejo.

Es a partir de este resultado de la teoría de cuerda, que se comienzan a estudiar modelos fenomenológicos no relacionados directamente con la teoría de cuerda. Estos modelos han sido investigados inicialmente en el contexto del problema de la jerarquía de escalas en [2], alternativas a la compactificación de Kaluza-Klein [3]. Más recientemente han sido estudiados en el contexto cosmológico como alternativas a los modelos de inflación y de EO. La cosmología correspondiente a la reducción 5D de la teoría de Horava-Witten ha sido estudiada en [13, 14]. Generalmente los modelos donde las partículas del ME son confinadas a hipersuperficies n -dimensional empotradas en un espacio de dimensión mayor (bulk) donde solamente puede propagarse la gravedad u otra forma exótica de materia como campos escalares ⁵, se les conoce como **mundos branas**.

1.3. Principio de mínima acción en mundos branas

Consideremos de forma general un bulk con $4 + d$ dimensiones en el cual son empotradas las $4 + d - 1$ -branas que son sub-variedades de una dimensión menor que el bulk.

Veamos cómo son modificadas las leyes de la gravitación en este tipo de escenario donde solo la gravedad es libre de propagarse en todas las dimensiones. La ecuación del campo se obtiene a partir de la acción Einstein-Hilbert (1.1) que puede ser generaliza al sistema de los mundos branas agregando la acción de la $4 + d$ -brana en la acción (1.1), incluso se puede considerar que en el bulk se propaga alguna forma exótica de materia como campos escalares o campos de forma, la inclusión de los campos escalares juega un papel

⁵Por ejemplo el dilatón, hay que señalar que los campos escalares han venido a jugar un papel fundamental en los modelos recientes del universo temprano. La densidad de energía del potencial de auto-interacción del campo escalar, no se diluye con la expansión del universo y por tanto, puede actuar como una constante cosmológica efectiva que puede manejar el período de inflación.

importante en este tipo de modelo. La acción (1.1) se puede escribir como:

$$S_{(4+d)} = \int d^4x d^d y \sqrt{-g_{(4+d)}} \left[\frac{1}{2} R_{(4+d)} - \Lambda_{d+4} - \frac{1}{2} (\nabla_{(4+d)} \phi)^2 - V(\phi) \right] + S_{brana} \quad (1.8)$$

Donde la acción de la brana S_{brana} no es más que la acción de gravedad en la brana (escalar de curvatura extrínseca) más la acción de la materia atrapada en la brana 4D.

El papel de los campos escalares en los mundos branas ha sido ampliamente discutidos en [15, 16, 17]. Usualmente los campos escalares juegan el papel de campos de módulo que permiten fijar la evolución del volumen extra-dimensional, o sea estos campos se propagan en el bulk [16]. Sin embargo en [17, 18] estos campos pueden modelar branas gruesas ⁶, en este caso no son campos de módulo, sino que proporcionan el material que constituye a la branas. Los modelos de branas gruesas, basados en gravedad acoplada a campos escalares, tienen el atractivo de obtener la brana de forma natural sin tener que introducirla en la acción del modelo funciones delta de Dirac (ver [17]). En otras palabras estas se pueden introducir sencillamente si se elimina el término S_{brana} en la acción (1.8) y se estudia la gravedad 4 + d -dimensional acoplada al dilatón. De forma general la acción de n branas en el bulk se puede plantear como:

$$S_{brana} = - \sum_i \int d^4x d^{d-1}y \sqrt{-h_i} (K_i^\pm + \lambda_i(\phi) + \mathcal{L}_{materia}) \quad (1.9)$$

donde h_i , K_i^\pm y $\lambda_i(\phi)$ son el determinante de la métrica inducida en la i -ésima brana, el término Gibbons-Hawking que está relacionado con la curvatura intrínseca de la brana [19] y la tensión de la brana respectivamente, esta última es función del campo escalar y $\mathcal{L}_{materia}$ es la función de Lagrange de los grados de libertad atrapados en la brana. A continuación se obtiene la ecuación del campo correspondiente a la acción (1.8), por

⁶Las branas estudiadas en esta tesis son branas delgadas (grosor nulo). Este tipo de brana representa una dificultad pues la teoría de cuerda impone un límite mínimo de longitud elemental.

cuestiones de simplicidad se considera un bulk 5D y una sola brana en éste. Aunque los resultados obtenidos se pueden generalizar a espacios de dimensión mayor que 5 y más de una brana. Se considera el juego de coordenadas (x^μ, y) , donde las coordenadas x^μ representan las coordenadas ordinarias (las 3 dimensiones espaciales y el tiempo) y y representa la coordenada extra. La acción (1.8) y (1.9) se pueden escribir en este caso

$$S_{(5)} = \int d^4x dy \sqrt{-g_{(5)}} \left(\frac{1}{2} {}^{(5)}R - \Lambda_5 - \frac{1}{2} (\nabla_{(5)}\phi)^2 - V(\phi) \right) + S_{brana} \quad (1.10)$$

$$S_{brana} = - \int d^4x \sqrt{-h} (K^\pm + \lambda(\phi) + \mathcal{L}_{materia}) \quad (1.11)$$

De acuerdo al principio de mínima acción se tiene que las primeras variaciones de las variables de campo (g_{AB}, ϕ) y sus primeras derivadas se anulan en la frontera de la variedad 5D

$$\bar{\delta}g_{AB} = \bar{\delta}\partial_C g_{AB} = \bar{\delta}\phi = \bar{\delta}\partial_C\phi = 0 \quad (1.12)$$

Variando en (1.10 y 1.11) respecto a la métrica g^{AB} y se toma en cuenta que

$$\bar{\delta}\sqrt{-g_{(5)}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g_{(5)}}g_{AB}\bar{\delta}g^{AB} \quad (1.13)$$

$$\bar{\delta}(\nabla\phi)^2 = \nabla_A\phi\nabla_B\phi\bar{\delta}g^{AB} \quad (1.14)$$

$$\bar{\delta}{}^{(5)}R = {}^{(5)}R_{AB}\bar{\delta}g^{AB} \quad (1.15)$$

Se obtiene la siguiente ecuación del campo 5D:

$${}^{(5)}R_{AB} - \frac{1}{2}g_{AB}{}^{(5)}R = -\Lambda_{(5)}g_{AB} + {}^{(5)}T_{AB} \quad (1.16)$$

La delta con barra $\bar{\delta}$ significa variación para diferenciarla de la delta de Dirac δ . El tensor

de energía-momento 5D de la ecuación anterior se define:

$${}^{(5)}T_{AB} = T_{AB}^{(\phi)} + T_{AB}^{(brana)} \delta(y - y_0) \quad (1.17)$$

El tensor de energía-momento del campo escalar $T_{AB}^{(\phi)}$ es:

$$T_{AB}^{(\phi)} = {}^{(5)}\nabla_A \phi {}^{(5)}\nabla_B \phi - g_{AB} \left(\frac{1}{2} ({}^{(5)}\nabla \phi)^2 + V(\phi) \right) \quad (1.18)$$

El tensor de la brana se define por:

$$T_{AB}^{(brana)} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\bar{\delta}(\sqrt{-h} \mathcal{L}_{brana})}{\bar{\delta} g^{AB}} = -\lambda(\phi) h_{AB} + S_{AB} \quad (1.19)$$

Donde S_{AB} es el tensor de energía-momento de los grados materiales atrapados en la brana. Variando las acciones (1.10) y (1.11) con respecto a la variable de campo ϕ se obtiene la ecuación de Klein-Gordon del campo escalar.

$$\square \phi - V'(\phi) = -\frac{\sqrt{-h}}{\sqrt{-g}} \left(-\lambda'(\phi) + \frac{\bar{\delta} \mathcal{L}_{materia}}{\bar{\delta} \phi} \right) \delta(y - y_0) \quad (1.20)$$

La prima en la ecuación anterior denota la derivada respecto al campo escalar, la función delta $\delta(y - y_0)$ que aparece en (1.18 y 1.20) significa que la brana se encuentra en la posición y_0 de la dimensión extra y expresa la idea clásica de la teoría de supercuerdas del confinamiento de la materia a la brana.

1.4. Mundos branas de Randall-Sundrum

El esplendor de los modelos de branas llegó con los trabajos de L. Randall y M. Sundrum [2, 3]. Su objetivo original era dar solución al problema de la jerarquía de masas.

En los modelos de Randall-Sundrum (RS) se considera un bulk vacío tipo Anti de Sitter ⁷ con una sola dimensión extra (AdS_5). Estos modelos constituyen una reducción 5D de la supergravedad de Horava-Witten [10], donde la curvatura del bulk atrapa la gravedad a la brana en el límite de baja energía y la constante cosmológica del bulk está determinada por el radio de curvatura \mathcal{R} del espacio AdS_5 .

$$\Lambda_5 = -\frac{6}{\mathcal{R}^2} \quad (1.21)$$

Al utilizar un sistema de coordenadas gaussianas $X^A = (x^\alpha, y)$ se asume una métrica no factorizable en el espacio AdS_5 , donde la métrica 4D es multiplicada por un factor de torcedura que es una función que cambia rápidamente con la dimensión adicional:

$${}^{(5)}ds^2 = e^{-\frac{2|y|}{\mathcal{R}}} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2 \quad (1.22)$$

El término exponencial es el factor de torsión y es más pequeño mientras mayor sea la jerarquía entre las escalas de Planck y electro-débil, además refleja el papel que juega la constante cosmológica del bulk en el confinamiento de las interacciones a la brana. $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski. La métrica (1.22) es solución del sector gravitacional de la ecuación del campo de Einstein (1.2), o sea ${}^{(5)}T_{AB} = 0$. En la brana ubicada en $y = 0$ el espacio-tiempo es plano de Minkowski, en otras palabras la métrica en la brana es $g_{AB}(x^\alpha, 0) = \eta_{\mu\nu} \delta_A^\mu \delta_B^\nu$. Al utilizar la coordenada de Poincaré $z = \mathcal{R}e^{\frac{y}{\mathcal{R}}}$ el elemento de línea (1.22) se puede escribir como

$${}^{(5)}ds^2 = \frac{\mathcal{R}^2}{z^2} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2) \quad (1.23)$$

Existen dos tipos de modelos de branas RS distintos, que se especificarán en las subsec-

⁷El espacio-tiempo AdS es una solución máximamente simétrica de la ecuación de Einstein con constante cosmológica negativa.

ciones siguientes.

1.4.1. Branass de Randall-Sundrum tipo I

En un primer modelo [2] se consideran dos branass ubicadas en puntos fijos $y = 0$ y $y = L$ de la dimensión extra del bulk AdS_5 como se muestra en la Fig.1.4.1. En este escenario la dimensión extra se encuentra compactificada en un orbifold S^1/Z_2 . De la simetría Z_2 se deduce:

$$y \longleftrightarrow -y \quad y + L \longleftrightarrow L - y \quad (1.24)$$

Donde L es la longitud de la dimensión extra. Las branass tienen tensiones iguales pero opuestas $\pm\lambda$ (ver [2]) y viene dada por:

$$\lambda = \frac{3M_P^2}{4\pi\mathcal{R}^2} \quad (1.25)$$

La brana de tensión positiva “oculta” se encuentra en $y = 0$ y la escala fundamental en ésta es M_5 . En la posición $y = L$ se ubica la brana de tensión negativa “visible” en la cual se confinan las partículas e interacciones del ME. El factor de torcedura induce una escala efectiva M_P en la brana visible que está determinada por:

$$M_P^2 = M_5^3 \mathcal{R} \left[1 - e^{-\frac{2L}{\mathcal{R}}} \right] \quad (1.26)$$

Este modelo proporciona una nueva perspectiva al problema de la jerarquía y la separación finita de las branass proporciona un espectro discreto de modos de Kaluza-Klein. El mecanismo para estabilizar la distancia entre las branass requiere de un campo escalar conocido como radión, que ha sido estudiado en [20]. Además a bajas energías la gravedad en la brana es similar a una teoría de Brans-Dicke, donde el signo del parámetro de Brans-Dicke es igual al signo de la tensión de la brana ver [16] y en este orden se recupera a

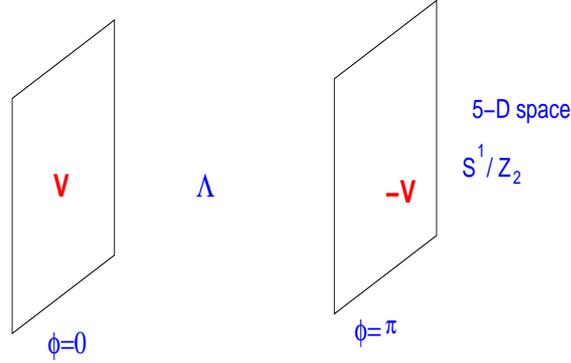


Figura 1.3.: Escenario inicialmente propuesto por Randall-Sundrum.

bajas energías la TGR.

1.4.2. Branas de Randall-Sundrum tipo II

Este modelo será estudiado con mayor profundidad pues proporciona el escenario físico que constituye el objeto de estudio en la presente tesis. En este segundo modelo de Randall-Sundrum [3] (RS2) subsiste solamente la brana de tensión positiva ubicada en $y = 0$ pues la brana de tensión negativa se aleja hasta el infinito al hacer $L \rightarrow \infty$. De la ecuación (1.26) se deduce que la escala de energía en la brana de tensión positiva es:

$$M_5^3 = \frac{M_P^2}{\mathcal{R}} \quad (1.27)$$

La dimensión extra infinita contribuye de manera finita al volumen 5D debido al factor de torcedura.

$$\int d^5 X \sqrt{-g_{(5)}} = 2 \int d^4 x \int_0^\infty dy e^{\frac{-4y}{\mathcal{R}}} = \frac{\mathcal{R}}{2} \int d^4 x \quad (1.28)$$

Un ajuste fino en (1.25) proporciona una constante cosmológica efectiva nula en la brana e induce en la brana la geometría de un espacio-tiempo de Minkowski. Este modelo tiene la ventaja respecto al primero de estar libre de la complicación asociada a la estabilización

mediante el radión. Para el estudio de la gravedad débil el método usual es considerar una métrica perturbada linealmente $g_{AB} \rightarrow g_{AB} + h_{AB}$, entonces se considera al gravitón 5D como una perturbación de la métrica de fondo [16, 21] de la siguiente forma:

$${}^{(5)}g_{AB} \longrightarrow {}^{(5)}g_{AB} + e^{-\frac{2y}{\mathcal{R}}} {}^{(5)}h_{AB} \text{ se cumple } {}^{(5)}h_{Ay} = {}^{(5)}h_{\mu}^{\mu} = {}^{(5)}h^{\mu\nu}_{,\mu} = 0 \quad (1.29)$$

La ecuación de Einstein 5D linealizada es

$$\left[\zeta \square^{(4)} + \partial_y^2 - \frac{4}{\mathcal{R}} + \frac{4}{\mathcal{R}} \delta(y) \right] h_{\mu\nu} = 0 \quad (1.30)$$

y $\zeta = e^{-\frac{2|y|}{\mathcal{R}}}$. La ecuación (1.30) es de variable separable si la solución general es de la forma:

$$h_{\mu\nu}(x^\lambda, y) = u_m(y) e^{ik_\lambda x^\lambda} \epsilon_{\mu\nu} \quad (1.31)$$

Donde $k_\lambda k^\lambda = -m^2$ y m es interpretado como la masa del gravitón 4D. Reemplazando el operador de d'Álembert por m^2 en (1.30) se tiene que $u_m(y)$ satisface la siguiente ecuación diferencial ordinaria.

$$u_m'' + 4 \left(\frac{1}{\mathcal{R}^2} \delta(y) - \frac{1}{\mathcal{R}} \right) u_m = m^2 \zeta u_m \quad (1.32)$$

Si se introduce una nueva variable $z = \text{sgn}(y) \mathcal{R}(\zeta - 1)$ y $\psi_m = \zeta^{-\frac{1}{4}} u_m$ la ecuación anterior se puede escribir de forma similar a la ecuación de Schrödinger.

$$-\frac{d^2 \psi_m}{dz^2} + V(z) = m^2 \psi_m \quad (1.33)$$

Donde el potencial $V(z)$ está dado por la expresión:

$$V(z) = \frac{15}{4(|z| + \mathcal{R})^2} - \frac{3}{\mathcal{R}} \delta(z) \quad (1.34)$$

La función delta en el potencial admite la existencia de un estado base normalizado. Este modo cero del gravitón posee una dependencia funcional $u_m \propto \zeta$ y se encuentra localizado en la vecindad de la brana. Este modo reproduce el gravitón 4D usual del acoplamiento gravitacional 4-dimensional.

$$8\pi G_4 = \frac{\kappa^2}{\mathcal{R}} \quad (1.35)$$

Además del modo cero, se tiene un continuo de modos masivos del gravitón que se escriben en términos de una combinación lineal de las funciones de Bessel $(|z| + \mathcal{R})^{1/2} Y_2(m(|z| + \mathcal{R}))$ y $(|z| + \mathcal{R})^{1/2} J_2(m(|z| + \mathcal{R}))$. De las condiciones de contorno que implica función δ en el potencial de la brana en $z = 0$, se obtienen las autofunciones de los modos continuos de KK [3].

$$\psi_m \sim N_m (|z| + \mathcal{R})^{1/2} \left[Y_2(m(|z| + \mathcal{R})) + \frac{4}{\pi m^2 \mathcal{R}^2} J_2(m(|z| + \mathcal{R})) \right] \quad (1.36)$$

donde N_m es una constante de normalización.

La existencia de los modos masivos inducen correcciones a la ley usual de la gravitación, esta corrección solo es significativa a escalas del orden del radio de curvatura del espacio AdS_5 .

$$V(r) = \frac{G_4}{r} \left(1 + \alpha \frac{\mathcal{R}^2}{r^2} \right) \quad \text{donde } \alpha = 2/3 \quad (1.37)$$

A escalas mayores que el radio de curvatura del AdS_5 , la presencia de los modos masivos hacen que este escenario sea no realista debido a las desviaciones de la ley de Newton que los modos masivos de baja energía inducen. Pero la funciones de ondas de los modos masivos son fuertemente suprimidas en la vecindad de la brana y por tanto su contribución al potencial Newtoniano es también fuertemente suprimida. Entonces se puede construir un escenario realista con una dimensión extra no compacta.

Este tipo de escenario es uno de los modelos más recurridos en la actualidad pues propor-

ciona un escenario geométrico simple, además de su conexión con el límite de baja energía y pequeña curvatura de la teoría de Supercuerdas. Además el modelo RS2 proporciona la base para explorar las ideas holográficas que emergen de la teoría M. La holografía sugiere que la dinámica gravitacional de dimensión superior puede determinar el conocimiento de los campos en el límite de baja dimensionalidad. La correspondencia *AdS/CFT* es un ejemplo en el cual la dinámica clásica del campo gravitacional con dimensiones extras es equivalente en el límite a la dinámica cuántica de una Teoría de Campo Conforme (CFT). El modelo RS2 con su métrica del *AdS₅* satisface dicha correspondencia, para más detalles de la correspondencia *AdS/CFT* en el contexto cosmológico ver [22].

1.5. Formalismo covariante de Gauss-Codacci

El formalismo de Gauss-Codacci proporciona una potente herramienta para el estudio de la geometría y la dinámica de los mundos branas. En este formalismo se hace uso de las conocidas ecuaciones de Gauss y Codacci de geometría diferencial, para determinar el tensor de curvatura de Riemann-Christoffel así como las contracciones de éste en variedades diferenciales. En nuestro caso el bulk representa la variedad de dimensión n y se representa por M_n y g_{AB} es la métrica definida en la variedad. Nuestro interés es determinar el tensor de curvatura de Riemann-Christoffel en una subvariedad de dimensión menor M_{n-1} o $((n-1)$ -brana) inmersa en la variedad M_n . Como los modelos estudiados en esta tesis son modelos 5D, además por cuestiones de simplicidad, de aquí en lo adelante solo se consideran variedades M_5 , aunque las ecuaciones planteadas son igualmente aplicables al caso n -dimensional. La presente sección no pretende ser una introducción pedagógica y profunda del tema, existen varios artículos de revisión que cumplen este objetivo [23, 24], solo se trata de dotar al lector del formalismo necesario para resolver algunos problemas que aparecen en los modelos de branas.

1.5.1. Modelo geométrico

Consideremos una subvariedad 4D o 3-brana que denotaremos (M_4, h_{AB}) inmersa en una variedad 5D (M_5, g_{AB}) donde h_{AB} es métrica inducida en M_4 por la métrica de ambiente g_{AB} y se determina por:

$$h_{AB} = g_{AB} - n_A n_B \quad (1.38)$$

Donde n_A es el vector unitario normal a la brana y es un vector de carácter espacial, por tanto cumple la condición:

$$g_{AB} n^A n^B = 1 \quad (1.39)$$

Si se toma el siguiente juego de coordenada $X^A = (x^\alpha, y)$ donde y es la coordenada extra, se puede ver que:

$$n^A h_{AB} = n_B - n_B \quad (1.40)$$

o sea la métrica inducida en M_4 es perpendicular al vector normal n^A y actúa como un proyector de la métrica de fondo, así por ejemplo:

$${}^{(5)}R_{MN} h_A^M h_B^N \times n^A = 0 \quad (1.41)$$

donde ${}^{(5)}R_{MN}$ es el tensor de Ricci definido en M_5 y ${}^{(5)}R_{MN} h_A^M h_B^N = {}^{(4)}R_{AB}$ es su proyección en M_4 .

1.5.2. Ecuación de Gauss

El formalismo covariante de Gauss-Codacci se basa en dos ecuaciones fundamentales, una de ellas es la ecuación de Gauss y se escribe como:

$${}^{(4)}R_{ABCD} = {}^{(5)}R_{NMRS} h_A^N h_B^M h_C^R h_D^S + 2K_{A[C} K_{D]B} \quad (1.42)$$

donde

$$2K_{A[C}K_{D]B} = K_{AC}K_{DB} - K_{AD}K_{CB} \quad (1.43)$$

La ecuación (1.42) relaciona la curvatura intrínseca de la brana, dada por el tensor de curvatura 4D de Riemann-Christoffel ${}^{(4)}R_{ABCD}$, con la curvatura del bulk, dada por el tensor de Riemann-Christoffel ${}^{(5)}R_{ABCD}$ y la curvatura extrínseca de la brana dada por K_{AB} . El tensor de curvatura extrínseca de una hipersuperficie (o brana) ortogonal al campo vectorial unitario n^A se define como:

$$K_{AB} = h_A^N h_B^M {}^{(5)}\nabla_N n^M = \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\vec{n}} h_{AB} \quad (1.44)$$

Donde $\mathcal{L}_{\vec{n}}$ es la derivada de Lie en la dirección del vector normal \vec{n} y se define como $\mathcal{L} = [n^M {}^{(5)}\nabla_M]$ y cumple la siguiente relación elemental

$$K_{[AB]} = K_{AB} n^A = 0 \quad (1.45)$$

Para un estudio más detallado del desarrollo de las ecuaciones (1.42)(1.45) se remite el lector a [25].

