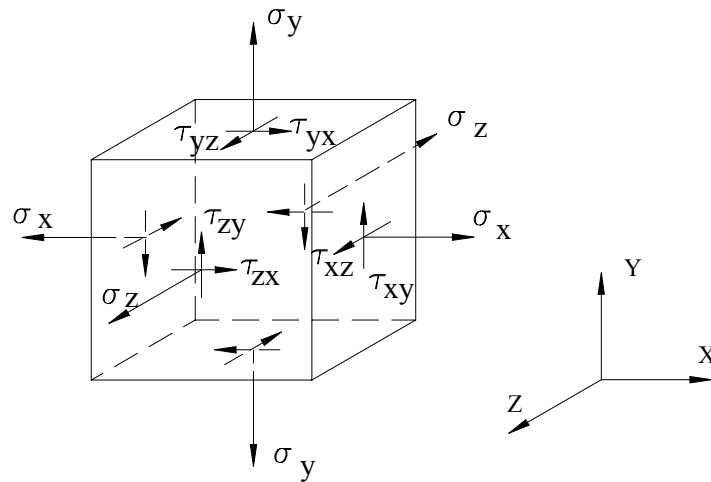


TEORÍA DE LA ELASTICIDAD



Luis I. Negrín Hernández y Santiago Muelas

Edición: Liset Ravelo Romero
Corrección: Fernando Gutiérrez Ortega
Diagramación: Roberto Suárez Yera

Luis I. Negrín Hernández y Santiago Muelas, 2012

Editorial Feijóo, 2012

ISBN: 978-959-250-807-1



EDITORIAL
Feijóo

Editorial Samuel Feijóo, Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas, Carretera a Camajuaní, km 5 ½, Santa Clara, Villa Clara, Cuba. CP 54830

ÍNDICE

CAPÍTULO I. PRELIMINARES MATEMÁTICAS / 4
CAPÍTULO II. TENSIONES / 13
CAPÍTULO III. DEFORMACIÓN Y DESPLAZAMIENTO / 35
CAPÍTULO IV. RELACIONES TENSIÓN-DEFORMACIÓN / 49
CAPÍTULO V. FORMULACIÓN DE PROBLEMAS / 59
CAPÍTULO VI. CRITERIOS DE FALLAS / 73
CAPÍTULO VII. APLICACIÓN EN EXTENSOMETRÍA / 81
BIBLIOGRAFIA / 89

CAPÍTULO I. PRELIMINARES MATEMÁTICAS

1- MATRICES Y OPERACIONES CON LAS MISMAS

1.1- Matrices

El resultado de los análisis en Teoría de la Elasticidad son sistemas de ecuaciones lineales y su solución puede basarse en la esquematización matricial del proceso de cálculo. Por eso antes de pasar al estudio de la Teoría de la Elasticidad se propone recordar las principales propiedades de las matrices y cómo ejecutar operaciones con ellas.

La matriz es un conjunto de elementos a_{ij} dispuestos en forma de una tabla rectangular que incluye n filas y m columnas. Las matrices se escriben de la forma siguiente:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \\ a_{2i} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = [a_{ik}] \quad (1.1)$$

donde a_{ik} representa el elemento que se encuentra en la fila i y la columna k . La matriz $[A]$ tiene orden $n \times m$. Si el número de filas y columnas de una matriz es igual a n tal matriz se denomina matriz cuadrada de orden n . La matriz:

$$[A] = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_m] = [a_k] \quad (1.2)$$

que solamente cuenta con una fila, se denomina vector de primera especie o simplemente vector fila.

Por otra parte, la matriz $\{B\}$:

$$\{B\} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} = \{b_i\} \quad (1.3)$$

que solamente cuenta con una columna de n elementos se denomina vector de segunda especie o vector-columna.

La matriz cuadrada $[A] = [a_{ik}]$ se denomina matriz diagonal, si todos los elementos son nulos $a_{ik} = 0$ ($i \neq k$) excepto los de la diagonal principal $a_{ii} \neq 0$.

La matriz diagonal en la que todos los elementos de la diagonal principal son iguales a la unidad se denomina matriz identidad o matriz unitaria. Se designan por [I].

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

I.2- Operaciones principales con matrices

Se dice en álgebra matricial que dos matrices $[A] = [a_{ik}]$ y $[B] = [b_{ik}]$ del mismo orden $n \times m$ son iguales $[A] = [B]$, solamente cuando sus correspondientes elementos son idénticos, es decir, si $a_{ik} = b_{ik}$ para todos los valores de i y k .

I.2.1 - Suma

La suma de dos matrices $[A]$ y $[B]$ del mismo orden $n \times m$ se define como una matriz $[C]$ cuyo elemento característico es $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$. En otras palabras:

$$[C] = [A] + [B] = [a_{ik}] + [b_{ik}] = [a_{ik} + b_{ik}] \quad (1.5)$$

Ejemplo:

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Entonces:

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 2 & 10 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -11 \\ 7 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

I.2.2 - Multiplicación

La multiplicación de una matriz $[A]$ de orden $n \times m$ por un número escalar α es una matriz $[C]$ del orden $n \times m$ definida por:

$$[C] = \alpha [A] = \alpha [a_{ik}] = [\alpha a_{ik}]$$

o sea, por definición la multiplicación de una matriz por una magnitud escalar da lugar a una nueva matriz, cuyos elementos se obtienen multiplicando los elementos de la matriz dada por el factor escalar.

El producto de matrices $[A] = [a_{ik}]$ y $[B] = [b_{ik}]$ se puede calcular solamente cuando el número de filas de la matriz $[B]$ es igual al número de columnas de la matriz $[A]$. Las matrices que

satisfacen esta condición se denominan matrices conformes. Si la matriz [A] tiene orden n x m y la matriz [B] tiene orden m x r, su producto forma una matriz [C] de orden n x r:

$$[C] = [A] [B] = [a_{ik}] [b_{kj}] = [c_{ij}] \quad (1.7)$$

donde:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=m} a_{ik} b_{kj} \quad (1.8)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \\ \downarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2r} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nr} \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -5 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (4b_{11} + 3b_{21}) & (4b_{12} + 3b_{22}) \\ (2b_{11} - 5b_{21}) & (2b_{12} - 5b_{22}) \\ (-6b_{11} + 3b_{21}) & (-b_{12} + 3b_{22}) \end{bmatrix}$$

es necesario tener en cuenta que la existencia del producto [A] x [B] no conduce a la existencia del producto [B] x [A].

I.2.3 - División de matrices

La división de matrices se define como el producto del numerador multiplicado por la matriz inversa del denominador. Es decir, sean las matrices A y B tal que $A/B = AB^{-1}$:

Si una matriz está dividida entre un escalar, todos los términos de la matriz quedarán divididos por ese escalar.

Ejemplo:

Sean la matriz $A = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$, y $k = 2$ un escalar. En este caso:

$$A/k = \frac{\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 8/2 & 16/2 \\ 3/2 & -6/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3/2 & -3 \end{pmatrix}$$

I.2.4 - Matriz transpuesta

La matriz A^T de orden n x m que se obtiene al intercambiar filas y columnas de la matriz A de orden m x n se llama la transpuesta de A. Por ejemplo la transpuesta de

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ es } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

I.2.5 - Matriz simétrica

La matriz simétrica es la matriz cuadrada A tal que $A = A^T$, ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

I.2.6 - Menor de un elemento de una matriz

Sea A una matriz cuadrada de orden n y a_{ik} un elemento de dicha matriz; se llama menor del elemento a_{ik} , al determinante de orden $n-1$ que resulta de suprimir en A la fila i y la columna k .

Ejemplo:

El menor correspondiente al elemento a_{21} de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 7 & -1 \end{bmatrix} \text{ es } M_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} = -20$$

I.2.7 - Cofactor

Se denomina cofactor ó complemento algebraico de un elemento a_{ik} de una matriz A , al menor M_{ik} correspondiente a dicho elemento, precedido del signo $(-1)^{i+k}$. El cofactor del elemento a_{ik} se denota C_{ik}

$$C_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$$

En el ejemplo anterior, el complemento algebraico o cofactor del elemento a_{21} es:

$$C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)^3 (-20) = 20$$

I.2.8 - Determinante

El determinante de una matriz cuadrada A de orden n es igual a la suma de los productos de los elementos de una cualquiera de sus columnas (o filas) por los correspondientes cofactores.

Ejemplo:

Para calcular el determinante

$$d = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -4 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Sumamos la segunda fila a la primera y la cuarta y obtenemos:

$$d = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Tomando entonces la primera columna queda:

$$d = (-1) \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Sumando 4 veces la última columna a la primera obtenemos:

$$d = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 11 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 11 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 44$$

I.2.9 - Matriz adjunta

La matriz adjunta de una matriz cuadrada A , es otra matriz cuadrada que denotamos A^+ y que es la matriz traspuesta de la matriz:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

donde c_{ij} son los cofactores de los elementos a_{ij} de la matriz A .

Ejemplo:

Para calcular la matriz adjunta de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

se calculan los cofactores de los elementos de la matriz A :

$$c_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7 \quad c_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 \quad c_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

$$c_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 9 \quad c_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad c_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

$$c_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -15 \quad c_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \quad c_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -5$$

La matriz adjunta de A es:

$$A^+ = \begin{bmatrix} 7 & 9 & -15 \\ -4 & -2 & 7 \\ 6 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

Observe que al ubicar en la matriz A^+ los cofactores de A, se hace simultáneamente la operación de transposición.

I.2.10 - Matriz inversa

Se introduce la notación $[A]^{-1}$ para expresar la matriz inversa de la cuadrada $[A]$. Teniendo en cuenta las reglas de la multiplicación, se puede escribir:

$$[A]^{-1} \cdot [A] = [A] \cdot [A]^{-1} = [I] \quad (1.9)$$

donde $[I]$ es la matriz unitaria.

Ejemplo:

Supongamos $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ Entonces:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E - 5 & -10 - 10 \\ C - 3 & -5 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 5 & 15 - 15 \\ -2 - 2 & -5 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Método de Gauss para calcular la matriz inversa

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n . Para calcular la matriz inversa de A , que denotaremos como A^{-1} , seguiremos los pasos siguientes:

Paso 1. Construir la matriz $n \times 2n$ $M = (A \ I)$ esto es, A está en la mitad izquierda de M y la matriz identidad I en la derecha.

Paso 2. Se deja tal y como está la primera fila de M , y debajo del primer término de la diagonal principal, a_{11} , que llamaremos *pivote*, ponemos ceros. Luego se opera como se indica en el ejemplo siguiente.

Ejemplo:

Consideremos una matriz 3×3 arbitraria

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Paso 1.

$$M = (A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) -$$

Paso 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} & a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13} & a_{11} & -a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12} & a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} & a_{11} & -a_{31} & 0 \end{array} \right)$$

El siguiente paso es igual que el anterior, pero esta vez se coge como pivote el segundo término de la diagonal principal.

Al llegar al último término de la diagonal, se procede igual que antes, pero poniendo los ceros encima del nuevo pivote. Se observa que al coger como pivote el último término de la diagonal, la matriz A se transforma en una matriz triangular.

Una vez realizados todos los pasos, la mitad izquierda de la matriz M se convierte en una matriz diagonal. En este momento hay que proceder a transformar, si es que no lo está, la mitad izquierda en la matriz identidad, dividiendo si fuera necesario las filas de M por un escalar.

Ejemplo:

Supongamos que queremos encontrar la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Primero construimos la matriz $M = (A \mid I)$,

$$M = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right), \text{ luego se coge como pivote } a_{22} = -1,$$

$$-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(-1) & | & 4 & -(-2) & 0 & -1 & -1 & -0 \end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

La mitad izquierda de M está en forma triangular, por consiguiente, A es invertible. Si hubiera quedado toda una fila con ceros en la mitad A de M , la operación habría terminado (A no es invertible).

A continuación, cogemos como pivote a_{33} , ponemos ceros encima de éste y seguimos operando hasta que nos quede una matriz diagonal.

$$-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -11 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & | & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ya que la matriz colocada en la mitad izquierda es diagonal, no hay que operar más. Transformamos la matriz diagonal en una matriz identidad; para ello hay que dividir la segunda fila entre -1:

$$-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz que ha quedado en la mitad derecha de M es precisamente la matriz inversa de A :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Para comprobar si el resultado es correcto, se procede a multiplicar AA^{-1} , teniendo que dar como resultado la matriz identidad I .

Comprobación:

$$AA^{-1} = I$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11+0+12 & 2+0-2 & 2+0-2 \\ -22+4+10 & 4+0-3 & 4-1-3 \\ -44-4+48 & 8+0-8 & 8+1-8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

CAPÍTULO II. TENSIONES

II.1 Introducción

En este capítulo se definirá las tensiones y se aclararán dos de sus más importantes aspectos: El estado tensional de un punto, que llevará al estudio de la transformación de las ecuaciones de las tensiones y, por otro lado, al estudio de las ecuaciones que definen la variación de los componentes de las tensiones en el espacio.

Se utilizará para el estudio detallado de la obtención de las ecuaciones, el caso bidimensional o plano, por motivos de simplicidad y claridad, ampliando luego lo estudiado al caso más general de tres dimensiones, la mayor parte de las veces sin necesidad de dar una explicación con el mismo detalle.

Se harán gráficos que ayuden a entender los conceptos y, siempre que sea posible, se utilizarán razonamientos más ingenieriles que puramente matemáticos, como en el establecimiento de las ecuaciones de equilibrio. De esta forma se pretende hacer más asequibles los conceptos que forman la base de la Teoría de la Elasticidad, cuya principal dificultad se centra en el *aparato matemático* que habitualmente se utiliza para explicar conceptos relativamente sencillos y hasta simplistas.

De momento no se mencionarán las ideas habituales de «Tensor de tensiones» o «Tensor de deformaciones», que se aclararán más adelante, cuando ya no puedan inducir a error o a confusión.

