

MINISTERIO DE EDUCACIÓN SUPERIOR

UNIVERSIDAD CENTRAL "MARTA ABREU" DE LAS VILLAS

FACULTAD DE MATEMÁTICA, FÍSICA Y COMPUTACIÓN

Departamento de Matemática



*Tesis para optar por el grado científico de
Doctor en Ciencias Pedagógicas*

*“Estrategia didáctica para el estudio de conceptos con un proceso
de formación inductivo en la carrera Licenciatura en Matemática”*

Autor: M.Sc. José Enrique Martínez Serra

Santa Clara

2005

MINISTERIO DE EDUCACIÓN SUPERIOR

UNIVERSIDAD CENTRAL "MARTA ABREU" DE LAS VILLAS

FACULTAD DE MATEMÁTICA, FÍSICA Y COMPUTACIÓN

Departamento de Matemática



*Tesis para optar por el grado científico de
Doctor en Ciencias Pedagógicas*

*“Estrategia didáctica para el estudio de conceptos con un proceso
de formación inductivo en la carrera Licenciatura en Matemática”*

Autor: M.Sc. José Enrique Martínez Serra

Tutor: Dr. Otilio Bienvenido Mederos Anoceto

Santa Clara

2005

AGRADECIMIENTOS

A:

- **Otilio, con el que siempre he podido contar como tutor y amigo a la vez.**
- **Nancy y Barreto, autores de brillantes oponencias realizadas a la tesis presentada en predefensa.**
- **Fara, Teresita, Miriam, Esperanza y Alfredo, miembros del tribunal de predefensa, cuyos criterios, valoraciones y sugerencias oportunas, provocaron una amplia y sistémica reestructuración de la tesis hasta conformar la presente memoria escrita.**
- **Los compañeros de mi departamento docente, sin cuyo apoyo profesional y espiritual no habría sido posible llegar a este momento.**
- **Los doctores de varias universidades del país, que han fungido como especialistas en la misión de valorar la calidad del diseño de la estrategia didáctica que proponemos y han tenido en alta estima el trabajo realizado.**
- **Jenny, por su apoyo espiritual, y su familia, por su consejo oportuno.**
- **Mireya, por su importante ayuda en la búsqueda bibliográfica.**
- **Todos los que de una forma u otra han aportado su granito de arena, tanto en el proceso investigativo, como en la conformación de este informe de tesis.**

SÍNTESIS

La investigación posee como **objetivo general**: diseñar una estrategia didáctica basada en la resolución de problemas que contribuya a elevar la calidad de los procesos de formación, desarrollo y generalización de conceptos matemáticos.

Los **aportes teóricos** de la tesis son:

- ◆ Teniendo en cuenta que los estudiantes universitarios, según los programas de la Matemática de la enseñanza general, han pasado por las fases y etapas que señala Vygotski para la formación conceptual de niños y adolescentes, se describen todos los subprocesos (comparación, análisis-abstracción, síntesis y generalización) que componen el proceso complejo de formación inductiva de conceptos matemáticos en la enseñanza universitaria.
- ◆ Se establecen las diferencias que presenta el proceso de desarrollo conceptual en la enseñanza universitaria respecto a niveles precedentes y se propone un sistema de acciones acorde con estas especificidades.
- ◆ Tomando como base la categoría Zona de Desarrollo Próximo, se emplea la resolución de problemas para facilitar la participación de los estudiantes en los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual en la enseñanza universitaria.
- ◆ Por primera vez se diseña una estrategia que tenga en cuenta las características de la extensión de los conceptos matemáticos en la enseñanza superior, dadas porque:
 - La extensión de muchos conceptos matemáticos en esta enseñanza, a diferencia de los conceptos de la enseñanza general, puede tener diferentes cardinalidades (nula, finita e infinita).
 - La necesidad de realizar la ampliación de la colección de elementos conocidos de la extensión agregando colecciones de elementos conocidos, no solo elementos particulares, como usualmente se hace.
- ◆ Un programa heurístico general para la construcción de árboles de problemas que faciliten los procesos didácticos que intervienen en la solución del problema complejo de formación (desarrollo o generalización) de un concepto matemático.

La **significación práctica** de la investigación está dada porque:

- ◆ La aplicación de la estrategia durante los procesos de formación, desarrollo y generalización en los conceptos con potencialidades para ello, garantiza la participación de los estudiantes en estos procesos, el logro de un aprendizaje significativo y una mayor calidad de los mismos.

- ◆ Se explican las potencialidades que posee la estrategia para contribuir a una mejor preparación matemática y metodológica de los profesores en dos sentidos:
 - En el tratamiento de conceptos del postgrado.
 - En la apropiación de un sistema de acciones para llevar a cabo el tratamiento de conceptos con más calidad en sus grupos de clase.

La implementación de la estrategia, por medio del tratamiento de los conceptos media numérica y función convexa en un grupo de profesores de Sancti Spíritus y en un grupo de estudiantes mexicanos durante el curso 2002-2003, sirvió como antecedente para el perfeccionamiento del diseño de la estrategia y para su posterior implementación en el segundo semestre del curso 2003-2004 en la muestra oficial de la investigación, constituida por 13 alumnos del segundo año de la Licenciatura en Matemática de la UCLV.

Los resultados derivados de los métodos aplicados, entre los que se encuentran: entrevistas y encuestas a estudiantes y profesores, observación participante, pruebas de contenido, estudio de casos y consulta de especialistas, permiten afirmar que la estrategia propuesta permite llevar a cabo los procesos de formación (inductivo), desarrollo y generalización de conceptos en la Licenciatura en Matemática con una alta calidad, y por ende, un aprendizaje activo, mediado y significativo durante los mismos.

ÍNDICE

| | |
|--|----|
| INTRODUCCIÓN | 1 |
| CAPITULO 1 FUNDAMENTOS DEL PROCESO DE ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS | |
| 1.1 Fundamentos filosóficos. | 11 |
| 1.2 Fundamentos lógicos. | 12 |
| 1.3 Fundamentos psicopedagógicos..... | 19 |
| - 1.3.1 Fundamentos del aprendizaje activo y mediado. | 19 |
| - 1.3.2 Fundamentos del aprendizaje significativo. | 26 |
| 1.4 Fundamentos didácticos..... | 29 |
| - 1.4.1 Aspectos relativos a la Didáctica General. | 29 |
| - 1.4.2 Aspectos relativos a la Didáctica de las Matemáticas. | 38 |
| -- 1.4.2.1 Dos reacciones extremas en la Didáctica de las Matemáticas. | 38 |
| -- 1.4.2.2 Reseña sobre la enseñanza de la Matemática en el siglo XX..... | 39 |
| -- 1.4.2.3 Papel de la resolución de problemas en el PEA de la Matemática en Cuba. | 40 |
| -- 1.4.2.4 ¿Qué es un problema? | 43 |
| -- 1.4.2.5 Funciones de los problemas. | 44 |
| -- 1.4.2.6 Primer significado: resolver problemas como contexto. Enseñanza para la resolución de problemas. | 45 |
| -- 1.4.2.7 Segundo significado: resolver problemas como habilidad. Enseñanza de la resolución de problemas..... | 45 |
| -- 1.4.2.8 Tercer significado del empleo de la resolución de problemas: resolver problemas es "hacer matemática". Enseñanza por medio de la resolución de problemas..... | 49 |
| CAPITULO 2 ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA LOS PROCESOS DE FORMACIÓN, DESARROLLO Y GENERALIZACIÓN DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS EN LA CARRERA LICENCIATURA EN MATEMÁTICA | |
| 2.1 Ideas generales sobre la estrategia didáctica..... | 55 |
| - 2.1.1 Avatares del concepto estrategia..... | 57 |
| - 2.1.2 Rasgos generales de una estrategia..... | 58 |
| - 2.1.3 Fases de la estrategia..... | 58 |
| - 2.1.4 Aspectos organizativos de una estrategia en los marcos de un trabajo científico. | 59 |
| 2.2 Propuesta de la estrategia didáctica para la formación, desarrollo y generalización de conceptos matemáticos para la carrera Licenciatura en Matemática..... | 59 |

| | |
|---|------------|
| - 2.2.1 Fundamentación..... | 59 |
| - - 2.2.1.1 El aprendizaje de conceptos como proceso complejo, cognitivo, mediado, activo y significativo..... | 60 |
| - - 2.2.1.2 Los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual..... | 67 |
| - - 2.2.1.3 Aspectos del modelo del profesional del matemático que incitan a la realización de esta estrategia..... | 70 |
| - - 2.2.1.4 Consideraciones didácticas sobre los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual..... | 71 |
| - - 2.2.1.5 Organizador de los aspectos fundamentales que fundamentan los indicadores a medir en la estrategia..... | 74 |
| - 2.2.2 Diagnóstico inicial. Necesidad del planteamiento de una estrategia didáctica..... | 75 |
| - 2.2.3 Componentes rectores de la estrategia..... | 77 |
| - 2.2.4 Fases de la estrategia..... | 79 |
| - - 2.2.4.1 Fase de planificación y orientación..... | 79 |
| - - 2.2.4.2 Fase de implementación..... | 90 |
| - - 2.2.4.3 Fase de control..... | 91 |
| CAPITULO 3 IMPLEMENTACIÓN Y VALORACIÓN DE LOS RESULTADOS DE LA ESTRATEGIA PROPUESTA | |
| 3.1 Planificación..... | 94 |
| - 3.1.1 Sobre la preparación del profesor..... | 95 |
| - 3.1.2 Sobre el diagnóstico de necesidades didácticas de los conceptos a tratar..... | 96 |
| - 3.1.3 Sistema de acciones por temas..... | 98 |
| 3.2 Implementación de la estrategia planificada..... | 100 |
| 3.3 Control de la estrategia implementada..... | 101 |
| - 3.3.1 Sobre la encuesta a estudiantes..... | 105 |
| - 3.3.2 La observación participante..... | 107 |
| - 3.3.3 Valoración de los resultados obtenidos en los diferentes cortes..... | 108 |
| - 3.3.4 Estudio de casos..... | 115 |
| - 3.3.5 Valoración de los resultados del trabajo por consulta a especialistas..... | 119 |
| CONCLUSIONES..... | 123 |
| RECOMEDACIONES..... | 125 |
| BIBLIOGRAFÍA..... | 126 |
| ANEXOS..... | 134 |

INTRODUCCIÓN

Ante el vertiginoso desarrollo científico técnico de la sociedad actual y el proceso de globalización de la información, la educación actual debe readaptarse a estas nuevas exigencias.

En este proceso de readaptación salen a la luz muchas investigaciones educativas que enriquecen el abundante legado dejado por: la Psicología, como ciencia que ofrece el estudio de la psiquis de los educandos; la Pedagogía, que se ha ganado el carácter de ciencia al englobar todo el sistema de leyes, principios, formas y métodos para la educación e instrucción de los alumnos; la Didáctica, como ciencia pedagógica que estudia integralmente el proceso de enseñanza-aprendizaje (PEA) que se lleva a cabo en el aula; y las Didácticas Especiales, que adaptan a las ciencias particulares los aspectos que contempla la Didáctica General.

Un rasgo común de muchas de estas investigaciones es que hacen ver a la comunidad pedagógica la necesidad de que los educandos no sean vistos como receptores pasivos de volúmenes de contenidos, sino, como individuos capaces de aprender activa, mediada y significativamente, teniendo en cuenta la connotación que estos términos, manejados desde hace tiempo, han adquirido en la actualidad, especialmente en el PEA de la Matemática.

Desde la antigüedad, en varias obras de clásicos de la Pedagogía como Comenius, Pestalozzi, Varela, Rosseau, etc, se reconoce el necesario papel activo en el aprendizaje del alumno por encima de la recepción mecanicista y dogmática que predominaba en aquella época; con los aportes de la escuela soviética de Teoría de la Actividad, se han obtenido resultados esclarecedores sobre este papel; por ejemplo, *“...se logra un mayor aprendizaje activo de los estudiantes, en la medida en que aprendan a: formularse metas, organizar el conocimiento, construir significados y utilizar estrategias”*. Beltrán, (1998, p.34).

No menos interesante ha sido la evolución que ha tenido el reconocimiento por los pedagogos, del papel mediado del aprendizaje que, a nuestro criterio, encuentra su fundamentación más completa en el enfoque histórico-cultural de Lev S. Vygotski, en el que se destacan su importancia, formas y métodos de desarrollarlo, tomando como bases la “ley genética fundamental del desarrollo” y las categorías “otros” y “Zona de Desarrollo Próximo (ZDP)”.

En cuanto al aprendizaje significativo, este surgió como un intento de contrarrestar el aprendizaje memorístico - repetitivo y va dirigido a establecer las relaciones esenciales y no de modo arbitrario entre lo que debe aprenderse y lo que es conocido (lo que se encuentra en las estructuras cognitivas del alumno).

Aportes sustanciales a la teoría de aprendizaje significativo han sido los trabajos de David P. Ausubel y sus seguidores, en cuya esencia se expresa que, aprender de un modo significativo consiste en realizar un proceso

de actualización de los esquemas de conocimientos relativos a la situación en consideración, o sea, *"poder atribuirle un significado al material objeto de estudio"*. Belmont (1991, p. 62-63)

Una de las ventajas de este tipo de aprendizaje radica en sus grandes perspectivas de contribuir al logro de una mejor organización y durabilidad del conocimiento; pues, en contraposición al aprendizaje memorístico, en el que el conocimiento es necesario extraerlo de la memoria de la misma forma en que fue aprendido; con el aprendizaje significativo se extraen estructuras organizadas que reflejan las características fundamentales del objeto de estudio, y aplicando estrategias de elaboración puede obtenerse más información de esas estructuras.

Cuba, ejemplo para el mundo por sus logros educacionales, tampoco está exenta de necesarios cambios educativos a todos los niveles encaminados al logro de aprendizajes significativos por parte de los estudiantes, principalmente en el nivel superior; pues es donde se forman los profesionales que incidirán directamente en el desarrollo del país de manera inmediata, siempre con la certera guía del pensamiento de nuestro Comandante en Jefe cuando afirmara desde los primeros años de la Revolución: *"El futuro de nuestra patria tiene que ser necesariamente un futuro de hombres de ciencia"* (1960), o más recientemente: *"...y nuestro país vivirá en el futuro, fundamentalmente, de las producciones intelectuales"*. (Mayo, 2003).

La educación matemática, en aras de perfeccionar el proceso de enseñanza aprendizaje (PEA) de la matemática, ha propuesto el empleo de la resolución de problemas en tres direcciones principales: el PEA por medio de la resolución de problemas, el PEA de la resolución de problemas y el PEA para la resolución de problemas, términos estos que manejaremos por el momento de manera intuitiva y que se definen en el capítulo 1 con mayor exactitud.

El doctor Paúl Torres, citado por Díaz (2003, p. 2) plantea: *"...¿cómo puede lograrse el aprendizaje desarrollador en la enseñanza de la Matemática?De acuerdo con lo que se ha venido reflexionando no puede faltar en ella el trabajo sistemático con problemas, pues sin él la apropiación no podrá ser activa ni creadora"*.

En nuestro país han sido ampliamente difundidas las concepciones sobre la resolución de problemas matemáticos de clásicos como Werner Jungk (1982), Wolfgang Zillmer (1980) y George Polya (1986); en estas obras se describe de manera amplia y con ejemplos los procesos heurísticos que transcurren durante la búsqueda de la idea de la solución y la solución en sí de un problema, por lo que resultan útiles cuando se desarrolla un PEA de la resolución de problemas. Un rasgo de la planificación y dosificación de los sistemas de clases tradicionales, con anterioridad a esta época, fue que los problemas y los ejercicios integradores del contenido estudiados aparecían generalmente al finalizar los sistemas de clases y unidades temáticas con vistas a la fijación y aplicación del contenido.

Sin embargo, a partir de la década de los ochenta, se han tenido resultados importantes sobre “*La enseñanza basada en problemas*” que consiste en el planteo de problemas en cuyo proceso de resolución o en su resultado (la solución) se produce el aprendizaje. Se trata de resolver problemas matemáticos relacionados con el objeto de enseñanza, sin confundirse con él, y que van facilitando el nuevo aprendizaje.

Esta estrategia, en primera instancia, permite que el alumno realice conexiones entre la teoría y el mundo real; facilita que el estudiante se involucre en su propio proceso de aprendizaje, y que el profesor y los alumnos sean mediadores entre el conocimiento y el alumno, para que este utilice la teoría o los contenidos de una o más asignaturas como herramientas que le permitan identificar problemas, determinar causas, proponer y seleccionar alternativas de solución; propicia el logro de su motivación intrínseca (condición necesaria para el logro de una actitud de aprendizaje significativo), para que sea el mismo estudiante quien trate de relacionar la teoría con un problema real y de su entorno, que sea capaz de relacionar los conocimientos previos con los nuevos para construir su propio conocimiento y de esta manera lograr un aprendizaje significativo y permanente.

El estudio del papel de los problemas en la lógica y estructura del proceso docente constituye un aspecto de cardinal importancia en los fundamentos sobre el aprendizaje de la matemática en los trabajos de A. Schoenfeld (1985), Jeremy Kilpatrick (1990), Miguel De Guzmán (1993), Marie Lise Peltier (1993), Joseph Gascón (1994), Luz Manuel Santos (1995), Campistrous (1996) y otros, que no sólo se restringen al estudio de los procesos heurísticos que transcurren en la solución del problema propiamente, como la mayoría de los trabajos de G. Polya, sino que discuten sobre sus aspectos epistemológicos como base para las sugerencias pedagógicas; sobre sus principales aportes se profundiza en el capítulo 1.

No obstante, es necesario destacar que la enseñanza basada en problemas, aunque se ha aplicado en el tratamiento de diversos contenidos tanto declarativos, procedimentales como actitudinales, no se ha empleado con una debida planeación estratégica en los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual en el PEA de la Matemática Superior, campo este que consideramos fértil para su tratamiento por esta vía.

El **proceso de formación conceptual** que va de lo particular a lo general es un proceso complejo en el que intervienen varios procesos más simples, como son, los procesos de comparación, análisis-abstracción, síntesis y generalización. Para llevar a cabo un proceso como este es recomendable la selección de un conjunto de objetos particulares que al someterse a los procesos de comparación y análisis-abstracción, faciliten la selección de diferentes rasgos comunes, mediante la síntesis se agrupan estos rasgos en un conjunto (contenido del concepto) que los caracterizan y, posteriormente, con la generalización se agrupan en una clase (extensión del concepto) todos aquellos objetos analizados, o posibles nuevos objetos, que satisfagan el

conjunto de rasgos seleccionados. El proceso de formación termina con la definición del concepto, que no es más que la descripción verbal tanto de su contenido como de su extensión.

El **desarrollo conceptual**, es un proceso largo que puede enriquecerse durante toda la vida, y puede contribuirse a él, realizando caracterizaciones del concepto, determinando colecciones de propiedades que constituyan condiciones necesarias o suficientes, realizando ampliaciones de la colección de elementos conocidos, estableciendo la cardinalidad de su extensión, probando relaciones de su extensión con las extensiones de otros conceptos, etc.

Por otra parte, se ha realizado una **generalización (restricción) conceptual**, cuando se ha considerado un concepto de partida más amplio (estrecho) que el considerado inicialmente, o se han debilitado (fortalecido) algunas propiedades del contenido del concepto inicial; en este sentido resulta importante preparar el concepto para su generalización (restricción), realizar una cadena de generalizaciones (restricciones); así como, valorar la calidad de las generalizaciones (restricciones) hechas.

En el caso de la relación entre *resolución de problemas – procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual – aprendizaje activo, mediado y significativo* (RP-FDGC-AAMS) de conceptos en los diferentes niveles de enseñanza; de la entrevista a profesores y metodólogos de niveles precedentes al universitario (ver anexo # 1), del análisis de los programas y la bibliografía correspondiente se han obtenido las características por niveles que se relacionan en el epígrafe 2.2.1.4.

En esta necesaria introducción solo nos referiremos sucintamente a las principales características derivadas de estos métodos investigativos que, en el **nivel superior**, presenta esta relación.

En esta enseñanza la relación RP-FDGC-AAMS presenta deficiencias, lo cual se aprecia en el hecho que los estudiantes no participan en el proceso de formación de la mayoría de los conceptos. Una vía óptima para lograrlo es por medio del planteamiento de problemas, y sin embargo, esto no se hace, pues la mayoría de los conceptos se abordan con recursos eminentemente deductivos sin inmiscuir de manera activa a los estudiantes y sin destacar su relación con la realidad.

Los conceptos son de naturaleza abstracta y muchos poseen una extensión dinámica (como el de función, que depende del dominio que se considere); sin embargo, se lleva a cabo un tratamiento muy restringido de los mismos, al ocuparse solo de elementos particulares de su extensión.

En este nivel, solo se profundiza en el empleo de los conceptos en la solución de ejercicios semejantes a algunos ya resueltos, no se transmite una adecuada conceptualización sobre las características lógicas (extensión y contenido) fundamentales de los conceptos matemáticos. No se emplean organizadores importantes como mapas de extensiones y de proposiciones, no se logra un conocimiento sobre los diferentes

tipos de generalizaciones que se realizan -en ocasiones ni siquiera se tiene la idea de que se ha realizado una generalización-, no se dispone de criterios para determinar la calidad de las generalizaciones, se demuestran muchos teoremas y sin embargo, esta importante acción se ve desligada del proceso de desarrollo conceptual. Por otra parte, la formación de egresados de la Licenciatura en Matemática capaces de aplicar eficientemente sus conocimientos en esferas de la producción resulta primordial para el país, sobre este particular el titular de Ciencia y Técnica del Ministerio de Educación Superior José Luis García Cuevas durante la clausura de la Escuela de Verano del 2004 en la Universidad de la Habana donde intervinieron estudiantes y profesores de la Licenciatura en Matemáticas de todo el país, expresó: *“...resulta imprescindible la formación adecuada de especialistas en Matemática que permitan fortalecer el trabajo de grupos multidisciplinarios de investigadores que permitan dar el salto que esperamos, ...que sepan transferir con eficiencia lo que aprendieron a situaciones nuevas, libres de mediocridad, que es de lo que adolecen muchos egresados en este momento; también deben recibir una preparación pedagógica en su currículo para que sepan transmitir sus conocimientos con eficiencia. El matemático no se ha ganado el reconocimiento que en realidad debe tener por derecho propio; por eso, cuando se forman grupos multidisciplinarios, muchas veces no se piden matemáticos...”*

Con el objetivo de analizar cómo se manifiestan el tratamiento de algunos conceptos matemáticos y el aprendizaje activo, mediado y significativo en la carrera Licenciatura en Matemáticas, se aplicaron algunos instrumentos que permitieron apreciar la existencia de algunas dificultades.

Se revisaron tesis doctorales como Díaz (2003), Rebollar (2000), las que utilizan el enfoque de “la enseñanza basada en problemas”, Vázquez (1998), Delgado (1999), Alonso (2000) que se basan en “la enseñanza de la resolución de problemas”, Arteaga (2001), propone el empleo de la enseñanza problémica para el desarrollo de la creatividad, entre otras. Además, se aplicó una entrevista a profesores (ver anexo 2) que han impartido docencia en esta carrera y una encuesta a los estudiantes de segundo año de la Licenciatura en Matemática durante la segunda semana del segundo semestre del curso 03-04, los que conformaron la muestra fundamental de investigación (ver anexo 3).

Resumiendo y formalizando algunas de las ideas aquí expresadas, según la literatura consultada y los resultados obtenidos durante ocho años de investigación en el Seminario de Matemática Educativa, adscrito al Centro de Estudios de Educación en la Universidad Central de Las Villas, se tiene, sobre la relación RP-FDGC-AS, los resultados siguientes:

1. Son muchos los conceptos de varias disciplinas susceptibles de ser formados mediante el proceso de comparación de objetos particulares (vía inductiva), sin embargo esto no se hace.

2. Dada la naturaleza abstracta de los objetos y la infinitud de la extensión de los conceptos matemáticos que se tratan en esta carrera, no existe motivación para establecer su comparación y no se emplean problemas adecuados para lograr esto.
3. Los estudiantes no son conducidos a la determinación de los rasgos esenciales y, consecuentemente, no sienten la necesidad de realizar, y no realizan, el proceso de abstracción de rasgos no esenciales.
4. No tienen conciencia del proceso de síntesis de los rasgos esenciales y de su consideración en un determinado conjunto (el contenido).
5. En la mayoría de los casos, el tratamiento conceptual parte de su definición; esto se debe, principalmente, al presupuesto de tiempo. No obstante, los estudiantes deben conocer el proceso de formación inductivo, por lo que resulta necesario implementarlo con algunos conceptos a partir de la resolución de problemas.
6. No existe un conocimiento acabado sobre aspectos esenciales relativos al trabajo con conceptos como son: en qué consisten los procesos en que se subdivide el tratamiento conceptual (formación, desarrollo y generalización), cuáles son las características lógicas del concepto (contenido y extensión), cuáles son las operaciones lógicas que se pueden realizar con conceptos (definición, clasificación, generalización), etc.
7. Durante los procesos de desarrollo y generalización conceptual, no se llevan a cabo suficientes acciones que traigan consigo un conocimiento más acabado del concepto en estudio.
8. En ocasiones, la articulación entre los conocimientos que tiene el estudiante con los nuevos no se lleva a cabo significativamente, pues no se emplean adecuados organizadores (como mapas de extensiones, de contenidos, diagramas) encaminados a modificar las estructuras mentales de los estudiantes que permitan organizar el contenido en estructuras relacionadas más fáciles de recordar a largo plazo, salvo el olvido de aspectos secundarios.
9. Muchas veces no se logra la necesaria motivación intrínseca en los alumnos y por ende, la actitud de aprendizaje significativo para abordar situaciones de aprendizaje, por medio de la resolución de problemas cercanos a los intereses del matemático, que traigan consigo una implicación afectiva del alumno, lo que da al traste con que solo se esfuercen en su estudio para salir bien en las evaluaciones de las asignaturas.
10. El sistema de evaluación generalmente está encaminado a la reproducción de contenidos aprendidos por medio de evaluaciones orales y escritas (frecuentes, parciales y finales), priorizando la función sumativa de la misma y no a la realización de la evaluación formativa, suscitando escenarios de autoevaluación y coevaluación, no solo de contenidos, sino de la calidad de los procesos que han intervenido en el aprendizaje.

Por otra parte, existe una conciencia generalizada de que no todos los conceptos matemáticos en la Licenciatura en Matemática deben ser formados inductivamente por medio de la resolución de problemas, ni en todos los conceptos pueden emplearse los mejores organizadores de la información (porque conceptos previos no fueron formados significativamente y no se tienen debidamente articulados en sus estructuras mentales), pero se reconoce que sería provechoso emprender una investigación pedagógica en la que se valorara la efectividad de una estrategia de formación, desarrollo y generalización conceptual basada en la resolución de problemas aplicada a varios conceptos de la carrera, con el objetivo de lograr un perfeccionamiento de estos procesos y un aprendizaje verdaderamente significativo durante los mismos.

Por todo esto, con la presente investigación se pretende resolver el **problema** siguiente: ¿Cómo puede perfeccionarse el proceso de enseñanza - aprendizaje de los procesos de formación, desarrollo y generalización en aquellos conceptos matemáticos cuya formación se hace por vía inductiva?

A partir del cual se considera como **objeto** de investigación el proceso de enseñanza – aprendizaje de algunas asignaturas de la carrera Licenciatura en Matemática, y como **campo de acción** los procesos de formación, desarrollo y generalización de los conceptos matemáticos.

Por tanto, nos proponemos como **objetivo general** de la investigación: diseñar una estrategia didáctica basada en la resolución de problemas que contribuya a elevar la calidad de los procesos de formación, desarrollo y generalización de conceptos matemáticos.

Para facilitar y orientar el desarrollo de la investigación se proponen las **preguntas científicas** siguientes:

1. ¿Qué referentes teóricos permiten fundamentar la estrategia didáctica?
2. ¿Cómo diseñar la estrategia didáctica basada en la resolución de problemas para llevar a cabo los procesos de formación, desarrollo y generalización de conceptos matemáticos en la Licenciatura en Matemática, encaminada a elevar la calidad de estos procesos?
3. ¿Qué acciones pueden llevarse a cabo para implementar la estrategia diseñada?
4. ¿En qué clase de conceptos puede ser aplicable esta estrategia?
5. ¿Cómo puede valorarse la contribución de la estrategia didáctica implementada al logro de un aprendizaje activo, mediado y significativo de los conceptos escogidos?

Estas interrogantes científicas condujeron a las **tareas**:

1. Determinación de los referentes teóricos, en cuanto a:
 - a. Posición psicológica y pedagógica a asumir.
 - b. Características de la enseñanza basada en la resolución de problemas.

- c. Características de los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual en la enseñanza superior.
- d. Características de los aprendizajes activo, mediado y significativo.
- e. Características y elementos de una estrategia didáctica.

Así como los elementos que compatibilizan y complementan unos aspectos con otros de los considerados anteriormente.

2. Fundamentación y diseño de la estrategia didáctica que se propone.
3. Validación de la estrategia didáctica propuesta a través de un curso de Seminarios de Problemas en una muestra de estudiantes de la Licenciatura en Matemática por medio de conceptos con potencialidades para ello.
4. Valoración de la calidad de la estrategia propuesta por medio de los métodos previstos.

Durante el desarrollo de la investigación se utilizaron diversos **métodos de investigación**, entre los que se encuentran:

Del nivel teórico:

- Analítico-sintético, inductivo-deductivo y el enfoque sistémico para estudiar el conocimiento matemático y el PEA de la Matemática en el nivel universitario; para el estudio de las fuentes de información y extraer de ellas regularidades y tendencias relacionadas con el tema de investigación; así como, para diseñar la estrategia y concebir el sistema de acciones.
- Método de análisis histórico y lógico para analizar el comportamiento del problema de la investigación en los diferentes enfoques estudiados y la evolución de las soluciones propuestas.
- La modelación, para la elaboración del modelo de programa heurístico general en la resolución de problemas para los procesos del tratamiento conceptual en la Licenciatura en Matemáticas.

Del nivel empírico:

1. La encuesta y la entrevista para:
 - Buscar hechos que fundamentan la existencia del problema de investigación en el objeto.
 - Conocer la opinión de distintos profesionales de la Educación sobre la relación que existe entre enseñanza basada en la resolución de problemas, procesos de formación, desarrollo y generalización de conceptos matemáticos y aprendizaje activo, mediado y significativo.
 - Obtener información que permita medir indicadores de calidad de la estrategia implementada.
2. La observación, para apreciar el desempeño de los estudiantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje y medir indicadores de calidad de la estrategia.

3. Pruebas de contenido para valorar el nivel de aprovechamiento de los alumnos durante la implementación de la estrategia.

Del nivel estadístico.

1. Valoración de la consulta a especialistas para la evaluación de la calidad del diseño de la estrategia implementada.
2. Métodos de la Estadística Descriptiva para caracterizar el comportamiento de indicadores previamente definidos en muestras de estudiantes, profesores y especialistas.

Los **aportes teóricos** de la tesis son:

- ◆ Teniendo en cuenta que los estudiantes universitarios, según los programas de la Matemática de la enseñanza general, han pasado por las fases y etapas que señala Vygotski para la formación conceptual de niños y adolescentes, se describen todos los subprocesos (comparación, análisis-abstracción, síntesis y generalización) que componen el proceso complejo de formación inductiva de conceptos matemáticos en la enseñanza universitaria.
- ◆ Se establecen las diferencias que presenta el proceso de desarrollo conceptual en la enseñanza universitaria respecto a niveles precedentes y se propone un sistema de acciones acorde con estas especificidades.
- ◆ Tomando como base la categoría Zona de Desarrollo Próximo, se emplea la resolución de problemas para facilitar la participación de los estudiantes en los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual en la enseñanza universitaria.
- ◆ Por primera vez se diseña una estrategia que tenga en cuenta las características de la extensión de los conceptos matemáticos en la enseñanza superior, dadas porque:
 - La extensión de muchos conceptos matemáticos en esta enseñanza, a diferencia de los conceptos de la enseñanza general, puede tener diferentes cardinalidades (nula, finita e infinita).
 - La necesidad de realizar la ampliación de la colección de elementos conocidos de la extensión agregando colecciones de elementos conocidos, no solo elementos particulares, como usualmente se hace.
- ◆ Un programa heurístico general para la construcción de árboles de problemas que faciliten los procesos didácticos que intervienen en la solución del problema complejo de formación (desarrollo o generalización) de un concepto matemático.

La **significación práctica** de la investigación está dada porque:

- ◆ La aplicación de la estrategia durante los procesos de formación, desarrollo y generalización en los conceptos con potencialidades para ello, garantiza la participación de los estudiantes en estos procesos, el logro de un aprendizaje significativo y una mayor calidad de los mismos.
- ◆ Se explican las potencialidades que posee la estrategia para contribuir a una mejor preparación matemática y metodológica de los profesores en dos sentidos:
 - En el tratamiento de conceptos del postgrado.
 - En la apropiación de un sistema de acciones para llevar a cabo el tratamiento de conceptos con más calidad en sus grupos de clase.

En cuanto a la **estructura de la tesis**, esta consta de las siguientes **partes**: introducción, tres capítulos, conclusiones, recomendaciones, bibliografía y anexos.

El **primer capítulo** se dedica a la fundamentación teórica del trabajo por medio de la exposición de los fundamentos filosóficos, lógicos, psicopedagógicos y didácticos, donde se escoge como paradigma a seguir en cuanto a teoría de aprendizaje al “Enfoque Histórico Cultural”, sobre el que se fundamentan los aprendizajes activo, mediado y significativo y se resalta la importancia de la enseñanza basada en la resolución de problemas para la consecución del objetivo propuesto.

El **segundo capítulo** comienza con una fundamentación de la estrategia que se presenta, donde se contextualizan los aspectos tratados en el capítulo 1 a la relación entre: la enseñanza basada en la resolución de problemas - procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual – aprendizaje activo, mediado y significativo; posteriormente se diseña una estrategia didáctica para llevar a cabo el estudio de conceptos matemáticos con un proceso de formación inductivo, en la carrera Licenciatura en Matemática por medio del planteamiento y la resolución de problemas, para de esta manera dar respuesta al problema científico de la investigación, y se valoran sus perspectivas.

El **tercer capítulo** está dedicado a la validación de la estrategia didáctica por medio de dos conceptos particulares y al análisis de los resultados obtenidos con su implementación durante el curso escolar 2003-2004 en una muestra de estudiantes de la carrera Licenciatura en Matemática, teniendo como antecedente un pilotaje realizado el curso anterior en una muestra de estudiantes de Licenciatura en Matemática de la Universidad Autónoma de Coahuila, Saltillo, México, que sirvió para rediseñar y perfeccionar la estrategia.

CAPITULO 1

FUNDAMENTOS DEL PROCESO DE ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS

1.1 Fundamentos filosóficos.

Resulta conocido **el problema fundamental de la Filosofía** citado por primera vez de manera explícita, por el clásico del materialismo dialéctico e histórico, Federico Engels, relativo a la relación existente entre el ser y el pensar por medio de las interrogantes ¿Qué es lo primario, el ser o el pensar? ¿Es cognoscible el mundo?

Desde la perspectiva materialista dialéctica, asumida por la generalidad de los pedagogos investigadores cubanos, este problema es satisfactoriamente resuelto, asumiendo que lo primario es el ser y que el mundo sí es cognoscible; a diferencia de los idealistas que consideran al pensar como primario; entre los que se encuentran: los agnósticos, que niegan la cognoscibilidad del mundo y los escépticos, que dudan sobre la misma.

No menos conocida entre la comunidad de pedagogos de la Matemática es la **transferencia que posee este problema fundamental de la filosofía a esta ciencia** particular, que estudia la relación existente entre los conocimientos matemáticos con la realidad objetiva.

Ante este problema, la posición idealista otorga la primacía al conocimiento matemático, pues considera que lo primario es el conocimiento; un ejemplo representativo de esta posición, es la escuela pitagórica cuyos trabajos con los números de diferentes campos llegaron a apologizar a tal punto que los consideraban como primarios para cualquier intento de conocer la realidad; a decir de Aristóteles *“Los pitagóricos pensaron que sus principios eran los de todas las cosas”*, o de Filolaos (400 a.e.), primer pitagórico del que se tienen escritos importantes, *“Todas las cosas accesibles al conocimiento poseen un número, puesto que sin él no podemos comprender ni conocer nada”*. Casanova (1965, p.15).

Desde la antigüedad, esta situación se fue revirtiendo, como se aprecia en el debate Platón (428-347 a.e.) – Aristóteles (384-322 a.e.), en el que Platón, un remoto precursor del idealismo, *“...postulaba la existencia de un universo de las ideas matemáticas que no son sólo más inteligibles con claridad, sino también más reales que los reflejos transitorios, imperfectos y en esencia ilusorios de los diferentes objetos que se perciben en la experiencia común”* Ver Encarta 2005 (idealismo / Platón), dejando ver la atribución de existencia independiente y previa a la realidad que le daba a los objetos matemáticos abstractos; en cambio, en la escuela de Aristóteles se ofrece un legado materialista para el desarrollo de todas las ciencias, especialmente en la Matemática, en el que lo primario es la observación, análisis de los fenómenos de la realidad, su posterior síntesis, abstracción y/o generalización que den lugar a la elaboración de resultados científicos. Ver Encarta 2005 (ciencia / Aristóteles).

Por ello, hoy se afirma que en la Academia de Platón se subrayaba *el razonamiento deductivo y la representación matemática*; y en el Liceo de Aristóteles primaban *el razonamiento inductivo y la descripción cualitativa*; no obstante, se reconoce que ambos métodos son propulsores del desarrollo científico, señalando la necesidad de la constatación práctica que necesita el primero.

Desde la óptica materialista dialéctica esta situación queda esclarecida en la actualidad como se aprecia desde la propia definición de la Matemática ofrecida por Engels “...es la ciencia que tiene como objeto las formas espaciales y las relaciones cuantitativas del mundo real”; por Kolmogorov “...es aquello mediante lo cual la gente dirige la naturaleza y a sí misma” y la metáfora empleada por Willard Gibbs “...Las Matemáticas es una lengua”. Ver Jurguin (1973, p.402), en las que se aprecia que el conocimiento matemático transita de la contemplación viva, al pensamiento abstracto y de ahí a la práctica.

Ejemplos matemáticos concretos de esta evolución existen disímiles; específicamente dos ramas tan amplias y aplicadas como el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral tuvieron su origen en muchos problemas de la práctica en la época de su surgimiento. No obstante, es necesario destacar que no toda teoría matemática, surge como producto de la práctica, sino del fruto del empleo del método hipotético – deductivo sobre teorías ya existentes; estas son las llamadas investigaciones en matemáticas puras, pero que finalmente, después de un tiempo (a veces prolongado) encuentran su aplicación en la práctica.

Un ejemplo de esta situación es el surgimiento y evolución intramatemáticos que tuvo la Teoría de los Grupos. Lagrange y Galois dieron los primeros pasos al elaborar la teoría de los grupos de sustituciones para la determinación de las condiciones bajo las cuales una ecuación algebraica de cualquier grado puede ser resoluble en radicales. Posteriormente, con los trabajos de Cayley se obtuvo la definición general abstracta de grupo. Este desarrollo es enriquecido con los trabajos de Lie sobre los grupos continuos; todo esto en un contexto matemático puro. No fue hasta 1890, con los trabajos de Fiódorov en que ve la luz la primera aplicación práctica de la teoría de grupos a la cristalografía, llegando a clasificar todas las redes espaciales cristalinas posibles; en nuestros días, esta teoría se ha convertido en un potente medio de investigación en la Física Cuántica.

Un aparte importante en esta problemática requiere la fundamentación lógica de los conceptos matemáticos, desde la óptica de la Lógica Dialéctica.

Fundamentos lógicos.

En esta dirección debemos partir, aunque brevemente, de los importantes resultados que ofrece la filosofía marxista leninista sobre la **Teoría del Conocimiento**. A continuación ofrecemos una síntesis sobre algunos aspectos de esta teoría, que puede encontrarse con más detalle en Guetmánova (1989 y 1991), Gorsky y

Tavants (1970), Casanova (1965), Popov y Pujnachev (1991), Chupajin (1964), así como los trabajos y tesis doctorales realizados por miembros del Seminario de Matemática Educativa de la UCLV, durante los últimos diez años, en materia de tratamiento conceptual; entre los que pueden citarse: Mederos y otros (1997), González, B. (2001), Martínez (2003), Mederos y Martínez (2000a, 2000b, 2001, 2004).

En Guetmánova (1991, p.62) se define el **conocimiento** como *“reflejo dialéctico de la realidad en la conciencia humana, movimiento del pensamiento de la ignorancia al saber, de un saber incompleto e inexacto a uno más completo y más exacto”*.

El conocimiento se realiza por medio de dos formas fundamentales, **el conocimiento sensitivo y el pensamiento abstracto o racional**.

El conocimiento sensitivo se refiere a las diferentes sensaciones que pueden experimentarse por los órganos de los sentidos (vista, oído, olfato, tacto, gusto); este se manifiesta por medio de *sensaciones, percepciones y representaciones*; las dos primeras permiten reflejar algunas propiedades de los objetos, por ejemplo, sensación de lo dulce, lo verde, lo redondo, percepción de algún animal, etc., la tercera constituye la imagen sensitiva de un objeto no percibido en el momento dado, pero que se percibió antes, como imágenes de personas, paisajes, etc. Resulta evidente que mediante este conocimiento no se llega a conocer la esencia de los objetos y fenómenos, a diferencia del pensamiento abstracto en el que sí se logra este objetivo.

Mediante el **pensamiento abstracto** el hombre descubre las leyes del mundo y las tendencias de desarrollo de los acontecimientos, analiza lo universal y lo particular en cada objeto. Sus formas esenciales son: **el concepto**, el juicio y el razonamiento.

El concepto se define en Guetmánova (1991, p.58) como *“forma del pensamiento abstracto que refleja los indicios sustanciales de una clase de objetos homogéneos”*; en Ballester y otros (1992, p.281) como *“el reflejo de una clase de individuos, procesos, relaciones de la realidad objetiva o de la conciencia (o el reflejo de una clase de clases), sobre la base de sus características invariantes”*; en Ausubel y otros, (2000, p.86), *“...objetos, acontecimientos, situaciones o propiedades que poseen atributos de criterios y que están diseñados en cualquier cultura dada mediante algún signo o símbolo aceptado”*. Más adelante se realizan observaciones críticas sobre estas definiciones.

El juicio es definido en Guetmánova (1991, p.147) como la *“forma del pensamiento abstracto en que se afirma o se niega algo respecto a los objetos, los vínculos entre un objeto y sus propiedades o las relaciones entre objetos”*.

El razonamiento es entendido por Guetmánova (1991, p.259) como *“la forma del pensamiento mediante la cual, y a base de ciertas reglas de inferencia, de uno o varios juicios verdaderos se obtiene un nuevo juicio que se infiere de aquellos de modo necesario o con determinado grado de probabilidad”*.

De estas tres definiciones resulta evidente que **una de las funciones de los conceptos** y los juicios es la de ser condición necesaria para la comprensión de los juicios y los razonamientos, respectivamente; por ende, en

la base de esta cadena están los conceptos como primer eslabón necesario para concatenar los otros dos; aunque es necesario señalar que los juicios y razonamientos que se hacen sobre conceptos ya conocidos, son los que conducen a la formación de nuevos conceptos.

A continuación, proponemos y justificaremos una nueva definición del concepto de “concepto”, a la cual hemos llegado en nuestro seminario: *“el concepto es un modelo mental generalizado formado por un par de colecciones; una colección de determinados rasgos de objetos, propiedades de objetos, o de relaciones entre objetos, y la otra colección constituida por los objetos con esas características”*.

Las observaciones siguientes, nos permiten justificar esta nueva definición:

1. Lo que tiene lugar en la mente del individuo es un modelo del objeto o conjunto de objetos y no un reflejo como afirman la mayoría de las definiciones, pues según nuestro parecer, coincidente con el de Davidov, (1981, p. 313) la definición de modelo más aceptable es la dada por Shtoff, (1966, p.19): *“Por modelo se entiende un sistema concebido mentalmente o realizado en forma material, que, reflejando o reproduciendo el objeto de la investigación, es capaz de sustituirlo de modo que su estudio nos dé una información sobre dicho objeto”*, que como se aprecia, incluye tanto el reflejo, como la reproducción del objeto.
2. Se propone la definición de concepto como un par de clases, ya que de esta forma cada clase se corresponde con una de las dos características lógicas más importante del concepto, la clase de propiedades (contenido) y la clase de los objetos (extensión), pues en las definiciones citadas solo se refieren al conjunto de las propiedades que cumplen los objetos.

Profundizando en las **funciones del concepto en el pensamiento lógico actual**, tenemos que este realiza una doble función. La **primera función** del concepto en el pensamiento, la más simple (expresada anteriormente en la cadena conceptos - juicios - razonamientos), consiste en ser condición necesaria para la comprensión de los juicios (proposiciones). Esta función se estudia por medio de la lógica formal; donde lo principal no es el concepto, sino su relación concreta con sus propiedades o la relación entre diferentes clases de objetos.

Esta relación aparece en el pensamiento en forma de proposiciones. El concepto desempeña este papel cuando en la idea que se tiene del objeto, aparecen algunas propiedades de éste, casi siempre en número reducido, que lo distinguen de los demás objetos de una clase.

La segunda función del concepto está relacionada con la formación de conceptos en que se exprese la suma de los conocimientos científicos a que se ha llegado en cada etapa del desarrollo de una ciencia, de forma tal que se obtenga un resultado lo más acabado posible.

El estudio de los conceptos en cada área del conocimiento científico tiene objetivos más amplios que los necesarios para que el concepto realice su primera función. El concepto como resultado es una idea compleja, es la suma de un conjunto de proposiciones e inferencias anteriores que determinan tanto elementos como propiedades de éste. Corresponde a cada ciencia particular el desarrollo de un estudio eficiente para lograr, un conocimiento cada vez más profundo de los conceptos de la misma.

Un problema importante de la didáctica consiste en el diseño de actividades que faciliten que los estudiantes aprendan a ampliar sus aproximaciones conceptuales cada vez más durante su carrera y en toda su vida. Tal es uno de los sentidos de nuestra estrategia didáctica, en la que se deja “abierto” el problema del desarrollo conceptual de uno de los conceptos que se validan (función convexa) y se mencionan acciones futuras para enriquecerlo hasta conformar toda un área del conocimiento matemático dentro de la Optimización (Análisis Convexo).

Para ampliar sobre las funciones lógicas de los conceptos se pueden utilizar Gorski y Tavants, (1970) y Guetmanova, (1989).

A continuación, expondremos el carácter dialéctico que poseen **lo universal y lo singular en el concepto**.

El concepto es una *forma singular de reflejo* de los objetos y las cosas del mundo material, o ya expresados en forma abstracta, y de las leyes de su movimiento. El concepto no refleja todas las propiedades del objeto, ni todo el objeto como es, sino sus propiedades, rasgos y relaciones esenciales, así como la ley de su movimiento y desarrollo; es por ello que la singularidad del concepto está dada en que su contenido no coincide ni debe coincidir con el contenido de ningún otro concepto.

Por otra parte, el concepto refleja la naturaleza universal de los objetos que le corresponden. La *universalidad del concepto* tiene su propia base objetiva, la cual está constituida por la existencia de propiedades y nexos generales—esenciales en el mundo material y de leyes objetivas de la realidad exterior. Esta relación con la realidad que posee el concepto puede manifestarse por medio de algunos de los eslabones de una cadena de conceptos anteriormente formados a la cual debe su origen; acorde con estos planteamientos, Chupajin en su libro “Problemas de la teoría del concepto” página 24 plantea que la universalidad del concepto está dada por “*lo idéntico en las cosas*”, donde también expresa que esta identidad es relativa “*...esta identidad puede ser diversa: puede manifestarse en la de ciertas propiedades aisladas, o en la de algunas propiedades fundamentales que constituyen en su conjunto la esencia de la cosa dada*”.

Hay quienes aceptan que en el concepto se refleja lo universal y de este hecho infieren, erróneamente, que en el concepto se pierde todo vínculo entre lo universal y lo singular. Lo singular existe en la génesis del concepto;

ya que para formar un concepto, independientemente de la vía que se utilice, se debe investigar (interactuar) con muchos fenómenos, hechos y objetos singulares.

Sobre la dialéctica de lo universal y lo singular en el concepto, en Chupajin (1964, p.25-26) puede leerse: “...la dialéctica de estas categorías consiste en que lo universal es, a la vez y por sí mismo, un contenido determinado, ...en la realidad lo aislado, lo singular, no existe sin lo particular y lo universal, y que lo universal y lo particular existen en lo individual...”

A continuación presentamos algunas observaciones gnoseológicas y otras pedagógicas encaminadas a ilustrar la presencia de este aspecto en la estrategia que proponemos:

La universalidad con su base objetiva (reflejo de lo general–esencial de la realidad) constituye un carácter peculiar del concepto.

Lo singular existe en la génesis del concepto.

Una de las fuentes gnoseológicas más importantes del idealismo es la separación de lo universal y lo singular, separación que conduce al divorcio entre el contenido del concepto y el mundo que existe objetivamente.

Uno de los problemas fundamentales en el proceso de enseñanza–aprendizaje de los conceptos se presenta cuando, en el estudio de su proceso de formación, desarrollo y generalización, no se es consecuente con la relación de lo universal con lo singular en el concepto. De forma muy concreta, podemos asegurar que hay que desarrollar un adecuado *proceso de formación conceptual en el que se resalte el papel de objetos particulares*, y un adecuado proceso de desarrollo que contribuya a que se enriquezcan los elementos de la extensión del concepto de modo que pueda volverse nuevamente a la realidad, considerando ahora los objetos de donde se partió, y mucho más, formando una clase con muchos vínculos, como se ilustra en la figura 1.

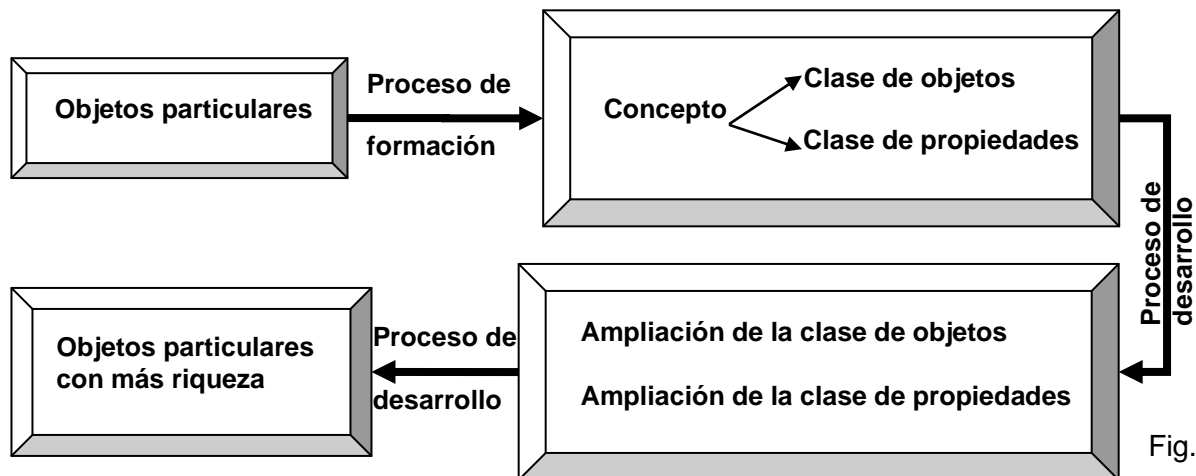


Fig. 1

Sobre los **componentes lógicos del concepto**: *contenido* (conjunto de propiedades esenciales del objeto modelado en el concepto) y *extensión* (clase de modelos de objetos que dicho concepto abarca) y otros

aspectos relacionados con estos componentes ya se ha profundizado en varias tesis doctorales y libros de Lógica.

Específicamente, sobre la relación existente entre el contenido y la extensión de un concepto está muy generalizado el planteamiento de una relación incorrecta “**ley de la relación inversa entre la extensión y el contenido**”, un ejemplo donde este planteamiento se realiza es el libro Guetmánova (1991, p.59) en el que se formula así “*cuanto más amplio sea el contenido del concepto, más estrecho será su volumen, y viceversa*”.

Este enunciado no es correcto; para demostrar esta afirmación en primer lugar, dejemos claro que los términos “*amplio*” y “*estrecho*” se refieren a *mayor* y *menor* cantidad de elementos (ya sean de propiedades, en el caso del contenido, o de objetos, en el caso de la extensión), respectivamente, pues es la única acepción que pueden tener al incluirse en la formulación de la supuesta ley, expresiones como “*volumen estrecho*”.

En segundo lugar, expondremos un contraejemplo que no satisface la ley; que al hacer el contenido más amplio (más propiedades), la extensión no se hace más estrecha, sino que se mantiene igual.

Contraejemplo 1: Consideremos el conjunto de propiedades:

- 1) Es un cuadrilátero.
- 2) Es un paralelogramo.
- 3) Posee un ángulo recto.
- 4) Posee dos pares de lados opuestos paralelos.

El concepto de **Rectángulo** puede definirse como (R, P_1) o (R, P_2) , donde R es la colección de todos los rectángulos, $P_1 = \{2, 3\}$ y $P_2 = \{1, 3, 4\}$; se aprecia que, a pesar de ser el contenido P_2 más “amplio” que P_1 , la extensión R se mantiene igual.

En tercer lugar, en el anexo 4 se expone el contraejemplo 2 apoyado en el concepto de métrica, central en los cursos de Análisis Matemático, que tampoco satisface la ley; que al ampliar el contenido, la extensión no se hace más estrecha, sino más amplia.

Al respecto, consideramos que esta opinión generalizada se debe, entre otras razones:

- Al poco empleo de la sustitución de varias propiedades del contenido por una propiedad equivalente o más fuerte; en este caso se mantiene la extensión o se reduce, respectivamente; esto indica que se puede disminuir la cantidad de propiedades del contenido y mantenerse o disminuir la extensión.
- Al desarrollo de un estudio conceptual deficiente; pues si se estudiaran diferentes definiciones de un mismo concepto en las que se utilicen contenidos con diferentes cantidades de propiedades, se evitaría este error.

Una **reformulación** de esta ley de la razón inversa entre el contenido y la extensión de un concepto puede ser:

“Cuanto más fuerte sea el contenido de un concepto, más estrecha será su extensión y, recíprocamente, cuanto más débil sea el primero, más amplia será la segunda”.

Entendiendo las relaciones:

- Entre los contenidos: “fuerte” (“débil”) como P_1 es más fuerte (más débil) que P_2 si y solo si $P_1 \Rightarrow P_2$ ($P_2 \Rightarrow P_1$).
- Entre las extensiones: “amplia” (“estrecha”) como E_1 es más amplia (más estrecha) que E_2 si y solo si E_1 tiene más elementos que E_2 (E_1 tiene menos elementos que E_2).

Además de la interpretación errónea antes expuesta sobre la relación entre el contenido y la extensión de un concepto existen **otras interpretaciones erróneas del contenido y de la extensión**, como son:

- Muchas veces se considera erróneamente el contenido como el propio objeto, como algo estancado, invariable y separado de otros rasgos no esenciales.
- En el PEA de conceptos, muchas veces se da preferencia al trabajo con el contenido, llegándose casi a absolutizarlo. Esto tiene consecuencias gnoseológicas negativas, pues impide llegar conocer el otro componente tan importante como el contenido: la extensión; esto también acarrea consecuencias negativas desde el punto de vista psicopedagógico, pues se desarrollan sólo habilidades de carácter lógicas y no se aprovechan las facilidades que proporciona el estudio de la extensión para el desarrollo de la creatividad y la intuición.
- En algunas ocasiones, cuando se desarrolla un concepto (por el momento manejaremos el término “proceso de desarrollo conceptual” de manera intuitiva) que se ha formado directamente de objetos de la realidad, no queda claro que a partir del contenido se pueden deducir muchas otras propiedades del concepto que son modelos de rasgos y propiedades de los objetos reales que modela; y que sin pasar por el razonamiento abstracto son muy difíciles de describir.
- Ocurre en ocasiones, que se reduce el contenido a una acumulación de propiedades, ocultándose el hecho que lo constituyen propiedades, que modelan en el nivel del pensamiento y de la ciencia, rasgos de los objetos reales con características especiales que están dadas porque la clase de sus modelos, (el contenido), permite deducir todos los modelos de todos los rasgos de los objetos reales que dependen de esos rasgos con características especiales.
- Por otra parte, es precisamente el contenido y las propiedades que de él se deducen, los que facilitan la determinación de cuando un objeto nuevo pertenece a la extensión del concepto.

También son resultados lógicos importantes, los que se encuentran en los textos ya citados y en los obtenidos y difundidos por miembros de nuestro seminario investigativo mediante las tesis doctorales González, B. (2001) y

Martínez (2003), y por los artículos Mederos y Martínez (2000a, 2000b, 2001, 2004) y Mederos y otros (1997), entre los que se encuentran:

- La consideración de un concepto como un par (E,C), donde E es la extensión y C, el contenido. Ver González (2001, p.41) y Martínez (2003, p.18-19).
- Operaciones lógicas y requisitos de las mismas a realizar con el concepto (definición, clasificación, restricción, generalización). Ver Martínez (2003, p.19-24).
- Clasificación de los conceptos por la cantidad de elementos de su extensión (de extensión vacía, conceptos singulares y conceptos universales). Ver Guetmánova (1991, p.59).
- Clasificación de los conceptos por la relación entre sus extensiones (Subordinante, subordinado, equipotentes, cruzados, cosubordinados, contradictorios, contrarios). Ver Guetmánova (1991, p.267).

Un aspecto lógico importante que la literatura tradicional no ha deslindado y que, proponemos como aporte teórico de la tesis es, la determinación de los subprocesos que tienen lugar durante **los procesos de: formación inductiva, desarrollo y generalización de los conceptos matemáticos**. Por ser este aspecto crucial en la fundamentación de la estrategia que se propone, el mismo será incluido en el capítulo 2.

Queremos culminar este epígrafe con una frase que sintetiza ideas de P. V. Kopnin en su libro “Lógica Dialéctica”, *“La lógica formal estudia a los conceptos como productos “acabados” del pensar, relativamente fijos, estáticos. Pero en realidad los conceptos no son definitivos y absolutos, cambian, se desarrollan y van proporcionando un reflejo más adecuado de la realidad. En la lógica dialéctica se pone de manifiesto la flexibilidad, interconexión y transiciones de los conceptos”*. Díaz (2003, p.15), la cual nos sugiere una pauta a seguir, sobre todo, en lo relativo a las perspectivas que brinda la estrategia para el proceso de desarrollo de los conceptos durante toda la vida.

1.3 Fundamentos psicopedagógicos.

1.3.1 Fundamentos del aprendizaje activo y mediado.

La concepción de aprendizaje que compartimos y que nos ha servido de pauta a seguir, tanto en el ámbito docente como el investigativo, ha sido **El Enfoque Histórico Cultural (EHC)**, que tuvo una acertada continuidad en la **Escuela Soviética de Teoría de la Actividad**.

Lev Semiónovich Vygotski (1896-1934), fue un psicólogo soviético que elaboró su teoría, génesis del EHC, entre 1924 y 1934. Debido a su prematura muerte por tuberculosis cuando tenía sólo 38 años, se vio truncada su valiosa obra, la cual ha sido enriquecida y ha ganado gran número de adeptos en las comunidades pedagógicas durante los últimos tiempos.

La teoría psicológica de Vygotski se fundamenta en el marxismo. Él consideraba, a diferencia de Piaget, que *más importante que estudiar el producto del desarrollo es estudiar el proceso que lleva a ese producto*; lo cual

está en total correspondencia con el planteamiento del materialismo dialéctico relativo a que los fenómenos hay que estudiarlos como procesos en desarrollo. Consecuentemente, critica las teorías psicológicas que se basan en estudiar las capacidades ya desarrolladas del alumno.