1.5.3. Ecuación de Codacci

La ecuación que determina el cambio de la curvatura extrínseca K_{AB} en la hipersuperficie $y = const$ se conoce como ecuación de Codacci y se escribe como:

$$\nabla_N K_A^N - \nabla_A K = {}^{(5)}R_{MN} h_A^M n^N \quad (1.46)$$

Resulta conveniente introducir la siguiente relación que es de gran utilidad y es una descomposición del tensor de curvatura de Riemann-Christoffel ${}^{(5)}R_{ABCD}$ que lo relaciona

con el tensor de Ricci ${}^{(5)}R_{AB}$ el escalar de curvatura ${}^{(5)}R$ y el tensor de Weyl ${}^{(5)}C_{ABCD}$ (que es la parte invariante conforme del tensor de curvatura):

$${}^{(5)}R_{ABCD} = {}^{(5)}C_{ABCD} + \frac{2}{3} (g_{A[C} {}^{(5)}R_{D]B} - g_{B[C} {}^{(5)}R_{D]A}) - \frac{1}{6} g_{A[C} g_{D]B} {}^{(5)}R \quad (1.47)$$

Como el tensor de Weyl es invariante conforme, o sea es invariante ante transformaciones conformes ⁸ de la métrica de la forma $\bar{g}_{AB} = \Omega^2 g_{AB}$ donde $\Omega(x^A)^2$ es una función de las coordenadas espacio-temporales y se tiene:

$${}^{(5)}\bar{C}_{ABCD} = {}^{(5)}C_{ABCD} \quad (1.48)$$

Como la radiación no es afectada por este tipo de transformación, el tensor de Weyl se puede relacionar con aquella parte de la curvatura asociada a la radiación de ondas gravitacionales. Una vez conocido el formalismo de Gauss-Codacci el próximo paso es obtener las ecuaciones de Einstein en la brana.

1.6. Ecuación de Einstein en la brana

El objetivo de esta sección es obtener la expresión del tensor de Einstein en la brana.

Una vez más consideremos el escenario simplificado de los campos materiales confinados en una 3-brana empotrada en un bulk 5D. En el proceso de derivación de dicha ecuación seguiremos las mismas ideas y notaciones utilizadas en [23, 26].

Esta ecuación es de gran importancia pues a partir de ella se obtienen las ecuaciones cosmológicas en la brana que son de nuestro interés.

Denotemos por n^A el vector unitario normal a la brana y que induce la métrica h_{AB}

⁸En este tipo de transformaciones se preserva la estructura causal del espacio-tiempo.

en la brana definida por (1.38). Al contraer en la ecuación de Gauss (1.42) el tensor de curvatura por su primer y tercer índice se obtiene:

$${}^{(4)}R_{AB} = {}^{(5)}R_{MN}h_A^M h_B^N + KK_{AB} - K_B^N K_{NA} - \tilde{E}_{AB} \quad (1.49)$$

donde

$$\tilde{E}_{AB} = {}^{(5)}R_{MNPQ}n_M h_A^N n^P h_B^Q \quad (1.50)$$

Empleando la descomposición (1.47) del tensor de Riemann-Christoffel en la ecuación (1.50) se tiene:

$$\tilde{E}_{AB} = \mathcal{E}_{AB} + \frac{1}{3} \left({}^{(5)}R_{MN} - \frac{1}{2}g_{MN}{}^{(5)}R \right) h_A^M h_B^N + \frac{1}{12}h_{MN}{}^{(5)}R + \frac{1}{3}h_{AB}{}^{(5)}R_{MN}n^M n^N \quad (1.51)$$

Donde \mathcal{E}_{AB} es la proyección del tensor de Weyl en la brana:

$$\mathcal{E}_{AB} = {}^{(5)}C_{MNPQ}n^M h_A^N n^P h_B^Q \quad (1.52)$$

y es un tensor de traza nula $\mathcal{E}_A^A = 0$. A partir de estos resultados la ecuación (1.49) se puede escribir en la forma:

$$\begin{aligned} {}^{(4)}R_{AB} = & -\mathcal{E}_{AB} - \frac{1}{3} \left({}^{(5)}R_{MN} - \frac{1}{2}g_{MN}{}^{(5)}R \right) h_A^M h_B^N - \frac{1}{12}h_{MN}{}^{(5)}R \\ & - \frac{1}{3}h_{AB}{}^{(5)}R_{MN}n^M n^N + {}^{(5)}R_{MN}h_A^M h_B^N + KK_{AB} - K_B^N K_{NA} \end{aligned} \quad (1.53)$$

El tensor de Einstein definido en (0.5) se modifica en la brana al tener en cuenta las contribuciones de la curvatura intrínseca y extrínseca de la hipersuperficie. Al contraer dos veces la expresión anterior se obtiene el escalar de curvatura efectivo en la brana

${}^{(4)}R = g^{AB} {}^{(4)}R_{AB}$. El tensor de Einstein se escribe de la forma:

$$\begin{aligned} {}^{(4)}G_{AB} = & \frac{2}{3} \left({}^{(5)}R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} {}^{(5)}R \right) h_A^M h_B^N + \frac{2}{3} ({}^{(5)}R_{MN} n^M n^N) h_{AB} \\ & + K K_{AB} - K_B^N K_{NA} + \frac{1}{2} h_{AB} (K^{MN} K_{MN} - K^2) - \mathcal{E}_{AB} \end{aligned} \quad (1.54)$$

Suponiendo que es válida la ecuación de Einstein (1.2) para el caso 5-dimensional, además se sabe que ${}^{(5)}R = -\frac{2}{3}T$, de la ecuación anterior se obtiene la siguiente expresión 4-dimensional del tensor de Einstein:

$$\begin{aligned} {}^{(4)}G_{AB} = & -\frac{1}{2} \Lambda_5 g_{AB} + \frac{2}{3} \kappa_5^2 \left[T_{MN} h_A^M h_B^N + \left(T_{MN} n^M n^N - \frac{1}{4} T \right) h_{AB} \right] \\ & + K K_{AB} - K_B^N K_{NA} + \frac{1}{2} h_{AB} (K^{MN} K_{MN} - K^2) - \mathcal{E}_{AB} \end{aligned} \quad (1.55)$$

donde T_{MN} es el tensor de energía-momento 5D.

Eligiendo un sistema de coordenada gaussiano $X^A = (x^\mu, y)$ donde la coordenada extra y es ortogonal a la brana, el elemento de línea viene dado:

$$ds^2 = h_{\mu\nu}(x^\alpha, y) dx^\mu dx^\nu + dy^2 \quad (1.56)$$

En este sistema de coordenada es conveniente elegir del vector unitario normal a la brana

$$n^A = (0, 0, 0, 0, 1), \quad n^5 = n_5 = 1 \quad (1.57)$$

Como la métrica inducida en la brana es ortogonal a n^N esto implica que $h_{AN} n^N = 0 \Rightarrow h_{05} = h_{55} = 0$. Lo mismo es válido para las demás magnitudes definidas en la brana, por ejemplo:

$${}^{(4)}R_{AB} n^B = 0 \Rightarrow {}^{(4)}R_{05} = {}^{(4)}R_{55} = 0 \quad (1.58)$$

La derivada de Lie en este sistema de coordenada se reduce a:

$$\mathcal{L}_{\vec{n}} = \frac{\partial}{\partial y} \quad (1.59)$$

El tensor de Einstein (1.55) se puede escribir en coordenadas normales gaussianas como:

$$\begin{aligned} {}^{(4)}G_{\mu\nu} = & -\frac{1}{2}\Lambda_5 h_{\mu\nu} + \frac{2}{3}\kappa_5^2 \left[T_{MN} h_\mu^M h_\nu^N + \left(T_{MN} n^M n^N - \frac{1}{4}T \right) h_{\mu\nu} \right] \\ & + K K_{\mu\nu} - K_\nu^\beta K_{\nu\beta} - \frac{1}{2}h_{\mu\nu} (K^2 - K^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}) - \mathcal{E}_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (1.60)$$

La ecuación de Codacci (1.46) se reduce:

$$\nabla_\beta K_\alpha^\beta - \nabla_\alpha K = T_{MN} h_\alpha^M n^N \quad (1.61)$$

Las ecuaciones (1.60) y (1.61) conforman el conjunto básico de ecuaciones del formalismo de Gauss-Codacci en la brana.

Por el momento no se asume ningún tipo particular de simetría, además resulta conveniente considerar que la brana se encuentra en la posición $y = 0$ en la dimensión extra y es perpendicular a ésta. Además se considera que el tensor de energía-momento 5-dimensional en la ecuación (1.53) es de la forma definida en (1.17). El tensor de energía-momento de la brana satisface la condición $T_{AB}^{brana} n^B = 0$. Por el momento no vamos a considerar campos escalares o campos de forma en el bulk, así que prescindimos del tensor del campo escalar en la ecuación (1.17). La ecuación (1.60) es independiente del contenido material de la brana, éste afecta las ecuaciones del campo mediante la curvatura extrínseca. Para ver como la materia atrapada en la brana influye en su curvatura extrínseca se utilizan las condiciones de juntura de Israel [27]. Estas condiciones se obtienen al integrar la ecuación del campo (1.16) a lo largo de la dimensión extra desde $y = -\epsilon$ a $y = \epsilon$ luego se hace

$\epsilon \rightarrow 0$ y se obtiene:

$$[h_{AB}] = 0 \Rightarrow h_{AB}^+ = h_{AB}^- \quad (1.62)$$

$$[K_{AB}] = -\kappa_5^2 \left(T_{AB}^{brana} - \frac{1}{3} h_{AB} T^{brana} \right) \quad (1.63)$$

que relacionan la curvatura extrínseca de la brana con su contenido material, donde:

$$[K_{AB}] = \lim_{y \rightarrow +0} K_{AB} - \lim_{y \rightarrow -0} K_{AB} = K_{AB}^+ - K_{AB}^- \quad (1.64)$$

De forma general la notación anterior indica $[A] = A^+ - A^-$. Imponiendo la simetría Z_2 al espacio-tiempo y asumiendo que la brana se encuentra fija en el punto $y = 0$, se tiene $g_{AB}(y) = g_{AB}(-y)$. Esto implica que $K_{AB}(y) = -K_{AB}(-y)$. De la simetría Z_2 en un sistema de coordenada gaussiano se tiene que

$$K_{\mu\nu}^+ = K_{\mu\nu}^- = -\frac{1}{2} \kappa_5^2 \left(S_{\mu\nu} - \frac{1}{3} (\lambda - S) h_{\mu\nu} \right) \quad (1.65)$$

Donde $S = S_{\mu}^{\mu}$. Omitiendo los índices \pm en la ecuación anterior y sustituyendo en la ecuación (1.60) se obtiene la siguiente ecuación gravitacional en la 3-brana ⁹.

$${}^{(4)}G_{\mu\nu} = -\Lambda_4 h_{\mu\nu} + \kappa^2 S_{\mu\nu} + \frac{6}{\lambda} \kappa^4 \pi_{\mu\nu} - \mathcal{E}_{\mu\nu} \quad (1.66)$$

donde

$$\Lambda_4 = \frac{1}{2} (\Lambda_5 + \kappa^2 \lambda) \quad (1.67)$$

$$\kappa^2 = \frac{1}{6} \lambda \kappa_5^4 \quad (1.68)$$

$$\pi_{\mu\nu} = -\frac{1}{4} S_{\mu\beta} S_{\nu}^{\beta} + \frac{1}{12} S S_{\mu\nu} + \frac{1}{8} h_{\mu\nu} S_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} - \frac{1}{24} h_{\mu\nu} S^2 \quad (1.69)$$

De la ecuación (1.68) se deduce que para obtener un escenario realista con acoplamiento

⁹Para simplificar las expresiones asumiremos de aquí en adelante $\kappa = \kappa_4$.

gravitacional positivo, es necesario que la tensión de la brana $\lambda \geq 0$. El primer término de corrección en la brana a la ecuación de Einstein es $\pi_{\mu\nu}$ que es una función cuadrática de $S_{\mu\nu}$ y juega un papel importante en el universo temprano ($\rho \gg \lambda$) e introduce la corrección

$$\frac{|\pi_{\mu\nu}/\lambda|}{|S_{\mu\nu}|} \sim \frac{|S_{\mu\nu}|}{\lambda} \sim \frac{\rho}{\lambda} \quad (1.70)$$

El segundo término de corrección $\mathcal{E}_{\mu\nu}$ corresponde a la proyección del tensor de Weyl en la brana y proporciona información sobre el campo gravitacional fuera de la brana. A la ecuación del campo (1.66) se le agrega un último término de corrección si se generaliza al caso de un campo escalar en el bulk (ver [23]). En este caso hay que sumar a la ecuación del campo (1.66) el término $\frac{4}{\lambda}\kappa^2\mathcal{F}_{\mu\nu}$ donde:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = T_{AB}^{\phi} h_{\mu}^A h_{\nu}^B + \left(T_{AB}^{\phi} n^A n^B - \frac{1}{4} T^{\phi} \right) \quad (1.71)$$

1.7. Conclusiones parciales

Aunque el estudio de cosmología en branas a bajas energías para obtener un comportamiento efectivo 4D puede verse como una simplificación no realista de la física, este tipo de acercamiento fenomenológico, sin embargo, es muy útil. Por esta razón el camino más correcto, sería estudiar los escenarios extra-dimensionales desde un punto de vista más fundamental, o sea partiendo de una teoría fundamental, por ejemplo la Supergravedad y entonces extraer la física de baja energía y finalmente estudiar la cosmología. Siguiendo esta línea de pensamiento en el presente capítulo se expuso a un nivel elemental los marcos teóricos mejor establecidos en los que se basan las teorías extra-dimensionales antes de estudiar la cosmología correspondiente a cada tipo de escenario.

Aunque los mecanismos propuestos por Arkani-Hamed, Dimopoulos y Dvali (ADD) [7] o

por L. Randall and R. Sundrum (RS) [2] no dan una solución definitiva al problema de la jerarquía, nos muestran una nueva perspectiva simple de cómo enfocar este problema fuera del contexto del ME y sus extensiones.

Hay que señalar que los efectos asociados a las dimensiones espaciales extras no solo puede llevar a consecuencias de interés físico a altas energías: como son el problema de jerarquía del ME o la producción de microagujeros negros, entre otros efectos. También es posible considerar las consecuencias a bajas energías de estos escenarios¹⁰ que pueden proporcionar información sobre la viabilidad de estos escenarios.

En este capítulo se mostró que se pueden construir escenarios realistas con una configuración donde no se restringe el espacio-tiempo 5D a tener una dimensión extra compacta como en el modelo RS1: la característica que distingue al modelo RS2 de otros modelos extra dimensionales previos es que la dimensión extra es extendida y no compacta. A bajas energías la dimensión extra no es percibida debido a la curvatura del bulk, en vez de una compactificación. En el escenario RS2 aunque se tiene un continuo de modos excitados de Kaluza-Klein (lo cual haría que el escenario fuera poco realista debido a las desviaciones de la ley de Newton que inducen los modos excitados), la fuerte supresión de las funciones de ondas de los modos excitados en la vecindad de la brana, hacen que las contribuciones de las dañinas excitaciones de KK a la ley usual de la gravitación sean también fuertemente suprimidas. Por tanto se puede construir un escenario a partir del modelo RS2, donde se recupere la ley de la gravitación de Newton a bajas energías.

Tanto los mundos branas de RS como sus generalizaciones, que incluyen materia en la brana y campos escalares en el bulk [29, 30], proporcionan modelos fenomenológicos que reflejan algunas de las características principales de Teoría M que proporciona un nuevo y excitante escenario geométrico además de nuevas ideas en la física de partículas elementales.

¹⁰Estos escenarios tienen implicaciones fenomenológicas en el efecto Casimir, potenciales electromagnéticos y el corrimiento Lamb del átomo de Hidrógeno [28].

2. COSMOLOGÍA EN BRANAS DE RANDALL-SUNDRUM

La idea de dimensiones extras del espacio-tiempo donde la materia ordinaria es confinada a una subvariedad (brana) empotrada en un espacio de dimensionalidad superior, ha recibido una enorme atención en los últimos años. Esta idea ha sido explorada particularmente en el contexto cosmológico en [31, 32, 33, 34]. La evolución cósmica del universo temprano cambia drásticamente si se consideran modelos de inflación inspirados en Teoría de la Gran Unificación (TGU), Teoría de Supercuerdas o Teoría-M [35, 36]. En el presente capítulo se pretende estudiar la dinámica cosmológica en la brana (nuestro universo) en un escenario de Randall-Sundrum tipo II (RS2), que resultan viables desde el punto de vista fenomenológico. En el modelo propuesto originalmente por Randall-Sundrum la brana es plana de Minkowski en un espacio-tiempo AdS_5 y tienen un apreciable impacto en la cosmología del universo temprano particularmente en el período inflacionario. En los modelos inflacionarios más sencillos la densidad de energía del universo es dominada por la energía potencial de un campo escalar (inflatón) que rueda lentamente hacia abajo por la cuesta de su potencial de auto-interacción [37, 38].¹ El resultado es que sólo los potenciales suficientemente planos pueden alimentar la inflación.

¹En cosmología estándar la condición de rodadura lenta (o slow roll) impone restricciones sobre el tipo de potencial que pueden producir escenarios inflacionarios realistas.

Si se confina un campo escalar a la brana RS2 la expansión del universo difiere a altas energías de lo predicho por la RG, pues el parámetro de expansión de Hubble es proporcional a la densidad de energía (en contraste con lo predicho por la TGR donde este parámetro es proporcional a la raíz cuadrada de la densidad de energía) a esto se debe a que el término cuadrático en la densidad de energía del campo escalar proporciona una mejor fricción al campo escalar ². Esto significa que en branas RS la inflación es posible para una clase más amplia de potenciales que en cosmología normal [39]. Incluso para potenciales que no son lo suficientemente planos desde el punto de vista convencional, pueden producir inflación exitosamente (para más detalles se remite al lector al anexo A).

A energías suficientemente bajas (mucho menores que la tensión de la brana) se recupera el comportamiento cósmico estándar a escalas menores que la escala de nucleosíntesis primordial ($\lambda \sim 1MeV$), con lo cual se asegura una salida natural de la inflación ya que el campo escalar acelera su rodamiento hacia abajo por la cuesta del potencial de auto-interacción [40]. En este escenario el recalentamiento se produce de manera natural incluso para potenciales con un mínimo global y la radiación es generada a través de producción gravitatoria de partículas [41], ó por medio del curvatón [42]. Aunque los modelos de branas RS tienen un mayor impacto en el universo temprano, otra propiedad interesante del modelo de inflación en brana RS2, es que el inflatón no decae necesariamente, sino que puede sobrevivir hasta la presente época de la evolución cósmica. Por tanto este mismo campo escalar podría jugar el papel de la quintaesencia, que es el ingrediente necesario para poder explicar el presente período de expansión acelerada. Este nuevo escenario de quintaesencia en cosmología de brana ha sido estudiado en [33]. El mecanismo unificado de inflatón y quintaesencia ha sido objeto de numerosos estudios [40, 43, 44]. Resulta natural estudiar la cosmología correspondiente a una generalización escalar del escenario RS2, en

²En branas RS se cumple mucho mejor la condición de rodadura lenta típica de los escenarios inflacionarios.

este modelo se atrapa un campo escalar a la brana y se reemplaza la brana de Minkowski en un primer caso por una brana homogénea e isotrópica de Friedmann-Roberson-Walker (FRW) la cual se ajusta a las simetrías que se observan actualmente en el universo [45]³. En un segundo caso se considera una brana de Bianchi I la cual es homogénea pero anisótropa. Esta propiedad del espacio es mucho más realista en el universo temprano.

2.1. Cosmología en una brana homogénea de FRW

En el escenario RS2 el bulk AdS_5 admite una brana de Minkowski, pero si consideramos un bulk con 4-isotropía espacial, este espacio-tiempo admite hipersuperficies con 3-isotropía y 3-homogenidad. Una generalización simple del AdS_5 que preserva la 4-isotropía del espacio-tiempo y es solución de vacío de la ecuación de Einstein 5D, es el Schwarzschild- AdS_5 . Este tipo de bulk admite una foliación de FRW⁴.

Los mundos branas de FRW son una generalización cosmológica de las branas de RS y son parte de Schwarzschild- AdS_5 (ver [23]). De forma general la métrica 5D compatible con este tipo de simetría en el bulk se puede escribir de siguiente forma.

$${}^{(5)}ds^2 = g_{ab}(z^c)dz^a dz^b + \vartheta^2(z^c)\gamma_{ij}dx^i dx^j \quad (2.1)$$

Donde γ_{ij} es la métrica tri-dimensional máximamente simétrica con curvatura negativa, nula o positiva que designaremos por ($k = -1, k = 0, k = 1$) respectivamente. En nuestro caso asumiremos que la brana es espacialmente plana. Los subíndices toman los siguientes valores $i, j = 1, 2, 3$. La métrica bi-dimensional g_{ab} depende únicamente del tiempo y de la coordenada extra $g_{ab}(t, y)$ donde $a, b = 0, 4$ y ϑ es en general una función de t y y , $\vartheta(t, y)$.

³El universo actual se ajusta al principio cosmológico, según el cual el universo es homogéneo e isotrópico a grandes escalas cosmológicas.

⁴Las branas de FRW también pueden ser empotradas en generalizaciones no vacías como Reissner-Nördstrom- AdS_5 o Vaidya- AdS_5

Eligiendo un sistema de coordenada gaussiano se tiene:

$$g_{ab}(z^c)dz^a dz^b = -n^2(t, y)dt^2 + dy^2 \quad (2.2)$$

La elección de este sistema es muy conveniente pues de la métrica inducida en la brana se obtiene inmediatamente la métrica FRW. Si suponemos que la brana se encuentra en la posición $y = 0$, en esta hipersuperficie ($y = \text{const.}$), que representa el volumen de nuestro universo, el elemento de línea (2.1) se reduce a:

$$ds^2 = -n^2(t, 0)dt^2 + \vartheta^2(t, 0)\gamma_{ij}dx^i dx^j \quad (2.3)$$

Donde t es el tiempo propio en la brana. En $y = 0$ se tiene $n(t, 0) = 1$ y $\vartheta^2(t, 0) = a^2(t)$ es el factor de escala en la brana.

2.1.1. El modelo

Consideremos un bulk AdS_5 vacío, donde el tensor de energía-momento 5D de la ecuación del campo (1.16) es ${}^{(5)}T_{AB} = T_{AB}^{(brana)}\delta(y)$.

La brana está llena de un fluido de fondo perfecto, constituido de materia ordinaria y de materia escalar. La densidad de energía de los grados de libertad atrapados en la brana es $\rho_T = \rho_m + \rho_\phi$. Luego, el tensor de la brana es de la forma:

$$T_{AB}^{(brana)} = S_{AB} = \text{diag}(-\rho_T, p_T, p_T, p_T, 0) \quad (2.4)$$

donde $p_T = p_m + p_\phi$ es la presión total en la brana. La densidad de energía y la presión

del campo escalar se definen respectivamente por:

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (2.5)$$

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (2.6)$$

Donde $V(\phi)$ es el potencial de auto-interacción del campo escalar y el punto representa la derivada temporal. Ambos fluidos satisfacen la ecuación de estado $p_i = (\gamma - 1)\rho_i$ donde γ es el índice barotrópico del i -ésimo fluido y toma valores entre $1 \leq \gamma \leq 2$. Una vez definido el contenido material en la brana y la métrica FRW espacialmente plana ($k = 0$) en ésta, las ecuaciones cosmológicas se obtienen a partir de la ecuación de Einstein efectiva en la brana (1.66).