La teoría general de tensiones que se introducirá en este capítulo, se puede aplicar a cualquier continuo, tanto a sólidos elásticos o plásticos como a fluidos viscosos al margen de las propiedades mecánicas del material.

II.2 Fuerzas de masa, Fuerzas de superficie y Tensiones

Las fuerzas de masa están asociadas con el propio cuerpo en estudio y se distribuyen en toda la amplitud del mismo. No son consecuencia de un contacto directo con otros cuerpos. Se especifican en términos de **fuerzas por unidad de volumen** y entre ellas se pueden citar las fuerzas gravitacionales, las de inercia, las magnéticas, etc.

Las componentes de la intensidad de estas fuerzas según los ejes coordenados, se denominarán **F_x**, **F_y** y **F_z**.

Las fuerzas de superficie son una consecuencia del contacto físico entre dos cuerpos. Si se amplía el concepto se podría incluir en dicho concepto las fuerzas que una superficie imaginaria dentro de un cuerpo ejerce sobre la superficie adyacente, lo que resulta muy práctico para establecer ecuaciones de equilibrio y otras.

Sea un cuerpo como el que se representa en la figura 2.1.

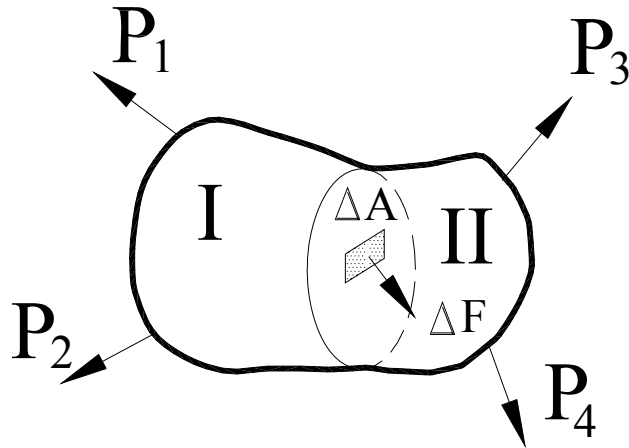


Fig. 2.1. Fuerzas de Superficie e Internas

Si el sistema está en equilibrio, las Fuerzas de Superficie P_1 y P_2 se mantienen en equilibrio con las fuerzas que la parte **II** del cuerpo ejerce sobre la parte **I**. Esta última fuerza, sin embargo, se reparte sobre toda la superficie *de corte*, de forma que cualquier área elemental ΔA está sometida a la fuerza ΔF . Por tanto, la fuerza «media» por unidad de área es

$$P_{media} = \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

La tensión en un punto se define como el valor límite de la fuerza por unidad de área, cuando ésta tiende a cero. Es decir:

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}$$

Debemos hacer notar que la fuerza dF , o lo que es lo mismo, la tensión p , **NO** está dirigida según una dirección preestablecida, como puede ser la normal al plano de la superficie.

Si consideramos el equilibrio de un cuerpo libre, en el que, en general, actúan tensiones en todas las superficies externas, tenemos que determinar la *fuerza* resultante de las tensiones actuando en cada superficie, así como las eventuales fuerzas de masa, a fin de expresar las condiciones de equilibrio.

Por otra parte, la tensión es un elemento diferencial de área, dA es un vector en la misma dirección que el vector de fuerza dF . Se puede decir que la tensión en un *plano determinado* es un vector, el «vector tensión». En el caso de que actúen diferentes tensiones en un *mismo* plano, la tensión resultante estará determinada por la suma de los vectores representativos de todas las tensiones. Análogamente, el vector tensión se puede descomponer en otros vectores, que, en el caso de elegir las direcciones de los ejes coordenados, serían las *componentes* del vector tensión.

Este concepto vectorial de la tensión *tiene que estar referido a un plano determinado*, ya que en caso de que se modifique el plano considerado, aunque englobe al punto en que hemos basado la reflexión anterior, la tensión, a su vez, será diferente. Si se quiere conocer la tensión en cualquier plano que pase por el punto considerado, ya no se podrá hablar de la tensión como una entidad

vectorial. En realidad, como se verá más adelante, la tensión se define por un tensor de segundo orden.

Sin embargo, es perfectamente lícito hablar del *estado tensional* de un punto, siempre que se sobreentienda que nuestra descripción permita el conocimiento de la tensión en todo plano que pase por el punto. Enseguida se verá que para poder tener ese conocimiento, es suficiente conocer la tensión sobre dos planos que pasen por el punto.

Resumiendo lo anterior, para definir totalmente el vector tensión, se tiene que especificar su magnitud, dirección y el plano sobre el que actúa. La perfecta definición se puede conseguir utilizando dos índices para sus componentes, por ejemplo, τ_{xy} o $\tau_{r\theta}$ así como el signo que sirva para determinar el sentido en que actúa un componente determinado.

En el caso general, existen dos formas de designar las componentes del vector tensión en forma adecuada: por un lado las componentes x , y y z y por otro las componentes *normal* y *tangencial*. Las componentes x , y y z de una tensión externa que actúan en el contorno del cuerpo las designaremos T_x^μ , T_y^μ y T_z^μ . El subíndice indica la *dirección* de la componente y el superíndice μ define el plano. Para designar tensiones *internas* en planos posibles, utilizaremos la notación p_x , p_y y p_z para las componentes del vector tensión. (Fig. 22)

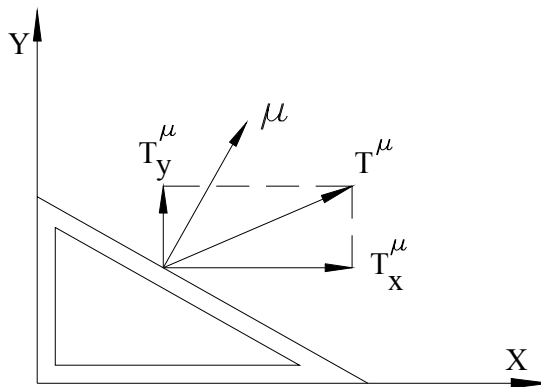


Fig. 2.2. Vector de tensiones externo y sus componentes

Las componentes normales y tangenciales se utilizan con más frecuencia y resultan más significativas. Se define por σ la componente perpendicular al plano sobre el que actúa. La tensión tangencial se representa por τ . Esta última se encuentra en la superficie del plano sobre el que actúa. En relación con la figura 2.3 en la que $\mathbf{p} = \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{A}}$, tenemos:

$$\mathbf{p}^2 = \sigma^2 + \tau^2$$

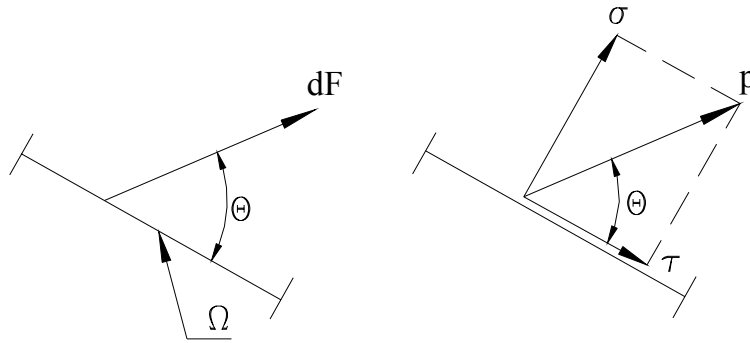


Fig. 2.3. Componentes normal y tangencial

Se va a generalizar todo lo anterior para el caso de considerar el espacio tridimensional. Se hará referencia en lo que sigue a la figura 2.4 en la que se han omitido las tensiones internas, ya que, de momento, se trata de establecer la nomenclatura a utilizar en lo que se refiere a tensiones, y que dicha nomenclatura quede clara y suficientemente justificada.

Se comenzará diciendo que se considerará un cuerpo libre, por ejemplo el paralelepípedo de la figura. Las tensiones normales que definen a los planos, se considera que tienen la dirección de dentro hacia afuera. Así, la cara lateral derecha del elemento corresponderá con el plano "X" positivo, puesto que dicha normal tiene el sentido del eje positivo de las X. El lateral izquierdo, sin embargo, será el plano "-X" puesto que su vector representativo, su normal, va en el sentido negativo del eje X.

Las componentes tangenciales que actúan en un plano, pueden tener una dirección cualquiera. Sin embargo, para establecer su sentido, se descompondrán en las dos direcciones de los otros dos ejes coordenados. La notación que se emplea para definir a estas tensiones consta de dos subíndices, como se ve en la figura. El primer subíndice indica el plano en el que actúa la tensión, y el segundo la dirección en la que actúa. Así, la expresión τ_{xy} indica la tensión tangencial que actúa sobre el plano X en la dirección del eje Y. Para las componentes normales, sólo se precisa de un subíndice, ya que el mismo especifica por un lado el plano sobre el que actúa y al mismo tiempo la dirección del eje que sigue. Por ello, una denominación como σ_x es suficiente para saber que se trata de la tensión normal al plano X y que su dirección es, por consiguiente, la del eje X.

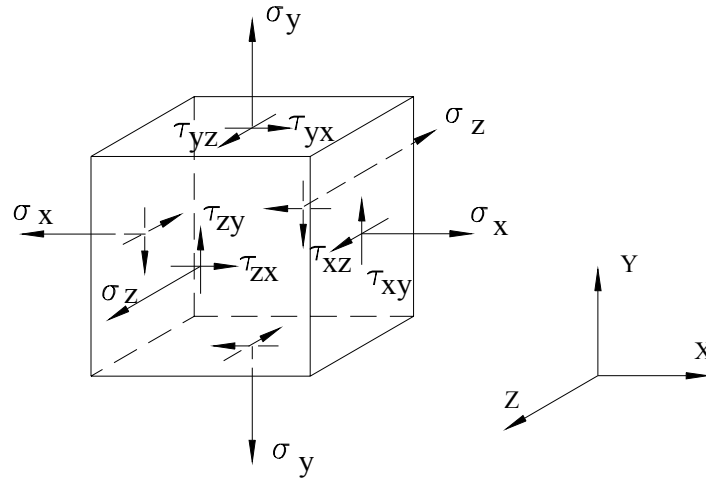


Fig. 2.4. Componentes tridimensionales

Finalmente, en los planos negativos, la convención seguida es que las tensiones que actúan en dichos planos en la dirección negativa de los ejes, son positiva. Si observamos la figura 1.4 se ve que todas las tensiones señaladas son positivas.

Las nueve tensiones conjuntamente forman el tensor de tensiones:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_X & \tau_{XY} & \tau_{XZ} \\ \tau_{YX} & \sigma_Y & \tau_{YZ} \\ \tau_{ZX} & \tau_{ZY} & \sigma_Z \end{bmatrix}$$

II.3 Tensión Uniforme (2-D)

Cuando un cuerpo se encuentra en un estado tal que la tensión es la misma en todos sus puntos, se dice que está en un estado de *tensión uniforme*. Las componentes de las tensiones son independientes de los puntos considerados, aunque seguirán dependiendo de la inclinación de los planos que se consideren.

Un cuerpo en estas condiciones no puede estar sometido a fuerzas de masa, ya que entonces la tensión variaría en función de la posición de los puntos considerados para poder mantener la situación de equilibrio.

El objetivo de esta sección es obtener las expresiones del vector de tensiones —o de sus componentes— que actúen sobre un plano arbitrario cualquiera que corte al cuerpo, conociendo las tensiones sobre los planos correspondientes a los ejes coordenados. Además se determinará la orientación de ciertos planos de especial significación, por ejemplo el que contenga las mínimas tensiones normales y máximas tangenciales o al revés.

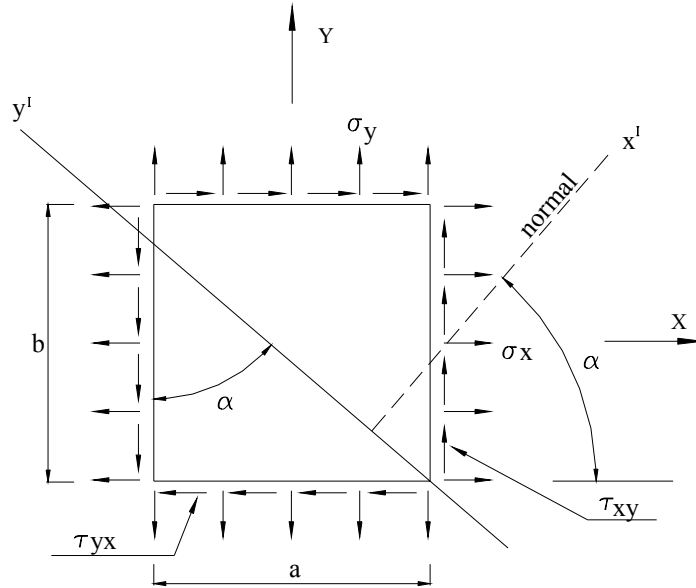


Fig. 2.5. Estado de tensiones uniforme (2-D)

Se va a hacer el estudio en un plano perpendicular al eje Z. Además, se supondrá que se verifica: $\tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$. Aunque la tensión σ_z no es necesariamente nula, no interviene en lo que sigue.