La escuela soviética, en la que, además de Vygotski, pueden citarse a Luria, Leontiev, Rubinstein, Galperin, Talyzina y muchos otros, considera que el psiquismo y la conducta intelectual adulta son el resultado de la influencia social en el organismo de cada individuo. En definitiva, es el ser social el que crea la conciencia.

A continuación profundizaremos en los **aportes de Vygotski** a la educación y en la actualización y ampliación que ha tenido su teoría, especialmente con el desarrollo de la **Escuela Soviética de Teoría de la Actividad**. Estos aportes constituyen gran parte de los fundamentos psicopedagógicos de nuestro trabajo.

Una de las ideas fundamentales de la teoría de Vygotski es que todas las funciones mentales superiores del individuo se originan en la vida social y se derivan de la internalización de las relaciones sociales. La importancia de esta idea en la educación y, sobre todo, en la educación escolar es enorme.

Otras ideas de mucha importancia en esta dirección, son el carácter prospectivo del desarrollo y su relación con el concepto (categoría) Zona de Desarrollo Próximo (ZDP), la relación entre desarrollo y aprendizaje, y la intervención de los integrantes de la categoría “otros” en el proceso de aprendizaje.

Lo que a continuación presentamos es el resultado de aplicar los métodos analítico –sintético, hipotético –deductivo y sistémico a la bibliografía estudiada, fundamentalmente a las obras de Vygotski que se referencian, los artículos de Ursini (1996) y Valdemoros (1996), la reseña que hace Guillermina Waldegg (1996) del libro “Piaget-Vygotski. Contribuciones para replantear el debate”, formado por cuatro ensayos escritos por prestigiosos especialistas latinoamericanos: José Antonio Castorina, Emilia Ferreiro, Martha Kohl de Oliveira y Delia Lerner, y la conferencia desarrollada por Herrera (2000).

La ley genética fundamental en la educación que puede verse en Vygotski (1989, p.109) plantea: *“Cualquier función psicológica superior en el proceso del desarrollo infantil se manifiesta dos veces, en primer lugar como función de la conducta colectiva, como la organización de la colaboración del alumno con las personas que le rodean; luego, como una función individual de la conducta, como una capacidad interior de la actividad del proceso psicológico en el sentido estricto y exacto de esta palabra”*.

Esta refiere que toda función mental superior aparece primero en el plano social, esto es, entre las personas como una categoría interpsicológica y después, aparece en el alumno como una categoría intrapsicológica.

Para Vygotski el desarrollo de la conciencia y de los procesos mentales depende de la interacción social, y ésta involucra necesariamente los signos como mecanismos de mediación. Los signos tales como el habla, la escritura, los sistemas numéricos son a su vez un producto histórico-cultural. El alumno al irse apropiando de

los signos se apropia de toda una cultura; pero al mismo tiempo su propio desarrollo cognitivo es modelado por signos y refleja las estructuras sociales y culturales de su medio.

En Vygotski (1989, Pág.64) puede leerse: *“Lo que el alumno puede hacer hoy en cooperación mañana podrá hacerlo solo. Por tanto, el único tipo de instrucción adecuado es el que marcha delante del desarrollo y lo conduce; debe ser dirigida más a las funciones de maduración que a lo ya maduro... La educación debe ser orientada hacia el futuro, no hacia el pasado”*.

Por lo tanto, en la teoría de Vygotski la educación juega un papel esencial, particularmente la educación que se desarrolla en la escuela. Siendo consecuente con sus planteamientos critica las posiciones psicológicas que se basan en el estudio del individuo sin tener en cuenta lo colectivo. Lo antes señalado explica la razón por la cual la teoría de Vygotski es llamada por algunos sociocultural y por otros histórico cultural; e inclusive hay quienes señalan que debería denominarse socio-histórico-cultural, Ursini (1996).

En nuestra investigación el *aprendizaje mediado*, del cual se profundizará en el epígrafe 2.2.1.1 durante el estudio de conceptos, se fundamenta en la ley genética fundamental detallada anteriormente y en las categorías “otros” y “zona de desarrollo próximo (ZDP)”, sobre las que puntualizaremos a continuación.

La **ZDP** es definida en Vygotski (1978, p.86) como *“la distancia entre el nivel de desarrollo actual determinado por la capacidad para resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con compañeros más capaces”*

Obsérvese que en esta definición, se hace énfasis en la ayuda proveniente de otra persona, lo que se reafirma en Vygotski (1978, p.90), cuando plantea *“un aspecto esencial del aprendizaje es que éste crea la ZDP, esto es, el aprendizaje despierta una variedad de procesos de desarrollo que son capaces de operar sólo cuando el alumno interactúa con otras personas de su ambiente y con sus compañeros”*

La ZD potencial define funciones que aún no han madurado, que se hallan en proceso de maduración o embrionario, a diferencia del “nivel de desarrollo real” que se encuentra en la ZD que Vygotski (1985, p.7) lo define como: *“funciones ya maduras, productos finales del desarrollo”*.

En esta concepción, la maduración no se refiere a un proceso estrictamente biológico, sino a la propia actividad interna. La determinación de esta zona permite caracterizar el desarrollo de forma prospectiva, lo cual permite trazar el futuro inmediato del estudiante, su estado evolutivo dinámico, reconstruir las líneas del pasado y proyectar el futuro inmediato.

En el epígrafe 2.2.1.1 se ofrece un organizador que visualiza las características fundamentales de la ZDP, su relación con la ZD y la ZD potencial, así como las adecuaciones que esta trae consigo en el PEA de los conceptos matemáticos en el nivel superior y que constituyen parte de la fundamentación del necesario aprendizaje mediado, que pretendemos lograr con la implementación de nuestra estrategia.

En contraste con quienes consideran que la instrucción que se puede impartir depende del nivel de desarrollo alcanzado, como el psicólogo y pedagogo constructivista suizo Jean Piaget (1896-1980), Vygotski considera que la instrucción es buena solo cuando se adelanta al desarrollo. De este modo despierta y da vida a aquellas funciones que están en proceso de maduración en la ZD potencial.

El concepto de ZDP está sustentado en la idea de que el desarrollo psicológico debe ser visto en relación con lo que está por suceder en la trayectoria del individuo; lo que pedagógicamente significa que el profesor provoca en los alumnos avances que no sucederían espontáneamente.

La relación entre aprendizaje y desarrollo para Vygotski se caracteriza porque los procesos de desarrollo del sujeto no existen fuera de un grupo cultural determinado que le proporciona las condiciones de aprendizaje y, consecuentemente, son los procesos de aprendizaje los que ponen en marcha a los de desarrollo.

Como consecuencia de estos planteamientos, en la educación hay que tener en cuenta dos aspectos fundamentales: el PEA se debe desarrollar garantizando que cada alumno esté inmerso en su entorno social e intercambiando con este y que el entorno social proporcione la mayor cantidad de recursos para lograr el desarrollo del alumno.

Por tanto, son las instituciones educativas las promotoras principales del desarrollo psicológico de los miembros de la sociedad, al estar encargadas de crear las condiciones de aprendizaje para que se inicien los procesos de desarrollo. Tenemos el criterio que una condición necesaria para esto, es que se haga un buen uso del concepto de ZDP para llevar a cabo los *aprendizajes mediado y activo* y que se creen las condiciones para el logro de aprendizajes significativos.

En su teoría, Vygotski resalta la importancia de la intervención deliberada de los miembros del grupo social (maestros, padres y condiscípulos más aventajados) como mediadores entre la cultura y el individuo. Señala que no basta el simple contacto del sujeto con el objeto de conocimiento para que se produzca el aprendizaje, hace falta la participación de los “**otros**” como un factor esencial para el desarrollo de los alumnos.

Los “otros” son los portadores del contenido de la cultura que al interactuar con el sujeto promueven su desarrollo. Esta categoría “otros” después de más de 70 años que fue descrita por Vygotski ha tenido una ampliación debido al desarrollo cultural de la sociedad y el desarrollo de los medios interactivos; esta ampliación se presenta en forma resumida en la tabla 1.

| Tabla 1. Categoría “otros”. | |
|------------------------------------|---|
| Considerada por Vygotski | Padres, maestros y coetáneos más avanzados. |
| Ampliada después de Vygotski | Grupos, medios interactivos: TV, video, computadoras, psicólogos, orientadores , trabajadores sociales y el propio sujeto |

Estas ampliaciones son el resultado de diferentes investigaciones. En el artículo escrito por Ursini (1996, p.42) se señala *“Si bien en la definición dada por Vygotski de la ZDP, el énfasis está en la ayuda proveniente de una persona más experta, hay cada vez mas investigadores que consideran que puede haber también otros factores tan eficientes como la guía de una persona más experta, para promover la creación de una ZDP”*.

Valsiner (1988), por ejemplo, señala que una ZDP puede también desarrollarse gracias a la influencia de un ambiente estructurado de manera que guíe al alumno hacia el uso de elementos nuevos para él, pero accesibles desde su ZDP. Análogamente Tudge (1992) afirma que la retroalimentación impersonal proveniente del material con el cual un individuo interactúa, puede ser tan efectiva para propiciar el desarrollo en la ZDP como el apoyo interpersonal.

Una ampliación que ha tenido en la actualidad la categoría “otros” es presentada en el anexo 5.

A continuación haremos referencia a algunos aportes de la Escuela Soviética de la Teoría de la Actividad que han enriquecido la Teoría de Vygotski y que también constituyen parte del basamento teórico de esta investigación, especialmente en lo relativo al logro del *aprendizaje activo* durante el PEA de la Matemática Superior, que se profundiza en el epígrafe 2.2.1.1.

De Leontiev (1981) puede extraerse la idea de que **la actividad** es el motor fundamental del aprendizaje, **acción mediada** por el lenguaje y orientada socialmente. Cuando el alumno se pone en contacto con los objetos materiales no sólo conecta con colores, formas espacios, volúmenes, etc., sino que también toma contacto con la intencionalidad y función social que subyace a su construcción.

En González (2001, p.91) se define **la actividad** como *“...aquellos procesos mediante los cuales el individuo, respondiendo a sus necesidades, se relaciona con la realidad, adoptando determinada actitud hacia la misma”*.

Muy conocidas resultan las fases orientación, ejecución y control por las que transita toda actividad dirigida, sobre todo las que tienen lugar en el salón de clases.

Otra aseveración importante de Rubinstein es que considera el pensamiento como **actividad** mental cognoscitiva, que a decir de Davidov (1982, p.229) *“...esa interpretación del pensar es propia de la teoría moderna del conocimiento y de la lógica dialéctica...”*

Sobre la **acción mediada**, en Pozo (1989, p.194) puede leerse: *“Al basar su psicología en el concepto de actividad, Vygotski considera que el hombre no se limita a responder a los estímulos sino que actúa sobre ellos, transformándolos. Ello es posible gracias a la mediación de instrumentos que se interponen entre el estímulo y la respuesta. [...] Los mediadores son instrumentos que transforman la realidad en lugar de imitarla. Su función no es adaptarse pasivamente a las condiciones ambientales sino modificarlas activamente.”*

En una síntesis de la obra de Rubinstein, Davidov (1982, p.250) señala que una de sus tesis fundamentales está dada en que “...*las operaciones mentales (análisis, síntesis, abstracción, generalización) han de ser reveladas como formas y métodos de la actividad del sujeto con el objeto...*”.

En Guetmánova (1991, p.9, 14, 283) y Díaz (2003, p.13) se definen estas operaciones mentales como **modos lógicos básicos para la formación de conceptos**, a las cuales se une la comparación en un proceso de formación inductivo, de la siguiente forma “*El análisis es la desintegración mental de un objeto en sus diferentes partes, la separación mental de sus indicios; la síntesis es la composición mental de las partes integrando el todo; la comparación es el establecimiento de semejanzas y diferencias entre objetos según sus indicios; la abstracción es la separación mental de unos indicios de un objeto desechando los demás; la generalización es la unificación mental de aquellos indicios que son comunes a un grupo o clase de objetos o fenómenos de la realidad*”

Obsérvese que estas definiciones son generales, muchas de las cuales son semejantes a las que contienen los diccionarios clásicos de Lengua Española, válidas como operaciones mentales generales en cualquier actividad del sujeto al interactuar con el objeto, no necesariamente en el proceso de formación conceptual. Para este proceso específico, estas operaciones requieren una adecuación en cuanto a los momentos y las formas en que suelen manifestarse, a la vez que debe realizarse la necesaria contextualización de las mismas en el objeto y el campo de acción declarados en esta investigación, aspecto este que incluimos como novedad científica del trabajo. Esta adecuación se realiza en varios epígrafes del capítulo 2.

Siendo consecuente con estas paradigmáticas ideas del Enfoque Histórico Cultural y la Teoría de la Actividad, se impone explicar cómo ocurre el proceso de internalización en el pensamiento.

El proceso de **internalización** se describe como el proceso de transformación en interna de una operación que es externa al sujeto, que pertenece a su entorno social.

Es un proceso donde ciertos aspectos de la estructura de la actividad que se realiza en el plano externo, se reconstruyen internamente sin que sean una copia de ellos.

Según Vygotski, el vector del desarrollo y del aprendizaje iría desde el exterior del sujeto al interior, sería un proceso de internalización o transformación de las acciones externas, sociales, en acciones internas, psicológicas, como se aprecia en la ley fundamental de la genética detallada anteriormente.

El proceso de internalización se mejora y optimiza cuando los procesos de mediación están más escalonados y permiten al individuo una adecuación más precisa a su nivel de actividad posible, realizando un empleo óptimo de la ZDP.

Esta graduación del proceso de interiorización en la ZDP, ha sido definido por Galperin (1986) como “interiorización por etapas” y en él se facilita el paso de la actividad externa a la mental gracias al

escalonamiento de la proporción de interiorización (dosificación entre lo interno y lo externo) en los puntos de apoyo de la mediación.

Aunque no vamos a profundizar en la teoría de Galperin, sí consideramos adecuado reseñar las cinco etapas que él señala para escalonar las tareas que deben interiorizarse:

1. Crear una concepción preliminar de la tarea.
2. Dominar la acción utilizando objetos.
3. Dominar la acción en el plano del habla audible.
4. Transferir la acción al plano mental.
5. Consolidar la acción mental.

No obstante, el proceso de internalización, no debe concebirse como un proceso perfecto y completo, siempre terminado y de una sola dirección fuera → adentro.

En ciertos momentos se necesita “exteriorizar” las operaciones mentales o transferir la acción intelectual a una situación más visible y sólida para que no se pierda la idea que se conforma, por ejemplo, pensando con papel y lápiz en la mano o razonando en voz alta, solos o con otra persona.

Sobre esta relación dialéctica en el proceso Leontiev (1981, p.268) señala: “...debe tenerse en cuenta las disposiciones biológicas y particularidades intelectuales, sobre todo las que aparecen en la actividad nerviosa superior. Hay que ver también la importancia de las cuestiones referentes a las particularidades emocionales y al campo de las motivaciones de la personalidad...”

Especialmente importantes son los aportes de Vygotski a la Psicología en cuanto a su detallada explicación sobre cómo transcurre el **proceso de formación de conceptos en los niños y adolescentes** basándose en los aspectos detallados anteriormente.

A continuación expondremos estos aspectos, para más adelante (en el capítulo 2), establecer la adecuación de su teoría al tratamiento de conceptos matemáticos en la educación superior, aspecto este que constituirá uno de los aspectos novedosos de nuestra propuesta.

Lo que se expone en la tabla del anexo 6 no es más que una síntesis de las ideas derivadas del estudio experimental realizado por Vygotski con niños y adolescentes que se presenta en el capítulo V de Vygotski (1982), relativos a la formación, inicialmente, de un **pensamiento en sincretos** (transitando por la conglomeración sincrética de objetos individuales, la formación de grupos determinados por la posición espacial de los objetos y la imagen sincrética con base más compleja), posteriormente, **de un pensamiento en complejos** (transitando por la formación de los complejos asociativo, de colecciones, cadenas y difuso) y,

finalmente, **de un pensamiento en conceptos** (transitando por las nuevas formaciones, los conceptos potenciales y el concepto propiamente dicho).

En dicho anexo se propone una división de las acciones del período de formación conceptual en cuanto a: acciones encaminadas a obtener el **contenido** del concepto y acciones encaminadas a obtener la **extensión** del concepto.

El lector no familiarizado con la interpretación del concepto como un par **(E,C)**, donde **C** y **E** son las características lógicas del concepto: contenido y extensión, respectivamente, puede consultar González (2001, p.41) y Martínez (2003, p.18-19).

Resulta importante destacar que el contenido de los conceptos y, por ende, la operación definición conceptual deben irse perfeccionando paulatinamente en cuanto a la penetración en la esencia de los objetos que se definen a medida que avanzan los estadios de desarrollo de los educandos, sobre esta particularidad Lenin expresa “...en las clases inferiores de la escuela no se puede operar, por supuesto, con definiciones que revelen la esencia profunda de los fenómenos de la realidad, ni con ejemplos extraídos de las esferas complejas de la ciencia, porque resultarían inaccesibles para los alumnos”. Lenin (1963, p.85-86).

1.3.2 Fundamentos del aprendizaje significativo.

Según D. Ausubel, principal exponente de la **Teoría del Aprendizaje Significativo**, el aprendizaje significativo surgió como un intento de contrarrestar el aprendizaje repetitivo y el carácter no significativo del aprendizaje y va dirigido a garantizar el establecimiento de las relaciones esenciales y no de un modo arbitrario entre lo que debe aprenderse y lo que es conocido, es decir, lo que se encuentra en las estructuras cognitivas del alumno.

Un gran cuerpo de la literatura emergente en los últimos años, considera al aprendizaje matemático como una actividad inherentemente social (tanto como cognitiva), y como una actividad esencialmente constructiva, en lugar de receptiva.

Según la cita de Belmont, expresada en la página 2 de la introducción de esta tesis, en la que se expresa en qué consiste este tipo de aprendizaje, se puede concluir que en este tipo de aprendizaje los esquemas cognitivos del alumno no se limitan a asimilar la nueva información sino que el mismo entraña una constante revisión, modificación y ampliación; produciéndose nuevos vínculos entre ellos. De esta forma permite una mayor funcionalidad y organización de los contenidos asimilados de un modo significativo.

La noción del aprendizaje significativo llevó necesariamente a reanalizar el papel que los contenidos juegan en el proceso de enseñanza aprendizaje, ampliando su significación hasta considerar también a las estrategias y distintos tipos de procedimientos tales como: el sistema de preguntas para indagar, explorar y observar con un carácter científico.

Uno de los principales exponentes de estas teorías es el español César Coll que al reconocer el carácter no espontáneo del aprendizaje significativo fundamenta las condiciones en que este se produce (ver Hidalgo (1992. p. 86)).

1. *El contenido de la enseñanza debe ser potencialmente significativo desde el punto de vista de su estructuración interna, significatividad lógica, coherencia, claridad y organización. Esta condición no se reduce a la estructura misma del contenido, sino que abarca también la presentación que de él se efectúa que tiene en cuenta los esquemas de conocimientos previos existentes en la estructura cognitiva de la persona que aprende.*
2. *El alumno debe disponer del bagaje indispensable para efectuar la atribución de significados, o sea, disponer de los conocimientos previos necesarios que le van a permitir abordar el nuevo aprendizaje.*
3. *La actitud favorable a la realización de aprendizajes significativos que requiere realizar una actividad cognitiva compleja (seleccionar esquemas previos de conocimientos y aplicarlos a la nueva situación, revisarlos, modificarlos, proceder a su reestructuración, al establecimiento de nuevas relaciones, evaluar su adecuación, etc.) para la cual el alumno debe estar suficientemente motivado.*

Estas condiciones de la enseñanza para promover aprendizajes significativos apuntan hacia el estudio de la estructura del contenido y determinan aquella que permita al alumno aprender, es decir, poder integrar cada nuevo conocimiento a las estructuras ya formadas para ampliarlas, perfeccionarlas, modificarlas y poder utilizarlas en situaciones concretas.

Esto concuerda con nuestra posición con relación al aprendizaje y su particularidad específica en el aprendizaje de conceptos matemáticos, pues al entender el aprendizaje como un proceso significativo, asumimos que en el aprendizaje lo que construimos son significados. El sujeto al aprender extrae significados de su experiencia de aprendizaje, adquiere conocimientos y no conductas; la conducta es una consecuencia del aprendizaje y no lo aprendido de él.

Si se tiene en cuenta que el conocimiento está representado por estructuras cognitivas complejas (redes semánticas de información) que especifican las relaciones entre diversos hechos y acciones; no es difícil aceptar que para adquirir significados, el aprendizaje tiene que ser necesariamente un proceso interactivo, pues el conocimiento que se va a aprender tiene que entrar en relación con los conocimientos ya adquiridos por el sujeto, posibilitando de esta forma el carácter integrador del aprendizaje.

Por esta razón, para muchos, lo ya aprendido por el sujeto es tanto o más importante que lo que se va a aprender; por ejemplo Ausubel y otros (2000, p.1) plantea: *“Si tuviese que reducir toda la psicología educativa a un solo principio, enunciaría éste:....el factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averíguese esto, y enséñese consecuentemente”*

Para entender el comportamiento individual de un sujeto puesto ante una situación matemática (ya sea de interpretación o de resolución de problemas), se necesita saber cuáles son las herramientas matemáticas que tiene a su disposición: ¿qué información relevante tiene a mano?, ¿cómo accede a esa información y cómo la utiliza?

Los esquemas o estructuras organizadas del sujeto, en el momento de aprender el nuevo conocimiento determinan lo que el estudiante aprenderá, es decir, el conocimiento que el sujeto va a construir al estudiar o realizar la tarea. El conocimiento previo establece fronteras y límites para identificar la semejanza y singularidad de la nueva información. Se produce aprendizaje no solo cuando se tiene una extensión de algún campo de conceptos interconectados, sino también cuando ocurre un cambio en la forma del conocimiento, lo cual crea las condiciones para que el sujeto realice nuevos descubrimientos.

Para aprender significativamente es necesario modificar los esquemas o redes de conocimiento existentes, ya que todo nuevo contenido informativo para ser aprendido crea la necesidad de reestructurar, ampliar o modificar esos esquemas existentes.

Según Piaget, las modificaciones de los esquemas se producen por medio de un proceso personal de: **equilibrio – desequilibrio – reequilibrio.**

El **desequilibrio** supone que se gradúen apropiadamente las diferencias entre lo aprendido y lo que se va a aprender; y que, además, se proporcionen motivaciones que favorezcan la ruptura del equilibrio. Esta graduación es muy importante en el PEA; puesto que si el contenido que se presenta a los estudiantes, está muy alejado de sus estructuras; entonces resulta imposible el desequilibrio. Si contrariamente, el contenido resulta muy simple, tampoco ocurre éste.

El **reequilibrio** se produce mediante las modificaciones de los esquemas propios del sujeto o mediante la construcción de otros nuevos. Estos nuevos esquemas almacenados en la memoria crean mejores condiciones para que nuevos conocimientos vuelvan a provocar su desequilibrio y posterior reequilibrio articulando lo nuevo con lo viejo para crear nuevas estructuras, y así sucesivamente. Coll (1989); Nortes y Serrano (1991).

Un aspecto importante que hay que tener en cuenta en el proceso de aprendizaje significativo es el de la **transferencia**, la cual tiene lugar cuando una persona desarrolla habilidades cognitivas o comunicativas, estrategias de aprendizaje, en un contexto determinado y es capaz de aplicarlo luego en otro. Enseñar a transferir implica mostrar al estudiante cómo una idea se puede aplicar a otra, cómo pueden utilizar ampliamente lo que se aprendió, cómo entender una idea en función de otra.

La transferencia no es automática; el poseer información, destrezas e ideas no aseguran en sí mismo que se aplicarán siempre y cuando sea apropiado, pero sí está claro que el hecho de utilizar lo que se ha aprendido en

la escuela y enfrentarse a problemas nuevos fuera de la escuela, son imperativos.

La transferencia por lo tanto es un proceso consciente que permite aplicar el conocimiento en el mismo contexto o en otro que tenga relación. Algunas de las estrategias anteriormente mencionadas contribuyen a la transferencia del conocimiento, estas son, entre otras: aprendizaje significativo por problemas, estudios de casos, desarrollo de proyectos, la investigación aplicada.

1.4 Fundamentos didácticos.

1.4.1 Aspectos relativos a la Didáctica General.

A continuación se expone una síntesis de aspectos centrales de la Didáctica general, después de realizar un análisis crítico de los textos Danilov (1978), Klingberg (1972), Chávez (S/A), Silvestre y Silvertein (2002), Freudenthal (1991), Kieran (1998), Álvarez (1989) que tratan abundantemente estos aspectos.

Freudenthal (1991, p. 45) al ofrecer su definición de **Didáctica de una materia** plantea: *“la organización de los procesos de enseñanza y aprendizaje relevantes para tal materia. Los didactas son organizadores: desarrolladores de educación, autores de libros de texto, profesores de toda clase, incluso los estudiantes que organizan su aprendizaje individual o grupal”*.

Por otra parte Brousseau, citado por Kieran (1998, p.596), expresa: *“la didáctica es la ciencia que se interesa por la producción y comunicación del conocimiento. Saber qué es lo que se está produciendo en una situación de enseñanza es el objetivo de la didáctica”*.

Álvarez (1989, p.3), considera que, *“la didáctica es la ciencia que estudia el proceso docente-educativo”*. Esta es la definición que compartimos, pues sintetiza las demás, plasmando explícitamente el objeto de estudio, a partir del cual se derivan características expresadas en otras definiciones.

Es decir, mientras la Pedagogía estudia todo tipo de proceso educativo, en sus distintas manifestaciones, la didáctica como ciencia pedagógica, atiende sólo al proceso más sistémico, organizado y eficiente (el docente-educativo), que se ejecuta sobre fundamentos teóricos y por personal especializado: los profesores.

La didáctica, por tanto, no puede prescindir de la pedagogía general, que le brinda sus “leyes” o principios generales y sus fundamentos teóricos, que se particularizan y se operacionalizan en esta ciencia en especial. A ella le corresponde ilustrar al maestro cómo organizar, desarrollar y controlar en la práctica el complejo proceso de enseñar y de aprender, por medio de diferentes formas de organización y por distintas vías, al seguir un fin y objetivos determinados.

Es válido destacar que existen varias acepciones para expresar el proceso docente-educativo, en ocasiones se le denomina instructivo-educativo o de enseñanza-aprendizaje (PEA), denominación esta última que emplearemos en nuestra tesis; no obstante, sea cual sea la denominación es importante tener claro que en

cualquiera de ellas, la instrucción y la educación forman un par dialéctico que no pueden ser separados. Ambos tienen sus funciones específicas pero se dan en un sólo y único acto educativo. Como dijera Martí "Las cualidades morales suben de precio cuando son realizadas por las cualidades inteligentes".

En cualquier PEA de una materia que eduque, instruya y desarrolle, debe llevarse a cabo un seguimiento a un conjunto de normas y **principios didácticos**. Para el destacado especialista alemán Lothar Klingberg citado por Chávez (S/A, p.9), los principios didácticos "son postulados generales sobre la estructuración del contenido, la organización y los métodos de enseñanza que se derivan de las leyes y de los objetivos de la enseñanza, que expresan el complejo carácter de esta y que por dicho motivo han de verse y considerarse por su complejidad".

Son reconocidos por mayor parte de la literatura pedagógica los siguientes principios didácticos: *del carácter científico, de la sistematicidad, de la vinculación de la teoría con la práctica, de la vinculación de lo concreto y lo abstracto, de la asequibilidad, de la solidez de los conocimientos, del carácter consciente y de la actividad independiente de los estudiantes y de la vinculación de lo individual y lo colectivo.*

Los principios didácticos, que poseen un carácter rector en todo el quehacer didáctico, poseen las características siguientes: carácter general, pues se aplican a todas las asignaturas y niveles de enseñanza; son esenciales, pues determinan el contenido, los métodos y las formas de organización. Su incumplimiento convierte el proceso docente en un caos, por tanto, su observancia tiene un carácter obligatorio. Constituyen un sistema, en consecuencia, el cumplimiento de uno supone el del resto y el incumplimiento de alguno afecta al sistema.

Sobre la esencia de cada uno de estos principios puede consultarse el anexo 7, no obstante, este constituye un saber bastante generalizado entre los profesionales de la Didáctica.

Además, consideramos pertinente mencionar los **principios didácticos** que se exponen en Silvestre y Silvertein (2002, p.22-23), los que, según nuestro criterio, engloban los anteriores y responden más a las exigencias de los tipos de aprendizaje (activo, mediado y significativo) que pretendemos lograr con la estrategia, estos son:

- *Diagnóstico integral de la preparación del alumno para las exigencias del PEA, nivel de logros y potencialidades en el contenido del aprendizaje, desarrollo intelectual y afectivo valorativo.*
- *Estructurar el PEA hacia la búsqueda activa del conocimiento por el alumno... durante los momentos de orientación, ejecución y control de la actividad...*
- *Concebir un sistema de actividades para la búsqueda y exploración del conocimiento por el alumno, desde posiciones reflexivas...*
- *Orientar la motivación hacia el objeto de la actividad de estudio y mantener su constancia.*

- *Estimular la formación de conceptos y el desarrollo de los procesos lógicos de pensamiento, y el alcance del nivel teórico, en la medida en que se produce la apropiación de los conocimientos y se eleva la capacidad de resolver problemas.*
- *Desarrollar formas de actividad y de comunicación colectivas,... logrando una adecuada interacción entre lo individual con lo colectivo en el PEA, así como la adquisición de estrategias de aprendizaje por el alumno.*
- *Atender a las diferencias individuales en el desarrollo de los escolares...*
- *Vincular el contenido del aprendizaje con la práctica social y estimular la valoración por el alumno en el plano educativo...*

Por otra parte, **las categorías de la didáctica**, que constituyen un sistema y se dan en una relación dialéctica son: *Objetivo, Contenido, Método, Medio, Evaluación y Formas de organización.*

La categoría **objetivo** ocupa un lugar destacado en la dirección del PEA, cumple la importante función de determinar el contenido, los métodos y las formas de organización de la enseñanza, al expresar la transformación planificada que se desea lograr en el alumno en función de la formación del hombre a que aspira la sociedad.

Los objetivos expresan el para qué se enseña y se educa al alumno. Entre los elementos que integran la estructura de los objetivos están, *los conocimientos, los hábitos, las habilidades, las capacidades, las convicciones, los sentimientos, las actitudes, las particularidades del carácter, el sistema de motivos o intereses, etc.*

Es prudente destacar el carácter sistémico y multilateral de los objetivos, así como la necesidad de realizar una derivación gradual de los mismos encaminada a cumplimentar los principios didácticos relacionados con la asequibilidad y solidez de los conocimientos.

Los contenidos de la enseñanza expresan el qué se enseña. Estos comprenden una unidad indisoluble de: un sistema de conocimientos, que algunos autores denominan conceptuales o declarativos, que son: conceptos, hechos, datos; un conjunto de conocimientos que se expresan metodológicamente, que algunos autores llaman contenidos procedimentales, como habilidades, hábitos, operaciones, procedimientos propiamente dichos, etc.; y un conjunto de conocimientos actitudinales, que tienen en su base la formación de los valores.

Un mismo contenido tiene potencialidades para expresarse de uno o de otro tipo, de acuerdo a los objetivos que se formulen.

Los contenidos se expresan en: las asignaturas, que están incluidas en el plan de estudio y en los programas, en los libros de texto y en otros materiales de carácter docente.

Existen una serie de principios para la estructuración de los contenidos, entre ellos: carácter científico, sistematización, carácter único y diverso y el de la relación intermateria.

Por otra parte, el éxito de la enseñanza depende en gran medida de su correcta dirección y en ella ocupa un destacado lugar el **método** de enseñanza.

Es indudable el valor que posee el objetivo y el contenido como elementos decisivos en la concepción del proceso de enseñanza, pero para llevarlos a vías de hecho resulta determinante el método.

Según Lerner, citado por Chávez (S/A, p.6), *“los métodos de enseñanza se definen como las formas de organizar la actividad cognoscitiva de los estudiantes que aseguran el dominio de los conocimientos, de los propios métodos del conocimiento, de la actividad práctica...”*.

Según Danilov, citado en la referencia anterior, se expresa que *“el método de enseñanza constituye un sistema de acciones del maestro, dirigido a un objetivo, que organiza la actividad cognoscitiva y práctica del alumno, con lo que asegura que éste asimile el contenido de la enseñanza”*.

En ambas definiciones queda implícita la consideración de la relación entre la actividad dirigente del maestro o profesor y la asimilación activa, consciente, independiente y creativa de los alumnos como decisivas para lograr una adecuada dirección de la actividad cognoscitiva del escolar.

La didáctica por lo general, no distingue entre los métodos utilizados en la enseñanza media y otros particulares de la enseñanza superior.

Existen numerosas clasificaciones de los métodos de enseñanza, de acuerdo a diferentes puntos de vista. Asumiremos los criterios del destacado especialista alemán Lothar Klimberg, que propone una clasificación muy generalizada, según el tipo de proceso de comunicación y el grado de independencia del trabajo de los alumnos; estos son: *el método expositivo, el de trabajo independiente de los alumnos y el de elaboración conjunta*.

En el método **expositivo** se aprovechan todas las potencialidades instructivas y educativas que se derivan de la palabra del maestro o profesor. Predomina la actividad de este: él informa, narra, ejemplifica, demuestra. La actividad del alumno es eminentemente receptiva.

En el método de **trabajo independiente** de los alumnos se transforma la situación antes planteada. La actividad de los alumnos pasa a un primer plano. Trabajan con intensidad al solucionar de modo relativamente independiente sus problemas.

La forma típica de manifestarse el método de **elaboración conjunta** es la conversación en clase (socrática, heurística o discusión). Se caracteriza por la actividad comunicativa del alumno.

En el anexo 8 se ofrece una versión la tabla 2.11 de Ballester (1992, p. 167), donde se relacionan los aspectos fundamentales de estos métodos; entre estos: la razón de uso, la forma típica de manifestación y la actividad del alumno.

También se pueden clasificar los métodos según los niveles de asimilación del contenido de enseñanza, en este grupo incluimos los que relacionan I. Y. Lerner y M. N. Skatkin, citados en Ballester y otros (1992, p.181). *“receptivo de información, reproductivo, heurístico, investigativo, de exposición problemática”*. Para profundizar en estos métodos adaptados a un contexto matemático puede consultarse este libro p.181-206.

Durante el diseño de nuestra estrategia se propone combinar estos métodos de enseñanza a través de las diferentes formas de docencia, predominando el expositivo en la conferencia taller, y el de elaboración conjunta y de trabajo independiente en las clases prácticas y seminarios.

Los medios de enseñanza son los componentes del proceso de enseñanza que sirven de sostén material a los métodos; constituyen distintas imágenes y representaciones de los objetos y fenómenos que se confeccionan especialmente para la docencia, también abarcan objetos naturales e industriales, tanto en su forma normal como preparada, los cuales contienen información y se utilizan como fuente de conocimientos.

En Chávez (S/A, p.7) puede verse que *“...los medios de enseñanza permiten crear las condiciones materiales-objetivas- favorables para cumplir con las exigencias científicas del mundo contemporáneo, durante el proceso de enseñanza- aprendizaje”*

Existen también numerosas **clasificaciones** de los medios de enseñanza, una bastante difundida con la que coincidimos, es la que los divide en los siguientes grupos: *objetos naturales e industriales; objetos impresos y estampados; medios sonoros y de proyección; y finalmente, materiales derivados de la tecnología educativa.*

Algunas **características que debe reunir** la selección y/o elaboración de los medios son:

- Deben ser bien seleccionados de acuerdo al objetivo de la actividad docente.
- Pueden emplearse en diferentes momentos del PEA.
- Deben poseer la calidad y estética acordes con las exigencias higiénicas, didácticas y psicopedagógicas requeridas.

La pizarra, el libro de texto, etc., pueden ser medios eficaces del proceso de enseñanza si son bien elegidos y se saben utilizar en su momento. En la estrategia que se propone, estos son los medios fundamentales que se proponen emplear, a los que se une, el empleo de las TIC en la búsqueda de información por Internet y el uso del paquete Mathematica en la constatación y/o visualización de resultados derivados del estudio conceptual.

Otro componente didáctico de mucha importancia es: **la evaluación.**

Concebir **la evaluación** en un sentido amplio significa utilizarla como instrumento que permite, por una parte, establecer en diferentes momentos del proceso, la calidad con que se van cumpliendo los objetivos planteados, y por otra, y en dependencia de los resultados alcanzados, determinar las correcciones que es necesario introducir para acercar cada vez más los resultados a las exigencias de los objetivos; o sea, debe verse la

evaluación como componente que permite valorar la calidad, tanto de los procesos como de los resultados.

En su sentido más estrecho, la evaluación se refiere al momento de comprobación en el que se establece una calificación expresada en una nota o índice que signifique el nivel de calidad alcanzado en el proceso general y el resultado del aprovechamiento que manifiesta cada uno de los alumnos. Cuando nos referimos a la evaluación en un sentido más estrecho, lo identificamos con el juicio de valor que se emite cuando concluye el proceso evaluativo.

El carácter de continuidad de la evaluación permite la constante comprobación del resultado del proceso de enseñanza y la convierte en guía orientadora de este.

La evaluación cumple varias funciones: instructiva, educativa, de diagnóstico, de desarrollo y, por último, de control.

Según su temporalidad, los diferentes tipos de control pueden clasificarse en: control sistemático, corriente o continuo, control parcial, examen final.

Sobre la presencia de este componente didáctico en la Didáctica de la Matemática, específicamente en la enseñanza basada en la resolución de problemas, se profundizará en el epígrafe 1.4.2.8.

Por otra parte, existen distintas **formas de organización de la enseñanza**, pero señalaremos las que propone Chávez (S/A, p.10), que comentaremos a continuación:

- a) Individual (en la enseñanza general se presenta por medio de la orientación de estudio individual, trabajos investigativos; en la enseñanza superior, además de las anteriores, por medio de la organización de tutorías, cursos personalizados, realización de prácticas laborales, proyectos, etc)
- b) Grupo-clase (más generalizada en la enseñanza general)
- c) Conferencias- seminarios (más generalizada en la enseñanza superior)

La clase, en cualquier nivel de enseñanza, es la forma básica de la organización del PEA. Su planificación constituye una etapa fundamental del trabajo del educador, es un proceso creador en el que se manifiesta su preparación, su sentido de responsabilidad y su habilidad para estructurarla tomando como base las exigencias que debe reunir en la escuela moderna y las características del grupo y de cada alumno. De la calidad de su planificación depende en gran medida su efectiva realización. La necesidad de que cada una posea una lógica interna de acuerdo con sus objetivos, contenidos y métodos, hace imposible la creación de una estructura única para todas.

Existen diferentes **tipos de clases** en la enseñanza general: para el tratamiento del nuevo contenido, de consolidación, de ejercitación, de aplicación, de generalización de los contenidos, clases de control.

En aras de lograr el necesario enfoque de sistema de un conjunto de clases dentro de una unidad temática, es

importante que el maestro planifique todas las que corresponden a dicha unidad, pues de esa manera logra tener una visión del conjunto y puede realizar una retroalimentación efectiva; así como reajustes durante la implementación, a medida que va realizando el control correspondiente.

Dentro de las formas de organización contempladas en el sistema de trabajo didáctico en la Educación Superior Cubana se señalan las conferencias, seminarios, clases prácticas, laboratorios y clases consulta, en cada una de ellas predomina una estructura metodológica semejante: introducción, desarrollo y conclusiones. Cada uno de estos elementos estructurales posee sus especificidades acorde con la forma de docencia escogida y los objetivos que esta persigue; no obstante, no ahondaremos en estos aspectos bastante conocidos en la comunidad pedagógica universitaria.

En la estrategia didáctica que proponemos se combinan estas formas de organización, aunque por estar basada en la resolución de problemas, predominan las clases prácticas y los seminarios.

Un aparte especial merece la realización de consideraciones didácticas relativas a la necesaria **unidad entre lo cognitivo y lo afectivo** que debe existir en todo PEA desarrollador.

Como se conoce, el PEA es el campo en el que se dan la instrucción y la educación de los alumnos. Estos procesos no son idénticos, pero sí se dan en una unidad dialéctica. Se ha dicho que toda instrucción tiene que ser educativa y que toda educación tiene que ser instructiva.

En el proceso educativo hay que tener en cuenta, en primer lugar, la relación: objeto- sujeto, se debe concebir esta relación como una unidad inseparable, en la que se considere al objeto de forma activa y al sujeto cognoscente también.

De esta manera se considera que el **conocimiento** es una representación o reflejo de la realidad desarrollada o construida por el sujeto, por eso la actividad y la comunicación, son elementos indispensables en el desarrollo del proceso de asimilación del conocimiento. El alumno construye el conocimiento de una manera activa en interrelación, o sea en diálogo, en intercomunicación con los demás.

Lo mismo ocurre con la unidad entre lo afectivo y lo cognitivo. No se pueden separar metafísicamente. Hay teorías de aprendizaje que los consideran separados, lo cual resulta una inconsecuencia. Esto no descarta que existan principios y métodos específicos para desarrollar uno u otro, pero en una unidad inseparable, en los que la motivación juega un papel fundamental. Como dijera Martí: *"el que piensa ama"*.

Al respecto González y Mitjans (1989, p.37) comenta *"En las formas de relación entre lo cognitivo y lo afectivo en la personalidad no pueden haber reducciones simplistas ni mecanicistas del predominio de uno sobre otro,..., ni en su acción reguladora sobre el comportamiento"*.

Por otra parte, realizar un estudio de la manifestación de esta relación en el PEA resulta muy difícil,

precisamente por el carácter complejo y dinámico que poseen sus manifestaciones y el nivel inconsciente por el que transitan muchos de los aspectos de estas esferas; al respecto en este mismo libro p.36 se afirma: *“las relaciones entre lo cognitivo y lo afectivo, que constituye una de las coordenadas importantes entre lo consciente y lo inconsciente, es móvil y compleja, no integrándose necesariamente en una expresión consciente adecuada”*.

No obstante a ello, se reconoce al papel decisivo que ejercen el nivel de motivación y actividad volitiva que posee el alumno en una adecuada manifestación de las esferas afectivo y cognitiva; sobre la primera se afirma: *“El propio motivo, como unidad celular de la esfera motivacional de la personalidad, expresa una naturaleza cognitivo – afectiva”*. Ibídem, p. 34.

Y como la esfera motivacional está íntimamente relacionada con la volitiva; pues a decir de Petrovsky (1976, p.362) *“la esfera motivacional tiene relación directa con la actividad volitiva porque en la primera residen las fuerzas inductoras que determinan el carácter y las condiciones psicológicas de realización del acto volitivo”*; es que consideramos la influencia de ambas en la unidad de lo cognitivo y lo afectivo.

Es por ello que en la fase de control de la estrategia didáctica se propone contemplar el indicador de “nivel de motivación y actividad volitiva” que se operacionaliza con parámetros incluidos en este epígrafe.

Para garantizar una adecuada calidad en la formación de los alumnos y por ende, una adecuada unidad entre lo cognitivo y lo afectivo en el PEA, los educadores deben mostrar un gran tacto pedagógico, lo que se manifiesta de la manera siguiente:

- a) El educador debe mostrar una gran confianza en su trabajo educativo y en las posibilidades que ofrecen sus alumnos de ser educados.
- b) La labor educativa debe ser sistemática, adecuadamente organizada en un colectivo escolar fuertemente estructurado y apoyado en su ejemplo.
- c) El centro escolar en general debe ser homogéneo en las exigencias educativas, pues es una responsabilidad de todos y no de un solo profesor.
- d) El maestro debe profesar un gran respeto hacia los alumnos, para así ganarse su confianza, y con esto, crear niveles de responsabilidad y compromiso en ellos.
- e) Debe apoyarse en la familia y en las otras instituciones educativas para lograr una confluencia de factores en la educación integral de los jóvenes.

Como se ha expresado, los alumnos deben ser movidos a realizar las actividades en el aula por un proceso de motivación intrínseca, por lo que para lograr esto es necesario profundizar en el conocimiento de aspectos motivacionales. Sobre qué entendemos por motivación extrínseca e intrínseca profundizaremos a continuación.

En cuanto a la **motivación extrínseca**, se puede decir de manera muy simplificada, que existen dos formas de mover a los estudiantes desde el exterior: utilizando el sistema de la recompensa o el de la sanción. El primero consiste en recompensar a los estudiantes por sus esfuerzos y los buenos resultados. El de la sanción utiliza el miedo, el castigo para penalizar la falta de esfuerzo y los malos resultados.

Actualmente la mayoría de los maestros están conscientes que la enseñanza por sanción es muy ineficiente a mediano y a largo plazo, puesto que raramente consigue estimular la creatividad de sus alumnos. El castigo tal vez funcione para que los estudiantes dejen de hacer algo, pero está muy lejos de motivarlos para que actúen hacia su mejora constante. La educación por sanciones motiva a una sola acción: evitar la sanción.

Por otra parte, en cuanto a la motivación por recompensas, McDermott y O'Connor (1999, p.186) señalan que *"...hay pruebas abrumadoras de que la motivación mediante recompensas es más compleja y menos efectiva de lo que pudiera parecer a primera vista"*.

Algunas consecuencias negativas que tienen las recompensas en el PEA son: pueden entorpecer las relaciones entre los alumnos, ya que los compañeros se convierten en obstáculos, no en impulsores y mediadores; las recompensas ignoran las causas del comportamiento; no se corresponden con lo que los estudiantes valoran; estimulan y refuerzan algo terminado, de modo que limitan la experimentación y la intuición; pueden transformar las tareas (problemas) en un medio para un fin, ya que estimulan a los estudiantes a trabajar por su obtención.

Cuando un problema de aprendizaje es extrínseco, una vez que se resuelva, no hay ya ninguna necesidad de seguir recordando las materias aprendidas con su solución y la retención, la comprensión y su utilización serán mucho menores que cuando se aprenden las materias porque el estudiante desea hacerlo. Si para la solución de un problema fue necesario aprender cierta teoría con el único objetivo de aprobar un examen, una vez aprobado éste, no existirá ya la razón para fijar esa teoría.

Cuanto más creativo sea un estudiante, menos probable será que se deje inducir por recompensas. La imaginación humana puede ser recompensada, pero no motivada mediante recompensas. Las recompensas extrínsecas funcionan en contra de la motivación intrínseca.

Lograr **la motivación intrínseca** en un estudiante consiste en conseguir que enriquezca su trabajo con su energía, su personalidad, su constancia y su creatividad. La energía que mueve a las personas, y que constituye la base de la motivación viene de dentro y parte de los valores individuales de cada cual. Cuando una persona desarrolla un estado de tensión resultante de las necesidades no satisfechas, se dice que se siente motivada. Evidentemente, la motivación desempeña un papel fundamental en el aprendizaje. Los

estudiantes motivados trabajan enérgicamente y con intención, a la vez que presentan pocos problemas de disciplina.

El premio que se obtiene al realizar una tarea movido por este tipo de motivación es intrínseco, es precisamente la experiencia directa, es un estado de conciencia que se disfruta más que la recompensa material, porque no hay nada comparable con plantearse una meta y lograrla.

Si un estudiante resuelve un problema porque siente la necesidad de resolverlo y porque comprende la importancia en su formación profesional; y no por las exigencias de la institución, entonces ha sido movido por un proceso de motivación intrínseca.

Berlyne (citado por Beltrán, 1998) plantea que el ser humano desarrolla un alto nivel de estimulación sin una explicación biológica aparente, o sea, una curiosidad epistémica bajo la cual se encuentra algún tipo de conflicto conceptual, entre los que están: *duda, perplejidad, contradicción, incongruencia conceptual, confusión, inadecuación*. Una ejemplificación de la manifestación de algunos conflictos conceptuales puede verse en el anexo 9.

En la estrategia didáctica que proponemos se deja claro cómo la existencia de la motivación intrínseca, es una de las condiciones necesarias para lograr un el aprendizaje activo, mediado y significativo durante los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual.

1.4.2 Aspectos relativos a la Didáctica de las Matemáticas.

1.4.2.1 Dos reacciones extremas en la Didáctica de las Matemáticas.

Con respecto al PEA de la Matemática, para Steiner (1987) la complejidad de los problemas planteados en la didáctica de las matemáticas produce dos reacciones extremas. En la **primera** están los que afirman que la Didáctica de la Matemática no puede llegar a ser un campo con fundamentación científica y, por lo tanto, la enseñanza de la matemática es esencialmente un arte. En la **segunda** postura se encuentran aquellos que piensan que es posible la existencia de esta didáctica como ciencia, en la cual nos incluimos.

La Didáctica de la Matemática ha tenido un amplio desarrollo en las cuatro últimas décadas, en la que se ha podido apreciar la lucha entre el idealista, que potencia la comprensión mediante una visión amplia y rigurosa de la matemática, y el práctico, que aboga por el restablecimiento de las técnicas básicas en interés de la eficiencia y economía en el aprendizaje. Ambas posturas se pueden observar tanto en los grupos de investigadores, innovadores y profesores de matemáticas de los diferentes niveles educativos a través de las diferentes épocas.

1.4.2.2 Reseña sobre la enseñanza de la Matemática en el siglo XX.

A finales de los años cincuenta y comienzos de la década de los sesenta, se produce un cambio curricular importante en la enseñanza de las matemáticas escolares, conocida socialmente como *la nueva matemática o matemática moderna*.

Las bases filosóficas de este movimiento se establecieron durante el seminario de Royamount, celebrado en 1959, que tuvo una prestigiosa representación de la escuela francesa denominada "Sociedad Bourbakista". En el transcurso del mismo, el famoso matemático francés Jean Dieudonné propuso ofrecer a los estudiantes una enseñanza basada en el carácter deductivo de la matemática y que partiera de unos axiomas básicos, en contraposición a la enseñanza falsamente axiomática de la geometría imperante en aquellos momentos.

Allí mismo, la intervención de otro francés, Gustave Choquet estuvo orientada en el mismo sentido: "...disponemos de un excelente ejemplo, el conjunto de los números enteros, donde estudiar los principales conceptos del álgebra, como son la relación de orden, la estructura de grupo, la de anillo...". García (2002, p.2).

Estas dos intervenciones se pueden considerar como paradigmáticas del movimiento que se inicia, pues la primera dibuja el enfoque que ha de caracterizar la enseñanza de la matemática y la otra se centra en presentar el contenido más apropiado.

La idea en principio parecía bastante lógica y coherente. Por un lado se pretendía transmitir a los alumnos el carácter lógico-deductivo de la matemática y al mismo tiempo unificar los contenidos por medio de la teoría de conjuntos, las estructuras algebraicas y los conceptos de relación y función de la matemática superior.

A principios de los setenta comienza a estar claro que la nueva matemática era un fracaso, pues ni se aprendían los conceptos y estructuras superiores ni los alumnos dominaban las rutinas básicas del cálculo, produciéndose nuevos movimientos renovadores. Entre estos movimientos se encuentran los conocidos como **retorno a lo básico**, la **resolución de problemas** y la **matemática como actividad humana**.

El *retorno a lo básico*, (back to basics) significó para las matemáticas escolares retomar la práctica de los algoritmos y procedimientos básicos de cálculo. Después de un tiempo, se hizo evidente que tal retorno a lo básico no era la solución razonable para la enseñanza de las matemáticas. A finales de los setenta empezó a cuestionarse este eslogan, pues los alumnos en el mejor de los casos, aprendían de memoria los procedimientos sin comprenderlos, a la vez que nunca se llegó a un consenso sobre ¿qué son matemáticas básicas? ¿la geometría elemental?, ¿la aritmética?. Había demasiadas opiniones sobre qué era "lo básico".

Una interrogante siguió latente en las comunidades de didactas de la matemática ¿Cuáles son los enfoques y contenidos más apropiados que han de caracterizar el PEA de la matemática?

Esta pregunta impregnó el IV Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME), celebrado en Berkeley en el verano de 1980, en la que surge una alternativa en forma de interrogante ¿Podría ser **la resolución de problemas** el foco de atención y respuesta a esa pregunta? casi como una bienvenida a todos los profesores que asistían al ICME.

El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) editó su famosa *Agenda in Action* para toda la década de los ochenta. En esa Agenda, la resolución de problemas, *the problem solving approach*, se presenta como algo más que un mero eslogan y se pretende convertirla en una tarea a interpretar, a desarrollar, y a implementar.

En el congreso de Berkeley hubo un invitado de honor, H. Freudenthal, que intervino con una ponencia con el título "Major Problems of Mathematics Education" (Grandes problemas de la educación matemática). En su intervención, H. Freudenthal centró su interés en los problemas que surgen en la educación matemática como una actividad social y no sólo como campo de investigación educativa.

Tanto Polya (que no pudo asistir, pero que envió una nota de excusa en la que planteaba qué puede hacer el profesor para mejorar la mente de sus alumnos), como Freudenthal, sitúan el centro de atención en el aprendizaje durante la resolución de problemas. El primero, solicitando de los profesores un compromiso con el aprendizaje de sus alumnos hacia la adquisición y mejora de las capacidades intelectuales; el segundo al pedir concretar los problemas derivados de la enseñanza e investigar los aprendizajes individuales para dar posibles soluciones a los aparentes fracasos ante los problemas.

Hasta nuestros días, la resolución de problemas va teniendo una indiscutible presencia en el PEA de la Matemática, tanto en la enseñanza general como en la superior, aunque con diferentes matices no siempre manifestados de la mejor manera, sobre los que ahondaremos en los epígrafes siguientes.

1.4.2.3 Papel de la resolución de problemas en el PEA de la Matemática en Cuba.

La habilidad de plantear y resolver problemas con una variedad de estrategias y recursos, aparece no sólo como contenido procedimental, sino también como una de las bases del enfoque general con que han de trabajarse los contenidos de Matemática en la Enseñanza General en Cuba, situándose como un aspecto central del PEA; aspecto que no ocurre así en la enseñanza superior, donde los problemas generalmente solo son empleados al final de las unidades temáticas como aplicaciones de los contenidos tratados.

El estudio del papel de los problemas en la lógica y estructura del PEA de la Matemática constituye un aspecto de cardinal importancia en los trabajos de A. Schoenfeld (1985), Miguel De Guzmán (1993), Luz Manuel Santos (1995), Joseph Gascón (1994), Jeremy Kilpatrick (1990), Marie Lise Peltier (1993) y otros, que no sólo

se restringen al estudio de los procesos heurísticos que transcurren en la solución del problema; sino que ofrecen discusiones sobre aspectos epistemológicos como base para las sugerencias pedagógicas.

En particular, en el aprendizaje de las Matemáticas son significativos los trabajos de A. H. Schoenfeld (1985) sobre la preparación de los alumnos para resolver problemas, donde determina diversos factores que intervienen en la realización exitosa de esta actividad: los **recursos** (cuerpo de conocimientos que un individuo es capaz de aplicar en una situación matemática en particular), la **heurística** (reglas de razonamientos para la resolución efectiva de problemas), el **control** (es la revisión y reestructuración de los intentos que se realizan en la resolución de problemas) y el **sistema de creencias** (las ideas que se tienen acerca de la matemática y cómo resolver problemas). Schoenfeld (1985, p .44).

Este autor introduce elementos como las creencias y las actitudes en las condiciones para la resolución de problemas y de los resultados de una amplia experiencia en el entrenamiento de los alumnos para resolver problemas matemáticos e insiste en la necesidad de que el aprendizaje en clases se acerque lo más posible al modo de actuar del matemático, es decir, poder discutir ideas, negociar, especular sobre los posibles ejemplos y contraejemplos que ayuden a confirmar o a desaprobando sus ideas.

Por su parte, Marie Lise Peltier, al estudiar la Didáctica de la Matemática en Francia, subraya los fenómenos que intervienen en el aprendizaje del alumno, en el que su actividad supone la dialéctica pensamiento-acción, que no se concibe como una simple manipulación guiada por el profesor, sino que atiende a la concepción del sujeto que aprende.

En las posiciones de esta autora el conocimiento no se acumula progresivamente, sino que se reorganiza permanentemente, se integra al saber anterior y a veces lo modifica.

Al estudiar el papel de la **resolución de problemas (RP)** en las estrategias empleadas por los profesores para dirigir el PEA, reconoce que se realiza de tres formas fundamentales:

- ❖ Los problemas son presentados al final del tema, con fines de evaluación (PEA para la RP).
- ❖ El problema es presentado como medio del aprendizaje (PEA de la RP).
- ❖ El problema es presentado como móvil del aprendizaje. (PEA por medio de la RP).

Estas precisiones sobre el lugar del problema en la estructura del PEA nos han permitido destacar la tendencia que se manifiesta actualmente en **nuestras universidades**, a seguir la primera y la segunda, apareciendo los problemas en la etapa final de estudio de los diferentes contenidos, o como medio para explicar el programa heurístico a seguir durante la RP, respectivamente, o de forma ocasional para motivar la introducción de un concepto, teorema o procedimiento y en pocos casos motivar el estudio del tema, o llevar a cabo un PEA de gran parte o toda la teoría objeto de estudio, por medio de la RP.

En este sentido, consideramos importante tener en cuenta que los problemas satisfagan las tres posiciones indicadas en la dirección del PEA.

Con relación al papel de la RP en nuestro país, se destacan las investigaciones del psicólogo Alberto Labarrere, el pedagogo Carlos M. Alvarez de Zayas, los metodólogos de la enseñanza de la Matemática Luis Campistrous y Celia Rizo, entre otros.

A. Labarrere, (1988, p.18) plantea: *“para que la enseñanza de la solución de problemas permita a la vez asimilar conocimientos, formar hábitos y habilidades y desarrollar el pensamiento del alumno, es necesario concebirla y estructurarla de una forma determinada, especialmente planificada, con objetivos de desarrollo claramente formulados”*.

C. Alvarez (1984) al referirse a la organización del proceso docente para la Educación Superior lo concibe de modo tal que el estudiante esté permanentemente motivado en adquirir nuevos conocimientos y que para lograrlo debe estar consciente de que el nuevo contenido le es imprescindible para enfrentar las futuras tareas de la profesión.

El procedimiento docente que en su criterio más se adecua a este proceso docente, es el planteamiento de problemas, que el nuevo contenido se ofrezca como resultado de la selección de una situación problémica de la cual se puedan derivar y plantear significativamente problemas apropiados, con cuya resolución se obtenga el aprendizaje.

De la teoría de Carlos M. Alvarez, resaltamos el papel asignado a la motivación asociado al planteamiento y solución de problemas; la estructuración del sistema de conocimientos sobre la base de un núcleo, que constituyen las invariantes de las habilidades; la organización del proceso docente la concibe siguiendo la lógica de la ciencia y la reafirmación de que el conocimiento se adquiere en la actividad.

En las investigaciones realizadas por los doctores L. Campistrous y C. Rizo sobre el aprendizaje de la resolución de problemas destacan algunas barreras que existen para la resolución de los problemas aritméticos, las cuales deben ser tenidas en cuenta de modo general. Estas barreras se concentran en: *“la excesiva actuación del maestro, el alumno no logra formas de actuación generalizadas, los problemas se utilizan en función del desarrollo de habilidades y no como objeto de enseñanza en sí mismos, no se enseñan técnicas de trabajo, los parámetros de dificultad para los problemas son poco precisos y no se trabajan los significados prácticos”*. Campistrous, (1996. P. X-XI).

Si bien el estudio se basa en los problemas aritméticos, en esas barreras se expresan importantes limitaciones que consideramos afectan el objetivo de la formación matemática general, que es preparar a los alumnos para resolver problemas, teniendo en cuenta por un lado, las técnicas que guíen la actividad de aprendizaje y, por

otro, la búsqueda de variantes para estructurar el proceso de enseñanza y el contenido que posibilite que la resolución de problemas sea objeto de enseñanza y objeto de aprendizaje.