La componente temporal ${}^{(4)}G_{00}$ de la ecuación (1.66) proporciona la primera de las ecuaciones cosmológicas, que es la ecuación de Friedmann en la brana:

$$H^2 = \frac{1}{3}\kappa^2\rho_T \left(1 + \frac{\rho_T}{2\lambda}\right) + \frac{1}{3}\Lambda_4 + \frac{C}{a^4} \quad (2.7)$$

Donde H es el parámetro de Hubble que representa el ritmo de expansión del universo, κ es la constante de acoplamiento gravitacional 4D definida por (1.68) y λ es la tensión en la brana. Esta ecuación presenta diferencias considerables con la ecuación clásica de Friedmann. El último término en ecuación anterior, que se conoce como Radiación Oscura, se obtiene de la proyección del tensor de Weyl 5D en la brana. El parámetro C es una constante de integración relacionada con la masa del agujero negro en el bulk. En este primer estudio no se tendrá en cuenta esta corrección, pues existe una versión extendida del teorema de Birkhoff's que demuestra que si el bulk es AdS entonces la constante C es nula [46]. Además consideraremos un ajuste fino entre la constante cosmológica del AdS_5 y la tensión de la brana en la ecuación (1.67) de modo que la constante cosmológica

efectiva en la brana Λ_4 sea nula ⁵ Así la ecuación (2.7) es más simple y además es posible hallar soluciones estáticas del modelo.

La característica principal que distingue a la ecuación (2.7) de la ecuación original de Friedmann de la TGR es la dependencia cuadrática en el miembro derecho de esta de la densidad de energía de la materia atrapada. Este término predomina en el universo temprano donde $\lambda \ll \rho_T \Rightarrow \frac{\rho_T}{2\lambda} \gg 1$. En este caso se tiene una corrección apreciable a la ley de expansión predicha por la TGR pues $H \propto \rho_T$ y no $H \propto \sqrt{\rho_T}$ como es de esperarse según la RG. A tiempos tardíos la densidad de la materia atrapada en la brana se diluye con la expansión $\rho_T \ll \lambda \Rightarrow \frac{\rho_T}{2\lambda} \ll 1$. En este caso la ecuación modificada de Friedmann coincide con la relación estándar que se obtiene en RG.

Otra de las ecuaciones cosmológicas es la ecuación de Raychaudhuri:

$$\dot{H} = -\frac{1}{2}\kappa^2 \left(1 + \frac{\rho_T}{\lambda}\right) (\dot{\phi}^2 + \gamma\rho_m) \quad (2.8)$$

donde el punto indica la derivada respecto al tiempo cosmológico.

La ecuación de Klein-Gordon para el campo escalar es:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \quad (2.9)$$

donde la prima indica la derivada del potencial respecto al campo.

Por último la ecuación de continuidad para el fluido de materia ordinaria en la brana está dada por

$$\dot{\rho}_m + 3\gamma H\rho_m = 0 \quad (2.10)$$

Las ecuaciones cosmológicas (2.7)(2.10) constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales

⁵De este modo los escenarios de brana dan una solución muy simple al conocido problema de la Constante Cosmológica (ver [47]).

ordinarias de segundo orden no lineales. En la actualidad no existen métodos generales de solución para este tipo de ecuaciones. Por tanto, encontrar soluciones al sistema de ecuaciones anterior es una tarea extremadamente difícil aún usando métodos numéricos de solución. No obstante, existe un método alternativo que permite extraer información de sistemas físicos que evolucionan en el tiempo y que son descritos por ecuaciones diferenciales reducibles a ecuaciones de primer orden, sin necesidad de resolver las ecuaciones, conocido como teoría de los sistemas dinámicos (ver anexo B).

2.1.2. Estudio de sistema dinámico en brana FRW

La teoría de los sistemas dinámicos proporciona una herramienta particularmente útil en el estudio de los modelos cosmológicos, donde nos permite obtener una visión global de la dinámica de la expansión del universo [48]. Para un estudio más profundo se recomienda consultar el texto [49].

El objetivo de esta sección es precisamente estudiar la dinámica del campo escalar auto-interactuante atrapado en una brana FRW usando técnicas de la teoría de los sistemas dinámicos. Estas han probado ser muy útiles para obtener información significativa sobre la evolución de una amplia clase de modelos cosmológicos. En esta tesis se introduce una metodología general para el estudio de la dinámica de un campo escalar atrapado en la brana (con un potencial de auto-interacción no especificado a priori) en presencia de un fluido perfecto. Este estudio contiene como casos particulares, por ejemplo, al potencial constante $V(\phi) = V_0$, al potencial exponencial $V(\phi) = V_0 e^{-\alpha\phi}$, por mencionar algunos.

En lo siguiente usamos el sistema natural de unidades donde $\kappa = \hbar = c = 1$.

Normalizando la ecuación de Friedmann (2.7) respecto H^2 se logra identificar las nuevas

variables dinámicas.

$$x = \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{6}H} \quad y = \frac{V}{3H^2} \quad \Omega_\lambda = \frac{\rho_T^2}{6\lambda H^2} \quad (2.11)$$

Introduciendo una nueva variable temporal $\tau = \int H dt$, derivando las nuevas variables dinámicas (2.11) respecto al parámetro temporal τ e introduciendo una variable dinámica adicional relacionada con la pendiente del potencial de auto-interacción del campo escalar

$$s = -\partial_\phi \ln V(\phi) \quad (2.12)$$

se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales ordinaria (EDO) autónomo en las variables x, y, Ω_λ y s .

$$x' = \sqrt{\frac{3}{2}} sy - 3x + \frac{3(\Omega_\lambda + 1)(\gamma - 2)}{2(\Omega_\lambda - 1)} x^3 + \frac{3\gamma(\Omega_\lambda + 1)(y + \Omega_\lambda - 1)}{2(\Omega_\lambda - 1)} x \quad (2.13)$$

$$y' = -\sqrt{6}xys + \frac{3y(\Omega_\lambda + 1)}{(\Omega_\lambda - 1)} [(\gamma - 2)x^2 + \gamma(\Omega_\lambda + y - 1)] \quad (2.14)$$

$$\Omega_\lambda' = 3\Omega_\lambda [(\gamma - 2)x^2 + \gamma(\Omega_\lambda + y - 1)] \quad (2.15)$$

$$s' = -\sqrt{6}xs^2 f(s) \quad (2.16)$$

Donde la función $f(s)$ se define por:

$$f(s) = \Gamma - 1 \quad \text{donde} \quad \Gamma = \frac{V''V}{V'^2} \quad (2.17)$$

En dicho sistema de ecuaciones la prima indica la derivada con respecto al parámetro temporal τ .

A partir de la dependencia de V y de sus derivadas de ϕ y de las definiciones de Γ y s sigue que estas últimas son funciones del campo $\Gamma(\phi)$ y $s = S(\phi)$. Luego si existe la

Tabla 2.1.: Forma explícita de la función $\Gamma(s)$ para algunos potenciales de auto-interacción, estudiados en las referencias que aparecen en la tabla como candidato a quintaesencia.

<i>Potencial</i>	$\Gamma(s)$	<i>Referencia</i>
$V = V_0 \text{Sinh}^{-\alpha} \beta \phi$	$1 + \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha \beta^2}{s^2}$	[50][51][52]
$V = V_0 e^{-\chi \phi} + \Lambda$	$-\frac{\chi}{s}$	[53]
$V = V_0 \frac{e^{\chi \phi^2}}{\phi^m}$	$\frac{(1+2m)s^2 + 8m\chi \pm s\sqrt{s^2 + 8m\chi}}{2ms^2}$	[54][55]
$V = V_0 [e^{\alpha \kappa \phi} + e^{\beta \kappa \phi}]$	$-\frac{\kappa[\kappa \alpha \beta + (\alpha + \beta)s]}{s^2}$	[56]

función inversa $\phi = S^{-1}(s)$ entonces se obtiene $\Gamma(S^{-1}(s))$. En la tabla 2.1 se muestran las funciones $\Gamma(s)$ para algunos de los potenciales de quintaesencia más recurridos en la actualidad.

2.1.3. Espacio de fase

La ecuación de Friedmann se puede escribir en término de las nuevas variables de la siguiente manera.

$$\Omega_m = 1 - x^2 - y - \Omega_\lambda \quad (2.18)$$

A partir de la restricción $0 \leq \Omega_m \leq 1$ se logra identificar la región del espacio de fase:

$$0 \leq x^2 + y + \Omega_\lambda \leq 1 \quad (2.19)$$

A partir de la definición de la variable u y de la ecuación de Friedmann se obtiene la relación:

$$\frac{\rho_T}{\lambda} = \frac{2\Omega_\lambda}{1 - \Omega_\lambda} \quad (2.20)$$

Tabla 2.2.: En la tabla se muestran los puntos críticos del sistema de ecuaciones (2.13)(2.16) y su existencia a partir de la restricción de Friedmann.

P_i	x	y	Ω_λ	s	<i>Existencia</i>
P_1	0	$1 - \Omega_\lambda$	$\Omega_\lambda \in [0, 1[$	0	siempre
P_2	0	0	0	$s \in \mathbb{R}$	siempre
P_3	0	0	1	$s \in \mathbb{R}$	siempre
P_4^\pm	± 1	0	0	0	siempre
P_5	0	1	0	0	siempre
P_6^\pm	± 1	0	0	s^*	siempre
P_7	$\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\gamma}{s^*}$	$-\frac{3\gamma(\gamma-2)}{2s^{*2}}$	0	s^*	$s^{*2} \geq 3\gamma$
P_8	$\frac{s^*}{\sqrt{6}}$	$1 - \frac{s^{*2}}{6}$	0	s^*	$-\sqrt{6} \leq s^* \leq \sqrt{6}$
P_9	$x \in [-1, 1]$	$-\frac{x^2(\gamma-2)}{\gamma}$	1	0	$\notin \Psi$

Hay que señalar que los puntos críticos con $\Omega_\lambda = 1$ corresponden a soluciones donde tensión de la brana $\lambda \rightarrow 0$. Por tanto están asociadas a regiones de altas energías muy próximas a la singularidad inicial. El modelo que discutiremos en esta tesis es clásico, por lo que no es capaz de describir adecuadamente una solución dominada por los efectos cuánticos que aparecen cerca de la singularidad inicial. Por este motivo no debe de incluirse el valor $\Omega_\lambda = 1$ en la región (2.21).⁶ En este caso serán excluidos los puntos P_1 y P_9 . Este

⁶Sin embargo, desde el punto de vista matemático, los estados con $\Omega_\lambda = 1$ se alcanzan asintóticamente. De hecho, como algunas integraciones numéricas corroboran, existe un conjunto abierto de órbitas en el interior del espacio de estado que alcanzan la frontera $\Omega_\lambda = 1$ del espacio de estados cuando $\tau \rightarrow -\infty$. Usualmente al espacio de fases se le adjunta su frontera aunque algunas regiones en la frontera (por ejemplo $\Omega_\lambda = 1$) pueden descartarse de acuerdo a motivaciones físicas.

último punto tampoco cumple la restricción (2.19). Los puntos con $\Omega_\lambda \neq 0$ representan soluciones con contribuciones 5D a la dinámica del universo. En cambio los puntos con $\Omega_\lambda = 0$ están asociados a un comportamiento estándar 4D cuando $\lambda \rightarrow \infty$ y corresponde al límite de bajas energías de las ecuaciones cosmológicas de RS.

De la definición de las variables dinámicas (2.11), (2.12) y la restricción (2.19) se obtiene la siguiente región del espacio de fase en la cual las nuevas ecuaciones dinámicas tienen sentido físico.

$$\Psi = \{(x, y, \Omega_\lambda) : 0 \leq x^2 + y + \Omega_\lambda \leq 1, -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq \Omega_\lambda < 1\} \times \{s \in \mathbb{R}\} \quad (2.21)$$

Los puntos críticos del sistema de ecuaciones (2.13)(2.16) se muestran en la tabla 2.2. En dicha tabla s^* denota los valores de la variable s que anulan la función $f(s)$ o sea $f(s^*) = 0$.

Los puntos críticos P_1 a P_6^\pm existen siempre y los puntos P_1 , P_4^\pm y P_5 son puntos donde s se anula. O sea, ellos existen para potenciales con primera derivada nula. Estos potenciales han sido estudiados en [57]. Los puntos $P_2, P_3, P_6^\pm, P_7, P_8$ existen para potenciales de auto-interacción del campo escalar en los cuales f se anula para algún valor, en general no nulo, de s . Las condiciones de existencia de P_7 y P_8 se presentan en la tabla 2.2.

Resulta de interés escribir algunos parámetros cosmológicos como el parámetro de estado de la materia escalar $\omega_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi}$ y el parámetro adimensional Ω_ϕ en función de las variables dinámicas (2.11):

$$\omega_\phi = \frac{x^2 - y}{x^2 + y} \quad \Omega_\phi = x^2 + y. \quad (2.22)$$

Además el parámetro de desaceleración $q = -\left(1 + \frac{\dot{H}}{H^2}\right)$ se puede escribir

$$q = \left(\frac{1 + \Omega_\lambda}{1 - \Omega_\lambda}\right) \left[3x^2 + \frac{3\gamma}{2}(1 - x^2 - y - \Omega_\lambda)\right] - 1 \quad (2.23)$$

Tabla 2.3.: Valor de los parámetros cosmológicos ω_ϕ , Ω_ϕ y q para cada uno de los puntos críticos que del sistema de ecuaciones (2.13)(2.16) .

P_i	ω_ϕ	Ω_ϕ	q
P_1	-1	$1 - \Omega_\lambda$	-1
P_2	indefine	0	$\frac{3\gamma}{2} - 1$
P_3	indefine	0	indefine
P_4^\pm	1	1	2
P_5	-1	1	-1
P_6^\pm	1	1	2
P_7	$\gamma - 1$	$\frac{3\gamma}{s^{*2}}$	$\frac{3\gamma}{2} - 1$
P_8	$\frac{1}{3}(s^{*2} - 3)$	1	$\frac{s^{*2}}{2} - 1$
P_9	$\gamma - 1$	$-\frac{2x^2}{\gamma}$	indefine

En la tabla 2.3 se muestra el valor de cada uno de estos parámetros correspondiente a los puntos críticos del sistema de ecuaciones (2.13)(2.16) que aparecen en la tabla 2.2.

2.1.4. Estabilidad de los puntos críticos

En esta sección se realiza el análisis de la estabilidad de las perturbaciones de primer orden del sistema de ecuaciones (2.13),(2.16). En el anexo B se ofrecen algunas de las técnicas clásicas para dicho estudio de estabilidad.

El conjunto de puntos P_1 que representa una recta en el plano (y, Ω_λ) dada por $y = 1 - \Omega_\lambda$ que describe una posible solución con contribuciones 5D a la dinámica del universo pues de forma general $\Omega_\lambda \neq 0$. De la relación entre y y Ω_λ se deduce que esta solución es dominada por la energía potencial del campo escalar $\rho_T = V(\phi)$. En este caso la ecuación

de Friedmann se puede reescribir como:

$$3H^2 = V \left(1 + \frac{V}{2\lambda} \right) \quad (2.24)$$

En el universo temprano donde $\lambda \ll V$ se tiene $H_{RS} = \frac{V}{\sqrt{6\lambda}}$, a altas energías el ritmo de expansión del universo en el modelo RS difiere de la expansión predicha por la RG:

$$\frac{H_{RS}}{H_{RG}} = \sqrt{\frac{V}{2\lambda}} \quad (2.25)$$

Estos puntos tienen una variedad estable, M_2 , de dimensión dos. Dado que dicha solución es tipo de *de Sitter* ($\omega_\phi = -1$) y por la importancia de este tipo de soluciones en el contexto cosmológico es necesario hacer un análisis de su estabilidad más allá del típico análisis de estabilidad lineal. Con este propósito en la sección 2.1.5 hacemos el cálculo explícito de su variedad central probándose que dicha posición de equilibrio es localmente asintóticamente inestable.

El punto P_2 corresponde a una solución dominada por la materia $\Omega_m = 1$. Esta solución, aunque corresponde a un punto de equilibrio no hiperbólico, se comporta como un punto de ensilladura ⁷ en el espacio de fase del modelo RS, pues tiene una variedad estable y una variedad inestable ambas no vacías (ver la tabla 2.4).

El punto P_3 será excluido de este análisis pues se encuentra en la frontera $\Omega_\lambda = 1$ de la región del espacio de fase (2.21). Desde el punto de vista físico esta solución representa un universo vacío de Misner-Randall-Sundrum (MRS). Como veremos más adelante todas las integraciones numéricas realizadas durante esta investigación sugieren que dicha solución representa un atractor del pasado. Para comprobar dicha conjetura puede hacerse el cálculo explícito de su variedad central y el análisis de su estabilidad siguiendo el mismo

⁷El concepto de punto silla no se aplica en general a puntos de equilibrio no hiperbólicos

Tabla 2.4.: En la tabla se muestran los autovalores de la matriz de linealización del sistema de ecuaciones (2.13)(2.16).

$$\Pi = \frac{\sqrt{(2-\gamma)(s^{*2}(2-9\gamma)+24\gamma^2)}}{s^*}$$

P_i	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
P_1	0	0	-3	-3γ
P_2	0	-3γ	3γ	$\frac{3}{2}(\gamma - 2)$
P_3	0	$3(\gamma - 1)$	3γ	6γ
P_4^\pm	0	-6	6	$6 - 3\gamma$
P_5	0	0	-3	-3γ
P_6^\pm	-6	$6 - 3\gamma$	$6 \mp \sqrt{6}s^*$	$\mp \sqrt{6}(s^*)^2 f'(s^*)$
P_7	-3γ	$\frac{3}{4}(\gamma - 2 - \Pi)$	$\frac{3}{4}(\gamma - 2 + \Pi)$	$-3\gamma s^* f'(s^*)$
P_8	$\frac{1}{2}(s^{*2} - 6)$	$s^{*2} - 3\gamma$	$-s^{*2}$	$-s^{*3} f'(s^*)$

procedimiento que en las secciones 2.1.5 y 2.1.6. Dado que en esta tesis nos concentramos en la dinámica de tiempo tardío y debido a la complejidad computacional que supone el cálculo de su variedad central decidimos no hacer dicho análisis.

Los puntos P_4^\pm son soluciones dominadas por la energía cinética del campo escalar y representan soluciones con un comportamiento estándar ($\Omega_\lambda = 0$). Dichos puntos críticos, a pesar de ser no hiperbólicos se comportan como puntos de ensilladura en el espacio de fase a causa de la inestabilidad de una dirección asociada a un autovalor real positivo y la estabilidad de una dirección asociada a un autovalor real negativo.

El punto crítico P_5 es un caso particular de P_1 cuando $\Omega_\lambda = 0$ y representa una solución dominada por la energía potencial del campo escalar y representa un atractor tardío de *de Sitter*⁸.

⁸A esta conclusión puede arribarse luego de hacer el análisis de la estabilidad de su variedad central (ver 2.1.6)

El análisis de la estabilidad de los puntos de equilibrio P_6^\pm , P_7 y P_8 es una tarea un poco más complicada, pues los autovalores de la matriz de linealización del sistema en este punto dependen explícitamente de la derivada de la función $f(s)$ y por tanto su carácter dinámico depende de la elección del potencial de auto-interacción del campo escalar (2.17). Los puntos P_6^\pm son soluciones dominadas por la energía cinética campo escalar, que se comportan como estados transcientes (punto de ensilladura en el espacio de fase) en la evolución del universo siempre que $\gamma < 2$. Para $\gamma = 2$ el punto P_6^+ es no hiperbólico. La variedad estable es 3D si

$$s^* > \sqrt{6} \quad (2.26)$$

y $f'(s^*) > 0$, en otro caso la variedad estable es de dimensión menor que 3. Del mismo modo, para $\gamma = 2$ el punto P_6^- es no hiperbólico y su variedad estable es 3D si

$$s^* < -\sqrt{6} \quad (2.27)$$

y $f'(s^*) < 0$, en otro caso la variedad estable es de dimensión menor que 3.

Todos los valores propios de la matriz Jacobiana evaluada en P_7 de la tabla (ver 2.4) son reales para valores de s^* en el conjunto

$$\left\{ -\sqrt{\frac{24\gamma^2}{9\gamma-2}} \leq s^* \leq -\sqrt{3\gamma} \right\} \cup \left\{ \sqrt{3\gamma} \leq s^* \leq \sqrt{\frac{24\gamma^2}{9\gamma-2}} \right\} \quad (2.28)$$

para $1 \leq \gamma < 2$. P_7 es no hiperbólico si $s^* \in \{-\sqrt{3\gamma}, \sqrt{3\gamma}\}$ ó $s^* f'(s^*) = 0$ ó $\gamma = 2$. En otro caso el punto de equilibrio es hiperbólico y podemos caracterizar el punto de equilibrio como sigue. Este punto se comporta como un nodo estable, y por tanto un atractor tardío, para valores de s^* satisfaciendo

$$-\sqrt{\frac{24\gamma^2}{9\gamma-2}} \leq s^* < -\sqrt{3\gamma} \text{ con } f'(s^*) < 0 \quad (2.29)$$

ó cuando

$$\sqrt{3\gamma} < s^* \leq \sqrt{\frac{24\gamma^2}{9\gamma - 2}} \text{ con } f'(s^*) > 0 \quad (2.30)$$

Además este punto se comporta como un punto de ensilladura para

$$-\sqrt{\frac{24\gamma^2}{9\gamma - 2}} \leq s^* \leq -\sqrt{3\gamma} \text{ con } f'(s^*) > 0 \quad (2.31)$$

ó para

$$-\sqrt{\frac{24\gamma^2}{9\gamma - 2}} \leq s^* \leq -\sqrt{3\gamma} \text{ con } f'(s^*) < 0. \quad (2.32)$$

En cambio, si $s^{*2}(2 - 9\gamma) + 24\gamma^2 < 0$, $\gamma < 2$, la matriz Jacobiana evaluada en P_7 tiene dos valores propios complejos conjugados con parte real negativa y dos valores propios reales. Si además $s^* f'(s^*) > 0$, este es un atractor tardío, en otro caso es un punto de ensilladura.

El punto P_8 representa una solución dominada por el campo escalar ($\Omega_\phi = 1$). P_8 es no hiperbólico si $s^{*2} \in \{0, 3\gamma, 6\}$ ó $f'(s^*) = 0$. Dicha solución es un nodo estable si $s^{*2} \neq \{0, 6\}$, $s^{*2} < 3\gamma$ y $s^* f'(s^*) < 0$, en otro caso es un punto de ensilladura.

Más adelante se estudia el comportamiento asintótico de estas soluciones, para varios potenciales de auto-interacción del campo escalar, que han sido estudiados previamente como modelo de quintaesencia.