En consecuencia con lo anterior bastará establecer las ecuaciones de equilibrio en las direcciones X e Y. En la figura 2.5 se pueden ver los sentidos positivos considerados así como las incógnitas empleadas. Si se supone que el cuerpo —que ya se ha dicho que puede ser finito o infinitesimal— de dicha figura tiene un grosor unitario según la dirección Z y se toma momentos respecto a la esquina inferior izquierda, se ve que:

$$(\sigma_x b) \left(\frac{b}{2} \right) - (\sigma_x b) \left(\frac{b}{2} \right) + (\sigma_y a) \left(\frac{a}{2} \right) - (\sigma_y a) \left(\frac{a}{2} \right) - (\tau_{xy} b) a + (\tau_{yx} a) b = 0$$

Y como $a \times b$ no es cero, se deduce:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (2.1)$$

Este resultado es conocido y se verifica con carácter general para aquellos planos que sean perpendiculares. (Fig. 2.6)

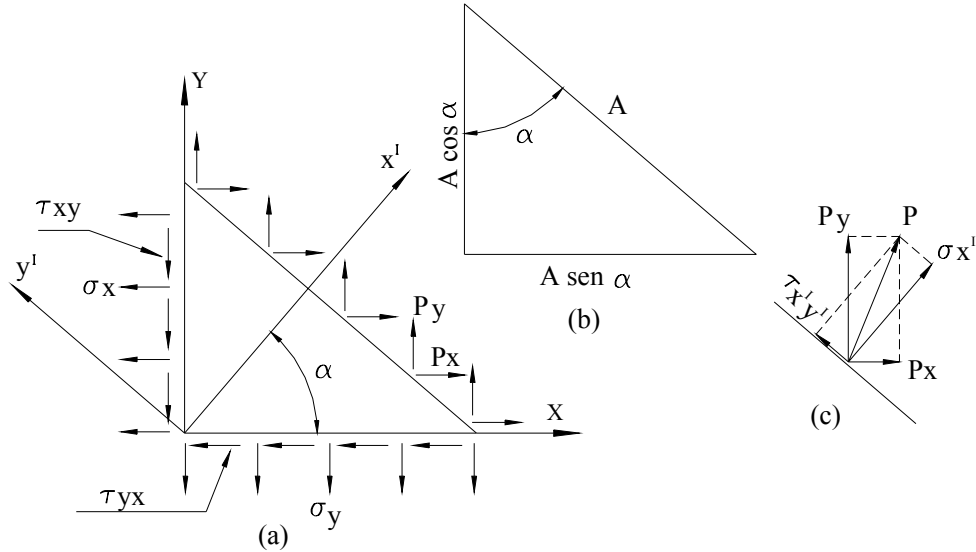


Fig. 2.6. Componentes de las Tensiones sobre X'

A continuación, se va a considerar la suma de fuerzas según la dirección del eje X, en el cuerpo libre de la figura 2.6. Llamando a las componentes X e Y de la tensión sobre el plano X', \mathbf{p}_x y \mathbf{p}_y , a la superficie inclinada "A" y usando la Ec.(2.1), por equilibrio estático de fuerzas se tendrá:

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{F}_x &= 0 \\ \mathbf{p}_x \mathbf{A} - \sigma_x \mathbf{A} \cos \alpha - \tau_{yx} \mathbf{A} \operatorname{sen} \alpha &= 0 \\ \mathbf{p}_x &= \sigma_x \cos \alpha + \tau_{yx} \operatorname{sen} \alpha \end{aligned} \quad (2.2)$$

Análogamente, si se establece el equilibrio según la dirección Y, se tendrá:

$$\mathbf{p}_y = \sigma_y \operatorname{sen} \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha \quad (2.3)$$

La tensión normal sobre el plano X' es la suma de las proyecciones de \mathbf{p}_x y \mathbf{p}_y en la dirección X'. Por tanto:

$$\sigma_{x'} = \mathbf{p}_x \cos \alpha + \mathbf{p}_y \operatorname{sen} \alpha \quad (2.4)$$

Y usando las Ecs.(2.2) y (2.3), lo anterior toma la forma:

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \operatorname{sen}^2 \alpha + 2\tau_{xy} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \quad (2.5)$$

y análogamente:

$$\tau_{x'y'} = \mathbf{p}_y \cos \alpha - \mathbf{p}_x \operatorname{sen} \alpha$$

es decir,

$$\tau_{x'y'} = (\sigma_y - \sigma_x) \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) \quad (2.6)$$

La tensión σ_Y se encuentra de forma simple, sustituyendo $\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ por α en la Ec.(2.5). Con ello se obtiene la relación:

$$\sigma_{Y'} = \sigma_X \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \sigma_Y \sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + 2\tau_{XY} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

y como

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha ; \quad \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \alpha$$

se obtiene finalmente:

$$\sigma_{Y'} = \sigma_X \sin^2 \alpha + \sigma_Y \cos^2 \alpha - 2\tau_{XY} \sin \alpha \cos \alpha \quad (2.7)$$

Las ecuaciones (2.5), (2.6) y (2.7) representan las ecuaciones de transformación de tensiones que se pueden utilizar para calcular $\sigma_{X'}$, $\sigma_{Y'}$ y $\tau_{X'Y'}$ si los correspondientes valores de σ_X , σ_Y , τ_{XY} , además, el ángulo α , son conocidos. Es decir, en total se tendrán siete posibles incógnitas. En general, una vez conocidos cuatro de estos valores, el estado tensional queda totalmente definido, ya que los valores sobre otros planos dependerán exclusivamente del valor del ángulo α .

Finalmente, se hará notar que de las ecs. (2.5) y (2.7) se obtiene:

$$\sigma_{X'} + \sigma_{Y'} = \sigma_X + \sigma_Y = \text{Constante}$$

Por tanto, la suma de las tensiones normales sobre dos planos perpendiculares, es una constante.

II.4 Tensiones Principales

Antes de entrar en este nuevo tema, mencionaremos el interés que tiene escribir las ecs. (2.5), (2.6) y (2.7) en función del valor de 2α . Recordando las fórmulas trigonométricas:

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \\ \cos^2 \alpha &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \end{aligned} \quad (2.8)$$

encontramos fácilmente las igualdades siguientes:

$$\begin{aligned} \sigma_{X'} &= \frac{\sigma_X + \sigma_Y}{2} + \frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{XY} \sin 2\alpha \\ \sigma_{Y'} &= \frac{\sigma_X + \sigma_Y}{2} - \frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{XY} \sin 2\alpha \end{aligned} \quad (2.9)$$

y también:

$$\tau_{X'Y'} = \frac{\sigma_Y - \sigma_X}{2} \sin 2\alpha + \tau_{XY} \cos 2\alpha \quad (2.10)$$

Para encontrar la orientación de los planos de máxima y mínima tensión normal, se deriva una de las ecuaciones (2.9) con respecto a α e igualando a cero el resultado. Se obtiene:

$$\frac{d\sigma_{x'}}{d\alpha} = -(\sigma_x - \sigma_y)\text{sen}2\alpha + 2\tau_{xy} \cos 2\alpha = 0 \quad (2.11)$$

es decir:

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (2.12)$$

que es la ecuación que define, como se verá, los planos de las *tensiones principales*.

La ecuación (2.12) tiene dos raíces. Esas dos raíces de 2α corresponden a ángulos separados 180° —por ser las tangentes iguales— y por tanto, los valores de α diferirán en 90° , lo que confirma que los planos de tensiones normales máximas y mínimas son perpendiculares.

Si se comparan las ecuaciones (2.10) y (2.11) se ve que en esos planos las tensiones tangenciales se anulan. Los planos en los que las tensiones tangenciales se anulan se denominan *planos principales* y las tensiones normales en ellos, *tensiones principales* como ya se había anticipado. A continuación, se va a deducir la forma de calcular directamente el valor de las tensiones principales. Partiendo de la ec.(2.12), se ve que el seno y el coseno del ángulo 2α se puede expresar en la forma:

$$\text{sen}2\alpha = \pm \frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{4\tau_{xy}^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}}$$

$$\text{cos}2\alpha = \pm \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{4\tau_{xy}^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}}$$

Sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones (2.9) y teniendo en cuenta que el seno y el coseno son ambos, o bien positivos o bien negativos, se encuentra finalmente:

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.13)$$

que son las expresiones del valor de las tensiones principales. A fin de determinar el valor de 2α obtenido en la ec. (2.12) que corresponde a σ_1 o a σ_2 , es necesario considerar los signos del numerador y denominador de $\frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)}$.

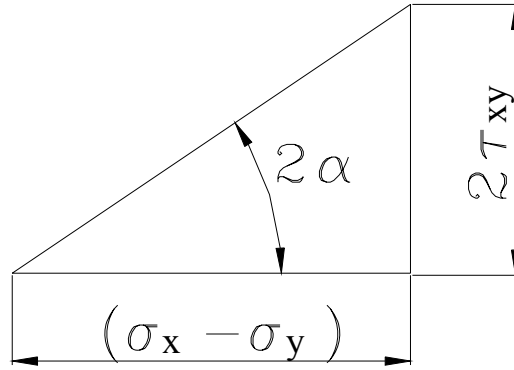


Fig. 2.7. Dirección de las Tensiones Principales

Primer caso: El valor de 2α correspondiente a la dirección de σ_1 -(Fig. 2.7)-- está comprendido entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ si tanto $2\tau_{xy}$ como $(\sigma_x - \sigma_y)$ son positivos. Es decir, considerando todos los casos, se tendría:

1. $0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2}$, si $\tau_{xy} > 0$ y $(\sigma_x - \sigma_y) > 0$
2. $\frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi$, si $\tau_{xy} > 0$ y $(\sigma_x - \sigma_y) < 0$
3. $\pi < 2\alpha < \left(\frac{3\pi}{2}\right)$, si $\tau_{xy} < 0$ y $(\sigma_x - \sigma_y) < 0$
4. $\left(\frac{3\pi}{2}\right) < 2\alpha < 2\pi$, si $\tau_{xy} < 0$ y $(\sigma_x - \sigma_y) > 0$

En cada caso α es el ángulo entre el eje X y la dirección de σ_1 , es decir σ_{max} .

A continuación se van a determinar los planos de máxima tensión tangencial. Derivando la expresión para $\tau_{x'y'}$, Ec.(2.10) con respecto a alfa y haciéndola igual a cero:

$$\frac{d\tau_{x'y'}}{d\alpha} = (\sigma_y - \sigma_x)\cos 2\alpha - 2\tau_{xy}\text{sen}2\alpha = 0$$

y ordenando:

$$\tan 2\alpha_1 = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2\tau_{xy}} \quad (2.14)$$

Las dos raíces de esta ecuación también definen un conjunto de planos perpendiculares, de forma que las tensiones tangenciales en esos planos son iguales.

Si se observa los valores de $\tan 2\alpha$ dados por las ecs.(2.12) y (2.14), se aprecia que dichos valores son recíprocamente negativos el uno del otro, de forma que los resultados para 2α de esas

dos ecuaciones se encuentran separados por 90 grados, así los correspondientes planos, se encuentran separados por 45 grados.

La importante conclusión es que los planos de máximas tensiones tangenciales se encuentran a 45 grados de los planos principales. De las ecs. (2.10) y (2.14) se obtiene:

$$\tau_{x'y'}_{\max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.15)$$

que da los valores de las máximas tensiones tangenciales en el plano definido por el valor de α anterior.

Es frecuente automatizar todo este proceso a través del conocido método denominado *El Círculo de Mohr*, del que da una completa explicación a seguir.

II.5 Círculo de Mohr

Las ecuaciones (2.9) y (2.10) obtenidas anteriormente son las ecuaciones paramétricas de un círculo. Esto significa que, si se escoge un conjunto de ejes rectangulares y se grafica un punto M de abscisa $\sigma_{x'}$ y ordenada $\tau_{x'y'}$ para cualquier valor dado del parámetro α , todos los puntos obtenidos caerán en un círculo. Para establecer esta propiedad se eliminará α de las ecuaciones (2.9) y (2.10); primero transponiendo $(\sigma_x + \sigma_y)/2$ en la ec. (2.9) y elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación, luego elevando al cuadrado ambos miembros de la ec. (2.10), y finalmente sumando miembro a miembro las dos ecuaciones obtenidas de esa forma. Se tiene:

$$\left(\sigma_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad (2.16)$$

Haciendo

$$\sigma_{PROM} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad y \quad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.17)$$

escribiendo la identidad (2.16) en la forma

$$\left(\sigma_{x'} - \sigma_{PROM}\right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2 \quad (2.18)$$

que es la ecuación de un círculo de radio R con centro en el punto C de abscisa σ_{prom} y ordenada 0 (Fig. 2.8). Se puede observar que, debido a la simetría del círculo con respecto al eje horizontal, pudiera haberse obtenido el mismo resultado si, en vez de graficar el punto M se hubiese graficado un punto N de abscisa $\sigma_{x'}$ y ordenada $-\tau_{x'y'}$ (Fig. 2.9). Esta propiedad se usará más adelante.

Los dos puntos A y B donde el círculo interseca el eje horizontal (Fig. 2.8) son de especial interés: el punto A corresponde al valor máximo de esfuerzo normal, mientras que el punto B corresponde a su valor mínimo. Además, ambos puntos corresponden a un valor cero del esfuerzo cortante.

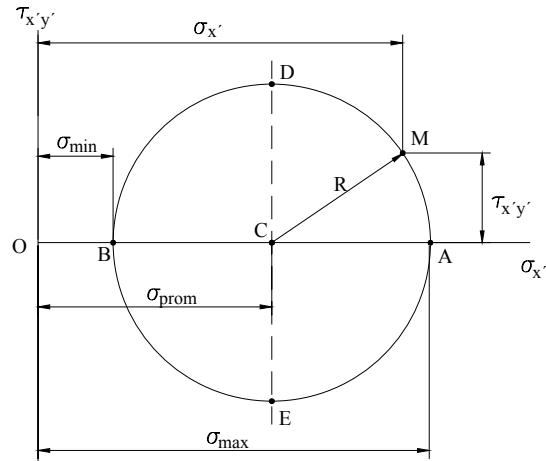


Fig. 2.8

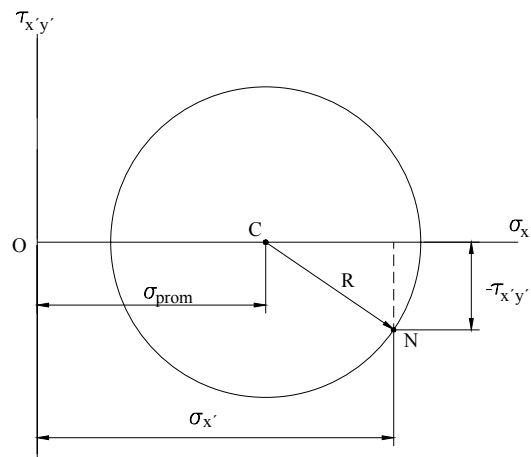


Fig. 2.9

El círculo explicado anteriormente fue presentado primero por el ingeniero alemán Otto Mohr (1835-1918) y se conoce como el *círculo de Mohr* para el esfuerzo plano. Como se verá, este círculo puede usarse para obtener un método alternativo para la solución de varios de los problemas considerados en las secciones anteriores. Este método se basa en sencillas consideraciones geométricas y no requiere del uso de fórmulas especializadas.