Nótese que, aunque no hemos definido lo que entendemos por problema, ni discernido explícitamente sobre las principales tendencias en el tratamiento de la resolución de problemas, se ha hecho referencia a ambos aspectos, a manera de introducción en esta problemática. A continuación esbozaremos algunas disquisiciones sobre el concepto problema que han tenido lugar en los últimos tiempos.

1.4.2.4 ¿Qué es un problema?

Polya no definió lo que entendía por problema cuando escribió su libro en 1945; fue en otra obra, Polya (1966) en la que proporcionó una definición, pero no para empezar su disertación, sino en el capítulo cinco, y después de una amplia exposición práctica sobre algunos procesos que intervienen en la resolución de problemas, al respecto Polya afirma: *“Tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata”*.

Otra definición, parecida a la de Polya, es la de Krulik y Rudnik (1980, p.65): *“Un problema es una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cuál no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma”*.

Schoenfeld (1985) usa el término problema como una tarea que es difícil para el individuo que está tratando de resolverla. Además expresa que la dificultad portadora del problema debe ser un impase intelectual y no solamente a nivel operacional o de cálculo.

En este sentido Miguel de Guzmán (1993, p. 12) plantea: *“Tengo un verdadero problema cuando me encuentro en una situación desde la que quiero llegar a otra, unas veces bien conocida; otras, un tanto confusamente perfilada y no conozco el camino que me puede llevar de una a otra”*.

Al respecto, entenderemos por **problema**, una situación a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cual no se vislumbra un medio, algoritmo o camino rutinario y obvio que conduzca a la misma.

Esta caracterización identifica tres componentes de un problema: *estar consciente de una dificultad, tener deseos de resolverla y la no existencia de un camino inmediato para resolverla*.

De estas definiciones se infiere que un problema debe satisfacer los tres requisitos siguientes: **aceptación**, el individuo o grupo, debe aceptar el problema, debe existir un compromiso formal, que puede ser debido a motivaciones tanto externas como internas; **bloqueo**, los intentos iniciales no dan fruto, las técnicas habituales de abordar el problema no funcionan; y **exploración**, el compromiso personal o del grupo fuerzan la exploración de nuevos métodos para atacar el problema.

También ha existido cierta polémica sobre la diferencia que hay entre un ejercicio o un auténtico problema. Lo que para algunos es un problema, por falta de conocimientos específicos sobre el dominio de métodos o algoritmos de solución, para los que sí los tienen es un ejercicio. Este criterio es compartido por el autor.

Borasi (1986), en uno de los primeros intentos en clarificar la noción de problema originada por su interés en mejorar el PEA de la RP, utiliza una clasificación que se expone en el anexo 10, la cual no es incluida aquí, por considerar que solo es válida la enseñanza general. En el nivel superior no se ha realizado una clasificación como esta, pues la gama de contextos, formulaciones, soluciones y métodos es mucho más amplia.

A partir de su estudio, Borasi considera que para que un alumno pueda ser considerado como bueno resolviendo problemas, debería intentar resolver no sólo muchos, sino también una gran variedad de problemas.

Kilpatrick (1985) sugiere que la forma en que un problema es enunciado también influye en su significado. Además, tan importante como resolver problemas, es el diseño de tareas que desarrollen la habilidad de plantear problemas.

1.4.2.5 Funciones de los problemas.

Son reconocidas por la literatura **las funciones de los problemas** en el PEA de la Matemática, estas son: **instructiva**, ya que permiten formar en el alumno un sistema de conocimientos, capacidades, habilidades y hábitos matemáticos, contribuyendo con esto a la asimilación de conceptos, teoremas y procedimientos; **desarrolladora**, pues la RP está encaminada a fomentar el pensamiento de los alumnos y a dotarlos de métodos efectivos de actividad intelectual, lo que se ve reflejado en el hecho de que en los problemas existen potencialidades educativas, orientadas a la formación de la concepción científica del mundo, al desarrollo de intereses cognoscitivos, la independencia, hábitos de trabajo y a la formación de valores, convicciones y cualidades morales; **de control**, pues la RP permite comprobar en qué medida se cumplen los objetivos planteados para el PEA que se ejecuta.

La utilización de los términos “problema” y “resolución de problemas (RP)” ha tenido múltiples **significados** a través de los años, como se describe en los tres siguientes epígrafes.

1.4.2.6 Primer significado: resolver problemas como contexto. Enseñanza para la resolución de problemas.

Desde esta concepción, los problemas son utilizados como vehículos al servicio de otros objetivos curriculares, jugando los roles siguientes, relacionados en Vilanova (1999):

Como medio para desarrollar nuevas habilidades: se cree que, cuidadosamente secuenciados, los problemas pueden proporcionar a los estudiantes nuevas habilidades y proveer el contexto para discusiones relacionadas con algún tema.

Como práctica: la mayoría de las tareas matemáticas en la escuela se incluyen aquí. Se muestra una técnica a los estudiantes y luego se presentan problemas de práctica hasta que se ha dominado la técnica.

Como actividad recreativa: muestran que la matemática puede ser “divertida” y que hay usos entretenidos para los conocimientos matemáticos.

En cualquiera de estas formas, los problemas son usados como medios para algunas de las metas señaladas; o sea, la RP no es vista como una meta en sí misma, sino como facilitadora del logro de otros objetivos.

Según el doctor español Juan Antonio García Cruz en García y otros (2000), esta interpretación se refiere a la proposición de más problemas a los estudiantes, emplear aplicaciones de los problemas a la vida diaria y a las ciencias, generalmente al final de las unidades temáticas.

1.4.2.7 Segundo significado: resolver problemas como habilidad. Enseñanza de la resolución de problemas.

La resolución de problemas es frecuentemente vista como una de tantas habilidades a ser enseñadas en el curriculum. Muchos de los desarrollos curriculares que han existido bajo el término resolución de problemas a partir de la década de los 80 son de este tipo.

La heurística moderna, inaugurada por Polya, trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas y las operaciones típicamente útiles en este proceso.

La enseñanza de la resolución de problemas, tal como lo plantea Polya, se vuelve difícil para los docentes por tres razones diferentes: **matemáticamente**, porque los docentes deben poder percibir las implicaciones de las diferentes aproximaciones que realizan los alumnos, darse cuenta si pueden ser fructíferas o no, y qué podrían hacer en lugar de eso; **pedagógicamente**, porque el docente debe decidir cuándo intervenir, qué sugerencias ayudarán a los estudiantes, sin impedir que la resolución siga quedando en sus manos, y realizar esto para cada alumno o grupo de alumnos de la clase; y **personalmente**, porque el docente estará a menudo en la posición (inusual e incómoda para muchos profesores) de *no saber* (sobre todo de cuestiones pedagógicas para conducir mejor el proceso). Trabajar bien sin saber todas las respuestas, requiere experiencia, confianza y autoestima.

En Rebollar (2000, p. 24-25) puede leerse: *“La enseñanza de la resolución de problemas es otra de las formas que adopta el Problem solving en los EEUU, que debe ser bien diferenciada de las anteriores, y que se ha difundido mucho mediante los textos que enuncian y practican “estrategias” para resolver problemas y después plantean problemas para*

aplicarlas. Esta nueva forma es otra tarea urgente, independiente de las anteriores y que, en rigor, debe precederlas. Incluso se han elaborado textos sobre "estrategias" con este enfoque, que a veces resulta bien alejado del espíritu de lo que Polya preconizaba, aunque supuestamente se basan en él...".

Muchas veces se les resuelve un problema a manera de ejemplo a los alumnos, luego se les formula otro problema semejante con datos numéricos distintos, y nos encontramos con la no grata sorpresa que no hallan forma de resolverlo. Esto nos lleva a interrogarnos si hemos explicado consistentemente los procedimientos adecuados para resolver problemas o si hemos exigido mayor práctica, porque según Polya: para ser hábiles en la resolución de problemas, tenemos que resolver problemas.

El profesor que desee desarrollar en sus alumnos la aptitud para resolver problemas, debe hacerlos interesarse en ellos y darles el mayor número posible de ocasiones de imitación y práctica. Muchas veces los alumnos no resuelven los problemas porque la enseñanza se ha concretado en repetir y ejemplificar sólo con algoritmos que no incentivan ni despiertan la curiosidad de los educandos.

Existen diferentes modelos de resolución de problemas como son: modelo de Polya, modelo de Schoenfeld, modelo de Fridman, modelo de Jungk, modelo de Miguel de Guzmán, entre otros. De todos estos modelos el más utilizado y el pionero es el de Polya.

Modelo de Polya para la resolución de problemas.

Este modelo consta de cuatro etapas que dirigen la acción de quien se enfrenta a un problema, con el fin de ayudarlo a eliminar las discrepancias entre el objeto del problema su solución: *comprender el problema, concebir el plan, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida*. Analizando y sintetizando lo que al respecto se expresa en Polya (1986), tenemos que:

Para **comprender el problema** se hace necesario dirigir la reflexión sobre:

¿Cuál es la incógnita?, ¿Cuáles son los datos?, ¿Cuál es la condición?, ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?, ¿Es insuficiente?, ¿Redundante?, ¿Contradictoria?

En la segunda etapa, las reflexiones encaminadas a **concebir el plan**, deben centrarse en:

-¿Se ha encontrado con un problema semejante?

-¿Ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?

-¿Conoce algún problema relacionado con este? ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil? Mire atentamente la incógnita y trate de recordar un problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una incógnita similar.

-He aquí un problema relacionado al suyo y que se ha resuelto ya. ¿Podría usted utilizarlo? ¿Podría utilizar el resultado? ¿Podría emplear su método? ¿Le haría falta introducir algún elemento auxiliar?

- ¿Podría enunciar el problema de otra forma? ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente?
- Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero algún problema similar. ¿Podría imaginarse un problema análogo un tanto más accesible? ¿Un problema más general? ¿Un problema más particular? ¿Un problema análogo? ¿Puede resolver una parte del problema?
- Considere solo una parte de la condición; descarte la otra parte; ¿En qué medida la incógnita queda ahora determinada? ¿En que forma puede variar? ¿Puede usted deducir algún elemento útil de los datos? ¿Puede pensar en algunos otros datos apropiados para determinar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita o los datos, o ambos si es necesario, de tal forma que estén más cercanos entre sí?
- ¿Ha empleado todos los datos? ¿Ha empleado toda la condición? ¿Ha considerado usted las nociones esenciales concernientes al problema?

Para la **ejecución del plan** debe indicarse:

- Compruebe cada uno de los pasos, al ejecutar su plan de la solución.
- ¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede usted demostrarlo?

Al **examinar la solución** se indica hacer una visión retrospectiva de lo realizado, proponiendo las preguntas siguientes:

- ¿Puede usted verificar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento?
- ¿Puede obtener el resultado en forma diferente? ¿Puede verlo de golpe?
- ¿Puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema?
- ¿Puede plantear un nuevo problema relacionado con este?

Las fases anteriores caracterizan al alumno que es bueno resolviendo problemas. Cada fase se acompaña de una serie de preguntas, al estilo socrático, cuya intención es actuar como guía para la acción.

Una pregunta se impone, ¿por qué es tan difícil entonces, para la mayoría de los alumnos, la resolución de problemas en Matemáticas?

Los trabajos de Schoenfeld (1987) suponen, por otro lado, un intento de búsqueda de explicaciones para la conducta de los solucionadores reales de problemas. Propone un marco con cuatro componentes que sirven para el análisis de la complejidad del comportamiento en la resolución de problemas: **recursos cognitivos**: conjunto de hechos y procedimientos a disposición del solucionador; **heurísticas**: reglas para progresar en situaciones difíciles; **control**: aquello que permite un uso eficiente de los recursos disponibles; y el **sistema de creencias**: perspectiva con respecto a la naturaleza de la Matemática y como trabajar en ella. Sobre estos componentes puede verse la primera parte del anexo 11.

Pero hay otras **actitudes que imposibilitan la toma de buenas decisiones** durante la fase de resolución. Entre ellas cabe destacar: inflexibilidad para considerar alternativas, rigidez en la ejecución de procedimientos, incapacidad de anticipar las consecuencias de una acción, el efecto "túnel". Una explicación más detallada sobre estos dos últimos aspectos se presenta en la segunda parte del anexo 11.

Schoenfeld (1985), inspirado en las ideas de Polya, diseña uno de los modelos más completos, sobre todo en cuanto a estrategias heurísticas. En este modelo distingue también cuatro fases: análisis, exploración, ejecución y comprobación.

Las acciones a realizar en la **fase de análisis** son: Trazar un diagrama si es posible, examinar casos particulares, elegir valores especiales que sirvan para ejemplificar el problema, examinar casos límites para explorar la gama de posibilidades.

En la **fase de exploración** se debe:

1. Examinar problemas esencialmente equivalentes: por sustitución de las condiciones por otras equivalentes, por recombinación de los elementos del problema de distintos modos, introduciendo elementos auxiliares.
2. Replantear el problema mediante: cambio de perspectiva o de notación, considerando el razonamiento por contradicción o el contra-recíproco, suponiendo que se dispone de una solución y determinando cuáles serían sus propiedades.

Además, las **fases de ejecución y comprobación**, básicamente son análogas a las etapas **ejecutar el plan y examinar la solución obtenida** del modelo de Polya.

De Guzmán (1993, p.80), partiendo de las ideas de Polya y de los trabajos de Schoenfeld, ha elaborado un modelo para la ocupación con problemas, donde se incluyen tanto las decisiones ejecutivas y de control como las heurísticas. La finalidad de tal modelo es que la persona examine y remodele sus propios métodos de pensamiento de forma sistemática a fin de eliminar obstáculos y de llegar a establecer hábitos mentales eficaces, en otras palabras, lo que Polya denominó pensamiento productivo.

Consecuentemente, los modelos del resto de los autores anteriormente citados, son en verdad inspirados en las ideas de Polya, con algunas variantes, a veces significativas, pero que no expondremos aquí. Realmente no existe un modelo de carácter universal, cuyos pasos seguidos estrictamente, garanticen la solución de todos los problemas. Sin embargo, sobre la base de la experiencia acumulada por profesores de matemática y matemáticos dedicados a resolver problemas, se han esbozado a partir de un modelo seleccionado, sucesiones de indicaciones que ayudan a organizar la búsqueda de la solución.

No obstante, pueden apreciarse algunas diferencias entre los planteamientos actuales y los de hace cuatro décadas. Hoy se pretende que, a través de la resolución de problemas, se activen en el alumnado una serie de

estrategias y procesos mentales que tienen más en común con el pensar, la creatividad y la curiosidad que con la aplicación mecánica irreflexiva de unas fórmulas determinadas. Se persigue la consecución de un aprendizaje activo, mediado y significativo, tal es uno de los objetivos a lograr con la implementación de nuestra estrategia.

Además, resulta necesario destacar que en la carrera de Licenciatura en Matemática, por la gran variedad y complejidad de los problemas que se presentan, el programa heurístico general durante el proceso de resolución de los mismos debe adecuarse, aspecto este que proponemos en el capítulo 2 como resultado y uno de los aportes teóricos de nuestra investigación.

1.4.2.8 Tercer significado del empleo de la resolución de problemas: resolver problemas es "hacer matemática". Enseñanza por medio de la resolución de problemas.

En la actualidad, algunas tendencias contemporáneas de la enseñanza de la Matemática sustentan la enseñanza por resolución de problemas que pone énfasis en los procesos de pensamiento que tienen como eje principal la actividad del alumno colocándolo en la situación de participar en el descubrimiento del nuevo conocimiento.

En el método de enseñanza por resolución de problemas se trata de armonizar adecuadamente la componente heurística (atención a los procesos de pensamiento) y los contenidos específicos del pensamiento matemático; sin embargo, se critica la falta de modelos adecuados que orienten al profesor en la integración de los contenidos y los procesos en un todo armonioso en la dirección del aprendizaje.

En Rebollar (2000, p. 25) puede leerse: *“La enseñanza basada en problemas consiste en el planteo y resolución de problemas en cuya resolución se produce el aprendizaje. En este caso no se trata de problematizar el objeto de enseñanza ni de plantear problemas complejos que requieran de nuevos conocimientos matemáticos, más bien se trata de resolver problemas matemáticos relacionados con el objeto de enseñanza, sin confundirse con él, y que van conformando hitos en el nuevo aprendizaje. Este tipo de enseñanza no está didácticamente estructurado....”*

La enseñanza por problemas involucra todo un proceso de aprendizaje, donde el tutor debe ser un agente mediador entre el conocimiento y el alumno para conducirlo a utilizar la teoría o los contenidos de una o más asignaturas como herramientas que le permitan identificar problemas, determinar causas, proponer y seleccionar alternativas de solución, relacionados con el área de su disciplina. Pero también debe promover su **motivación intrínseca** para que sea el mismo estudiante quien trate de relacionar la teoría con un problema real y de su entorno, que sea capaz de relacionar los conocimientos previos con los nuevos para construir su propio conocimiento y de esta manera lograr un aprendizaje significativo.

Un problema aparece cuando es necesario completar una determinada estructura mental, o cuando se crea un conflicto entre el nuevo conocimiento y las estructuras mentales que el estudiante tiene. Teniendo en cuenta esto, la enseñanza y el aprendizaje de la matemática por medio de la resolución de problemas están dirigidos a insistir en los procesos de pensamiento y de aprendizaje, tomando como campo de acción los contenidos matemáticos.

Aunque desde hace mucho tiempo en Psicología, se han estudiado los procesos de formación, desarrollo (Vygotski, 1982) y generalización (Davidov, 1981) de conceptos; no obstante, consideramos que hay mucho que hacer en esta dirección con relación a la utilización de la resolución de problemas con este fin en matemática, sobre todo en la enseñanza superior.

Algunas de las acciones que hemos aplicado con buenos resultados al utilizar la resolución de problemas como un medio para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática son:

1. Utilizar la resolución de problemas para que los estudiantes participen en la construcción de la matemática que aprenden y para que le encuentren un adecuado sentido a sus técnicas, ideas, objetivos, estructuras, etc.
2. Utilizar problemas adecuados que motiven y faciliten la formación y desarrollo de conceptos.
3. Utilizar cadenas de problemas del tipo (problema planteado – problema resuelto – nuevos problemas planteados) que motiven y faciliten diferentes generalizaciones del problema planteado, o del concepto al cual pudiera referirse el problema, teniendo en cuenta el desarrollo del tipo de pensamiento que corresponde a cada nivel de enseñanza (pensamiento numérico en la enseñanza general y pensamiento funcional en la enseñanza superior).
4. Insistir en que la obtención de la solución de un problema no debe considerarse como la etapa final del mismo. Una vez resuelto, se debe realizar un análisis de las ventajas, calidad o deficiencias de las estrategias o métodos utilizados; se debe analizar además, las posibilidades de generalización del problema, por ejemplo, eliminando restricciones bajo las cuales se resolvió, ampliando el contexto conceptual en que se planteó, etc.
5. Mediar para que en el transcurso de la resolución del problema afloren distintas formas de resolución, teniendo en cuenta los diferentes estilos de aprendizajes de los alumnos, mediante la orientación de su análisis desde la perspectiva de diferentes contextos matemáticos (geométrico, algebraico, aritmético, funcional, etc). De acuerdo a nuestra experiencia, muchos estudiantes que llegan a la universidad han desarrollado muy pocas habilidades en el análisis y la utilización de diferentes vías para resolver un problema, y lo que resulta más agravante, terminan su carrera sin esta habilidad.

6. Ofrecer impulsos y adecuados niveles de ayuda para que los estudiantes sientan la necesidad, una vez que han logrado la solución de un problema, de plantear nuevos problemas que estén dirigidos, por ejemplo, a eliminar alguna restricción bajo la cual fue resuelto, a extenderlo a un contexto matemático más general, o a resolver un problema de su vida relacionado con el problema resuelto.
7. Motivar el estudio de un nuevo tema mediante el planteamiento de un conjunto de problemas que les permita a los estudiantes comprender la importancia de dicho tema, y que resolverán durante el desarrollo del mismo. Estos problemas pueden tratar sobre el desarrollo histórico del tema, aplicaciones, el entorno, situaciones de otras áreas matemáticas, etc.; de manera que el planteamiento del nuevo aprendizaje (conocimientos en la ZD potencial) mediante la formulación del problema y el proceso de solución del mismo se lleven a cabo de manera significativa, teniendo en cuenta las estructuras mentales existentes (conocimientos en la ZD), las que, después de resuelto el problema, son susceptibles de modificarse; esto es, ampliarse, rechazarse, reemplazarse, etc.
8. Tener presente que el PEA basado en la resolución de problemas debe contribuir a ampliar la esfera de intereses de los alumnos, de manera que se vayan automotivando cada vez más y permita desarrollar habilidades en el planteamiento y resolución de problemas de su interés.

En el aprendizaje por problemas, el planteamiento del problema es un elemento importante ya que contribuye a formular alternativas, seleccionar los contenidos o soportes teóricos. Esta estrategia reviste gran importancia ya que permite:

Al alumno, relacionar los problemas con la realidad, encontrar una vía de relacionar el conocimiento nuevo con el que ya tiene, correlacionar la asignatura con otras asignaturas, disciplinas del año (articulación horizontal) y de otros años (articulación vertical), y en general, con el entorno; utilizar la teoría para la búsqueda de causas y soluciones; investigar, descubrir, crear, proponer soluciones y mostrar resultados; desarrollar el pensamiento hipotético y deductivo necesario en todo proceso de investigación; aplicar los conocimientos de manera inmediata; desarrollar habilidades de comunicación y aprendizaje; trabajar en grupos interdisciplinarios para socializar hallazgos, discutir, reflexionar sobre resultados, plantear otras soluciones y compartir conocimientos; desarrollar el sentido de responsabilidad y compromiso social; desarrollar el pensamiento crítico; tomar decisiones; participar (aprendizaje activo) en el proceso de construcción de su conocimiento y en el propio desarrollo de la asignatura.

Como **estrategia pedagógica** implica que el planteamiento y la resolución de los problemas se lleve cabo de manera significativa, activa y mediada cuando se requiera; que el rol del **docente** deje de ser el de transmisor del conocimiento y se convierta en el mediador principal, contribuyendo a que el alumno juegue su papel

protagónico en el PEA; que incentive el espíritu de investigación en el estudiante mediante acciones encaminadas a la identificación de los problemas, a su planteamiento y formulación, así como a la búsqueda de soluciones posibles; estimular el interés por el estudio y la **motivación intrínseca**, obteniéndose mejores resultados en el aprendizaje; por último, el docente debe realizar un efectivo control del proceso encaminado al logro del aprendizaje significativo.

Otro aspecto importante a tener en cuenta en esta estrategia consiste en:

¿Cómo evaluar el aprendizaje por problemas?

Para evaluar eficientemente este tipo de aprendizaje es necesario combinar las diferentes formas de este componente didáctico.

Según su **temporalidad**: se recomienda combinar evaluaciones frecuentes y parciales.

Según sus **agentes**, se deben realizar *coevaluaciones*, mediante su valoración personal del nivel de cumplimiento de los objetivos que persigue la solución del problema, el nivel de independencia durante su solución, el nivel de ayuda que recibió o prestó a los demás, el aprendizaje que ha tenido de los errores cometidos por él o sus compañeros antes o durante el proceso de solución, la autorregulación de los procesos que tienen lugar durante la solución, los resultados obtenidos ante preguntas orales o evaluaciones escritas, desarrollo de su expresión oral y escrita, grado de organización, limpieza y disciplina durante el proceso de solución, para esto pueden realizarse intercambios de libretas, oponencias a las ponencias de otros alumnos, la determinación de las fortalezas y debilidades de otros alumnos.

También deben realizarse *autoevaluaciones* de sus resultados personales por medio de la realización de autovaloraciones y el análisis autocrítico de su trabajo, así como la determinación de las fortalezas y debilidades propias.

Por otra parte, deben combinarse evaluaciones que contribuyan a la valoración por el profesor, no solo del grado de dominio por los alumnos de los *resultados* obtenidos durante el PEA, sino de los *procesos* que han intervenido en su obtención.

Además, deben combinarse preguntas tanto reproductivas, productivas como creativas.

En el caso de los procesos que intervienen en el tratamiento de conceptos, pueden proponerse tipos de problemas a evaluar más específicos que se mostrarán más adelante.

Respecto al **problema**, deben evaluarse: su relación con el área de estudio, la zona de desarrollo actual de los alumnos, en qué medida facilita la integración del conocimiento nuevo con el ya existente, cuánto aporta al tipo de conocimiento que desarrolla (conceptual, procedimental o actitudinal), papel de los alumnos en el planteamiento y formulación del problema, la claridad y precisión de su formulación.

Además, **el docente** podrá evaluar el desempeño del estudiante durante el PEA, su comportamiento en el grupo, su capacidad para manejar la información, para identificar y plantear el problema, y para estudiar y seleccionar la alternativa de solución.

Además, debe priorizar la evaluación en su función formativa sobre la sumativa.

Sobre las características de la función sumativa de la evaluación, podemos afirmar que:

Se evalúa fundamentalmente a través de controles y exámenes puntuales encaminados a comprobar el grado de asimilación de los resultados obtenidos en el PEA, como saberes conceptuales y procedimentales, su calificación es numérica y uniforme, considera que los instrumentos empleados son indicadores fiables de los saberes de los alumnos; por lo que sino se combina con la evaluación formativa, entonces no se tienen en cuenta las diferencias individuales, no se evalúan los procesos que intervienen durante el aprendizaje, a la vez que no se valoran otras variables importantes del PEA.

Sobre este particular Almeida (2000) señala *“La calificación se realiza para seleccionar aquellos alumnos que pueden continuar el proceso de ascensión en el sistema educativo y para adaptarlo a ciertas costumbres escolares, en fin, para mantener el control formal y aparente de la situación, o sea, mantener el funcionamiento de un sistema de enseñanza-aprendizaje artificial, que desprovisto de este mecanismo tendería a una progresiva degeneración”*.

Sobre las características de la función formativa de la evaluación, podemos afirmar que:

- Se centra tanto en el proceso como en el resultado, pues su propósito no es juzgar y sancionar el aprendizaje producido, sino que se centra en la ayuda a conseguirlo.
- Contribuye a que se produzca un aprendizaje significativo; de manera que presta especial atención a evaluar: si lo que el alumno sabe (con lo cual se debe relacionar el nuevo conocimiento) lo tiene estructurado significativamente, en caso que no sea así, debe contribuir a que se pueda organizar este conocimiento previo significativamente; lo que no sabe y es necesario para que se pueda estructurar adecuadamente el nuevo conocimiento; y si el nuevo conocimiento se presenta significativamente.
- Según Martínez (2002, p.91) *“Permite la incorporación de los estudiantes al proceso de evaluación, pues el alumno participa en la evaluación de sus compañeros (coevaluación) y realiza su autoevaluación, el profesor debe mostrar alta sensibilidad y tacto pedagógico en el tratamiento diferenciado, ..., creando un clima de comprensión y ayuda mutua, a la vez que suscita el afianzamiento de importantes valores morales como la responsabilidad, la honestidad, la honradez y la solidaridad.”*

Otras acciones del docente durante el aprendizaje por problemas, pueden ser:

- Definir si durante todo el desarrollo de la asignatura trabajará la estrategia de aprendizaje por problemas o si se aplicará en puntos estratégicos de la misma.

- Mediar adecuadamente para que en el proceso de solución se manifiesten los aprendizajes activo, con la correspondiente autogestión del aprendizaje y autorregulación de los procesos; mediado, con niveles de ayuda adecuados para vencer dificultades, aunque sin caer en manifestaciones de ayuda prematura, explotación de los errores; y significativo, con el empleo de adecuados organizadores, logro de transferencias de conocimientos, etc.
- Fomentar la aplicación, por los alumnos, de soluciones alternas del problema para así estimular el deseo de utilizar el conocimiento adquirido y reconocer la contribución del problema al desarrollo de su conocimiento y sus habilidades.
- Suscitar la autorregulación mediante la reflexión honesta y sincera con él mismo sobre los resultados, como diseñador y guía de la evaluación del trabajo.

Como se puede observar, la estrategia del “**aprendizaje por problemas**” puede contribuir a que se desarrollen los procesos de aprendizaje activo, mediado y significativo, a la generación y desarrollo del espíritu de investigación y a despertar el interés por el estudio en la medida que participan en el desarrollo de la teoría y en su aplicación a problemas variados que pudieran incluir contenidos que estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, a la vez que los motiva a buscar su solución, mediante la aplicación de los conocimientos adquiridos, lográndose con ello un conocimiento verdaderamente significativo.

CAPÍTULO 2

ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA LOS PROCESOS DE FORMACIÓN, DESARROLLO Y GENERALIZACIÓN DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS EN LA CARRERA LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

2.1 Ideas generales sobre la estrategia didáctica.

2.1.1 Avatares del concepto estrategia.

El término estrategia es de origen griego, procede de la fusión de dos palabras: stratos (ejército) y agein (conducir, guiar). En el diccionario Larousse, este se define como el arte de dirigir operaciones militares, habilidad para dirigir un asunto; aquí se confirma la referencia sobre el surgimiento en el campo militar, no obstante, es necesario precisar que en los últimos tiempos, este concepto se ha extrapolado a varias esferas de la actividad del hombre.

Este vocablo comenzó a invadir el ámbito de las Ciencias Pedagógicas alrededor de la década del 60 del pasado siglo, coincidiendo con el comienzo del desarrollo de investigaciones dirigidas a describir indicadores relacionados con la calidad de la educación.

Las investigaciones sobre estrategias han estado, en muchos casos, vinculadas a los métodos y los programas para aprender a pensar y crear. Sobre esto, Betancourt (1994, p.4) plantea:

"...se estudian las estrategias por diferentes investigadores en la actualidad, como una acción humana, orientada a una meta intencional, consciente y de conducta controlada y poniéndola en relación con conceptos tales como: plan, táctica, reglas y heurística... las estrategias han sido consideradas como una actividad netamente intelectual, encaminada a trazar el puente de unión entre el qué y el cómo pensar".

En esta propuesta no se iguala el concepto de estrategia con el término táctica, pues éste es asumido como la instrumentación de la estrategia. Es decir, una estrategia bien diseñada, se materializa por medio de tácticas concretas.

Otras definiciones de estrategia dadas en Borges (1991, p.49), Sánchez (1991, p.3), Sánchez (1993, p.27), Colectivo Autores (1994, p.7), Goce y otros (1994, p.19); así como rasgos comunes a las mismas ofrecidos por Valcárcel (1998), pueden verse en el anexo 12.

El estudio de las estrategias debe basarse en un enfoque teórico-metodológico dialéctico, que refleje toda la riqueza de la información acumulada en esta esfera, así como el carácter activo, consciente y orientado hacia un objetivo.

Al respecto, consideramos que una propuesta bastante acabada sobre la definición y los componentes de una estrategia, es la que exponen los investigadores del "Centro de Estudios de Ciencias Pedagógicas" (CECIP) de la Universidad Pedagógica "Félix Varela", que han destacado: *"En el contexto de la Pedagogía, la estrategia*

establece la dirección inteligente, y desde una perspectiva amplia y global, de las acciones encaminadas a resolver los problemas detectados en un determinado segmento de la actividad humana. Se entienden como problemas las contradicciones o discrepancias entre el estado actual y el deseado, entre lo que es y debería ser, acorde con determinadas expectativas que dimanen de un proyecto educativo dado. Su diseño implica la articulación dialéctica entre objetivos (metas perseguidas) y metodología (vías instrumentadas para alcanzarlas).”

Por otra parte, es necesario hacer ver a los investigadores en Pedagogía, en qué momento se requiere realizar una investigación para obtener una estrategia como resultado científico. Esto es necesario cuando el propósito esencial del trabajo sea la proyección a corto, mediano y largo plazo de la transformación de un objeto temporal y espacialmente ubicado, desde un estado real hasta un estado deseado, mediante la utilización de determinados recursos y medios que responden a determinados objetivos.

Rasgos generales de una estrategia, señalados por los miembros del CECIP, se relacionan a continuación.

2.1.2 Rasgos generales de una estrategia.

- Concepción con enfoque sistémico en el que predominan las relaciones de coordinación, aunque no dejan de estar presentes las relaciones de subordinación y dependencia.
- Una estructuración a partir de fases o etapas relacionadas con las acciones de orientación, ejecución y control, independientemente de la disímil nomenclatura que se utiliza para su denominación.
- El hecho de responder a una contradicción entre el estado actual y el deseado de un objeto concreto ubicado en el espacio y en el tiempo que se resuelve mediante la utilización programada de determinados recursos y medios.
- Un carácter dialéctico que le viene dado por la búsqueda del cambio cualitativo que se producirá en el objeto (estado real a estado deseado), por las constantes adecuaciones y readecuaciones que puede sufrir su accionar y por la articulación entre los objetivos (metas perseguidas) y la metodología (vías instrumentadas para alcanzarlas).
- La adopción de una tipología específica que viene delimitada a partir de lo que se constituya en objeto de transformación.

2.1.3 Fases de la estrategia.

Un ejemplo de tesis en la que se observa claramente las fases de una estrategia es Alonso (2000), en la que se describe sucintamente: *“La estrategia se concibe de manera tal que su desarrollo ocurre en tres fases que se denominan: **preparatoria, ejecutiva y evaluativa...**”*

Sobre los elementos y condiciones que deben contener cada una de las fases se encuentran:

Fase preparatoria: existencia de insatisfacciones respecto a los fenómenos, objetos o procesos educativos en un contexto a ámbito determinado; diagnóstico de la situación; planteamiento de objetivos y metas a alcanzar en determinados plazos de tiempo; definición de actividades y acciones que respondan a los objetivos trazados y entidades responsables; y, planificación de recursos y métodos para viabilizar la ejecución y el control. En la planificación del control se definen los indicadores y los parámetros a tener en cuenta para su control.

Fase de ejecución: ejecución de las acciones previstas en la planificación, readecuando las mismas a las exigencias que la práctica vaya exigiendo.

Fase de evaluación: evaluación de resultados obtenidos durante la implementación, por medio de la valoración de la calidad de los indicadores previstos, valiéndose de métodos como: la entrevista, la encuesta, la observación, las pruebas de contenido, estudio de casos, etc.

2.1.4 Aspectos organizativos de una estrategia en los marcos de un trabajo científico.

Sobre este particular, coincidimos con los miembros del CECIP, cuando plantean los siguientes elementos organizativos:

- I. Introducción. Fundamentación. Se establece el contexto y ubicación de la problemática a resolver, ideas y puntos de partida que fundamentan la estrategia.
- II. Diagnóstico. Indica el estado real del objeto y evidencia el problema en torno al cual gira y se desarrolla la estrategia.
- III. Planteamiento del objetivo general.
- IV. Planeación estratégica. Se definen metas u objetivos a corto y mediano plazo que permiten la transformación del objeto desde su estado real hasta el estado deseado.
- V. Planificación por etapas de las acciones, recursos, medios y métodos que corresponden a estos objetivos.
- VI. Instrumentación. Explicar como se aplicará, bajo qué condiciones, durante qué tiempo, responsables, participantes.
- VII. Evaluación. Definición de los logros, obstáculos que se han ido venciendo, valoración de la aproximación lograda al estado deseado.

2.2 Propuesta de la estrategia didáctica para los procesos de formación, desarrollo y generalización de conceptos matemáticos (con un proceso de formación inductivo) en la carrera de Licenciatura en Matemática.

2.2.1 Fundamentación.

2.2.1.1 El aprendizaje de conceptos como proceso complejo, cognitivo, mediado, activo y significativo.

Aunque en el epígrafe 1.3 se ofreció una fundamentación psicopedagógica, basada principalmente en El Enfoque Histórico Cultural, de los aprendizajes activo, mediado y significativo de cualquier tipo de contenido en general, en este epígrafe, basándonos en esas ideas generales, profundizaremos en los fundamentos didácticos de estos aprendizajes, particularizando en el caso de la resolución de problemas como medio para el estudio de conceptos matemáticos con un proceso de formación inductivo.

El aprendizaje es un proceso complejo, un proceso de procesos; por lo tanto, la adquisición de un conocimiento determinado exige la realización de determinadas actividades mentales que deben ser adecuadamente planificadas para conseguir las expectativas abiertas en el momento inicial. La identificación y diagnóstico de estos procesos es lo que permitirá arbitrar programas de mejora y de intervención educativa.

El aprendizaje como proceso cognitivo se basa en que el estudiante para aprender significativamente debe establecer conexiones entre una situación de aprendizaje (conocimiento nuevo) y los conocimientos que él posee en sus estructuras mentales. Esas conexiones requieren de su actividad mental, actividad que se incrementa con las interacciones entre lo que ya conoce el estudiante y:

- El conocimiento que se le presenta por primera vez, así como,
- Las interpretaciones de otras personas que también participan en el proceso de aprendizaje; por ejemplo, el profesor y otros alumnos.

Si con sus actividades, o por medio de otros participantes en el proceso, el estudiante arriba a un conjunto de observaciones o conclusiones que no puede explicar; entonces esta situación puede ser aprovechada para provocar un proceso de modificación (ajuste, reemplazo, ampliación, rechazo, etc.) de sus modelos mentales. De esta forma, se llega a una mejor comprensión del nuevo conocimiento y de los conocimientos adquiridos con anterioridad.

Se llama **aprendizaje** al proceso de modificaciones de los modelos mentales del estudiante para llegar a una comprensión de la situación de aprendizaje.

Luego, hasta aquí se ha definido el aprendizaje como un proceso cognitivo, puesto que requiere de conocimiento que tiene que ser comprendido, y en parte, como un proceso activo y mediado ya que lo facilita la actividad del estudiante y la mediación de otros participantes en el proceso de aprendizaje. En la figura 2 se presenta un diagrama que sintetiza lo antes explicado.

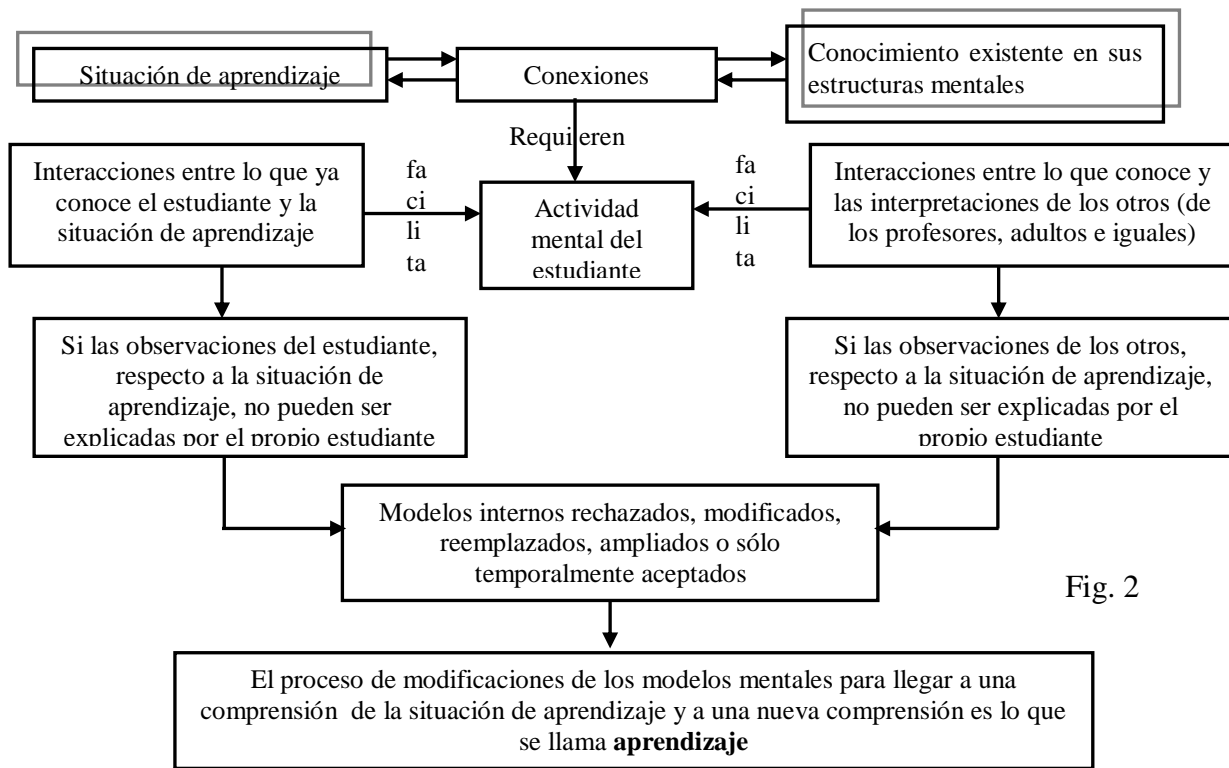


Fig. 2

En el estudio conceptual, la modificación de los modelos mentales del alumno pueden producirse, por ejemplo, cuando el alumno tiene que colocar el nuevo concepto dentro del sistema de conceptos que ya posee, por medio de adecuados organizadores, como mapas de extensiones, de contenidos, simbólicos, diagramas, etc.

El aprendizaje como un proceso cognitivo mediado se justifica en la definición de ZDP dada por Vygotski expuesta en el capítulo 1, para la cual ofrecemos un organizador a manera de esquema en la figura 3

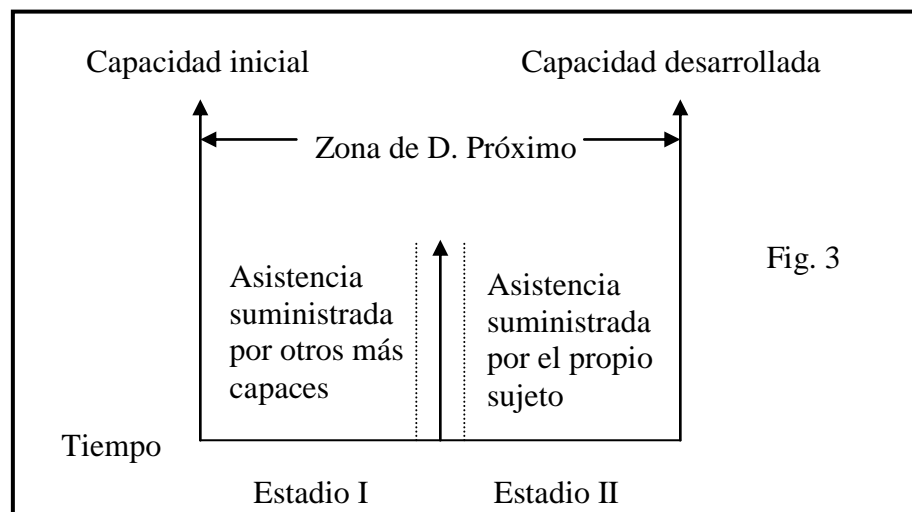


Fig. 3

De este esquema puede apreciarse que, tomando como base la ZDP, en el aprendizaje hay que distinguir entre lo que el estudiante hace por sí mismo y lo que puede hacer y aprender con ayuda de otras personas (categoría “otros” de Vygotski).

A continuación se hacen tres aclaraciones importantes: los planteamientos de Vygotski son consecuencia de sus investigaciones con niños y adolescentes, no obstante, se supone que en el aprendizaje de los adultos pueden operar procesos idénticos; el paso de la ejecución asistida a la ejecución no asistida se produce de manera paulatina y no de forma brusca, por esta razón es que en la figura 3, hemos separado el estadio I del estadio II por una franja y no por una línea; y, el desarrollo de cualquier capacidad de ejecución en los estudiantes es una relación de tránsito entre hetero-regulación social y auto-regulación.

La aceptación de la ZDP y, consecuentemente, del carácter mediado del aprendizaje, lleva implícito la *creación de programas eficientes para el entrenamiento de los profesores*, con el objetivo de que comprendan qué significa ser mediadores en el aprendizaje de sus estudiantes y capacitarlos para actuar como tales. El papel de mediador es precisamente una de sus funciones más importantes.

Según Feuerstein (1993), el profesor puede mediar las experiencias de los estudiantes; interpretando y organizando los estímulos externos y guiando su pensamiento hacia metas apropiadas, con el objetivo de que asuma la responsabilidad del aprendizaje y que lo realice de forma independiente y auto-regulada, para esto es necesario crear las condiciones para establecer un conjunto de acciones que tenga como objetivo principal la transferencia de la responsabilidad a cada individuo de su aprendizaje; o sea, la mediación debe facilitar el desarrollo de los procesos de pensamiento necesarios para la construcción de significados y para el aprendizaje independiente.

Coll (1987), al referirse a Vygotski expresa *“Las investigaciones de su escuela lo condujeron a afirmar que la actividad cognitiva es inseparable del medio cultural, lo cual ha tenido repercusiones muy importantes en el PEA ya que rescata la importancia del profesor, fundamentalmente como un mediador y velador de que se mantenga una adecuada relación entre la cantidad y la calidad de su ayuda pedagógica y las necesidades del estudiante durante su aprendizaje”*.

La aceptación de que la mediación facilita el aprendizaje, compromete a los estudiantes a ser mediadores en el aprendizaje de sus compañeros; así como en su propio aprendizaje. Luego, deben: compartir lo que conocen (y lo que no conocen) sobre la situación de aprendizaje con los restantes compañeros de grupo, para contribuir al incremento de su actividad mental; utilizar lo que conocen para hacer predicciones y plantear conjeturas que, posteriormente, mediante un conjunto de acciones e interacciones con el profesor y otros estudiantes sean probadas, modificadas o refutadas; ajustar el nuevo aprendizaje con el conocimiento anterior por medio de nuevos modelos, esquemas, etc.

Sobre el aprendizaje mediado en la resolución de problemas G. Polya (1986), afirma:

“...una de las más importantes funciones del maestro es auxiliar a sus alumnos como guía permanente, lo cual es una tarea nada fácil; debido a que se requiere tiempo, práctica, dedicación y buenos principios...El estudiante debe adquirir en su trabajo personal la más amplia experiencia posible. Pero si se deja sólo frente a un problema, sin ayuda alguna, puede que no progrese. Por otra parte, si el maestro ayuda demasiado, nada se deja al alumno”.

El aprendizaje como un proceso cognitivo activo se justifica en que los estudiantes, para entender los contenidos que reciben, tienen que realizar diferentes actividades; y en dependencia de las actividades que realizan adquieren diferentes aprendizajes. Ver tabla 2.

| Actividad que realiza | Aprendizaje que obtiene |
|------------------------------|--------------------------------|
| Repite | Repetitivo |
| Reproduce | Reproductivo |
| Relaciona los contenidos | Significativo |

Sin embargo, es muy difícil convencer a los estudiantes de que el aprendizaje verdadero, importante y duradero sólo se produce con su actividad, y que si él decide no participar activamente en el proceso de aprendizaje, entonces ese aprendizaje no se produce. Surge entonces la pregunta:

¿Qué deben hacer los estudiantes para lograr un aprendizaje activo?

La consecución de un aprendizaje activo por los alumnos requiere de: la *formulación de metas*, la *organización del conocimiento*, la *construcción de significados* y la *utilización de estrategias*.

Para que el estudiante aprenda a **plantearse metas**, la enseñanza debe proporcionar situaciones en que él se vea obligado a ello. Metas que el estudiante debe aprender a plantearse son: comprender, completar o dividir una tarea en tareas más simples; las metas que el estudiante se plantea determinan si se producirá o no el aprendizaje, así como el tipo de actividad mental necesaria para su aprendizaje. Luego, el aprendizaje es un proceso intencional ya que está orientado a la meta. Entre las actividades mentales necesarias para alcanzar una meta están las siguientes: “*Analizar la tarea de aprendizaje que incluye la meta, analizar las condiciones para lograrla, dividir la meta en submetas y diseñar un plan adecuado para alcanzar la meta o las submetas*”. Beltrán (1998. p.34).

En la estrategia didáctica que se propone se orienta la implementación de acciones en este sentido durante el estudio de conceptos matemáticos.

Sobre el empleo de organizadores.

Todos los que nos hemos ejercitado en el aprendizaje, sabemos que resulta muy difícil aprender la información que recibimos de manera desorganizada y, hemos desarrollado un conjunto de estrategias de **organización de**

la información. Luego, los profesores, debemos guiar y dar impulsos a los estudiantes para que encuentren una estructura en los contenidos informativos que le presentamos o para que los estructuren de la mejor manera en relación con sus conocimientos anteriores y para que encuentren patrones, rasgos y significados. Una buena organización de los contenidos contribuye a que el aprendizaje sea duradero y no se pierda cuando se reciben otros aprendizajes.

La **construcción del conocimiento** significa que el estudiante integre lo que aprende con lo que ya conoce. La mejor manera de almacenar el conocimiento en nuestra mente es mediante organizadores como: redes de conceptos o esquemas, por ejemplo, mediante mapas de extensiones, mapas de contenidos, diagramas conmutativos, diferentes representaciones, etc. El aprendizaje se logra, como ya hemos señalado, cuando se establecen las conexiones apropiadas entre la nueva información y la información existente. La calidad y velocidad con que se establecen estas conexiones depende de cómo se tenga organizado el conocimiento anteriormente adquirido y de cómo se organiza la nueva información.

Por otra parte, para que se produzca el aprendizaje el estudiante tiene que utilizar diferentes *estrategias de procesamiento de la información*; entre otras, estrategias generales tales como *organizar, elaborar, repetir, controlar y evaluar*. Sin estas estrategias el aprendizaje puede ser deficiente. La aplicación de las mismas produce un cambio en el conocimiento a partir de la nueva comprensión. Cuando el estudiante logra una profunda comprensión de un conocimiento puede, por una parte, incorporar ese conocimiento a su pensamiento y, por otra, puede pensar sobre ese conocimiento. Todo lo cual permite utilizar ese conocimiento, que es precisamente la mejor prueba de su correcta comprensión.

El papel del estudiante en el logro de un aprendizaje activo, corresponde al de un ser autónomo, auto-regulado, que conoce sus propios procesos cognitivos y tiene en sus manos el control del aprendizaje, que no se limite a adquirir conocimiento, sino que lo construye usando la experiencia previa para comprender y moldear el nuevo aprendizaje.

La instrucción debe estar centrada en el estudiante. Al respecto resulta muy interesante el planteamiento de Dewey (1929): *“Ahora el cambio que sobreviene en nuestra escuela es el traspaso del centro de gravedad. Es un cambio, una revolución muy semejante a la introducida por Copérnico, trasladando el centro de gravedad de la Tierra al Sol. En este caso el alumno se convierte en el Sol, hacia el cual se vuelven las aplicaciones de la educación; él es el centro respecto del cual se organizan”*

La instrucción no se traduce directamente en la ejecución, sino indirectamente, a través de los procesos que se activan, pues los conocimientos no se graban mecánicamente en la memoria, sino que los sujetos los construyen activa y significativamente.

Otras acciones encaminadas al logro de un aprendizaje activo durante la resolución de problemas pueden verse en el anexo 13.

Con estas acciones se facilita que el alumno: diagnostique, planee, desarrolle, ejecute y evalúe sus propias necesidades de aprendizaje; adquiera de manera continua conocimientos necesarios para transformar o dar solución a problemas vitales del trabajo o de la vida en general; tome decisiones ante las diversas posibilidades luego de analizar la teoría, la práctica y el método más adecuado para la situación.

En nuestra propuesta se deja claro cómo durante el estudio conceptual, es vital la puesta en práctica de acciones para el logro de los aprendizajes activo, mediado y significativo, el último de los cuales se caracteriza a continuación.

Muy importante resulta la concepción del **aprendizaje como un proceso cognitivo significativo**, pues en el PEA se deben propiciar situaciones para que los estudiantes construyan significados, es decir, estructuras cognitivas organizadas y relacionadas. Si el contenido nuevo que se les presenta los estudiantes lo relacionan de manera arbitraria o no lo relacionan con el conocimiento que ellos tienen; entonces a lo más que podemos aspirar es a que se produzca un aprendizaje memorístico o repetitivo.

Si al estudiar un determinado contenido totalmente articulado curricularmente con contenidos anteriores, el estudiante no tiene las estructuras necesarias para su aprendizaje, entonces para que se realice aprendizaje significativo habrá que recurrir a otro tipo de organizador.

Consideramos que se han dado suficientes elementos para asegurar que no tiene sentido la discusión sobre qué es más importante, si aprender contenidos o procedimientos (procesos); pues ha quedado claro que lo que importa es que ambas cosas se aprendan significativamente.

Por otra parte, el aprendizaje además de estar determinado por el conocimiento previo, depende de la capacidad adquirida por el alumno a lo largo de su desarrollo, o sea, del nivel alcanzado por sus estructuras mentales que le permiten poner en marcha una determinada capacidad de pensar y aprender. Por ejemplo, en Matemática no es posible pretender lograr un aprendizaje que requiera estructuras relativas a un pensamiento funcional, cuando el alumno ha tenido sólo un desarrollo de su pensamiento numérico.

La construcción de conocimientos está orientada a compartir significados. Para lograr esto, en el PEA se debe realizar un conjunto de actividades en las que intervengan los estudiantes y el profesor, encaminadas a compartir colecciones de significados cada vez más amplias relativas a los contenidos del currículo, específicamente de los conceptos ya estudiados y los que están en estudio.

Según Ausubel y otros (2000, p.46), *“...el aprendizaje significativo por recepción o por descubrimiento requiere tanto de una actitud de aprendizaje significativo como de la presentación de material potencialmente significativo”*.

Por otra parte, en una variante de enseñanza de la Matemática, hemos puesto en un primer plano los problemas, de modo que los conceptos adquieran significado en ese contexto, lo que sin dudas constituye un punto teórico importante en el **aprendizaje significativo**.

En el análisis del rendimiento en **situaciones de resolución de problemas**, los aspectos centrales a investigar generalmente se relacionan con lo que el individuo sabe y cómo usa ese conocimiento, cuáles son las opciones que tiene a su disposición y por qué utiliza o descarta algunas de ellas. Es importante señalar que en estos contextos, el conocimiento de base puede contener información incorrecta, de manera que el alumno puede arrastrar sus concepciones previas o sus limitaciones conceptuales a la resolución de problemas y esas son las herramientas con las que cuentan.

Este planteamiento señala la importancia e influencia del conocimiento de base (también llamado “recursos”) en resolución de problemas matemáticos. Estos esquemas de conocimiento son el vocabulario y las bases para el rendimiento ante la solución de problemas y para la obtención de un aprendizaje verdaderamente significativo.

Después que se ha garantizado que los conocimientos básicos precedentes a emplear en la situación de aprendizaje ya han sido aprendidos significativamente, pueden plantearse problemas en cuyo proceso de solución se van conformando el nuevo aprendizaje, pero para garantizar que, como producto del mismo se obtengan estructuras mentales organizadas y más fáciles de recordar a largo plazo, deben emplearse adecuados organizadores de la información; en el caso de los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual, estos pueden ser: mapas de extensiones, de contenidos, simbólicos, diagramas, etc. También existen otros aspectos no menos importantes de cualquier proyecto de aprendizaje que eduque, instruya y desarrolle, estos aspectos se basan en los cuatro pilares de la educación para el siglo XXI “La educación a lo largo de la vida”, expuestos en el informe Delors (1996) de la UNESCO y en la introducción.

Estos pilares son: **Aprender a Conocer** (incluye aspectos cognitivos como las habilidades de pensamiento: conceptualización, observación, clasificación, comparación y contraste, inducción, deducción, abstracción; así como el manejo y comprensión de la información que permiten construir el conocimiento de una manera significativa; también incluye aspectos metacognitivos, que implican autorreflexión y autorregulación de los procesos y productos de aprendizaje, con el fin de detectar debilidades y fortalezas para así plantear estrategias de mejoramiento, como por ejemplo: desaprender conductas inapropiadas de control aprendidas antes), **Aprender a Hacer** (que incluye los saberes procedimentales), **Aprender a Ser y Aprender a Convivir** (que van más a los saberes actitudinales y la formación de valores).

Para profundizar en estos pilares, puede consultarse el anexo 14.

2.2.1.2 Los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual.

En cuanto al **proceso de formación conceptual**, es conocido que la formación de un concepto es un proceso complejo cuyo comienzo puede ser la contemplación de la realidad concreta no analizada: sensaciones, percepciones y representaciones (vía inductiva); sin embargo, no todos los conceptos surgen directamente de las sensaciones y las percepciones. El punto de partida en la formación de un concepto puede ser otro concepto ya formado y con cierto nivel de desarrollo (vía deductiva).

En la formación de conceptos por vía inductiva, la **comparación** juega un papel muy importante, pues gracias a ella es posible determinar relaciones importantes entre los objetos y fenómenos de la realidad como son las de identidad, semejanza, diferencia, etc. Por medio de la comparación se pueden determinar rasgos comunes entre diferentes objetos de la realidad.

Según Rubinstein, el resultado de comparar objetos mediante el desglose de los rasgos comunes en los que coinciden dichos objetos, se utiliza en los estadios iniciales del conocimiento, mientras éste no alcanza el nivel de conocimiento teórico. En la investigación matemática, con mucha frecuencia se hacen comparaciones de objetos abstractos y se seleccionan rasgos comunes para realizar distintas generalizaciones entre las cuales se encuentran las correspondientes a la formación conceptual. Es de destacar el hecho de que, en el PEA de la Matemática Superior, los objetos que se comparan en el proceso de formación conceptual son objetos abstractos.

Junto con el proceso de comparación se realizan **procesos de análisis discriminativos** de los rasgos o patrones comunes, y mediante procesos de análisis más profundos se separan los rasgos esenciales y no cualquier rasgo común de los objetos que se analizan. Parejamente al proceso de selección de rasgos comunes o patrones comienza un proceso de transformación de estos rasgos, que en el caso de la matemática puede ser bastante profundo. Precisamente el **proceso de abstracción** consiste en transformar todo lo dado (observado) excluyendo, quitando lo accesorio, que complica y oculta su esencia.

Para formar un concepto es necesario abstraer, separar los elementos y considerarlos aparte de la totalidad de la experiencia concreta en la cual están los objetos. La esencia es algo propio e intrínseco del objeto. La abstracción de un rasgo común a los objetos que se analizan conduce a un modelo abstracto de dicho rasgo. Ver figura 4.

En la adecuada formación de un concepto, la unión es tan importante como la separación: la **síntesis** debe ser

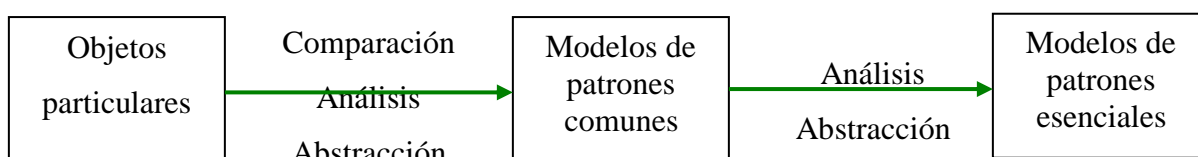


Fig. 4

combinada con el análisis. Por medio del proceso de síntesis se agrupan los modelos de rasgos esenciales en una clase que sirve de criterio para modelar los objetos particulares que se comparan y analizan, en una clase de objetos abstractos (en el caso de la matemática en una clase de objetos más abstractos); y para determinar si nuevos objetos pueden modelarse atendiendo a esa clase de modelos de rasgos esenciales en la referida clase de objetos abstractos. Ver figura 5.