2.1.5. Dinámica de la variedad central de la solución de de Sitter P_1

Como mencionabamos en la sección anterior, dada la importancia en cosmología de las soluciones de *de Sitter*, resulta de interés realizar un estudio más detallado de la dinámica del conjunto de puntos críticos P_1 (para $\Omega_\lambda \neq 0$) para poder determinar si dicha solución es un atractor de Sitter tardío con modificaciones 5D o no. De acuerdo al modelo RS dicha solución no debería comportarse como un atractor tardío debido que las modificaciones

5D son típicas de las altas energías (universo temprano) y no de bajas energías (universo tardío). Para verificar esta conjetura recurrimos a la teoría de la variedad central la cual permite dar un criterio consistente acerca del comportamiento asintótico de dicha solución.

Con el objetivo de trasladar un punto de equilibrio arbitrario de coordenadas $(x = 0, y = 1 - u_c, \Omega_\lambda = u_c, s = 0)$ localizado en P_1 al origen de coordenadas y luego llevar la parte lineal del sistema a la forma real de Jordan se introduce el cambio de variables

$$x = u_1 + v_2 \quad y = u_2 - u_c + v_1 + 1, \quad \Omega_\lambda = -u_2 + u_c - \frac{u_c v_1}{u_c + 1}, \quad s = -\frac{\sqrt{6}u_1}{u_c - 1} \quad (2.33)$$

El sistema de ecuaciones (2.13)(2.16) puede reescribirse en función de la nuevas variables como

$$u_1' = \frac{6f\left(-\frac{\sqrt{6}u_1}{u_c-1}\right)u_1^3}{u_c-1} + \frac{6v_2f\left(-\frac{\sqrt{6}u_1}{u_c-1}\right)u_1^2}{u_c-1} \quad (2.34)$$

$$u_2' = -3u_c\left(u_c - u_2 - \frac{u_c v_1}{1 + u_c}\right)\left(-2(u_1 + v_2)^2 + \gamma\left(\frac{v_1}{1 + u_c} + (u_1 + v_2)^2\right)\right) \\ + 3\left(u_2 + \frac{u_c(-1 - u_c + v_1)}{1 + u_c}\right)\left(-2(u_1 + v_2)^2 + \gamma\left(\frac{v_1}{1 + u_c} + (u_1 + v_2)^2\right)\right) \quad (2.35)$$

$$v_1' = -3\left(u_2 - u_c + \frac{u_c v_1}{1 + u_c}\right)\left(-2(1 + u_c)(u_1 + v_2)^2 + \gamma(v_1 + (1 + u_c)(u_1 + v_2)^2)\right) \\ \frac{3(1 + u_c)^2(1 + u_2 - u_c + v_1)\left(1 - u_2 + u_c - \frac{u_c v_1}{1 + u_c}\right)\left((u_1 + v_2)^2(\gamma - 2) + \frac{v_1 \gamma}{1 + u_c}\right)}{1 + u_2(1 + u_c) + u_c(v_1 - u_c)} \\ + \frac{6u_1(1 + u_c)^2(u_1 + v_2)(1 + u_2 - u_c + v_1)}{u_c^2 - 1} \quad (2.36)$$

$$v_2' = -\frac{3(u_1 + v_2)(u_2 - u_c - 1 + \frac{u_c v_1}{1 + u_c})\left(-2(u_1 + v_2)^2 + \gamma(v_1 + u_c + (u_1 + v_2)^2)\right)}{2\left(u_2 + \frac{1 + u_c(v_1 - u_c)}{1 + u_c}\right)} \\ + 3(u_1 + v_2) - \frac{6u_1^2(u_1 + v_2)}{u_c - 1}f\left(-\frac{\sqrt{6}u_1}{u_c - 1}\right) + \frac{3u_1(1 + u_2 - u_c + v_1)}{u_c^2 - 1} \quad (2.37)$$

Realizando en el sistema anterior una expansión de Taylor en un entorno del origen de coordenadas, hasta términos de segundo orden, se obtiene el sistema:

$$u'_1 = \frac{6f(0)u_1^2v_2}{u_c - 1} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} u'_2 = & 6v_2u_1u_c + 6u_1^2u_c + 3u_1^2u_2 \left(\gamma - \frac{2}{u_c - 1} - 4 \right) + 6u_1u_2 \left(\gamma + \frac{1}{u_c - 1} - 3 \right) \quad (2.39) \\ & + v_1 \left(-\frac{6u_1^2u_2^2u_c(\gamma - 2)}{(u_c - 1)^3(1 + uc)} - \frac{6u_1^2u_c(u_c + \gamma - 1)}{u_c^2 - 1} - \frac{6u_1^2u_2u_c(\gamma - 2)}{(-1 + u_c)^2(1 + uc)} \right) \\ & - v_1v_2 \left(\frac{12u_1u_2^2u_c(\gamma - 2)}{(u_c - 1)^3(1 + uc)} + \frac{12u_1u_2u_c(\gamma - 2)}{(uc - 1)^2(1 + uc)} + \frac{6u_1u_c(u_c + 2\gamma - 3)}{u_c^2 - 1} \right) \\ & - (\gamma - 2)v_2v_1^2 \left(\frac{36u_1u_2^2u_c^2}{(u_c - 1)^4(1 + uc)^2} + \frac{24u_1u_2u_c^2}{(u_c - 1)^3(1 + uc)^2} + \frac{12u_1u_c^2}{(u_c^2 - 1)^2} \right) \\ & - (\gamma - 2)v_1^2 \left(\frac{6u_1^2u_c^2}{(u_c^2 - 1)^2} + \frac{18u_1^2u_2^2u_c^2}{(u_c - 1)^4(1 + uc)^2} + \frac{12u_2u_1^2u_c^2}{(u_c - 1)^3(1 + uc)^2} \right) \\ & - 6u_c\gamma v_1^2u_2^2 \left(\frac{1}{u_2^2(u_c - 1)(1 + uc)^2} + \frac{1}{(u_c - 1)^3(1 + uc)^2} \right) - \frac{6v_1u_2u_c\gamma}{(u_c^2 - 1)^2} \\ & - v_1v_2^2(\gamma - 2) \left(\frac{6u_2^2u_c}{(u_c - 1)^3(1 + uc)} + \frac{6u_2u_c}{(u_c - 1)^2(1 + uc)} + \frac{6u_c}{uc^2 - 1} \right) \\ & - v_1^2v_2^2 \left(\frac{18u_2^2u_c^2}{(u_c - 1)^4(1 + uc)^2} + \frac{12u_2u_c^2}{((u_c - 1)^3(1 + uc)^2)} - \frac{6u_c^2}{(u_c^2 - 1)^2} \right) \\ & \quad + \frac{3\gamma u_2}{1 + u_c} + (\gamma - 2)3u_2v_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_1' = v_1^2 & \left(\frac{6u_1^2 u_c (\gamma - 2)}{(u_c - 1)^2 (1 + uc)} + u_2^2 \left(\frac{18u_1^2 u_c (\gamma - 2)}{(u_c - 1)^4 (1 + uc)} + \frac{6\gamma}{(u_c - 1)^3 (1 + uc)} \right) \right) \quad (2.40) \\
(\gamma - 2)v_1^2 v_2^2 & \left(\frac{18u_2^2 u_c}{(u_c - 1)^4 (1 + uc)} + \frac{12u_2 u_c}{(u_c - 1)^3 (1 + uc)} + \frac{6u_c}{(u_c - 1)^2 (1 + uc)} \right) \\
& \frac{3(\gamma - 2)(1 + u_c)v_1}{u_c - 1} - 6v_2 u_1 (1 + u_c)(\gamma - 1) + \frac{6u_2 u_1 (v_2 + u_1)(1 + uc)}{u_c - 1} \\
& + v_2 v_1^2 \left(\frac{36u_1 u_2^2 u_c (\gamma - 2)}{(u_c - 1)^4 (1 + uc)} + \frac{24u_1 u_2 u_c (\gamma - 2)}{(u_c - 1)^3 (1 + uc)} + \frac{12u_1 u_c (\gamma - 2)}{(u_c - 1)^2 (1 + uc)} \right) \\
& + v_1 v_2 \left(\frac{12u_1 u_2^2 (\gamma - 2)}{(u_c - 1)^3} + \frac{12u_1 u_2 (\gamma - 2)}{(u_c - 1)^2} + \frac{6u_1 (1 + u_c)(\gamma - 1)}{u_c - 1} \right) \\
& + v_1 \left(\frac{6u_1^2 u_2^2 (\gamma - 2)}{(u_c - 1)^3} + \frac{6u_1^2 u_2 (\gamma - 2)}{(u_c - 1)^2} + \frac{3\gamma u_1^2 (1 + u_c)}{u_c - 1} - 3\gamma \right) \\
& \frac{6(\gamma - 2)v_1 u_2}{(u_c - 1)^2} + \frac{6(\gamma - 2)v_1 u_2^2}{(u_c - 1)^3} + \frac{6\gamma u_2 v_1^2}{(u_c - 1)^2 (1 + uc)} \\
& \frac{3\gamma v_1^2}{u_c - 1} + 3u_1^2 (1 + u_c)\gamma + \frac{12(\gamma - 2)u_1^2 u_2 v_1^2 u_c}{(u_c - 1)^3 (1 + uc)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_2' = v_1 & \left(\frac{9u_1^2 u_c (\gamma - 2)}{(u_c - 1)^2 (1 + uc)} + u_2^2 \left(\frac{27u_1^2 u_c (\gamma - 2)}{(u_c - 1)^4 (1 + uc)} + \frac{3\gamma}{(u_c - 1)^3 (1 + uc)} \right) \right) \quad (2.41) \\
-3v_2 + v_1^2 v_2^2 & \left(\frac{54(\gamma - 2)u_1 u_2^2 u_c^2}{(u_c - 1)^5 (1 + uc)^2} + \frac{27(\gamma - 2)u_1 u_2 u_c^2}{(u_c - 1)^4 (1 + uc)^2} + \frac{9(\gamma - 2)u_1 u_c^2}{(u_c - 1)^3 (1 + uc)^2} \right) \\
& + (\gamma - 2)v_1 v_2^2 \left(\frac{27u_1 u_2^2 u_c}{(u_c - 1)^4 (1 + uc)} + \frac{18u_1 u_2 u_c}{(u_c - 1)^3 (1 + uc)} + \frac{9u_1 u_c}{(u_c - 1)^2 (1 + uc)} \right) \\
& + \frac{9v_2 u_1^2 u_2^2 (\gamma - 2)}{(u_c - 1)^3} + (\gamma - 2)v_2^2 \left(\frac{9u_1 u_2^2}{(u_c - 1)^3} + \frac{9u_1 u_2}{(u_c - 1)^2} + \frac{9u_1 (1 + u_c)}{2(u_c - 1)} \right) \\
& + \frac{9v_2 u_1^2 u_2 (\gamma - 2)}{(u_c - 1)^2} + v_1 \left(\frac{3u_1 (\gamma - 2)}{2(u_c - 1)} + \frac{3u_1 u_2^2 \gamma}{(u_c - 1)^3 (1 + uc)} + \frac{3u_1 u_2 \gamma}{(u_c - 1)^2 (1 + uc)} \right) \\
& - \frac{3u_1 u_2}{u_c - 1} + v_1^2 \left(\frac{9u_1 u_2^2 u_c \gamma}{(u_c - 1)^4 (1 + uc)^2} + \frac{6u_1 u_2 u_c \gamma}{(u_c - 1)^3 (1 + uc)^2} + \frac{3u_1 u_c \gamma}{(u_c^2 - 1)^2} \right) \\
& + v_1^2 \left(\frac{9u_1^2 u_c^2 (\gamma - 2)}{(u_c - 1)^3 (1 + uc)^2} + u_2^2 \left(\frac{54u_1^2 u_c^2 (\gamma - 2)}{(u_c - 1)^5 (1 + uc)^2} + \frac{9u_c \gamma}{(u_c - 1)^4 (1 + uc)^2} \right) \right) \\
& + u_2 v_1 \left(\frac{18u_1^2 u_c (\gamma - 2)}{(u_c - 1)^3 (1 + uc)} + \frac{3\gamma}{(u_c - 1)^2 (1 + uc)} \right) + \frac{u_1^2 (9(1 + u_c)(\gamma - 2) - 12f(0))}{2(u_c - 1)} \\
& \quad + \frac{3\gamma v_1}{2(u_c - 1)} + \frac{3u_c \gamma v_1^2}{(u_c^2 - 1)^2}
\end{aligned}$$

La descomposición de Jordan de la matriz Jacobiana del sistema de ecuaciones anterior

evaluada en el origen de coordenada es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3\gamma \end{pmatrix}$$

Donde A es una matriz de similitud asociada a una transformación de coordenadas y B es la matriz real de Jordan. Si denotamos por M a la matriz Jacobiana del sistema, entonces $M = BAB^{-1}$. De acuerdo al Teorema de la Variedad Central las coordenadas v_1 y v_2 asociadas a la variedad central de P_5 se pueden definir localmente como funciones de las variables u_1 y u_2 . Su dependencia funcional la denotaremos por:

$$v_1 = F(u_1, u_2) \quad v_2 = G(u_1, u_2) \quad (2.42)$$

Derivando cada una de las funciones (2.60) respecto a τ se obtiene el sistema de ecuaciones en derivadas parciales ⁹:

$$v_1' - F^{(1,0)}u_1' - F^{(0,1)}u_2' = 0 \quad (2.43)$$

$$v_2' - G^{(1,0)}u_1' - G^{(0,1)}u_2' = 0 \quad (2.44)$$

Empleando los desarrollos (2.38)(2.41) en el sistema anterior se obtiene un sistema de

⁹La notación (0,1) que aparece en las siguientes ecuaciones indica el orden de derivación respecto a las variables independientes, por ejemplo (1,0) indica la derivada de primer orden respecto a u_1 y la derivada de orden cero respecto a u_2 .

ecuaciones en derivadas parciales cuasilineal, el cual no mostraremos acá por limitaciones de espacio.

Buscar soluciones analíticas del sistema (2.43)(2.44) representa una gran dificultad. Pero podemos suponer que las soluciones son de la forma

$$F(u_1, u_2) = a_{11}u_1^2 + a_{12}u_1u_2 + a_{22}u_2^2 + O(u_1)^3 + O(u_2)^3 \quad (2.45)$$

$$G(u_1, u_2) = b_{11}u_1^2 + b_{12}u_1u_2 + b_{22}u_2^2 + O(u_1)^3 + O(u_2)^3 \quad (2.46)$$

para $u_i \rightarrow 0$ (ver [58]). Sustituyendo las soluciones (2.45)(2.46) en (2.43)(2.44) y comparando potencias de igual orden se encuentra que los coeficientes no nulos son

$$a_{11} = -(1 + u_c) \quad b_{12} = -\frac{1}{u_c - 1} \quad b_{22} = 1 \quad (2.47)$$

Entonces podemos escribir la dependencia funcional

$$v_1 = -(1 + u_c)u_1^2 \quad v_2 = -\frac{u_1u_2}{u_c - 1} + u_2^2 \quad (2.48)$$

Una vez encontrada las soluciones (2.48) se sustituyen en las ecuaciones (2.38)(2.39) y se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinaria

$$u_1' = \frac{6u_1^2u_2^2f(0)}{u_c - 1} - \frac{6u_1^3u_2f(0)}{(u_c - 1)^2} \quad (2.49)$$

$$u_2' = 6u_1u_2^2u_c + u_1^2 \left(\frac{u_2(6 - 18u_c)}{u_c - 1} + 6u_c + \frac{6u_2^2(\gamma - 2 - u_c(\gamma - 3))}{(u_c - 1)^2} \right), \quad (2.50)$$

el cual representa las ecuaciones de gobierno sobre la variedad central. Estudiando la dinámica del sistema anterior se logra determinar la dinámica de la variedad central de la solución P_1 .

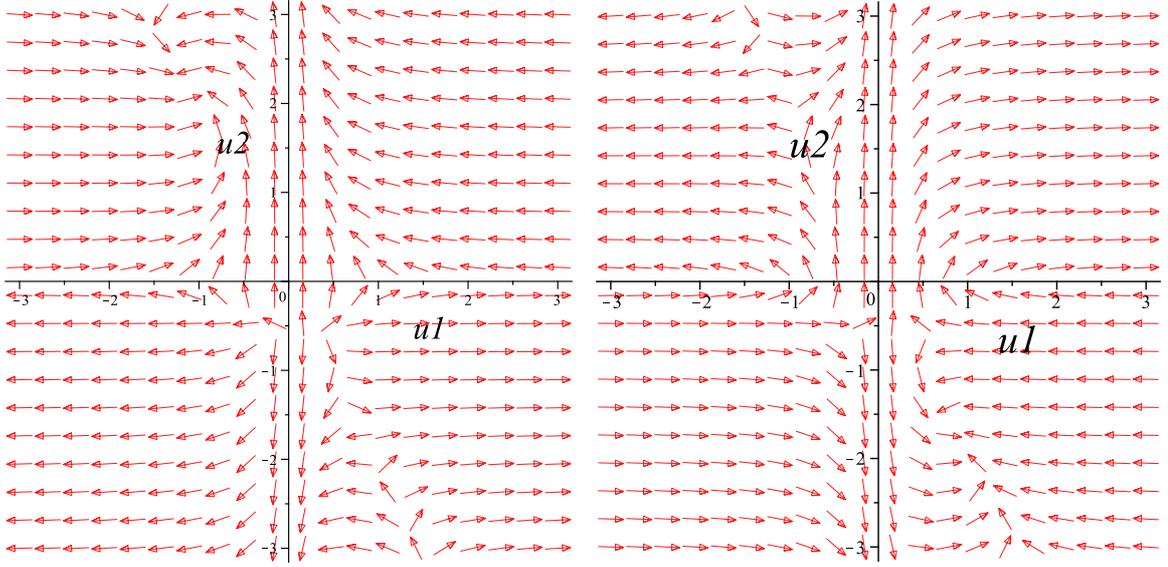


Figura 2.1.: Campo de velocidades del sistema de ecuaciones (2.49)(2.50), el cual determina la dinámica de la variedad central, para valores de los parámetros libres (a) Figura de la izquierda $f(0) = 1$, $\gamma = 1$ y $u_c = 0,5$ (b) Figura de la derecha $f(0) = -1$, $\gamma = 1$ y $u_c = 0,5$. Observar que el eje x_1 es una la línea de puntos de equilibrio asintóticamente estable en ambos casos para condiciones iniciales en una vecindad del origen.

La dinámica del sistema de ecuaciones (2.49)(2.50) depende del valor de $f(0)$, por tanto es necesario que $s = 0$ no sea un punto singular o un cero que las funciones $f(s)$ empleadas. En el caso que $f(0) = 0$ o f sea singular en $s = 0$, el sistema (2.49)(2.50) no describe apropiadamente la dinámica en la variedad central sino que hay que incorporar términos de orden superior a dos en el esquema de cálculo de la variedad central lo cual incrementa la complejidad de cálculo del problema.

De acuerdo al teorema de Estabilidad de la Variedad Central (ver B), si la solución cero del sistema de ecuaciones (2.49)-(2.50) es estable (asintóticamente estable o inestable) entonces la solución P_1 del sistema de ecuaciones (2.13)(2.16) es estable (asintóticamente estable o inestable)¹⁰.

¹⁰Para más detalles ver [58].

Para analizar la estabilidad de la solución cero del sistema de ecuaciones (2.49)-(2.50) integramos numéricamente dicho sistema para valores de $f(0)$ negativos y positivos. Como se puede ver en la figura 2.1 (en la que se representa el campo de direcciones asociado al sistema (2.49)-(2.50)) el origen de coordenadas es localmente asintóticamente inestable para condiciones iniciales en una vecindad del origen de coordenadas independientemente del signo de $f(0)$. Por tanto puede concluirse que P_1 es localmente asintóticamente inestable para $f(0) \neq 0$. Este resultado era de esperar pues no deben obtenerse atractores del futuro con correcciones $5D$, pues este tipo de correcciones es característica de soluciones asociadas al universo temprano. En este sentido la solución de equilibrio P_1 está asociada a la inflación primordial y representa un estado transiente en la evolución del sistema.

2.1.6. Dinámica de la variedad central de la solución de de Sitter P_5

Un caso particular de P_1 es la solución P_5 que representa un posible atractor tardío de Sitter sin modificaciones $5D$ ($\Omega_\lambda = 0$). Por este motivo resulta de interés realizar un estudio más detallado de la dinámica de este punto crítico no hiperbólico usando la teoría de la variedad central.

Con el objetivo de trasladar el punto de equilibrio al origen de coordenadas y reducir la parte lineal del sistema a la forma canónica real de Jordan se introduce la transformación lineal de coordenadas

$$x = \frac{x_1}{\sqrt{6}} + y_1 \quad y = 1 - x_2 + y_2 \quad \Omega_\lambda = x_2 \quad s = x_1. \quad (2.51)$$

Luego el sistema de ecuaciones (2.13)-(2.16) se reescribe en función de la nuevas variables

como

$$x'_1 = -x_1^2 f(x_1) (x_1 + \sqrt{6}y_1) \quad (2.52)$$

$$x'_2 = 3x_2(\gamma - 2) \left(\frac{x_1}{\sqrt{6}} + y_1 \right)^2 + 3\gamma x_2 y_2 \quad (2.53)$$

$$y'_1 = \frac{3\gamma y_2(x_2 + 1) \left(\frac{x_1}{\sqrt{6}} + y_1 \right) + 3(x_2 + 1)(\gamma - 2) \left(\frac{x_1}{\sqrt{6}} + y_1 \right)^3}{2(x_2 - 1)} - \left(\frac{x_1}{\sqrt{6}} + y_1 \right) (3 - x_1^2 f(x_1)) + \sqrt{\frac{3}{2}} x_1 (y_2 - x_2 + 1) \quad (2.54)$$

$$y'_2 = \frac{3(y_2 - x_2 + 1)(x_2 + 1) \left((\gamma - 2) \left(\frac{x_1}{\sqrt{6}} + y_1 \right)^2 + y_2 \gamma \right)}{x_2 - 1} - x_1 (x_1 + \sqrt{6}y_1) + (\gamma - 2)3x_2 \left(\frac{x_1}{\sqrt{6}} + y_1 \right)^2 + 3\gamma x_2 y_2 \quad (2.55)$$

Realizando una expansión de Taylor en una vecindad del origen de coordenadas hasta términos de segundo orden, se obtiene

$$x'_1 = -\sqrt{6}x_1^2 y_1 f(0) \quad (2.56)$$

$$x'_2 = \left(\frac{\gamma}{2} - 1 \right) x_1^2 x_2 + \sqrt{6}(\gamma - 2)x_1 x_2 y_1 + (3\gamma - 6)x_2 y_1^2 + 3\gamma x_2 y_2 \quad (2.57)$$

$$y'_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \left(x_1 x_2 + (\gamma - 2) x_1 y_1^2 \left(\frac{3}{2} + x_2 (1 + 3x_2) \right) + \frac{\gamma - 2}{2} y_2 x_1 \right) + y_1 \left(\left(3 - \frac{3\gamma}{2} \right) x_2 x_1^2 (1 + x_2) + x_1^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{3\gamma}{4} + f(0) \right) - 3 \right) - \sqrt{\frac{3}{2}} y_2 \left(\gamma x_1 x_2 (1 + x_2) + \sqrt{6} \gamma y_1 \left(\frac{1}{2} + x_2 (1 + x_2) \right) \right) \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned}
y_2' &= x_2 x_1^2 + \sqrt{6} y_1 x_1 (x_2 + 1 - \gamma) + (6 - 3\gamma) y_1^2 - \frac{\gamma}{2} x_1^2 - \gamma \left(3 + \frac{x_1^2}{2} \right) y_2 \quad (2.59) \\
&+ y_2 \left[(2 - \gamma) (1 + x_2) x_2 x_1^2 - 3\gamma y_2 (1 + 2x_2 (1 + x_2)) \right] - \sqrt{6} + (\gamma - 1) x_1 \\
&\quad - 2\sqrt{6} (\gamma - 2) (1 + x_2) x_1 x_2 + 6 (2 - \gamma) \left((1 + x_2) x_2 - \frac{1}{2} \right) y_2 y_1^2
\end{aligned}$$

En este caso la descomposición de Jordan de la matriz Jacobiana del sistema de ecuaciones (2.56)-(2.59) evaluada en el origen de coordenadas, proporciona la siguiente matriz de similitud asociada a la transformación de coordenada:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y se obtiene la misma matriz real B que en el estudio de la solución P_1 .