II.6 Tensión en un punto

En las secciones II.3 y II.4 se han establecido las ecuaciones de las transformaciones entre las tensiones actuando sobre un cuerpo en un estado de tensión *uniforme*. Ahora se verá que esas mismas relaciones representadas por el conjunto de ecuaciones de la (2.1) a la (2.15) también se

aplican en cada punto de un cuerpo bajo una distribución de tensiones NO uniforme, incluyendo las debidas a fuerzas de masa.

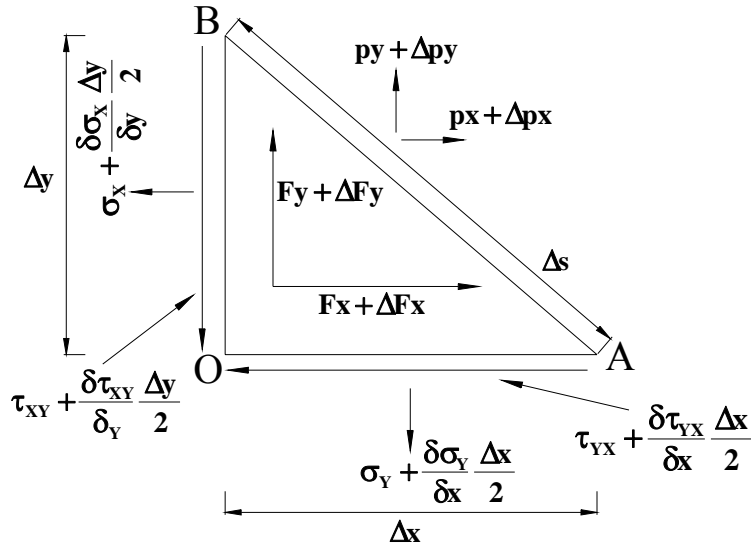


Fig. 2.10. Estado No uniforme de tensiones

Considérese el estado tensional en el punto "O" de la figura 2.10. En dicho punto las tensiones son σ_x , σ_y y τ_{xy} . En un plano paralelo al "AB" que pase por el mismo punto, se denominan p_x y p_y y finalmente, las fuerzas de masa en O son F_x y F_y . Las dimensiones del elemento representado, Δx , Δy y Δs se suponen pequeñas. La tensión normal al plano OB en el punto B y debido a la distribución NO uniforme de las tensiones, es $\sigma_x + \left(\frac{\delta\sigma_x}{\delta y}\right)(\Delta y)$. Por tanto, la tensión media en OB es $\sigma_x + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta\sigma_x}{\delta y}\right)(\Delta y)$. Análogamente se obtendrían el resto de los valores representados en la figura 2.10.

Ahora, si se establece el equilibrio de fuerzas en la dirección X de acuerdo con la figura, se tendrá:

$$(p_x + \Delta p_x)\Delta s = \left(\sigma_x + \frac{\delta\sigma_x}{\delta y} \frac{\Delta y}{2}\right)\Delta y + \left(\tau_{yx} + \frac{\delta\tau_{yx}}{\delta x} \frac{\Delta x}{2}\right)\Delta x - (F_x + \Delta F_x) \frac{\Delta x \Delta y}{2}$$

que, dividiendo por Δs se convierte en:

$$(p_x + \Delta p_x) = \left(\sigma_x + \frac{\delta\sigma_x}{\delta y} \frac{\Delta y}{2}\right)\cos\alpha + \left(\tau_{yx} + \frac{\delta\tau_{yx}}{\delta x} \frac{\Delta x}{2}\right)\text{sen}\alpha - (F_x + \Delta F_x) \frac{\Delta x \cos\alpha}{2}$$

pero cuando Δx y Δy tienden a cero, Δp_x y ΔF_x tienden a anularse, quedando la fórmula ya conocida:

$$p_x = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \operatorname{sen} \alpha$$

De la misma forma, estableciendo el equilibrio según el eje Y se llegaría a:

$$p_y = \sigma_y \operatorname{sen} \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha$$

Se ve que las expresiones para p_x y p_y son idénticas a las reflejadas en las ecs. (2.2) y (2.3).

En la próxima sección se verá que la relación $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ es igualmente válida para una distribución de tensiones NO uniforme. De esto se deduce que las ecs. (2.1) a (2.15) obtenidas, se aplican igualmente al analizar el estado de tensiones de un punto. Sin embargo, se debe decir que esta formulación no es válida para el análisis del estado tensional de un cuerpo en un caso de distribución NO uniforme. Lo que sí es correcto es que, una vez conocido el estado tensional de un cuerpo, las ecuaciones de transformación de las tensiones se utilicen para definir las componentes de las tensiones en cualquier plano, en un punto dado.

II.7 Ecuaciones de equilibrio

Hasta ahora, se han considerado sólo relaciones entre tensiones en condiciones de tensión *uniforme* o tensiones en un punto determinado. En general, las tensiones en un cuerpo varían en cada punto y esa variación debe satisfacer las condiciones de equilibrio de la Estática. Las expresiones resultantes relacionan las derivadas espaciales de los distintos componentes de las tensiones y se denominan *Ecuaciones Diferenciales de Equilibrio*.

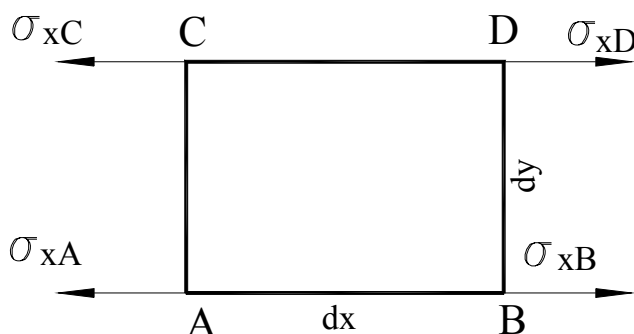


Fig. 2.11. Variación de Tensión en un Elemento

Si la tensión normal en un punto es, por ejemplo, σ_x , a una distancia positiva dx en el sentido del eje X, valdrá $\left(\frac{\delta \sigma_x}{\delta x}\right) dx$ en la que la derivada parcial representa el *cambio infinitesimal* o tendencia al cambio de la tensión respecto a la dirección ver (figura 2.10). La tensión considerada, normalmente, será también función de los valores de Y y de Z . En cualquier caso, se supone que las componentes de las tensiones y sus derivadas primeras son funciones continuas.

La tensión en B viene dada por tanto por:

$$\sigma_{xB} = \sigma_x + \frac{\delta \sigma_x}{\delta x} dx \quad (2.19)$$

y, análogamente, la tensión en C y en D será:

$$\sigma_{XC} = \sigma_x + \frac{\delta\sigma_x}{\delta y} dy$$

$$\sigma_{XD} = \sigma_x + \frac{\delta\sigma_{xB}}{\delta y} dy$$

ya que " σ_x " es constante entre B y D. Si se utiliza la ec. 2.19 y se aplica a la última de las igualdades, se obtiene:

$$\sigma_{XD} = \sigma_x + \frac{\delta\sigma_x}{\delta x} dx + \frac{\delta}{\delta y} \left(\sigma_x + \frac{\delta\sigma_x}{\delta x} dx \right) dy$$

o simplificando:

$$\sigma_{XD} = \sigma_x + \frac{\delta\sigma_x}{\delta x} dx + \frac{\delta\sigma_x}{\delta y} dy \quad (2.20)$$

en donde se ha quitado el término de segundo orden —producto de dx por dy — por ser despreciable en un orden de magnitud. Teniendo en cuenta este punto, se ve que la tensión en una superficie del elemento infinitesimal varía linealmente.

La fuerza en la sección media de la cara izquierda del elemento, será por tanto la semisuma de las tensiones en A y en C multiplicadas por la superficie de la cara considerada, quedando:

$$P_1 = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_x + \frac{\delta\sigma_x}{\delta y} dy}{2} \right) dy$$

y simplificando, se obtiene:

$$P_1 = \sigma_x dy + \frac{1}{2} \frac{\delta\sigma_x}{\delta y} dy^2$$

De la misma manera se calculan los esfuerzos en la cara de la derecha, obteniendo:

$$P_2 = \left(\frac{\sigma_x + \frac{\delta\sigma_x}{\delta x} dx + \sigma_x + \frac{\delta\sigma_x}{\delta x} dx + \frac{\delta\sigma_x}{\delta y} dy}{2} \right) dy$$

o lo que es lo mismo:

$$P_2 = \sigma_x dy + \frac{\delta\sigma_x}{\delta x} dx dy + \frac{1}{2} \frac{\delta\sigma_x}{\delta y} dy^2$$

Por tanto la fuerza resultante sobre el elemento será:

$$\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1 = \frac{\delta\sigma_x}{\delta x} \mathbf{dx dy}$$

Si se hubiera supuesto que la distribución de tensiones es uniforme en la cara considerada e igual a la tensión media obtenida, se habría obtenido el mismo resultado, y también sería igual el momento creado por ambos sistemas. Por tanto, en lo que sigue, se va a asumir esa suposición que sin quitar generalidad al estudio, lo hace más sencillo. Se representará la tensión uniforme en cada cara por un vector aplicado en el centro de la cara.

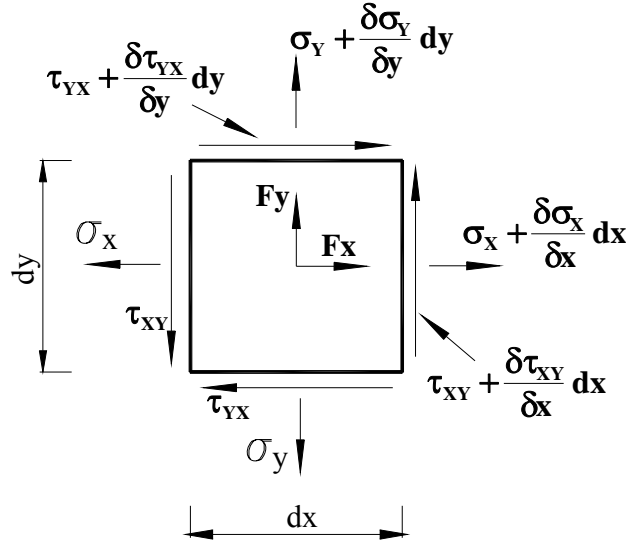


Fig. 2.12. Valores medios de la tensión

Lo anterior está reflejado en la figura 2.12, que servirá de base para el estudio que sigue. Se supondrá que los valores de las tensiones no nulas y las fuerzas exteriores son independientes de Z . A un estado de tensiones como el que se acaba de definir se le denomina un estado de *tensión plana*. Si se establece el equilibrio de fuerzas en el sentido del eje X , considerando un valor unitario de Z , se tendrá:

$$\mathbf{F_x dx dy} + \left[\sigma_x + \frac{\delta\sigma_x}{\delta x} \mathbf{dx} \right] \mathbf{dy} - \sigma_x \mathbf{dy} + \left[\tau_{yx} + \frac{\delta\tau_{yx}}{\delta y} \mathbf{dy} \right] \mathbf{dx} - \tau_{yx} \mathbf{dx} = 0 \quad (2.21)$$

que una vez simplificada se convierte en:

$$\left(\frac{\delta\sigma_x}{\delta x} + \frac{\delta\tau_{yx}}{\delta y} + \mathbf{F_x} \right) \mathbf{dx dy} = 0$$

Como el producto “ $\mathbf{dx dy}$ ” no es cero, debe serlo la expresión entre corchetes, por lo que, finalmente, se obtiene:

$$\frac{\delta\sigma_x}{\delta x} + \frac{\delta\tau_{yx}}{\delta y} + \mathbf{F_x} = 0$$

Si se hace el mismo razonamiento para la dirección del eje Y:

$$\frac{\delta\sigma_Y}{\delta y} + \frac{\delta\tau_{XY}}{\delta x} + F_Y = 0$$

Estas ecuaciones de equilibrio se pueden generalizar considerando el equivalente en tres dimensiones al esquema de la figura 2.12, con el resultado siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\delta\sigma_X}{\delta x} + \frac{\delta\tau_{YX}}{\delta y} + \frac{\delta\tau_{ZX}}{\delta z} + F_X &= 0 \\ \frac{\delta\sigma_Y}{\delta y} + \frac{\delta\tau_{XY}}{\delta x} + \frac{\delta\tau_{ZY}}{\delta z} + F_Y &= 0 \\ \frac{\delta\sigma_Z}{\delta z} + \frac{\delta\tau_{XZ}}{\delta x} + \frac{\delta\tau_{YZ}}{\delta y} + F_Z &= 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

En consecuencia, para un cuerpo en equilibrio las tensiones varían de punto a punto según las ecuaciones anteriores.

Se puede aplicar una tercera condición de equilibrio a las tensiones de la figura 2.12. Se refiere a aquella que se expresa como $\sum \mathbf{M} = \mathbf{0}$. Si se toma momentos respecto a la esquina inferior izquierda de dicha figura, se tendrá:

$$\left(\frac{\delta\sigma_Y}{\delta y} dydx \right) \frac{dx}{2} - \left(\frac{\delta\sigma_X}{\delta x} dx dy \right) \frac{dy}{2} + \left(\tau_{XY} + \frac{\delta\tau_{XY}}{\delta x} \delta x \right) dydx - \left(\tau_{YX} + \frac{\delta\tau_{YX}}{\delta y} \delta y \right) dx dy + F_Y dx dy \frac{dx}{2} - F_X dy dx \frac{dy}{2} = 0$$

Despreciando los términos que contengan triples productos de \mathbf{dx} y \mathbf{dy} , la ecuación anterior se convierte en: $\tau_{XY} = \tau_{YX}$.