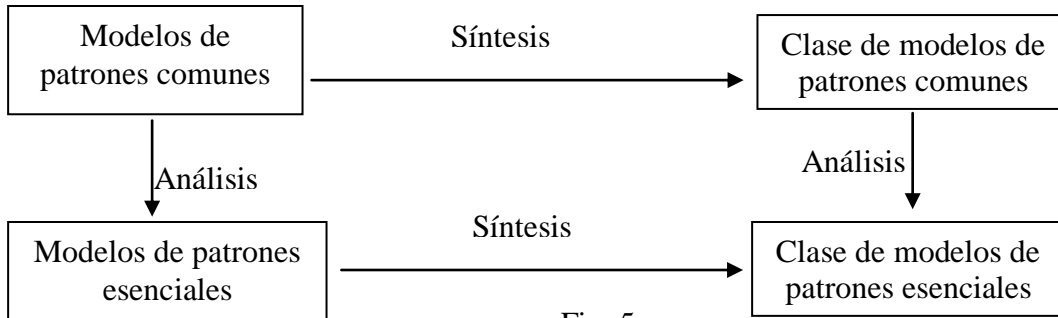


Fig. 5

En la educación del nivel universitario, la formación de un concepto requiere de una clase de modelos de patrones (propiedades) esenciales. A esta clase se puede llegar, fundamentalmente, por las dos vías que se muestran en la figura 5. Una primera vía, que comienza agrupando modelos de patrones (propiedades) comunes mediante un proceso de síntesis en una clase de propiedades comunes, y posteriormente reduciendo esta clase mediante un proceso de análisis a una clase de propiedades esenciales. Una segunda vía, que se inicia con un proceso de análisis, que conduce a la eliminación de propiedades comunes no imprescindibles y que termina con un proceso de síntesis en que se agrupan las propiedades esenciales en una clase.

El proceso de agrupar los objetos particulares mediante sus modelos abstractos en una clase particular, que se caracteriza por satisfacer los rasgos esenciales sintetizados en una clase de modelos de rasgos es lo que denomina primer proceso de **generalización** conceptual. Figura 6

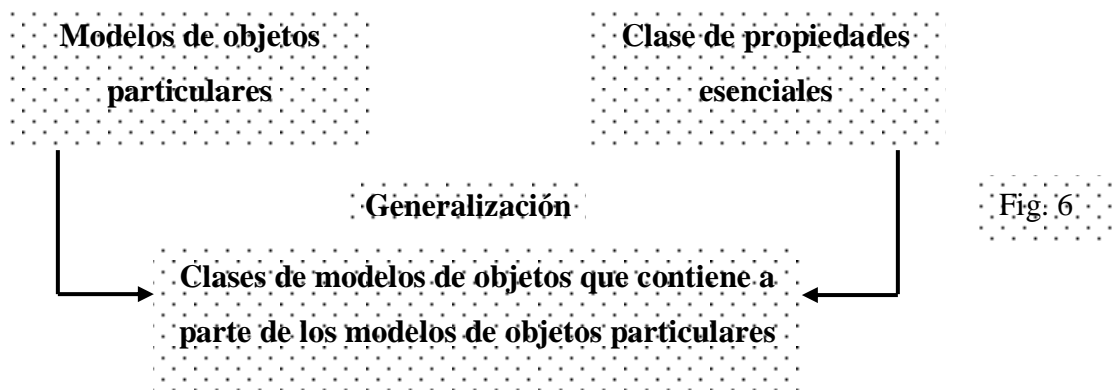


Fig. 6

Se considera que un concepto se ha formado cuando, al menos, se ha determinado un conjunto de rasgos comunes (en matemática, un conjunto de rasgos esenciales) que caracterizan en ese sentido a los objetos analizados (o al menos a una parte de ellos) y a otros posibles, se agrupan en otra clase los modelos de los objetos analizados, así como los modelos de otros posibles objetos y se utiliza un símbolo lingüístico para designarlo.

La formación de conceptos sigue dos vías principales:

– De lo particular a lo general, para lo cual se deben seguir los procesos de comparación – análisis, abstracción, síntesis y generalización de forma similar a como se plantea para la formación de conceptos generales. En este caso el proceso de formación conceptual constituye una de las vías del paso del conocimiento de la práctica al razonamiento abstracto (donde la práctica puede tener, y en la matemática en muchos casos tiene, un determinado nivel de abstracción).

– De lo general a lo particular, que usualmente parte de conceptos ya formados y utiliza también los procesos del caso anterior, sustituyendo el proceso de generalización por el de restricción, para formar conceptos de extensión menor.

En ambos casos, el proceso de formación culmina con la definición del concepto, donde quedan establecidos su contenido y su extensión.

Por otra parte, **el proceso de desarrollo** de un concepto se logra trabajando en las direcciones siguientes:

1. *Mediante la ampliación de la extensión de la clase de los elementos conocidos, lo cual se puede lograr por las vías, entre otras, siguientes: análisis de nuevos elementos y determinación del cumplimiento de los rasgos esenciales que forman el contenido, así como la utilización de operaciones u operadores para determinar nuevos elementos.*
2. *Por medio de la determinación de nuevas propiedades de los elementos de la extensión, lo cual se logra a un nivel abstracto en un sistema lógico–deductivo.*
3. *El establecimiento de relaciones significativas con otros conceptos ya desarrollados o en proceso de desarrollo.*

Resultan muy útiles para ayudar a establecer este tipo de relaciones, la ampliación de organizadores como mapas de extensiones y mapas de contenidos de conceptos anteriormente desarrollados, mediante la inclusión adecuada de la extensión del concepto que se está desarrollando en el mapa de extensiones y con el establecimiento de relaciones mediante proposiciones entre el concepto nuevo y los conceptos estudiados, mediante la manipulación de sus mapas de contenidos.

4. *El análisis de las propiedades de las estructuras algebraicas o topológicas que el nuevo concepto hereda de su concepto de partida u otras nuevas que haya adquirido.*
5. *La determinación de caracterizaciones, condiciones necesarias y suficientes del concepto definido.*
6. *El establecimiento de la utilidad del concepto definido, por medio de la ampliación de sus significados y el establecimiento de aplicaciones del mismo a situaciones diversas.*

Otro proceso importante en el tratamiento conceptual es el **proceso de generalización del concepto**.

Durante la construcción del contenido matemático, para lograr una generalización de un concepto, en muchas ocasiones, es necesario realizar varias generalizaciones para lograr una con determinadas características deseadas. En Martínez (2003, p.39-41) se expone un procedimiento bastante amplio para facilitar la participación de los estudiantes en este tipo de proceso. Aquí hacemos una adaptación de algunos de los pasos de este procedimiento que son necesarios para nuestro trabajo:

- a) Realizar un correcto estudio de los procesos de formación y desarrollo del concepto a generalizar. Para dar cumplimiento a este paso hay que definir científicamente el concepto, conocer la mayor cantidad posible de propiedades de dicho concepto y prepararlo para su generalización.
- b) Encontrar un concepto de partida para la generalización que puede ser de dos tipos:
 - Primer tipo: el mismo que el considerado en la definición del concepto que se generaliza.
 - Segundo tipo: más amplio que el concepto de partida considerado para definir el concepto que se generaliza.
- c) Realizar un conjunto de generalizaciones del concepto definido; para el primer tipo se realiza el debilitamiento de algunas propiedades del contenido del concepto que se generaliza y para el segundo, puede considerarse el mismo contenido del concepto que se generaliza o puede debilitarse el mismo.
- d) Utilizar un criterio de bondad para determinar la calidad de las generalizaciones hechas.

En la validación de la estrategia didáctica que proponemos, se escogen dos conceptos a los que se les realizan estas acciones durante los procesos que intervienen en su estudio.

2.2.1.3 Aspectos del modelo del profesional del matemático que incitan a la realización de esta estrategia.

Del documento “Modelo del profesional del matemático” que se encuentra en el anexo 15, pueden leerse:

Modelo del profesional. La carrera de Matemática tiene por objetivo fundamental la formación de un profesional de perfil amplio, con un alto nivel de conciencia socialista, técnica y científicamente capacitado para actuar de manera independiente y creadora en la resolución de una serie de problemas comunes que surgen

en las más variadas esferas de la práctica social, mediante la aplicación de los métodos y modelos matemáticos.

Objetivos instructivos. El primero de los objetivos instructivos es el siguiente:

- Construir modelos matemáticos que describan idealmente distintos aspectos del comportamiento de los procesos reales, en condiciones de una serie de suposiciones de idealización o simplificación, establecidas conjuntamente con especialistas de otras profesiones, sobre la base de los datos experimentales obtenidos, de acuerdo con las leyes naturales que rigen los fenómenos estudiados y con las propiedades e interconexiones que poseen los conceptos matemáticos que conforman los modelos construidos.

Objetivos educativos. El tercero de estos objetivos es el siguiente:

- Establecer correctamente la relación entre el saber matemático y la realidad objetiva; en particular, el carácter reflejo de los modelos matemáticos con respecto a los fenómenos reales que ellos representan.

Ofreciendo una interpretación actual a estos aspectos, se hace evidente la necesidad de que para que los graduados de la Licenciatura en Matemática realicen las transferencias necesarias del conocimiento atesorado durante sus estudios universitarios a la esfera de la producción o la investigación, es necesario que hayan aprendido los **conceptos matemáticos y sus propiedades e interconexiones de manera activa, mediada y significativa**, lo cual proponemos se logre mediante una estrategia basada en la resolución de problemas aplicable a los procesos de formación, desarrollo y generalización de algunos conceptos del currículo o de otros que no estén contemplados explícitamente en el mismo, pero que mediante su tratamiento, pueden contribuir a lograr un aprendizaje más amplio y de mayor calidad por una parte, y a desarrollar estrategias de organización y elaboración por otra, transferibles a nuevas situaciones de la futura labor profesional del matemático.

2.2.1.4 Consideraciones didácticas sobre los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual.

Antes de abordar las consideraciones didácticas sobre los procesos que intervienen en el tratamiento conceptual, consideramos conveniente consultar el anexo 16, donde se ofrece una breve panorámica de la manera en que se ha caracterizado el tratamiento conceptual en los niveles primario, secundario y preuniversitario de la enseñanza general.

Partiendo de la importancia que reviste la enseñanza basada en la resolución de problemas para facilitar una participación activa y mediada de los estudiantes y un aprendizaje significativo durante estos procesos; a continuación, como parte de la fundamentación de la estrategia, se profundizará en las particularidades de estos procesos en la carrera Licenciatura en Matemática.

En la tabla 3, ofrecemos una síntesis de algunas características generales del estudio conceptual en la enseñanza general, la enseñanza en la Licenciatura en Matemática y la que se da en otras carreras.

| Tabla 3: Objeto, objetivos y principales contenidos matemáticos por niveles | | | |
|---|---|--|---|
| Característica | Enseñanza General | Carrera Licenciatura en Matemática | Otras carreras universitarias |
| Objeto de estudio fundamental | Campos numéricos | Funciones | Funciones |
| Tipo de pensamiento a desarrollar | Numérico | Funcional profundo | Funcional |
| Contenidos | Básicos para la vida | Muy amplios y profundos, a veces colindantes con áreas investigativas abiertas. Se incluyen contenidos pedagógicos | Bastante restringidos a la especialidad |
| Objetivo fundamental del estudio conceptual | Comprensión de juicios y formulación de proposiciones | Comprensión y aplicación de la matemática; investigación en seminarios especializados | Herramienta para resolver problemas de sus especialidades |
| Punto de partida fundamental del proceso de formación inductivo de los conceptos | Análisis de objetos particulares | Aplicación de subprocesos del proceso de formación conceptual inductivo a partir de objetos particulares | Utilización de modelos conceptuales matemáticos |

Como se expresó en el epígrafe 2.2.1.2, en el **proceso de formación conceptual** a partir de objetos particulares (vía inductiva), intervienen los procesos mentales de: comparación, análisis, síntesis, abstracción y generalización. Este proceso culmina con la definición del concepto, en la que deben quedar bien establecidos el contenido y la extensión del mismo.

El **proceso de desarrollo conceptual** está destinado a realizar acciones encaminadas a un mejor conocimiento tanto del contenido, como de la extensión del concepto, algunas de las cuales se manejan en la tabla 4, donde se incluyen observaciones didácticas válidas para todos los niveles de enseñanza.

| Tabla 4: Acciones a instrumentar en el proceso de desarrollo conceptual / observaciones didácticas | | |
|--|---|---|
| Comp. lógico | Acciones encaminadas a su conocimiento | Obs. didácticas |
| Contenido | Obtención de caracterizaciones | Son las que más prioridad se les da generalmente |
| | Obtención de condiciones necesarias | |
| | Obtención de condiciones suficientes | |
| Extensión | Analizar si determinados objetos pertenecen a la extensión del concepto definido | Muy pocas de estas acciones se llevan cabo en el PEA del tratamiento de conceptos |
| | Realizar ampliaciones de las clases de elementos conocidos de la extensión del concepto definido | |
| | Determinar relaciones entre los objetos del concepto definido | |
| | Determinar relaciones entre la extensión del concepto definido con las extensiones de otros | |
| | Determinar las propiedades de estructuras algebraicas o topológicas que presenta la extensión del concepto definido con respecto a operaciones convenientemente definidas | |
| | Ampliar los significados conocidos del concepto definido | |
| | Establecer una variada utilidad del concepto definido | |

El **proceso de generalización conceptual** está encaminado a la obtención de un nuevo concepto cuya extensión incluye a la extensión del concepto definido por medio de un debilitamiento del contenido del concepto original; o cuya extensión admite una inmersión isomorfa de la extensión del concepto definido, por medio de la consideración, en el nuevo concepto generalizado, de un conjunto de partida más amplio que el considerado en el concepto definido.

Algunas observaciones de carácter didáctico válidas para todos los niveles nos hacen ver que:

- Generalmente no se prepara el concepto para su generalización.
- No se establecen varias generalizaciones del concepto definido.
- No se esgrimen criterios de bondad que permitan analizar la calidad de las generalizaciones que se hacen.

A continuación, por medio de la tabla 5, realizamos una panorámica de los procesos didácticos implícitos en estos procesos y la manera tradicional en que estos se desenvuelven en la enseñanza general, en la Licenciatura en Matemática y en otras carreras universitarias.

Tabla 5: Panorámica por niveles de los procesos didácticos implícitos en el tratamiento conceptual

| Proceso | Característica | Enseñanza General | Otras carreras universitarias | Carrera Licenciatura en Matemática |
|------------------------------|--|---|--|--|
| De formación conceptual | Conceptos que predominan | Relativos a los campos numéricos | Relativos a las funciones, son tomados como modelos de otros conceptos de las carreras respectivas. <i>Por ejemplo: la derivada como intensidad de la corriente</i> | Relativos a diferentes clases de funciones <i>Por ejemplo: de la clase</i> $F(I) \rightarrow C(I) \rightarrow D(I) \rightarrow C^1(I) \rightarrow D^1(I) \rightarrow \dots \rightarrow C^\infty(I) \rightarrow D^\infty(I)$ |
| | Características del estudio del contenido y la extensión | Se prioriza el estudio del contenido y se estudia la extensión solo en casos en que esta es finita | La cardinalidad de la extensión de los conceptos es infinita. No se presta atención al estudio de la extensión | La cardinalidad de la extensión de los conceptos es infinita. A pesar de que resulta muy necesario el estudio de la extensión, se realizan muy pocas acciones en este sentido |
| | Vías que predominan para su tratamiento | Se desarrollan procesos de formación por vía inductiva o deductiva | Se desarrollan procesos de formación por elaboración de modelos de otros conceptos | Deben desarrollarse procesos de formación por <ul style="list-style-type: none"> • Vía inductiva (muy poco empleada) • Vía deductiva (predominante en los textos) • Modelos de otros conceptos • Consideración de un conjunto de conceptos (<i>por ejemplo, integral definida</i>) |
| De desarrollo conceptual | | En conceptos geométricos predomina el trabajo con el contenido buscando caracterizaciones, condiciones necesarias, suficientes. En los algebraicos se reduce a la búsqueda de procedimientos para resolver ejercicios | Tanto en conceptos del Álgebra como del Cálculo Diferencial e Integral y sus aplicaciones predomina el trabajo con el contenido y se profundiza en la operatoria con los conceptos para resolver problemas de la especialidad. | En los conceptos de las diferentes disciplinas se profundiza en el conocimiento del contenido de los conceptos y se realizan algunas acciones para el conocimiento de la extensión y de desarrollo conceptual aunque no son suficientes |
| De generalización conceptual | | Se generalizan algunos conceptos (<i>generalmente geométricos, por debilitamiento del contenido</i>) | Se realizan generalizaciones tanto por debilitamiento del contenido (<i>derivada lateral</i>) como por consideración de conjuntos de partida más amplios (<i>derivada parcial</i>), aunque no se transmiten las características de las generalizaciones hechas ni se valora la calidad de las mismas | Se realizan generalizaciones tanto por debilitamiento del contenido (<i>concepto de seudométrica</i>) como por consideración de conjuntos de partida más amplios (<i>integral triple</i>), aunque no se transmiten con la profundidad necesaria las características de la generalizaciones hechas ni se establecen criterios de bondad adecuados para valorar la calidad de las mismas |

2.2.1.5 Organizador de los principales aspectos que fundamentan los indicadores a medir en la estrategia.

A continuación presentamos un organizador (figura 7) en forma de esquema, que deja ver la relación entre los aspectos fundamentales considerados, que más adelante serán considerados como indicadores a medir para

valorar la influencia de la estrategia en el perfeccionamiento del estudio de los conceptos matemáticos en la Licenciatura en Matemática por vía inductiva.

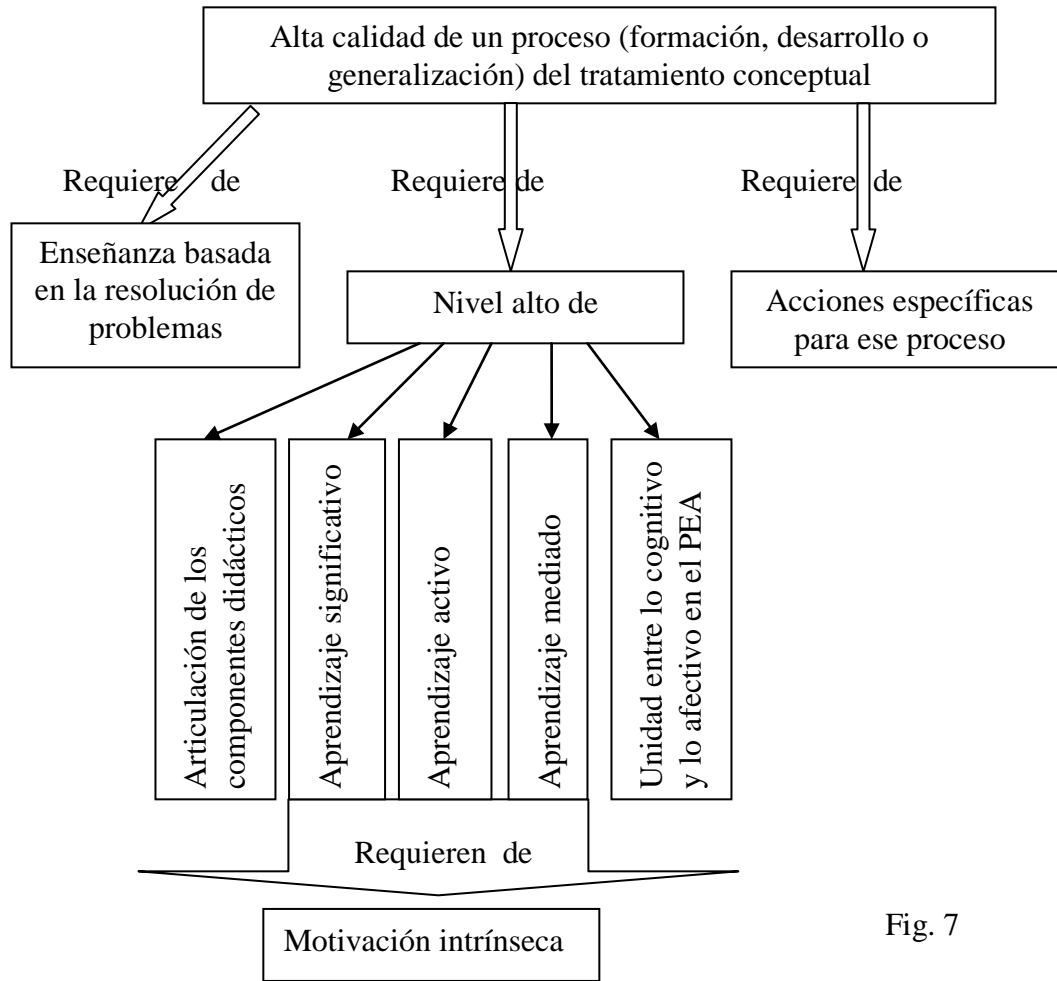


Fig. 7

2.2.2 Diagnóstico inicial. Necesidad del planteamiento de una estrategia didáctica.

Como se ha visto en la introducción de esta tesis, en la enseñanza de la Matemática para el nivel superior, hemos detectado una serie de necesidades didácticas que nos han incitado a la elaboración y puesta en práctica de una estrategia que nos llevara de un estado actual en el que los procesos de formación, desarrollo y generalización de conceptos matemáticos no transcurren con la calidad necesaria, a un estado deseado en el que se subsanen estas deficiencias y conduzca a un aprendizaje activo, mediado y significativo por los estudiantes.

Algunas de las principales **necesidades didácticas** detectadas son:

- La mayoría de los conceptos, a pesar de su naturaleza abstracta y extensión dinámica, se abordan con recursos eminentemente deductivos sin inmiscuir de manera activa a los estudiantes en su tratamiento y sin

llevar a cabo significativamente los procesos de formación, desarrollo y generalización de los mismos, debido al escaso presupuesto de tiempo y exigencias del currículo, lo que provoca un aprendizaje no significativo, y en ocasiones no mediado ni activo, pues muchas veces solo se profundiza en la operatoria con los mismos.

- No se realizan acciones suficientes para facilitar los procesos de comparación, análisis – abstracción, síntesis y generalización que tienen lugar durante el proceso complejo de formación de un concepto.
- Los estudiantes no disponen de los conceptos de definición científica, ni de extensión y contenido de un concepto; lo cual impide que puedan comprender lo que aportan cada uno de los procesos que intervienen en el proceso de formación conceptual y que puedan terminar este proceso con una definición científica adecuada.
- Como parte del desarrollo conceptual, no se amplía suficientemente la colección de elementos conocidos de su extensión, ni se establecen relaciones significativas entre los elementos de la extensión del concepto y entre la extensión del concepto y las extensiones de otros, no se determinan las propiedades que hereda el concepto de las estructuras algebraicas o topológicas del concepto de partida, no se amplían suficientemente los significados del concepto ni se expresa la utilidad del concepto definido en toda su magnitud, no se establecen clasificaciones oportunas, etc.
- No se emplean adecuados organizadores en la articulación del nuevo conocimiento conceptual con el previo, como, por ejemplo, mapas de extensiones, simbólicos o de proposiciones, diagramas, etc.
- No se realizan, o se realizan pocas, generalizaciones del concepto en estudio, y cuando se hace, no se logra una conciencia sobre los tipos de generalizaciones realizadas, en ocasiones ni siquiera se tiene la idea de que se ha realizado una generalización, etc.

Todo esto provoca que los alumnos no realicen un aprendizaje significativo del concepto en estudio, por lo que se suscita el hecho de que no queden huellas perdurables en la memoria de los estudiantes sobre los conceptos tratados y que resulte difícil la transferencia de aprendizajes a situaciones nuevas.

Un **ejemplo** concreto de un concepto cuyo tratamiento presenta estas dificultades es el de **función convexa**, que se imparte en el segundo semestre de la asignatura Análisis Matemático I de la Licenciatura en Matemática, cuya definición se limita a ofrecer la definición relacionando la posición relativa entre el gráfico de la función sobre cierto intervalo y el segmento de secante a la misma sobre ese intervalo; para posteriormente obtener el teorema que caracteriza este concepto y brinda herramientas del Cálculo Diferencial para la operatoria con el mismo en la discusión y trazado de funciones.

Este estudio, según constatamos por medio de la revisión del programa de la asignatura y la entrevista a profesores (anexo 2), se caracteriza por una serie de deficiencias didácticas en los procesos que intervienen en su tratamiento, las que se relacionan en el anexo 17.

2.2.3 Componentes rectores de la estrategia.

Dadas las dificultades detectadas, con la estrategia propuesta se espera que, después de implementada y debidamente controlada, se cumplimente el **objetivo general**: llevar a cabo los procesos de formación, desarrollo y generalización de conceptos matemáticos mediante la resolución de problemas que traigan consigo un aprendizaje activo, mediado y significativo de dichos conceptos.

Los presupuestos teóricos que sustentan la estrategia están relacionados con:

- **El modelo del profesional del matemático. Papel de los conceptos matemáticos en el mismo.** Este presupuesto nos permite situarnos en los objetivos que pretende el tratamiento de conceptos matemáticos en la formación del Licenciado en Matemática, de manera que los resultados a alcanzar con esta estrategia tributen a dichos objetivos y constituyan un catalizador en la formación matemática y en parte, pedagógica, de los educandos.

Aunque no explicitaremos en qué proporción nuestra estrategia puede contribuir a esta formación pedagógica, al menos haremos referencia a que, en la medida en que en el PEA de la asignatura Seminarios de Problemas se les va haciendo conciencia a los alumnos de las acciones pedagógicas que se llevan a cabo con ellos durante el estudio de los conceptos matemáticos escogidos, estos pueden revertir estas acciones en su labor como alumnos ayudantes o como futuros docentes de la Matemática universitaria.

- **Tratamiento de conceptos matemáticos mediante acciones a implementar durante los subprocesos que tienen lugar en los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual.** Como se ha destacado en la fundamentación teórica de la tesis, constituye uno de los aspectos novedosos de la estrategia el empleo de la enseñanza basada en la resolución de problemas durante los subprocesos que tienen lugar durante los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual.
- **Aprendizaje activo, mediado y significativo de conceptos matemáticos.** Este presupuesto recoge las causas del por qué escogimos y las consecuencias de haber escogido como paradigma rector, la concepción de aprendizaje que proponen el enfoque histórico cultural y la escuela soviética de la teoría de la actividad, que hacen ver la necesidad del papel activo y mediado del aprendizaje, tomando como bases la “ley genética fundamental” y las categorías “otros” y “zona de desarrollo próximo”; así como los fundamentos del aprendizaje significativo que ha tenido una abundante y fructífera presencia en investigaciones pedagógicas actuales.

- **Concepciones sobre la enseñanza basada en problemas.** Al exponer los argumentos didácticos relacionados con la enseñanza basada en la resolución de problemas, se establecieron las grandes potencialidades que esta ofrece para llevar a cabo los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual y para contribuir al necesario aprendizaje activo, mediado y significativo durante estos procesos.
- **Relación existente entre los presupuestos anteriores.** Resulta evidente la necesidad de considerar este aspecto como presupuesto teórico de la estrategia que se propone, pues mediante las consideraciones didácticas realizadas hasta el momento se ha dejado ver claramente la estrecha relación existente entre los presupuestos teóricos anteriores, sin la cual no es posible realizar una eficiente planificación, ejecución y control de las acciones que incluye la estrategia.

Por otra parte, al concebir una estrategia basada en la resolución de problemas matemáticos para lograr que los procesos de formación, desarrollo y generalización de conceptos transcurran con una alta calidad deben establecerse **principios metodológicos** adaptados a nuestra estrategia, que respondan a los principios didácticos establecidos en el capítulo 1. Estos son:

- Diagnóstico previo y seguimiento del mismo.
- Logro de la motivación intrínseca necesaria en los estudiantes para ser partícipes activos durante la ejecución de la estrategia.
- Planteamiento y resolución de los problemas de manera significativa, activa y mediada.
- Aplicación reflexiva del conocimiento a situaciones diversas.
- Integración en la evaluación de acuerdo a sus diferentes formas.
- Articulación de los componentes didácticos objetivo, contenido, método, medio, evaluación.
- Unidad entre lo cognitivo y lo afectivo durante el PEA.

Obsérvese que los principios considerados los hemos denominado metodológicos, en lugar de didácticos generales, aunque sin dudas existe una estrecha relación entre ellos. Esto se debe, principalmente, a que responden más a la manera en que se emplean los métodos de enseñanza para llevar a cabo un óptimo PEA de los conceptos matemáticos, estableciendo la debida relación con los demás componentes didácticos objetivo, contenido, medio, evaluación; a la vez que permite profundizar en el empleo de procedimientos (heurísticos, inductivos, deductivos) y estrategias (enseñanza basada en la resolución de problemas, para la resolución de problemas) que estén relacionados con el método escogido.

Ballester (1992, p.75) plantea *“en nuestra asignatura la nomenclatura de los métodos se corresponde con los métodos didácticos generales de manera que permite revelar su esencia pedagógica”*.

Los **principios** considerados expresan las ideas rectoras para la dirección de las tareas a definir y las acciones a desarrollar para que la misma cumpla con el objetivo que se propone. Estos principios están orientados a que las acciones que se propongan partan de determinar las necesidades de aprendizaje para, de este diagnóstico, derivar acciones encaminadas a lograr un valor funcional de los conocimientos, lo que pretendemos lograr por medio del planteamiento y resolución de problemas de manera activa, mediada y significativa y una unidad entre lo cognitivo y afectivo en el PEA.

2.2.4 Fases de la estrategia.

Para el desarrollo de la estrategia, se conciben las **fases**: preparatoria o de planificación, que contiene, entre otros aspectos (preparación del profesor que implementará la estrategia, diagnóstico de necesidades, establecimiento del sistema de acciones); así como implementación o de ejecución y control o de evaluación, que contienen los aspectos descritos en el epígrafe 2.1.3.

Es necesario aclarar que estas **fases se interrelacionan** en el tiempo, pues aunque se realice un diseño preliminar, en el transcurso de la implementación y control se recoge información que permite mejorar y adaptar el diseño preliminar a las condiciones reales que se presentan.

Teniendo en consideración los principios metodológicos establecidos al concebir una estrategia para perfeccionar los procesos de formación, desarrollo y generalización que intervienen en el tratamiento de un concepto matemático (con un proceso de formación inductivo) en la formación del Licenciado en Matemática, a continuación se describe la forma de desarrollar cada una de las fases de la estrategia.

2.2.4.1 Fase de planificación.

Preparación del profesor.

El profesor debe comenzar por conocer en qué consiste el logro de los aprendizajes activo, mediado y significativo en el tratamiento de un concepto matemático por medio de la resolución de problemas, los presupuestos teóricos y principios para la concepción de la estrategia, los aspectos a tener en cuenta en cada fase, debe ser capaz de diseñar la estrategia adaptada al concepto que escoja y llegar a dominar este diseño, lo que permitirá su mejor implementación.

Debe prepararse en base a los métodos y técnicas pedagógicas que le permita realizar el diagnóstico de necesidades y el control como se conciben en el diseño de la estrategia.

Diagnóstico de necesidades.

➤ Diagnóstico de necesidades didácticas del concepto a abordar.

Para la realización de este diagnóstico se proponen las acciones siguientes:

- Determinación de las dificultades más comunes en su tratamiento. (por ejemplo, como las determinadas anteriormente con el concepto de función convexa).

Esto puede hacerse por medio de: análisis de los programas y orientaciones metodológicas de las asignaturas de la especialidad del matemático, pruebas de contenido a estudiantes, observaciones a clases, entrevistas a estudiantes y profesores de la carrera, para recoger información acerca de sus percepciones y conocimientos sobre la manera en que se ha llevado a cabo el tratamiento de los conceptos matemáticos.

Con toda la información recogida, debe realizar un análisis de contenido que le permita arribar a las necesidades que se presentan.

➤ **Diagnóstico de los conocimientos previos en torno al concepto a tratar.**

Después que se selecciona un concepto determinado para implementar la estrategia, las acciones diagnósticas deben estar dirigidas a averiguar con los estudiantes: ¿Qué conocen? ¿Qué pueden hacer con lo que conocen en situaciones diversas de manera reflexiva?

Con estas acciones diagnósticas se pretende determinar el tipo de conocimiento previo que tienen los estudiantes (conceptuales, procedimentales o actitudinales).

Para esto se propone: realizar acciones para averiguar los conocimientos precedentes de los alumnos, relacionados con el concepto en estudio para determinar la zona de desarrollo de cada alumno y del grupo en el que se implementará la estrategia.

Se sugiere emplear entrevistas, observación participante y pruebas (orales y escritas) de contenidos.

➤ **Diagnóstico de niveles de aprovechamiento iniciales de los alumnos.**

En aras de llevar a cabo una eficiente atención a las diferencias individuales durante la implementación de la estrategia y analizar la evolución que van teniendo los alumnos, es necesario realizar un diagnóstico inicial sobre el aprovechamiento docente de los estudiantes.

Para lograr esto se recomienda: realizar una clasificación en niveles bajos, medios y altos, cuyos criterios de medición pueden regirse por aspectos como: resultados en la prueba de diagnóstico inicial, resultados en evaluaciones anteriores, índice académico del semestre anterior, opinión del colectivo del año cursante o del anterior, opinión del colectivo de disciplina (en caso de que algún profesor, incluyendo el investigador, del colectivo tenga referencias sobre el grupo), opinión de los miembros del grupo, etc.

Establecimiento del sistema de acciones para lograr el aprendizaje activo, mediado y significativo en los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual.

A continuación se expone un sistema de acciones generales a desarrollar para lograr el objetivo planteado, algunas de las cuales deberán rediseñarse de acuerdo al concepto escogido, a los diagnósticos realizados y las necesidades detectadas.

➤ **Prediseño de temas de estudio.**

Asegurar que en este prediseño aparezcan los elementos esenciales a tener en cuenta en la planificación de las actividades docentes (objetivos educativos, objetivos instructivos, sistema de conocimientos, sistema de habilidades), teniendo en cuenta que cuanto mayor sea el grado de significatividad del aprendizaje realizado, tanto mayor será su funcionalidad. Esto debe ser una preocupación constante en la formación del profesional, de manera que, prospectivamente, pueda relacionar el conocimiento adquirido con nuevas situaciones y puedan ser efectivamente utilizados cuando las circunstancias en las que se encuentra el alumno así lo exijan.

Durante el diseño de estos temas deben contemplarse acciones para cada uno de ellos, relacionadas con:

- El planteamiento de problemas que tributen al perfeccionamiento de los subprocesos que tienen lugar en los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual.
- La utilización de conceptos ya enseñados y aprendidos en la asignatura, el año, la carrera o niveles de enseñanza precedentes y la valoración de la contribución que hacen los nuevos contenidos que se tratan a contenidos de otras asignaturas del año o años venideros. (Visión cíclica, articulación conceptual horizontal y vertical).
- La introducción, el desarrollo y la consolidación de la nueva información atendiendo a los diferentes niveles de aprovechamiento diagnosticados.
- La precisión de acciones del profesor para que los alumnos de bajo, medio y alto nivel participen en los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual.
- La consideración de organizadores óptimos en cada tema que garanticen un aprendizaje significativo por los estudiantes.
- La creación de ambientes en que se suscite un aprendizaje mediado, activo y significativo.
- El desarrollo en los estudiantes de la capacidad de autorregulación, que les permita analizar lo que se hizo mal y el porqué del error, asumiendo que en el proceso deban discernir en las fallas del aprendizaje, ya sea en los conocimientos previos o en los que ya tenía.
- El logro de la unidad entre lo cognitivo y lo afectivo durante el PEA.

Es necesario aclarar que si la implementación requiere de un semestre lectivo de alguna asignatura de una disciplina (como la que se llevó a cabo con esta investigación), es necesario diseñar un programa con la debida fundamentación de la relación asignatura ↔ disciplina.

➤ **Acciones relativas al planteamiento de los problemas.**

◇ **Durante todos los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual.**

Los problemas que se planteen deben estar encaminados a:

- Relacionar esencialmente, y no de modo arbitrario, el conocimiento nuevo con los conocimientos previos que tienen los alumnos aplicando el concepto vygotskiano de Zona de Desarrollo Próximo.
- Modificar los esquemas y modelos mentales por medio de un proceso personal de equilibrio → desequilibrio → reequilibrio.
- Propiciar las condiciones para que los alumnos planteen problemas por sí solos, como consecuencia natural de las insatisfacciones con los vacíos que se deben ir llenando al relacionar los conceptos significativamente.
- Cuando un problema, o conjunto de problemas, ha sido resuelto por la mayoría de los alumnos con ayuda del profesor o de otros compañeros más capaces (aprendizaje mediado), deben plantearse otros, con objetivos semejantes a los anteriores, hasta lograr que la mayoría de los estudiantes los resuelvan independientemente y, paulatinamente, plantear otros que requieran de cierta dosis de creatividad, hasta lograr, con su resolución, un aprendizaje activo de los alumnos.
- A la hora de escoger el problema a plantear debe tenerse en cuenta que el aprendizaje significativo del contenido que este incluye queda determinado, no solo por el conocimiento previo que debe tener el alumno, sino por la capacidad adquirida a lo largo de su desarrollo.

◇ **Durante el proceso de formación del concepto por vía inductiva.**

Plantear problemas encaminados a:

- Presentar a los estudiantes cierto número de objetos, especialmente seleccionados, con el objetivo que los comparen y los analicen.
- Mediar para que los alumnos seleccionen propiedades de cada objeto, los comparen con los otros objetos, determinen las propiedades comunes y hagan su abstracción de las propiedades no comunes.
- Facilitar el proceso mental de síntesis, para que se seleccione un conjunto mínimo de propiedades (esenciales), a partir de las cuales se puedan obtener todas las demás propiedades comunes.
- Dejar claro mediante la generalización, la posible existencia de un conjunto de objetos más amplio que los considerados, que satisfacen estas características esenciales, y la posibilidad de que algunos de los presentados no se incluya en el concepto.
- Utilizar una denominación verbal para nombrar la clase de todos los objetos que cumplen las propiedades esenciales, y realizar la definición científica del concepto correspondiente a la clase de propiedades seleccionada.

◇ Durante el proceso de desarrollo del concepto.

Plantear problemas encaminados a:

- Obtener caracterizaciones del concepto definido.
- Realizar un estudio de la extensión del concepto caracterizado por:
 - El estudio de estructuras algebraicas y topológicas.
 - La ampliación de la clase de elementos conocidos de su extensión.
 - El establecimiento de isomorfismos entre su extensión y la extensión de otros conceptos u otros conjuntos.
 - La determinación de relaciones significativas con las extensiones de otros conceptos.
 - La construcción de mapas de extensiones que tienen lugar entre la extensión del concepto estudiado con las extensiones de otros conceptos, y de los mapas de contenido correspondientes.
 - La determinación de objetos límite y casos especiales del concepto en estudio.
- Realizar aplicaciones importantes del concepto en problemas intramatemáticos extramatemáticos; así como ampliar sus significados.
- Ejercitar a los estudiantes en las técnicas de demostración para ampliar las propiedades del concepto, utilizando para ellos las caracterizaciones más adecuadas.

◇ Durante el proceso de generalización del concepto.

Plantear problemas encaminados a

- Preparar el concepto para su generalización.
- Realizar generalizaciones:
 - Por debilitamiento del contenido del concepto.
 - Por consideración de contextos más amplios.
- Establecer criterios de bondad para valorar la calidad de las generalizaciones hechas.

➤ Acciones relativas a la resolución de los problemas.

Existen varios programas heurísticos generales para llevar a cabo el proceso de resolución de problemas; entre ellos: el de Polya (1986), el de Schoenfeld (1985a) y el de Miguel de Guzmán (1992); los cuales presentan muchos aspectos coincidentes. Teniendo en cuenta estos tres programas y las acciones que hemos realizado los profesores del Seminario de Matemática Educativa en nuestro trabajo profesional a la hora de guiar esta actividad en asignaturas de la carrera Licenciatura en Matemática de la UCLV, planteamos a continuación el

programa heurístico general y los procedimientos correspondientes para la resolución de problemas en dicha carrera.

Fases y acciones del programa heurístico general para la resolución de los problemas durante los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual.

Como se señaló en la introducción, la propuesta de este programa constituye uno de los aportes teóricos de nuestra investigación. El mismo se implementa cuando se propone como problema complejo: “llevar a cabo el proceso de formación por vía inductiva (desarrollo o generalización) conceptual de un concepto matemático en la carrera Licenciatura en Matemática”. Ver figuras 8, 9 y 10.

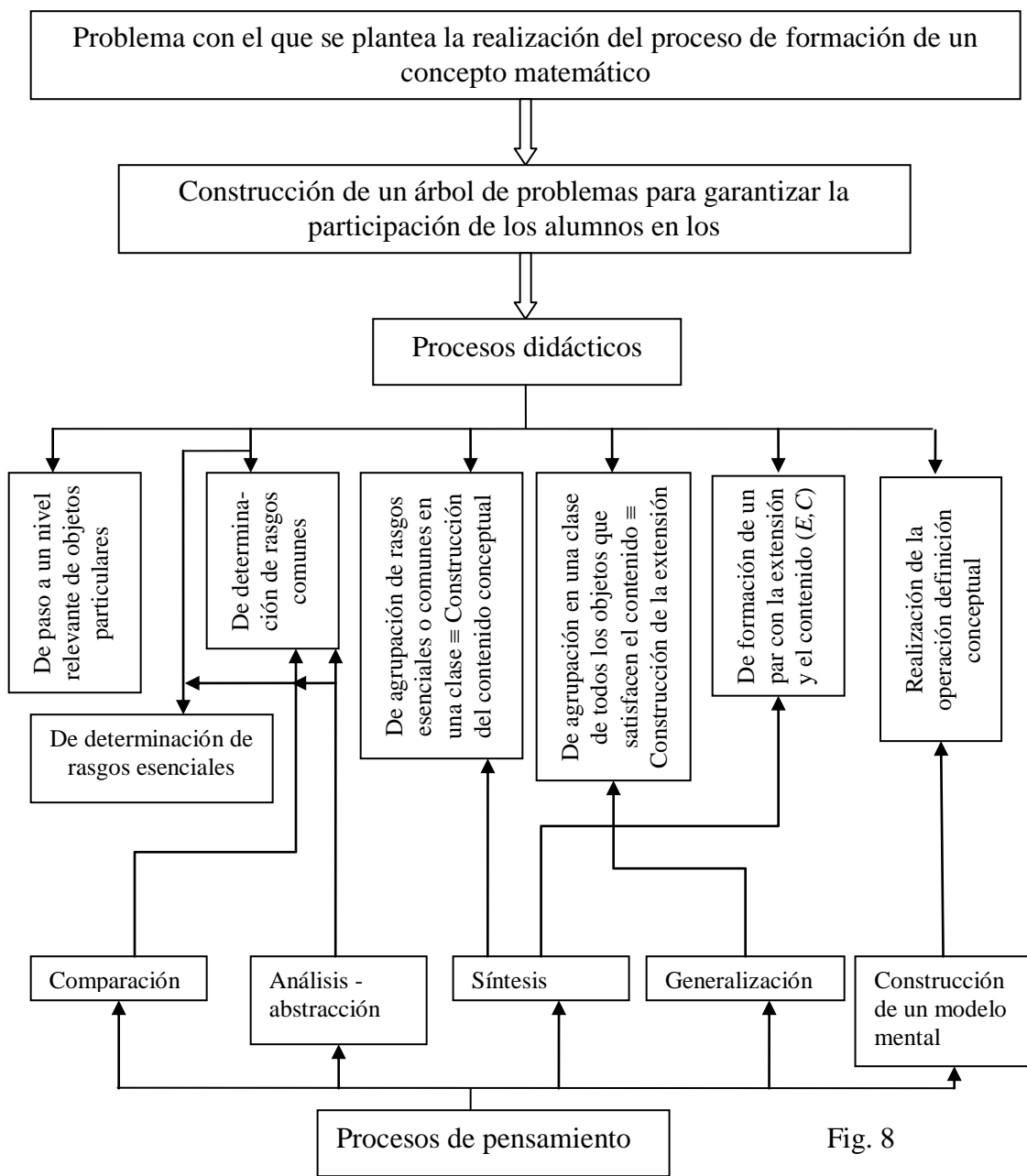


Fig. 8

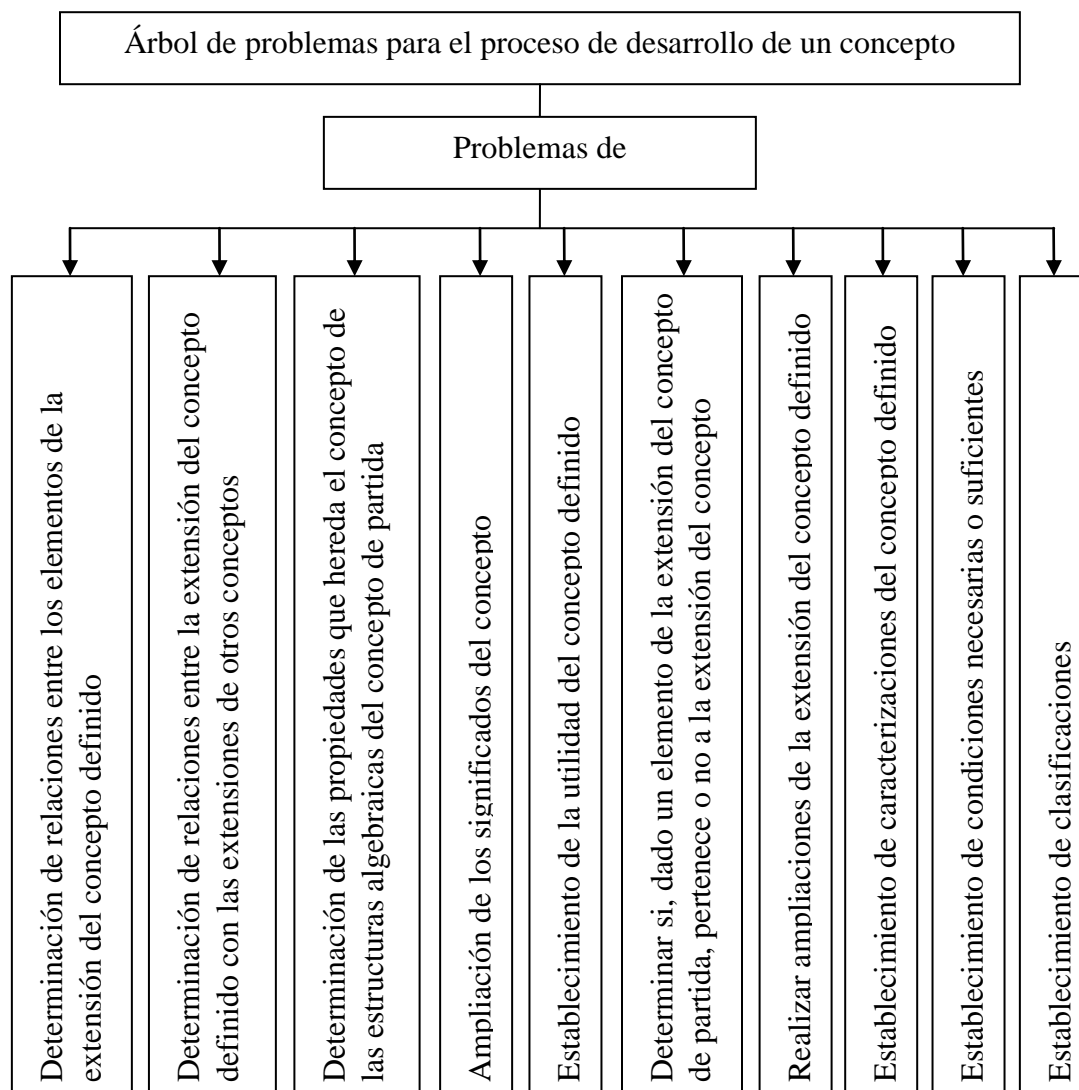


Fig. 9

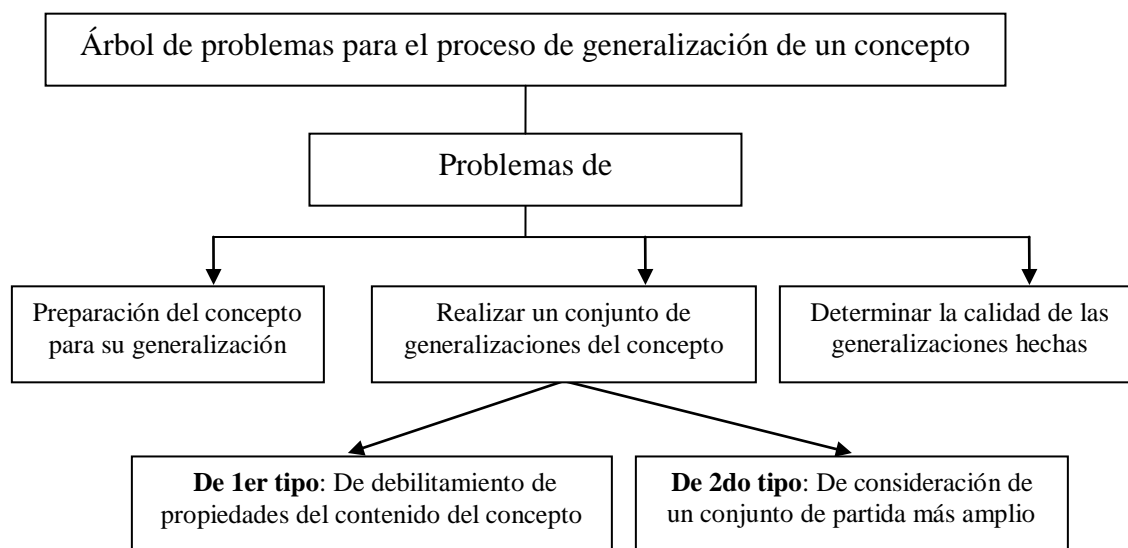


Fig. 10

Durante la resolución de los problemas particulares que se plantean en cada árbol, puede seguirse el programa heurístico siguiente:

- Comprensión del problema:
 - ❖ Lectura cuidadosa.
 - ❖ Selección e interpretación de palabras claves.
 - ❖ Modelación verbal del problema, eliminando la información no esencial.
 - ❖ Elaborar figuras, tablas o esquemas que proporcionen una mejor comprensión del problema.
- Trabajo en el problema:
 - ❖ Precisión del problema:
 - Determinar las magnitudes conocidas y buscadas.
 - Determinar leyes a utilizar del área que corresponde el problema.
 - Establecer relaciones y dependencias entre las magnitudes.
 - Modelación gráfica, tabular, mediante principios o leyes del área a que corresponde el problema.
 - ❖ Modelación matemática del problema.
 - Modelación matemática de las magnitudes del problema.
 - Modelación de relaciones entre magnitudes.
 - Obtención del modelo matemático a partir del modelo mediante principios o leyes del área a que corresponde el problema.
 - ❖ Determinación de las características del modelo matemático con respecto a su solución.
 - ❖ Después de obtenido el modelo matemático del problema, con respecto a su solución, puede ocurrir una de tres variantes siguientes:

V1. El alumno conoce, al menos, un método de solución del modelo.

V2. El alumno no conoce un método de solución y le es permitido utilizar las tecnologías de la información y las comunicaciones (TIC) para resolver el modelo.

V3. El alumno no conoce un método de solución y no se le permite utilizar las TIC para resolver el modelo.

Fases correspondientes a cada una de estas variantes.

En la primera variante:

- Si conoce un solo método de solución, debe pasar a la fase de solución del modelo.
- Si conoce más de un método de solución, debe:
 - ❖ Determinar el método óptimo para la solución del problema.
 - Aplicar estrategias en este sentido.

En la segunda variante:

- ❖ Determinar el paquete que va a utilizar para resolver el problema.
 - Seleccionar la herramienta computacional que va a utilizar.

En la tercera variante:

- ❖ Determinar la idea de solución.
 - Elaboración de un plan de solución.
 - Determinación de medios y estrategias, por ejemplo, utilizar la estrategia de trabajo hacia adelante o hacia atrás.
 - Realización de estimados.
- Solución del modelo matemático.
 - ❖ Determinación de la solución.

De acuerdo con la variante que corresponda se utilizará un método de solución, se empleará la herramienta computacional escogida, o se aplicará el plan de solución diseñado.

- Evaluación del proceso matemático de solución y de su resultado.
 - ❖ Comprobación de la solución.
 - ❖ Consideraciones perspectivas y retrospectivas.
 - Reflexiones sobre el proceso de solución aplicado.
 - Valoración de la aplicación de otros procesos de solución.
 - Posibilidad de empleo del proceso de solución en otros problemas semejantes.
 - Determinación de las restricciones con las que ha sido resuelto el problema.
 - ❖ Determinación de otros resultados matemáticos necesarios para dar solución al problema original.
- Transferencias de resultados matemáticos.
 - ❖ Aplicación del proceso inverso al de modelación.
 - Transferencia de resultados matemáticos a frases verbales.
 - Transferencia de resultados matemáticos a afirmaciones verbales.
- Planteamiento de nuevos problemas matemáticos.
 - ❖ Eliminar restricciones con las que fue resuelto el modelo matemático.
 - ❖ Analizar la posibilidad de ampliar el dominio de solución del modelo.
- Planteamiento de otros problemas contextuales.
 - ❖ Planteamiento de otros problemas contextuales que se resuelvan con un modelo similar al que se empleó en el problema resuelto.

- ❖ Planteamiento de nuevos problemas contextuales en correspondencia con las generalizaciones del modelo obtenido en la fase anterior.

Procedimientos heurísticos.

- Principios heurísticos: analogía, reducción, inducción, generalización, movilidad, medir y comprobar, consideración de casos especiales y casos límites.
- Estrategias heurísticas.
 - ❖ Trabajo hacia adelante.
 - Determinación de una caracterización óptima.
 - Utilización de propiedades conocidas adecuadas.
 - Aplicación de reglas de inferencia correctas.
 - ❖ Trabajo hacia atrás.
 - Trabajo operacional obviando reglas de inferencia hasta llegar a una solución probable.
 - Comprobación de la solución probable.
 - ❖ Modelación.
 - Modelación verbal del problema.
 - Modelación gráfica, tabular o mediante leyes contextuales.
 - Modelación matemática.
 - Solución del modelo matemático.
 - Transferencia de resultados matemáticos a frases y afirmaciones verbales.

➤ **Acciones relativas al logro de la motivación intrínseca durante todos los procesos.**

Acciones a realizar en este sentido pueden ser:

- Involucrar a los alumnos en el planteamiento de problemas debidamente dosificados con cierta significatividad experiencial para los alumnos, los que pueden ser extramatemáticos o intramatemáticos de la misma rama del concepto o de otras áreas de la matemática.
- Plantear problemas encaminados a resaltar las necesidades no satisfechas, encaminados a que los estudiantes se esfuercen en su resolución de manera enérgica y con intención.
- Plantear variedad de problemas encaminados al planteamiento de metas por los alumnos, alcanzables con diferentes niveles de esfuerzos.
- Plantear problemas encaminados a despertar la duda, la perplejidad, la contradicción, la confusión o la inadecuación.

- Hacerles ver que de los errores que se cometen también se aprende, lo que ayuda a elevar o mantener estable la autoestima del alumno ante un error cometido.

➤ **Acciones para el logro de un PEA con la unidad entre lo cognitivo y lo afectivo.**

En el epígrafe 1.4.1 se profundizó en este importante aspecto. No obstante, antes de determinar acciones que tributen a esta unidad, consideramos pertinente destacar que: la comunicación como relación entre los sujetos y como vía para el logro de un aprendizaje mediado, en la cual se establecen múltiples motivaciones; es el proceso que adquiere, en el sentido afectivo, un carácter fundamental.

Sobre este particular en Martínez (2002, p.88) puede leerse *“El PEA no tiene un momento cognitivo y otro afectivo, es un solo proceso en que se desarrollan juntos e inseparables y se refuerzan e intercondicionan mutuamente. El respeto al criterio del estudiante; el compartir con ellos las vicisitudes de la solución del problema, de la transformación del contexto social; el escuchar las sugerencias que dan, que pueden incluso cambiar la concepción inicial, es la vía para establecer las relaciones afectivas y a la vez posibilitar la cognición eficiente del nuevo contenido. Para muchos alumnos, en este nivel de enseñanza, resulta importante estimularlos en la posibilidad de poder solucionar problemas que se le presentan y comprender la información que de ellos se deriva”*

Se proponen las acciones siguientes:

- Lograr que los alumnos con mayores dificultades planteen sus dudas y conducirlos, por medio de adecuados niveles de ayuda, a la asimilación del contenido.
- Estimular a los estudiantes en la posibilidad del desarrollo de tareas (resolución de problemas, elaboración o completamiento de organizadores de la información, etc.) que les permitan descubrir, aplicar u organizar los conocimientos matemáticos.
- Fortalecer la autoestima de los estudiantes de acuerdo con el nivel de desarrollo que presenten. Los de bajo aprovechamiento en el sentido que pueden vencer los objetivos fundamentales, sin suscitar una ayuda prematura por parte del profesor u otro alumno, y los de medio y alto aprovechamiento, que pueden ser capaces de mejorar su actuación.
- Estimular la correspondencia entre lo que se piensa y se hace, para evitar manifestaciones de doble moral y desalentar el fraude académico, creando motivaciones para el estudio y convirtiendo éste en un deber social y un placer para el estudiante.
- Velar porque se cumplan las normas de educación formal durante el desarrollo del PEA.
- Suscitar escenarios que contribuyan a desarrollar valores como: la solidaridad, la laboriosidad, el patriotismo, etc, aprovechando para ello, las potencialidades que brinda la enseñanza basada en la resolución de problemas.

➤ **Acciones encaminadas a la realización de una adecuada evaluación de los conocimientos.**

Anteriormente apuntamos que uno de los componentes del *currículum* que más conflictos provoca en los alumnos es la evaluación concebida como instrumento de control y sanción del aprendizaje producido, en la que predomina la función sumativa de la evaluación.

La evaluación debe usarse no solo para la promoción de los alumnos de una asignatura dada, debiendo ser el objetivo primordial ayudar a conseguir un aprendizaje significativo, gratificante y satisfactorio; esto obliga a considerar prioritariamente su función formativa. Desde la concepción formativa de la evaluación como instrumento de perfeccionamiento y ayuda al alumno; para llevarla a cabo, de acuerdo con el objetivo de la estrategia, se debe atender a dos direcciones fundamentales, en las que se proponen las acciones:

- Integrar la tipología evaluativa según se muestra en el epígrafe 1.4.2.8:
 - a) Según su intención: formativa o sumativa.
 - b) Según su temporalidad: diagnóstica, frecuente o continua y final.
 - c) Según sus agentes: autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación.
- En los instrumentos evaluativos, incluir preguntas que midan la calidad tanto de procesos como de resultados, combinar preguntas reproductivas, con productivas y creativas.
- Contrarrestar las patologías más frecuentes de la evaluación.

2.2.4.2 Fase de implementación.

Durante la fase de implementación se concreta en el PEA todo lo diseñado anteriormente.

Para la comprensión del desarrollo de esta fase se realiza un análisis de las relaciones que se establecen en el PEA de los contenidos matemáticos, las cuales se estructuran sobre la base de los **componentes didácticos**: objetivo, contenido, método, medio y evaluación.

En este proceso se distinguen tres etapas relacionadas dialécticamente, que como cualquier actividad humana las distingue estructural y funcionalmente, que son: **la orientación, la ejecución y el control**. Durante la **orientación** prevalecen fundamentalmente el objetivo y el contenido, el primero como componente orientador, determinante y valorativo y el segundo desempeña funciones de base material. En la etapa de **ejecución** se manifiestan esencialmente el método y los medios. El método es la categoría central del proceso, en tanto los medios es su soporte material. En la etapa de **control** es la evaluación el componente fundamental, que es en definitiva quien permite regular la calidad del proceso.

Se sugiere para esta fase las **acciones**:

- Escoger uno o varios conceptos, mediante los cuales se vaya a implementar la estrategia.

- Precisar los objetivos a lograr y realizar la distribución de contenidos de acuerdo con aspectos organizativos de espacio y tiempo en las actividades docentes que se programen y según esto concretar las acciones a realizar en cada actividad o temática.
- Desarrollar las actividades docentes de acuerdo con lo previsto e ir atendiendo de forma sistemática a los resultados docentes que van alcanzando los estudiantes, según el sistema de evaluación que se debe instaurar. Lo anterior permite ir modificando lo planificado, en caso de ser necesario, para que se cumplan los objetivos previstos, o sea, la retroalimentación que se va obteniendo hace posible ir adecuando las acciones a realizar en cada tema para así manera corregir la estrategia en función de que en cada actividad del proceso, los contenidos sean lo más significativo posible para los alumnos y que puedan aplicar el concepto estudiado a problemas de la vida o relacionados con su especialidad.