De acuerdo al Teorema de la Variedad central las coordenadas y_1 y y_2 de cualquier punto sobre la variedad central se pueden expresar localmente como funciones de las variables x_1 y x_2 :

$$y_1 = F(x_1, x_2) \quad y_2 = G(x_1, x_2) \quad (2.60)$$

Derivando las funciones (2.60) y utilizando las ecuaciones del sistema (2.56)(2.59) se obtiene el sistema de ecuaciones en derivadas parciales cuasilineal:

$$\begin{aligned}
&- 3(\gamma - 2)F \left(1 + \frac{1}{2} (1 + x_2) x_2 x_1^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{f(0)}{\gamma - 2} \right) + \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2} + (1 + x_2) x_1 x_2 \right) F \right) \\
&\quad + \left[\left(\frac{\gamma}{2} - 1 \right) x_2 x_1^2 + (\gamma - 2) \left(\sqrt{6} x_1 + 3F \right) x_2 F + 3\gamma x_2 G \right] F^{(0,1)} + \sqrt{6} x_1^2 f(0) F^{(1,0)} \\
&\quad - \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{(\gamma - 2)}{2} x_1 + \gamma (1 + x_2) x_1 x_2 + 3\gamma \left(\frac{1}{2} + (1 + x_2) x_2 \right) F \right) G - \sqrt{\frac{3}{2}} x_1 x_2 = 0
\end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\frac{\gamma}{2} - 1 \right) x_2 x_1^2 + (\gamma - 2) \left(\sqrt{6} x_1 + 3F \right) x_2 F + 3\gamma x_2 G \right] G^{(0,1)} - \sqrt{6} x_1^2 f(0) F G^{(1,0)} \quad (2.62) \\
& + \sqrt{6} (\gamma - 1 - x_2) x_1 F + \left(\frac{\gamma}{2} - x_2 \right) x_1^2 + 3(\gamma - 2) F^2 + 6\gamma \left((1 + x_2) x_2 + \frac{\gamma}{2} \right) G^2 \\
& + 6G \left[\left((\gamma - 2) (1 + x_2) x_2 + \frac{\gamma}{2} - 1 \right) F^2 + (\gamma - 2) (1 + x_2) x_2 x_1^2 + \gamma \left(3 + \frac{x_1^2}{2} \right) \right] \\
& + 2\sqrt{6} (\gamma - 2) \left((1 + x_2) x_1 x_2 + \frac{(\gamma - 1)}{2(\gamma - 2)} x_1 \right) F G = 0
\end{aligned}$$

Una vez más buscamos soluciones en la forma de las series (2.45)-(2.46). Sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones (2.61)(2.62) y igualando a cero los coeficientes de los monomios de igual potencia se encuentra que los coeficientes no nulos en la expansión en series son:

$$a_{12} = -\frac{1}{\sqrt{6}} \quad b_{11} = -\frac{1}{6} \quad (2.63)$$

Una vez conocida la dependencia funcional de y_1 y y_2

$$y_1 = F(x_1, x_2) = -\frac{x_1 x_2}{\sqrt{6}} \quad y_2 = G(x_1, x_2) = -\frac{x_1^2}{6}. \quad (2.64)$$

Para determinar el comportamiento dinámico de la variedad central, sustituimos las soluciones (2.64) en (2.56)(2.57) y estudiamos la dinámica del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$x_1' = x_1^3 x_2^2 f(0) \quad (2.65)$$

$$x_1' = \frac{1}{2} x_2 x_1^2 [(\gamma - 2) (x_2 - 2) x_2 - 2] \quad (2.66)$$

Como se puede ver la dinámica de la variedad central depende del valor de la función $f(s)$ evaluada en $s = 0$, por tanto es necesario que el punto $s = 0$ no sea un punto singular o un cero de la función $f(s)$ empleada. En el caso que $f(0) = 0$ o f sea singular en el origen, el sistema (2.65),(2.66) no describe apropiadamente la dinámica en la variedad central sino que hay que incorporar términos de orden superior a tres en el esquema de cálculo de la

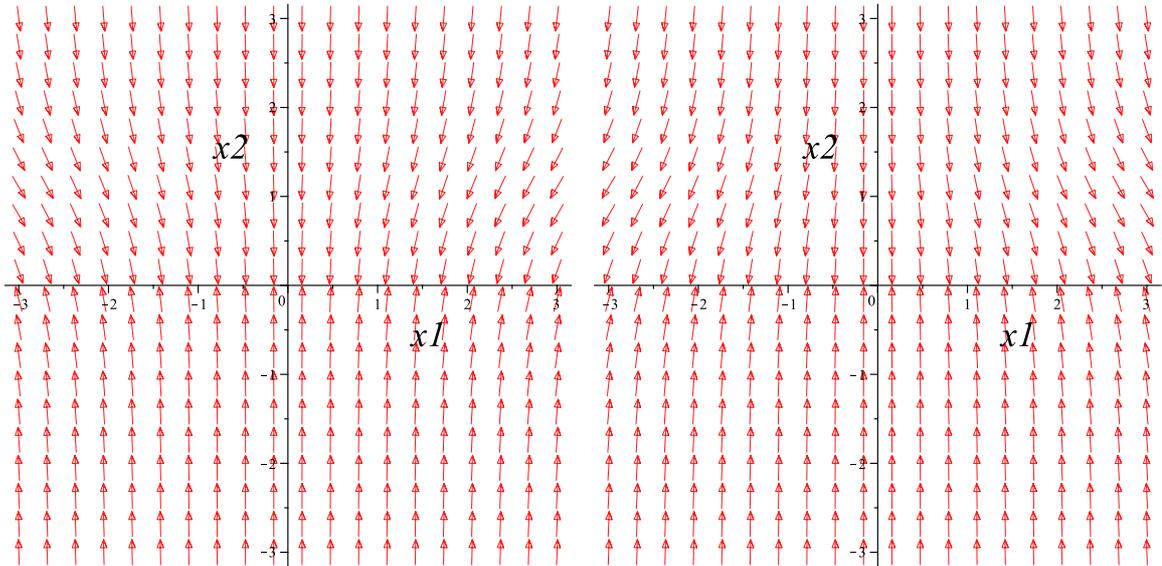


Figura 2.2.: Campo de velocidades del sistema de ecuaciones (2.65)(2.66), el cual determina la dinámica de la variedad central para valores de los parámetros libres (a) Figura de la izquierda $f(0) = -0,1$ y $\gamma = 1$, (b) Figura de la derecha $f(0) = -0,1$ y $\gamma = 1$. La región de interés físico es el semiplano superior $x_2 \geq 0$.

variedad central lo cual incrementa la complejidad de cálculo del problema. De acuerdo al Teorema de la Variedad Central, el análisis de la estabilidad de P_5 se reduce al análisis de la estabilidad del origen del sistema (2.65)-(2.66). Para hacer este análisis recurrimos a la integración numérica. De acuerdo a las integraciones numéricas que se ofrecen en la figura 2.2 (donde se representa el campo de direcciones del sistema bajo estudio para diferentes elecciones del signo de $f(0)$ ($f(0) \neq 0$)) se observa que el eje x_1 ($x_2 = 0$) es una línea de puntos de equilibrio localmente asintóticamente estable para condiciones iniciales en una vecindad del origen independientemente del signo de $f(0)$ ($f(0) \neq 0$). Luego, existe una vecindad del origen en la cual el segmento del eje x_1 contenido en dicha vecindad es localmente asintóticamente estable. Este tipo de comportamiento de las trayectorias del sistema de ecuaciones (2.65)-(2.66) implica que la variedad central de P_5 es localmente asintóticamente estable. A partir de este resultado podemos decir que la solución P_5 del sistema de ecuaciones (2.13)-(2.16) es localmente asintóticamente estable. Por tanto, desde

el punto de vista cosmológico el punto de equilibrio P_5 está asociado a una solución de *de Sitter* en expansión acelerada (atractor tardío de *de Sitter*).

2.1.7. Potencial $V = V_0 \text{Sinh}^{-\alpha} \beta \phi$

Este potencial de auto-interacción fue estudiado por primera vez como candidato a quintaesencia en [50, 51, 52]. El comportamiento asintótico de este campo atrapado en una brana RS ha sido investigado en [59] para valores de los parámetros libres $\alpha > 0$ y $\beta > 0$. En esta sección utilizamos dicho potencial ¹¹ para validar los resultados teóricos obtenidos en las secciones previas y adicionalmente comparar nuestros resultados con los resultados previos en [59]. Especialmente pretendemos comprobar que, utilizando nuevas variables de normalización, puede obtenerse un sistema dinámico topológicamente equivalente al investigado en [59]. ¹² En el siguiente análisis consideraremos un fluido de fondo en la brana con índice barotrópico $\gamma = 1$ que corresponde a la materia ordinaria (polvo con presión nula, $p = 0$). La función $f(s)$ correspondiente a este potencial se construye a partir de la función $\Gamma(s)$ que aparece en la tabla 2.1 para este potencial.

$$f(s) = \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha\beta^2}{s^2}. \quad (2.67)$$

Resulta de interés conocer los puntos donde se anula esta función, así como el valor de la primera derivada de $f(s)$ evaluada en este punto. En este caso

$$s^* = \pm\alpha\beta \quad f'(s^*) = \frac{2\alpha\beta^2}{s^{*3}} = \pm\frac{2}{\alpha^2\beta} \quad (2.68)$$

La estabilidad de los puntos críticos $P_1 - P_5$ es independiente de potencial de auto-

¹¹Para valores de los parámetros libres $\alpha > 0$ y $\beta > 0$

¹²Por topológicamente equivalente entendemos que, salvo transformaciones diferenciables de coordenadas, es posible recuperar los puntos críticos y la misma dinámica que en [59].

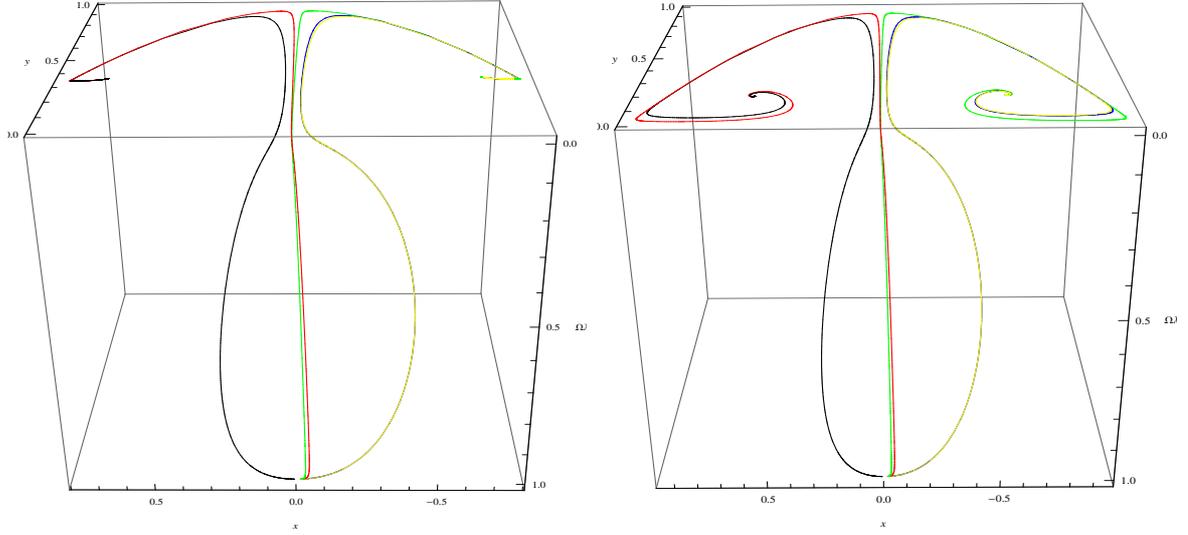


Figura 2.3.: Trayectorias en el espacio de fase (x, y, Ω_λ) del sistema de ecuaciones (2.13)(2.16) correspondiente al potencial $V = V_0 \text{Sinh}^{-\alpha} \beta \phi$, para diferentes conjuntos de condiciones iniciales del modelo y distintos valores de los parámetros libres. (a) Figura de la izquierda corresponde a los valores $(\gamma, \alpha, \beta) = (1; 2; 0,8)$ para esta elección de los parámetros libres el sistema tiende a la solución dominada por el campo escalar P_8 , (b) Figura de la derecha corresponde al conjunto de valores los valores $(1; 3,4; 0,55)$, en este caso el sistema tiende al atractor tardío P_7 que corresponde a una solución escalante (espiral estable).

interacción del campo escalar. Dichas posiciones de equilibrio fueron estudiadas exhaustivamente en la sección anterior, así que solo analizaremos la estabilidad de los puntos P_6^\pm a P_8 .

Para $\gamma = 1$ resulta evidente que el punto P_6^\pm , que representa una solución dominada por el campo escalar $\Omega_\phi = 1$, es un punto de ensilladura siempre que $6 \mp \sqrt{6}s^* \neq 0$, $s^* \neq 0$, $f'(s^*) \neq 0$. Por tanto corresponde a un estado transiente en la evolución del sistema. La clase de puntos críticos P_7 de la tabla 2.2 contiene, para este potencial específico, dos puntos:

$$P_7^\pm = \left(\pm \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\alpha\lambda}, \frac{3}{2(\alpha\lambda)^2}, 0, \pm\alpha\lambda \right) \quad (2.69)$$

En la región del espacio de parámetros libres $\frac{\sqrt{3}}{\alpha} < \beta \leq \sqrt{\frac{6}{7}} \frac{2}{\alpha}$ ambos se comportan como nodos estables. Para los valores $0 < \beta < \frac{\sqrt{3}}{\alpha}$ estos puntos representan una solución tipo silla. La clase P_8 corresponde a soluciones dominadas por la densidad del campo escalar $\Omega_\phi = 1$. Al igual que P_7 dicha clase contiene dos puntos para la elección de potencial de esta sección

$$P_8^\pm = \left(\pm \frac{\alpha\beta}{\sqrt{6}}, 1 - \frac{(\alpha\beta)^2}{6}, 0, \pm\alpha\beta \right). \quad (2.70)$$

Este punto se comporta es un atractor tardío para $\alpha < \frac{\sqrt{3}}{\beta}$, y como un punto de ensilladura para $\alpha > \frac{\sqrt{3}}{\beta}$. Para $\alpha < \frac{\sqrt{2}}{\beta}$ esta solución es compatible con un estado de expansión acelerada.

En la Figs. 2.3 se presentan algunas trayectorias en el espacio de fase (x, y, Ω_λ) del sistema de ecuaciones (2.13)(2.16) para la función $f(s)$ (2.67) correspondiente al potencial $V = V_0 \text{Sinh}^{-\alpha} \beta \phi$. En ambas figuras se puede ver que todas las trayectorias en el espacio de fase siempre emergen del punto de equilibrio $(x, y, \Omega_\lambda) = (0, 0, 1)$. Este punto es equivalente al punto $(0, 0, 0)$ obtenido en [59]. Ambos puntos (el mismo, salvo una transformación diferenciable de coordenadas) corresponden a un universo vacío de MRS que representa un atractor del pasado. Este resultado se debe a que nuestra elección de la variable Ω_λ depende de la tensión de la brana. Además se recupera el mismo comportamiento dinámico para tiempos tardíos independientemente de elección de las variables de normalización. Específicamente, en la figura 2.3 de la izquierda el atractor tardío es P_8^\pm y en la figura 2.3 de la derecha el atractor tardío es P_7^\pm .

2.1.8. Potencial exponencial $V = V_0 e^{-\chi\phi} + \Lambda$

Otra forma del potencial que ha sido ampliamente estudiada es el potencial exponencial

$$V(\phi) = V_0 e^{-\chi\phi} + \Lambda. \quad (2.71)$$

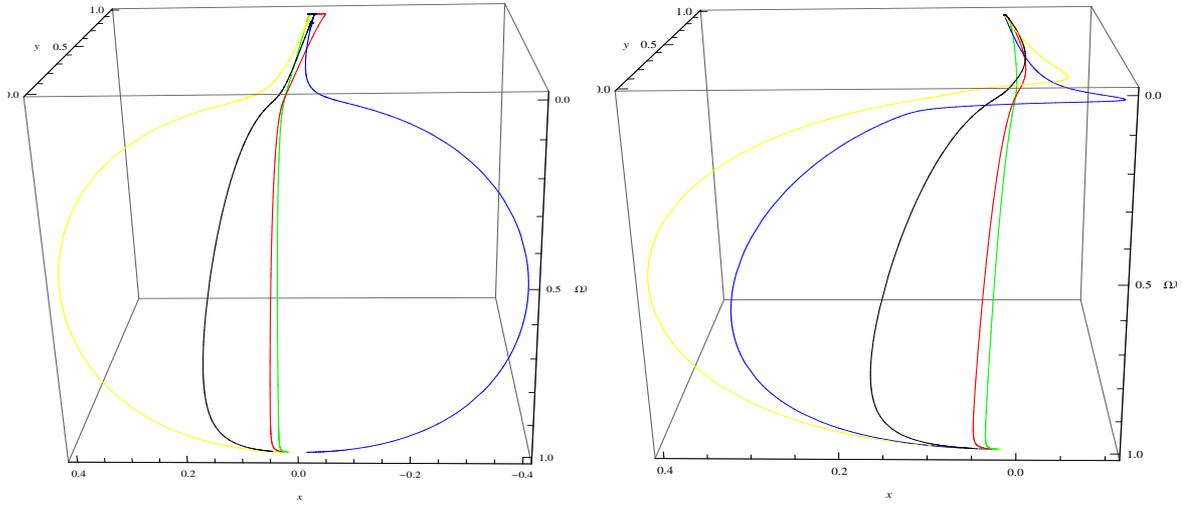


Figura 2.4.: Trayectorias en el espacio de fase (x, y, Ω_λ) del sistema de ecuaciones (2.13)(2.16) correspondiente al potencial $V = V_0 e^{-\chi\phi} + \Lambda$, para diferentes conjuntos de condiciones iniciales del modelo y distintos valores de los parámetros libres. (a) Figura de la izquierda $(\gamma, \chi) = (1; 0,5)$, (b) Figura de la derecha corresponde a los valores $(\gamma, \chi) = (1; 100)$.

Este potencial fue estudiado como modelo de quintaesencia en [53]. Las propiedades asintóticas de los modelos cosmológicos con un campo escalar con potencial de auto-interacción del tipo exponencial han sido investigadas en el marco de la TGR por los autores de [60, 61] y en el contexto de los mundos branas RS en [62, 63]. En ambos casos se estudió el caso del exponencial puro ($\Lambda = 0$). De forma análoga al caso analizado anteriormente comenzamos por hallar la función $f(s)$ correspondiente a este potencial:

$$f(s) = -1 - \frac{\chi}{s}. \quad (2.72)$$

A partir de la función anterior se determina que los valores que la anulan son

$$s^* = -\chi \quad f'(s^*) = \frac{\chi}{s^{*2}} = \frac{1}{\chi}. \quad (2.73)$$

El punto crítico P_7 de la tabla 2.4 se reduce a

$$P_7 = - \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\chi}, \frac{3}{2\chi^2}, 0, -\chi \right) \quad (2.74)$$

y representa un punto de ensilladura en el espacio de fase. El punto crítico P_8 de la tabla 2.4 se puede escribir en este caso:

$$P_8 = \left(-\frac{\chi}{\sqrt{6}}, 1 - \frac{\chi^2}{6}, 0, -\chi \right) \quad (2.75)$$

Este punto representa una solución dominada por el campo escalar $\Omega_\phi = 1$ y es un punto de ensilladura en el espacio de fase. En la Fig.2.4 se puede ver como, para distintos valores de los parámetros libres del potencial no cambia la dinámica del sistema y siempre tienden al punto P_5 que corresponde a un atractor tardío de Sitter con un comportamiento estándar 4D ($\Omega_\lambda = 0$). Además todas las trayectorias en el espacio de fase siempre emergen del punto $(x, y, \Omega_\lambda) = (0, 0, 1)$.

2.1.9. Reconstrucción del potencial de auto-interacción

En la sección anterior se realizó el estudio del comportamiento asintótico de un campo escalar atrapado en la brana, para algunos de los potenciales que aparecen en la Tabla 2.1 obteniéndose condiciones suficientes para la existencia de atractores del pasado y del futuro del modelo cosmológico. La presente sección tiene como objetivo presentar un procedimiento para la reconstrucción del potencial. La idea esencial es considerar de inicio una función $f(s)$ conveniente y luego determinar el potencial al cual esta corresponde.

Partiendo de la definición de la variable s (2.12) se obtiene

$$V'' = \partial_\phi(-sV) = (s^2 - s')V, \quad (2.76)$$

y de la definición de la función $f(s)$ (2.17) se obtiene que

$$V'' = V(1 + f(s))s^2, \quad (2.77)$$

donde la coma indica la derivada respecto a ϕ . Comparando ambos miembros de las ecuaciones (2.76) y (2.77) se obtiene la ecuación diferencial

$$s' = -f(s)s^2 \quad (2.78)$$

que junto a la ecuación

$$V' = -sV \quad (2.79)$$

serán las ecuaciones claves en el procedimiento que presentaremos.

Integrando la ecuación (2.78) se tiene

$$\phi = - \int \frac{1}{f(s)s^2} ds \quad (2.80)$$

Suponiendo que la función $F(s) = \frac{1}{f(s)s^2}$ es integrable, puede obtenerse la dependencia funcional $\phi = \zeta(s)$. Siempre que la función $F(s)$ sea integrable y exista la función inversa ζ^{-1} , se puede reconstruir el potencial de auto-interacción a partir de la expresión

$$V(\phi) = e^{-\int \zeta^{-1}(\phi) d\phi}. \quad (2.81)$$

Consideremos una función $f(s)$ ya conocida, por ejemplo (2.67). Comprobaremos que dicha función que corresponde al potencial $V = V_0 \text{Sinh}^{-\alpha} \beta \phi$ aplicando el procedimiento antes descrito.