Considerando el caso tridimensional y tomando momentos respecto a cada uno de los ejes se vería que:

$$\tau_{XY} = \tau_{YX} \quad \tau_{XZ} = \tau_{ZX} \quad \tau_{YZ} = \tau_{ZY} \quad (2.23)$$

por lo que se puede decir que sólo seis de las nueve componentes de la tensión en un punto son independientes.

II.8 Tensión en un punto en 3-D

En la sección II.5 se consideró el estado de tensiones en un punto tratando sólo con el equilibrio en las direcciones X e Y. Se encontraron cuatro componentes de las tensiones, de las que sólo tres eran independientes. En el caso tridimensional, existen nueve componentes de las tensiones, de las que seis son independientes. Las ecuaciones correspondientes al estado tridimensional, se

pueden obtener de la misma forma que se ha hecho para el estado plano. En esta sección se tratará brevemente este tema, fijándose la idea de darle un carácter más ingenieril que matemático. Más adelante, se tratará con todo el rigor necesario.

Se considerarán los componentes de las tensiones en el espacio, tal y como se muestra en la figura 2.13, para determinar las tensiones sobre otro plano del elemento dado. Nuestro objetivo es calcular las componentes sobre un plano inclinado \mathbf{x}^I —plano ABC de la figura— siendo conocidos los valores de las tensiones en los planos $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$, así como la dirección \mathbf{x}^I .

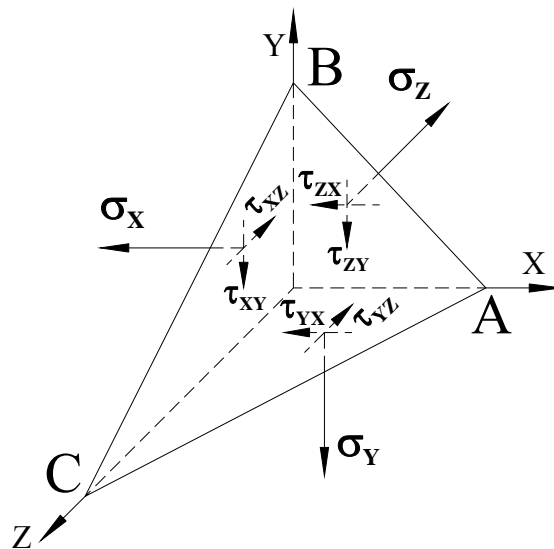


Fig. 2.13. Tensiones en 3-D

La dirección del plano ABC —ver figura 2.13— vendrá definida por los ángulos que su normal forma con los ejes X,Y,Z. Se llamará a los cosenos de esos ángulos: \mathbf{a}_{11} , \mathbf{a}_{21} y \mathbf{a}_{31} , respectivamente. Se puede demostrar que el área del triángulo AOC de la figura 2.14 en el plano Y está relacionada con el área de ABC por:

$$\mathbf{A}_{AOC} = \mathbf{A}_{ABC} \cos(\mathbf{y}, \mathbf{x}^I) = \mathbf{A} \mathbf{a}_{21}$$

y análogamente se tendrá:

$$\mathbf{A}_{AOB} = \mathbf{A} \mathbf{a}_{31} \quad \mathbf{A}_{BOC} = \mathbf{A} \mathbf{a}_{11} \quad (2.24)$$

donde «A» es el área del triángulo ABC.

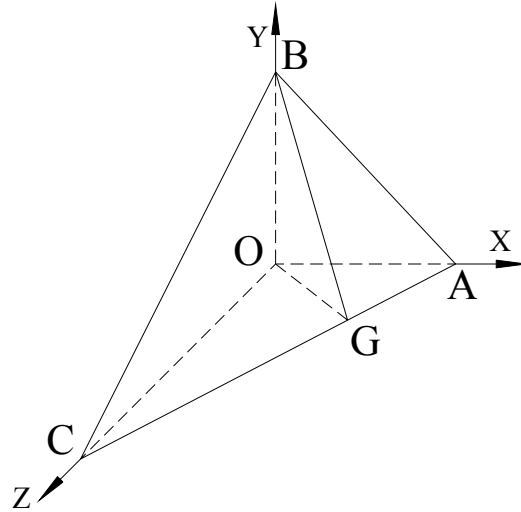


Fig. 2.14. Proyección de las áreas

Se puede decir de forma generalizada que el área del triángulo proyectado sobre el plano coordenado es igual al área del triángulo original, multiplicado por el coseno del ángulo que forman sus normales.

LLamando —como siempre— \mathbf{P}_x , \mathbf{P}_y , \mathbf{P}_z a las componentes del vector tensión en el plano definido por \mathbf{x}^I , estableciendo el equilibrio de fuerzas según cada eje y fijándose en las ecuaciones 2.23 se obtendrá:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= \sum F_y = \sum F_z = 0 \\ P_x &= \sigma_x a_{11} + \sigma_y a_{21} + \tau_{zy} a_{31} \\ P_y &= \tau_{xy} a_{11} + \tau_{yx} a_{21} + \tau_{zx} a_{31} \\ P_z &= \tau_{xz} a_{11} + \tau_{zy} a_{21} + \sigma_z a_{31} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Recordando que la tensión referida a una superficie determinada es un vector, se pueden calcular sus componentes en cualquier dirección, sumando las componentes sobre X,Y,Z, en esa dirección. La tensión normal σ_{x^I} se puede encontrar proyectando \mathbf{P}_x , \mathbf{P}_y y \mathbf{P}_z en la dirección de \mathbf{x}^I y sumando. Utilizando las ecs. 2.24, se tiene:

$$\sigma_{x^I} = \sigma_x a_{11}^2 + \sigma_y a_{21}^2 + \sigma_z a_{31}^2 + 2\tau_{xy} a_{11} a_{21} + 2\tau_{yz} a_{21} a_{31} + 2\tau_{zx} a_{31} a_{11} \quad (2.25)$$

Y la tensión tangencial en el mismo plano, vendrá dada por:

$$\tau^2 = \mathbf{p}^2 - \sigma_{x^I}^2 \quad (2.26)$$

donde: $\mathbf{p}^2 = \mathbf{p}_x^2 + \mathbf{p}_y^2 + \mathbf{p}_z^2$.

La ec. 2.26 da la magnitud total de la tensión tangencial sobre el plano \mathbf{x}^I . Si es preciso conocer también la dirección, es necesario introducir un sistema ortogonal de coordenadas, $\mathbf{x}^I, \mathbf{y}^I, \mathbf{z}^I$, y como \mathbf{x}^I es normal al plano ABC, \mathbf{y}^I y \mathbf{z}^I deben estar en dicho plano. Se definirán las direcciones de este nuevo sistema mediante la tabla siguiente:

Tabla de Cosenos
Directores

	\mathbf{x}^I	\mathbf{y}^I	\mathbf{z}^I
x	a_{11}	a_{12}	a_{13}
y	a_{21}	a_{22}	a_{23}
z	a_{31}	a_{32}	a_{33}

donde a_{21} es el coseno del ángulo entre \mathbf{x}^I e \mathbf{y} , etc. Proyectando $\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y, \mathbf{p}_z$ en la dirección \mathbf{y}^I , se tiene:

$$\begin{aligned} \tau_{x^I y^I} = & \sigma_X a_{11} a_{12} + \sigma_Y a_{21} a_{22} + \sigma_Z a_{31} a_{32} + \tau_{XY} (a_{11} a_{22} + a_{21} a_{12}) + \\ & + \tau_{YZ} (a_{21} a_{32} + a_{31} a_{22}) + \tau_{ZX} (a_{31} a_{12} + a_{11} a_{32}) \end{aligned} \quad (2.27)$$

e igualmente, proyectando en la dirección \mathbf{z}^I :

$$\begin{aligned} \tau_{x^I z^I} = & \sigma_X a_{11} a_{13} + \sigma_Y a_{21} a_{23} + \sigma_Z a_{31} a_{33} + \tau_{XY} (a_{11} a_{23} + a_{21} a_{13}) + \\ & + \tau_{YZ} (a_{21} a_{33} + a_{31} a_{23}) + \tau_{ZX} (a_{31} a_{13} + a_{11} a_{33}) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Las otras componentes de las tensiones correspondientes a los planos normales a \mathbf{y}^I y \mathbf{z}^I se pueden calcular haciendo que la normal al plano ABC esté alineada con estos valores. Más sencillo sin embargo es hacer una permutación cíclica en las ecs. 2.24, 2.25 y 2.26.

Es conveniente llamar la atención sobre el hecho de que los nueve cosenos directores no son independientes, ya que $\mathbf{x}^I, \mathbf{y}^I, \mathbf{z}^I$ son ortogonales y además los tres cosenos directores de una dirección en el espacio, no son independientes sino que están relacionados entre sí. Las siguientes relaciones se cumplen para los cosenos directores:

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 &= 1 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 &= 1 \\ a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 &= 1 \\ a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22} + a_{31} a_{32} &= 0 \\ a_{12} a_{13} + a_{22} a_{23} + a_{32} a_{33} &= 0 \\ a_{11} a_{13} + a_{21} a_{23} + a_{31} a_{33} &= 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Así, se ve que en la tabla de los cosenos directores la suma de los cuadrados de cualquier columna es igual a la unidad y que la suma de los productos de los cosenos adyacentes en dos columnas cualesquiera, es cero. Lo mismo ocurre con las filas, aunque en este caso esas relaciones no son independientes de las ecs. 2.29

Más adelante se verá que en un estado de tensión tridimensional en un punto, existen siempre tres planos principales, mutuamente perpendiculares, en los que las tensiones tangenciales se anulan y las normales toman valores fijos. Para calcular la orientación de estos planos, se deriva la ec. 2.26 respecto de \mathbf{a}_{11} y de \mathbf{a}_{21} , teniendo en cuenta que \mathbf{a}_{11} , \mathbf{a}_{21} y \mathbf{a}_{31} no son independientes ya que la suma de sus cuadrados es la unidad, o expresado de otra forma: $\mathbf{a}_{31}^2 = \mathbf{1} - \mathbf{a}_{11}^2 - \mathbf{a}_{21}^2$. Igualando las ecuaciones de las derivadas a cero, se obtienen las relaciones siguientes:

$$\frac{a_{11}\sigma_X + a_{21}\tau_{XY} + a_{31}\tau_{XZ}}{a_{11}} = \frac{a_{11}\tau_{XY} + a_{21}\sigma_Y + a_{31}\tau_{YZ}}{a_{21}} = \frac{a_{11}\tau_{XZ} + a_{21}\tau_{YZ} + a_{31}\sigma_Z}{a_{31}} \quad (2.30)$$

Viendo las ecs. 2.24 se ve que las ecs. 2.30 se convierten en:

$$\frac{\mathbf{p}_X}{\mathbf{a}_{11}} = \frac{\mathbf{p}_Y}{\mathbf{a}_{21}} = \frac{\mathbf{p}_Z}{\mathbf{a}_{31}} \quad (2.31)$$

lo que pone de manifiesto que en un plano en que la tensión normal toma un valor fijo, las tangenciales se anulan, ya que el vector de tensiones y la normal al plano son paralelos.

Por otro lado, tenemos que $\sigma_P = \frac{\mathbf{p}_X}{\mathbf{a}_{11}}$ donde σ_P representa el valor «fijo» de la tensión normal

$\sigma_{X'}$ y se puede escribir:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{11}(\sigma_X - \sigma_P) + \mathbf{a}_{21}\tau_{XY} + \mathbf{a}_{31}\tau_{XZ} &= 0 \\ \mathbf{a}_{11}\tau_{XY} + \mathbf{a}_{21}(\sigma_Y - \sigma_P) + \mathbf{a}_{31}\tau_{YZ} &= 0 \\ \mathbf{a}_{11}\tau_{XZ} + \mathbf{a}_{21}\tau_{YZ} + \mathbf{a}_{31}(\sigma_Z - \sigma_P) &= 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

Pero, como se aprecia, las ecuaciones que se acaban de escribir son tres ecuaciones lineales y homogéneas en \mathbf{a}_{11} , \mathbf{a}_{21} y \mathbf{a}_{31} . En consecuencia, la única solución no trivial consiste en que el determinante de los coeficientes sea cero, lo que da la ecuación siguiente:

$$\begin{aligned} \sigma_P^3 - (\sigma_X + \sigma_Y + \sigma_Z)\sigma_P^2 + (\sigma_X\sigma_Y + \sigma_Y\sigma_Z + \sigma_Z\sigma_X - \tau_{XY}^2 - \tau_{YZ}^2 - \tau_{ZX}^2)\sigma_P - \\ - (\sigma_X\sigma_Y\sigma_Z + 2\tau_{XY}\tau_{YZ}\tau_{ZX} - \sigma_X\tau_{YZ}^2 - \sigma_Y\tau_{XZ}^2 - \sigma_Z\tau_{XY}^2) = 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

Existen siempre tres raíces reales de esta ecuación, y las tensiones tangenciales en los planos correspondientes se anulan. Los que hemos llamado valores «fijos» de las tensiones normales son, en realidad, los valores de las tensiones principales y se representan normalmente por σ_1 , σ_2 y σ_3 , en orden de valor decreciente.

Una vez conocidas las tensiones principales, los cosenos directores de los planos principales se pueden encontrar sustituyendo en las ecs. 2.32, que en realidad, son sólo dos ecuaciones independientes, y utilizando la relación

$$\mathbf{a}_{11}^2 + \mathbf{a}_{21}^2 + \mathbf{a}_{31}^2 = 1$$

para cada valor de σ_p . Es conveniente mencionar que la ec. 2.33 define tres valores de σ_p al margen de la orientación del sistema de coordenadas cartesiano. Por tanto, las cantidades entre paréntesis en esta ecuación son invariantes respecto al sistema de coordenadas elegido.