Como se puede apreciar, en este diseño de la estrategia para la fase de implementación se incluyen solo acciones generales a implementar con un concepto hipotético. En el capítulo 3, esta fase es ejemplificada por medio de los conceptos escogidos.

2.2.4.3 Fase de control.

En esta fase de la estrategia se van analizando los resultados obtenidos durante todo el proceso para, en caso necesario, modificar o redirigir las acciones a realizar y al final trazar las direcciones de trabajo para posteriores aplicaciones de la misma.

El control está dirigido a valorar si la estrategia didáctica, mediante el sistema de acciones previsto para el tratamiento del concepto escogido, contribuye a lograr una alta calidad de los procesos de formación, desarrollo y generalización de dicho concepto y por ende a un aprendizaje activo, mediado y significativo del mismo. Además, este control debe ir evaluando si las acciones realizadas han propiciado que se integre el carácter significativo de los contenidos, se atienda al valor funcional de los conocimientos y se tenga en cuenta la necesaria unidad entre lo afectivo y lo cognitivo durante el PEA.

Por las características del control a realizar y la información a obtener, las acciones a implementar son:

- Definir los aspectos de la estrategia que se van a controlar, cuidando que estos sean medibles, y definir los parámetros del control; en nuestro caso, los parámetros a medir son:
 1. Calidad del concepto formado:
 - a. Comprobar si son capaces de relacionar las propiedades del contenido del concepto.
 - b. Determinar si, dado un elemento de un concepto subordinante, el alumno es capaz de determinar si pertenece o no a su extensión.
 2. Calidad del concepto desarrollado.

- a. Determinar si son capaces de utilizar diferentes caracterizaciones.
 - b. Comprobar si conocen subcolecciones infinitas de elementos de la extensión.
 - c. Determinar si dominan estrategias para establecer relaciones conjuntistas entre la extensión del concepto en estudio con las extensiones de otros conceptos.
3. Calidad del concepto generalizado.
- a. Analizar si utilizan criterios de generalización adecuados.
 - b. Determinar si son capaces de realizar cadenas de generalizaciones.
 - c. Comprobar si dominan criterios para determinar la calidad de una generalización.
4. Nivel de aprendizaje significativo logrado.
- a. Conocer los diagramas o estructuras que posee el alumno que integran el nuevo concepto con contenidos previos.
 - b. Determinar si poseen estructurado el concepto de diferentes formas.
 - c. Comprobar si el alumno es capaz de plantear problemas o interrogantes como necesidad para la ampliación o modificación de sus estructuras mentales.
5. Utilidad del conocimiento del concepto.
- a. Comprobar si conocen diferentes significados del concepto.
 - b. Comprobar si son capaces de utilizar el concepto en problemas de diferentes ramas.
6. Nivel del papel activo del aprendizaje logrado.
- a. Determinar si son capaces de resolver problemas destinados al trabajo independiente.
 - b. Determinar si son capaces de responder preguntas hechas por el profesor.
 - c. Comprobar si pueden elaborar preguntas o realizar conjeturas acertadas.
7. Nivel del papel mediado del aprendizaje logrado.
- a. Determinar si son capaces de aprovechar las sugerencias mínimas ofrecidas por el profesor u otro alumno.
 - b. Comprobar si, durante el trabajo en equipos, pueden aportar resultados sustanciales a la solución de las tareas.
8. Manifestación de nivel de motivación y actividad volitiva.
- a. Comprobar si sienten la necesidad de resolver los problemas planteados.
 - b. Analizar si comprenden la importancia del contenido en su formación profesional

- c. Determinar si muestran esfuerzos personales, laboriosidad, trabajo enérgico y con intención por resolver los problemas, realizar las actividades de autopreparación y por subsanar las dificultades que se presentan en el proceso de resolución.
 - d. Comprobar si son capaces de formular preguntas, conjeturas o nuevos problemas.
9. Nivel de relaciones afectivas.
- a. Determinar si el alumno mantiene relaciones empáticas y solidarias con sus compañeros (no se muestra antipático, tímido o indisciplinado).
 - b. Comprobar si se expresa con claridad y fluidez.
 - c. Analizar si sus emociones son asténicas (al experimentar un sentimiento fuerte, el sujeto se transforma en introvertido, cerrado en sí mismo) o esténicas (incitaciones para actuar, expresarse, no quedar inactivo ante el desenlace de un sentimiento).
10. Resultados de las evaluaciones en los cortes realizados.
- a. Determinación de la calidad del rendimiento de cada alumno a partir de la valoración de los resultados obtenidos en las evaluaciones frecuentes y pruebas parciales.
 - b. Determinación de la calidad de su participación en escenarios de coevaluación y autoevaluación.

Para cada uno de estos indicadores se definirán parámetros más refinados de acuerdo al concepto que se escoja en la implementación de la estrategia.

- Definir qué vías de control se van a emplear (observación participante, pruebas de conocimientos, análisis de casos, encuestas, entrevistas, etc.)
- Exponer cuantitativa y cualitativamente los resultados del control y los cambios operados en la evolución de los diferentes indicadores, lo cual puede lograrse por medio de cortes evaluativos convenientemente distribuidos.
- Valorar la influencia de la estrategia en los cambios observados que se van obteniendo en el control a través de los diferentes cortes.
- Arribar a conclusiones parciales y finales de los resultados que se obtienen a través de todo el proceso, responder a ¿Cómo estaban antes?, ¿Cómo están después?

El desarrollo de esta fase se va retroalimentando de acuerdo con los resultados y se modifica el diseño inicial, de ser necesario, para que se cumpla con el objetivo propuesto. Es de destacar que las fases de establecimiento del sistema de acciones, implementación y control no se desarrollan de manera lineal, en algunos casos se superponen u ocurren de forma conjunta.

CAPÍTULO 3

IMPLEMENTACIÓN Y VALORACIÓN DE LOS RESULTADOS DE LA ESTRATEGIA

Generalmente muchos conceptos no pueden ser totalmente formados, desarrollados o generalizados en un solo tema de alguna asignatura, o en una sola disciplina, pero consideramos que por su importancia y trascendencia deben instrumentarse acciones desde éstas que tributen a un mayor aprendizaje activo, mediado y significativo de los mismos, para lo cual consideramos óptima la estrategia basada en el planteamiento y la resolución de problemas.

Los conceptos escogidos para aplicar la estrategia diseñada son los de media numérica (no contemplado explícitamente en el plan de estudios del matemático, pues solo se consideran elementos particulares de su extensión en la asignatura Estadística) y función convexa (concepto importante del currículo del matemático). Las razones de su selección se presentan en el próximo epígrafe.

Para implementar la estrategia con estos conceptos, se propone su tratamiento a través de la asignatura "Seminarios de problemas II", con un diseño curricular flexible. Esta se desarrolla con una muestra de 13 alumnos del segundo año de la carrera de Licenciatura en Matemática de la Universidad Central de las Villas, Cuba, durante el curso escolar 2003-2004; esta implementación tiene como antecedente la realización de un ensayo de la misma en una muestra de 6 alumnos de la asignatura Matemática Educativa del octavo semestre de la Universidad Autónoma de Coahuila, México, durante el curso escolar 2002-2003, la cual sirvió para rediseñar aspectos de la estrategia que ya se contemplan en esta propuesta.

3.1 Planificación.

3.1.1 Sobre la preparación del profesor.

Para diseñar la estrategia, el profesor comenzó preparándose metodológicamente en el aprendizaje como proceso cognitivo complejo activo, mediado y significativo; así como, en los aspectos afectivos y axiológicos de éste, específicamente en lo que respecta a los procesos de formación, desarrollo y generalización de un concepto por medio de la resolución de problemas. Se preparó, además, en los presupuestos teóricos y principios generales para la concepción de la estrategia, y en los aspectos a tener en cuenta en cada fase; formuló el objetivo general a lograr con el desarrollo de la misma y realizó el diseño que se propone. También, adquirió una preparación acerca de los métodos y técnicas pedagógicas que le permitan realizar el diagnóstico de necesidades y la propuesta del control como se conciben en el diseño de la estrategia.

3.1.2 Sobre el diagnóstico de necesidades didácticas de los conceptos a tratar.

Sobre los conceptos de media numérica y función convexa se determinó, al iniciar la asignatura “Seminarios de Problemas II”, la **conveniencia de validar la estrategia por medio de estos**, así como **lo que los estudiantes conocían sobre los mismos**.

Sobre el primero de estos dos aspectos, como resultado de la inclusión de este concepto en un curso optativo para estudiantes de Matemática en México durante el 2002 y un curso de postgrado en Sancti Spiritus en el 2003, después de analizar los programas y orientaciones metodológicas de las asignaturas de la especialidad del matemático, la consulta del perfil del profesional, la entrevista (ver anexo 18) a profesores participantes en el curso de postgrado y los resultados favorables de los estudiantes mexicanos, hemos llegado a conclusiones favorables sobre la necesidad e importancia de incluir el concepto de **media numérica** en el currículo del matemático, aunque fuese en asignaturas de Seminarios de Problemas o asignaturas optativas; ya que es un concepto que posee las ventajas siguientes:

- Por ser un concepto cuyo tratamiento propuesto engloba elementos importantes de tres contextos diferentes (geométrico, algebraico y del cálculo diferencial) propicia el trabajo interdisciplinario y de integración de conocimientos.
- Favorece el trabajo de articulación vertical desde la enseñanza media hasta la universitaria, al ampliarse los resultados con la utilización de las herramientas del cálculo.
- Mediante su tratamiento pueden surgir adecuados organizadores que pueden contribuir a un verdadero aprendizaje significativo.
- Se trata de un concepto al cual se le conocen varios significados (en diferentes contextos), aplicaciones, caracterizaciones, conceptos subordinados, subordinantes, susceptible de ser generalizado; o sea, que se le pueden realizar un amplio conjunto de acciones de formación, desarrollo y generalización que contribuyan a un aprendizaje significativo del mismo.
- Posee potencialidades para diseñar actividades encaminadas a un papel activo y mediado de los estudiantes en el PEA.
- Por la riqueza y facilidad de conocimientos previos que se necesitan y por la susceptibilidad de este concepto a ser aprendido por descubrimiento significativo (no por recepción), puede emplearse de manera acertada la enseñanza por medio de la resolución de problemas.
- Por la riqueza y belleza de sus características, unido al despertar de adecuadas motivaciones, puede contribuir a ampliar la esfera de intereses de los estudiantes y lograr una motivación intrínseca.

- Permite emplear herramientas del cálculo diferencial para generalizar relaciones y determinar organizadores generales para las medias p-ésimas, y de esta forma mostrar la fortaleza de estas herramientas con respecto a las de la geometría y el álgebra elemental.
- Posibilita cadenas de problemas muy interesantes que se basa en la cadena general de la figura 11:

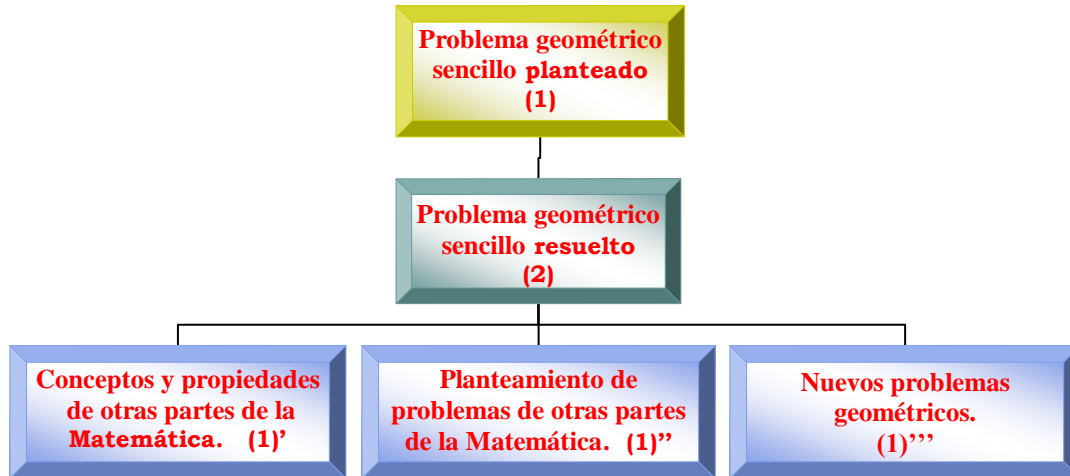


Fig. 11

que genera las relaciones de la figura 12:

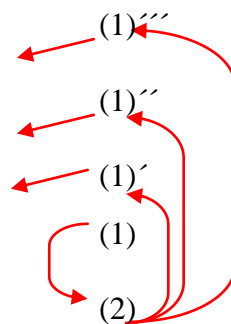


Fig. 12

- Favorece el inicio de un proceso de generalización que comienza en la secundaria y pudiera terminar en el postgrado.

Por otra parte, este es un concepto al que se le pueden realizar un amplio conjunto de acciones de formación, desarrollo y generalización en el año en que se implementa, pues los contenidos necesarios para ello deben estar en la zona de desarrollo del grupo de alumnos, a diferencia de otros conceptos en los que se necesita mayor bagaje teórico-matemático, aún no estudiado por los alumnos.

Sobre el concepto de función convexa.

- Es un concepto muy necesario en el Análisis Matemático y en las asignaturas de Optimización de la carrera de Matemática.
- Es uno de los conceptos que admite un tratamiento tanto analítico como geométrico.

- Facilita el establecimiento de un conjunto de desigualdades que se presentan en la enseñanza media, las que especialmente se abordan con alumnos de concurso; consecuentemente es necesario un tratamiento que tenga en cuenta esta diversidad.

Además, es uno de los conceptos a los que se le pueden realizar, de manera natural, un amplio conjunto de acciones de formación, desarrollo y generalización basados en la resolución de problemas, y por ser un concepto ya introducido en el primer año de la carrera en la asignatura de Análisis Matemático I, los contenidos necesarios para abordar su tratamiento ya deben haber sido aprendidos por los alumnos, solo faltaría determinar si fueron aprendidos significativamente.

Sobre el diagnóstico de los conocimientos previos en torno a los conceptos a tratar.

Se realizó, durante la primera semana del curso, una prueba de diagnóstico de contenidos en la que se medían saberes conceptuales, procedimentales y actitudinales sobre las medias numéricas y las funciones convexas (ver anexo 19) en la que todos los estudiantes declaraban conocer el concepto de media aritmética, el cual solo empleaban al determinar el promedio de las notas obtenidas en las asignaturas durante un período determinado, solo un estudiante conocía la expresión de la media geométrica, sin conocer significados de la misma y ninguno conocía la media armónica, aunque dos de ellos habían oído hablar de ella.

Sobre el concepto de función convexa, solo 6 estudiantes recuerdan la definición obtenida el semestre anterior relacionando la posición relativa entre el gráfico de la función sobre cierto intervalo y el segmento de secante a la misma sobre ese intervalo, la cantidad de objetos de la extensión de este concepto que son capaces de mencionar es muy escasa, los trece alumnos utilizan herramientas del Cálculo Diferencial para el análisis de la convexidad durante la discusión y trazado de funciones, aunque solo 11 utilizan eficientemente esta caracterización en la operatoria con el concepto.

Ante las preguntas relativas a las acciones de desarrollo y generalización conceptual, solo dos estudiantes establecieron parcialmente algunas relaciones, sin expresar una justificación convincente, lo que ilustra el hecho de que estos conceptos no fueron aprendidos significativamente.

Con los resultados del diagnóstico y las orientaciones dadas en el diseño de la estrategia, se pone en práctica el sistema de acciones previsto encaminado a cumplimentar el **objetivo específico**: Llevar a cabo los procesos de formación, desarrollo y generalización de los conceptos de media numérica y función convexa, mediante la resolución de problemas de manera que se logre una mayor calidad del aprendizaje durante estos procesos.

Como primera acción concreta realizada está la elaboración del programa de la asignatura (anexo 20) en el que se recogen: la fundamentación de la disciplina, el sistema de objetivos instructivos y educativos, el sistema de

conocimientos, el de habilidades, orientaciones metodológicas y de organización, posible sistema de evaluación y bibliografía.

3.1.3 Sistema de acciones por temas.

Algunas acciones de carácter general que se proponen durante el desarrollo de los temas son:

1. Exposición significativa por el profesor suscitando la participación activa de los estudiantes caracterizada por:
 - 1.1 Planteamiento de problemas interesantes del área de intereses de los alumnos, en aras de lograr una motivación intrínseca y una implicación afectiva de los mismos.
 - 1.2 Empleo y elaboración de adecuados organizadores de la información como: mapas conceptuales, de extensiones, de proposiciones, simbólicos, diagramas, esquemas.
 - 1.3 Establecimiento de las transferencias correspondientes de un mapa a otro.
 - 1.4 Que los alumnos respondan preguntas hechas por el profesor.
 - 1.5 Que ejemplifiquen situaciones que se tratan.
2. Planteamiento de problemas por parte del profesor y de los estudiantes.
3. Resolución de problemas de manera activa por parte de los estudiantes por medio de los cuales se va construyendo el conocimiento.
4. Ofrecimiento de niveles de ayuda adecuados por parte del profesor que puede darse por medio de:
 - 4.1 Sugerencias sobre la utilización de herramientas matemáticas.
 - 4.2 Impulsos heurísticos, estrategias, procedimientos, etc.
 - 4.3 Utilización del error como recurso de aprendizaje.
5. Propiciar trabajo en grupos o equipos, para facilitar la mediación del profesor y del resto del grupo en el aprendizaje de cada alumno.
6. Planteamiento de problemas por parte de los alumnos de manera que surjan como una necesidad natural durante los procesos que se estudian.
7. Planteamiento de preguntas orales debidamente dosificadas por el profesor que susciten la búsqueda parcial de resultados.
8. Observación por el profesor del:
 - 8.1 Nivel de motivación intrínseca de los alumnos.
 - 8.2 Nivel de participación de los alumnos.
 - 8.3 Nivel de cooperación entre los alumnos.

8.4 Grado de comprensión del contenido tratado por parte de los estudiantes.

8.5 Grado de cumplimiento de los objetivos.

8.6 Comportamiento de la toma de notas por los alumnos.

En la tabla 6 se presenta un resumen de la aplicación de algunas de estas acciones en cada uno de los temas, entendiendo las abreviaturas como se explican en la leyenda siguiente: h/c – horas clase, CT-conferencia taller, CP-clase práctica, S-seminario, L-laboratorio de computación.

| Tabla 6. Algunas acciones por temas | | | | |
|---|-------------|----------|--------------------|-------------|
| Temas | Cant de h/c | Form doc | Forma de org | Acciones |
| 1. Herramientas necesarias para enfrentar el curso: diferentes tipos de mapas conceptuales, diagramas conmutativos. Conocimientos de lógica formal: ideas generales sobre las características lógicas de un concepto y sobre los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual. | 2 | 1CT | Frontal | 1 y 8 |
| 2. Problemas sencillos de geometría plana que conducen a diferentes medias de dos números reales positivos. Primera generalización (conducentes al concepto de media p-ésima). | 2 | 1CP | Frontal | 2,3,4,6,7,8 |
| 3. Procesos que intervienen en el proceso de formación del concepto de media numérica. Segunda generalización (vinculadas al concepto de media numérica). | 2 | 1S | Frontal Tríos | 2,3,4,7,8 |
| 4. Problemas sencillos de geometría plana para probar el orden entre las medias p-ésimas usuales. | 2 | 1S | Frontal | 2,3,4,6,7,8 |
| 5. Construcción de un organizador mediante la ordenación total de la colección de las medias p-ésimas cuando p es un número entero. | 2 | 1S | Frontal Tríos | 2,3,4,6,7,8 |
| 6. Ampliación del organizador por medio de la ordenación total de la colección de las medias p-ésimas cuando p es un número real. | 2 | 1S | Frontal Tríos | 2,3,4,7,8 |
| 7. Problemas geométricos sencillos del espacio que conducen a diferentes medias de tres números. Tercera generalización. | 2 | 1S | Frontal | 2,3,4,6,7,8 |
| 8. Estudio del concepto de media numérica de n números reales positivos. Cuarta generalización. | 2 | 1S | Frontal Equipos | 2,3,4,6,7,8 |
| 9. Otros significados. Aplicaciones del concepto de media numérica. | 2 | 1S | Frontal Equipos | 2,3,4,6,7,8 |
| 10. Laboratorio con las medias. | 2 | 1L | Equipos | 2,3,4,6,7,8 |
| 11. Proceso de formación del concepto de función convexa. | 2 | 1CT | Frontal | 2,3,4,6,7,8 |
| 12. Caracterizaciones del concepto función convexa. | 2 | 1S | Frontal Tríos | 2,3,4,7,8 |
| 13. Estructuras algebraicas de las clases $C_{VE}(I)$ y $C_V(I)$. | 2 | 1S | Frontal | 2,3,4,6,7,8 |
| 14. Relación entre las clases $C_{VE}(I)$ y $C_V(I)$ con las clases de funciones $C(I)$, $M(I)$ y $D(I)$. | 2 | 1S | Frontal Tríos | 2,3,4,6,7,8 |
| 15. Algunas desigualdades importantes establecidas con ayuda de las funciones convexas. Otros significados de la convexidad. | 2 | 1S | Frontal Tríos | 2,3,4,7,8 |
| 16. Generalización del concepto función real convexa de una variable a varias variables reales. Laboratorio sobre las funciones convexas. | 2 | 1L | Frontal | 2,3,4,6,7,8 |

Otras acciones específicas llevadas a cabo en cada tema pueden verse en apéndices del anexo 20 contenedor del programa.

3.2 Implementación de la estrategia planificada.

Para la implementación de la estrategia planificada se pusieron en práctica, a través de las clases planificadas, las acciones previstas en el epígrafe anterior por medio de la resolución de problemas (como se propone en una versión actualizada de Mederos y Martínez(2002)) de manera activa, mediada y significativa durante los procesos de formación, desarrollo y generalización de los conceptos escogidos sobre la base de la articulación de los componentes didácticos: objetivo, contenido, método, medio y evaluación; y, siguiendo las orientaciones que se ofrecen en el programa de la asignatura (anexo 20).

En el anexo 21 se presenta una tabla en la que se expone la distribución de problemas que se puso en práctica para facilitar los procesos didácticos que intervienen en los procesos de formación, desarrollo y generalización del concepto de **media numérica**. Esta distribución, junto con la que se hizo para el concepto función convexa, enriquecidas con consideraciones didácticas oportunas puede verse en el folleto didáctico elaborado para la asignatura.

Por ejemplo, la cantidad de problemas empleados en cada uno de los subprocesos que intervienen en los procesos de formación, desarrollo y generalización del concepto de media numérica son:

Para el proceso de formación conceptual.

- Para facilitar el paso a un nivel relevante ciertos objetos particulares. (7)
- Para la determinación de rasgos comunes y esenciales a los objetos encontrados. (5)
- Algunos significados de la media armónica. (2)
- De agrupación de rasgos esenciales o comunes en una clase \equiv Construcción del contenido conceptual. (2)
- De agrupación en una clase de todos los objetos que satisfacen el contenido \equiv Construcción de la extensión. (2)
- Realización de la operación definición conceptual. (2)

Para el proceso de desarrollo conceptual.

- Determinación de relaciones entre las extensiones de conceptos. (2)
- Ampliación de los significados de la media armónica. (5)
- Establecimiento de relaciones algebraicas entre medias. (12)

Para el proceso de generalización conceptual.

- Preparación del concepto para la generalización. (7)

- Realización de cadenas de generalizaciones aun contexto más amplio. (3)
- Valoración de la calidad de las generalizaciones hechas. Establecimiento de relaciones (de orden) entre los elementos de la extensión del concepto (de media p-ésima de n números reales positivos). (3)

Total.(52)

En la implementación de la estrategia, la fase de control juega un importante rol, la que se desarrolla durante todo el proceso de aplicación. Los resultados del control se exponen en el próximo epígrafe.

3.3 Control de la estrategia implementada.

El control se realiza atendiendo a los procesos y resultados obtenidos en el PEA de la asignatura Seminarios de Problemas II en la carrera Licenciatura en Matemática, en lo relacionado con los conceptos de media numérica y función convexa, atendiendo a la estimación de los indicadores establecidos en el epígrafe 3.3.

Para adaptar estos indicadores a los conceptos tratados y lograr una medida de su nivel de desarrollo alcanzado en los alumnos, se realiza una clasificación en tres categorías, en bajo (B), medio (M) y alto (A).

Conocimientos precedentes (cp), entendiendo por Nivel bajo (1): cuando no identifica los rasgos esenciales y suficientes de los conceptos, ni logra establecer proposiciones y teoremas que los relacionan; Nivel medio (2): realiza una de las dos tareas anteriores; Nivel alto (3): identifica los rasgos esenciales de los conceptos y logra relacionarlos.

Calidad del concepto formado (pf), Nivel bajo (1): no es capaz de relacionar las propiedades del contenido del concepto formado; ni de determinar si, dado un elemento de un concepto subordinante, este pertenece o no a su extensión. No aprueba la prueba parcial relativa a este proceso; Nivel medio (2): es capaz de relacionar solo algunas propiedades del contenido del concepto formado; en general, es capaz de determinar si, dado un elemento de un concepto subordinante, este pertenece o no a su extensión. Obtiene 3 en la prueba parcial; Nivel alto (3): cumple con las dos acciones relacionadas anteriormente. Obtiene 4 o 5 en la prueba parcial donde se mide el resultado del proceso.

Calidad del concepto desarrollado (pd): Nivel bajo (1): no es capaz de utilizar diferentes caracterizaciones, no conoce subcolecciones infinitas de elementos de la extensión, no domina estrategias para establecer relaciones conjuntistas entre la extensión del concepto en estudio con las extensiones de otros conceptos, no domina los significados establecidos del concepto, no es capaz de utilizar eficientemente el concepto en la solución de problemas de diferentes ramas matemáticas o extramatemáticas. No aprueba la prueba parcial relativa a este proceso; Nivel medio (2): es capaz de realizar las acciones anteriores solo parcialmente. Obtiene 3 en la prueba parcial; Nivel alto (3): es capaz de realizar estas acciones. Obtiene 4 o 5 en la prueba parcial donde se mide el resultado del proceso.

Calidad del concepto generalizado (pg), Nivel bajo (1): no es capaz de determinar las dos formas de generalizar el concepto, ni de realizar cadenas de generalizaciones y restricciones del concepto. No aprueba la prueba parcial relativa a este proceso; Nivel medio (2): realiza una de las dos acciones anteriores o las dos solo parcialmente. Obtiene 3 en la prueba parcial; Nivel alto (3): es capaz de realizar las dos acciones. Obtiene 4 o 5 en la prueba parcial donde se mide el resultado del proceso.

Calidad del aprendizaje significativo logrado (as), Nivel bajo (1): es capaz de establecer relaciones entre el concepto nuevo con los precedentes por medio de mapas, diagramas que sintetizan la información, etc. no es capaz de plantear problemas o interrogantes como necesidad para la ampliación o modificación de sus estructuras mentales; Nivel medio (2): realiza una de las dos acciones anteriores o las dos solo parcialmente; Nivel alto (3): es capaz de realizar las dos acciones.

Nivel del papel activo del aprendizaje logrado (pa), Nivel bajo (1): es capaz de resolver solo pocos problemas planteados destinados al trabajo independiente, de responder solo las preguntas más sencillas hechas por el profesor, no es capaz de elaborar preguntas o realizar conjeturas acertadas; Nivel medio (2): realiza estas acciones de manera parcial, o no realiza algunas pero realiza otras eficientemente; Nivel alto (3): realiza estas tres acciones de manera eficiente.

Nivel del papel mediado del aprendizaje logrado (pm), Nivel bajo (1): no es capaz de aprovechar las sugerencias mínimas ofrecidas por el profesor u otro alumno, durante el trabajo en equipos, no aporta resultados sustanciales a la solución de las tareas; Nivel medio (2): en ocasiones es capaz de aprovechar las sugerencias mínimas ofrecidas por el profesor u otro alumno, durante el trabajo en equipos, aporta algunos resultados a la solución de las tareas; Nivel alto (3): realiza estas acciones de manera eficiente.

Nivel de motivación y actividad volitiva (av), Nivel bajo (1): No sienten la necesidad de resolver los problemas planteados; no comprenden cabalmente la importancia del contenido en su formación profesional; no muestran esfuerzos personales, laboriosidad, trabajo enérgico y con intención por resolver los problemas planteados, por realizar las actividades de autopreparación y por subsanar las dificultades que se presentan en el proceso de resolución. Nivel medio (2): muestra esfuerzos y motivaciones en algunas de las direcciones anteriores; Nivel alto (3): muestra esfuerzos y motivaciones en todas las direcciones anteriores.

Nivel de relaciones afectivas (ra). Nivel bajo (1): no mantiene relaciones empáticas con sus compañeros (se muestra antipático, tímido o indisciplinado), no se expresa con facilidad, no es solidario con sus compañeros, sus emociones generalmente son asténicas (al experimentar un sentimiento fuerte, el sujeto se transforma en introvertido, cerrado en sí mismo) o (exageradamente esténicas: incitaciones para actuar, expresarse, no quedar inactivo ante el desenlace de un sentimiento); Nivel medio (2): mantiene una comunicación bastante

buena con sus compañeros, aunque no se expresa con una óptima fluidez, logra transmitir el mensaje que desea, se muestra solidario con sus compañeros, sus emociones son generalmente estéticas; Nivel alto (3): Su comunicación con sus compañeros es buena y fluida, es solidario con sus compañeros y muestra interés por ayudar a los demás y que se cumplan los objetivos trazados con la actividad, sus emociones son estéticas.

Resultados en las evaluaciones (re) (5 pruebas parciales, 4 preguntas escritas, intercambio de libretas, sistema de ponencias-oponencias, autovaloraciones). Nivel bajo (1): Desaprueba al menos dos pruebas parciales, no realiza buenas valoraciones durante el intercambio de libretas y pruebas realizadas, ni en ponencias u oponencias, no realiza una adecuada autovaloración (se subvalora o sobrevalora) sobre su trabajo y potencialidades; Nivel medio (2): Desaprueba, a lo sumo una prueba parcial u obtiene varias notas de 3, realiza valoraciones aceptables en escenarios de coevaluación y autoevaluación; Nivel alto (3): Aprueba casi todas las pruebas parciales con notas entre 4 y 5, a lo sumo obtiene un 3, realiza buenas valoraciones durante actividades de coevaluación y autovaloraciones.

Para comprobar la evolución de estos indicadores en el grupo en que se implementó la estrategia didáctica, los datos obtenidos se valoran mediante análisis porcentual y la estadística descriptiva.

Para medir la manera en que se manifiestan estos indicadores se aplicaron los métodos: encuestas y entrevistas a estudiantes, observación participante en diferentes momentos y escenarios, pruebas de contenidos y estudio de casos.

Se muestra un resumen de las valoraciones realizadas, atendiendo a los aspectos señalados anteriormente y que a su vez responden a las especificidades del año en que se aplicó la estrategia.

Clasificación inicial de los estudiantes de acuerdo a su rendimiento académico.

Como se señaló anteriormente, la muestra está conformada por 13 estudiantes del segundo año (toda la matrícula) de la carrera de Licenciatura en Matemática para la recogida de la información necesaria de acuerdo al objetivo del control, estos se clasificaron por su aprovechamiento docente en alto, medio y bajo, de acuerdo a los siguientes criterios:

Alto: Los que obtuvieron como índice general 4.25 puntos o más durante el primer año de la carrera y buenos resultados en el diagnóstico inicial, opinión favorable del colectivo de profesores del año sobre el rendimiento alto del alumno (Incluye una buena participación en clases que evidencie el poder aplicar a la resolución de los problemas, los conocimientos precedentes de Matemática).

Medio: Los que tienen como índice general una calificación entre 3.75 y 4.25 puntos y en el diagnóstico inicial, aunque presentan algunas dificultades, conocen y aplican los conocimientos precedentes pero cometen algunos errores que no le permiten concluir de forma correcta. Además si tiene un índice superior a 4.25 pero

presentó muchas dificultades en el diagnóstico inicial. Los profesores del año opinan que su rendimiento es medio.

Bajo: Todos los que no cumplen con los requerimientos para ser clasificados como de alto o medio.

Entre los que se clasificaron como bajo aprovechamiento, se encontraron los que obtuvieron como índice académico en el primer año una calificación inferior a 3.75 puntos y dificultades en el diagnóstico inicial; índice en el rango de 4 y 4.5, pero que presentaron grandes dificultades en el diagnóstico inicial.

Finalmente quedaron clasificados con la característica de ser de bajo aprovechamiento: 5 estudiantes, 5 de medio y 3 de alto.

Con la estrategia propuesta e implementada se requiere estudiar cómo fue cambiando el comportamiento de los alumnos, su evolución, sobre todo los que al inicio demostraron un bajo aprovechamiento.

Para esto se llevó a cabo un diseño de preexperimento diagramado de la forma siguiente:

G_{único} O₁ X₁ O₂ X₂ O₃ X₃ O₄ X₄ O₅ X₅ O₆ Ver Sampier (2003, p.136)

La razón de esta selección se debe a los siguientes factores:

- No programamos un experimento “verdadero”, ver Sampier (2003, p.137), pues para ello se necesita poseer al menos otro grupo con el cual establecer comparaciones.
- Cada una de las intervenciones X_i , $i = \overline{1,5}$ se refieren a la implementación de varias partes de la estrategia. X_1 , X_2 y X_3 corresponde a la implementación de los procesos de formación, desarrollo y generalización del concepto de media numérica respectivamente; X_4 y X_5 son relativas a los procesos de formación y desarrollo - generalización del concepto de función convexa respectivamente.
- Cada uno de los controles O_i , $i = \overline{1,6}$ se refiere al control realizado en cada uno de los cortes evaluativos previstos, los que fueron ubicados después de la realización de 5 Pruebas Parciales relativas a los procesos estudiados. O_1 corresponde al primer corte, donde se controla la prueba de diagnóstico inicial realizada, O_2 , O_3 y O_4 , corresponden a los controles de X_1 , X_2 y X_3 respectivamente y, finalmente, O_5 y O_6 corresponden a los controles de las implementaciones X_4 y X_5 respectivamente.

En sentido general, se pudo llevar a cabo un buen control de los indicadores previstos, pues las posibles fuentes de invalidez interna se vieron bastante reducidas, como se ilustra a continuación.

- Selección. Por ser un grupo único, se tiene la equivalencia entre muestras. Ver Sampier (2003, p.157)
- Mortalidad experimental. No hay pérdida de participantes en la muestra escogida.

- Historia. No ocurrieron acontecimientos que afectaran la implementación de la estrategia, por ejemplo: todas las actividades docentes tuvieron lugar en el tiempo y espacio planificados, no hubo problemas de asistencia, etc.
- Maduración. No se observaron manifestaciones de cansancio, hambre o aburrimiento, pues los turnos fueron colocados una vez por semana en la segunda hora de la mañana del martes, donde predominaba una adecuada capacidad de trabajo de los alumnos. Como la implementación solo duró un semestre, los resultados cognitivos obtenidos no se deben a una maduración adquirida por otras asignaturas; y como la asignatura se desarrolla paralelamente a las demás, los alumnos no tienen tiempo disponible para aprehenderla autodidáctamente, sino con la guía del profesor – investigador.
- Inestabilidad. Acorde con la caracterización realizada a los alumnos del grupo se constató que ninguno de ellos presentó problemas docentes, familiares o emocionales que pudieran atentar contra el desenvolvimiento usual de ellos durante las clases de la asignatura.
- Administración de pruebas e instrumentación. Los temarios elaborados para las pruebas pedagógicas de contenido, incluían variedad de preguntas encaminadas a medir no solo resultados, sino procesos, a la vez que se combinaron preguntas reproductivas, productivas y creativas.

3.3.1 Sobre la encuesta a estudiantes. (Ver anexo 22)

Ante la pregunta, ¿qué vía ha predominado durante el proceso de formación de los mismos: de lo particular a lo general o viceversa?, se obtuvo un consenso general en que se empleó la primera.

Al indagar sobre las acciones de formación, desarrollo y generalización conceptual realizadas en clases se obtuvo que la mayoría de los estudiantes completaron la matriz de incidencia (tabla 7) como sigue:

| Tabla 7. Matriz de conceptos x acciones | | | | | | | | | | | | |
|---|----------------------|------------|------------------------------------|---|---------------------------------------|---|-----------------------|---|-------------------------------------|--|---|---|
| | Proceso de formación | | | | Proceso de desarrollo | | | | | Proc. de gzción | | |
| | Plana | Ana-lítica | Determinación de rasgos esenciales | Generalización conducente a la definición | Orden entre elementos de su extensión | Ampliación de significados del concepto | Utilidad del concepto | Determinación de caracterizaciones del concepto | Análisis de estructuras algebraicas | Establecimiento de relaciones entre la extensión del concepto con las extensiones de otros | Establecimiento de generalización por debilitamiento del contenido del concepto | Establecimiento de generalización por consideración de conjuntos de partida más amplios |
| Media p-esima de | X | | X | X | X | X | X | | | | X | X |

| | | | | | | | | | | | | |
|----------------------------|---|---|---|---|--|--|---|---|---|---|--|---|
| dos núm. | | | | | | | | | | | | |
| Media numérica de dos núm. | X | | X | X | | | X | | | | | X |
| Función convexa | | X | X | X | | | X | X | X | X | | X |

lo que nos deja ver que poseen claridad sobre las acciones realizadas durante el desarrollo de cada uno de los procesos del tratamiento de los conceptos implementados.

Sobre los aspectos que más han influido en la **motivación** de los estudiantes al abordar el estudio de estos conceptos, existe coincidencia de criterios en que:

Durante *el proceso de formación*, ha sido la resolución de problemas de diferentes contextos (geométrico, algebraico, del Cálculo Diferencial) que conducen a objetos particulares, el planteamiento y resolución de problemas para determinar rasgos comunes de esos objetos, el planteamiento y solución de problemas para seleccionar de los rasgos comunes rasgos esenciales y agruparlos en una clase, y finalmente la resolución de problemas para tomar la clase de rasgos esenciales y hacer las generalizaciones conducentes al concepto, ya que los alumnos se sienten involucrados en estas diferentes situaciones de aprendizaje, realizan su mayor esfuerzo para obtener la solución de los problemas y, finalmente, sienten la necesidad de definir el concepto que se formado.

La resolución de problemas ha sido un elemento que también ha contribuido a la motivación y, por ende, a la participación activa de los estudiantes en *el proceso de desarrollo conceptual* y a la comprensión de que este consiste esencialmente en la ampliación de la clase de los objetos conocidos de la extensión y a la determinación de nuevas propiedades de los elementos de la extensión y caracterizaciones del concepto.

Los estudiantes expresan que la utilización de problemas adecuados para poner de manifiesto el significado del debilitamiento de alguna de las propiedades del contenido del concepto ha contribuido notablemente a que comprendan y sienta la necesidad de participar en el *proceso de generalización* correspondiente. De igual forma, manifiestan que su participación en la solución de problemas relativos a la transferencia de las propiedades del contenido a contextos más amplios ha facilitado la comprensión de este tipo de procesos de generalización.

Una de las características del aprendizaje significativo presentes durante el curso que salió a relucir con esta encuesta es que, al tratar de establecer las relaciones entre los conceptos estudiados, se emplean organizadores de la información como mapas de extensiones, con sus respectivos mapas simbólicos y de proposiciones, diagramas, figuras geométricas, etc.

Sobre la evaluación del aprendizaje de los conceptos tratados, los alumnos reconocen que se han empleado variedad de formas de evaluación. Según su temporalidad: expresan que han realizado evaluaciones frecuentes y parciales; según sus agentes, dejan ver que se han hecho coevaluaciones por medio del intercambio de libretas, la realización de oponencias a las ponencias de otros alumnos la determinación de las fortalezas y debilidades de otros alumnos; también expresan que han realizado autoevaluaciones de sus resultados personales por medio de la realización de autovaloraciones y el análisis autocrítico de su trabajo, así como la determinación de las fortalezas y debilidades propias; según la calificación de la evaluación, expresan que se han combinado las evaluaciones cualitativas, en las que se emiten criterios valorativos del estudiante, con las cuantitativas en las que se otorga una nota por la calidad de su trabajo. Sobre el tipo de preguntas que predomina en las evaluaciones escritas, expresan que se combinan las reproductivas, las productivas, las de aplicación de los conceptos, hasta de establecimiento de relaciones con otros conceptos, de análisis de contenidos de los conceptos, de valoración sobre la pertenencia o no de un objeto a la extensión del concepto que se evalúa, de significados del concepto, de elaboración o interpretación de mapas conceptuales, diagramas, etc.

Sobre el aprendizaje activo y mediado, con este instrumento se obtuvo que, al realizar las acciones de formación, desarrollo y generalización de los conceptos estudiados, se ha combinado el trabajo independiente y el trabajo cooperativo para la consecución de los objetivos propuestos; el primero, generalmente, cuando los problemas a resolver son relativamente sencillos, el segundo, cuando se espera que la mayoría de los alumnos no pueden resolverlos independientemente y se necesita el intercambio con los demás alumnos o el profesor, o se requiere que, se complementen los problemas planteados con sugerencias que brinden ideas o estrategias, aunque sin conducir directamente a la solución. También destacan como elementos importantes en el aprendizaje, el análisis conjunto sobre las estrategias de resolución que se emplean y los debates que se suscitan debido a los errores que se cometen.

Sobre las relaciones afectivas opinaron que predomina una buena comunicación entre ellos (los alumnos) y entre ellos y el profesor, la disciplina generalmente es buena, existen frecuentes manifestaciones de solidaridad, los estados de ánimo son favorables para desarrollar las actividades, pues generalmente están motivados y disfrutan las actividades que se realizan.

3.3.2 La observación participante.

La observación participante es utilizada con el objetivo de valorar algunos de los indicadores expuestos anteriormente durante los procesos que van teniendo lugar durante el estudio de los conceptos previstos.

Por las características del objeto de investigación, se escogen como escenarios para la observación las conferencias, actividades prácticas, seminarios y el laboratorio puestos en práctica. Se realizan observaciones sistemáticas al 100% de las actividades docentes desarrolladas en la asignatura y que se registran en la distribución de contenidos de la misma (ver guía de observación en Anexo 23) correspondientes a 1 conferencia, 5 clases prácticas, 9 seminarios y 1 laboratorio de computación.

A través de las notas de campo de las observaciones participantes hechas, se llevaba un registro sobre la evolución de los diferentes indicadores en cada uno de los alumnos, de todo este proceso se obtuvieron las regularidades que se presentan en cada uno de los cortes planificados.

3.3.3 Valoración de los resultados obtenidos en los diferentes cortes.

La estrategia didáctica fue aplicada de acuerdo con los requisitos previstos. En su ejecución se trató que los datos recogidos se correspondieran con la realidad, la información se agrupó a través de los diferentes cortes descritos al final del epígrafe 3.3, por medio de las evaluaciones sistemáticas, parciales y finales de las asignaturas, mediante la observación participante y entrevistas individuales y grupales.

1er corte. Valoración de los conocimientos precedentes derivados de la prueba de diagnóstico inicial.

En el primer corte sobre los conocimientos precedentes pudo apreciarse que predominan los resultados bajos (38,5%) y medios (38,5%), lo que da una idea de que estos no fueron aprendidos significativamente, solo el 23% obtiene resultados altos en este indicador, a pesar de tratarse de conceptos muy sencillos (dos de geometría plana: ángulo y circunferencia, y cuatro de análisis matemático: función, función continua, derivable y monótona). Como puede apreciarse en el gráfico de barras del anexo 24, los parámetros que llevaron a estos resultados se comportaron como sigue:

- La identificación y expresión de los rasgos esenciales de los conceptos relacionados en el anexo 19 aspecto II.1, donde el 30.8% obtuvo niveles bajos y el 69.2% restante obtuvo niveles medios y altos (la mitad per cápita).
- El establecimiento de proposiciones sencillas relativas a resultados de la geometría elemental y de condiciones necesarias, suficientes o caracterizaciones de conceptos básicos del análisis matemático, donde aumentó la cantidad de niveles bajos a un 38.5% y disminuyeron los altos a un 15.4%.

Valoración cualitativa: Después de intercambiar opiniones con los alumnos sobre estos resultados, estos refieren que solo pueden recordar algunas propiedades de los conceptos relacionados (aunque no todas y a veces no esenciales), no tienen claridad sobre qué es una condición necesaria, suficiente o una caracterización, no poseen estructurados estos conocimientos por medio de esquemas, mapas, etc,

2do corte. Valoración de los indicadores pf, as, pm, pa, av, ra, después de la PP1.

Sobre la **calidad de los conceptos formados** (media numérica y media p-ésima) se tiene que predominan los niveles altos (61.5%) y medios (38.5%), pues todos los alumnos aprueban la prueba parcial y la mayoría con notas entre 4 y 5. Una valoración cualitativa de este indicador nos indica que los alumnos tienen claridad de que los conceptos definidos son conceptos nuevos y que uno (media numérica) es un concepto subordinante del otro (media p-ésima), son capaces de relacionar las propiedades esenciales de los contenidos de estos conceptos y solo presentan algunas dificultades a la hora de analizar si determinados objetos pertenecen a su extensión, aspecto este en el que se necesita realizar una mayor ejercitación. Esta dificultad permitió encaminar mayores esfuerzos de los estudiantes en actividades previas a la PP5, donde se mide la calidad de otro proceso de formación.

Sobre la calidad del **aprendizaje significativo** logrado, se tiene que el 100% de los alumnos es capaz de realizar un mapa de extensiones donde se relacionen los dos conceptos, aunque algunos de ellos no logran establecer de manera precisa los mapas de contenido y simbólicos correspondientes.

Sobre el **papel activo de los alumnos**, se apreció que, durante la resolución de los problemas iniciales planteados destinados al trabajo independiente (para determinar las características de las medias p-ésimas particulares que se iban obteniendo), cuatro alumnos (los que inicialmente fueron clasificados de bajo rendimiento y uno de medio) necesitaron de una orientación más precisa, uno de ellos necesitó, además, de sugerencias para poder proceder, los demás se encaminaron en la solución de problemas sin mayores contratiempos. Dos alumnos tenían tendencia al trabajo cooperativo en el sentido de recibir ciertos niveles de ayuda de los demás (no de ofrecer), los que inicialmente fueron catalogados como de poca independencia cognoscitiva.

Sobre el **papel mediado del aprendizaje**, se realizó una división del grupo en tríos que estuvieran constituidos por alumnos de bajo, medio y alto aprovechamiento (según la clasificación inicial) en cada uno. Se apreció que, durante la resolución del resto de los problemas planteados destinados al trabajo en tríos (para determinar las características esenciales del concepto de media numérica), los alumnos de alto y, en ocasiones, los de medio ofrecían los mayores aportes sustanciales a la resolución de los problemas. No obstante, se orientó que fueran los alumnos clasificados como de bajo rendimiento los que expusieran las soluciones obtenidas por el equipo, pero al establecer una discusión con estos, realizando pequeñas variaciones de ciertas condiciones sobre la cual fueron resueltos los problemas, se comprobó que solo exponían sus resultados de manera reproductiva, sin haber comprendido cabalmente la solución. En próximos trabajos en equipo, se proponen otras acciones que involucren de manera más activa a los alumnos de bajo aprovechamiento. Finalmente, fueron catalogados como nivel bajo el 23.1%, medio el 30.8% y el resto de alto.

Sobre la manifestación de la **motivación y la actividad volitiva**, se apreció que, en general, los alumnos sienten la necesidad de resolver los problemas planteados; comprenden la importancia de abordar las situaciones de aprendizaje propuestas, muestran esfuerzos personales por resolver los problemas planteados y por subsanar las dificultades que se presentan en el proceso de resolución; aunque todos realizan las actividades de autopreparación, se aprecia, mediante preguntas orales, que algunos alumnos se limitaban a recopilar las soluciones obtenidas por otros, sin realizar una asimilación crítica de las mismas. Se reportaron dos casos (15.4%) de niveles bajos en este aspecto en lo que influyó esta última observación y el hecho de que poseían una marcada tendencia a realizar consultas a compañeros cercanos o al profesor y no realizar suficientes esfuerzos por encaminarse en la solución. En este corte quedaron, además, un 23.1% de niveles medios y 61.5% de altos.

En cuanto a las **relaciones afectivas** se aprecia, en sentido general, que la comunicación entre los alumnos es buena y fluida, muestran gran sentido de la solidaridad, interés por ayudar a los demás y que se cumplan los objetivos trazados con la actividad, sus emociones son estéticas. Solo una alumna presenta un nivel bajo en este aspecto, en lo que influye el hecho de que es una alumna de reingreso que no cursa todas las asignaturas, se comunica poco con sus compañeros; aspecto este que le es señalado por el resto del colectivo. Quedaron evaluados finalmente, 7.7% con nivel bajo, 15.4 % con un nivel medio y el 76.9 % con un nivel alto.

Evolución de algunos indicadores durante los cortes 3ro, 4to, 5to y 6to.

En la tabla 8 se aprecia la evolución que tuvieron los indicadores: as, pa, pm, av, ra durante los cortes del segundo al sexto.

| Tabla 8. Evolución de los indicadores: as, pa, pm, av, ra durante los cortes del segundo al sexto | | | | | | |
|---|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Indic | Nivel | 2do corte | 3er corte | 4to corte | 5to corte | 6to corte |
| As | Bajo | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| | Medio | 4 | 5 | 4 | 5 | 3 |
| | Alto | 6 | 6 | 8 | 8 | 10 |
| Pa | Bajo | 4 | 3 | 2 | 0 | 0 |
| | Medio | 5 | 4 | 4 | 5 | 4 |
| | Alto | 4 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Pm | Bajo | 3 | 2 | 1 | 1 | 0 |
| | Medio | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 |
| | Alto | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Av | Bajo | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| | Medio | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 |
| | Alto | 8 | 9 | 10 | 11 | 11 |
| Ra | Bajo | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| | Medio | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | Alto | 10 | 11 | 12 | 12 | 12 |

Sobre la **calidad del aprendizaje significativo** logrado se aprecia una evolución favorable, pues, a medida que avanzaban los cortes se fue constatando que algunos alumnos pasaron de niveles bajos a medios y otros de medios a altos, incluso, un estudiante que comenzó en nivel bajo durante el segundo corte, culminó con un nivel alto en este indicador. Finalmente, en el último corte, se reportó un 76.9% de niveles altos y el resto de niveles medios. Una valoración cualitativa de este indicador nos indica que durante el PEA, se trató de llevar a cabo un adecuado seguimiento del diagnóstico inicial de cada alumno, lo cual era factible debido a la pequeña matrícula del grupo, esto permitió establecer relaciones esenciales entre los conocimientos nuevos con lo que conocen los alumnos, en lo que fueron decisivos adecuados organizadores de la información, una muestra del avance logrado en esta dirección está dada en que los alumnos desarrollaron la habilidad de realizar mapas de extensiones donde se relacionan varios conceptos, y aunque, en los primeros cortes, no lograban establecer de manera precisa los mapas de contenido y simbólicos correspondientes, ya en los últimos, esto se lograba con mayor precisión por la mayoría de los alumnos. También se fue apreciando una mejora paulatina en la transferencia de los conocimientos de la zona de desarrollo (tanto los de años anteriores como los adquiridos

en el curso) a la resolución de problemas planteados sobre diferentes contextos (geométrico, algebraico, del Cálculo).

Sobre el **papel activo** de los alumnos, también se constató una evolución satisfactoria. Durante los encuentros iniciales del curso, algunos alumnos no eran capaces de resolver problemas sencillos destinados al trabajo independiente, o resolvían pocos de ellos, entre otras causas porque, no tenían debidamente organizados los conocimientos que poseían o no sabían transferirlos a situaciones nuevas; no eran capaces de responder las preguntas más sencillas hechas por el profesor o de elaborar preguntas o realizar conjeturas, entre otras causas porque tenían cierto miedo escénico, tenían temor a cometer algún error o no tenían los conocimientos necesarios para ello; además, algunos de ellos tenían tendencia al trabajo cooperativo, pues tenían por costumbre realizar consultas frecuentes con un alumno cercano.

Con el decursar de los encuentros estas deficiencias se fueron subsanando, pues se pusieron en práctica las acciones propuestas en la estrategia que tributan a mejorar estos aspectos. En el último encuentro se registró un 69.2% de niveles altos y el resto de medios. No obstante, del cuarto al quinto corte, un alumno que estaba en nivel alto en este indicador descendió a medio, en lo que influyó el hecho de que se ausentó (de manera justificada) a uno de los encuentros y no realizó una actualización adecuada previa al próximo encuentro, por lo que se insistió, por parte del profesor, en la importancia de actualizar y organizar los conocimientos, tomar las notas de clases imprescindibles y realizar de manera autoreflexiva las tareas de autopreparación, sobre todo en caso de ausentarse a clases, aspecto este que mejoró sustancialmente en la medida que avanzaron los cortes; finalmente, este alumno volvió a retomar un nivel alto de su papel activo en el aprendizaje, a pesar de haber tenido otra ausencia.

Sobre el **papel mediado del aprendizaje**, cuando se diseñaban actividades destinadas al trabajo en equipos, estos se conformaban de manera que se incluyeran alumnos de bajo, medio y alto aprovechamiento (según la clasificación inicial) en cada uno. En cortes iniciales se apreció que durante la resolución de los problemas planteados destinados al trabajo cooperativo, los alumnos de alto y en ocasiones los de medio, ofrecían los mayores aportes sustanciales a la resolución de los problemas, a la exposición oral de los resultados obtenidos en el equipo y a la oposición oral de los resultados expuestos por otro equipo; ante errores cometidos por algunos alumnos, muchas veces se apreciaba una ayuda prematura por otros.

Se orientó que fueran los alumnos clasificados como de bajo rendimiento los que expusieran las soluciones obtenidas por el equipo, y aunque al principio sus exposiciones eran reproductivas, pues al establecer una discusión con ellos se comprobaba que solo dominaban los resultados superficial y memorísticamente, esta situación fue cambiando, pues en los debates realizados previos a los últimos cortes ya mostraban un mayor

dominio de las situaciones y ante preguntas más profundas, respondían favorablemente. Ante errores generalizados en el grupo, el profesor suscitaba un debate profundo en el que se explotara al máximo la situación, caracterizado por analizar las consecuencias que traería el error y las posibles variantes para subsanarlo, tratando de lograr el mayor protagonismo de los alumnos, sobre todo de los de bajo rendimiento.

En el último corte ya no se reportaban alumnos con un nivel bajo en el papel mediado del aprendizaje, quedando un 76.9% de niveles altos y un 23.1% de medios. Es de destacar en este indicador la evolución favorable que tuvo la alumna de reingreso, que al principio mostraba serios problemas de comunicación con sus compañeros y al final ya se mostraba más comunicativa y activa dentro del grupo en general y en el trabajo en equipos en particular.

Sobre la manifestación de la **motivación y la actividad volitiva**, se apreció que, en general, todos los alumnos mostraron interés en abordar las situaciones de aprendizaje, esfuerzos personales por resolver los problemas planteados y por subsanar las dificultades que se presentan en el proceso de resolución desde los primeros cortes hasta los últimos, trabajan enérgicamente y con intención, presentando pocos problemas de disciplina; todos realizaban las actividades de autopreparación, y aunque al principio se apreciaba que algunos alumnos se limitaban a recopilar las soluciones obtenidas por otros, sin realizar una asimilación crítica de las mismas, esta situación fue cambiando favorablemente, lo cual se pudo comprobar por medio de preguntas orales y escritas al inicio de la clase, en general mostraron interés en el desarrollo de las actividades donde emplean el asistente matemático MATHEMATICA. Ya en el último corte se obtuvo un 84.6% de niveles altos y un 15.4% de medios.

En cuanto a las **relaciones afectivas** se apreció que, desde el principio, la comunicación entre la mayoría de los alumnos fue buena y fluida, mostraron gran sentido de la solidaridad, interés por ayudar a los demás y que se cumplieran los objetivos propuestos, la emociones que predominaron fueron estéticas. La alumna de reingreso que inicialmente presentó un nivel bajo en este aspecto, tuvo una evolución favorable, en lo que influyó, de manera decisiva, el señalamiento realizado a la misma por el resto del colectivo durante una reunión de brigada y las acciones hechas por el profesor encaminadas a su inserción paulatina en el colectivo. Quedaron evaluados en el último corte, un 92.3% (12 alumnos) de niveles altos y un solo estudiante con nivel medio.

Análisis del indicador “calidad del proceso de desarrollo” de los conceptos media numérica y media p-ésima para el 3er corte.

Sobre la calidad de los conceptos desarrollados (media numérica y media p-ésima) se tiene que se mantienen los niveles altos (61.5%), los medios (30.8%) disminuyen en un estudiante y uno de los alumnos (7.7%), que en

el proceso de formación estaba en nivel medio, ahora pasa al nivel bajo, pues desapueba la prueba parcial correspondiente a este proceso. Una valoración cualitativa de este indicador nos conduce a que los alumnos dominan la mayoría de las acciones que se llevan a cabo como parte del proceso de desarrollo de estos conceptos, como el establecimiento del orden entre elementos de la extensión de las medias p -ésimas en diferentes contextos, la ampliación de los significados de estos conceptos, así como la utilización de los mismos en situaciones prácticas. No obstante, por ser este un proceso en el que las acciones presentan un mayor nivel de complejidad, se produjo el descenso de un alumno que en el proceso anterior estaba en nivel medio a bajo; por lo que se instrumentan acciones para que en la PP6 se logre una mayor calidad del proceso de desarrollo que allí se evalúa.

Análisis del indicador “calidad del proceso de generalización” de los conceptos media numérica y media p -ésima para el 4to corte.

Sobre la calidad de los conceptos generalizados (media numérica y media p -ésima) se tiene que, con respecto al proceso anterior, el alumno que estaba en nivel bajo pasa a medio y uno medio pasa a alto, por lo que se registra un 69.2% de niveles altos y un 30.8% de medios. Se aprecia que los alumnos realizan eficientemente la mayoría de las acciones que se realizan en el proceso de desarrollo de estos conceptos, como son: establecer generalizaciones por debilitamiento del contenido del concepto y por consideración de conjuntos de partida más amplios.

Análisis del indicador “calidad del proceso de formación” del concepto función convexa para el 5to corte.

Sobre la calidad del concepto formado de función convexa se tiene que predominan los niveles altos (69.2%) y medios (30.8%), pues todos los alumnos aprueban la prueba parcial y la mayoría con notas entre 4 y 5. Valorando cualitativamente este indicador, se aprecia que los alumnos tienen claridad de que el concepto definido es subordinado del concepto de función, son capaces de relacionar las propiedades esenciales del contenido de este concepto y de analizar si determinados objetos pertenecen a su extensión, aunque ante el análisis de funciones de mayor complejidad, presentan más dificultades debido a que no poseen habilidades desarrolladas en el trabajo con desigualdades, aspecto este en el que se necesita realizar una mayor ejercitación. Esta dificultad permitió proponer una recomendación para próximas ediciones del curso.

Análisis del indicador “calidad de los procesos de desarrollo y generalización” del concepto función convexa para el 6to corte.

Sobre la calidad del proceso de desarrollo del concepto función convexa, se mantienen los mismos niveles que el anterior proceso de desarrollo, aclarando que un alumno que estaba en nivel alto pasó a medio y otro que

estaba en nivel medio pasó a alto. Una valoración cualitativa de este indicador nos conduce a que la mayoría de los alumnos dominan las acciones que se llevan a cabo como parte de este proceso, como son: la determinación de caracterizaciones del concepto, el análisis de las propiedades que cumplen las operaciones funcionales, el establecimiento de relaciones entre la extensión del concepto con las extensiones de otros conceptos, así como la utilización del concepto en determinadas situaciones tanto intra como extramatemáticas. No obstante, es válido señalar que se trata de un proceso en que el cumplimiento de las acciones propuestas requieren del empleo de varios conocimientos precedentes, que en muchos casos no fueron formados significativamente, por lo que se ha necesitado reactivar estos conocimientos durante el propio proceso.