Para esta función se tiene

$$\phi = \zeta(s) = \sqrt{\frac{1}{\beta}} \text{ArcTanh}\left(\frac{s}{\alpha\sqrt{\beta}}\right). \quad (2.82)$$

Invirtiendo la ecuación (2.82) se obtiene

$$\zeta^{-1}(\phi) = \alpha\sqrt{\beta} \text{Tanh}(\sqrt{\beta}\phi). \quad (2.83)$$

Sustituyendo la (2.83) en (2.81) e integrando esta expresión se obtiene el potencial $V = V_0 \text{Sinh}^{-\alpha}\beta\phi$.

Hasta el momento el estudio de sistemas dinámico de los modelos cosmológicos que incluyen campos escalares para modelar ya sea Energía o Materia Oscura parten de un potencial de auto-interacción del campo conocido. Dichos campos surgen ya sea en la teoría de Supercuerdas o en otra teoría fundamental. Muchas veces la construcción de la función $f(s)$ no es posible para algunos de estos potenciales. El método propuesto para la reconstrucción del potencial abre la posibilidad de realizar el estudio dinámico a partir de funciones $f(s)$ cualesquiera con propiedades específicas y luego obtener el potencial de auto-interacción del campo escalar asociado a dicha función.

2.1.10. Discusión de los resultados de la sección

A modo de resumen veamos algunos de los resultados más importantes obtenidos en la presente sección.

1. El punto crítico $P_3 = (0, 0, 1)$ corresponde a un universo vacío de Misner-Randall-Sundrum. De acuerdo a las integraciones numéricas presentadas en las Figs. 2.3 y 2.4, podemos conjeturar que todas las trayectorias en el espacio de fase emergen de la vecindad de este punto. Este resultado concuerda con el resultado obtenido en [59]

donde todas las trayectorias emergen del origen de coordenadas el cual corresponde en nuestro sistema coordenado a P_3 ¹³

2. Para ilustrar el estudio realizado en esta tesis para clases arbitrarias de potenciales se retomó el estudio del potencial $V = V_0 \text{Sinh}^{-\alpha} \beta \phi$ estudiado en [59]. En este caso específico se comprobó que se recuperan los puntos críticos estudiados previamente (en otro sistema coordenado) y se obtuvo esencialmente el mismo comportamiento cualitativo que en [59].
3. En el caso particular de un campo escalar con potencial $V = V_0 e^{-\chi \phi} + \Lambda$ atrapado en la brana, se demostró que este potencial conduce a un estado tardío de expansión acelerada en la brana (atractor tardío de *de Sitter* P_5) ver figura 2.4. Esta clase de potenciales contiene el potencial estudiado previamente en [62] para $\Lambda = 0$. Entonces los resultados obtenidos en este estudio generalizan los resultados en dicha referencia.
4. Debido al interés que desde el punto de vista cosmológico tiene el análisis de la estabilidad de los puntos de equilibrio P_1 y P_5 (solución de *de Sitter*) se procedió al cálculo explícito de la variedad central y su dinámica para ambos puntos.
 - En el caso de P_1 el origen de coordenadas de la variedad central (y por tanto la solución de equilibrio P_1) es localmente asintóticamente inestable, este comportamiento se corrobora en la figura 2.1.
 - En el caso de P_5 se obtuvo que el origen de coordenada de su variedad central (y por tanto la solución de equilibrio P_5) es asintóticamente estable, este comportamiento se puede ver en la figura 2.2.

La condición suficiente para la inestabilidad local asintótica del punto de equilibrio P_1 (o estabilidad local asintótica de P_5) es que las funciones $f(0) \neq 0$ y $f(s)$ no pre-

¹³En [59] se utiliza otro sistema coordenado, que es equivalente, salvo un difeomorfismo, al sistema coordenado empleado en esta tesis.

sente ninguna singularidad en $s = 0$. Cuando $f(s)$ es singular en $s = 0$ ó $f(0) = 0$, el método desarrollado deja de ser útil, y tendríamos que recurrir al uso de términos de orden superior en el desarrollo de Taylor lo que supone mayor complejidad desde el punto de vista de cálculo.

5. Las soluciones dominadas por la energía cinética de campo escalar P_4^\pm y P_6^\pm se comportan como soluciones tipo silla en el espacio de fase del sistema.
6. Los posibles atractores de tiempo tardío son
 - (a) P_5 corresponde a una fase de *de Sitter* ($\omega_\phi = -1$) con un comportamiento estándar 4D. Esta solución dominada por la energía potencial del campo escalar es consistente con un estado tardío de expansión acelerada $q = -1$ lo cual se puede verificar haciendo el análisis de la estabilidad de la variedad central.
 - (b) P_7 es una solución escalante campo escalar-materia ($\Omega_\phi \sim \Omega_m$). Las condiciones suficientes para que dicha posición de equilibrio sea un atractor tardío son $s^* < -\sqrt{3\gamma}$, $f'(s^*) < 0$ ó $s^* > \sqrt{3\gamma}$, $f'(s^*) > 0$.
 - (c) P_8 representa una solución dominada por el campo escalar ($\Omega_\phi = 1$). Las condiciones suficientes para que dicha posición de equilibrio sea un atractor tardío son $-\sqrt{3\gamma} < s^* < 0$, $f'(s^*) < 0$ ó $0 < s^* < \sqrt{3\gamma}$, $f'(s^*) > 0$.

2.2. Cosmología en mundos branas de Bianchi tipo I

De acuerdo a la evidencia observacional, el universo, era altamente inhomogéneo y anisótropo en épocas tempranas, ha evolucionado al estado homogéneo e isótropo que se observa hoy día con gran exactitud (de una parte en cien mil). El enfoque más riguroso a ser usado para explicar dicho rasgo del universo es comenzar con universo inicialmente anisótropo y analizar si se alcanza la isotropía en el futuro.

La cosmología homogénea pero anisótropa es conocida desde hace mucho tiempo [64, 65]. Las geometrías homogéneas pero anisótropas más estudiadas han sido las de Bianchi y las métricas de Kantowski-Sachs (ver [66]), tanto en contextos convencionales como en contextos con dimensiones extras. Para geometrías Bianchi I, Bianchi III, y Kantowski-Sachs puede obtenerse una muy buena representación de la cosmología homogénea y anisótropa usando tanto herramientas numéricas como analíticas incorporando también el contenido material (ver [67] y las referencias allí citadas).

En esta sección investigaremos el problema de la isotropización del universo partiendo de un modelo de brana homogénea pero anisótropa de Bianchi I con un fluido de fondo de materia ordinaria (con parámetro de estado $\omega = \gamma - 1$ donde $1 \leq \gamma \leq 2$) y otro de materia escalar. Las métricas Bianchi I son la extensión más simple de los modelos FRW planos que son anisótropas.

La dinámica en una brana de Bianchi tipo I ha sido investigada en [68] donde se demostró que a energías lo suficientemente altas los efectos de la dimensión extra remueve el comportamiento de la anisotropía en el borde de la singularidad que aparece en la RG. En este estudio tendremos en cuenta los efectos de la geometría del bulk en la dinámica de la brana mediante la proyección del tensor de Weyl en la hipersuperficie. Este término es independiente de las ecuaciones en la brana y depende únicamente de la geometría del bulk.

2.2.1. Cosmología en brana con anisotropía de Bianchi I

Consideremos un bulk AdS_5 con simetría orbifold Z_2 para el caso de una brana de Bianchi I. Para la construcción de la cosmología correspondiente emplearemos la métrica usada en [69]. En este caso el elemento de línea (2.1) se puede escribir de la manera:

$${}^{(5)}ds^2 = -n^2(t, y)dt^2 + h_{IJ}(t, y)\omega^I\omega^J + b^2(t, y)dy^2 \quad (2.84)$$

donde $\omega^I = \omega_i^I dx^i$ es una forma invariante del grupo de Bianchi y h_{IJ} es la métrica tridimensional diagonal. En el caso de un modelo Bianchi tipo I se tiene $\omega_i^I = \delta_i^I$. Luego, la métrica (2.84) se transforma en

$${}^{(5)}ds^2 = -a_0^2(t, y)dt^2 + \sum a_i(t, y)(dx^i)^2 + b^2(t, y)dy^2. \quad (2.85)$$

La brana es una hipersuperficie $y = Const$ que representa el volumen de nuestro universo 3D. Por simplicidad vamos a suponer que se encuentra en la posición $y = 0$ de la dimensión extra. Bajo estas condiciones para el elemento de línea (2.85), se obtiene la métrica en la brana

$$ds^2 = -a_0^2(t)dt^2 + \sum a_i(t)(dx^i)^2 \quad (2.86)$$

Utilizando la métrica (2.86) en la ecuación efectiva de Einstein (1.66), se obtienen las ecuaciones cosmológicas en la brana:

$$H^2 = \frac{1}{3}\kappa^2\rho_T \left(1 + \frac{\rho_T}{2\lambda}\right) - \frac{1}{6}R + \frac{1}{3}\sigma^2 + \frac{1}{3}\Lambda_4 + \frac{2\mathcal{U}}{\lambda}. \quad (2.87)$$

Donde R es la escalar de curvatura de la hipersuperficie y σ es el término de deformación. Al igual que el caso de la brana de FRW, se considera un ajuste fino entre la constante cosmológica del bulk y la tensión de la brana de modo que $\Lambda_4 = 0$ en la ecuación anterior. El nuevo término \mathcal{U} se obtiene de la proyección del tensor de Weyl (1.52) en la brana. Este término depende explícitamente del tiempo como $\mathcal{U}(t) = \frac{C}{a(t)^4}$, donde el parámetro C está relacionado con la masa del agujero negro en el bulk. Las fuerzas de marea de este agujero negro se sienten en la brana como la densidad de energía de una radiación, la cual se conoce como Radiación Oscura.

El recalentamiento y la radiación temprana ocurren en una época de altas energías. A energías suficientemente altas $\rho \gg \lambda$ la interacción de partículas produce gravitones 5D

que son emitidos al bulk. Este proceso contribuye al aumento de la Radiación Oscura. El parámetro C no es constante en el universo temprano y va a aumentar hasta que la escala de energía caiga por debajo del umbral de producción de gravitón 5D. A bajas energías, C tiende asintóticamente a un valor constante que es restringido por los límites de la nucleosíntesis [70].

La segunda de las ecuaciones cosmológicas es la ecuación de Raychaudhuri:

$$\dot{H} = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\rho_T}{\lambda}\right) \left(\dot{\phi}^2 + \gamma\rho_m\right) + \frac{R}{6} - \frac{4\mathcal{U}}{\lambda} - \sigma^2 \quad (2.88)$$

La ecuación de evolución del campo escalar está dada por (2.9).

2.2.2. Sistemas dinámicos en branas de Bianchi I

Como se dijo anteriormente las ecuaciones cosmológicas obtenidas son no lineales y de hasta segundo orden, por tanto se vuelve prácticamente imposible hallar soluciones analíticas de estos sistemas de ecuaciones diferenciales. Una vez más recurriremos al método de los sistemas dinámicos para estudiar la dinámica cosmológica de nuestro modelo.

Normalizando la ecuación de Friedmann (2.87) respecto a H^2 se identifican las siguientes variables dinámicas.

$$\begin{aligned} x &= \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{6}H} & y &= \frac{V}{3H^2} & \Omega_\lambda &= \frac{\rho_T^2}{6\lambda H^2} & \Omega_U &= \frac{2\mathcal{U}}{\lambda H^2} \\ \Omega_m &= \frac{\rho_m}{3H^2} & \Omega_\sigma &= \frac{\sigma}{\sqrt{3}H} & \Omega_k &= -\frac{R}{6H^2}. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Se puede ver que las tres primeras variables en (2.89) coinciden con la variables de normalización empleadas en el estudio de branas homogéneas. Además a este conjunto de variables hay que adicionar la variable s definida en (2.12). Derivando cada una de estas

variables respecto al parámetro temporal τ , se obtiene el siguiente sistema autónomo de ecuaciones diferenciales:

$$x' = \sqrt{\frac{3}{2}}sy + 2x^3 - \frac{x}{2} \left(-2y + (3\gamma - 2)\Omega_m + \frac{6\Omega_\lambda((\gamma - 2)\Omega_m - 2y)}{x^2 + y + \Omega_m} \right) + x(\Omega_U + 5\Omega_\lambda + 2\Omega_\sigma^2 - 2) \quad (2.90)$$

$$y' = y \left(-\frac{6\Omega_\lambda((\gamma - 2)x^2 + \gamma y)}{\Omega_m + x^2 + y} + (3\gamma - 2)\Omega_m - \sqrt{6}sx + 2\Omega_U + 4x^2 \right) - 2y^2 + y(6\gamma - 2)\Omega_\lambda + 4y\Omega_\sigma^2 + 2y \quad (2.91)$$

$$\Omega'_\lambda = \frac{\Omega_U\Omega_\lambda(2\Omega_m + 2x^2 + 2y) + \Omega_\lambda^2(6\gamma\Omega_m - 2\Omega_m + 10x^2) + 4\Omega_\lambda\Omega_\sigma^2\Omega_m}{\Omega_m + x^2 + y} + \frac{\Omega_\lambda(\Omega_m(3\gamma\Omega_m - 2\Omega_m + 3x^2\gamma + 2x^2 + 3y\gamma - 4y - 6\gamma + 2) + 4x^4)}{\Omega_m + x^2 + y} + \frac{\Omega_\lambda\Omega_\sigma^2(4x^2 + 4y) - 2y\Omega_\lambda(y + \Omega_\lambda - 1) + x^2\Omega_\lambda(2y - 10)}{\Omega_m + x^2 + y} \quad (2.92)$$

$$\Omega'_U = \frac{\Omega_U\Omega_\lambda((6\gamma - 2)\Omega_m + 10x^2) + \Omega_U\Omega_\sigma^2(4\Omega_m + 4x^2 + 4y) + 2\Omega_U^2\Omega_m}{\Omega_m + x^2 + y} + \frac{\Omega_U(\Omega_m(3\gamma\Omega_m - 2\Omega_m + x^2(3\gamma + 2) + 3y\gamma - 4y - 2) + 4x^4)}{\Omega_m + x^2 + y} + \frac{2\Omega_U^2(x^2 + y) - 2y\Omega_U(y + \Omega_\lambda + 1) + 2x^2\Omega_U(y - 1)}{\Omega_m + x^2 + y} \quad (2.93)$$

$$\Omega'_m = \frac{\Omega_m(3\gamma\Omega_m^2 + (x^2 + y)(4x^2 - 2y - 3\gamma + 2) + 2\Omega_\lambda(5x^2 - y - \Omega_m))}{\Omega_m + x^2 + y} + \frac{\Omega_m^2(2\Omega_U + 3\gamma(x^2 + y - 1) + 2(x^2 - 2y + 1) + 6\gamma\Omega_\lambda + 4\Omega_\sigma^2)}{\Omega_m + x^2 + y} + \frac{2\Omega_m(x^2 + y)(2\Omega_\sigma^2 + \Omega_U) - 2\Omega_m^3}{\Omega_m + x^2 + y} \quad (2.94)$$

$$\Omega'_\sigma = \frac{\Omega_\sigma (\Omega_m (2\Omega_U + 3\gamma (x^2 + y) + 2x^2 - 4(y + 1) + (6\gamma - 2)\Omega_\lambda + 4\Omega_\sigma^2))}{2(\Omega_m + x^2 + y)} \quad (2.95)$$

$$+ \frac{\Omega_\sigma (\Omega_U (x^2 + y) + (5x^2 - y)\Omega_\lambda + (x^2 + y)(2x^2 - y + 2\Omega_\sigma^2 - 2))}{\Omega_m + x^2 + y}$$

$$+ \frac{(3\gamma - 2)\Omega_\sigma \Omega_m^2}{\Omega_m + x^2 + y}$$

Este sistema de ecuaciones se cierra al incorporar la ecuación correspondiente a la variable s definida en (2.16).

2.2.3. Espacio de fase

Como ya se conoce resulta necesario escribir algunas relaciones importantes en función de las nuevas variables de normalización, por ejemplo, la restricción de Friedmann (2.87) se puede escribir como:

$$x^2 + y + \Omega_m + \Omega_\lambda + \Omega_k + \Omega_\sigma^2 + \Omega_U = 1 \quad (2.96)$$

Usando la ecuación (2.96) se eliminó la variable Ω_k en el sistema de ecuaciones (2.90)(2.95), lográndose reducir la dimensionalidad del sistema.

Los puntos críticos del sistema de ecuaciones reducido (2.90)(2.95) se muestran en la tabla 2.5. A partir de la condición $0 \leq \Omega_m \leq 1$ se obtiene la desigualdad:

$$0 \leq x^2 + y + \Omega_m + \Omega_\lambda + \Omega_k + \Omega_\sigma^2 + \Omega_U \leq 1. \quad (2.97)$$

A partir de la ecuación de Friedmann (2.87) se obtiene la relación útil

$$\frac{\rho_T}{\lambda} = \frac{\Omega_\lambda}{\Omega_m + x^2 + y}. \quad (2.98)$$

Tabla 2.5.: En la tabla se muestran los puntos críticos del sistema de ecuaciones (2.90)(2.95) y su existencia.

P_i	x	y	Ω_m	Ω_λ	Ω_σ	Ω_U	s	<i>Existencia</i>
P_1	0	0	1	0	0	0	$s \in \mathbb{R}$	<i>siempre</i>
P_2^\pm	± 1	0	0	0	0	0	0	<i>siempre</i>
P_3	0	1	0	0	0	0	0	<i>siempre</i>
P_4^\pm	± 1	0	0	0	0	0	s^*	<i>siempre</i>
P_5	$\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{s^*}$	$\frac{4}{3s^{*2}}$	0	0	0	0	s^*	$s^{*2} \geq 2$
P_6	$\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\gamma}{s^*}$	$-\frac{3\gamma(\gamma-2)}{2s^{*2}}$	$1 - \frac{3\gamma}{s^{*2}}$	0	0	0	s^*	$s^{*2} \geq 3\gamma$
P_7	$\frac{s^*}{\sqrt{6}}$	$1 - \frac{s^{*2}}{6}$	0	0	0	0	s^*	$s^{*2} \leq 6$
P_8^\pm	$\frac{\sqrt{6}}{s^*}$	0	0	0	$\pm \sqrt{1 - \frac{6}{s^{*2}}}$	0	s^*	$s^{*2} \geq 6$
P_9	$\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{2}{s^*}$	$\frac{4}{3s^{*2}}$	0	0	0	$1 - \frac{4}{s^{*2}}$	s^*	$s^{*2} \geq 2$
P_{10}^\pm	$x \in [-1, 1]$	0	0	0	$\pm \sqrt{1 - x^2}$	0	0	$x \neq 0$
P_{11}^\pm	$x \in [-1, 1]$	0	0	0	$\pm \sqrt{1 - x^2}$	0	s^*	$x \neq 0$
P_{12}	0	$y \in [0, 1]$	0	$1 - y$	0	0	0	$y \neq 0$

De la relación anterior se deduce que los puntos críticos con $\Omega_m + x^2 + y = 0$ deben de ser excluidos de nuestro estudio pues describen una región de muy altas energías, próxima a la singularidad inicial. Esta época no puede ser descrita adecuadamente por nuestro modelo pues está asociada a una tensión de la brana $\lambda \rightarrow 0$. En cambio los puntos críticos con $\Omega_\lambda = 0$ describen soluciones correspondientes a $\lambda \rightarrow \infty$, que representan un comportamiento estándar 4D (bajas energías).

Partiendo de la restricción (2.97) y la definición de las variables de normalización (2.89) se encuentra la siguiente región del espacio de fase de las variables de normalización de

Tabla 2.6.: Valor de los parámetros cosmológicos ω_ϕ , Ω_ϕ y q para cada uno de los puntos críticos que aparecen en la tabla 2.5.

P_i	ω_ϕ	Ω_ϕ	q
P_1	indefine	0	$\frac{3\gamma}{2}$
P_2^\pm	1	1	2
P_3	-1	1	-1
P_4^\pm	1	1	2
P_5	$\frac{9-2s^*}{9+2s^*}$	$\frac{2}{s^{*2}}$	$\frac{9-4s^*}{3s^{*2}}$
P_6	$\gamma - 1$	$\frac{3\gamma}{s^{*2}}$	$\frac{3\gamma}{2} - \frac{3\gamma}{s^{*2}}$
P_7	$\frac{s^{*2}}{3} - 1$	1	$\frac{s^{*2}}{2} - 1$
P_8^\pm	1	$\frac{6}{s^{*2}}$	2
P_9	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{s^{*2}}$	1
P_{10}^\pm	1	x^2	2
P_{11}^\pm	1	x^2	2
P_{12}^\pm	-1	y	-1

interés físico.

$$\Psi = \{(x, y, \Omega_m, \Omega_\lambda, \Omega_k, \Omega_\sigma, \Omega_U) : 0 \leq x^2 + y + \Omega_m + \Omega_\lambda + \Omega_k + \Omega_\sigma^2 + \Omega_U \leq 1, \quad (2.99)$$

$$-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq \Omega_m \leq 1, 0 \leq \Omega_\lambda \leq 1, -1 \leq \Omega_k \leq 1, -1 \leq \Omega_\sigma \leq 1,$$

$$0 \leq \Omega_U \leq 1\} \times \{s \in \mathbb{R}\}$$

Se puede ver en la tabla 2.5 que todos los puntos críticos del sistema de ecuaciones (2.90)(2.95) pertenecen a la región (2.99) y siempre cumplen la condición $\Omega_m + x^2 + y \neq 0$, salvo P_{10}^\pm, P_{11}^\pm en el caso $x = 0$ y P_{12} en el caso $y = 0$. Luego, los dos últimos casos antes mencionados serán excluidos del presente análisis, pues, para estos valores de las variables de normalización, ellos describen la dinámica en un período de tiempo de la evolución

cósmica muy próximo a la singularidad inicial y nuestro modelo deja de ser aplicable en esta región de altas energías. Con el objetivo de identificar qué tipo de soluciones cosmológicas representan cada uno de los puntos críticos que aparecen en la tabla 2.5, resulta importante redefinir algunos parámetros cosmológicos en función de las nuevas variables dinámicas. El parámetro de estado ω_ϕ y el parámetro adimensional de energía Ω_ϕ del campo escalar no sufren cambios y coinciden con la ecuación (2.22). A partir de la ecuación (2.98) se puede escribir el parámetro de desaceleración q en función de las variables de normalización

$$q = \left(1 + \frac{\Omega_\lambda}{\Omega_m + x^2 + y}\right) \left(3x^2 + \frac{3\gamma}{2}\Omega_m\right) - \Omega_\lambda - x^2 - y + \Omega_U + 2\Omega_\sigma^2 \quad (2.100)$$

En la tabla 2.6 se muestra el valor de los parámetros cosmológicos para cada uno de los puntos críticos que aparecen en la tabla 2.5.

2.2.4. Estabilidad de los soluciones

De modo análogo a como se procedió para el estudio de la cosmología en el caso de una brana homogénea, estudiaremos el comportamiento asintótico del modelo con anisotropía considerando únicamente las perturbaciones de primer orden del sistema de ecuaciones (2.90)(2.95).