II.9 Resumen

En resumen, los aspectos más importantes de este segundo capítulo han sido:

- Las definiciones de «Tensión» y de sus Componentes.
- Las ecuaciones de equilibrio, 2.22.
- La «transformación» de las ecuaciones de la tensión, 2.25, 2.27 y 2.28.

La Tensión se define como el valor límite de la fuerza por unidad de superficie cuando ésta tiende a cero. El estado de tensión en un punto se caracteriza por nueve componentes, —de los que sólo seis son independientes— que constituyen el «Tensor de Tensiones».

La solución de un problema elástico consiste en la determinación de la distribución de los componentes de la tensión (también de la deformación y del desplazamiento) en un cuerpo elástico sometido a fuerzas externas o desplazamientos prescritos. Hasta ahora se conocen tres de las ecuaciones necesarias —las ecuaciones de equilibrio— que sirven para ese propósito. Una vez conocida la distribución de tensiones en un cuerpo, la transformación de las ecuaciones de la tensión define las componentes de la misma según planos arbitrarios que pasan por un punto dado.

CAPÍTULO III. DEFORMACIÓN Y DESPLAZAMIENTO

III.1 Introducción

En el Capítulo 2 se mencionó que las ecuaciones de equilibrio, 2.22, no bastaban para resolver el problema de obtener las tensiones en un cuerpo en función de \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} , sometido a un sistema de fuerzas exterior. Como se vio entonces, las tensiones requieren el conocimiento de seis cantidades independientes y las ecuaciones de equilibrio son sólo tres.

Obviamente, la razón estriba en que las tensiones dependen de otros factores y por tanto se precisa más información para resolver un problema en Elasticidad. Esta información nos la suministra la *Ley de Hooke generalizada* y las ecuaciones *Deformación-Desplazamiento*. En este Capítulo se estudiarán las segundas y en el próximo la ley de Hooke generalizada.

El análisis que se hace en este capítulo se aplica a todo continuo que satisfaga el supuesto de deformaciones infinitesimales. Dicho análisis no está influenciado por las propiedades del material. Sólo se precisa que el material sea continuo así como los desplazamientos. Por supuesto, para cualquier estado de deformaciones dado, las funciones de desplazamiento deben tener un valor único.

Se aclarará la definición de las componentes de la deformación y su significado geométrico y se obtendrán las ecuaciones de *compatibilidad*, que relacionan a las componentes de la deformación. Se examinarán los efectos de la deformación en los cambios geométricos de las dimensiones de un cuerpo, así como los efectos del movimiento como sólido rígido.

III.2 Relaciones Deformación-Desplazamiento

Se dice que un cuerpo está deformado cuando las posiciones relativas de sus puntos han cambiado. En el movimiento como sólido rígido, dichas posiciones permanecen estables.

Cuando se aplican fuerzas exteriores a un cuerpo, la posición de cada punto, en general, se modifica. Se define el desplazamiento de un punto como el vector que une el punto original con el desplazado.

Se denominará a las componentes \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} del desplazamiento con las letras \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} , respectivamente. Por tanto, un punto que estuviera inicialmente en la posición $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ se moverá al punto $(\mathbf{x} + \mathbf{u}, \mathbf{y} + \mathbf{v}, \mathbf{z} + \mathbf{w})$. En general, \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} serán función de $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$.

Se empezará por considerar un modelo unidimensional para entender claramente el concepto de deformación.

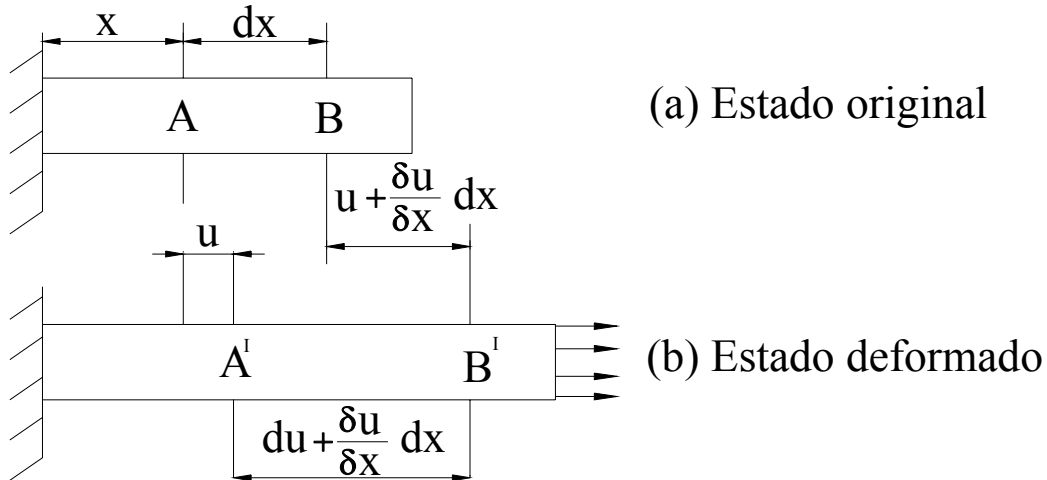


Fig. 3.1. Tensión normal en una barra

En la figura 3.1 puede verse una barra sometida a una fuerza axial. Inicialmente, los puntos A y B están separados una distancia dx . Dichos puntos, bajo el efecto de la fuerza se desplazan a los puntos A' y B', y se aprecia que la distancia entre ambos ha aumentado ligeramente. Si se define la deformación como el cambio unitario de longitud, se tendrá:

$$\epsilon_x = \frac{\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right) dx}{dx} = \frac{\delta u}{\delta x}$$

Se considerará un cuerpo en un estado de deformación plana, que se define por:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y) \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y) \quad \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

En este caso, todos los puntos del plano xy , permanecen en el plano después de la deformación. Por ejemplo, considérese el desplazamiento del elemento infinitesimal ABCD que se muestra en la figura 3.2. La configuración final de este elemento, A' B' C' D' nos muestra que el elemento, por un lado, se ha trasladado y por otro se ha deformado. La deformación consta de dos tipos distintos:

- (a) Los lados cambian en longitud, y (b) Cada lado gira respecto del otro.

De acuerdo con (a) y (b), se define la deformación *normal* y *de cizalladura*, o *tangencial* como sigue: la deformación normal ϵ en una dirección dada se define como el cambio unitario de longitud de una línea que estaba originalmente orientada según la mencionada dirección. Es POSITIVA si el cambio en la longitud consiste en un ALARGAMIENTO, y negativa si se trata de un acortamiento.

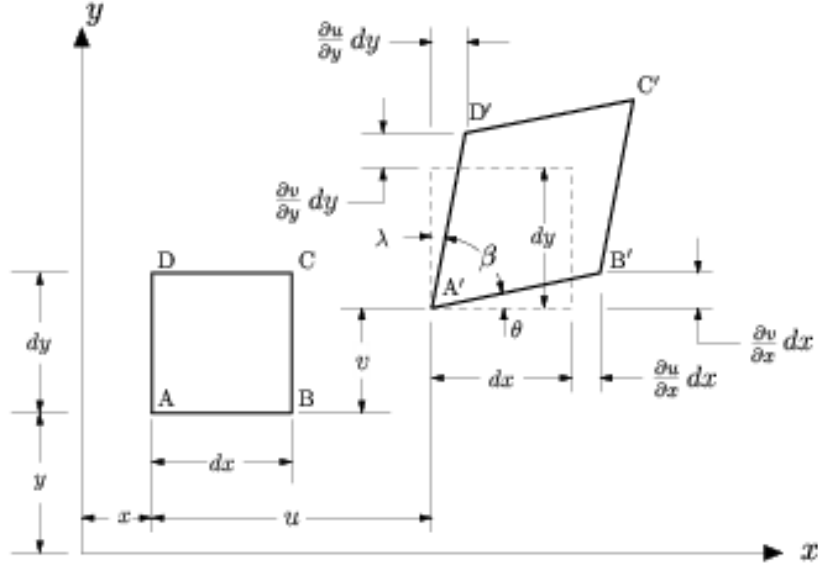


Fig. 3.2. Deformaciones en un Elemento 2-D

La deformación tangencial está asociada con dos direcciones —como ocurría con la tensión tangencial— y se define como el cambio en el ángulo recto original entre dos ejes (en radianes). Es positiva si el ángulo original decrece. El signo que se le da depende del sistema de coordenadas. En la figura 3.2 se aprecia que las componentes de la deformación referidas a los ejes coordenados X e Y son:

$$\epsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{A'B' - dx}{dx}$$

$$\epsilon_y = \frac{A'D' - AD}{AD} = \frac{A'D' - dy}{dy}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \beta = \theta - \lambda$$

donde el signo negativo de λ se basa en el hecho de que, para los giros, son positivos aquellos que van en sentido contrario a las agujas del reloj.

Referido de nuevo a la figura 3.2, si las componentes del desplazamiento del punto A son «u» y «v», el punto B se desplazará « $u + \left(\frac{\delta u}{\delta x}\right) dx$ » y « $v + \left(\frac{\delta v}{\delta x}\right) dx$ » ya que «y» es constante a lo largo de la línea AB. Análogamente, las componentes del desplazamiento del punto D son « $u + \left(\frac{\delta u}{\delta y}\right) dy$ » y « $v + \left(\frac{\delta v}{\delta y}\right) dy$ ». En consecuencia se puede escribir:

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{B}^T)^2 = [\mathbf{dx}(1 + \varepsilon_x)]^2 = \left(\mathbf{dx} + \frac{\delta \mathbf{u}}{\delta \mathbf{x}} \mathbf{dx} \right)^2 + \left(\frac{\delta \mathbf{v}}{\delta \mathbf{x}} \mathbf{dx} \right)^2$$

de forma que:

$$\varepsilon_x^2 + 2\varepsilon_x + 1 = 1 + 2 \frac{\delta \mathbf{u}}{\delta \mathbf{x}} + \left(\frac{\delta \mathbf{u}}{\delta \mathbf{x}} \right)^2 + \left(\frac{\delta \mathbf{v}}{\delta \mathbf{y}} \right)^2$$

Pero como se está considerando deformaciones infinitesimales, los términos elevados al cuadrado son despreciables —en un orden de magnitud— y se puede escribir finalmente:

$$\varepsilon_x = \frac{\delta \mathbf{u}}{\delta \mathbf{x}} \quad \varepsilon_y = \frac{\delta \mathbf{v}}{\delta \mathbf{y}}$$

Por otro lado, también se puede escribir de acuerdo con la fig. 3.2:

$$\theta = \frac{\left(\frac{\delta \mathbf{v}}{\delta \mathbf{x}} \right) \mathbf{dx}}{\mathbf{dx} + \left(\frac{\delta \mathbf{u}}{\delta \mathbf{x}} \right) \mathbf{dx}}$$

ya que para desplazamientos infinitesimales se considera la tangente igual al ángulo, es decir « $\tan \theta = \theta$ ». Por otro lado el segundo término del denominador también se puede despreciar, ya que $\frac{\delta \mathbf{u}}{\delta \mathbf{x}} \ll 1$. Como lo mismo es cierto en el cálculo de λ , se puede escribir:

$$\theta = \frac{\delta \mathbf{v}}{\delta \mathbf{x}} \quad \lambda = -\frac{\delta \mathbf{u}}{\delta \mathbf{y}}$$

con lo que la deformación tangencial quedará:

$$\gamma_{xy} = \frac{\delta \mathbf{u}}{\delta \mathbf{y}} + \frac{\delta \mathbf{v}}{\delta \mathbf{x}}$$

donde las dos derivadas parciales son positivas si AB y AD giran «hacia adentro» como es el caso de la figura.

En el caso de que se esté en un sistema tridimensional en el que el elemento original es un prisma rectangular, las componentes de la deformación serían:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\delta \mathbf{u}}{\delta \mathbf{x}} & \gamma_{xy} &= \frac{\delta \mathbf{u}}{\delta \mathbf{y}} + \frac{\delta \mathbf{v}}{\delta \mathbf{x}} \\ \varepsilon_y &= \frac{\delta \mathbf{v}}{\delta \mathbf{y}} & \gamma_{yz} &= \frac{\delta \mathbf{v}}{\delta \mathbf{z}} + \frac{\delta \mathbf{w}}{\delta \mathbf{y}} \\ \varepsilon_z &= \frac{\delta \mathbf{w}}{\delta \mathbf{z}} & \gamma_{zx} &= \frac{\delta \mathbf{w}}{\delta \mathbf{x}} + \frac{\delta \mathbf{u}}{\delta \mathbf{z}} \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde se observa también el efecto simétrico con las tensiones:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} \quad \gamma_{zx} = \gamma_{xz}$$

Las ecuaciones 3.1 se denominan *relaciones entre Deformación y Desplazamiento* ya que definen las componentes de la deformación en términos de las de los desplazamientos.

III.3 Ecuaciones de Compatibilidad

Se va a analizar en detalle las ecuaciones 3.1 que se acaban de obtener. Se trata de un conjunto de seis ecuaciones para cada componente de la deformación, pero en función de sólo tres componentes del desplazamiento. Si se especifican estas últimas en función de \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} , se podrán obtener las deformaciones.

Sin embargo se puede razonar «a la inversa» y partir del hecho de que las seis deformaciones —componentes— sean funciones dadas de las mismas variables \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} . En este caso se tienen seis ecuaciones para el cálculo de tres incógnitas: \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} . Ese sistema de ecuaciones sería indeterminado y no tendría solución para los desplazamientos, a no ser que las componentes de la deformación estuvieran relacionadas de alguna otra manera. En otras palabras, las componentes de las deformaciones no se pueden definir arbitrariamente, si se quiere encontrar funciones de desplazamiento únicas y continuas. Por tanto, deben existir al menos tres ecuaciones adicionales que nos permitan establecer la relación biunívoca entre deformaciones y desplazamientos.