Sobre el proceso de generalización, este se llevó a cabo por medio de la consideración de un conjunto de partida más amplio que el original. En la PP5 se incluyó una pregunta relativa a un proceso de generalización por debilitamiento del contenido de una de las caracterizaciones del concepto función convexa (generalización de la desigualdad de Jensen para coeficientes que sumen 1), en la que se obtuvo un 7.7 % de niveles bajos, 30.8% de medios y 61.5% de niveles altos.

Análisis de los resultados en las evaluaciones (5 pruebas parciales, 4 preguntas escritas, intercambio de libretas, sistema de ponencias-oponencias, autovaloraciones).

Se analizan los resultados de las 5 **pruebas parciales** aplicadas en las semanas 4, 7, 9, 12, y 16 (ver anexos del 25 al 29) del desarrollo de la asignatura, con 45 min de duración cada una. La primera de ellas midió objetivos referentes al proceso de formación del concepto de media numérica, la segunda al de desarrollo y la tercera al proceso de generalización de este concepto, la cuarta y quinta pruebas se dedican a la evaluación de objetivos referentes a los procesos de formación y desarrollo – generalización del concepto función convexa respectivamente.

Los temarios elaborados contienen preguntas que se combinan entre las reproductivas, productivas, creativas, de medición de procesos, de medición de resultados, cuyas soluciones poseen una corta extensión, pero que requieren de demostrar una alta comprensión de los contenidos tratados en clases, del empleo de estrategias de elaboración y organización adecuadas, así como cierta dosis de creatividad para ser resueltas.

A continuación se muestra la tabla 9 con los resultados de los alumnos en dichas pruebas parciales:

| Tabla 9. Notas en pruebas parciales | | | | | |
|--|----------------------------|----------|----------|--------------------------|----------|
| Nota | Concepto de media numérica | | | Concepto función convexa | |
| | PP1 (pf) | PP2 (pd) | PP3 (pg) | PP4 (pf) | PP5 (pd) |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 4 | 3 | 4 | 2 | 3 | 3 |

| | | | | | |
|-------------------------------|------|------|------|------|------|
| 5 | 5 | 4 | 7 | 6 | 5 |
| % de notas de calidad (4 o 5) | 61.5 | 61.5 | 69.2 | 69.2 | 61.5 |

Un análisis de estos resultados nos conduce a que los por cientos de notas de calidad son altos, esto, unido a las características de las preguntas encaminadas a comprobar el grado de comprensión de los contenidos y el empleo de estrategias de elaboración y organización de la información, nos permiten afirmar que se evidencia un alto grado de comprensión de los contenidos y un empleo eficiente de estas estrategias, lo que evidencia el alcance de un aprendizaje significativo por parte de los alumnos.

Puede apreciarse que solo se registra un alumno desaprobado en dos pruebas parciales relativas a los procesos de desarrollo de ambos conceptos, en lo que influye el hecho de que, es el proceso de desarrollo, el que más acciones de trabajo, tanto con el contenido como con la extensión, lleva implícito.

Sobre la autoevaluación y coevaluación, en general se tiene una evolución favorable en estos aspectos, pues, aunque al principio no predominaba una buena fluidez y profundidad en las valoraciones del trabajo realizado por los demás y por el propio expositor, esto fue mejorando con el transcurrir del curso, donde se apreciaba que, paulatinamente, iban emitiendo juicios valorativos cada vez más acertados en este sentido.

Sobre estos aspectos en conjunto, finalmente, queda evaluado un alumno (7.7%) con un nivel bajo, 4 (30.8%) con nivel medio y 8 (61.5%) con un nivel alto en este indicador.

3.3.4 Estudio de casos.

Con el objetivo de profundizar en el conocimiento de la efectividad de la estrategia, se realiza un estudio de casos. Dado uno de los objetivos del control de la estrategia, centrado en conocer cómo los estudiantes fueron evolucionando en cuanto a su rendimiento durante la aplicación de la estrategia, sobre todo los estudiantes que al inicio de la experiencia evidenciaron presentar dificultades, y por lo tanto en el diagnóstico inicial fueron evaluados de bajo aprovechamiento. Se realizó un estudio de casos, con cada uno de los integrantes de la muestra en los que se aplicó la estrategia, este estudio se conformó con el uso de los métodos de encuesta, entrevista, observación participante y prueba de contenidos cuyos resultados a nivel de toda la muestra fueron analizados anteriormente, sobre todo los estudiantes que al inicio de la experiencia evidenciaron presentar dificultades, y por lo tanto en el diagnóstico inicial fueron evaluados de bajo aprovechamiento.

En correspondencia con el diagnóstico inicial que se efectuó durante la primera semana de clases se realizó una clasificación de los estudiantes de acuerdo a su rendimiento docente (ver epígrafe 4.3), y con esos resultados, se determinaron los que se seleccionaron para realizar el estudio de casos.

Al culminar el semestre se realiza otra vez la clasificación de los estudiantes, pero evidentemente los criterios cambian por el momento del proceso docente en que se realiza. Los criterios de clasificación, al culminar el semestre son los siguientes:

Alto: Comprende los contenidos tratados en clases y juega un papel activo y mediado eficientes durante la misma, participa y toma las notas necesarias para su estudio; puede hacer, en lo fundamental, todas las tareas indicadas para el estudio; utiliza estrategias de organización y elaboración de manera eficiente, demostrando que su aprendizaje ha sido significativo; obtiene calificación de excelente o bien en la mayoría de las pruebas parciales efectuadas; ha culminado con un nivel alto en la mayoría de los indicadores, aunque en tres, a lo sumo, culmina con un nivel medio.

Medio: No comprende todo lo abordado en clase, generalmente tiene dudas y en ocasiones dificultades en tomar notas en clases. Pero con el trabajo independiente logra comprender y generalmente puede realizar las tareas encomendadas, participa en clases, aunque no de forma activa; demuestra que su aprendizaje ha sido parcialmente significativo, pues emplea, aunque no óptimamente, estrategias de organización y elaboración; obtiene calificación de bien o regular en la mayoría de las pruebas parciales efectuadas; culmina con nivel medio en casi todos los indicadores y a lo sumo uno con nivel bajo.

Bajo: Todos los que no cumplen con los requerimientos para ser clasificados como de alto o medio aprovechamiento.

Seguidamente se ejemplifican los resultados de este estudio de casos tomando para ello un caso de alto, uno de medio y uno de bajo aprovechamiento.

Caso aprovechamiento alto.

Al comenzar el estudio de la asignatura su aprovechamiento fue evaluado de medio; tenía un buen índice académico en el primer año, pero evidenció dificultades en los conocimientos relacionados con el diagnóstico inicial. No obstante, muestra interés y preocupación por eliminar las dificultades. En la primera prueba parcial obtiene regular.

Muestra grandes esfuerzos por aprender el nuevo contenido.

En clases muestra buena concentración de la atención, participa activamente y presenta una buena comprensión de los contenidos, toma las notas necesarias para su estudio posterior.

Ante la resolución de problemas más complejos, muestra avances significativos en la solución y en ocasiones, aprovechando las sugerencias ofrecidas por el profesor, los resuelve completamente.

Durante el trabajo cooperativo se integra y trabaja en función del equipo, ofrece niveles de ayuda a compañeros de más dificultades, aunque precaviendo de no caer en manifestaciones de ayuda prematura.

A medida que transcurre el semestre, comprende y realiza las tareas programadas con un mayor nivel de independencia, en las otras pruebas parciales obtiene excelente y bien. En la solución de problemas diseñados para el empleo de estrategias de organización y elaboración, muestra grandes avances.

La aplicación que realiza de sus conocimientos, llega a alcanzar un nivel creativo en ocasiones.

Realiza un estudio individual y por equipo, contribuyendo con sus conocimientos, que enriquece con las valoraciones y explicaciones que realiza a sus compañeros. Su actuación en escenarios de coevaluación contribuyó a sus posibilidades de autoevaluación, lo que constituyó un elemento importante para encontrar sus propias dificultades y la de sus compañeros y al mismo tiempo buscar las vías de solución.

Culmina el semestre con nivel alto en todos los indicadores, excepto en el de “pd”, que culmina con un nivel medio.

Caso aprovechamiento medio.

Comienza el semestre con una valoración de su aprovechamiento catalogada de mal. Aunque obtuvo índice de 3.9 en el primer año, en el diagnóstico presentó dificultades, no podía argumentar sus respuestas. Obtuvo regular en la primera prueba parcial.

Se caracteriza por ser atento a clases, no siempre puede tomar las notas necesarias y en ocasiones no comprende y necesita ayuda. En las actividades prácticas prefiere el trabajo en pequeños grupos, en el trabajo por equipos para los seminarios se logra integrar al mismo y contribuye con su labor.

Al inicio del semestre, tenía dificultades con su participación, ésta no era espontánea y no podía argumentar sus respuestas, esta situación fue cambiando a medida que transcurre el semestre, ya que se fue motivando con la realización de las tareas, apreciándose mayor calidad en las mismas, evidenciando su comprensión adecuada de los contenidos, así como sus posibilidades de emplearlos en diferentes contextos.

La aplicación que realiza de sus conocimientos, no llega a alcanzar un nivel creativo, encontrándose situaciones que no es capaz de resolver y de plantearse nuevas incógnitas.

En problemas de organización y elaboración de la información, solo elabora o completa parcialmente los mapas de extensiones y los simbólicos y de proposiciones correspondientes.

En las otras pruebas parciales obtiene bien y excelente.

Culminó el semestre con un nivel alto en los indicadores “pf”, “pm”, “av” y “ra”, y con un nivel medio en “pd”, “pg”, “as” y “pa”.

Caso aprovechamiento bajo.

Este estudiante es catalogado de bajo aprovechamiento, al iniciar el semestre, por tener un bajo índice académico y presentar dificultades en los conocimientos y en su aplicación; tiene dificultades en la solución de

los problemas que van apareciendo. Valora la utilidad de la Matemática en general, paulatinamente fue tomando conciencia de la necesidad de abordar los conceptos con la estrategia propuesta. Obtiene calificación de mal en el primer trabajo de control.

Se caracteriza por una buena asistencia a clases, pero muy poca participación, comete errores frecuentes durante la resolución de los problemas y en ocasiones no muestra grandes avances en la misma, ante lo que opta por atender, callarse y acatar las opiniones de los demás, a veces, sin un pleno convencimiento y sin manifestar sus preocupaciones en torno a la situación.

Fue necesaria una atención individual sistemática de orientación para ir logrando que su situación cambiara. El trabajo en equipos logró integrarse pero aportó poco en los resultados.

Su situación fue mejorando, pues al inicio se sentía abrumado y sin posibilidades de poder comprender y aplicar los conocimientos, se le ofreció orientaciones para su estudio y oportunidades para dar a conocer sus avances y argumentar sus respuestas, muchas veces no lograba encontrar la idea de solución de los problemas y no encontraba las herramientas geométricas que requerían algunos de los problemas, lo que le invalidaba encaminarse solo en la resolución del problema, entonces, se ofrecían niveles de ayuda por el profesor u otro alumno más capaz, hasta llegar a la respuesta correcta.

Además, su comportamiento en clases y las evaluaciones, ha evidenciado que domina los contenidos en los esenciales mínimos, pero no es capaz de operar en situaciones creativas.

Era capaz de elaborar mapas de extensiones muy sencillos, a los que no sabía determinar los mapas simbólicos y de proposiciones correspondientes.

Desaprueba las dos pruebas parciales correspondientes a los procesos de desarrollo de los conceptos tratados, aprueba otras dos con calificación de regular y una con bien. Este estudiante, a pesar de aprobar la asignatura se considera de bajo aprovechamiento, debido fundamentalmente al nivel de ayuda que necesitaba para poder asimilar y aplicar satisfactoriamente los contenidos estudiados.

Finalmente, termina los indicadores "pd" y "pg" con nivel bajo, los indicadores "pf", "av", "as", "pa" y "pm" con nivel medio y el "ra" con un nivel alto.

En general, al concluir con la asignatura de Seminarios de Problemas II se constató que solo 1 estudiante seguía con bajo aprovechamiento, pero ya 5 se clasificaron de medio y 7 de alto aprovechamiento, en contraste con 5 de bajo, 5 de medio y solo 3 de alto aprovechamiento que era la situación presentada al inicio de la implementación. En el anexo 30 se muestra un gráfico comparativo con estos resultados.

3.3.5 Valoración de los resultados del trabajo por consulta a especialistas.

Para la realización del trabajo con especialistas utilizamos las ideas fundamentales que se proponen en Campistrous y Rizo (1998).

a) Selección de los especialistas.

Para la determinación de la pertinencia de una serie de aspectos y subaspectos propuestos que avalan la calidad del trabajo desarrollado, seleccionamos un grupo de 15 especialistas integrado por profesores de los departamentos de Matemática de varias universidades del país.

Aunque existen variadas formas para objetivar la selección de los especialistas, decidimos realizar la misma por medio de una serie de criterios que exponemos a continuación:

- Ser profesores de alguna de las disciplinas matemáticas de algún CES.
- Tener por lo mínimo 10 años de experiencia como profesores.
- Poseer conocimientos de Geometría Plana, Álgebra Elemental, Lógica y Análisis Matemático en una o varias variables.
- Haber impartido alguna parte de los temas relativos a la determinación de propiedades de las funciones reales de una o varias variables reales.
- Estar de acuerdo en colaborar con la investigación.
- Autovalorarse con una puntuación entre 7 y 10 puntos (de una escala de 10, como valor máximo) en cuanto a su nivel de conocimiento sobre el tema.

Los especialistas seleccionados autovaloran que poseen un conocimiento alto sobre el tema que se trata, como muestra el hecho de que 8 especialistas se autocalifican con 9 puntos sobre su conocimiento del tema, 5 con 8 y 2 con 7, de una escala de 10 puntos posibles como valor máximo. Esta autovaloración fue obtenida por medio del §6 del instrumento.

b) Características del instrumento de consulta a los especialistas.

El mismo cuenta con seis epígrafes, cuyos títulos son: §1. Diseño de la investigación, §2. Elementos básicos de la Estrategia Didáctico- Metodológica, §3. Diseño de la estrategia; §4. Consulta a los especialistas; §5. Autovaloración acerca de su competencia como especialistas sobre el tema consultado; §6. Autovaloración acerca de las fuentes que le permiten argumentar sus criterios; §7. Datos generales del especialista; y, §8. Otras consideraciones.

La aplicación del instrumento solo se realiza por vía correo electrónico, por lo que, con el objetivo de encaminar a los especialistas en su análisis y facilitar su valoración sobre la propuesta, fue necesario realizar una explicación sobre el problema científico que nos lleva a proponernos e implementar la estrategia didáctica, los

aportes teóricos y prácticos de la misma, entre otros aspectos, que constituyen en su conjunto, componentes del diseño de la investigación (estos se relacionan en §1).

Está claro que los principales aspectos a valorar por los especialistas son los relativos al diseño de la estrategia sobre las fases de orientación, ejecución y control, por lo que también se incluyen en el instrumento en los epígrafes §2 y §3.

Sin embargo, en el instrumento de consulta a los especialistas no se incluyen los resultados obtenidos con la implementación, pues la misma se lleva a cabo con estudiantes y corresponde al investigador realizar una valoración cuantitativa y cualitativa de los datos obtenidos.

El epígrafe §4 es el más importante del instrumento, pues es donde los especialistas valoran la pertinencia de los subaspectos (explicados en epígrafes anteriores) incluidos en una serie de aspectos propuestos, mediante una escala de 1 (no adecuado) a 5 (muy adecuado).

c) Interpretación de los resultados.

En el anexo 31 se muestra una tabla de frecuencias relativas sobre las opiniones de los especialistas.

Una valoración matemática de estos resultados demuestra que los aspectos y subaspectos considerados poseen alta pertinencia en cuanto a su consideración y forma de medición, pues se aprecia que ninguno de los especialistas estimó a ninguno de los aspectos considerados como poco adecuado o inadecuado.

Para realizar una valoración matemática de estos resultados, confeccionamos la variable P , tal que

$$P = \sum_{i=0}^5 C_i \cdot n_i$$

donde C_i es el valor numérico asignado a la categoría y n_i es su frecuencia, de esa forma, para

cada aspecto o subaspecto se tiene que $45 \leq P \leq 75$. Estos valores de P están contemplados en la última columna de la tabla del anexo 31 y son susceptibles de ser considerados como datos continuos, a los que se les pueden determinar medidas de la estadística descriptiva que ofrezcan una caracterización sobre la manera en que los especialistas valoraron la calidad del diseño de la estrategia .

A continuación, presentamos la tabla 10 con estas medidas, obtenida con el paquete estadístico SPSS.

| Tabla 10. Medidas estadísticas relativas a la variable P | |
|---|---------|
| Numbers of indicators | 32 |
| Mean | 69.7188 |
| Median | 69.5000 |
| Std. Deviation | 2.06717 |
| Skewness | .403 |
| Std. Error of Skewness | .414 |
| Minimum | 66.00 |
| Maximum | 75.00 |

De la cual puede interpretarse que, en todos los aspectos, P se manifiesta mayor o igual que 66.

- Media: $\bar{P}=69.72$, lo que nos dice que como promedio, los especialistas valoran en alta pertinencia los aspectos considerados, pues la media es “cercana” al valor máximo de P . De hecho, los valores más frecuentes están alrededor de 69.
- Mediana=69.50, pues es el punto donde se obtiene una frecuencia acumulativa del 50 %, según muestra la tabla 11 de frecuencias siguiente:

| Tabla 11. Tabla de frecuencias de P | | | | | |
|---------------------------------------|-------|-----------|---------|---------------|--------------------|
| | | Frequency | Percent | Valid Percent | Cumulative Percent |
| Valid | 66.00 | 2 | 6.3 | 6.3 | 6.3 |
| | 67.00 | 1 | 3.1 | 3.1 | 9.4 |
| | 68.00 | 7 | 21.9 | 21.9 | 31.3 |
| | 69.00 | 6 | 18.8 | 18.8 | 50.0 |
| | 70.00 | 5 | 15.6 | 15.6 | 65.6 |
| | 71.00 | 5 | 15.6 | 15.6 | 81.3 |
| | 72.00 | 3 | 9.4 | 9.4 | 90.6 |
| | 73.00 | 2 | 6.3 | 6.3 | 96.9 |
| | 75.00 | 1 | 3.1 | 3.1 | 100.0 |
| | Total | 32 | 100.0 | 100.0 | |

- Desviación estándar: $s=2.50$, lo que nos deja ver que los valores de P se concentran bastante cercanos a la media obtenida, sin una varianza considerable.
- El sesgo=0.403 a la derecha de la moda (69) es pequeño y favorable, pues es positivo, lo que nos dice que existirán más valores a la derecha de 69 en el intervalo de confianza que a la izquierda. Esto también se visualiza por medio del histograma siguiente (figura 13), en el que se aprecia la manera en que se ajustan los datos a la distribución normal.

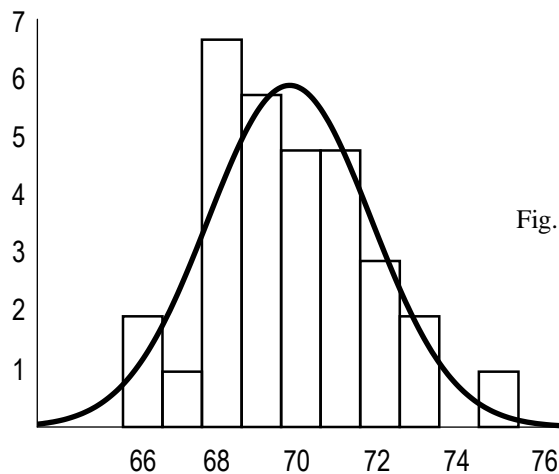


Fig. 13

- El intervalo de confianza del 95% de la media de P se calcula como $\left(\bar{P} - \frac{ts}{\sqrt{n}}, \bar{P} + \frac{ts}{\sqrt{n}}\right)$, donde $n=15$ es el número de expertos y $t=t_{cr}(0.95, 15)$ el valor de la T de Student correspondiente. Finalmente, el resultado es (68.38, 71.06), lo que nos permite afirmar que los resultados arrojados con este instrumento son muy favorables.

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos durante el proceso investigativo, después de aplicar los métodos previstos y las valoraciones realizadas de los mismos, nos permiten garantizar que se han cumplido tanto los objetivos generales como los específicos propuestos en el diseño de investigación. Las síntesis conclusivas siguientes así lo corroboran:

1. Los referentes teóricos determinados, y que se establecieron en los capítulos 1 y en el epígrafe de fundamentación del capítulo 2 en cuanto a: posición psicológica y pedagógica a asumir; características de la enseñanza basada en la resolución de problemas, características de los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual en la enseñanza superior; características de los aprendizajes activo, mediado y significativo; características y elementos de una estrategia didáctica; así como los elementos que compatibilizan y complementan unos aspectos con otros; han sido suficientes y certeros para diseñar una estrategia didáctica basada en la resolución de problemas que traiga consigo un aprendizaje activo, mediado y significativo durante los procesos que intervienen en el tratamiento de conceptos matemáticos.
2. Se ha cumplido el objetivo de nuestra investigación, pues se ha diseñado una estrategia didáctica basada en la resolución de problemas que, como se demuestra a través de los resultados obtenidos durante su implementación, contribuye a perfeccionar los procesos de formación, desarrollo y generalización de conceptos matemáticos.
3. El programa heurístico general, que se expone como aporte teórico de la tesis, recoge como elementos novedosos, la construcción de árboles de problemas debidamente dosificados para garantizar la participación de los estudiantes en los procesos didácticos que se derivan del gran problema a resolver que consiste en: la realización del proceso de formación (desarrollo, generalización) de un concepto matemático.
4. Por medio de la integración de los diferentes componentes didácticos en las diferentes clases de la asignatura "Seminarios de problemas II", se llevaron a cabo los procesos de formación, desarrollo y generalización de los conceptos de media numérica y función convexa por medio de la resolución de problemas, en cuya implementación se obtuvieron, entre otros los siguientes logros:
 - 4.1 Una motivación intrínseca de los alumnos, un aprendizaje activo, mediado y significativo, una adecuada manifestación de las esferas volitiva y afectiva, y un adecuado control y evaluación.
 - 4.2 Una implicación afectiva de los alumnos, una mejor asimilación de los conocimientos, a un afianzamiento de valores como la laboriosidad, la solidaridad, la educación formal, a una adecuada manifestación de la expresión oral.

- 4.3 A la toma de conciencia sobre la necesidad y conveniencia de abordar los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual por medio de la resolución de problemas.
- 4.4 Un entrenamiento que puede aprovecharse en otras asignaturas para el tratamiento de algunos de sus conceptos fundamentales, con lo cual se da consecución a uno de los objetivos de la disciplina “Práctica profesional del Matemático”, que contempla la asignatura “Seminarios de problemas”, mediante la cual se implementó la estrategia.
5. El sistema de acciones propuesto en el diseño de la estrategia es suficiente para abordar el tratamiento de cualquier concepto matemático con potencialidades para ser formado por un proceso inductivo, aunque durante su implementación, debe adaptarse de forma eficiente y creadora al concepto escogido.
6. Especialmente notables son los logros obtenidos en cuanto al desarrollo de estrategias de organización de la información, como parte del aprendizaje significativo logrado, pues paulatinamente fueron comprendiendo, completando y finalmente, elaborando adecuados organizadores de la información como mapas de extensiones, simbólicos, de proposiciones, diagramas, esquemas, etc.
7. Durante el proceso de evaluación del aprendizaje, mediante la integración de sus diferentes formas, se constató que mientras se avanzaba en la aplicación de la estrategia, los resultados mejoraban gradualmente, a la vez que los estudiantes fueron cambiando paulatinamente, de manera general, su nivel de aprovechamiento en un sentido positivo.
8. La utilización de la estrategia en la preparación de profesores es un valioso recurso de superación postgraduada que puede contribuir a dar un vuelco favorable al tratamiento de conceptos matemáticos en la enseñanza superior, como muestran los resultados obtenidos con su aplicación en una muestra de profesores de la provincia de Sancti Spiritus.

RECOMEDACIONES

Debido a los resultados derivados de esta investigación y a la experiencia acumulada en la labor docente del autor, se proponen las siguientes recomendaciones:

1. Implementar la estrategia diseñada al tratamiento de otros conceptos centrales del currículo del matemático.
2. Aplicar el programa heurístico general propuesto al llevar a cabo los procesos de formación, desarrollo y generalización de conceptos matemáticos.
3. Realizar colectivos de carrera encaminados a acordar cuáles pueden ser los conceptos susceptibles de ser tratados con la estrategia propuesta y qué acciones de la misma pueden llevarse a cabo a través de los diferentes años de la carrera.
4. Realizar una matriz en la que se relacionen, por filas, los conceptos de una asignatura que se deseen tratar por medio de la estrategia propuesta, y por columnas, las acciones de formación, desarrollo y generalización susceptibles de llevarse a cabo.
5. Utilizar la estrategia en cursos de preparación de profesores en dos sentidos, primero, para llevar a cabo los procesos del tratamiento conceptual de conceptos matemáticos del postgrado, segundo, como recurso metodológico a poner en práctica en el aula de clases.
6. Para futuras aplicaciones de la estrategia propuesta al tratamiento del concepto función convexa, recomendamos se incluyan acciones iniciales destinadas a la ejercitación en el trabajo con desigualdades mediante problemas sencillos y variados de búsqueda y demostración de algunas de ellas, en cuyo proceso de resolución se empleen desigualdades clásicas conocidas.

BIBLIOGRAFÍA

1. Almeida, B. (2000). La integración de los componentes organizacionales del proceso docente educativo en la evaluación del aprendizaje. Tesis de maestría. Ciudad de La Habana. Cuba.
2. Alonso, I. (2000). La resolución de problemas matemáticos. Una alternativa didáctica centrada en la representación. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Universidad de Oriente. Cuba.
3. Álvarez de Zayas, C. (1984). Fundamentos teóricos de la dirección del proceso de formación del profesional de perfil ancho. Ciudad de la Habana.
4. Álvarez de Zayas, C. (1989). Fundamentos teóricos de la dirección del proceso docente educativo en la Educación Superior Cubana. Tesis Doctoral. Ciudad de la Habana.
5. Álvarez de Zayas, C. (1990). El objeto de la didáctica. los objetivos de la enseñanza. Editado por la unidad de producción N° 3 de la Dirección docente metodológica del MES. Ciudad de la Habana.
6. Álvarez de Zayas, C. (1999). La escuela en la vida. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Cuba.
7. Álvarez, M. y otros. (2002). Acercamiento a la interdisciplinariedad en la enseñanza- aprendizaje de las ciencias. II Congreso internacional Didáctica de las Ciencias. La Habana. Cuba.
8. Arteaga, E. (2001). El sistema de tareas para el trabajo independiente creativo de los alumnos en la enseñanza de la matemática en el nivel medio superior. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Cienfuegos. Cuba.
9. Ausubel, D. P y otros. (2000) Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo. Editorial Trillas. México.
10. Ausubel, D. P. (1963). The psychology of meaningful verbal learning. New York. Grune and Straton.
11. Ballester, S. y otros. (1992). Metodología de la enseñanza de la Matemática. Tomos I y II. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. Cuba.
12. Bassanezi, R. C. y M. S. Biembengut. (1997). Modelación matemática. Una antigua forma de investigación – un nuevo método de enseñanza. Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, No 32, 13 – 35.
13. Belmont, J. (1991). Estrategias cognoscitivas y aprendizaje estratégico. En Acción Pedagógica. Vol. 2 (1.2).
14. Beltrán, J. (1998) Psicología evolutiva y de la educación. Procesos, Estrategias y Técnicas de aprendizaje. Editorial Síntesis. S.A. Madrid. España.
15. Beltrán, J. A. y otros (1984). Psicología Educacional. Vol. I y II. Madrid. UNED.
16. Betancourt, J. (1994). Sistematización de estudios sobre Estrategias. Métodos y Programas para pensar y crear. Academia de Ciencias de Cuba. La Habana.
17. Blanco, L.J. (1996). Resolución de problemas aritméticos y formación practica de los maestros. Educación Matemática. Vol. 8, No. 1, Abril, págs. 53-64. México.
18. Block, D. y otros, (1991). La resolución de problemas. Una propuesta de formación de maestros. Revista Arista. Puerto Rico.
19. Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational Studies of Mathematics*. 17.pp. 125-141.
20. Borges, J. (1991): Dirección Estratégica. Editorial 2da. D.F. México.
21. Campistrous, L. y C. Rizo. (1996). Aprende a resolver problemas aritméticos. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana.

22. Campistrous, L. Y C. Rizo. (1998). Indicadores en Investigación Educativa. Material digitalizado. Ciudad de La Habana.
23. Campistrous, L. y C. Rizo. (1999). Algunas técnicas de resolución de problemas aritméticos. Curso Pre - reunión Pedagogía '99.
24. Casanova, G. (1965). La Matemática y el Materialismo Dialéctico. Editora del Consejo Nacional de Universidades. La Habana. Cuba.
25. Castro, M., (1997). Perfeccionamiento de la enseñanza de la Matemática en la Carrera de Ingeniería en Automática. Tesis de maestría Facultad de Matemática, Física y Computación. UCLV. CUBA.
26. Chávez, J. A. (1990). Acercamiento necesario al pensamiento pedagógico de José Martí. Documentos del Ministerio de Educación.
27. Chávez, J. A. (S/A). Didáctica. Apuntes para el examen de mínimo de Pedagogía para aspirantes al grado de doctor en Ciencias Pedagógicas.
28. Chávez, J. A. (S/A). Pedagogía. Apuntes para el examen de mínimo de Pedagogía para aspirantes al grado de doctor en Ciencias Pedagógicas.
29. Chupajin, I. I. (1964). Problemas de la teoría del concepto. Editora política. La Habana.
30. Colectivo de autores cubanos. (1984). Pedagogía. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Cuba.
31. Colectivo de autores cubanos. (2004). Programas. Séptimo, octavo y noveno grados. Secundaria Básica. Provisional. Editorial Pueblo y Educación. Cuba.
32. Colectivo de autores del CEPES. (1991). Tendencias Pedagógicas Contemporáneas. Ciudad de la Habana. Cuba.
33. Colectivo de autores mexicanos. (1994). Capacitación y actualización docente. Universidad Nacional Autónoma de México. México.
34. Colectivo de autores soviéticos. (1979). Temas de psicología. Selección de lecturas de diferentes autores soviéticos. Editorial orbe. Ciudad de la Habana.
35. Coll, C. (1987). Psicología y currículum. Barcelona. Laia.
36. Coll, C. (1989). Conocimiento psicológico y práctica educativa. Barcelona. Barcanova.
37. Coll, C., J. Palacios y A. Marchesi. (2001). Desarrollo psicológico y educación. Psicología de la educación escolar. Alianza Editorial.
38. Danilov, M. A. y M. N. Skatkin. (1978). Didáctica de la escuela media. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana.
39. Dávila, M. y P. Martínez. (1989). Que piensa el maestro sobre los problemas de matemáticas. Reflexiones sobre una experiencia de formación de maestros, X Congreso Nacional de la ANPM, Acapulco, Guerrero. México.
40. Dávila, S. (2000). El aprendizaje significativo. Esa extraña expresión (utilizada por todos y comprendida por pocos). En Revista Contexto Educativo™ y Nueva Alejandría Internet™ Núm 9. julio 2000.
41. Davydov, V. V. (1981). Contenido y estructura de la actividad de aprendizaje de los alumnos. En Educadores del mundo. Berlín.
42. Davydov, V. V. (1982). Tipos de generalización en la enseñanza. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana.

43. Davydov, V. V. (1988). La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico. Editorial Progreso. Moscú.
44. De Guzmán, M. (1993). Tendencias innovadoras en educación matemática. Organización de estados iberoamericanos para la educación. la ciencia y la cultura. Editorial popular. ISBN: 84-7884-092-3. Depósito legal: M-9207-1993.
45. Delgado, J. R. (1999). La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Dos elementos fundamentales para lograr su eficacia: la estructuración sistémica del contenido de estudio y el desarrollo de las habilidades generales matemáticas. Tesis de Doctorado. Camagüey. Cuba.
46. Delors, J. (1996). La educación encierra un tesoro. Informe a la UNESCO de la Comisión Internacional sobre educación para el siglo XXI, presidida por Jacques Delors. Editorial Santillana. Ediciones UNESCO.
47. Dermont, I y J. O'Connor. (1999). Programación neurolingüística para directivos. Ediciones Urano. Sociedad Anónima.
48. Dewey, J. (1929). La Escuela y la Sociedad. Madrid.
49. Díaz, A. C. (2003). Modelo teórico con enfoque interdisciplinario para la formación de los conceptos del cálculo infinitesimal en la preparación de profesores de física y de ciencias exactas. Tesis presentada para optar por el grado científico de doctor en ciencias pedagógicas. Santa Clara. Cuba.
50. Dubinsky, Ed. (1996). El aprendizaje cooperativo de las Matemáticas en una sociedad no cooperativa. En Revista Cubana de Educación Superior No 2-3. CEPES. Universidad de La Habana.
51. Encarta. (2004). Biblioteca de consulta Microsoft Encarta – 2005. Enciclopedia – Diccionario. Material electrónico.
52. Engels, F. (1979). Anti Düring. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Cuba.
53. Ercolano, J. L. "Remarks of the Neglected Mean". Mathematics Teacher 66 (March 1973). 253-55.
54. Feuerstein, R. (1993). La teoría de la modificabilidad estructural cognitiva. En J. A. Beltrán y otros. Intervención Psicopedagógica. Madrid. Pirámide.
55. Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers.
56. Galperin, P. Ya. (1986). Sobre el método de formación por etapas de las acciones intelectuales. En Antología de la Psicología Pedagógica y de las edades. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana.
57. García, J. A. (2002). La Didáctica de las Matemáticas: una visión general. Red telemática educativa europea. Matemáticas en Secundaria. <http://nti.educa.rcanaria.es/rtee/rtee.htm>.
58. García, J. A. y otros. (2000). Matemática en la escuela secundaria básica. La Didáctica de las Matemáticas: una visión general. www.uva.es/seiem/internet. Madrid. España.
59. García, R. (2000). El conocimiento en construcción. De las formulaciones de Jean Piaget a la teoría de sistemas complejos. Gedisa Editorial. Barcelona.
60. Gardner, H. (1985). Frames of Mind. N.Y: Basic Books.
61. Gascón, J. (1994). El papel de la Resolución de problemas en la Enseñanza de las Matemáticas. En Educación Matemática. Vol. 6 (3). Grupo Editorial Iberoamérica. México. Diciembre.
62. Goce, N. y José R. (1994). Estrategia metodológica en la formación de profesores. Universidad de Salamanca.

63. González, B. E. (2001). La preparación del profesor para la utilización de la modelación matemática en el proceso de enseñanza – aprendizaje. Tesis para optar por el grado científico de doctor en ciencias pedagógicas. Universidad Central de las Villas. Santa Clara. Cuba
64. González, D. (2000). La psicología del reflejo creador: Epistemología y Etica. En: Revista Cubana de Psicología. Vol. 17. No.2. La Habana.
65. González, D. (2001). La superación de los maestros primarios en la formulación de problemas matemáticos. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Ciudad de la Habana. Cuba.
66. González, F. (2000). Lo cualitativo y lo cuantitativo en la investigación de la psicología social. En: Revista Cubana de Psicología. Vol 17. No.1. La Habana.
67. González, F. y Albertina Mitjás. (1989). La personalidad. Su educación y desarrollo. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. Cuba.
68. González, O. (1996). El enfoque histórico-cultural como fundamento de una concepción pedagógica. En Tendencias pedagógicas contemporáneas. capítulo 12. La Habana.
69. González, V. y otros. (2001). Psicología para educadores. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Cuba.
70. Gorski, D. P. y otros. (1970). Academia de Ciencias de la URSS. Instituto de Filosofía. Lógica. Imprenta Nacional de Cuba.
71. Guétmanova, A. (1989). Lógica. Editorial Progreso. Moscú.
72. Guétmanova, A. y otros. (1991). Lógica: en forma simple sobre lo complejo. Diccionario. Editorial Progreso. Moscú.
73. Herrera, José I. (2000). La concepción histórico cultural y la educación inicial y preescolar. Conferencia ofrecida en el Instituto Superior Pedagógico “Silverio Blanco”.
74. Hidalgo, J.L. (1992). Aprendizaje operatorio. Ensayos de teoría pedagógica. Casa de la Cultura del maestro mexicano. A.C.
75. Hilgard, E. R. (1984). Teorías del aprendizaje. Tomo I. Editorial pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. Cuba.
76. Hing, R., (1995). Plan Director de Matematica. Departamento de Matematica. UCLV. Cuba.
77. Iles, K. and L. J. Wilson. (January 1977). “A Further Neglected Mean”. *Mathematics Teacher* 70 . 27-28
78. Jungk, W. (1982). Conferencias sobre Metodología de la enseñanza de la Matemática. Tres partes. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana.
79. Jurguin, Y. (1973). Bueno. ¿y qué? Conversación de un matemático con personas de distintas especialidades. Editorial Mir. Moscú.
80. Kieran, C. (1998). Complexity and Insight. *Journal for Research in Mathematics Education*. vol. 29. 5. pp 595-601.
81. Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past twenty-five years of research on teaching mathematical problem solving. In E.A. Silver. Teaching and Learning mathematical problem solving: multiple research perspectives. pp1-16 Hillsdale. NJ: Erlbaum.
82. Kilpatrick, J. (1990). Lo que el constructivismo puede ser para la educación de la Matemática. Revista Educar # 17. Barcelona.
83. Kilpatrick, J. y otros. (1994). *Educación Matemática e Investigación*. Colección Educación Matemática en Secundaria. Editorial Síntesis.

84. Klingberg, L. (1972). *Introducción a la Didáctica General*. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana.
85. Konstantinov, F. y otros. (1977). *Fundamentos de filosofía marxista leninista. Parte I. Materialismo dialéctico*. Editorial Progreso. Moscú.
86. Kopnin, P.V. (1983). *Lógica Dialéctica*. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Cuba.
87. Krechmar, V. A. (1974). *A Problem Book in Algebra*. English translation. Mir publishers.
88. Krulik, S y J. Rudnik. (1980). *Problem Solving. a handbook for teachers*. Allyn & Bacon Inc.
89. Labarrere, A. (1988). *Cómo enseñar a los alumnos de primaria a resolver problemas*. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana. Cuba.
90. Labarrere, A. F. (1994). *Pensamiento. Análisis y autorregulación de la actividad cognoscitiva de los alumnos*. Ángeles Editores. México.
91. Labarrere, G. y G. Valdivia. (1988). *Pedagogía*. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana. Cuba.
92. Lauber, M.R. (1977). Commenting on Skidell's "The Harmonic Mean. A Monograph and Some Problems". In *Readers Reactions. Mathematics Teacher* 70. May. 389.
93. Lenin, V. I. (1963). *Obras completas. Tomo XXXII*. Editora Política. La Habana.
94. Leontiev, A. N. (1981). *Problemas del desarrollo del psiquismo 2*. Editorial pueblo y educación. Ciudad de la Habana. Cuba.
95. Manin, Y. I. (1981). *Lo demostrable e indemostrable*. Editorial Mir. Moscú.
96. Maor, E. (1977). "A Mathematicians repertoire of means". *Mathematics Teacher* 70. January. 20-25.
97. Martínez, A. (2003). *Procedimiento metodológico para la generalización de conceptos de los temas Dominios Numéricos y Series en la Educación Superior*. Tesis presentada para optar por el grado científico de doctor en ciencias pedagógicas. Santa Clara. Cuba.
98. Martínez, D. (2002). *Estrategia para el logro de la significatividad didáctica en la formación del concepto de función en la Matemática para la Licenciatura en Economía*. Tesis presentada para optar por el grado científico de doctor en ciencias pedagógicas. Santa Clara. Cuba.
99. Martínez, J. E. & O. B. Mederos. (2005). "El empleo de la resolución de problemas como medio para el trabajo con desigualdades matemáticas con ayuda de las funciones convexas" *BOLETÍN: "LAS MATEMÁTICAS EN SECUNDARIA"* Número 33 año 3. 20 de noviembre de 2005. URUGUAY. <http://www.matematicaparatodos.com/BOLETINES2005/BOLETIN05.htm>.
100. Mederos, O. & J. E. Martínez. (2004). "La resolución de problemas como un medio para el desarrollo, la formación y la generalización del concepto de media numérica. (Primera parte)". Evento XVI Simposio Iberoamericano de Enseñanza de la Matemática. 18 de septiembre de 2004. Universidad de Jaime I, Castellón, España. <http://www.iberomat.uji.es/carpeta/comunicaciones/14>
101. Mederos, O. & J. E. Martínez. (2005). "La resolución de problemas como medio para facilitar la formación y desarrollo de conceptos". *Revista MASESDUCATIVA*. Boletín 6. ISSN: 1575-9393. Edita Centre d'Estudis Vall de Segó Joaquin Rodrigo 3 FAURA VALENCIA tel 962601337. <http://www.quadernsdigitals.net>.

102. Mederos, O. B. & J. E. Martínez. (1999). La geometría y las medias numéricas. Cuadernos de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas de la Corporación Universitaria de Ibagué. ISSN- 0123 – 9643. Ibagué. Colombia.
103. Mederos, O. B. y J. E. Martínez. (2001). Una propuesta de estudio para la colección de las funciones convexas. Fondos de la Biblioteca “Chiqui Gómez Lubián” (artículo publicado). Universidad Central de las Villas. Santa Clara. Código 515.8 Med.
104. Mederos, O. B. y J. E. Martínez. (2004). “La utilización de la geometría elemental y la resolución de problemas para determinar un orden total para las medias p-esimas. (Segunda parte)”. En espera de publicación.
105. Mederos, O. B. y otros. (1997). Procedimiento para el estudio de los conceptos a partir de su definición. CDICT Universidad Central de las Villas. Villa Clara. Cuba.
106. Mederos, O. y B. González. (1996). Estudio del concepto de métrica. I Taller Iberoamericano de Enseñanza de Las Ciencias Básicas en la Ingeniería. UCLV. Santa Clara. Villa Clara. Cuba.
107. Mederos, O., J. E. Martínez & B. E. González. (2000). Las capacidades para resolver problemas y para la modelación. Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas de la Corporación Universitaria de Ibagué. ISSN- 0123 – 9643. Ibagué. Colombia.
108. Monereo, C. (2000). “Habilidades para sobrevivir en el siglo XXI, la sociedad del conocimiento”. Conferencia. VIII Jornada Pedagógicas de la Escuela Superior de Nayarit. 28 de Julio del 2000. Tepic, México.
109. Moreno, L. y G. Waldegg. (1992). Constructivismo y Educación Matemática. En Educación Matemática. Vol 4 (2). Grupo Editorial Iberoamérica. México. Agosto.
110. National Council of Teachers of Mathematics. (1995). Assessment standards for school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. USA.
111. Nicolai, M. B. (1977). Commenting on Maor’s “A Mathematicians repertoire of means”. In Readers Reactions. Mathematics Teacher 70. September. 486.
112. Nortes, A. Y J. M. Serrano. (1991). Operaciones concretas y formales. Murcia. Universidad de Murcia.
113. Novak, J. D. y D. B. Gowin. (1988). Aprendiendo a aprender. Ediciones Martínez Roca. S.A. Barcelona. España.
114. Palacios, J., A. Marchesi y C. Coll. (2002). Desarrollo psicológico y educación. Psicología evolutiva. Alianza Editorial.
115. Panizza, M. y P. Sadovski. (1994). Las nuevas tendencias de la enseñanza en el nivel medio. Universidad de Buenos Aires.
116. Peltier, M. L. (1993). Una Visión General de la Didáctica de Las Matemáticas en Francia. En Educación Matemática. Vol. 5 (2). Grupo Editorial Iberoamérica. México. Agosto.
117. Petrovsky, A. V. (1970). Psicología pedagógica y de las edades. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana.
118. Petrovsky, A. V. (1976). Psicología general. Manual didáctico para los institutos de Pedagogía. Editorial progreso. URSS.
119. Piaget, J. (1990). La equilibración de las estructuras cognitivas. Problema central del desarrollo. (Traducción de Eduardo Bustos). Siglo XXI de España Editores S.A. Madrid.
120. Polya, G. (1954). How to solve it. Princeton University Press.

121. Polya, G. (1966). Matemáticas y Razonamiento Plausible. Tecnos. Madrid. [Versión en español de Mathematics and Plausible Reasoning publicada por Princeton University Press en 1954].
122. Polya, G. (1986). ¿Cómo plantear y resolver problemas? Editorial Trillas. México.
123. Popov, Y. y Y, Pujnachev. (1991). Las matemáticas en imágenes. Editorial Mir. Moscú.
124. Rebollar, A. (2000). Una variante para la estructuración del proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática. a partir de una nueva forma de organizar el contenido. en la escuela media cubana. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Santiago de Cuba.
125. Resnick, L.B. y Ford, W.W. (1990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Paidós. Ministerio de Educación y Ciencia.
126. Ribnikov, K. (1987). Historia de las Matemáticas. Primera edición en Español. Editorial MIR. Moscú.
127. Rico, P. (2003). La Zona de Desarrollo Próximo. Procedimientos y tareas de aprendizaje. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. Cuba.
128. Rodríguez G. y otros. (2004). Metodología de la investigación cualitativa. Editorial Félix Varela. La Habana. Cuba.
129. Rodríguez, M. Y R, Bermúdez. (2000). Psicología del pensamiento científico. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana.
130. Sampier, R. (2003). Metodología de la investigación. Tomo I. Editorial Félix Varela. La Habana. Cuba
131. Sánchez, J. (1993). Delimitando el concepto de estrategia y sus relaciones con la estructura. Revista Alta Gerencia. No 158. La Habana.
132. Sánchez, P. (1991): Alta Gerencia Educacional. IPLAC. Cátedra UNESCO en Ciencias de la Educación. La Habana.
133. Santos, L. M. (1995). ¿Qué significa el Aprender Matemáticas?. Una Experiencia con estudiantes de Cálculo. En Educación Matemática. Vol. 7 (1). Grupo Editorial Iberoamérica. México. Abril.
134. Schoenfeld, A. (1987). *Cognitive Science and Mathematics Education*. Lawrence Erlbaum Associated.
135. Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving. metacognition and sense making in mathematics. In Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: Macmillan.
136. Schoenfeld, A. H. (1985a). Ideas y tendencias en la resolución de problemas. En La enseñanza de la Matemática a debate. Ministerio de Educación y Ciencias. Madrid.
137. Schoenfeld, A. H. (1985b). Mathematical Problem Solving. New York. Academic Press.
138. Shtoff, B. A. (1966). El modelado y la filosofía. Moscú – Leningrado, “Naúca”
139. Silvestre, M. (1999). Aprendizaje, educación y desarrollo. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Cuba.
140. Silvestre, M. y J, Zilberstein. (2002). Hacia una didáctica desarrolladora. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Cuba.
141. Spivak, M. (1970). Calculus. Cálculo infinitesimal. Vol I. Editorial reverté. Barcelona.
142. Steiner, H.G. (1987). Theory of Mathematics Education: an introduction. *For the learning of mathematics*. 5 (2). pp. 11-17.
143. Talizina, N., (1988). Psicóloga de le enseñanza. Moscú. Editorial Progreso. Págs. 57 – 108. URSS.

144. Torres, P. (2000). La Enseñanza de la Matemática en Cuba en los umbrales del siglo XXI: logros y retos. ISPEJV. La Habana. Cuba.
145. Treffers, A. (1987). *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education: The Wiskobas Project*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
146. Ursini, S. (1996). Una perspectiva social para la educación matemática. La influencia de la teoría de L. S. Vygotski. *Educación Matemática*. Vol. 8. No. 3. Diciembre. Págs. 42-49.
147. Ursini, S., (1996). Una perspectiva social para la educación matemática. La influencia de la teoría de L. S. Vygotsky. *Educación matemática*. Vol. 8. No. 3. Diciembre. Págs. 42-49. México.
148. Valcárcel, N. (1998). Estrategia Interdisciplinaria de Superación para profesores de Ciencias de la enseñanza media. Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Instituto Superior Pedagógico Enrique José Varona. La Habana.
149. Valdemoros, M. E. (1996). Vygotski y su incidencia actual en la educación. *Revista Educación Matemática*. Vol. 8. No. 3. Diciembre. Págs. 63-71.
150. Valera, O. (2002). El desarrollo moral en el niño desde las perspectivas teóricas de H. Wallon. J. Piaget y L.S. Vygotski. III Encuentro Internacional de Educación y Pensamiento. Universidad de Puerto Rico. San Juan. marzo del 2002.
151. Valera, O. (2003). Las corrientes de la psicología contemporánea; revisión crítica desde sus orígenes hasta la actualidad. *Folleto de estudio para exámenes de mínimo de Pedagogía*. Cuba.
152. Vázquez de Tapia, N., (1997). Taller sobre "Técnicas y estrategias en la resolución de problemas". Memorias de la IV Reunión de Didáctica de la Matemática del Cono Sur. Diciembre de 1997. Cochabamba. Bolivia.
153. Vázquez, R. A. (1998). La resolución de problemas y tareas docentes de Matemática IV para ingeniería eléctrica. Tesis de Doctorado. Camagüey. Cuba.
154. Vilanova, S y otros. 1999. La educación matemática. El papel de la resolución de problemas en el aprendizaje. Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Mar del Plata. Argentina.
155. Vilenkin, N. Y. y otros. (1989). Modernos elementos del curso escolar de Matemáticas. Editorial Provishenie. Moscú. URSS.
156. Vygotski, L. S. (1978). *Mind in Society. "The Development of Higher Psychological Processes"*. Harvard University Press.
157. Vygotski, L. S. (1982). Obras escogidas. Tomo I. Editorial pedagógica. Moscú.
158. Vygotski, L. S. (1989) Fundamentos de Defectología. Obras Completas. Tomo V. Editorial Pueblo y Educación. La habana. Cuba
159. Vygotski, L.S. (1982) Pensamiento y Lenguaje. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.
160. Wei, Jui-Hung. (1977). Commenting on Iles and Wilson's "A further neglected Mean". In Readers Reactions. *Mathematics Teacher* 70.
161. Zankov, L. (1975). La enseñanza y el desarrollo. Editorial progreso. Moscú.
162. Zillmer, Wolfgang. (1980). Metodología de la enseñanza de la Matemática I. Tres partes. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana.

Anexo 1. Entrevista a profesores y metodólogos de matemática de los diferentes niveles de enseñanza.

Categoría docente:

Categoría científica:

Años de experiencia:

Grado (año que imparte):

Introducción:

Me dirijo a usted como miembro del proyecto de investigación en Matemática Educativa adscrito al Centro de Estudios de Educación de la UCLV. En este momento me encuentro realizando la investigación: "Estrategia didáctica para llevar a cabo los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual en la carrera de Licenciatura en Matemática" en opción al título de Doctor en Ciencias Pedagógicas.

Consciente de su experiencia en el ejercicio de la docencia de la Matemática en el nivel _____, considero que su opinión sobre cómo se manifiestan algunos aspectos del PEA de conceptos matemáticos sería de gran utilidad. Por tal motivo le pido que responda, de las siguientes preguntas, las que usted desee.

Mencione algunas características que ha tenido el tratamiento de conceptos matemáticos en su grado y en su nivel de enseñanza, atendiendo a:

1. Vía predominante para su formación (inductiva, deductiva).
2. Acciones que se llevan a cabo durante el proceso de formación de conceptos (hasta llegar a la definición del mismo).
3. Acciones que se llevan a cabo durante el proceso de desarrollo de conceptos (determinación de condiciones necesarias o suficientes, caracterizaciones, relación de los elementos de su extensión con los elementos de la extensión de otros conceptos, ampliación de significados del concepto, utilidad del concepto, establecimiento de clasificaciones).
4. Acciones que se llevan a cabo durante el proceso de generalización de conceptos (obtención de nuevos conceptos por debilitamiento de las propiedades del concepto o por consideración de conjuntos de partida más amplios)
5. Papel de la resolución de problemas en estos procesos.
6. Acciones que se realizan para lograr la motivación intrínseca de los alumnos.
7. Acciones que contribuyen al aprendizaje como proceso activo.
8. Acciones que tributan al aprendizaje como proceso mediado.
9. Acciones que propician el logro de un aprendizaje significativo (empleo de organizadores).
10. Características lógicas conceptuales a las que se le da preferencia en los libros de texto de su asignatura.
11. Empleo, por lo profesores de su nivel, de algún material didáctico complementario que contribuya a que dominen las operaciones conceptuales básicas (definición, clasificación, generalización; el trabajo con las características lógicas del concepto (contenido y extensión); los procesos que tienen lugar durante su tratamiento: (de formación, de desarrollo y de generalización).

12. Forma de evaluar los procesos de formación desarrollo y generalización conceptual y los resultados que de ellos se derivan.

Anexo 2. Entrevista a profesores sobre el PEA de conceptos matemáticos en la Licenciatura en Matemática.

Categoría docente:

Categoría científica:

Años de experiencia:

Asignatura que imparte en la carrera:

Asignaturas que ha impartido en la carrera:

Asignaturas que ha impartido en la UCLV:

Compañero profesor:

Como usted conoce, formo parte del proyecto de investigación en Matemática Educativa adscrito al Centro de Estudios de Educación de la UCLV. En este momento me encuentro realizando la investigación: "Estrategia didáctica para llevar a cabo los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual en la carrera de Licenciatura en Matemática" en opción al título de Doctor en Ciencias Pedagógicas.

Consciente de su alta profesionalidad y maestría en el ejercicio de la docencia de la Matemática en el nivel superior, considero que su opinión sobre cómo se manifiestan algunos aspectos del proceso de enseñanza aprendizaje de conceptos matemáticos sería de gran utilidad. Por tal motivo le pido que responda, de las siguientes preguntas, las que usted desee.

1. ¿De qué formas ha abordado el proceso de formación conceptual en el proceso de enseñanza-aprendizaje de sus cursos? Ejemplifique.
2. ¿Qué acciones ha llevado a cabo para facilitar que sus alumnos participen en el proceso de desarrollo conceptual?
3. ¿Qué tipos de generalizaciones son las más frecuentes en sus cursos?
4. ¿Qué ha podido apreciar sobre la motivación de los estudiantes para abordar determinadas situaciones de aprendizaje? ¿Qué acciones ha realizado para lograr una motivación intrínseca de los estudiantes con respecto a su participación en los procesos que intervienen en el tratamiento conceptual?
5. ¿Qué organizadores de la información ha contribuido a desarrollar en sus estudiantes para que éstos aprendan significativamente?
6. ¿Qué actividades ha diseñado y aplicado para facilitar el aprendizaje activo de sus estudiantes?
7. ¿Qué actividades ha diseñado y aplicado para facilitar su mediación y la del resto de los estudiantes en el aprendizaje de cada uno de sus alumnos?
8. ¿Cuáles son las características lógicas conceptuales a las que se le da preferencia en los libros de texto de su asignatura?
9. ¿Utiliza algún material didáctico complementario que contribuya a que los estudiantes aprendan las operaciones conceptuales fundamentales?
10. ¿Cómo evalúa los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual y sus resultados?
11. Sobre el concepto función convexa:
 - 11.1 ¿A cuál definición se ha arribado?

11.2 ¿Cuáles caracterizaciones se han determinado?

11.3 ¿Con cuáles otros conceptos se ha relacionado y en qué forma?

11.4 ¿En la solución de cuáles problemas intra o extra matemáticos se ha utilizado este concepto?

11.5 ¿Ha llevado a cabo algún proceso de generalización de este concepto con la participación de sus estudiantes?

Anexo 3. Encuesta a estudiantes sobre la manifestación de la relación RP-FDGC-AAMS antes del curso.

Como se pudo apreciar en la prueba de diagnóstico inicial, existen aspectos fundamentales del tratamiento conceptual que ustedes no dominaban; después de introducidos los mismos mediante el primer tema, queremos saber la manera en que se han manifestado estos aspectos durante el tratamiento de los conceptos matemáticos recibidos por ustedes hasta el momento.

1. Al comenzar el estudio de los conceptos matemáticos, ¿qué vía ha predominado durante el proceso de formación de los mismos: de lo particular a lo general o de lo general a lo particular?
2. ¿Qué acciones de formación, desarrollo y generalización conceptual se han realizado en clases durante el tratamiento de conceptos? Ejemplifique.
3. ¿De qué manera han empleado la resolución de problemas en el trabajo con conceptos?
4. ¿Se han establecido relaciones entre los contenidos o las extensiones de varios conceptos matemáticos? ¿De qué manera? Ejemplifique.
5. ¿Se han obtenido proposiciones que permitan:
 - a. Ampliar la colección de elementos conocidos de la extensión de un concepto? Ejemplifique.
 - b. Expresar condiciones necesarias y suficientes sobre los conceptos estudiados? Ejemplifique.
6. ¿Siempre se ha sentido motivado para abordar el estudio de un nuevo concepto matemático? ¿Qué motivaciones ha tenido?
7. Cuando trata de recordar las relaciones entre los conceptos estudiados, ¿siempre lo logra?, ¿le resulta sencillo?, ¿qué recursos emplea para ello? Ejemplifique.
8. ¿De qué manera ha sido evaluado su aprendizaje de los conceptos tratados? En las pruebas que se han aplicado, ¿qué tipos de preguntas relativas a los conceptos se han puesto (reproductivas, memorísticas, de aplicación de conceptos, de establecimiento de relaciones con otros conceptos, de análisis de contenidos de los conceptos, de valoración sobre la pertenencia o no de un objeto a la extensión del concepto que se evalúa, de significados del concepto, de elaboración o interpretación de mapas conceptuales, diagramas, etc)? Ejemplifique.
9. Al realizar acciones de formación, desarrollo y generalización de los conceptos estudiados, ¿ha predominado su trabajo independiente, el trabajo cooperativo con los demás alumnos bajo la guía del profesor, o el intercambio y la elaboración conjunta con el profesor? ¿de qué manera se ha llevado a cabo el trabajo cooperativo?
10. ¿Ha cometido errores en la realización de alguna tarea relativa al tratamiento de un concepto en la clase o fuera de ella? ¿cómo se han subsanado los mismos?

Anexo 4. Contraejemplo 2 de la ley de la relación inversa.

Con este contraejemplo, al ampliar el contenido, la extensión no se hace más estrecha, sino más amplia.

Contraejemplo 2: Consideremos sobre la colección F_M de las funciones no negativas definidas sobre $M \times M$, donde M es un conjunto de dos o más elementos las propiedades, para todos los elementos x, y, z de M , siguientes:

m_1) Si $x = y$, entonces $m(x, y) = 0$

m_2) (Propiedad simétrica), $m(x, y) = m(y, x)$

m_3) (Propiedad triangular), $m(x, z) = m(x, y) + m(y, z)$

m_4) Si $m(x, y) = 0$, entonces $x = y$

m_5) $m(x, z) \leq m(x, y) + m(z, y)$

Definiciones. Dado un conjunto M se denomina métrica sobre M a toda aplicación $m: M \times M \rightarrow [0, +\infty)$ que satisface las propiedades m_1), m_4) y m_5). La extensión de este concepto se indica por M_M . Luego este concepto se puede considerar como el par (M_M, C_M) , donde $C_M = \{m_1, m_4, m_5\}$ es su contenido.

Un elemento m de F_M que satisface las condiciones m_i), $i = 1, 2, 3$ se denomina pseudo métrica sobre M . La extensión del concepto de pseudo métrica se indica por P_M y cumple la cadena de inclusiones $\emptyset \subset M_M \subset P_M \subset F_M$. Por tanto, este concepto es el par (P_M, C_P) , donde $C_P = \{m_1, m_2, m_3\}$ es su contenido.