En la tabla 2.7 se muestran los autovalores correspondientes a la matriz Jacobiana del sistema de ecuaciones (2.90)(2.95) evaluada en cada posición de equilibrio de interés físico. Como ya sabemos el estudio de la estabilidad se reduce al análisis de los signos de la parte real de los autovalores de la matriz de linealización. Dado que algunos de los puntos críticos del sistema son no hiperbólicos, y el estudio de la estabilidad de la variedad central resulta muy engorroso desde el punto de vista computacional, tendremos que recurrir al estudio numérico de las órbitas del sistema de ecuaciones en el espacio de fase.

Tabla 2.7.: En la tabla se muestran los autovalores de la matriz de linealización del sistema de ecuaciones (2.90)(2.95). Se utiliza las notaciones

$$\Xi_1 = \sqrt{\frac{8}{s^{*2}} - 3}, \Xi_2 = \sqrt{\frac{16}{s^{*2}} - \frac{15}{4}}, \text{ y } \Pi_{\pm} = \frac{3}{4} \left(\pm \frac{\sqrt{\gamma-2} \sqrt{(s^*)^2(9\gamma-2)-24\gamma^2}}{s^*} + \gamma - 2 \right).$$

P_i	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7
P_1	0	-3γ	3γ	$\frac{3}{2}(\gamma-2)$	$\frac{3}{2}(\gamma-2)$	$3\gamma-4$	$3\gamma-2$
P_2^{\pm}	-6	6	4	2	0	0	$6-3\gamma$
P_3	-4	-3	-3	-2	0	0	-3γ
P_4^{\pm}	-6	4	2	0	$6-3\gamma$	$6 \pm \sqrt{6}s^*$	$\pm \sqrt{6}s^{*2}f'(s^*)$
P_5	-2	-2	-2	$2-3\gamma$	$-\Xi_1-1$	Ξ_1-1	$-2s^*f'(s^*)$
P_6	$3\gamma-4$	$3\gamma-2$	$\frac{3}{2}(\gamma-2)$	-3γ	Π_+	Π_-	$-3\gamma s^*f'(s^*)$
P_7	$\frac{1}{2}(s^{*2}-6)$	$\frac{1}{2}(s^{*2}-6)$	$s^{*2}-2$	$-s^{*2}$	$s^{*2}-4$	$s^{*2}-3\gamma$	$-s^{*3}f'(s^*)$
P_8^{\pm}	4	0	0	-6	2	$6-3\gamma$	$-6s^*f'(s^*)$
P_9	2	-1	-4	$4-3\gamma$	$-\Xi_2-\frac{1}{2}$	$\Xi_2-\frac{1}{2}$	$-4s^*f'(s^*)$
P_{10}^{\pm}	4	0	0	6	-6	2	$6-3\gamma$
P_{11}^{\pm}	4	0	-6	2	$6-3\gamma$	$6-\sqrt{6}xs^*$	$-\sqrt{6}xs^{*2}f'(s^*)$
P_{12}	-2	0	0	-3	-3	-4	-3γ

A continuación caracterizaremos cada posición de equilibrio de acuerdo al tipo de solución cosmológica que ellos representen y a su estabilidad. El punto P_1 representa una solución dominada por la materia ($\Omega_m = 1$). Como se puede ver en la tabla 2.7 esta solución corresponde a un punto de ensilladura en el espacio de fase del sistema por lo que representa un estado transiente en la evolución del universo.

La solución P_2^{\pm} es dominada por la energía cinética del campo escalar. Al igual que P_1 esta solución se comporta como un punto de ensilladura en el espacio de fase.

La solución P_3 es un caso particular de P_{12} para $y = 1$. Este punto de equilibrio es no hiperbólico con una variedad central $2D$. Dicho punto corresponde a una fase de *de Sitter*

($\omega_\phi = -1$) con un comportamiento estándar 4D. Esta solución dominada por la energía potencial del campo escalar es consistente con un estado tardío de expansión acelerada $q = -1$. Esto se puede verificar haciendo el análisis de la estabilidad de la variedad central siguiendo un procedimiento análogo al que se ofrece en la sección 2.1.6. Por razones de espacio omitimos el cálculo correspondiente.

El punto crítico P_4^\pm tiene características similares al punto P_2^\pm . Ambas soluciones son dominadas por la energía cinética del campo escalar donde la expansión ocurre a un ritmo desacelerado ($q = 2$) y representan soluciones tipo silla en el espacio de fase. El punto P_5 es una solución escalante campo escalar-curvatura espacial ($\Omega_\phi \sim \Omega_k$). Dicho punto de equilibrio es no hiperbólico si $s^* f'(s^*) = 0$. En el caso hiperbólico es un nodo estable para $-2\sqrt{2/3} \leq s^* < -\sqrt{2}$, $f'(s^*) < 0$ ó $\sqrt{2} < s^* \leq 2\sqrt{2/3}$, $f'(s^*) > 0$, es un foco estable si $s^* < -2\sqrt{2/3}$, $f'(s^*) < 0$ ó $s^* > 2\sqrt{2/3}$, $f'(s^*) > 0$. En otro caso es un punto de ensilladura con una variedad estable $6D$.

La clase de punto P_6 que corresponde a una solución escalante campo escalar-materia ($\Omega_\phi \sim \Omega_m$). Este siempre que sea un punto no hiperbólico, corresponde a una solución tipo silla, debido a la existencia de al menos un dirección inestable asociada a un autovalor real positivo (λ_2) y una dirección propia estable asociada al autovalor real negativo (-3γ).

La clase de punto de equilibrio P_7 representa una solución dominada por el campo escalar ($\Omega_\phi = 1$). P_7 es no hiperbólico si $s^{*2} \in \{0, 2, 4, 3\gamma, 6\}$ ó $f'(s^*) = 0$. En el caso hiperbólico es un nodo estable para $s^{*2} < 2$, $s^* f'(s^*) > 0$, en otro caso se comporta como una solución tipo silla en el espacio de fase.

El punto P_8^\pm corresponde a una solución escalante campo escalar-anisotropía ($\Omega_\phi \sim \Omega_\sigma^2$). Según los resultados mostrados en la tabla 2.7 esta posición de equilibrio es no hiperbólica. Dado que al menos existe tres dirección propias asociadas a valores propios reales positivos y al menos una asociada a un valor propio negativo, estos no corresponden a

atractores tardíos sino a estados transientes de la correspondiente cosmología.

El punto P_9 representa una solución escalante campo escalar-radiación oscura ($\Omega_\phi \sim \Omega_U$) y corresponde a una fase desacelerada ($q = 1$) en la evolución del universo. P_9 es no hiperbólico en los casos $s^{*2} = 4$, ó $\gamma = 4/3$, ó $f'(s^*) = 0$. En el caso hiperbólico esta posición de equilibrio corresponde a un punto silla debido a que existen al menos dos direcciones propias asociadas a valores propios reales negativos y una dirección propia asociada aun autovalor real positivo. Para $\frac{2}{s^*} \ll 1 \Rightarrow \Omega_U \rightarrow 1$, por tanto las contribuciones del término Radiación Oscura \mathcal{U} que aparece en la ecuación de Friedmann (2.87) juegan un papel importante en la dinámica cosmológica de esta solución.

El conjunto de puntos no hiperbólicos P_{10}^\pm y P_{11}^\pm representan una semicircunferencia en el plano (x, Ω_σ) ambos puntos tienen características similares y corresponden a soluciones dominadas escalante campo escalar-anisotropía ($\Omega_\phi \sim \Omega_\sigma^2$). Debido a la existencia de al menos dos direcciones propias asociadas a valores propios reales positivos y una dirección estable asociada a un autovalor real negativo, podemos decir que, de forma general, ambas soluciones se comportan como puntos de ensilladuras en el espacio de fase, asociados estados desacelerados del sistema. En ambos puntos el término de deformación anisotrópica σ que aparece en la ecuación de Friedmann (2.87) domina la dinámica de la solución ($\Omega_\sigma = \pm 1$) cuando $x \rightarrow 0$. En este límite las soluciones cosmológicas correspondientes están en una vecindad de la singularidad inicial, cerca de la cual los modelos que discutimos en esta tesis no son válidos.

El conjunto de puntos no hiperbólicos P_{12} representan una recta en el plano (y, Ω_λ) . Estos puntos corresponde a soluciones de *de Sitter* ($\omega_\phi = -1$). Para $y \neq 1$ estos puntos representan soluciones con modificaciones 5D en la dinámica cosmológica. Como este tipo de corrección es característica del universo temprano en el modelo RS, es de esperar que este conjunto de puntos, al igual que P_1 en el caso de la brana de FRW, debe de ser una recta de puntos asintóticamente inestable asociados a la inflación temprana. A esta

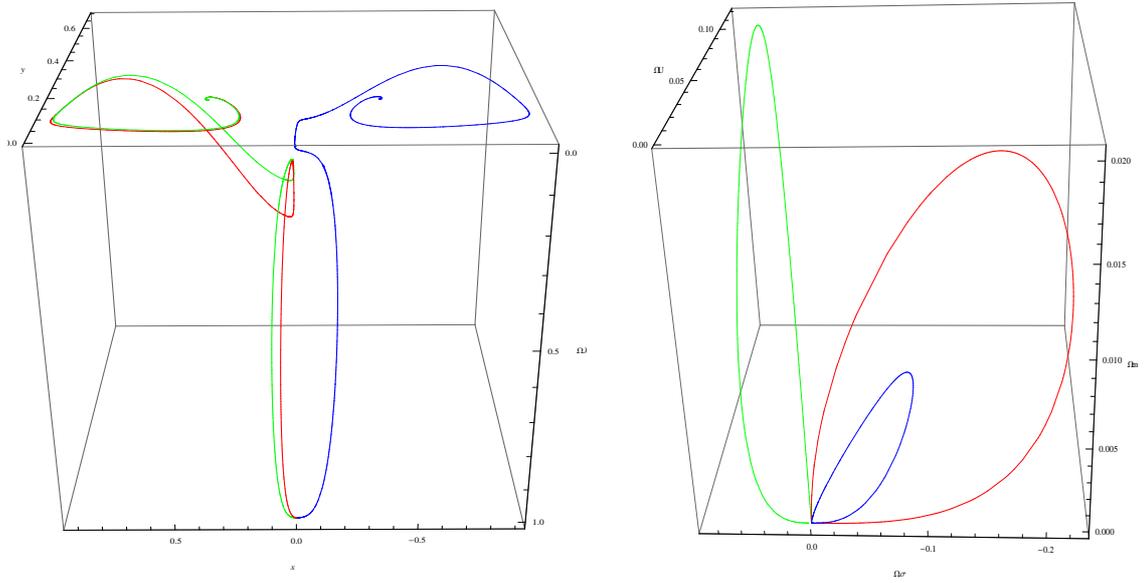


Figura 2.5.: En las figuras aparecen las trayectorias del sistema de ecuaciones (2.90)(2.95) correspondiente al potencial $V = V_0 \text{Sinh}^{-\alpha} \beta \phi$, para diferentes conjuntos de condiciones iniciales y valores de los parámetros libres, $(\gamma, \alpha, \lambda) = (1; 3,4; 0,55)$. (a) Figura de la izquierda, espacio de fase de las variables (x, y, Ω_λ) (b) Figura de la derecha se muestra el espacio de fase de las variables $(\Omega_m, \Omega_U, \Omega_\sigma)$.

conclusión puede arribarse luego de hacer el estudio de la variedad central siguiendo la misma línea de razonamientos que en la sección 2.1.5. Para ilustrar numéricamente algunos de los resultados analíticos discutidos anteriormente consideraremos la dinámica del campo escalar con potencial de auto-interacción $V(\phi) = V_0 \text{Sinh}^{-\alpha} \beta \phi$ ahora atrapado en la brana de Bianchi I. Como se puede ver en la figura 2.5 todas las trayectorias del sistema (2.90)(2.95) en el espacio de fase emergen de un punto $(0, 0, 1, 0, 0, 0)$ el cual corresponde al universo vacío de MRS. La dinámica de la solución MRS es afectada por la dimensión extra $\Omega_\lambda = 1$. Como se puede ver en la figura (a) 2.5 las órbitas del sistema se aproximan al plano $\Omega_\lambda = 0$. Este resultado implica que en tiempos tardíos se recupera el comportamiento dinámico estándar 4D. En la figura (b) 2.5 se puede ver que todas las trayectorias del sistema tienden a soluciones con $\Omega_\sigma = 0$. Es decir el universo evoluciona a un estado isótropo, de esta manera se resuelve el problema de la isotropía actual del

universo.

2.2.5. Discusión de los resultados obtenidos en la sección

En esta sección se estudió la dinámica en una brana de Bianchi I con fluidos de fondo de materia ordinaria y materia escalar atrapados en la brana. A continuación a modo de resumen se exponen alguno de los resultados más importantes obtenidos en esta sección.

1. Las órbitas del sistema emergen de la vecindad del punto $(0, 0, 0, 1, 0, 0)$ el cual representa un universo vacío de Misner-Randall-Sundrum.
2. Las soluciones dominadas por la energía cinética de campo escalar se comportan como soluciones tipo silla en el espacio de fase del sistema.
3. En la figura 2.5 se puede ver que el potencial $V(\phi) = V_0 \text{Sinh}^{-\alpha} \lambda \phi$ conduce a soluciones isótropas ($\Omega_\sigma = 0$) independientemente del grado inicial de anisotropía del modelo.
4. La solución P_9 para $\frac{2}{s^*} \ll 1$ representa una época dominada por la Radiación Oscura $\Omega_U \rightarrow 1$. Este tipo de solución representa un estado desacelerado transiente en la evolución del universo.
5. Las soluciones P_{10}^\pm y P_{11}^\pm son dominadas por la deformación anisotrópica ($\Omega_\sigma \rightarrow \pm 1$) cuando la contribución de la componente cinética de la energía del campo escalar es despreciable $x \ll 1$. Ambas soluciones representan estados transientes del sistema.
6. Los posibles atractores de tiempo tardío son
 - (a) P_3 corresponde a una fase de *de Sitter* ($\omega_\phi = -1$) con un comportamiento estándar 4D. Esta solución dominada por la energía potencial del campo escalar es consistente con un estado tardío de expansión acelerada $q = -1$ lo cual se puede verificar haciendo el análisis de la estabilidad de la variedad central.

- (b) P_5 es una solución escalante campo escalar-curvatura espacial ($\Omega_\phi \sim \Omega_k$). Las condiciones suficientes para que dicha posición de equilibrio sea un atractor tardío son $s^* < -\sqrt{2}$, $f'(s^*) < 0$ ó $s^* > \sqrt{2}$, $f'(s^*) > 0$.
- (c) P_7 representa una solución dominada por el campo escalar ($\Omega_\phi = 1$). Las condiciones suficientes para que dicha posición de equilibrio sea un atractor tardío son $-\sqrt{2} < s^* < 0$, $f'(s^*) < 0$ ó $0 < s^* < \sqrt{2}$, $f'(s^*) > 0$.

2.3. Conclusiones parciales del capítulo

En el presente capítulo se estudió la dinámica cosmológica en generalizaciones escalares del modelo de RS2 correspondientes a branas FRW y de Bianchi I para una forma arbitraria del potencial del campo auto-interactuante. Mediante la técnica de los sistemas dinámicos se comprobó que este tipo de escenario resulta viable desde el punto de vista cosmológico, pues determinados potenciales de auto-interacción del campo escalar atrapado en la brana, pueden producir estados tardíos de expansión acelerada en la brana (universo). Por ejemplo:

- El estudio del potencial $V(\phi) = V_0 \text{Sinh}^{-\alpha} \lambda \phi$ para el campo atrapado en una brana FRW arrojó que esta forma del potencial conduce a estados tardíos de expansión acelerada para determinados valores de los parámetros libres del potencial.
- El estudio realizado al potencial $V(\phi) = V_0 e^{-\lambda \phi} + \Lambda$ del campo escalar atrapado en una brana FRW demostró que esta forma del potencial siempre conduce al atractor tardío de *de Sitter*.
- El estudio del potencial $V(\phi) = V_0 \text{Sinh}^{-\alpha} \lambda \phi$ para el campo escalar atrapado en la brana de Bianchi, demostró que esta forma del potencial conduce a soluciones isótropas independientemente del grado inicial de anisotropía del sistema.

El análisis de las integraciones numéricas 2.32.42.5 demostró que el atractor del pasado de los modelos analizados es la solución vacía de MRS. Correspondiente a los puntos $(0, 0, 1)$ en el caso de la brana FRW y el punto $(0, 0, 0, 1, 0, 0)$ en la brana de Bianchi I. Además se comprobó que tanto en branas de FRW como de Bianchi I las soluciones dominadas por la energía cinética del campo escalar siempre se comportan como soluciones tipo silla, a diferencia de los modelos basados en TGR donde dichas son siempre atractores del pasado.

Tanto para branas FRW como para branas Bianchi I, los puntos de equilibrio asociados a la fase de *de Sitter* ($\omega_\phi = -1$), con un comportamiento estándar 4D, son consistentes con un estado tardío de expansión acelerada ($q = -1$) lo cual se puede verificar haciendo el análisis de la estabilidad de la variedad central. En ambos casos otro posible atractor de futuro son las soluciones dominadas por el campo escalar. Para el caso Bianchi I las condiciones que deben imponerse en el espacio de fase son más restrictivas. Estas son $-\sqrt{2} < s^* < 0, f'(s^*) < 0$ ó $0 < s^* < \sqrt{2}, f'(s^*) > 0$ (notar la diferencia en el punto 6 (c) de la sección 2.1.10). Esto se debe a que en el caso Bianchi I existe un nuevo tipo de solución con respecto a lo obtenido para FRW, esta es la solución escalante campo escalar-curvatura espacial ($\Omega_\phi \sim \Omega_k$) que puede ser un atractor tardío para $s^* < -\sqrt{2}, f'(s^*) < 0$ ó $s^* > \sqrt{2}, f'(s^*) > 0$. En el caso FRW existe otro tipo de solución cosmológica que puede ser un atractor tardío: la solución escalante campo escalar-materia ($\Omega_\phi \sim \Omega_m$). Las condiciones suficientes para que dicha posición de equilibrio sea un atractor tardío son $s^* < -\sqrt{3\gamma}, f'(s^*) < 0$ ó $s^* > \sqrt{3\gamma}, f'(s^*) > 0$. Una diferencia notable entre el caso Bianchi I y el caso FRW es que en Bianchi I no existen atractores escalantes campo escalar-materia sino que estos son puntos de ensilladura. Esto se debe que la curvatura espacial desestabiliza dicha solución.

El método propuesto para la reconstrucción del potencial de auto-interacción del campo escalar es independiente del tipo de brana. Además este método proporciona una nueva

forma de realizar este tipo de estudio. En efecto, podemos partir de una función $f(s)$ arbitraria conocida, estudiar la dinámica y luego reconstruir el potencial.

CONCLUSIONES

El principal objetivo de esta tesis es profundizar en el conocimiento del origen y naturaleza del estado actual de expansión acelerada de nuestro universo mediante el estudio dinámico de los modelos extra-dimensionales de Randall-Sundrum tipo II. Nuestras principales motivaciones para hacer este estudio fueron la simplicidad y capacidad de estos modelos de explicar muchos problemas de la física actual, además de establecer un puente entre la cosmología y teorías fundamentales como la Teoría de Supercuerdas.

Los resultados obtenidos cumplen con los objetivos trazados en esta tesis. Aunque estos resultados no dan una respuesta definitiva al problema de la expansión acelerada del universo debido a la magnitud de este problema, algunos de estos representan aportes a la cosmología.

Los principales aportes de esta investigación se pueden enumerar como sigue:

1. En el estudio realizado nos centramos en la posibilidad de obtener atractores tardíos asociados a soluciones isótropas en expansión acelerada. En este sentido se demostró que determinados potenciales de auto-interacción del campo escalar atrapado en la brana de FRW como es el caso del potencial exponencial, así como para una amplia gamma de potenciales para determinados valores de los parámetros libres del potencial, puede producir exitosamente estados tardíos de expansión acelerada.

Esto último implica que el modelo puede ser ajustado para obtener una dinámica

que sea compatible a las observaciones actuales.

2. En el caso FRW, el estudio realizado de la variedad central demostró que la fase acelerada de Sitter es asintóticamente estable (atractor tardío) para $f(0) \neq 0$.
3. En el caso FRW, para valores $s = s^*$ tales que $f(s^*) = 0$ pueden obtenerse bien atractores escalantes campo escalar-materia ó bien atractores dominados por el campo escalar, dependiendo de condiciones específicas sobre s^* y $f(s^*)$ (ver punto 6 de la sección 2.1.10).
4. En el caso Bianchi I, para valores $s = s^*$ tales que $f(s^*) = 0$ pueden obtenerse bien atractores escalantes campo escalar-curvatura espacial ó bien atractores dominados por el campo escalar, dependiendo de condiciones específicas sobre s^* y $f(s^*)$ (ver punto 6 de la sección 2.2.5).

En este caso, en el ejemplo numérico analizado, se comprobó que el la anisotropía se diluye con la expansión. Luego, independientemente de los valores iniciales de anisotropía, el modelo evoluciona hacia soluciones isótropas. Este último resultado es consistente con la isotropía observada actualmente en la macro-escala.

RECOMENDACIONES

Luego de realizar el estudio dinámico de las generalizaciones escalares del escenario de Randall-Sundrum II correspondiente a branas de FRW y de Bianchi I se realizan las siguientes recomendaciones:

- Continuar profundizando en el estudio de los mundos branas, pues este tipo de escenario proporciona un acercamiento fenomenológico muy útil, además de un excitante escenario geométrico que tiende un puente entre la cosmología y la física fundamental.
- Aplicar la metodología desarrollada para nuevos potenciales del campo auto-interactuante y extender el estudio dinámico de estos modelos haciendo uso del método de reconstrucción del potencial de auto-interacción propuesto.

A. INFLACIÓN EN BRANAS

A.1. Inflación en cosmología estándar

Durante el período inflacionario la densidad de energía del universo es dominada por la energía potencial del campo escalar conocido como inflatón. La densidad y la presión del campo escalar homogéneo se define

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (\text{A.1})$$

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (\text{A.2})$$

Asumiendo que el universo es plano las ecuaciones cosmológicas son, la ecuación de Friedmann

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) \quad (\text{A.3})$$

y la ecuación de Klein-Gordon para el campo escalar

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \quad (\text{A.4})$$

A.2. Condiciones de rodadura lenta

La condición de inflación es $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$. Una técnica estándar de aproximación para el análisis de la inflación, es la condición de slow roll¹. Según esta aproximación las ecuaciones (A.3)(A.4) se pueden escribir.

$$H^2 \cong \frac{\kappa^2}{3} V(\phi) \quad (\text{A.5})$$

$$3H\dot{\phi} \cong -V'(\phi) \quad (\text{A.6})$$

Para que estas aproximaciones sean válidas es necesario que se cumplan dos condiciones.

$$\epsilon(\phi) \ll 1 \quad \eta(\phi) \ll 1 \quad (\text{A.7})$$

donde $\epsilon(\phi)$ y $\eta(\phi)$ son los parámetros de slow roll y se definen:

$$\epsilon(\phi) = -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{\kappa^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \quad (\text{A.8})$$

$$\eta(\phi) = \frac{V''}{3H^2} = \kappa^2 \frac{V''}{V} \quad (\text{A.9})$$

A partir de la definición (A.8) se obtiene que ϵ siempre es positivo.