Si se deriva la primera de las ecuaciones 3.1 dos veces con respecto a « \mathbf{y} », y la segunda dos veces respecto a « \mathbf{x} » y se suman los resultados, se obtiene:

$$\frac{\delta^2 \epsilon_x}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \epsilon_y}{\delta x^2} = \frac{\delta^3 \mathbf{u}}{\delta y^2 \delta x} + \frac{\delta^3 \mathbf{v}}{\delta x^2 \delta y}$$

Y si se deriva la cuarta ecuación respecto a « \mathbf{x} » y respecto a « \mathbf{y} », se tendrá:

$$\frac{\delta^2 \gamma_{xy}}{\delta x \delta y} = \frac{\delta^2}{\delta x \delta y} \left(\frac{\delta \mathbf{u}}{\delta y} + \frac{\delta \mathbf{v}}{\delta x} \right)$$

y como el orden de la derivación es indiferente, se ve que:

$$\frac{\delta^2 \epsilon_x}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \epsilon_y}{\delta x^2} = \frac{\delta^2 \gamma_{xy}}{\delta x \delta y}$$

De forma similar se pueden obtener cinco ecuaciones más. Las seis ecuaciones se escriben a continuación:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2 \varepsilon_x}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \varepsilon_y}{\delta x^2} &= \frac{\delta^2 \gamma_{xy}}{\delta x \delta y} \\
\frac{\delta^2 \varepsilon_y}{\delta z^2} + \frac{\delta^2 \varepsilon_z}{\delta y^2} &= \frac{\delta^2 \gamma_{yz}}{\delta y \delta z} \\
\frac{\delta^2 \varepsilon_z}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \varepsilon_x}{\delta z^2} &= \frac{\delta^2 \gamma_{zx}}{\delta z \delta x} \\
2 \frac{\delta^2 \varepsilon_x}{\delta y \delta z} &= \frac{\delta}{\delta x} \left(-\frac{\delta \gamma_{yz}}{\delta x} + \frac{\delta \gamma_{xz}}{\delta y} + \frac{\delta \gamma_{xy}}{\delta z} \right) \\
2 \frac{\delta^2 \varepsilon_y}{\delta z \delta x} &= \frac{\delta}{\delta y} \left(\frac{\delta \gamma_{yz}}{\delta x} - \frac{\delta \gamma_{xz}}{\delta y} + \frac{\delta \gamma_{xy}}{\delta z} \right) \\
2 \frac{\delta^2 \varepsilon_z}{\delta x \delta y} &= \frac{\delta}{\delta x} \left(\frac{\delta \gamma_{yz}}{\delta x} + \frac{\delta \gamma_{xz}}{\delta y} + \frac{\delta \gamma_{xy}}{\delta z} \right)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Estas ecuaciones se denominan: *ecuaciones de compatibilidad de Saint-Venant*.

Las componentes de las deformaciones deben cumplir estas seis ecuaciones para que exista solución en desplazamientos. Sin embargo, se había dicho que se precisaba de tres ecuaciones más, pero ahora se cuenta con seis. La razón de ello estriba en que estas seis ecuaciones son equivalentes a tres ecuaciones independientes de cuarto orden. Veamos:

La primera de las ecuaciones 3.2 la derivamos dos veces respecto a «z».

La segunda de las ecuaciones 3.2 la derivamos dos veces respecto a «x».

La tercera de las ecuaciones 3.2 la derivamos dos veces respecto a «y».

La cuarta de las ecuaciones 3.2 la derivamos dos veces, una respecto a «y» y otra respecto a «z».

La quinta de las ecuaciones 3.2 la derivamos dos veces, una respecto a «z» y otra respecto a «x».

La sexta de las ecuaciones 3.2 la derivamos dos veces, una respecto a «x» y otra respecto a «y».

El resultado de estas operaciones es que las primeras tres ecuaciones de cuarto orden son equivalentes a las tres segundas.

Habitualmente es más conveniente trabajar con las seis ecuaciones de segundo orden que con las tres de cuarto.

III.4 Deformación en un punto

En el capítulo anterior se vio que el estado de tensiones en un punto quedaba determinado si se conocían las componentes de las tensiones en dos planos —para el caso bidimensional— y lo mismo puede decirse respecto a las deformaciones. El estado de deformaciones en un punto, en el caso de la deformación plana, queda determinado por las componentes de la deformación en dos planos que contengan al punto. Por otro lado si se conoce el estado de deformaciones en un punto, ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} , es posible conocer las deformaciones en un elemento orientado en cualquier dirección en el punto.

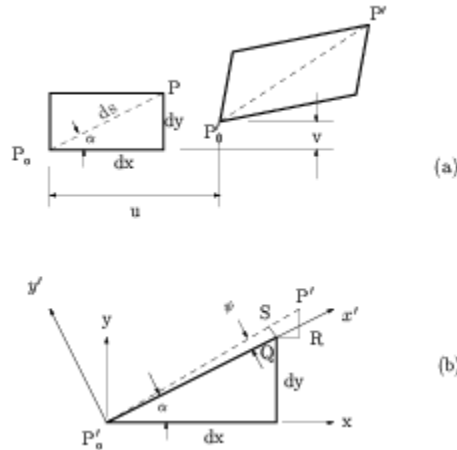


Fig. 3.3. Deformación de un punto

Considérese el desplazamiento de las dos esquinas, P_0 y P del elemento mostrado en la figura 3.3. Si los ejes x^I e y^I están situados como en la figura, se va a tratar de conocer las componentes de las deformaciones referidas a este sistema de coordenadas $x^I y^I$, es decir ϵ_{x^I} , ϵ_{y^I} así como $\gamma_{x^I y^I}$.

En la figura 3.3 (b) se ve que:

$$QR = \frac{\delta u}{\delta x} dy + \frac{\delta u}{\delta y} dx$$

y también

$$RP^I = \frac{\delta v}{\delta y} dy + \frac{\delta v}{\delta x} dx$$

Proyectando QR y RP^I en las direcciones x^I , y^I tenemos:

$$P^I S = \frac{QR \cos \alpha + RP^I \text{sen} \alpha}{\cos \psi} = QR \cos \alpha + RP^I \text{sen} \alpha$$

ya que $\cos \psi \approx 1$ por ser el ángulo pequeño. La deformación normal en la dirección x^I es, por definición:

$$\epsilon_{x^I} = \frac{P^I S}{ds} = \left(\frac{\delta u}{\delta x} \frac{dx}{ds} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\delta v}{\delta y} \frac{dy}{ds} + \frac{\delta v}{\delta x} \frac{dx}{ds} \right) \text{sen} \alpha$$

o sea:

$$\varepsilon_{x^I} = \varepsilon_x \cos^2 \alpha + \varepsilon_y \sin^2 \alpha + \gamma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$$

ya que

$$\frac{dy}{ds} = \sin \alpha \quad \text{y} \quad \frac{dx}{ds} = \cos \alpha$$

En función de 2α , la deformación normal, ε_{x^I} queda:

$$\varepsilon_{x^I} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\alpha \quad (3.3)$$

La deformación normal en la dirección y^I se encuentra sustituyendo α por $\alpha + \frac{\pi}{2}$ en la ecuación anterior, lo que da:

$$\varepsilon_{y^I} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\alpha - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\alpha \quad (3.4)$$

Para obtener finalmente la deformación tangencial $\gamma_{x^I y^I}$, primero calculamos el desplazamiento angular ψ de la línea PP_0 . En la figura 3.3, se observa que:

$$\tan \psi \approx \psi = \frac{Qs}{ds} = \frac{RP^I \cos \alpha - QR \sin \alpha - (P^I S) \psi}{ds}$$

pero $(P^I S) \psi = \varepsilon_{x^I} ds \psi$ y como estamos tratando con deformaciones pequeñas, este producto es despreciable con respecto al resto de los términos de la expresión. Por tanto

$$\psi = \left(\frac{\delta v}{\delta y} \frac{dy}{ds} + \frac{\delta v}{\delta x} \frac{dx}{ds} \right) \cos \alpha - \left(\frac{\delta u}{\delta x} \frac{dx}{ds} + \frac{\delta u}{\delta y} \frac{dy}{ds} \right) \sin \alpha$$

o, finalmente

$$\psi = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\delta v}{\delta x} \cos^2 \alpha - \frac{\delta u}{\delta y} \sin^2 \alpha \quad (3.5)$$

Esta ecuación define el desplazamiento angular de x^I . Si queremos calcular el de y^I basta con tener en cuenta que ese valor es el valor de ψ evaluado en $\left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right)$. En consecuencia, basta con

sustituir α por $(\alpha + \pi/2)$ en la ecuación anterior, quedando:

$$\psi / \alpha + \left(\frac{\pi}{2} \right) = -(\varepsilon_y - \varepsilon_x) \cos \alpha \sin \alpha + \frac{\delta v}{\delta x} \sin^2 \alpha - \frac{\delta u}{\delta y} \cos^2 \alpha$$

y la deformación tangencial o de cizalladura, viene dada por:

$$\gamma_{x^I y^I} = \psi - \psi / 2 + \left(\frac{\pi}{2} \right)$$

y operando:

$$\gamma_{x^i y^i} = 2(\epsilon_Y - \epsilon_X) \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \left(\frac{\delta v}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta y} \right) (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha)$$

En términos de 2α y sustituyendo $\gamma_{xy} = \frac{\delta v}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta y}$, obtenemos finalmente:

$$\gamma_{x^i y^i} = (\epsilon_Y - \epsilon_X) \operatorname{sen} 2\alpha + \gamma_{xy} \cos 2\alpha \quad (3.6)$$

Las ecuaciones 3.3, 3.4 y 3.6 son las *ecuaciones de transformación de las deformaciones* para el caso de dos dimensiones. Igual que se vio en el estudio de las tensiones, se tienen siete variables y tres ecuaciones. Es decir, que si cuatro de estas variables son conocidas, el resto está definido de acuerdo con las mencionadas ecuaciones. Se puede decir que el estado de deformaciones está perfectamente definido si las componentes de la deformación son conocidas en dos planos.

Como se ve, existe una «correspondencia» entre estas ecuaciones y las referidas a tensiones, 2.9 y 2.10. Si se reemplaza sencillamente la variable σ por ϵ y τ por $\frac{\gamma}{2}$, estas últimas ecuaciones se convierten en las anteriores. Esta relación existente se puede aplicar a todas las formulaciones análogas. Así, por ejemplo, las direcciones de deformación principal —aquellas en que γ_{xy} se anula— vienen dadas por:

$$\tan 2\alpha = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_X - \epsilon_Y} \quad (3.7)$$

y los valores de las deformaciones *principales* son:

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{array} \right\} = \frac{\epsilon_X + \epsilon_Y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\epsilon_X - \epsilon_Y)^2 + \gamma_{xy}^2} \quad (3.8)$$

Por otro lado, la utilización del círculo de Mohr es igualmente efectiva con tensiones y con deformaciones.

En el estudio tridimensional, las ecuaciones de transformación de deformaciones se pueden deducir directamente de las correspondientes ecuaciones de transformación de tensiones, empleando el mismo cambio de variable mencionado más arriba. Así, de la ecuación 2.24, por ejemplo, obtenemos:

$$\epsilon_{x^i} = \epsilon_X a_{11}^2 + \epsilon_Y a_{21}^2 + \epsilon_Z a_{31}^2 + \gamma_{XY} a_{11} a_{21} + \gamma_{YZ} a_{21} a_{31} + \gamma_{ZX} a_{31} a_{11}$$

III.5 Desplazamientos generalizados

Si se especifican las funciones de desplazamiento de un cuerpo, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ y $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, la geometría y las deformaciones de cualquier elemento infinitesimal de ese cuerpo en su estado deformado, quedan completamente definidas. Por ejemplo, todas las dimensiones de la figura 3.2, incluyendo los ángulos θ y λ , se pueden conocer de las ecuaciones desarrolladas en la Sección 3.2. Si lo que se conoce es la distribución de deformaciones, sin embargo, las funciones de desplazamiento no quedan totalmente determinadas. Al integrar las relaciones deformación-desplazamiento 3.1 para obtener estos últimos, existen ciertas constantes de integración que son equivalentes a movimientos como sólido rígido, es decir, traslaciones y giros. Se va a estudiar en lo que sigue la relación entre esos eventuales giros y traslaciones y las funciones de desplazamiento, \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} .

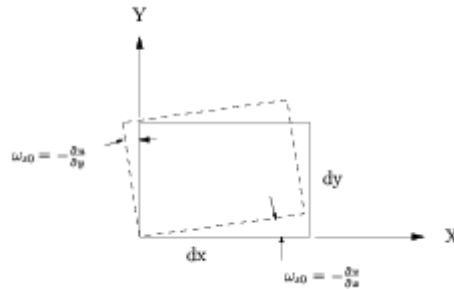


Fig. 3.4. Giro de un elemento

Si el elemento de la figura 3.4 se gira como sólido rígido un pequeño ángulo, ω_{z0} , se puede escribir:

$$\omega_{z0} = \frac{\delta v}{\delta x} = -\frac{\delta u}{\delta y}$$

En el movimiento como sólido rígido no existe ningún tipo de deformación. Sin embargo, si en un caso determinado existen ambos efectos, movimiento y deformación, se define ω_z como:

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta v}{\delta x} - \frac{\delta u}{\delta y} \right) \quad (3.9)$$

Y se ve que ω_z representa una media del desplazamiento angular de $d\mathbf{x}$ y del de $d\mathbf{y}$ y se le llama *rotación*. Volviendo a la figura 3.2, si la componente \mathbf{x} del desplazamiento en A es \mathbf{u} , en C el desplazamiento sería $\mathbf{u} + d\mathbf{u}$, donde:

$$d\mathbf{u} = \frac{\delta \mathbf{u}}{\delta x} d\mathbf{x} + \frac{\delta \mathbf{u}}{\delta y} d\mathbf{y} \quad (3.10)$$

Esta ecuación puede ser escrita en la forma:

$$d\mathbf{u} = \frac{\delta \mathbf{u}}{\delta x} d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta \mathbf{u}}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x} \right) d\mathbf{y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta \mathbf{u}}{\delta y} - \frac{\delta v}{\delta x} \right) d\mathbf{y}$$

o lo que es lo mismo:

$$d\mathbf{u} = \varepsilon_x d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \gamma_{xy} d\mathbf{y} - \omega_z d\mathbf{y} \quad (3.11)$$

Los dos primeros términos de la ecuación 3.11 representan la componente \mathbf{x} del desplazamiento en el punto «C» relativo al punto «A» debido a la deformación $\varepsilon_x, \gamma_{xy}$, es decir, debido a la deformación pura que se observa en la figura 3.5.