Observe que la extensión M_M del concepto de métrica está contenida en la extensión P_M del concepto de pseudo métrica y que, sin embargo, el número de elementos 3 de los elementos de sus contenidos es el mismo.

Anexo 5. Profundización sobre la categoría “otros”.

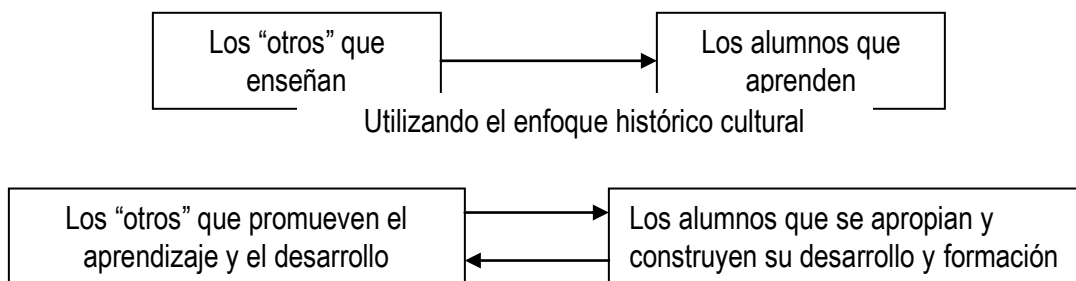
El énfasis en el papel del ambiente para crear una ZDP es particularmente interesante en relación con la instrucción escolar donde, debido al alto número de alumnos que suelen integrar los grupos, no es siempre fácil para el maestro establecer una relación interpersonal con cada uno de ellos y proporcionar a cada quien la retroalimentación necesaria. Resulta, por lo tanto, muy atractiva la idea de investigar la posibilidad de estructurar el ambiente escolar de manera que ayude al alumno a desarrollar una ZDP para temas específicos y, en particular, para trabajar con ideas matemáticas. Al respecto, en México, se encontró que el lenguaje de computación Logo ofrece posibilidades interesantes para estructurar ambientes de este tipo y propiciar el desarrollo de una ZDP para trabajar con conceptos matemáticos nuevos.

Los resultados obtenidos en estas investigaciones sugieren según Ursini, que en esta dirección es necesaria la concurrencia de varios factores, entre ellos: una tarea motivadora que genere niveles de dificultad, tanto a nivel individual como colectivo, que impliquen la solicitud de ayuda, un ambiente que ofrezca elementos que permitan la tarea y que estén en la ZDP del alumno, un ambiente social que fomente el intercambio de ideas entre los alumnos, un ambiente social que permita y propicie que los alumnos soliciten la ayuda del maestro o de un compañero más especialista, la disposición del maestro de pasar de ser un trasmisor de un cuerpo de conocimientos, a ser un especialista que proporciona ayuda oportuna a través de la orientación.

Ursini termina estos comentarios señalando “Finalmente, para que estos ambientes sigan promoviendo el desarrollo de una ZDP de los alumnos es necesario modificarlos conforme va cambiando el desarrollo actual de los alumnos, y para ello es necesario verificar periódicamente qué pueden resolver los alumnos sin ayuda”.

El enfoque histórico cultural ha contribuido a esclarecer, y a que en la práctica se cambie la relación entre los integrantes de la categoría otros y los alumnos. En forma de esquema se representa esta relación, antes de Vygotski y utilizando el enfoque histórico cultural, en los dos diagramas que se muestran a continuación.

Antes de Vygotski

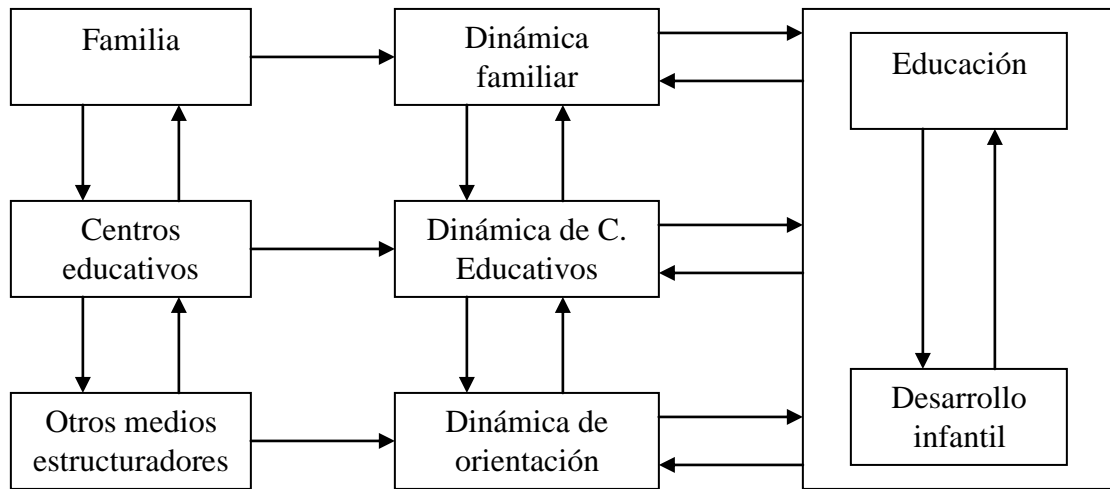


Este último diagrama sugiere la pregunta: ¿cómo deben trabajar los integrantes de la categoría “otros” para garantizar la participación activa de cada alumno en la construcción de su conocimiento y desarrollo? Considerando que la categoría “otros” esta compuesta por los grupos:

Familia: madres, padres, abuelos, otros familiares. *Centros educativos*: maestros, educadores, condiscípulos, organizaciones infantiles. *Medios que permiten estructurar el ambiente cultural del alumno*: acciones comunitarias, materiales escritos, TV, cine, video, software educativo.

Es muy importante que estos tres grandes grupos desarrollen sus actividades articuladas e integradamente. En forma visual presentamos, en la figura 5, la manera que consideramos que estos tres grupos deben promover las relaciones desarrolladoras. En cada modelo de aprendizaje el papel del educador queda determinado. Antes de Vygotski, educador era sinónimo de saberlo todo y de poder absoluto. El papel del educador en el enfoque histórico cultural está caracterizado, entre otros rasgos, por los de ser promotor de relaciones sociales e

interpersonales, de conocimientos mutuos, de la seguridad en los logros mediatizados y del modo de hacer en los demás.



Anexo 6. Fases y etapas durante el proceso de formación de conceptos derivadas del estudio experimental realizado por Vygotski.

| Fases y etapas durante el proceso de formación de conceptos | | | |
|--|---|---|---|
| Fase | Etapas | Acción en el contenido | Acción en la extensión |
| Pensamiento en sincretos | Conglomeración sincrética de objetos individuales | No agrupa los objetos de acuerdo a rasgos o nexos reales, sino por medio de impresiones, por asociación según cercanía espacial externa, o por algún rasgo subjetivo que le llame la atención | El grupo se crea al azar. Cada objeto agregado es una simple conjetura o un tanteo |
| | Grupo determinado por la posición espacial de los objetos | Se tiene en cuenta la contigüidad de elementos en el espacio o el tiempo u otra relación más compleja por la percepción inmediata del niño | El grupo sincrético se forma teniendo en cuenta rasgos más definidos como su posición espacial |
| | Imagen sincrética con base más compleja | Se mantienen las acciones descritas anteriormente aunque ahora tomando objetos de diferentes grupos | El grupo se forma por elementos tomados de diferentes grupos o montones que han sido formados arriba |
| Pensamiento en complejos | Complejo asociativo | El enlace entre el núcleo y otro objeto no necesita ser un rasgo común, tal como el color o la forma, una similitud o un contraste o la proximidad en el espacio. Está basado en cualquier vínculo que advierte el niño entre el objeto-ejemplo y alguna otra figura | Puede añadir una figura al objeto alrededor del cual se forma el grupo, por ser del mismo color, otra por ser similar al central en forma o tamaño, o por cualquier otro atributo que pueda asemejarsele. |
| | Complejo de colecciones | Considera una característica distinta para la agrupación, de modo que los objetos se colocan juntos, teniendo en cuenta algún rasgo en el cual difieren y por medio del cual pueden complementarse | El grupo resultante se convierte en una colección mixta, tanto de formas como de colores. |

| | | | |
|--------------------------------|--|---|---|
| | Complejo cadenas | La cadena se forma por subcadenas en las que los elementos se unen atendiendo a un atributo. El atributo decisivo cambia durante todo el proceso. No existe consistencia en el tipo de enlace o en la manera en que un eslabón de la cadena se une con el que le precede y el que le sigue, y la muestra original no tiene una significación central. | El grupo es una colección mixta según criterios eslabonados. Cada eslabón, una vez incluido en una cadena compleja, es tan importante como el primero y puede convertirse en el imán que atraiga a otra serie de objetos. |
| | Complejo difuso | El complejo resultante es tan indefinido que, de hecho, no tienen límites. Se caracteriza por la fluidez de cada atributo que une los elementos aislados. Por medio de vínculos difusos o indeterminados | Se forman grupos de objetos o imágenes perceptuales concretos. <i>Por ejemplo, para armonizar con un triángulo amarillo, un niño podría seleccionar tanto trapezoides como triángulos, puesto que los primeros le hacían pensar en triángulos con la parte superior cortada. Los trapezoides pueden conducir a los cuadrados, estos a los hexágonos, los hexágonos a los semicírculos y finalmente a los círculos</i> |
| | Pseudo conceptos | El niño se guía por una similitud concreta, visible, y forma un complejo asociativo limitado a un determinado tipo de enlace perceptual. | <i>Por ejemplo, cuando la muestra es un triángulo y el niño selecciona todos los triángulos del material experimental, podría haber sido guiado por la idea general o el concepto de un triángulo</i> |
| Pensamiento en concepto | Las nuevas formaciones (el primer paso hacia la abstracción) | Los atributos que, sumados, hacen que un objeto tenga la mayor similitud posible con la muestra, se convierten en el foco de atención | La asociación de diversos objetos concretos se realiza sobre la base de máxima similitud entre sus elementos |
| | Conceptos potenciales | El agrupamiento de objetos sobre la base de la máxima similitud se reemplaza por el agrupamiento sobre la base de un solo atributo | Los objetos seleccionados son el resultado de una especie de abstracción aisladora, de naturaleza primitiva |

| | | | |
|--|-------------|---|--|
| | El concepto | El concepto surge cuando un conjunto de rasgos abstraídos se sintetiza (síntesis abstracta), fuera de la forma concreta en que ellos se presentan en la realidad, y esta síntesis abstracta resultante se convierte en instrumento principal del pensamiento. Implica no sólo separar, abstraer y aislar rasgos sino también asociar y generalizar. | Selección de objetos que satisfacen los rasgos esenciales determinados producto de la síntesis abstracta y la generalización |
|--|-------------|---|--|

Anexo 7. Profundización sobre los principios didácticos.

El principio del **carácter científico de la enseñanza** significa que el contenido docente debe encontrarse en completa correspondencia con lo más avanzado de la ciencia contemporánea, para cuya adquisición la docencia utiliza métodos pedagógicos que reflejan su íntima vinculación con los métodos científicos.

La razón del principio de la **sistematicidad** se encuentra en la propia naturaleza de las ciencias, en su carácter de sistema, en la vinculación lógica de sus postulados.

Ser consecuente con el principio de la sistematicidad significa tomar muy en cuenta el enfoque de sistema en la labor docente, la revelación de los nexos, de la contradicción que existe entre los fenómenos y los procesos que son objeto de análisis en el proceso docente-educativo.

El principio de la **vinculación de la teoría con la práctica**, está en el hecho de considerar que el conocimiento no sólo debe explicar el mundo, sino, además, señala las vías de su transformación.

La **vinculación e lo concreto con lo abstracto**, que significa la necesidad de vincular los datos reales concretos estudiados con sus generalizaciones teóricas, en un proceso especialmente organizado para su apropiación por los alumnos.

El principio de la **asequibilidad** exige que la enseñanza sea comprensible y posible de acuerdo a las características individuales de los estudiantes.

Sobre la base de este principio, se determinan el nivel científico del proceso docente y el aprendizaje individual.

La asequibilidad no significa simplificar la enseñanza, sino adecuarla a las peculiaridades del grupo.

La base de la asequibilidad consiste en conocer las condiciones intelectuales específicas de cada grupo con que se trabaja.

La esencia del principio de la **solidez de los conocimientos** radica en que los maestros deben tener en cuenta en el proceso de enseñanza la lucha sistemática y enérgica contra el olvido, como un proceso psíquico normal.

La asimilación de los conocimientos por los alumnos constituye una de las funciones del proceso de enseñanza, la que se manifiesta incompleta si los estudiantes son incapaces de demostrar los resultados alcanzados de manera estable durante un período más o menos largo, lo que pone de manifiesto que los conocimientos se adquieren para ser utilizados en la práctica.

El principio esencial de la didáctica, es que hay que procurar que los conocimientos que se adquieran sean concientizados o interiorizados por los alumnos y que estos sean capaces de llegar a un nivel en el aprendizaje que **logren trabajar de manera independiente**.

Por último, el proceso docente-educativo debe **conjugarse los intereses del colectivo de alumnos y los de cada uno individualmente** sobre la base de la unión de los objetivos y de las tareas de la enseñanza.

Anexo 8. Métodos de enseñanza más generalizados.

| Método | Razón de uso (generalmente se emplea cuando:) | Forma típica | Breve caracterización |
|--|---|--|---|
| Expositivo (receptivo) | <ul style="list-style-type: none"> • se pretende impartir mucha información • existen muchas diferencias individuales en el grupo • se quieren despertar emociones generalizadas | <ul style="list-style-type: none"> • exposición con carácter de aclaración | <ul style="list-style-type: none"> • el alumno observa, escucha, toma notas. • introducción de conceptos, símbolos y frases conceptuales • deducción de proposiciones y reglas • fundamentación de los pasos de una demostración, construcción, experimento • explicación de leyes • aclaración de vías de solución |
| | | <ul style="list-style-type: none"> • exposición con carácter de instrucción | <ul style="list-style-type: none"> • planteamiento de objetivos • planteamiento de ejercicios • indicaciones sobre las formas de trabajo • resúmenes |
| | | <ul style="list-style-type: none"> • exposición con carácter de ejemplificación | <ul style="list-style-type: none"> • introducción de procedimientos • introducción de métodos y formas de representación de demostración |
| | | <ul style="list-style-type: none"> • ilustración • demostración | <ul style="list-style-type: none"> • |
| Elaboración conjunta (dirigido productivo) | <ul style="list-style-type: none"> • se pretende elaborar un nuevo conocimiento • se desea que los alumnos resuelvan ejercicios independientemente, pero se necesitan | <ul style="list-style-type: none"> • conversación socrática | <ul style="list-style-type: none"> • pasos cortos en la actividad mental • en preguntas de controles orales, generalmente en el aseguramiento del nivel de partida. • ejercitaciones diarias (preguntas de cálculo rápido, de respuesta breve) • preparación de los conceptos a definir y las proposiciones a formular |

| | | | |
|--|---|---|---|
| | <p>ciertos niveles de ayuda o establecer cierta conversación para que los alumnos se encaminen en la solución</p> | <ul style="list-style-type: none"> • conversación heurística | <ul style="list-style-type: none"> • dirigir el pensamiento de los alumnos para que descubran la solución de determinados problemas, como fundamentar, definir, explicar relaciones, formular proposiciones, encontrar un procedimiento, sobre la base de los conocimientos y habilidades ya adquiridos • búsqueda parcial de resultados en la solución de problemas • organizar los nuevos conocimientos dentro del sistema de conocimientos ya existente |
| | | <ul style="list-style-type: none"> • discusión | <ul style="list-style-type: none"> • participan muchos alumnos que presentan sus ideas e intercambian sus opiniones encaminadas a: • la búsqueda común de vías de solución ante problemas complejos • la valoración y evaluación de soluciones ofrecidas |
| <p>Trabajo independiente (productivo)</p> | <ul style="list-style-type: none"> • se requiere estudiar gran cantidad de contenido • se desea desarrollar la independencia cognoscitiva | <ul style="list-style-type: none"> • trabajo individual | <ul style="list-style-type: none"> • solución de tareas independientemente • elaboración independiente del nuevo contenido con fuentes bibliográficas (investigativo) • solución individual de hojas de trabajo • elaboración de resúmenes • exposición oral de resultados y valoración personal del proceso • realización de tareas en pizarra |
| | | <ul style="list-style-type: none"> • trabajo en equipos | <ul style="list-style-type: none"> • ejecución cooperada de tareas • solución comentada de problemas |

Anexo 9. Ejemplificación de algunos conflictos conceptuales.

Las clases de conflicto conceptual son las siguientes:

Duda: El planteamiento de una proposición crea una duda cuando existen tendencias a creer y no creer que sea cierta. Por ejemplo, ante la proposición “si a es un objeto de la extensión E_1 , entonces a es un objeto de la extensión E_2 ” existe la tendencia a creer que es cierta y a que no lo es, lo cual crea una duda.

Perplejidad: Cuando existen varias creencias mutuamente excluyentes y el sujeto se inclina a una de ellas. Se presenta perplejidad, con cierta frecuencia, cuando se conoce que las extensiones E_1 y E_2 tienen una intersección no vacía, pero no se conoce cual se cumple de las relaciones, mutuamente excluyente, siguientes: $E_1/E_2 \neq \emptyset$ y $E_2/E_1 = \emptyset$, $E_1/E_2 \neq \emptyset$ y $E_2/E_1 \neq \emptyset$, $E_1/E_2 = \emptyset$ y $E_2/E_1 = \emptyset$ y $E_1/E_2 = \emptyset$ y $E_2/E_1 \neq \emptyset$.

Contradicción: Cuando el sujeto se inclina a dos creencias incompatibles; digamos $E_1 \subset E_2$ y $E_1 \supset E_2$

Incongruencia conceptual: Creencia de que los objetos de la extensión de un concepto poseen dos propiedades que es imposible que se den juntas.

Confusión: Desconocimiento del cumplimiento o no cumplimiento de algún rasgo descriptivo de los objetos de la extensión.

Inadecuación: El sujeto se encuentra perdido al escoger una vía de solución de un problema.

Anexo 10. Clasificación de problemas, por Borasi.

Borasi (1986), en uno de los primeros intentos en clarificar la noción de problema originada por su interés en mejorar el PEA de la RP, propone los siguientes elementos estructurales para clasificar los diferentes tipos de problemas:

- El contexto del problema, la situación en la cuál se enmarca el problema mismo.
- La formulación del problema, definición explícita de la tarea a realizar.
- El conjunto de soluciones que pueden considerarse como aceptables para el problema.
- El método de aproximación que podría usarse para alcanzar la solución.

Utilizando estos elementos estructurales, Borasi presenta la siguiente tabla, que obviamente corresponde al nivel preuniversitario.

| Tipo | Contexto | Formulación | Soluciones | Método |
|---------------------------|-------------------------------------|---|--|--|
| Ejercicio | Inexistente | Única y explícita | Única y exacta | Combinación de algoritmos |
| Problema con texto | Explícito en el texto | Única y explícita | Única y exacta | Combinación de algoritmos |
| Puzzle | Explícito en el texto | Única y explícita | Única y exacta | Elaboración de un nuevo algoritmo, Acto de ingenio. |
| Prueba de una conjetura | En el texto y sólo de forma parcial | Única y explícita | Por lo general única, pero no necesariamente | Exploración del contexto, reformulación, elaboración de nuevos algoritmos. |
| Problemas de la vida real | Sólo de forma parcial en el texto | Parcialmente dada, algunas alternativas | Muchas posibles, de forma aproximada. | Exploración del contexto, reformulación, creación de un modelo |
| Situación problemática | Sólo parcial en el texto | Implícita, se sugieren varias, problemática | Varias. Puede darse una explícita | Exploración del contexto, reformulación, plantear el problema. |
| Situación | Sólo parcial en el texto | Inexistente | Creación del problema | Formulación del problema. |

En el nivel superior, no se ha realizado una clasificación como esta, pues la gama de contextos, formulaciones, soluciones y métodos es mucho más amplia para los diferentes tipos de problemas relacionados.

Anexo 11.

Primera parte. Componentes que sirven para el análisis del comportamiento en la resolución de problemas.

Los trabajos de Schoenfeld (1987) también suponen un intento de búsqueda inagotable de explicaciones para la conducta de los solucionadores reales de problemas.

Propone un marco con cuatro componentes que sirven para el análisis de la complejidad del comportamiento en la resolución de problemas: **recursos cognitivos**: conjunto de hechos y procedimientos a disposición del solucionador; **heurísticas**: reglas para progresar en situaciones dificultosas; **control**: aquello que permite un uso eficiente de los recursos disponibles; y el **sistema de creencias**: perspectiva con respecto a la naturaleza de la Matemática y como trabajar en ella.

Cada uno de tales componentes explica las carencias, y por lo tanto, el poco éxito en la resolución de problemas de los solucionadores reales. Así, cuando a pesar de conocer las **heurísticas** no se sabe cuál utilizar o cómo utilizarla se señala la ausencia de un buen **control** o gestor de los recursos disponibles.

Pero las heurísticas y un buen control no son suficientes, pues puede que el solucionador no conozca un hecho, algoritmo o procedimiento específico del dominio matemático del problema en cuestión. En este caso se señala la carencia de **recursos cognitivos** como explicación al intento fallido en la resolución.

Por otro lado, puede que todo lo anterior esté presente en la mente del solucionador, pero sus **creencias** de lo que es resolver problemas en Matemáticas, o de la propia concepción sobre la Matemática, haga que no progrese en la resolución.

Las **heurísticas** son las operaciones mentales típicamente útiles en la resolución de problemas; son reglas o modos de comportamiento que favorecen el éxito en el proceso de resolución, sugerencias generales que ayudan al alumno o grupo a comprender mejor el problema y a hacer progresos en su solución.

Existe una amplia, posiblemente incompleta, lista de **heurísticas**. Entre las más importantes cabría citar: buscar un problema relacionado, resolver un problema similar más sencillo, dividir el problema en partes, considerar un caso particular, hacer una tabla, buscar regularidades, empezar el problema desde atrás, variar las condiciones del problema.

Muchas veces se carece de las heurísticas necesarias para tener éxito en la solución de un problema, pues se dispone de conocimientos específicos del tema o dominio matemático del problema, incluso de un buen control, pero falla el conocimiento de reglas para superar las dificultades en la tarea de resolución.

Una característica importante del proceso de resolución de un problema es que, por lo general, no es un proceso paso a paso, pues acciones realizadas en cierto orden que tienen lugar en la solución de un problema, no tienen que seguir el mismo orden en la solución de otro.

En el proceso de resolución, Schoenfeld ha señalado que, tan importante como las heurísticas, es el control de tal proceso, a través de **decisiones ejecutivas**. Tales decisiones se refieren al *qué hacer* ante un problema. La característica más importante que define a las decisiones ejecutivas y a las acciones de control es que tienen consecuencias globales para la evolución del proceso de resolución de un problema.

Las decisiones ejecutivas determinan la eficiencia de los conocimientos y recursos de todo tipo puestos en servicio para la resolución del problema.

Son **decisiones ejecutivas**: hacer un plan, seleccionar objetivos centrales y sub-objetivos, buscar los recursos conceptuales y heurísticos que parecen adecuados, evaluar el proceso de resolución a medida que evoluciona, revisar o abandonar planes cuando su evaluación indica que hay que hacerlo.

Son por tanto, decisiones sobre los caminos a tomar, pero también acerca de qué caminos no tomar.

Cuanto más precisas sean las respuestas a las preguntas: ¿Qué estoy haciendo?, ¿Por qué lo hago?, ¿Para qué lo hago?, ¿Cómo lo usaré después?, mejor será el control global que se tenga sobre el problema y sobre las decisiones que conducen a su solución.

La ausencia de decisiones ejecutivas y de control suele tener efectos negativos en el proceso de resolución de un problema. La mayor parte de las veces en que se fracasa en la resolución de un problema es debido a que, la persona que afronta el problema, no dispone de un plan de solución.

Segunda parte. Otras actitudes que imposibilitan la toma de buenas decisiones durante la fase de resolución de un problema.

Entre ellas cabe destacar:

Inflexibilidad para considerar alternativas: Cuando una y otra vez fallan los procedimientos empleados no hay más salida que cambiar de perspectiva para salir del bloqueo.

Rigidez en la ejecución de procedimientos: Cuando se intenta e insiste en encajar un procedimiento conocido en una situación en la que no es aplicable, la obstinación es debida al simple hecho de que el procedimiento parece apropiado a primera vista, o porque la situación, aunque distinta, se parece a otra en que el procedimiento fue eficaz.

Incapacidad de anticipar las consecuencias de una acción: Al respecto cabe hacerse siempre la siguiente pregunta antes de ejecutar una acción pensada: “cuando haya ejecutado lo que pienso, ¿qué consecuencias tendrá para la resolución del problema?”

El efecto "túnel": Se produce cuando la ejecución de una tarea es tan absorbente que no hay energías disponibles para la evaluación de lo que se está realizando. Suele darse más fácilmente cuanto más embebido se está en la ejecución de una acción.

Anexo 12. Otras definiciones y rasgos de las estrategias.

Otras **definiciones de estrategia** ofrecidas por diferentes autores son:

- ◆ *"Es la combinación lógica de actores, factores y acciones, seleccionados entre otras alternativas de combinación para lograr un determinado objetivo en un contexto específico". Borges (1991, p.49).*
- ◆ *"Es un conjunto de acciones que permite alcanzar objetivos a largo plazo, concentrando las fortalezas de la organización y menguando sus debilidades y las amenazas que le presenta el entorno. Es un programa general de acción que permite impulsar la organización hacia el futuro deseado". Sánchez (1991, p.3).*
- ◆ *"Es el desarrollo de procedimientos o pautas coherentes en flujos de decisiones organizativas, planificadas a priori o desarrolladas a posteriori, sobre los medios y metas que la organización ha de ejecutar y que le permiten enfrentarse a problemas externos, resolver los internos y medir el progreso logrado". Sánchez (1993, p.27).*
- ◆ *"Es un esquema amplio para obtener, evaluar y utilizar información de acuerdo con metas trazadas". Colectivo Autores (1994, p.7).*
- ◆ *"Es un procedimiento que organiza secuencialmente la acción y el orden para conseguir las metas previstas". Goce y otros (1994, p.19).*

Muchas estrategias en el contexto educativo se han enfocado fundamentalmente como procesos de solución de problemas que se dan en el PEA.

A pesar de la existencia de diferentes metodologías para la elaboración de estrategias, compartimos las reflexiones de Valcárcel (1998), sobre las **semejanzas** que estas poseen en cuanto a:

- ◆ Siguen una secuencia de lo general a lo particular. Se inician con una ubicación del entorno y fijan aspiraciones globales. Luego, van tratando de concretar aspiraciones, éstas últimas en objetivos y metas específicas en áreas determinadas.
- ◆ Es un proceso de derivación de objetivos con la intención de establecer una armonía entre el largo y el corto plazo.
- ◆ Se persigue alcanzar una continuidad entre las tres dimensiones temporales de existencia de una institución: pasado-presente-futuro, partiendo de lo ya hecho y sin esquematizarse en ello, trabajar en presente para lograr un futuro.
- ◆ Los resultados a que se aspira son, por lo general, un efecto de síntesis. Son consecuencias de la energía lograda entre varias áreas de trabajo o de las ciencias (interciencia).
- ◆ Las metas han de poder medirse de alguna manera.

Anexo 13. Sobre aprendizaje activo durante la resolución de problemas.

¿Cómo se logra que un estudiante autodirija su autoaprendizaje durante la resolución de problemas?

Reduciendo progresivamente la dependencia del docente; apoyando al estudiante para que fortalezca el autoestima con el fin de que sea capaz de trabajar en grupo; promoviendo la autoevaluación con un enfoque autoreflexivo, autorregulador y autocorrector; guiando al estudiante en la definición de sus necesidades de aprendizaje (contenido y contexto); ayudando al estudiante para que asuma la responsabilidad en definir sus objetivos de aprendizaje y evaluación de su progreso; procurando la transferencia del conocimiento (relacionarlo con problemas de la vida real); facilitando la identificación y planteamiento de problemas; fomentando la toma de decisiones para seleccionar alternativas de solución a problemas planteados.

Además, el aprendizaje activo se logra:

- **Facilitando la reflexión crítica.** Existen diferentes estrategias que permiten facilitar el desarrollo del pensamiento crítico como son: la lectura, la escritura, pensar, debatir y actuar.
- **Fomentando el pensamiento racional.** En la medida en que desarrolla el pensamiento lógico, con el fin de que sea capaz de cuestionarse sobre las creencias y “no asimilar acríticamente”, para que sea él el que asuma el papel principal en la toma de decisiones relativas a su vida, pero también acepte las consecuencias de esas decisiones.
- **Utilizando ayudas que permitan una buena relación entre el tutor y otros estudiantes con el estudiante,** por ejemplo: propiciando **valores esenciales** en él; aceptar y respetar las diferencias; generando **actitudes básicas de comunicación** como atender, escuchar, empatizar y sondear.

Anexo 14. Sobre los pilares de la educación para el siglo XXI.

En el curso de una actividad intelectual, como por ejemplo, la resolución de problemas, en algún momento se hace un análisis de la marcha del proceso. Monitorear y controlar el progreso de estas actividades intelectuales son, desde el punto de vista de la psicología cognitiva, los componentes de la metacognición.

Hallazgos de investigación en educación matemática señalan que el desarrollo de la autorregulación en temas complejos es difícil y frecuentemente implica modificaciones de conducta (desaprender conductas inapropiadas de control aprendidas antes). Estos cambios pueden ser realizados pero requieren largos períodos de tiempo.

Los aspectos metacognitivos se relacionan, en suma, con la manera en que se seleccionan y despliegan los recursos matemáticos y las heurísticas de que se dispone.

El aprendizaje desarrollador se fundamenta en los cuatro pilares de la educación para el siglo XXI “La educación a lo largo de la vida”, expuestos en el informe Delors (1996) de la UNESCO y en la introducción, los cuales son: **Aprender a Conocer, Aprender a Ser, Aprender a Convivir y Aprender a Hacer.**

Aprender a conocer supone **Aprender a Aprender**, es decir desarrollar habilidades cognitivas y metacognitivas.

Las cognitivas se refieren al desarrollo de las habilidades de pensamiento (conceptualización, observación, clasificación, comparación y contraste, inducción, deducción, abstracción, entre otras) y el manejo y comprensión de la información; a través de estas habilidades se aprende a **construir el conocimiento** de una manera significativa, al relacionar los conocimientos previos con los nuevos, en la medida que se apropia y genera otros conocimientos.

Las Metacognitivas implican autorreflexión y autorregulación de los procesos y productos de aprendizaje, con el fin de detectar debilidades y fortalezas para así plantear estrategias de mejoramiento.

Sobre los aprendizajes anteriores, proponemos una breve síntesis.

Aprender a hacer: con este se pretende que el individuo sea capaz de enfrentarse a cualquier situación, porque se le dan las herramientas para que aplique y transfiera el conocimiento a la solución de problemáticas de su entorno, generándose con esto la creatividad, la investigación y la capacidad para generar, adoptar y adaptar tecnología.

Aprender a convivir trae consigo el desarrollo de habilidades como: la comunicación en la que la empatía juega un poder decisivo en el proceso de aprendizaje; para interactuar con el otro, es decir que pueda trabajar en grupo y en equipo, respetando los valores del otro y sus diferencias.

Aprender a ser: se fortalece el desarrollo de la personalidad y se promueve la autonomía de juicio y la responsabilidad personal. Un factor importante para el éxito de este es la motivación intrínseca que mueve a superar obstáculos y dificultades para el logro de metas propuestas.

Anexo 15. Modelo del profesional del matemático.

La carrera de Matemática tiene por objetivo fundamental la formación de un profesional de perfil amplio, con un alto nivel de conciencia socialista, técnica y científicamente capacitado para actuar de manera independiente y creadora en la resolución de una serie de problemas comunes que surgen en las más variadas esferas de la práctica social, mediante la aplicación de los métodos y modelos matemáticos.

MODO DE ACTUACIÓN PROFESIONAL.

La actividad profesional del matemático de perfil amplio se puede caracterizar por las siguientes

HABILIDADES PROFESIONALES:

1. Participar en la construcción de modelos matemáticos para la resolución de problemas reales, en colaboración con especialistas de otras profesiones;
2. Elegir los métodos matemáticos adecuados a la investigación de los modelos construidos;
3. Desarrollar la investigación de los modelos y los cálculos aproximados necesarios, auxiliándose para ello de los sistemas de programación matemática de uso profesional;
4. Analizar los resultados obtenidos y participar en la discusión colectiva conducente a la interpretación real de los mismos.
5. Asesorar a otros profesionales en la aplicación de modelos y métodos matemáticos;
6. Impartir cursos de matemática en el nivel superior de educación, habiendo recibido previamente la preparación pedagógica necesaria.

El cumplimiento de estas actividades puede dar lugar a la formulación de problemas teóricos de la ciencia matemática, cuya resolución implique un enriquecimiento de la misma.

CAMPOS DE ACCIÓN DEL PROFESIONAL.

Siendo el objeto de trabajo de este profesional los modelos y métodos matemáticos; objetos de naturaleza abstracta con cuya ayuda se hace posible actuar transformadoramente sobre la realidad objetiva que pretenden modelar, podemos identificar los CAMPOS DE ACCIÓN de esta carrera con las distintas ramas de la ciencia matemática que forman parte de sus disciplinas académicas.

ESFERAS DE ACTUACIÓN PROFESIONAL.

Más difícil resulta delimitar las esferas de actuación de este profesional, ya que la naturaleza misma de la ciencia matemática hace posible su aplicación para la resolución de problemas que surgen prácticamente en todas las esferas de la producción material y espiritual de la sociedad. Al mismo tiempo, las formas de aplicación de la matemática en cada una de esas esferas tiene su especificidad, de donde resulta que los matemáticos que trabajan en las aplicaciones de la matemática a una esfera determinada de la realidad, ya por ese hecho adquieren una relativa especialización, hacen uso más frecuente de unos métodos matemáticos que de otros y se ven obligados también a asimilar el lenguaje inherente a la problemática de que se trate.

Estas circunstancias imprimen un carácter especial a la concepción del matemático de perfil amplio, que se debe entender como un profesional apto para resolver una serie de problemas comunes a varias esferas de actuación, pero al mismo tiempo investido de algunos elementos de especialización que lo hagan potencialmente capaz de adquirir posteriormente la especialidad requerida para la resolución de problemas más complejos.

OBJETIVOS GENERALES DE LA CARRERA DE MATEMÁTICA:

OBJETIVOS EDUCATIVOS:

1. Estar identificado con los intereses de la nación cubana y ser un fiel continuador de las tradiciones patrióticas y revolucionarias de nuestro pueblo. Actuar consecuentemente en función de los intereses de la sociedad, por encima de los intereses y preferencias individuales.
2. Defender la patria con la convicción de que ello constituye el más grande honor y el deber supremo de cada cubano, apoyándose en sus motivaciones y convicciones patrióticas e internacionalistas.
3. Establecer correctamente la relación entre el saber matemático y la realidad objetiva; en particular, el carácter reflejo de los modelos matemáticos con respecto a los fenómenos reales que ellos representan.
4. Aplicar sus conocimientos y habilidades profesionales al desarrollo de la nación cubana, coadyuvando a la racionalidad económica y contribuyendo con su actuación profesional al cumplimiento exitoso de los planes de desarrollo sostenible de nuestro país, garantizando la relación adecuada entre la corrección de los modelos y métodos matemáticos utilizados y los criterios de economía de tiempo y recursos materiales y humanos necesarios para la instrumentación de dichos modelos y la obtención de los resultados esperados.
5. Actuar con honradez, modestia, honestidad intelectual, valentía en la defensa de los ideales revolucionarios y de los resultados científicos y técnicos de su trabajo profesional.. Ser veraz en la aplicación de los conocimientos matemáticos y en la modelación de fenómenos reales, guiándose siempre por el criterio de la comprobación práctica de sus resultados.
6. Percibir la elegancia y la armonía implícitas en las teorías y métodos matemáticos, y esforzarse por descubrirlas y exponerlas en la expresión oral y escrita de sus modelos y en la interpretación de sus resultados.
7. Adquirir el hábito de elevar constantemente su nivel político-ideológico, su cultura integral y su preparación matemática, tanto de forma autodidacta, como mediante las formas institucionalizadas de educación permanente.
8. Poseer un desarrollo físico que contribuya a un buen estado de salud física y mental, así como el hábito de la práctica sistemática de ejercicios físicos y deportes, que favorezcan su rendimiento intelectual máximo.

OBJETIVOS INSTRUCTIVOS:

1. Construir modelos matemáticos que describan idealmente distintos aspectos del comportamiento de los procesos reales, en condiciones de una serie de suposiciones de idealización o simplificación, establecidas conjuntamente con especialistas de otras profesiones, sobre la base de los datos experimentales obtenidos y de acuerdo con las leyes naturales que rigen los fenómenos estudiados.
2. Aplicar los resultados fundamentales de la teoría de las probabilidades y la estadística, los métodos de optimización y la matemática discreta, la teoría de las ecuaciones diferenciales, la teoría de las ecuaciones integrales, la teoría de funciones y el análisis funcional y el álgebra, para la deducción de conclusiones cuantitativas y cualitativas sobre los fenómenos físicos, mecánicos, químicos, biológicos, socioeconómicos o de otra naturaleza, susceptibles de ser estudiados con la ayuda de dichas teorías.
3. Aplicar los métodos de cálculo aproximado (numéricos o funcionales, según convenga a la situación en estudio), que permitan hacer uso en la práctica de los principios fundamentales de las teorías matemáticas que forman parte de las disciplinas de la carrera.

4. Programar en un lenguaje de programación y orientado a objetos; tener nociones sobre el trabajo en redes y hacer uso de los paquetes de programación matemática que contribuyan a obtener soluciones simbólicas, gráficas y numéricas de los problemas sometidos a estudio, así como simulación de los mismos mediante modelos computacionales.
5. Luego de recibir la preparación pedagógica necesaria, impartir docencia de cursos básicos de las disciplinas matemáticas que se cursan en las diferentes carreras de la educación superior.
6. Consultar y procesar información científico-técnica en el campo de la matemática o en las disciplinas científicas relacionadas con los problemas reales sometidos a análisis, tanto en español como en inglés, en forma independiente. Utilizar eficientemente las facilidades de INTERNET y otros medios para la comunicación y el acceso a la información.
7. Bajo la orientación científica y metodológica de profesionales de mayor experiencia, generalizar los conocimientos y habilidades adquiridos durante la educación pregraduada, mediante la resolución de problemas matemáticos cuyo grado de complejidad se corresponda con el nivel de la preparación alcanzada en la carrera.
8. Ser capaz de exponer en forma oral y escrita, con claridad y precisión, los resultados, conclusiones y recomendaciones de sus investigaciones y trabajos de desarrollo, mediante la elaboración de informes técnicos, reportes de investigaciones, ponencias, artículos científicos y monografías. Con este propósito, utilizar paquetes profesionales de programas de computación de uso general, fundamentalmente procesadores de textos, hoja electrónica y procesadores gráficos.

Anexo 16 Panorámica sobre el tratamiento de conceptos matemáticos en las diferentes enseñanzas.

Durante los primeros grados de **la enseñanza primaria** transcurre el proceso de formación de sincretos, complejos, y pseudoconceptos. Estas etapas van teniendo lugar de manera paulatina durante el trabajo con varios conceptos tales como: los números naturales, las operaciones con ellos, las figuras geométricas, etc. Ya en el sexto grado se llega a la formación propiamente dicha de algunos conceptos caracterizada por: las nuevas formaciones, los conceptos potenciales y el concepto. Esto tiene lugar cuando llegan a definirse conceptos de objetos como: número fraccionario, rectángulo; de operaciones como: suma y división de números fraccionarios y de relaciones como mayor que y menor que.

Por otra parte, en los programas que rigen la enseñanza de la Matemática en la **enseñanza media secundaria**, se aprecia que existe una conciencia entre pedagogos de este nivel sobre la necesidad del empleo de “La enseñanza basada en problemas”, pues proponen la introducción de algunos contenidos a partir del planteamiento de problemas de la vida cotidiana que muestren la necesidad de abordarlos, sobre este particular, en Colectivo de autores (2004, séptimo grado, p.3) se plantea explícitamente:

“...Constituyen transformaciones en el enfoque metodológico general de la asignatura las siguientes: la presentación y tratamiento de los nuevos contenidos a partir del planteamiento y solución de problemas prácticos..., y no solo desde la propia lógica de la asignatura. Los problemas no pueden seguir empleándose solamente como las nuevas situaciones en las que los alumnos aplican los conocimientos y las habilidades aprendidos... los problemas se tratarán como una situación del medio natural o social en que se desenvuelve el alumno, del que conoce cierta información y descubre interrogantes no resueltas, que necesita explicar o responder, para lo cual requiere un pensamiento heurístico y ampliar sus conocimientos y habilidades matemáticas,...”.

No obstante, esta estrategia de introducción de los conceptos solo se limita a ofrecer problemas prácticos mediante los cuales se exprese la necesidad de ampliar determinado conocimiento y no a la determinación de rasgos comunes y/o esenciales de determinados objetos representantes de un concepto que permitan la consideración de dos conjuntos que constituyan su contenido y su extensión como componentes importantes en la definición del concepto. *Por ejemplo: al introducir el concepto de número negativo, se ofrecen problemas relacionados con la determinación de la profundidad de un accidente geográfico por debajo del nivel del mar o una temperatura muy fría por “debajo” de 0 °C, seguidamente se ofrece una explicación matemática que resuelve estas situaciones mediante la definición de los números negativos; sin embargo no se presentan otros problemas encaminados a la determinación de rasgos comunes y esenciales de estos números, como puede ser la simetría de estos números con los positivos respecto al cero en el eje numérico.*

En este sentido, los problemas constituyen un medio muy útil para que los alumnos sientan la necesidad de participar en el aprendizaje. Sin embargo, en este nivel de enseñanza disminuye ostensiblemente el número de conceptos cuya definición se logra como resultado de un proceso de formación inductivo, o sea, en el tratamiento de muchos conceptos se presenta directamente la definición; en la mayoría de los casos, se absolutiza el trabajo con el contenido del concepto por medio de la búsqueda de condiciones necesarias o suficientes, dejando a un lado el trabajo con la extensión. Además, quedan conceptos de la enseñanza primaria precedente a los cuales no se les precisa el contenido y la extensión, como son por ejemplo, los conceptos de número, orden, etc.

En el **nivel medio superior**, las dificultades señaladas en el nivel secundario se acentúan, a lo que se adiciona el hecho de que prácticamente no se utiliza la resolución de problemas como vía para el tratamiento de conceptos, aspecto este que consideramos vital para la participación de los estudiantes en este proceso.

No obstante, en los programas se aprecia un intento del empleo de la resolución de problemas para la introducción de nuevos contenidos, aunque no de conceptos, como se muestra en la figura 1.

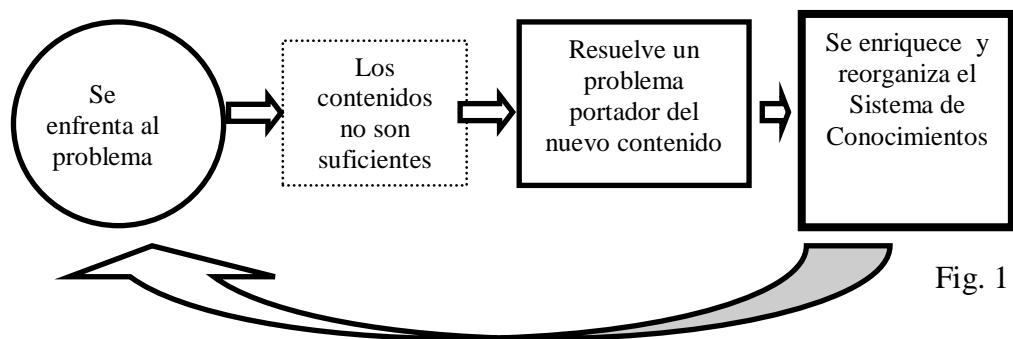


Fig. 1

No obstante, la reorganización del sistema de conocimientos que generalmente se hace, no lleva aparejada una relación esencial y sustantiva con los conocimientos previos, pues no se presentan adecuados organizadores de la información o los conocimientos precedentes no fueron aprendidos significativamente y no se realiza una actualización significativa de los mismos.

También se propone la introducción inductiva de resultados por medio de asistentes matemáticos como "El Geometra" en el caso del teorema de las transversales y el grupo de teoremas de Pitágoras.

Anexo 17. Deficiencias en el tratamiento del concepto función convexa en la Licenciatura en Matemática.

En cuanto a la **formación** conceptual:

- En el mejor de los casos se limita a partir de ideas geométricas que visualizan el resultado esperado mediante una conversación socrática.
- No se plantean problemas sencillos, como los que aparecen en Mederos y Martínez (2001), en los que se relacionen funciones elementales conocidas por los alumnos, representaciones variadas, algunas de las cuales presentan características comunes, para facilitar los procesos de comparación, análisis-abstracción, síntesis y generalización.
- No se deja claro que se están estudiando conceptos nuevos al no poner ejemplos en $Cv_E(I)$, $Cv(I)$ que demuestren $\emptyset \subset Cv_E(I) \subset Cv(I) \subset F(I)$, donde \emptyset denota el conjunto vacío, $Cv_E(I)$ representa el conjunto de las funciones estrictamente convexas sobre el intervalo I , $Cv(I)$ es el conjunto de las funciones convexas sobre el intervalo I y $F(I)$ denota el conjunto de las funciones definidas sobre I .

Como parte del **desarrollo** conceptual:

- No se realizan acciones encaminadas a crear la conciencia de que el nuevo resultado que se obtiene ($f \in Cv_E(I) \Leftrightarrow \forall x \in I, f''(x) > 0$) es una caracterización del concepto definido.
- No se realizan otras caracterizaciones valiosas de este concepto; como, por ejemplo, la función generadora de las pendientes de las secantes es creciente.
- No se realiza un adecuado estudio de la extensión de este concepto en el que se involucre a los estudiantes en:
 - El estudio de las estructuras algebraicas de $Cv_E(I)$ y $Cv(I)$. Si no se han estudiado aún las estructuras algebraicas, se pueden plantear problemas sencillos que conduzcan a la verificación de propiedades importantes como trabajo propedéutico al seguimiento que puede dársele al estudiar las estructuras algebraicas en la asignatura Álgebra II.
 - La ampliación de la clase de elementos conocidos de $Cv_E(I)$ y $Cv(I)$.
 - La construcción de mapas correspondientes a las extensiones $Cv_E(I)$, $Cv(I)$ y $C(I)$, donde $C(I)$ representa la colección de las funciones continuas sobre I ; así como la determinación de las consecuencias que se derivan de estos mapas, por ejemplo: caracterizar los elementos de $C(I)$ que están en $Cv(I)$.
 - La construcción de mapas correspondientes a $Cv_E(I)$, $Cv(I)$ y $M(I)$, donde $M(I)$ representa la colección de las funciones monótonas sobre I y caracterizar los elementos de $M(I)$ que están en $Cv(I)$ y viceversa.
 - La construcción de mapas que tienen lugar entre $Cv_E(I)$, $Cv(I)$ y $D(I)$, siendo $D(I)$ la colección de las funciones derivables en I y caracterizar los elementos de $D(I)$ que están en $Cv(I)$.
 - El análisis de objetos límites y casos especiales, por ejemplo:

- Función de $D(I) \setminus Cv(I)$, $I = (-a, a)$, que no sea convexa en ningún subintervalo de I que contenga el cero.
 - Función de $C(I)$ que no sea convexa en ningún subintervalo de I .
- La utilización de las funciones convexas en el establecimiento de desigualdades importantes.
 - El planteamiento de problemas en los que sea necesario emplear estos resultados, para ampliar los significados del concepto.
 - Se dedica excesivo tiempo a profundizar en la operatoria con la caracterización tratada y a su aplicación en el análisis, discusión y representación de funciones reales.

En cuanto a la **generalización** conceptual:

- No se realizan generalizaciones, ni por debilitamiento del contenido del concepto (Desigualdad de Jensen para $p_1x + p_2y$, $p_1 + p_2 = 1$), ni por consideración de contextos más amplios ($f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^k$ convexo).

Sobre este concepto en particular, hemos detectado que acciones como estas, no se realizan a lo largo de la carrera, excepto en la signatura Optimización (del tercer año) en la que se generalizan algunos resultados del Análisis Matemático I relativos a este concepto, por medio del Análisis Convexo, con lo que se amplían en algo, pero no suficientemente, los significados del concepto función convexa.

Anexo 18. Entrevista a profesores cursantes del postgrado “Propuesta de estudio para la colección de medias numéricas” sobre la calidad de los procesos de formación, desarrollo y generalización del concepto de media numérica.

Introducción

Como parte del proceso de validación de este curso, queremos hacerles algunas preguntas, de cuyas respuestas perfeccionaremos o planificaremos acciones metodológicas o de contenido en próximas ediciones del curso.

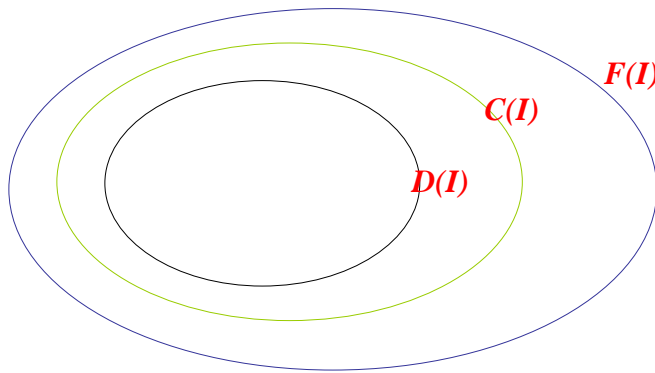
1. ¿Cree conveniente incorporar el estudio del concepto de media numérica en el currículo del matemático? Justifique.
2. ¿Qué acciones usted llevaría a cabo con sus estudiantes en aras de lograr:
 - a. Un proceso de
 - i. formación
 - ii. desarrollo
 - iii. generalización del conceptode alta calidad?
 - b. Un óptimo proceso de evaluación?
 - c. Un aprendizaje verdaderamente significativo?, refiérase a:
 - i. Articulación de los conocimientos previos con los nuevos.
 - ii. Motivación intrínseca de los estudiantes.
 - iii. Empleo de adecuados organizadores de la información.
 - d. Papel mediado y activo del aprendizaje?
3. Refiérase sucintamente a los aspectos que usted considere pertinentes sobre el curso que acaba de recibir:
 - a. Positivos.
 - b. Negativos.
 - c. Interesantes.

Anexo 19. Prueba de diagnóstico inicial.

Nombre: _____ Año: _____

I. Sobre los conceptos media numérica y función convexa hacia abajo.

- I.1. Explique con sus palabras y haciendo uso de los símbolos matemáticos que considere necesarios, qué usted entiende por:
- media aritmética de dos números a y b .
 - media geométrica de dos números a y b .
 - media armónica de dos números a y b .
 - otras medias que usted conozca.
 - función convexa hacia abajo de una variable real sobre un intervalo $[a; b]$.
- I.2. Mencione, en caso que conozca, algunas características de estas medias particulares.
- I.3. Calcule la media aritmética entre los números: 2, 3451, 2003.
- I.4. Ponga ejemplos de funciones convexas hacia abajo.
- I.5. Analice la convexidad de la función $f(x) = e^{-x^2}$ sobre todo R .
- I.6. Describa mediante proposiciones las relaciones entre los conceptos de función continua, función derivable y función convexa hacia abajo, sobre un intervalo.
- I.7. Amplíe, agregando la extensión del concepto de función convexa hacia abajo sobre un intervalo abierto I , el mapa de las extensiones de los conceptos de función $F(I)$, función continua $C(I)$ y función derivable $D(I)$ que se le presenta a continuación. Justifique.



II. Sobre conocimientos precedentes.

- II.1. Mencione, qué usted entiende por:
- Ángulo.
 - Circunferencia.
 - Cuadrado.
 - Función real de dominio A y codominio B .

- e. Función continua en un punto x_0 .
- f. Función derivable en un punto x_0 .
- g. Función monótona en un intervalo (a,b) .

II.2. Mencione los resultados que incluyen:

- a. El grupo de teorema de Pitágoras.
- b. Área, perímetro y longitud de la diagonal del cuadrado y el rectángulo
- c. Grupo de teoremas relativos a ángulos en la circunferencia.
- d. Una (o varias) condición necesaria, suficiente o caracterización de:
 - i. Función continua en un punto x_0 .
 - ii. Función derivable en un punto x_0 .
 - iii. Función monótona en un intervalo (a,b) .

Anexo 20. Programa de la disciplina “Práctica Profesional del Matemático” y de la asignatura “Seminarios de Problemas II” para el curso escolar 03 – 04.

**PROGRAMA DE LA DISCIPLINA:
PRÁCTICA PROFESIONAL DEL MATEMÁTICO.**

I. DATOS PRELIMINARES.

| ASIGNATURAS | ANO | FONDO DE TIEMPO | CONTROL FINAL |
|--------------------------------------|-----|-----------------|------------------------------------|
| Seminario de Problemas I | 1 | 32 | |
| Práctica Laboral e investigativa I | 1 | 120 | Defensa del informe de la práctica |
| Seminario de Problemas II | 2 | 32 | |
| Practica Laboral e Investigativa II | 2 | 120 | Defensa del informe de la práctica |
| Seminario de Problemas III | 3 | 32 | |
| Práctica Laboral e Investigativa III | 3 | 120 | Defensa del informe de la práctica |
| Asignatura Optativa I | 4 | 64 | Examen final |
| Asignatura Optativa II | 4 | 64 | Examen final |
| Asignatura Optativa III | 4 | 48 | |
| Seminario Especializado I | 4 | 32 | |
| Practica Laboral e Investigativa IV | 4 | 120 | Defensa del trabajo de curso |
| Asignatura Optativa IV | 5 | 64 | Examen final |
| Asignatura Optativa V | 5 | 64 | Examen final |
| Asignatura Optativa VI | 5 | 48 | |
| Curso Especializado Optativo I | 5 | 48 | |
| Curso Especializado Optativo II | 5 | 32 | |
| Seminario Especializado II | 5 | 32 | |
| Práctica Laboral e Investigativa V | 5 | 600 | Defensa del trabajo de diploma |
| Total de horas | | 1672 | |

II. FUNDAMENTACIÓN DE LA DISCIPLINA.

Los antecedentes históricos de esta disciplina se remontan a los primeros años después del triunfo de la Revolución, cuando (pretendiendo dar cumplimiento a los lineamientos trazados por la Reforma de la Educación Superior de 1962) se hacen los primeros intentos por lograr una vinculación efectiva de los estudiantes de Matemática con la problemática social, con el objetivo de ampliar el espectro de posibilidades de utilización de este personal altamente capacitado (que antes de 1959 encontraba su realización profesional, fundamentalmente, en el ejercicio de la docencia secundaria y universitaria).

Primero en forma esporádica y luego con mayor frecuencia, comienzan a participar los estudiantes de Matemática, conjuntamente con sus profesores, en distintas tareas de investigación y desarrollo, en colaboración con profesionales de otras carreras.

Un ejemplo de estas actividades, en la que hubo una participación masiva, fueron las tareas organizativas previas y la captación y el procesamiento de los datos del censo realizado en Cuba en 1971.

Un momento decisivo en el proceso de integración de los estudiantes universitarios a la producción y la investigación fue el curso 1971-72, a partir del cual se generalizó la vinculación del estudio con el trabajo en todas las carreras de la Universidad de La Habana y, un poco después, en las restantes universidades cubanas.

El gráfico del proceso docente se estructuró en dos semestres de 18 semanas lectivas cada uno, a razón de 20 horas semanales para las actividades académicas y 20 horas para las actividades laborales en empresas, centros de investigación, ministerios, etc. Los estudiantes de Matemática se vinculan en esta etapa a distintas dependencias de organismos estatales y centros de investigación y de educación superior, tales como el Ministerio de Salud Pública, el Instituto de Ciencia Animal, el Centro Nacional de Investigaciones Científicas, el Instituto Técnico Militar, la Academia de Ciencias de Cuba, la Junta Central de Planificación y otros.

El régimen de estudio-trabajo tuvo su base oficial en el primer plan de estudio unificado de Matemática, que entró en vigor en las tres universidades cubanas en el curso académico 1973-74.

Orientaciones emanadas del Primer Congreso del Partido Comunista de Cuba, en relación con la Educación Superior, disponen una nueva adecuación del plan de estudio -trabajo que se acomete en el curso 1975-76, sobre la base del plan unificado. En esta adecuación se incrementan las horas semanales de las actividades lectivas en primero y segundo años, la práctica de producción comienza a desarrollarse a partir del tercer año y se fija como forma de culminación de los estudios, el trabajo de diploma.

Al crearse en 1976 el Ministerio de Educación Superior, se emprende de inmediato la tarea del perfeccionamiento de los planes y programas de estudio de la Educación Superior. En el curso 77-78 se ponen en vigor el plan de estudio "A" para la carrera de Matemática, con las especializaciones "Matemática Pura", "Estadística Matemática" e "Investigación Operacional". La duración de los estudios se fija en cinco años, con cinco semestres de tronco común, prácticas de elevación de la calificación y especializada en tercero y cuarto años y el trabajo de diploma como forma de culminación de la especialidad.

En el plan de estudio "B" de Matemática, vigente desde el curso 1982-83, desaparecen las especializaciones que existían en el plan "A" y se plantea el objetivo fundamental de la formación de un matemático de perfil amplio. La estructura del gráfico del proceso docente del plan de estudio "B" es similar a la del plan de estudio "A", con la diferencia de que en él aparecen por primera vez los cursos especializados optativos.

Sin embargo, la materialización del principio de la vinculación del estudio con el trabajo en las condiciones establecidas en los gráficos del proceso docente de la carrera en los planes de estudio "A" y "B" no significó en todos los casos una real integración de la teoría con la práctica, ya que por distintas razones, tanto objetivas como subjetivas, no siempre se lograba la realización de un sistema de tareas que contribuyeran a la formación de las habilidades de aplicación y generalización de los conocimientos teóricos desarrollados por las diferentes disciplinas.

En el plan de estudio "C" adquiere mayor relevancia el objetivo de formación de un profesional de perfil amplio, por lo que se comienza por definir el concepto de matemático de perfil amplio, cuya actividad profesional se caracteriza por la aplicación de los métodos y modelos matemáticos ya conocidos a la resolución de problemas reales surgidos en las diferentes esferas de actuación, la elaboración de nuevos métodos cuando los ya conocidos no sean aplicables, la modelación matemática de situaciones diversas que forman parte del objeto de otras profesiones, la utilización de los algoritmos de cálculo que posibiliten la aplicación de las programotecas existentes o mediante el diseño de los esquemas de programación de los algoritmos de cálculo elaborados para la utilización práctica de esos modelos la asesoría a otros profesionales sobre estas materias y su enseñanza en el nivel superior de educación. Todas estas tareas pueden dar lugar al planteamiento de problemas de índole puramente teórica, cuya solución implique ya nuevos aportes al conocimiento matemático.

La disciplina de la "Práctica profesional del Matemático" se crea en el plan de estudio "C" para materializar esos objetivos de la formación del futuro matemático, integrando en una sola disciplina los aportes de las restantes disciplinas de la carrera a la resolución de problemas de aplicación y de investigación, para los cuales se requiere frecuentemente la utilización de diversos métodos y algoritmos, que son objeto de estudio de distintas disciplinas.

En la disciplina se conjugan actividades académicas, laborales e investigativas que intentan modelar el conjunto de tareas profesionales que deberá asumir el egresado en su vida laboral.