A.3. Condiciones de rodadura lenta en branas de Randall-Sundrum.

Como se había dicho anteriormente las branas de Randall-Sundrum tienen un apreciable impacto en la cosmología del universo temprano, particularmente en el período inflacio-

¹El término slow roll significa rodadura lenta, en lo adelante por brevedad además de su extendido uso incluso por especialistas hispano-parlantes, usaremos la denominación en inglés.

nario. La ecuación de Friedmann en el modelo de Randall-Sundrum durante el período inflacionario, en una brana plana se puede escribir.

$$H^2 = \frac{1}{3}\kappa^2 V(\phi) \left(1 + \frac{V(\phi)}{2\lambda}\right) \quad (\text{A.10})$$

La ecuación de Klein-Gordon para el campo escalar no cambia en la brana RS. En este caso los parámetros de slow roll se pueden escribir:

$$\epsilon = \frac{\kappa^2}{2} \left(\frac{V'}{V}\right)^2 \left[\frac{4\lambda(\lambda + V)}{(2\lambda + V)^2}\right] \quad (\text{A.11})$$

$$\eta = \kappa^2 \frac{V''}{V} \left[\frac{2\lambda}{2\lambda + V}\right] \quad (\text{A.12})$$

Las expresiones entre corchete contienen los términos de corrección a la inflación temprana. Estos términos implican que para un potencial en particular y teniendo en cuenta las condiciones iniciales para el campo escalar, en el límite $\lambda \ll V$ los parámetros de slow roll son fuertemente suprimidos en comparación con las predicciones hechas por la RG. Ésto implica que potenciales que no sean suficientemente suaves cumplen mucho mejor la condición de rodadura lenta en la brana y pueden llegar a producir inflación.

B. SISTEMAS DINÁMICOS

B.1. Nociones de sistemas dinámicos

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(x) \Rightarrow x'_i = f_i(x_k) \quad (\text{B.1})$$

Donde $x_i \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{x}' = \frac{dx}{d\tau}$ donde τ es un parámetro temporal, la función f es continua $f \in C^1$ y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si la parte derecha de B.1 no depende explícitamente del tiempo el sistema se dice que es *autónomo*.

Definición: El vector $x \in \mathbb{R}^n$ se denomina vector de estado, donde \mathbb{R}^n es el espacio de estados o (espacio de fase).

Una solución de B.1 es una función $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface:

$$\psi'(\tau) = f(\psi(\tau)), \quad \forall \tau \in \mathbb{R}. \quad (\text{B.2})$$

Definición: La imagen de la curva solución ψ en \mathbb{R}^n se denomina órbita del EDO.

Análisis cualitativo: Es conocer cualitativamente el comportamiento asintótico $\tau \rightarrow \infty$ de las soluciones típicas de B.1.

De la teoría de las ecuaciones diferenciales se sabe que el estudio de la estabilidad de

un (EDO) se reduce al estudio de la estabilidad de los puntos críticos \mathbf{x}_C del sistema, en estos puntos se anula el campo vectorial B.1 o sea $\mathbf{f}(\mathbf{x}_C) = 0$ estos puntos describen un estado de equilibrio del sistema físico. Para estudiar la estabilidad de tales estados es necesario estudiar el comportamiento de las órbitas del EDO cercana a los puntos de equilibrio. Realizando una pequeña perturbación al sistema en la vecindad de los puntos de equilibrio.

$$\mathbf{x}_c \longrightarrow \mathbf{x}_c + \epsilon \quad \text{donde} \quad \epsilon \ll 1 \quad (\text{B.3})$$

Realizando una expansión de Taylor del EDO, se obtiene que la perturbación del sistema evoluciona de la siguiente manera

$$\epsilon'_i = f_i(x_c) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right)_{x_c} \epsilon_k + R(x_c, \epsilon_k) \quad \text{donde} \quad f_i(x_c) = 0 \quad (\text{B.4})$$

donde nos hemos restringido, únicamente a la aproximación lineal, se tiene.

$$\epsilon'_i = M_{ik} \epsilon_k \quad \text{donde} \quad M_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \quad (\text{B.5})$$

donde M_{ik} es la matriz de linealización del sistema. En general las linealizaciones dan una descripción bastante adecuada de las órbitas no lineales en la vecindad de los puntos críticos. Esta aseveración se justifica con el siguiente teorema:

Teorema de Hartmann-Grabmann:

Sea p un punto de equilibrio del EDO $x' = f(x)$ en \mathbb{R}^n , donde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es, al menos, de clase C^1 . Si todos los valores propios λ de la matriz de linealización M en p satisfacen $\text{Re } \lambda \neq 0$, entonces existe un homomorfismo $h : u \rightarrow \bar{u}$ de una vecindad u de O en una vecindad \bar{u} de p , que mapea órbitas de flujo lineal $e^{M \tau}$ en órbitas del flujo no lineal de la EDO, preservando el parámetro τ .

Ya sabemos que las perturbaciones del EDO evolucionan como B.4, podemos encontrar

los valores propios $\lambda_i (i = 1, 2, \dots)$ de la matriz de linealización al resolver la ecuación secular.

$$\det(M - \lambda I) = 0 \quad (\text{B.6})$$

Los vectores propios \mathbf{u}_i asociado a los autovalores de M son aquellos vectores

$$M\mathbf{U}_i = \lambda_i \mathbf{U}_i \quad (\text{B.7})$$

- El número de valores (vectores) propios es igual a la dimensión del espacio de fase $\dim = n$.
- Cada vector propio define una *dirección propia* en el espacio de fase.
- El conjunto u_j forma una base en el espacio de fase \mathfrak{R}^n .

La signatura de los valores propios de M que en general $\lambda \in \mathbb{C}$ define la estabilidad lineal del EDO en la vecindad de los puntos críticos, esto se debe a la equivalencia topológica (local) entre los flujos lineales y no lineales del sistema en el entorno del punto crítico.

Cuando uno de los estados de equilibrio del sistema de ecuaciones es un punto no hiperbólico no se puede emitir un criterio de la estabilidad del estado basándose solamente en la aproximación lineal entonces hay que recurrir al estudio numérico de las trayectorias del sistema de ecuaciones.

Definición: Cuando la parte real de, al menos, uno de los valores propios de la matriz de linealización es cero, se dice que el punto crítico correspondiente es **no hiperbólico**.

En este caso, según $\text{Re } \lambda_j$ sea negativo, positivo, ó cero, los correspondientes vectores propios dividen el espacio de fase en tres subespacios:

1. **Subespacio estable:** Es desplegado por los vectores propios asociados a valores propios con partes reales negativas.

2. **Subespacio centro:** Es desplegado por los vectores propios asociados a valores propios con parte real cero.
3. **Subespacio inestable:** Es desplegado por los vectores propios asociados con los valores propios con parte real positiva.

B.2. Teoría de la variedad central

En esta sección se expone la técnica para la construcción de la variedad central. Supongamos que el campo vectorial B.1 se puede escribir de la siguiente forma .

$$x' = Mx + f(x, y) \quad (\text{B.8})$$

$$y' = Nx + g(x, y) \quad (\text{B.9})$$

Donde $(x, y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s$, M es una matriz de $c \times c$ asociada a los autovalores con parte real nula y N es una matriz de $s \times s$ asociada a los autovalores con parte real negativa.

Donde f, g son funciones C^r con $(r \geq 2)$, además se cumple :

$$f(0, 0) = Df(0, 0) = 0 \quad g(0, 0) = Dg(0, 0) = 0 \quad (\text{B.10})$$

Se define como variedad central la variedad invariante

$$W^c(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s : y = h(x), |x| < \delta\}, h(0) = Dh(0) = 0 \quad (\text{B.11})$$

para un δ suficientemente pequeño. La condición $h(0) = Dh(0) = 0$ implica que $W^c(0)$ es tangente a E^c en $(x, y) = (0, 0)$, donde E^c es el espacio correspondiente a los valores propios con parte real cero.

Teorema de existencia: Si existe la variedad central C^r de B.8, la dinámica de B.8 está restringida por su variedad central, para u suficientemente pequeños se puede escribir como un campo vectorial c -dimensional.

$$u' = Au + f(u, h(u)) \quad (\text{B.12})$$

Teorema (Estabilidad): Suponiendo que la solución cero de B.12 es estable (asintóticamente inestable, o inestable), la solución cero de B.8B.9 es en este caso, estable (asintóticamente inestable, o inestable). Si $(x(\tau), y(\tau))$ es solución de B.8B.9 con $(x(0), y(0))$ suficientemente pequeño, ahí $u(\tau)$ es solución de B.12, entonces se tiene para $\tau \rightarrow \infty$.

$$x(\tau) = u(\tau) + O(e^{-r\tau}) \quad (\text{B.13})$$

$$y(\tau) = h(u(\tau)) + O(e^{-r\tau}) \quad (\text{B.14})$$

Utilizando la invarianza de B.11 bajo la dinámica de B.8B.9, se puede derivar una ecuación cuasilineal en derivadas parciales que satisface $h(x)$.

$$\mathcal{N}(H(x)) \equiv Dh(x) [Ax + f(x, h(x))] - Bh(x) - g(x, h(x)) = 0 \quad (\text{B.15})$$

Resolviendo B.15 se logra construir la variedad central. Desafortunadamente, resulta extremadamente difícil encontrar una solución de la ecuación B.15 correspondiente al problema original. Pero podemos encontrar soluciones aproximadas de B.15, justificadas por el siguiente teorema.

Teorema (Aproximación): Sea $\Phi : \mathbb{R}^c \rightarrow \mathbb{R}^s$ al menos C^1 , mapea con $\Phi(0) = 0$ y $D\Phi(0) = 0$ tales que $\mathcal{N}(\Phi(x)) = O(|x|^q)$ cuando $x \rightarrow 0$ para $q > 1$. Se tiene que $|h(x) - \Phi(x)| = O(|x|^q)$ cuando $x \rightarrow 0$.

Realizando expansiones en series de potencias en el esquema de cálculo de la variedad central. El teorema anterior permite realizar el cálculo de dicha variedad, con cualquier grado de exactitud deseado en la solución de B.15 con el mismo grado de exactitud de los desarrollos de Taylor.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] C. Brans and R. H. Dicke, “Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation,” *Phys. Rev.* **124** (1961) 925–935.
- [2] L. Randall and R. Sundrum, “A large mass hierarchy from a small extra dimension,” *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 3370–3373, [arXiv:hep-ph/9905221](#).
- [3] L. Randall and R. Sundrum, “An alternative to compactification,” *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 4690–4693, [arXiv:hep-th/9906064](#).
- [4] G. R. Dvali, G. Gabadadze, and M. Porrati, “4D gravity on a brane in 5D Minkowski space,” *Phys. Lett.* **B485** (2000) 208–214, [arXiv:hep-th/0005016](#).
- [5] C. f. a. D. S. o. A. National Research Council (U.S.), C. f. a. D. S. o. A. Astrophysics, B. o. P. Astrophysics, D. o. E. Astronomy, Space Studies Board, and P. Sciences, *New worlds, new horizons in astronomy and astrophysics*. The National Academies Press, 2010.
- [6] T. Kaluza, “On the unification problem of physics,” *Sitz. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* **966** (1921) .
- [7] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. R. Dvali, “The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter,” *Phys. Lett.* **B429** (1998) 263–272, [arXiv:hep-ph/9803315](#).

-
- [8] I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. R. Dvali, “New dimensions at a millimeter to a Fermi and superstrings at a TeV,” *Phys. Lett.* **B436** (1998) 257–263, [arXiv:hep-ph/9804398](#).
- [9] T. Damour, “Gravitation and experiment,” [arXiv:gr-qc/9711061](#).
- [10] P. Horava and E. Witten, “Heterotic and type I string dynamics from eleven dimensions,” *Nucl. Phys.* **B460** (1996) 506–524, [arXiv:hep-th/9510209](#).
- [11] J. Polchinski, *String Theory Vol. II*. Cambridge University Press, 1998.
- [12] E. Witten, “Phase Transitions In M-Theory And F-Theory,” *Nucl. Phys.* **B471** (1996) 195–216, [arXiv:hep-th/9603150](#).
- [13] A. Lukas, B. A. Ovrut, K. S. Stelle, and D. Waldram, “The universe as a domain wall,” *Phys. Rev.* **D59** (1999) 086001, [arXiv:hep-th/9803235](#).
- [14] A. Lukas, B. A. Ovrut, and D. Waldram, “Cosmological solutions of Horava-Witten theory,” *Phys. Rev.* **D60** (1999) 086001, [arXiv:hep-th/9806022](#).
- [15] W. D. Goldberger and M. B. Wise, “Bulk fields in the Randall-Sundrum compactification scenario,” *Phys. Rev.* **D60** (1999) 107505, [arXiv:hep-ph/9907218](#).
- [16] W. D. Goldberger and M. B. Wise, “Modulus stabilization with bulk fields,” *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 4922–4925, [arXiv:hep-ph/9907447](#).
- [17] O. DeWolfe, D. Z. Freedman, S. S. Gubser, and A. Karch, “Modeling the fifth dimension with scalars and gravity,” *Phys. Rev.* **D62** (2000) 046008, [arXiv:hep-th/9909134](#).
- [18] M. Gremm, “Thick domain walls and singular spaces,” *Phys. Rev.* **D62** (2000) 044017, [arXiv:hep-th/0002040](#).

- [19] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, “Action Integrals and Partition Functions in Quantum Gravity,” *Phys. Rev.* **D15** (1977) 2752–2756.
- [20] J. Garriga and T. Tanaka, “Gravity in the brane-world,” *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000) 2778–2781, [arXiv:hep-th/9911055](#).
- [21] S. B. Giddings, E. Katz, and L. Randall, “Linearized gravity in brane backgrounds,” *JHEP* **03** (2000) 023, [arXiv:hep-th/0002091](#).
- [22] P. Brax, R. A. Janik, and R. B. Peschanski, “On the AdS/CFT dual of deconstruction,” *Nucl. Phys.* **B660** (2003) 194–210, [arXiv:hep-th/0303081](#).
- [23] R. Maartens, “Brane-world gravity,” *Living Rev. Rel.* **7** (2004) 7, [arXiv:gr-qc/0312059](#).
- [24] T. Tanaka, “Gravity in brane world,” *AIP Conf. Proc.* **1040** (2008) 42–56.
- [25] R. M. Wald, *General Relativity*. University Chicago Press, 1984.
- [26] T. Shiromizu, K.-i. Maeda, and M. Sasaki, “The Einstein equations on the 3-brane world,” *Phys. Rev.* **D62** (2000) 024012, [arXiv:gr-qc/9910076](#).
- [27] W. Israel, “Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity,” *Nuovo Cim.* **B44S10** (1966) 1.
- [28] O. Pedraza, *Sobre la fenomenología de mundos brana a bajas energías: efecto Casimir y corrimiento Lamb*. PhD thesis, Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa, 2007.
- [29] K.-i. Maeda and D. Wands, “Dilaton-gravity on the brane,” *Phys. Rev.* **D62** (2000) 124009, [arXiv:hep-th/0008188](#).
- [30] P. Brax, C. van de Bruck, A.-C. Davis, and D. Shaw, “The Dilaton and Modified Gravity,” *Phys. Rev.* **D82** (2010) 063519, [arXiv:1005.3735 \[astro-ph.CO\]](#).

- [31] P. Brax and C. van de Bruck, “Cosmology and brane worlds: A review,” *Class. Quant. Grav.* **20** (2003) R201–R232, [arXiv:hep-th/0303095](#).
- [32] P. Binetruy, C. Deffayet, U. Ellwanger, and D. Langlois, “Brane cosmological evolution in a bulk with cosmological constant,” *Phys. Lett.* **B477** (2000) 285–291, [arXiv:hep-th/9910219](#).
- [33] K.-i. Maeda, “Brane quintessence,” *Phys. Rev.* **D64** (2001) 123525, [arXiv:astro-ph/0012313](#).
- [34] R. Maartens, “Dark energy from brane-world gravity,” *J. Phys. Conf. Ser.* **68** (2007) 012046, [arXiv:astro-ph/0602415](#).
- [35] K.-i. Maeda and N. Ohta, “Inflation from superstring / M theory compactification with higher order corrections. I,” *Phys. Rev.* **D71** (2005) 063520, [arXiv:hep-th/0411093](#).
- [36] K.-i. Maeda and N. Ohta, “Inflation from M-theory with fourth-order corrections and large extra dimensions,” *Phys. Lett.* **B597** (2004) 400–407, [arXiv:hep-th/0405205](#).
- [37] A. A. Starobinsky, “A new type of isotropic cosmological models without singularity,” *Phys. Lett.* **B91** (1980) 99–102.
- [38] A. H. Guth, “The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems,” *Phys. Rev.* **D23** (1981) 347–356.
- [39] R. M. Hawkins and J. E. Lidsey, “Inflation on a single brane: Exact solutions,” *Phys. Rev.* **D63** (2001) 041301, [arXiv:gr-qc/0011060](#).
- [40] G. Huey and J. E. Lidsey, “Inflation, braneworlds and quintessence,” *Phys. Lett.* **B514** (2001) 217–225, [arXiv:astro-ph/0104006](#).
- [41] L. H. Ford, “Cosmological constant damping by unstable scalar fields,”

- Phys. Rev.* **D35** (1987) 2339.
- [42] B. Feng and M.-z. Li, “Curvaton reheating in non-oscillatory inflationary models,” *Phys. Lett.* **B564** (2003) 169–174, [arXiv:hep-ph/0212213](#).
- [43] A. S. Majumdar, “From brane assisted inflation to quintessence through a single scalar field,” *Phys. Rev.* **D64** (2001) 083503, [arXiv:astro-ph/0105518](#).
- [44] V. Sahni, M. Sami, and T. Souradeep, “Relic gravity waves from brane world inflation,” *Phys. Rev.* **D65** (2002) 023518, [arXiv:gr-qc/0105121](#).
- [45] C. W. Misner, “The Isotropy of the universe,” *Astrophys. J.* **151** (1968) 431–457.
- [46] P. Bowcock, C. Charmousis, and R. Gregory, “General brane cosmologies and their global spacetime structure,” *Class. Quant. Grav.* **17** (2000) 4745–4764, [arXiv:hep-th/0007177](#).
- [47] S. Weinberg, “The cosmological constant problem,” *Rev. Mod. Phys.* **61** (1989) 1–23.
- [48] G. Leon, P. Silveira, and C. R. Fadrugas, “Phase-space of flat Friedmann-Robertson-Walker models with both a scalar field coupled to matter and radiation,” [arXiv:1009.0689 \[gr-qc\]](#).
- [49] A. A. Coley, *Dynamical systems and cosmology*. Dordrecht-Kluwer, 2003.
- [50] V. Sahni and A. A. Starobinsky, “The Case for a Positive Cosmological Lambda-term,” *Int. J. Mod. Phys.* **D9** (2000) 373–444, [arXiv:astro-ph/9904398](#).
- [51] L. A. Urena-Lopez and T. Matos, “A new cosmological tracker solution for quintessence,” *Phys. Rev.* **D62** (2000) 081302, [arXiv:astro-ph/0003364](#).
- [52] S. A. Pavluchenko, “The generality of inflation in closed cosmological models with some quintessence potentials,” *Phys. Rev.* **D67** (2003) 103518,

- arXiv:astro-ph/0304354.
- [53] R. Cardenas, T. Gonzalez, Y. Leyva, O. Martin, and I. Quiros, “A model of the universe including dark energy accounted for by both a quintessence field and a (negative) cosmological constant,” *Phys. Rev.* **D67** (2003) 083501, arXiv:astro-ph/0206315.
- [54] P. Brax and J. Martin, “The robustness of quintessence,” *Phys. Rev.* **D61** (2000) 103502, arXiv:astro-ph/9912046.
- [55] R. Mainini, L. P. L. Colombo, and S. A. Bonometto, “Nature of Dark Energy and Polarization Measurements,” *New Astron.* **8** (2003) 751–766, arXiv:astro-ph/0301215.
- [56] T. Barreiro, E. J. Copeland, and N. J. Nunes, “Quintessence arising from exponential potentials,” *Phys. Rev.* **D61** (2000) 127301, arXiv:astro-ph/9910214.
- [57] I. Quiros, R. Garcia-Salcedo, T. Matos, and C. Moreno, “Self accelerating solutions in a DGP brane with a scalar field trapped on it: the dynamical systems perspective,” *Phys. Lett.* **B670** (2009) 259–265, arXiv:0802.3362 [gr-qc].
- [58] S. Wiggins, *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. Springer, 1990.
- [59] Y. Leyva, D. Gonzalez, T. Gonzalez, T. Matos, and I. Quiros, “Dynamics of a self-interacting scalar field trapped in the braneworld for a wide variety of self-interaction potentials,” *Phys. Rev.* **D80** (2009) 044026, arXiv:0909.0281 [gr-qc].
- [60] W. Fang, Y. Li, K. Zhang, and H.-Q. Lu, “Exact Analysis of Scaling and Dominant Attractors Beyond the Exponential Potential,” arXiv:0810.4193 [hep-th].
- [61] E. J. Copeland, A. R. Liddle, and D. Wands, “Exponential potentials and

- cosmological scaling solutions,” *Phys. Rev.* **D57** (1998) 4686–4690, [arXiv:gr-qc/9711068](#).
- [62] T. Gonzalez, T. Matos, I. Quiros, and A. Vazquez-Gonzalez, “Self-interacting Scalar Field Trapped in a Randall-Sundrum Braneworld: The Dynamical Systems Perspective,” *Phys. Lett.* **B676** (2009) 161–167, [arXiv:0812.1734 \[gr-qc\]](#).
- [63] N. Goheer and P. K. S. Dunsby, “Exponential potentials on the brane,” *Phys. Rev.* **D67** (2003) 103513, [arXiv:gr-qc/0211020](#).
- [64] K. S. T. C. W. Misner and J. A. Wheeler, *Gravitation*. W. H. Freeman & Co., 1973.
- [65] P. J. Peebles, *Principles of physical cosmology*. Princeton University Press, 1976.
- [66] C. G. Tsagas, A. Challinor, and R. Maartens, “Relativistic cosmology and large-scale structure,” *Phys.Rept.* **465** (2008) 61–147, [arXiv:0705.4397 \[astro-ph\]](#).
- [67] G. Leon and E.Ñ. Saridakis, “Dynamics of the anisotropic Kantowsky-Sachs geometries in R^n gravity,” *Class.Quant.Grav.* **28** (2011) 065008, [arXiv:1007.3956 \[gr-qc\]](#).
- [68] R. Maartens, V. Sahni, and T. D. Saini, “Anisotropy dissipation in brane-world inflation,” *Phys. Rev.* **D63** (2001) 063509, [arXiv:gr-qc/0011105](#).
- [69] P. Binetruy, C. Deffayet, and D. Langlois, “Non-conventional cosmology from a brane-universe,” *Nucl. Phys.* **B565** (2000) 269–287, [arXiv:hep-th/9905012](#).
- [70] K. Ichiki, M. Yahiro, T. Kajino, M. Orito, and G. J. Mathews, “Observational constraints on dark radiation in brane cosmology,” *Phys. Rev.* **D66** (2002) 043521, [arXiv:astro-ph/0203272](#).