En la nueva versión del plan de estudio "C" se han introducido ligeros cambios en el programa de la disciplina, con el objetivo de fortalecer la concepción del perfil amplio en la formación del matemático. Las prácticas laborales e investigativas comienzan a desarrollarse desde el primer año, de manera que su desarrollo y organización pueda conjugarse con los seminarios de problemas y los seminarios especializados. Además, las asignaturas optativas se incluyen dentro de este programa (al igual que en el anterior se incluían los cursos especializados optativos) para dejar constancia del número de tales asignaturas que cada estudiante está obligado a cursar en la carrera.

III. OBJETIVOS GENERALES DE LA DISCIPLINA:

Los objetivos generales educativos e instructivos de esta disciplina coinciden con la mayoría de los objetivos generales del modelo de profesional, por lo que no se hace necesario reiterarlos aquí.

En términos generales, el objetivo general de la disciplina es contribuir a que los estudiantes adquieran las habilidades y hábitos de trabajo inherentes a la profesión del matemático, entre las cuales se destacan:

1. Aplicar los conocimientos y habilidades adquiridos en las disciplinas de la carrera para la modelación y resolución de problemas reales.
2. Utilizar para ello la computación y las modernas tecnologías para el tratamiento de la información.
3. Participar en (y, eventualmente, dirigir) colectivos interdisciplinarios de trabajo, brindar asesoría a otros profesionales, intervenir en seminarios y reuniones científicas, exponer los resultados de su trabajo y defenderlos ante un colectivo.

4. Redactar con claridad y orden lógico, en el lenguaje de las matemáticas, los resultados de su investigación.
5. Adquirir un conocimiento general de una esfera de actuación determinada, que le permita evaluar críticamente los resultados de su trabajo, desde el punto de vista científico, económico, social y filosófico.
6. Con la preparación pedagógica indispensable, desarrollar cursos de matemática en el nivel superior de educación

IV. CONTENIDO DE LA DISCIPLINA:

El sistema de conocimientos y el sistema de habilidades de esta disciplina es, al mismo tiempo, muy amplio y flexible. Su definición depende, en la mayoría de los casos, del colectivo de estudiantes y profesores que interviene en cada una de las asignaturas, en un momento dado. No resulta posible, por consiguiente, enumerar aquí todos los elementos que componen el contenido de la disciplina. Nos limitamos a relacionar los aspectos que obligatoriamente deberán cubrirse, independientemente de la forma y el contenido específico que adopten en su puesta en práctica.

1. Planteamiento de problemas de diversa naturaleza, que contribuyan a reforzar la motivación por la carrera y la familiarización con distintas esferas de actuación profesional, profundizando en el conocimiento de los conocimientos y habilidades necesarios para la resolución de dichos problemas.
2. Desarrollo de las habilidades y hábitos inherentes a la actividad profesional del matemático, mediante el planteamiento y resolución de un problema real, preferiblemente vinculado con una esfera de actuación determinada, con cuya problemática general (científica, económica, laboral, etc.) deberá relacionarse al futuro profesional.
3. Indagación de aspectos de la historia de la matemática, principalmente aquellos que tienen mayor relación con los problemas propuestos en los seminarios y en las prácticas laborales e investigativas.
4. Profundización en el desarrollo de las habilidades para la utilización de los programas de computación profesionales asociados con los contenidos de las disciplinas que se relacionan con los problemas propuestos.
5. Uso de programas de computación de uso general, fundamentalmente un procesador de textos, hoja electrónica y procesador gráfico.
6. Uso eficiente de las facilidades de INTERNET y otros medios de comunicación y acceso a la información.
7. Desarrollo de las habilidades para el trabajo en colectivos multidisciplinarios, incluyendo experiencias útiles para el cumplimiento de tareas profesionales tales como la asesoría a otros especialistas, la formación de profesionales de nivel superior y la dirección de equipos de trabajo.

V. INDICACIONES METODOLÓGICAS Y DE ORGANIZACIÓN DE LA DISCIPLINA:

Cada disciplina del plan de estudio constituye un subsistema del sistema único de formación del profesional, que se organiza conceptualmente en dependencia de los objetivos del modelo del profesional. Pero el subsistema que conforman las asignaturas de esta disciplina difiere de los restantes subsistemas en que a través de ella se integran complementariamente los diferentes campos de acción del profesional, en cada año del plan de estudio. Mientras las restantes disciplinas, en su integración vertical, se corresponden convencionalmente con los distintos campos de acción de la profesión (de hecho, se corresponden aproximadamente con las ramas netamente diferenciales de la ciencia matemática), esta disciplina_ integrando a todas o a una parte de las restantes, en las distintas etapas de formación del profesional_ viene a corresponderse con una esfera específica de actuación del egresado, en cuya práctica activa pueden coexistir, completarse e integrarse diversos campos de acción del profesional.

Así, mientras las demás disciplinas sirven de fundamento teórico de la formación básica del matemático de perfil amplio, a través de ésta se consolida y profundiza dicha formación básica en su vínculo con la realidad sobre la cual actúa el matemático (modelos matemáticos que reflejan distintas situaciones y fenómenos reales), por lo que se dan en ella los elementos de relativa especialización que forman parte del concepto del matemático de perfil amplio.

Esta estructuración vertical y horizontal de las disciplinas de la carrera en el plan de estudio “C” se materializa mediante la organización de actividades académicas, laborales e investigativas, de las cuales, una parte significativa corresponderá a esta disciplina.

Esto hace que la dirección de la Facultad tenga una intervención directa en la organización de esta disciplina, para lo que se podrá apoyar en colectivos interdisciplinarios de profesores, designados por los departamentos docentes encargados de la dirección científico-metodológica de las restantes disciplinas, para organizar, planificar, ejecutar y controlar el desarrollo de las actividades docentes, laborales e investigativas que se realizarán en cada una de las asignaturas de esta disciplina.

Al hacerlo, se tendrá en cuenta que en la estructura del plan de estudio se observan dos niveles o etapas:

1. Una etapa de conocimiento de los campos de acción y de familiarización con las esferas de actuación del profesional, que coincide aproximadamente con los tres primeros años de la carrera.
2. Una segunda etapa de conocimiento de una esfera de actuación determinada, que se desarrolla durante el cuarto y el quinto años de la carrera.

En la primera etapa, se establecerá una interrelación sistemática entre los seminarios de problemas y las prácticas laborales e investigativas. En la segunda etapa, una relación similar se establecerá entre estas prácticas y los seminarios especializados.

En el primer año de la carrera; esta disciplina tendrá dos asignaturas: Seminario de Problemas I y Práctica Laboral e Investigativa I. En ellas se aprovechará para familiarizar al estudiante con la resolución de una serie de problemas reales sencillos, que le permitan hacerse una idea del objeto de la profesión. Si se entiende necesario, las cuatro semanas de la asignatura “Práctica Laboral e Investigativa I” se pueden tomar para realizar actividades de adaptación del nuevo ingreso a la educación superior, antes del inicio de las clases del primer año, como para la reafirmación de la motivación por la profesión, después de concluidos los exámenes finales del año, o con ambos objetivos.

El mismo carácter de familiarización con el objeto de la profesión tendrán el “Seminario de Problemas II” y la “Práctica Laboral e Investigativa II” del segundo año, aunque la circunstancia de que las disciplinas de Análisis Matemático, Álgebra y Programación y Algoritmos concluyen sus asignaturas obligatorias en este año hace aconsejable proponer tareas en las que se integren conocimientos de estas y otras asignaturas precedentes. Por otra parte, el desarrollo de los cursos de Topología y Teoría de las Probabilidades es otra fuente de problemas de interés para la práctica laboral de ese año.

En las asignaturas correspondientes al tercer año, “Seminario de Problemas III” y “Práctica Laboral e Investigativa III” se reproducirá; en una escala superior; el esquema de acciones descrito anteriormente. Los problemas propuestos en ambas asignaturas tendrán mayor complejidad, en correspondencia con la posibilidad de aplicar contenidos de un mayor número de disciplinas (principalmente Probabilidades y Estadística, Optimización, Ecuaciones Diferenciales y Matemática Numérica) se ampliará, por tanto, el espectro de los problemas susceptibles de ser analizados y se darán elementos de familiarización con los centros más representativos de la profesión, mediante visitas a esos centros, charlas de los especialistas que en ellos trabajan y otras actividades.

El cuarto y el quinto años de la carrera tienen por objeto garantizar los elementos de especialización en el matemático de perfil amplio, mediante la vinculación del estudiante con una determinada esfera de actuación. Aquí; en primer término; puede considerarse la esfera en la que será ubicado como graduado siempre que existan en los correspondientes centros laborales las condiciones para el desarrollo de todas las actividades organizadas para el logro de los objetivos del modelo del profesional. De esta manera, si en los tres primeros años el estudiante se familiarizó con el objeto de trabajo de la profesión y adquirió una visión panorámica de los campos de acción y de las distintas esferas de actuación del profesional, a partir del cuarto año pasará a trabajar en una esfera determinada de su elección, y adquirirá por ello una relativa especialización (que estará reforzada por una serie de asignaturas optativas).

Para la realización de las actividades de esta asignatura en los dos últimos años de la carrera, es recomendable asignar a cada estudiante un tutor en el departamento docente de su elección, el cual orientará sus actividades laborales e investigativas y lo ayudará en la selección de las asignaturas optativas y cursos especializados optativos, cuyo número mínimo fija el plan de estudio. También el tutor puede asesorar al estudiante en la selección de otras asignaturas facultativas.

En el caso de que el estudiante sea ubicado en una entidad laboral fuera de la universidad, es recomendable que tenga dos tutores: uno en dicha entidad y otro en el departamento docente.

El estudiante participará, preferiblemente, en el seminario especializado que mayor relación tenga con las tareas de investigación que el tutor le haya asignado como base para el trabajo de curso de cuarto año y, posteriormente, para el trabajo de diploma mediante cuya defensa culminará sus estudios.

En el programa de la disciplina se establecen las asignaturas optativas y cursos especializados optativos que, como mínimo, estará obligado a cursar el estudiante. Tanto en cuarto como en quinto años, no obstante, queda un tiempo suplementario de unas seis horas semanales que el estudiante puede utilizar, si lo desea, para cursar las asignaturas facultativas (cuyas evaluaciones podrán tenerse en cuenta para mejorar su índice académico)

PROGRAMA DE LA ASIGNATURA SEMINARIO DE PROBLEMAS II.

I. OBJETIVOS GENERALES EDUCATIVOS E INSTRUCTIVOS DE LA ASIGNATURA:

1. Consolidar la concepción científica del mundo y, en particular, del objeto de la ciencia matemática, mediante la investigación referativa de datos históricos, acerca de alguna de las teorías que se estudian en las restantes asignaturas del segundo año y sobre las biografías de los matemáticos que las crearon.
2. Aplicar los conocimientos y habilidades adquiridos en asignaturas recibidas a la resolución de problemas docentes especialmente diseñados, que contribuyan a completar y profundizar dichos conocimientos y habilidades, mediante el trabajo independiente de los estudiantes.
3. Consolidar los hábitos de consulta de literatura auxiliar en bibliotecas y centros de documentación, tanto en lengua española como inglesa.
4. Continuar desarrollando las habilidades para la expresión oral, mediante la exposición y defensa de los resultados de sus búsquedas, ante el colectivo de estudiantes.

II. CONTENIDO DE LA ASIGNATURA:

Se define por los integrantes del colectivo de profesores del año, con preferencia por los problemas que requieran, para su resolución, de la aplicación combinada de los conocimientos y habilidades de varias de las asignaturas del año.

SISTEMA DE CONOCIMIENTOS:

- Herramientas de organización y elaboración necesarios para enfrentar el curso: diferentes tipos de mapas conceptuales, diagramas conmutativos. Conocimientos de lógica formal: ideas generales sobre las características lógicas de un concepto y sobre los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual.
- Problemas sencillos de geometría plana que conducen a diferentes medias de dos números reales positivos. Primera generalización (conducentes al concepto de media p -ésima).
- Procesos que intervienen en el proceso de formación del concepto de media numérica: comparación, análisis-abstracción, síntesis y generalización. Segunda generalización (vinculadas al concepto de media numérica).
- Problemas sencillos de geometría plana para probar el orden entre las medias p -ésimas usuales.
- Construcción de un organizador mediante la ordenación total de la colección de las medias p -ésimas cuando p es un número entero cualquiera.
- Ampliación del organizador por medio de la ordenación total de la colección de las medias p -ésimas cuando p es un número real cualquiera.
- Problemas geométricos sencillos del espacio que conducen a diferentes medias de tres números. Tercera generalización.
- Estudio del concepto de media numérica de n números reales positivos. Cuarta generalización.
- Otros significados. Aplicaciones del concepto de media numérica.
- Laboratorio con las medias.
- Proceso de formación del concepto de función convexa.
- Caracterizaciones del concepto función convexa.
- Estructuras algebraicas de las clases $CvE(I)$ y $Cv(I)$.
- Relación entre las clases $CvE(I)$ y $Cv(I)$ con las clases de funciones $C(I)$, $M(I)$ y $D(I)$.
- Algunas desigualdades importantes establecidas con ayuda de las funciones convexas. Otros significados de la convexidad.
- Generalización del concepto función real convexa de una variable a varias variables reales.
- Principales comandos del paquete MATHEMATICA afines con los conceptos tratados.

SISTEMA DE HABILIDADES:

- Comprender las acciones que transcurren durante los procesos de formación, desarrollo y generalización de un concepto matemático.
- Interpretar o elaborar organizadores de la información que tributen a un aprendizaje significativo de los resultados de estos procesos como: diferentes tipos de mapas conceptuales, diagramas, esquemas, etc.

- Resolver problemas sencillos de geometría plana que conducen a diferentes medias de dos números reales positivos y realizar la generalización conducente al concepto de media p -ésima).
- Resolver problemas sencillos algebraicos encaminados a detectar las propiedades esenciales y a definir el concepto de media numérica.
- Resolver problemas sencillos de geometría plana para probar el orden entre las medias p -ésimas usuales.
- Construir un organizador mediante la ordenación total de la colección de las medias p -ésimas cuando p es un número entero cualquiera y realizar una ampliación paulatina del mismo cuando p es racional y real.
- Resolver problemas geométricos sencillos del espacio que conducen a diferentes medias de tres números.
- Definir el concepto de media numérica de n números reales positivos y comprender que esta es una generalización de segundo tipo de la definida para dos números reales positivos.
- Aplicar los resultados obtenidos en la demostración de desigualdades.
- Conocer las características fundamentales del concepto función convexa y determinar cuales de ellas o conjuntos de ellas son necesarias, suficientes o caracterizaciones, así como la interpretación geométrica de las mismas.
- Conocer las propiedades que satisfacen las operaciones funcionales en las clases $CvE(I)$ y $Cv(I)$ y determinar las estructuras algebraicas de las mismas.
- Determinar la relación entre las clases $CvE(I)$ y $Cv(I)$ con las clases de funciones $C(I)$, $M(I)$ y $D(I)$.
- Demostrar desigualdades establecidas con ayuda de las funciones convexas.
- Generalizar el concepto función real convexa de una variable a varias variables reales.
- Conocer los comandos fundamentales del paquete MATHEMATICA afines con los conceptos tratados.

III. INDICACIONES METODOLÓGICAS Y DE ORGANIZACIÓN DE LA ASIGNATURA.

Las orientaciones metodológicas y sugerencias didácticas que pueden tenerse en cuenta en la mayoría de las clases están encaminadas al empleo eficiente de la resolución de los problemas por medio de los cuales se va construyendo el conocimiento de manera que contribuya a un aprendizaje activo, mediado y significativo por parte de los alumnos. Estas pueden subdividirse en varios indicadores de la manera siguiente:

- Sobre motivación.
 - ✓ Tratar de que los estudiantes resuelvan los problemas porque sienten la necesidad de resolverlos y porque comprenden la importancia en su formación profesional; no por las exigencias de la institución.
- Sobre aprendizaje activo.
 - ✓ Promover la elaboración de preguntas y conjeturas por parte de los alumnos.
 - ✓ Durante el proceso de resolución de los problemas, el profesor debe guiar el proceso para que los alumnos se planteen metas adecuadas, organicen la información, utilicen estrategias de elaboración, organización, repetición, control y evaluación, vayan construyendo el nuevo conocimiento relacionándolo significativamente con el anterior.
 - ✓ Suscitar la reflexión crítica y la capacidad de cuestionamiento ante el no convencimiento de las situaciones.

- ✓ Establecer debates encaminados a desarrollar actitudes básicas de comunicación, como atender, escuchar, empatizar, sondear.
- Sobre aprendizaje significativo.
 - ✓ Lograr establecer una relación esencial entre los conocimientos previos con los nuevos por medio de la resolución de problemas, algunos encaminados a la construcción del conocimiento y otros a la organización significativa de la información.
 - ✓ Proponer problemas de completar o elaborar mapas de extensiones, de proposiciones, simbólicos, diagramas, etc. que les permiten organizar adecuadamente la información.
 - ✓ Utilizar conceptos ya aprendidos significativamente, el año, la carrera o niveles de enseñanza precedentes. (Visión cíclica, articulación conceptual horizontal y vertical).
 - ✓ Suscitar el planteamiento de problemas por parte de los alumnos, como una necesidad de la ampliación o modificación de sus estructuras mentales.
- Sobre aprendizaje mediado.
 - ✓ Realizar actividades en las clases prácticas y seminarios, encaminadas al trabajo independiente, aunque cuando el contenido presenta un mayor nivel de dificultad, puede suscitarse el trabajo cooperativo mediante el trabajo en pequeños grupos, donde unos medien en el aprendizaje de otros, y cuando el profesor lo considera pertinente, por la complejidad de la resolución del problema, este puede ofrecer determinadas sugerencias, aunque sin presentar la esencia de la solución.
 - ✓ Ante errores que cometen los estudiantes, el profesor puede suscitar un debate encaminado a subsanar los mismos con el protagonismo de los alumnos, redireccionando el proceso de solución, sin caer en manifestaciones de ayuda prematura.
 - ✓ La mayoría de los seminarios pueden desarrollarse en dos fases organizativas, primeramente de manera frontal y después por equipos.
- Sobre la transferencia de aprendizajes.
 - ✓ Deben plantearse problemas donde los alumnos deben aplicar el conocimiento en el mismo contexto o en otro que tenga relación.
- Sobre el proceso de evaluación.
 - ✓ La evaluación debe realizarse de manera sistemática mediante preguntas orales y escritas, mediante la promoción de debates y elaboración de preguntas y conjeturas que le permiten al profesor formarse un juicio de valor sobre el rendimiento parcial de cada alumno.
 - ✓ La coevaluación puede realizarse mediante la propuesta de intercambiar libretas para verificar la calidad de la solución presentada por el compañero y emitir un juicio de valor sobre la misma; mediante un sistema de ponencias y oponencias, en la que un equipo expone las tareas propuestas y otro realiza una oponencia crítica de la exposición realizada, mediante el debate crítico sobre errores cometidos por los compañeros.
 - ✓ La autoevaluación debe suscitarse en forma continua, mediante la valoración personal de cada alumno sobre su rendimiento y la toma de conciencia del nivel de cumplimiento de los objetivos que persigue la solución del problema, el nivel de independencia durante su solución, el nivel de ayuda que recibió o que prestó a los demás, el aprendizaje que ha tenido de los errores cometidos por él o sus compañeros antes o durante el proceso de solución, la autorregulación de los procesos que tienen lugar durante la

solución, los resultados obtenidos ante preguntas orales o evaluaciones escritas hechas por el profesor, desarrollo de su expresión oral y escrita, grado de organización, limpieza y disciplina durante el proceso de solución.

- Sobre las esferas volitiva y afectiva.
 - ✓ Plantear problemas en los que los alumnos realicen acciones conscientes dirigidas a resolver los problemas planteados en las que necesitan consumir esfuerzos para vencer obstáculos que se presentan en el camino y lograr un alto grado de motivación e implicación de los alumnos en la actividad, lo cual puede incidir favorablemente en el afianzamiento de valores fundamentales como la responsabilidad y la laboriosidad.
 - ✓ Desde el punto de vista afectivo, la comunicación establecida en el PEA es decisiva en el logro de relaciones afectivas adecuadas y en la incidencia favorable en el necesario valor de la solidaridad.
 - ✓ El profesor debe insistir y lograr resultados favorables por los estudiantes en cuanto a: la toma de decisiones, el espíritu crítico y autocrítico, la perseverancia, la seguridad, autoestima, confianza en sus posibilidades y en la ayuda mutua.
 - ✓ Estimular la correspondencia entre lo que se piensa y se hace, para evitar manifestaciones de doble moral y desalentar el fraude académico, creando motivaciones para el estudio y convirtiendo éste en un deber social y un placer para el estudiante.

IV. LITERATURA DOCENTE:

- Mederos, O. B. y Martínez, J. E. 2001. CD de Memorias de la Primera Conferencia Internacional de Problemas Pedagógicos de la Educación Superior en el 2001. Ponencia 140: “La Geometría y las Medias Numéricas”. (Colocado en la carpeta electrónica de la asignatura en la Intranet).
- Mederos, O. B. y Martínez, J. E. 2001. Una propuesta de estudio para la colección de las funciones convexas. Fondos de la Biblioteca “Chiqui Gómez Lubián”. Código 515.8 Med. (Colocado en la carpeta electrónica de la asignatura en la Intranet).
- Mederos, O. B. y Martínez, J. E. 2000. Las capacidades para resolver problemas y para la modelación. Cuadernos de la facultad de ciencias naturales y matemáticas de la Corporación Universitaria de Ibagué. (Colocado en la carpeta electrónica de la asignatura en la Intranet).
- Mederos, O. B. y Martínez, J. E. 2000. La Geometría y las Medias Numéricas. Cuadernos de la facultad de ciencias naturales y matemáticas de la Corporación Universitaria de Ibagué. (Colocado en la carpeta electrónica de la asignatura en la Intranet).
- Castro, C. V. 1983. Análisis Matemático II. Editorial Pueblo y Educación. 450 páginas.
- Cheng, K. Y. (1973). “Graphic Solution of $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ ”. Mathematics Teacher 66. May. 455-458.
- Lauber, M.R. (1977) Commenting on Skidell’s “The Harmonic Mean. A Monograph and Some Problems”. In Readers Reactions. Mathematics Teacher 70. May. 389.
- Maor, E. (1977) “A Mathematicians repertoire of means”. Mathematics Teacher 70. January. 20-25.
- Nicolai, M.B. (1977). Commenting on Maor’s “A Mathematicians repertoire of means”. In Readers Reactions. Mathematics Teacher 70. September. 486.

- Skidell, A. and K. Blum.(1977). Commenting on Lauber's "Harmonic theme". In Readers Reactions. Mathematics Teacher 70. December. 724-25.
- Skidell, A. (1977). "The Harmonic Mean: A monograph and Some Problems". Mathematics Teacher.

Anexo 21. Distribución de problemas para facilitar los subprocesos que intervienen en los procesos de formación, desarrollo y generalización del concepto de media numérica.

| P r o | Objetivo didáctico del prob | No del prob | Presentación del problema |
|---|--|---|---|
| D e f o r m a c i ó n | Pasar a un nivel relevante ciertos objetos particulares | 1 | Dado un rectángulo de lados a y b , se quiere construir un cuadrado equivalente de lado l , que cumpla las propiedades siguientes: |
| | | 1.1 | <i>El cuadrado tiene el mismo perímetro que el rectángulo.</i> |
| | | 1.2 | <i>El cuadrado tiene la misma área que el rectángulo.</i> |
| | | 1.3 | <i>Las diagonales del cuadrado tienen la misma longitud que las del rectángulo.</i> |
| | | 1.4 | <i>El cuadrado tiene igual relación área / perímetro que el rectángulo.</i> |
| | | 1.5 | <i>El cuadrado tiene igual relación área / diagonal que el rectángulo.</i> |
| | Determinación de rasgos comunes y esenciales a los objetos encontrados | 1.1.1 | Probar que si se representan en el eje real los números a , b y $\frac{1}{2}(a+b)$, el punto correspondiente a $\frac{1}{2}(a+b)$ ocupa el punto medio del segmento que tiene por extremos los puntos correspondientes a a y b . |
| | | 1.2.1 | Pruebe que a , b y \sqrt{ab} satisfacen la cadena de desigualdades $a \leq \sqrt{ab} \leq b$ y determine cuando se cumple la igualdad. |
| | | 1.3.1 | Pruebe que $a \leq \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)} \leq b$ y determine cuando se cumple la igualdad. |
| | | 1.4.1 | Pruebe que $a \leq \frac{2ab}{a+b} \leq b$ y que las igualdades se tienen si, y sólo si, $a = b$. |
| | | 1.5.1 | Pruebe que $a \leq MHC \leq b$ y que las igualdades se tienen si, y sólo si, $a = b$ |
| | Pasar a un nivel relevante ciertos objetos que constituyen medias armónicas. | 1.4.1.1 | Pruebe que el número v de vértices de un cubo es igual al número $v = \frac{2cl}{c+l}$, donde l indica el número de sus lados y c el número de sus caras. |
| Algunos significados de la media armónica. | 1.4.1.2 | Pruebe que en cualquier trapecio ABCD, la longitud del segmento EF que une sus lados, pasa por el punto de intersección de sus diagonales y es paralelo a las bases AB y CD, es la media armónica de las longitudes de las bases. | |

| | | |
|---|---|--|
| <p>Construcción del contenido conceptual</p> <p>Construcción de la extensión</p> <p>Realización de la operación definición conceptual</p> | 2 | <p>Las medias encontradas con la solución de los problemas 1.1, 1.3, 1.4 y 1.5 reciben el nombre de medias potenciales o p-ésimas para $p \in \{-2, -1, 1, 2\} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. De acuerdo a la forma que poseen los objetos encontrados realice una primera generalización que permita definir la misma.</p> <p>Solución se deben transformar las expresiones de <i>MHC, MH, MA, MC</i> hasta escribirlas en la forma $M_p = \left(\frac{1}{2}(a^p + b^p)\right)^{\frac{1}{p}}$, $p \in \{-2, -1, 1, 2\}$</p> <p>Definición 1. Se denomina media p-ésima de dos números reales a y b, al número $\left(\frac{1}{2}(a^p + b^p)\right)^{\frac{1}{p}}$, $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, y se indica por M_p.</p> |
| <p>Determinación de rasgos esenciales</p> | 3 | <p>Pruebe que $a \leq M_p \leq b$ y que las igualdades se tienen si, y sólo si, $a = b$.</p> |
| <p>De agrupación de rasgos esenciales o comunes en una clase \equiv Construcción del contenido conceptual</p> <p>De agrupación en una clase de todos los objetos que satisfacen el contenido \equiv Construcción de la extensión</p> <p>Realización de la operación definición conceptual</p> | 4 | <p>Con la solución de los problemas 1.1.1 al 1.5.1 se obtuvieron dos propiedades esenciales que satisfacen todas las medias encontradas (incluyendo la geométrica); estas son: Dados dos números a y b cada media cumple:</p> <p>(i) $\min\{a, b\} \leq M_p(a, b), G(a, b) \leq \max\{a, b\}$</p> <p>(ii) $\min\{a, b\} = M_p(a, b) = G(a, b) = \max\{a, b\}$ si, y sólo si, $a = b$</p> <p>El siguiente problema está destinado a obtener otra propiedad esencial de estas medias:</p> <p>a) Encuentre los valores de M_{-2}, M_{-1}, G, M_1 y M_2 que corresponden a los valores de $a_k = \frac{1}{k} a$ y $b_k = \frac{1}{k} b$, para $a = 10, b = 100$ y $k = \overline{1, 10}$; y para $a = 1, b = 2$ y $k = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{10}$.</p> <p>b) Generalizando el resultado obtenido con estos cálculos, si se sustituyen a y b por ta y tb; entonces ¿cuál es el valor de M_p correspondiente a los valores ta y tb?</p> <p>Solución Se formaliza la propiedad</p> <p>(iii) Es invariante por un cambio de escala, o sea, $M_p(ta, tb) = t M_p(a, b)$ y $G(ta, tb) = tG(a, b)$.</p> <p>Después de solucionar el problema **** puede definirse el concepto media numérica</p> <p>Definición 2. Dados dos números reales positivos a y b, todo número $M(a, b)$ que satisface las propiedades (i), (ii) y (iii) recibe el nombre de media numérica de a y b.</p> |
| <p>D Determinación</p> | 5 | <p>Para que los estudiantes determinen si la segunda generalización es más amplia o de igual amplitud y para que a la vez profundicen en la comprensión del concepto de extensión de un concepto se formula la</p> |

| | | | |
|---|---|---|--|
| e d e s a r r o l l o | de relaciones entre las extensiones de conceptos | | pregunta: ¿Existen medias numéricas para a y b que satisfacen la definición 2 y que no son medias p-ésimas? |
| | | 5.1 | Este problema ayuda a resolver la interrogante anterior Dados los números reales a, b, p ₁ y p ₂ ; pruebe que $M_{p_1 p_2}(a, b) = \left(\frac{a^{p_1} b^{p_2} + a^{p_2} b^{p_1}}{2} \right)^{\frac{1}{p_1 + p_2}},$ satisface la definición 2 si, y sólo si, $p_1 p_2 \geq 0$ y $p_1 + p_2 \neq 0$. |
| | | 6 | Pruebe, realizando una construcción geométrica adecuada |
| | Determinación de relaciones (de orden) entre los elementos de la extensión del concepto en un contexto geométrico | 6.1 | Que la media aritmética M ₁ de dos números positivos a y b, a < b es mayor o igual que la media geométrica G de esos dos números. |
| | | 6.2 | Que la media armónica M ₋₁ de dos números reales positivos a y b, a < b, es menor o igual que su media geométrica G. |
| | | 6.3 | Que para dos números reales positivos a y b, a < b, la media aritmética M ₁ es menor o igual que la media cuadrática M ₂ y que la igualdad solo se alcanza cuando a=b. |
| | | 6.4 | Que la media armónica M ₋₁ de dos números reales positivos a y b, a < b, es mayor o igual que la media armónica cuadrática M ₋₂ de esos dos números. |
| | Determinación de relaciones (de orden) entre los elementos de la extensión del concepto en un contexto algebraico | 7 | Resuelva los siguientes problemas encaminados a obtener analíticamente un orden total de las medias p-ésimas de dos números reales positivos a y b, transitando por p entero, p racional y finalmente, p real. |
| | | 7.1 | Pruebe analíticamente la cadena de desigualdades $M_{-1}(a,b) \leq G(a,b) \leq M_1(a,b)$; y pruebe que las igualdades se tienen si, y solo si, a=b. |
| | | 7.2 | Pruebe que $M_{-p} \leq G \leq M_p$ para todo p real positivo; y que la igualdad se tiene para los elementos (a,b) de R ² tales que a=b y solo para estos elementos. |
| | 7.3 | Pruebe que se cumple la desigualdad $(1+x)^\lambda \geq 1+\lambda x$ para todo x real mayor que -1 y para todo número fraccionario λ mayor que 1. Pruebe que la igualdad se tiene si, y solo si (ssi), x=0. | |
| | 7.4 | Pruebe que para todo par de números reales positivos α y β y todo número fraccionario λ ≥ 1 se cumple $(\frac{1}{2}(\alpha + \beta))^\lambda \leq \frac{1}{2}(\alpha^\lambda + \beta^\lambda)$ y la igualdad se tiene, ssi, α=β. | |
| | 7.5 | Pruebe que se cumplen las desigualdades $M_{\lambda_1} \leq M_{\lambda_2}$ y $M_{-\lambda_1} \leq M_{-\lambda_2}$ para todo par de números reales positivos (a, b) tales que $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1 < \lambda_2$ y la igualdad se tiene para a=b y solo para estos elementos. | |

| | | |
|---|------|---|
| Determinación de relaciones (de orden) entre los elementos de la extensión del concepto en un contexto algebraico | 7.6 | (generalización del problema 7.3) Pruebe que se cumple la desigualdad $(1+x)^p \geq 1+px$ para todo x real mayor que -1 y para todo número real p mayor que 1 . Pruebe que la igualdad se tiene si, y solo si, $x=0$. |
| | 7.7 | (generalización del problema 7.4). Pruebe que para todo par de números reales positivos α y β y todo número real $p \geq 1$ se cumple que $(\frac{1}{2}(\alpha + \beta))^p \leq \frac{1}{2}(\alpha^p + \beta^p)$ y la igualdad se tiene, si y solo si, $\alpha=\beta$. |
| | 7.8 | Pruebe que la función $F_{ab}(\lambda) = \begin{cases} \left[\frac{1}{2}(a^\lambda + b^\lambda)\right]^{\frac{1}{\lambda}}, & \text{si } \lambda \neq 0 \\ G(a,b), & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$ es creciente sobre $R \setminus \{0\}$. |
| | 7.9 | Pruebe que la función F_{ab} es continua sobre $R \setminus \{0\}$. |
| | 7.10 | Demuestre que el límite de F_{ab} es $G(a,b)$, cuando λ tiende a cero. |
| | 7.11 | Pruebe que si $0 < a < b$, se cumple que $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} F_{ab}(\lambda) = a$ y $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} F_{ab}(\lambda) = b$ |
| Ampliación de los significados de la media armónica. | 8 | Pruebe que si se inscribe un cuadrado en un triángulo dado, de modo que un lado del cuadrado sea un segmento de un lado del triángulo al que corresponde una altura interior al triángulo, y cada uno de los vértices restantes del cuadrado está sobre uno de los otros dos lados del triángulo; entonces la longitud l del lado del cuadrado está dada por la mitad del número $\frac{2ah}{a+h}$, donde a es la longitud del lado del triángulo sobre el que está un lado del cuadrado y h es la longitud de la altura que corresponde a ese lado. |
| | 9 | Pruebe que todo elemento a partir del segundo de la sucesión armónica $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ es la media armónica de su antecesor y su sucesor. |
| Establecimiento de relaciones algebraicas entre medias | 10 | Teniendo en cuenta que tres números a, h, b están en progresión armónica si, y sólo si, $h = \frac{2ab}{a+b}$ y que una sucesión de términos es una progresión armónica cuando tres términos consecutivos cualesquiera de la misma están en progresión armónica; pruebe que: a) Tres números a, h, b están en progresión armónica si y solo si $\frac{a}{b} = \frac{a-h}{h-b}$ b) Los recíprocos de números que están en progresión armónica forman una progresión aritmética. |

| | | | |
|--|--|------|--|
| D e g e n e r a l i z a c i ó n | | 11 | Pruebe que la media geométrica de dos números a y b es igual a la media geométrica de las medias cuadrática y armónica cuadrática de dichos números. |
| | | 12 | Pruebe que la media geométrica de dos números a y b es igual a la media geométrica de las medias aritmética y armónica de estos números. |
| | Preparación del concepto para la generalización | 13 | Se desea encontrar la longitud l del lado de un cubo que tenga una propiedad geométrica común con un paralelepípedo rectangular de aristas de longitud a , b y c . |
| | | 13.1 | El cubo tiene la misma longitud total de sus aristas que el paralelepípedo rectangular. |
| | | 13.2 | El cubo tiene el mismo volumen que el paralelepípedo. |
| | | 13.3 | El cubo tiene la misma diagonal principal que el paralelepípedo. |
| | | 13.4 | El cubo tiene igual relación volumen / superficie lateral que el paralelepípedo. |
| | | 13.5 | El cubo tiene igual área superficial que el paralelepípedo. |
| | | 13.6 | El cubo tiene igual relación volumen / longitud total de sus aristas que el paralelepípedo. |
| | Realización de cadenas de generalizaciones aun contexto más amplio | 14 | <p>a) Pruebe que todas las medias obtenidas satisfacen las propiedades (i), (ii) e (iii) para (a, b, c).</p> <p>b) Defina los conceptos de media p-ésima y media numérica de</p> <p>b.1) tres números reales positivos</p> <p>b.2) n números reales positivos</p> <p>Definición 1. Se denomina media numérica M de tres números reales positivos a todo número real $M(a,b,c)$ que cumple las propiedades siguientes:</p> <p>(i). $\min\{a, b, c\} \leq M(a, b, c) \leq \max\{a, b, c\}$</p> <p>(ii). Cada una de las igualdades de la cadena de desigualdades de (i) se tiene si y solo si $a=b=c$.</p> <p>(iii). $M(ta, tb, tc) = tM(a, b, c)$.</p> <p>Definición 2. Se denomina media numérica a toda función $M: R_+^n \rightarrow R$, $(a_1, \dots, a_n) \rightarrow M(a_1, \dots, a_n)$, donde R_+^n denota el producto cartesiano de $(0, +\infty)$ con sí mismo n veces; que satisface las tres propiedades siguientes:</p> |

| | | |
|--|---------------------|---|
| | | <p>1. $\min_{1 \leq k \leq n} \{a_k\} \leq M(a_1, \dots, a_n) \leq \max_{1 \leq k \leq n} \{a_k\}$</p> <p>2. $M(a_1, \dots, a_n) = a_1$ si y solo si $a_1 = \dots = a_n$</p> <p>3. $M(ta_1, \dots, ta_n) = tM(a_1, \dots, a_n)$</p> <p>Definición 3. Dado p de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, la función $f: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $(a_1, \dots, a_n) \rightarrow$</p> $M_p(a_1, \dots, a_n) = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}}$ <p>se denomina media p-ésima de los números a_k, $k = \overline{1, n}$ y la función $G: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $(a_1, \dots, a_n) \rightarrow$</p> $G(a_1, \dots, a_n) = \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{\frac{1}{n}}$ <p>recibe el nombre de media geométrica de los números a_k, $k = \overline{1, n}$.</p> |
| <p>Establecimiento de relaciones (de orden) entre los elementos de la extensión del concepto (de media p-ésima de n números reales positivos).</p> <p>Estas acciones están encaminadas a expresar un índice de calidad de la generalización realizada (se mantiene el orden entre los elementos de la extensión)</p> | <p>15</p> <p>16</p> | <p>Pruebe que si φ es una función real definida en cierto intervalo real que cumple la propiedad:</p> $\varphi\left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2} [\varphi(b_1) + \varphi(b_2)]$ <p>para dos elementos cualesquiera diferentes de dicho intervalo, entonces:</p> $\varphi\left(\frac{b_1 + \dots + b_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n} [\varphi(b_1) + \dots + \varphi(b_n)]$ <p>donde b_1, \dots, b_n son valores arbitrarios diferentes dos a dos del intervalo dado.</p> <p>Demuestre que, dados n números reales positivos a_k, $k = \overline{1, n}$, la función $F_{a_1 \dots a_n}$ definida sobre \mathbb{R}</p> <p>por: $x \rightarrow F_{a_1 \dots a_n}(x) =$</p> $\begin{cases} M_x(a_1, \dots, a_n) = \left[\frac{1}{n} (a_1^x + \dots + a_n^x) \right]^{\frac{1}{x}}, & \text{si } x \neq 0 \\ G(a_1, \dots, a_n) = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k}, & \text{si } x = 0, \end{cases}$ <p>cumple las propiedades siguientes:</p> <ol style="list-style-type: none"> Es continua. Es estrictamente creciente. Su imagen es el intervalo finito (m, M) donde $m = \min_{1 \leq k \leq n} \{a_k\} \quad \text{y} \quad M = \max_{1 \leq k \leq n} \{a_k\}$ |

Anexo 22. Encuesta a estudiantes sobre la manifestación de la relación RP-FDGC-AAMS después del curso.

Como se pudo apreciar, durante el desarrollo del curso, se ha llevado a cabo el tratamiento de los conceptos de media numérica y función convexa; a continuación evaluaremos algunos aspectos coincidentes a los que se consideraron en la encuesta aplicada durante la segunda semana, en aras de valorar la calidad de los procesos que tuvieron lugar durante el desarrollo del curso.

1. Al comenzar el estudio de los conceptos de media numérica y función convexa, ¿qué vía ha predominado durante el proceso de formación de los mismos: de lo particular a lo general o de lo general a lo particular?
2. Exprese las acciones de formación, desarrollo y generalización conceptual se han realizado en clases durante el tratamiento de estos conceptos, completando la tabla siguiente:

| | Proceso de formación | | | | Proceso de desarrollo | | | | | | Proc. de gzción | |
|----------------------------------|----------------------|-----------|------------------------------------|---|---------------------------------------|---|-----------------------|---|-------------------------------------|--|---|---|
| | Plana | Analítica | Determinación de rasgos esenciales | Generalización conducente a la definición | Orden entre elementos de su extensión | Ampliación de significados del concepto | Utilidad del concepto | Determinación de caracterizaciones del concepto | Análisis de estructuras algebraicas | Establecimiento de relaciones entre la extensión del concepto con las extensiones de otros | Establecimiento de generalización por debilitamiento del contenido del concepto | Establecimiento de generalización por consideración de conjuntos de partida más amplios |
| Media p- esima de dos núm. | | | | | | | | | | | | |
| Media numérica de dos núm | | | | | | | | | | | | |
| Función convexa | | | | | | | | | | | | |

3. ¿Se ha sentido motivado para abordar los procesos del tratamiento conceptual? ¿Qué motivaciones ha tenido? Puede señalar algunas de las que se relacionan a continuación:

Durante el proceso de formación:

___ El planteamiento de problemas de diferentes contextos (geométrico, algebraico, analítico) que me resultan interesantes.

___ En el proceso de resolución de estos problemas se emplean herramientas conocidas e interesantes y que conducen a los mismos objetos.

___ Me siento involucrado en la construcción del conocimiento.

___ Realizo mi mayor esfuerzo por obtener la solución de los problemas.

___ Siento la necesidad de definir el concepto que se está manipulando.

___ Otras.

¿Cuáles? _____

Durante el proceso de desarrollo:

___ Estoy consciente de la necesidad de llevar a cabo acciones de desarrollo conceptual.

___ Estoy consciente de que estas contribuyen a un mayor conocimiento de la extensión de los conceptos.

___ Los problemas que se van resolviendo tributan a las acciones de desarrollo conceptual.

___ Otras.

¿Cuáles? _____

Durante el proceso de generalización (restricción):

___ Estoy consciente de la trascendencia que tiene la manipulación de las propiedades del contenido del concepto, ya sea sustituyendo algunas por otras más débiles (fuertes) o considerando conjuntos de partida más amplios (estrechos).

___ Estoy consciente de la necesidad de plantear y resolver problemas que tributen a las acciones de generalización (restricción).

___ Otras.

¿Cuáles? _____

4. Cuando trata de recordar las relaciones entre los conceptos estudiados, ¿siempre lo logra?, ¿le resulta sencillo?, ¿qué recursos emplea para ello? Ejemplifique.

5. Sobre la evaluación del aprendizaje de los conceptos tratados, ¿qué formas de evaluación se han empleado? Puede marcar algunas de las que se relacionan a continuación.

___ Frecuentes.

___ Parciales.

___ Intercambio de libretas y emisión de juicios valorativos del trabajo realizado por el compañero.

___ Realización de oposición a la ponencia de otro alumno o equipo.

___ Determinación de las fortalezas y debilidades de conocimientos y habilidades de otros alumnos.

___ Realización de autovaloración y análisis autocrítico de mi trabajo ante el colectivo.

___ Determinación de las fortalezas y debilidades mías.

___ Cualitativas, en las que se emiten criterios valorativos del trabajo de un alumno y no se otorga una nota específica.

___ Cuantitativas, en las que se otorga una nota por la calidad del trabajo.

___ Otras.

¿Cuáles? _____

6. Sobre el tipo de preguntas que predomina en las evaluaciones escritas ¿cuáles son las que se han empleado? Puede marcar algunas de las que se relacionan a continuación.

___ Reproductivas, las que requieren de recordar algo tal como fue aprendido.

___ Productivas, las que requieren de realizar tareas semejantes a las realizadas con anterioridad.

___ Creativas, las que requieren de realizar tareas novedosas.

___ De aplicación de los conceptos a ciertas situaciones matemáticas y no matemáticas.

___ De establecimiento de relaciones con otros conceptos.

___ De análisis de los contenidos de los conceptos.

___ De valoración sobre la pertenencia o no de un objeto a la extensión del concepto que se evalúa.

___ Del establecimiento de significados del concepto.

___ De elaboración o interpretación de mapas conceptuales, diagramas, etc.

___ Otras.

¿Cuáles? _____

7. Al realizar acciones de formación, desarrollo y generalización de los conceptos estudiados, ¿ha predominado su trabajo independiente, el trabajo cooperativo con los demás alumnos bajo la guía del profesor, o el intercambio y la elaboración conjunta con el profesor? ¿de qué manera se ha llevado a cabo el trabajo cooperativo?
8. ¿Ha cometido errores en la realización de alguna tarea relativa al tratamiento de un concepto en la clase o fuera de ella? ¿cómo se han subsanado los mismos?
9. Sobre las relaciones afectivas en el proceso, cómo se han manifestado generalmente. Puede tener en cuenta aspectos como, la comunicación que se establece entre los alumnos y con el profesor, la disciplina, la solidaridad, los estados de ánimo que predominan.

ANEXO 23. GUÍA PARA LA OBSERVACIÓN PARTICIPANTE.

Forma de docencia: _____

Tema: _____

Aspectos a considerar:

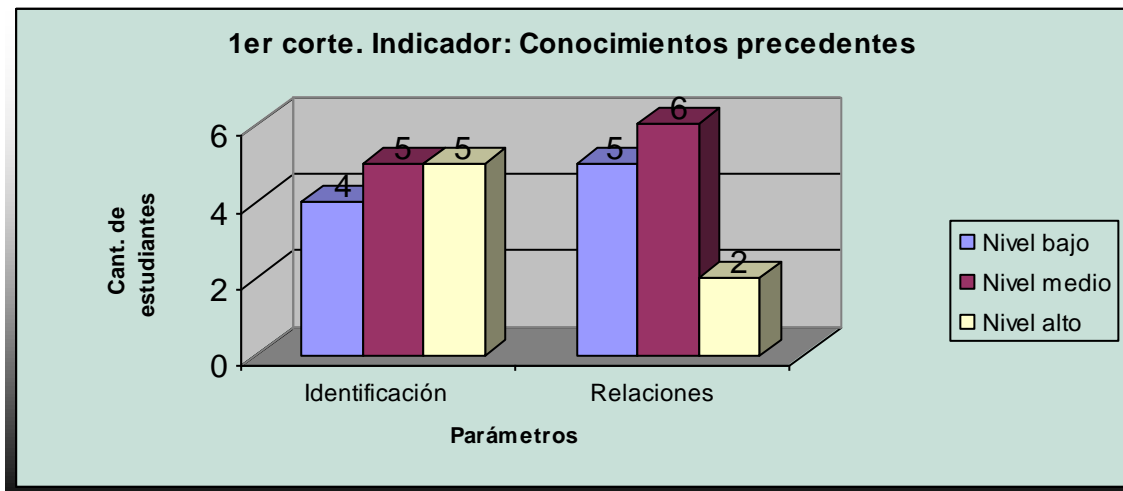
1. Acciones realizadas durante el proceso de:
 - 1.1. Formación conceptual.
 - 1.2. Desarrollo conceptual.
 - 1.3. Generalización conceptual.
2. Sobre el planteamiento y la resolución de problemas.
3. Sobre acciones encaminadas a un aprendizaje significativo.
4. Sobre el aprendizaje activo.
5. Sobre el aprendizaje mediado.
6. Sobre la motivación de los estudiantes.
7. Sobre la esfera afectiva.
8. Sobre el control y la evaluación del proceso.

Centrando la atención en la manera en que se manifiestan:

11. Calidad del concepto formado:
 - a. Comprobar si el alumno es capaz de relacionar las propiedades del contenido del concepto formado.
 - b. Determinar si, dado un elemento de un concepto subordinante, el alumno es capaz de determinar si pertenece o no a su extensión.
12. Calidad del concepto desarrollado.
 - a. Determinar si son capaces de utilizar diferentes caracterizaciones.
 - b. Comprobar si conocen subcolecciones infinitas de elementos de la extensión.
 - c. Determinar si dominan estrategias para establecer relaciones conjuntistas entre la extensión del concepto en estudio con las extensiones de otros conceptos.
13. Calidad del concepto generalizado.
 - a. Analizar si utilizan criterios de generalización adecuados.
 - b. Determinar si son capaces de realizar cadenas de generalizaciones.
 - c. Comprobar si dominan criterios para determinar la calidad de una generalización.
14. Nivel de aprendizaje significativo logrado.
 - a. Conocer los diagramas o estructuras que posee el alumno que integran el nuevo concepto con contenidos previos.
 - b. Determinar si poseen estructurado el concepto de diferentes formas.

- c. Comprobar si el alumno es capaz de plantear problemas o interrogantes como necesidad para la ampliación o modificación de sus estructuras mentales.
15. Utilidad del conocimiento del concepto.
- a. Comprobar si conocen diferentes significados del concepto.
 - b. Comprobar si son capaces de utilizar el concepto en problemas de diferentes ramas.
16. Nivel del papel activo del aprendizaje logrado.
- a. Determinar si son capaces de resolver problemas destinados al trabajo independiente.
 - b. Determinar si son capaces de responder preguntas hechas por el profesor.
 - c. Comprobar si pueden elaborar preguntas o realizar conjeturas acertadas.
17. Nivel del papel mediado del aprendizaje logrado.
- a. Determinar si son capaces de aprovechar las sugerencias mínimas ofrecidas por el profesor u otro alumno.
 - b. Comprobar si, durante el trabajo en equipos, pueden aportar resultados sustanciales a la solución de las tareas.
18. Manifestación de nivel de motivación y actividad volitiva.
- a. Comprobar si sienten la necesidad de resolver los problemas planteados.
 - b. Analizar si comprenden la importancia del contenido en su formación profesional
 - c. Determinar si muestran esfuerzos personales, laboriosidad, trabajo enérgico y con intención por resolver los problemas planteados, realizar las actividades de autopreparación y por subsanar las dificultades que se presentan en el proceso de resolución.
 - d. Comprobar si son capaces de formular preguntas, conjeturas o nuevos problemas.
19. Nivel de relaciones afectivas.
- a. Determinar si el alumno mantiene relaciones empáticas y solidarias con sus compañeros (no se muestra antipático, tímido o indisciplinado).
 - b. Comprobar si se expresa con claridad y fluidez.
 - c. Analizar si sus emociones son asténicas (al experimentar un sentimiento fuerte, el sujeto se transforma en introvertido, cerrado en sí mismo) o esténicas (incitaciones para actuar, expresarse, no quedar inactivo ante el desenlace de un sentimiento).
20. Resultados de las evaluaciones en los cortes realizados.
- a. Determinación de la calidad del rendimiento de cada alumno a partir de la valoración de los resultados obtenidos en las evaluaciones frecuentes y pruebas parciales realizadas.
 - b. Determinación de la calidad de su participación en escenarios de coevaluación y autoevaluación.

ANEXO 24. RESULTADOS DEL PRIMER CORTE.



Anexo 25. Prueba para determinar la comprensión del resultado del proceso de formación de los conceptos de media p-ésima y de media numérica

Nombre del estudiante:

1. Ponga tres ejemplos de medias p-ésimas, diferentes a las medias aritmética, armónica, cuadrática y armónica cuadrática.
2. Analice si $M_{pq}(a,b) = \frac{pa+pb}{p+q}$, $p, q > 0$ es una media p-esima, numérica o ninguna de las dos.
3. Exponga tres propiedades que cumplen todas las medias p-ésimas.
4. ¿Cuál es el contenido del concepto de media numérica?
5. Realice un mapa de extensiones y sus correspondientes mapas simbólicos y de contenido donde se aprecie la relación entre los conceptos formados.

Anexo 26. Prueba para determinar la comprensión del resultado del proceso de desarrollo de los conceptos de media p-ésima y de media numérica

1. Ordene las medias p-ésimas siguientes: $M_{\frac{3}{5}}(a,b)$, $M_{-105}(a,b)$ y $M_{\pi}(a,b)$.
2. Ponga un ejemplo de una media numérica de los números a y b positivos que no sea p-ésima ni geométrica. Compruebe que, en efecto, lo es.
3. Dibuje un mapa de las extensiones de los conceptos de media p-ésima y media numérica.
4. La "cardinalidad", cantidad de elementos, de la extensión del concepto de media numérica que no es media p-ésima se caracteriza por ser: finita.... Infinita...

Anexo 27. Prueba para determinar la comprensión del resultado del proceso de generalización de los conceptos de media p-ésima y de media numérica

1. ¿Por qué el concepto de media numérica de dos números reales positivos es una generalización del concepto de media p-ésima?
2. ¿Por que el concepto de media numérica de n números reales positivos es una generalización del concepto de media p-esima?
3. Exprese el concepto de media p-ésima utilizando el concepto de función de dos variables.
4. Pruebe que $M_{ab}(p_1, p_2)$ es una generalización de las medias $M_{ab}(p_1, 0)$ que son isomorfas a las medias p-ésimas.

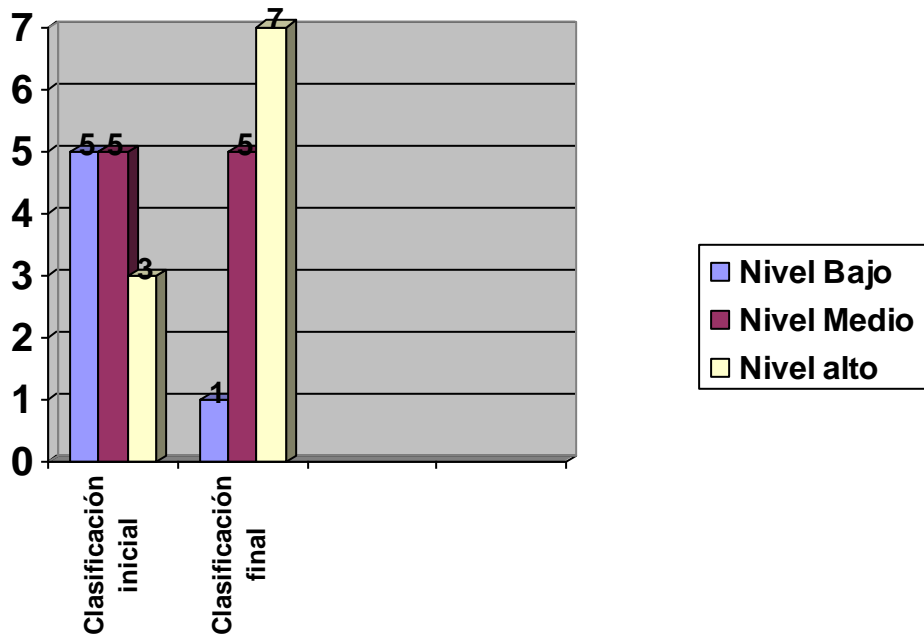
Anexo 28. Prueba para determinar la comprensión del resultado del proceso de formación del concepto de función convexa.

9. Exprese una idea geométrica que conduzca al concepto de función convexa.
10. Exprese la formulación analítica de la idea geométrica anterior (u otra) que conduzca a la definición de dicho concepto.
11. ¿Por qué se puede afirmar que este es un concepto nuevo?

Anexo 29. Prueba para determinar la comprensión de los resultados de los procesos de desarrollo y parte del proceso de generalización del concepto función convexa.

1. Exprese una idea geométrica correspondiente a una caracterización del concepto función convexa.
2. De las operaciones usuales (+, ·, o) entre funciones de la colección $F(I)$ de funciones reales definidas sobre un intervalo abierto I . ¿Cuáles son internas en $Cv(I)$? Justifique.
3. Elabore un mapa de extensiones y su correspondiente mapa simbólico que relaciones las extensiones $F(I)$, $C(I)$, $M(I)$, $Cv(I)$ y $Cv_E(I)$.
4. Exprese una condición necesaria o suficiente del concepto función convexa.
5. Realice una generalización del concepto función convexa. Especifique qué tipo de generalización empleó. ¿Se mantiene el cumplimiento de la desigualdad de Jensen? Justifique.

Anexo 30. Gráfico de comparación entre los niveles de aprovechamiento derivados del estudio de casos.



Anexo 31. Consulta de especialistas.

Tabla de frecuencias relativas sobre la consideración de indicadores por los especialistas.

| Aspecto | Clasificación | | | | | Tot P |
|--|---------------|---|---|---|----|-------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
| 1. Diseño general de la investigación. | 0 | 0 | 0 | 2 | 13 | 73 |
| 1.1 Aporte teórico | 0 | 0 | 2 | 2 | 11 | 69 |
| 1.2 Significación práctica | 0 | 0 | 1 | 2 | 12 | 71 |
| 2. Elementos básicos de la estrategia. | 0 | 0 | 2 | 3 | 10 | 68 |
| 2.1 Presupuestos teóricos. | 0 | 0 | 3 | 3 | 9 | 66 |
| 2.2 Principios metodológicos particulares. | 0 | 0 | 2 | 3 | 10 | 68 |
| 2.3 Fases de la estrategia. | 0 | 0 | 0 | 0 | 15 | 75 |
| 3. Diseño de la estrategia. | 0 | 0 | 1 | 1 | 13 | 72 |
| 3.1 Fase de planificación y orientación. | 0 | 0 | 1 | 3 | 11 | 70 |
| 3.1.1 Preparación del profesor. | 0 | 0 | 1 | 4 | 10 | 69 |
| 3.1.2 Diagnóstico de necesidades. | 0 | 0 | 1 | 5 | 9 | 68 |
| 3.1.2.1 Diagnóstico de necesidades didácticas del concepto a tratar. | 0 | 0 | 0 | 3 | 12 | 72 |
| 3.1.2.2 Diagnóstico de los conocimientos previos en torno al concepto a tratar. | 0 | 0 | 2 | 2 | 11 | 69 |
| 3.1.3 Establecimiento del sistema de acciones en función de lograr el aprendizaje activo, mediado y significativo durante los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual. | 0 | 0 | 2 | 3 | 10 | 68 |
| 3.1.3.1 Prediseño de temas de estudio. | 0 | 0 | 1 | 1 | 13 | 72 |
| 3.1.3.2 Sobre el planteamiento de los problemas. | 0 | 0 | 1 | 3 | 11 | 70 |
| 3.1.3.3 Sobre la resolución de los problemas. | 0 | 0 | 2 | 3 | 10 | 68 |
| 3.1.3.4 Lograr la necesaria motivación intrínseca en los estudiantes durante todos los procesos. | 0 | 0 | 1 | 3 | 11 | 70 |
| 3.1.3.5 Lograr un aprendizaje del concepto en el que no se rompa la unidad entre lo cognitivo y lo afectivo en el proceso docente educativo. | 0 | 0 | 1 | 3 | 11 | 70 |
| 3.1.3.6 Realizar una adecuada evaluación de los conocimientos | 0 | 0 | 2 | 3 | 10 | 68 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|----|----|
| 3.2 Implementación | 0 | 0 | 1 | 2 | 12 | 71 |
| 3.3 Control | 0 | 0 | 2 | 2 | 11 | 69 |
| 1. Calidad del concepto formado. | 0 | 0 | 1 | 2 | 12 | 71 |
| 2. Calidad del concepto desarrollado. | 0 | 0 | 2 | 2 | 11 | 69 |
| 3. Calidad del concepto generalizado. | 0 | 0 | 2 | 3 | 10 | 68 |
| 4. Nivel de aprendizaje significativo logrado. | 0 | 0 | 3 | 2 | 10 | 67 |
| 5. Utilidad del conocimiento del concepto. | 0 | 0 | 3 | 3 | 9 | 66 |
| 6. Nivel del papel activo del aprendizaje logrado. | 0 | 0 | 0 | 2 | 13 | 73 |
| 7. Nivel del papel mediado del aprendizaje logrado. | 0 | 0 | 1 | 2 | 12 | 71 |
| 8. Manifestación de las relaciones interpersonales y la unidad entre lo cognitivo y afectivo entre los participantes del proceso docente educativo. | 0 | 0 | 1 | 3 | 11 | 70 |
| 9. Resultados de las evaluaciones en los cortes realizados, atendiendo a la intención sumativa o formativa. | 0 | 0 | 1 | 2 | 12 | 71 |
| Calidad de este instrumento de medición de la calidad del diseño de investigación y de la estrategia. | 0 | 0 | 1 | 4 | 10 | 69 |