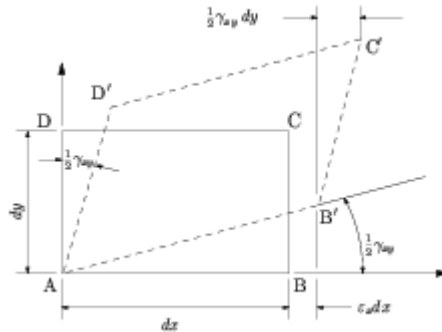


Fig. 3.5. Deformación Pura de un elemento

El último término de la ec. 3.11 representa el desplazamiento debido a la rotación, de forma que si se superponen los dos efectos, el elemento quedará en su posición final.

Análogamente, la componente \mathbf{y} del desplazamiento en el punto «C» relativo al «A», se puede escribir como sigue:

$$d\mathbf{v} = \varepsilon_y d\mathbf{y} + \frac{1}{2} \gamma_{xy} d\mathbf{x} + \omega_z d\mathbf{x} \quad (3.12)$$

Las ecuaciones 3.11 y 3.12 que dan las diferenciales totales de \mathbf{u} y \mathbf{v} se pueden integrar si las componentes de la deformación dada satisfacen las ecuaciones de compatibilidad 3.2. La forma concreta de efectuar esa integración se explicará más adelante. De momento, es interesante mencionar que al integrar estas ecuaciones aparecen ciertas funciones arbitrarias del tipo:

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_0 - \omega_{z0} \mathbf{y} \quad ; \quad \mathbf{v}^* = \mathbf{v}_0 + \omega_{z0} \mathbf{x} \quad (3.13)$$

Las funciones $\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*$ son arbitrarias en el sentido de que no producen ningún tipo de deformación, como se puede verificar sustituyendo su valor en las ecuaciones 3.1. Por tanto, se pueden añadir a cualquier campo de desplazamientos sin modificar la distribución de deformaciones. Estas fórmulas corresponden al desplazamiento del cuerpo como sólido rígido según una traslación $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)$ y una *pequeña* rotación \mathbf{w}_{z0} .

Si las tres componentes de la deformación, $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ son conocidas, el desplazamiento correspondiente, (\mathbf{u}, \mathbf{v}) , en términos generales, es indeterminado y arbitrario en el contexto de la posibilidad de un desplazamiento adicional como sólido rígido expresado por las ecuaciones 3.13. En estas ecuaciones existen tres constantes arbitrarias, $\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{w}_{z0}$. Esto significa que si en un punto del sólido las componentes de la traslación $\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0$ y de la rotación \mathbf{w}_{z0} —o una información equivalente— son conocidas, entonces sí que la expresión del desplazamiento para un estado de deformaciones específico, será único.

Es conveniente dedicar unas líneas a aclarar un aspecto que pudiera resultar confuso. Hay que hacer una distinción clara entre la función \mathbf{w}_z , ecs. 3.11 y 3.12, y la cantidad \mathbf{w}_{z0} de la ec. 3.13. Esta última está relacionada con el movimiento de un cuerpo como un todo y, como tal, es un movimiento de sólido rígido. La función \mathbf{w}_z , por el contrario, está relacionada con una rotación dependiente de la posición en el espacio, de forma que define la rotación de un elemento infinitesimal del sólido como una función de la posición del elemento.

Por otro lado, en el estudio tridimensional, las ecuaciones a aplicar serán:

$$\begin{aligned} d\mathbf{u} &= \epsilon_x d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\gamma_{xy} d\mathbf{y} + \frac{1}{2}\gamma_{xz} d\mathbf{z} - \omega_z d\mathbf{y} + \omega_y d\mathbf{z} \\ d\mathbf{v} &= \epsilon_y d\mathbf{y} + \frac{1}{2}\gamma_{xy} d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\gamma_{yz} d\mathbf{z} - \omega_x d\mathbf{z} + \omega_z d\mathbf{x} \\ d\omega &= \epsilon_z d\mathbf{z} + \frac{1}{2}\gamma_{xz} d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\gamma_{yz} d\mathbf{y} - \omega_y d\mathbf{x} + \omega_x d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde

$$\begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\delta\omega}{\delta y} - \frac{\delta v}{\delta z} \right) \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\delta u}{\delta z} - \frac{\delta\omega}{\delta x} \right) \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\delta v}{\delta x} - \frac{\delta u}{\delta y} \right) \end{aligned}$$

son los *pequeños* ángulos de rotación alrededor de ejes paralelos a X, Y y Z y se les denomina *componentes de la rotación*. Cada ángulo es positivo si gira en sentido contrario a las agujas del reloj, mirando desde un punto alejado positivo del eje de rotación hacia el origen.

Como en el caso del estudio en 2-D, si se integran las ecuaciones 3.14, aparecen unas *funciones arbitrarias* de la forma:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^* &= \mathbf{u}_O - \omega_{ZO}Y + \omega_{YO}Z \\
\mathbf{v}^* &= \mathbf{v}_O - \omega_{XO}Z + \omega_{ZO}X \\
\omega^* &= \omega_O - \omega_{YO}X + \omega_{XO}Y
\end{aligned}
\tag{3.15}$$

Se debe mencionar también, en relación con estas últimas ecuaciones, que como el movimiento como sólido rígido no afecta a las componentes de la deformación, cuando se tratan problemas de Elasticidad, a menudo se suele prescindir de ese movimiento.

III.6 Principio de Superposición

El supuesto de que las deformaciones sean infinitesimales, nos lleva a uno de los principios básicos de la teoría de la *elasticidad lineal*, denominado *el principio de superposición*. Este principio establece que dos campos de deformaciones se pueden combinar por *superposición* directa, y que el orden de aplicación no tiene ningún efecto sobre el estado final.

Supongamos una barra sometida a una carga axial. La barra tiene un alargamiento \mathbf{u}_1 debido a una deformación uniforme $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ motivada por una carga \mathbf{F}_1 y tiene un alargamiento \mathbf{u}_2 debido a una deformación $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ motivada por una carga \mathbf{F}_2 , si se aplican las cargas separadamente. Si se aplica primero la carga \mathbf{F}_1 y a continuación y sin descargar previamente, la carga \mathbf{F}_2 , hablando en términos de deformaciones y desplazamientos, tendremos que el desplazamiento al final será:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \mathbf{u}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2(\mathbf{L} + \mathbf{u}_1) \\
&= \mathbf{u}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2(\mathbf{L} + \boldsymbol{\varepsilon}_1 \mathbf{L}) \\
&= \mathbf{u}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 \mathbf{L} + \boldsymbol{\varepsilon}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_2 \mathbf{L}
\end{aligned}$$

o sea

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

El resultado final se obtiene porque el producto $\boldsymbol{\varepsilon}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_2$ es despreciable respecto a cualquiera de sus factores.

El principio de superposición es aplicable a todas las ecuaciones lineales. Más adelante veremos cómo se aplica a todas las ecuaciones básicas de elasticidad.

III.7 Resumen

Continuando con la *exploración* de las soluciones a los problemas de elasticidad, en este capítulo se han definido las componentes de las deformaciones y desplazamientos. La interrelación entre estas entidades, 3.1, nos da seis ecuaciones más para describir el comportamiento de un cuerpo deformado.

También se ha visto que las componentes de las deformaciones deben satisfacer las *ecuaciones de compatibilidad*, 3.2, si los desplazamientos existen, son continuos y la solución es única.

Dado un estado de deformaciones en un punto, sus componentes en planos arbitrarios —que contengan al punto— pueden ser definidos por las ecuaciones de transformación de las deformaciones.

Las sustituciones $\sigma \rightarrow \varepsilon$ y $\tau \rightarrow \frac{1}{2}\gamma$, convierten cualquier ecuación de transformación de tensiones a su correspondiente expresión en deformaciones.

Es posible *aislar* el desplazamiento debido a deformación pura y a rotación, como se ha demostrado en el apartado 3.5. El efecto debido a movimientos de sólido rígido, también se puede *desgajar* en las componentes del desplazamiento.

Finalmente, el hecho de que el orden de aplicación de sucesivos campos de deformaciones sea indiferente para el resultado final, constituye el muy importante principio de superposición, válido para la teoría lineal.

CAPÍTULO IV. RELACIONES TENSIÓN-DEFORMACIÓN

IV.1 Introducción

Hasta ahora, en los dos capítulos precedentes, se han estudiado y desarrollado determinados conjuntos de ecuaciones en relación con las tensiones, en concreto las ecuaciones de equilibrio 2.22, que estaban basadas en consideraciones de estática y continuidad de las tensiones, así como otro conjunto de ecuaciones que incluían conceptos en el campo exclusivo de las deformaciones, como las relaciones entre desplazamiento y deformación, Eq. 3.1.

Estos dos conjuntos de ecuaciones se han desarrollado con independencia el uno del otro. Ahora ha llegado el momento de ver cómo se relacionan entre sí las tensiones y las deformaciones.

Bajo el supuesto de deformaciones infinitesimales, las ecuaciones 2.22 y 3.1 son válidas para cualquier sólido. Sin embargo, la relación entre tensiones y deformaciones depende de las propiedades específicas del material del sólido considerado. En este capítulo se tratará con un tipo específico de material que es el material *elástico*. Un cuerpo elástico se caracteriza por «retomar» la configuración original que tenía antes de ser deformado por el efecto de unas tensiones, cuando éstas se anulan. Además, en lo que sigue, sólo se considerará, dentro de los materiales elásticos, aquellos que son *linealmente elásticos*, de forma que cuando se aplica el calificativo «elástico» en realidad sobreentenderemos que estamos utilizando la expresión «linealmente elásticos».

Las ecuaciones que se han referido más arriba, 2.22 y 3.1 constituyen un conjunto de nueve ecuaciones. Se tienen por otro lado quince incógnitas, seis componentes de la tensión, otras seis de la deformación y tres del desplazamiento. En este capítulo se desarrollarán las seis ecuaciones que faltan para determinar la solución.

Las ecuaciones que relacionan tensiones y deformaciones se denominan *ecuaciones constitutivas*, ya que dependen exclusivamente de las propiedades del material. En el caso de sólidos elásticos, las ecuaciones constitutivas toman la forma de la «Ley de Hooke generalizada», que se estudiará a continuación.

IV.2 Ley de Hooke generalizada

De todos es conocida la sencilla fórmula, conocida como «Ley de Hooke»:

$$\sigma_x = E \epsilon_x \quad (4.1)$$

que relaciona la deformación de una barra sometida a esfuerzo axial, con la tensión normal generada por dicho esfuerzo, y se sabe que a la constante «E» se le denomina *Módulo de elasticidad*, y no se va a extender en sus características.

Se puede plantear ahora la pregunta: ¿Cómo es la relación tensión-deformación en un estudio en tres dimensiones? En otras palabras, se quiere saber cómo relacionar las seis componentes de la tensión en un punto con las seis correspondientes de la deformación, en ese mismo punto.

Existen dos caminos para alcanzar ese «desideratum». Por un lado se tiene el camino *matemático* y por otro el *semiempírico* o, se diría, *ingenieril*. Utilizando el primero, se escribe la relación entre tensión y deformación como sigue:

$$\begin{aligned}
 \sigma_X &= c_{11}\epsilon_X + c_{12}\epsilon_Y + c_{13}\epsilon_Z + c_{14}\gamma_{XY} + c_{15}\gamma_{YZ} + c_{16}\gamma_{ZX} \\
 \sigma_Y &= c_{21}\epsilon_X + c_{22}\epsilon_Y + c_{23}\epsilon_Z + c_{24}\gamma_{XY} + c_{25}\gamma_{YZ} + c_{26}\gamma_{ZX} \\
 \sigma_Z &= c_{31}\epsilon_X + c_{32}\epsilon_Y + c_{33}\epsilon_Z + c_{34}\gamma_{XY} + c_{35}\gamma_{YZ} + c_{36}\gamma_{ZX} \\
 \tau_{XY} &= c_{41}\epsilon_X + c_{42}\epsilon_Y + c_{43}\epsilon_Z + c_{44}\gamma_{XY} + c_{45}\gamma_{YZ} + c_{46}\gamma_{ZX} \\
 \tau_{YZ} &= c_{51}\epsilon_X + c_{52}\epsilon_Y + c_{53}\epsilon_Z + c_{54}\gamma_{XY} + c_{55}\gamma_{YZ} + c_{56}\gamma_{ZX} \\
 \tau_{ZX} &= c_{61}\epsilon_X + c_{62}\epsilon_Y + c_{63}\epsilon_Z + c_{64}\gamma_{XY} + c_{65}\gamma_{YZ} + c_{66}\gamma_{ZX}
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

A su vez, se podría poner las componentes de la deformación en función de las de la tensión, lo que supondría otras 36 constantes en las ecuaciones.

El conjunto de ecuaciones 4.2 es una generalización lógica de la Ec. 4.1, ya que se supone que cada componente de la tensión es una combinación lineal de todas las componentes de la deformación. Los coeficientes c_{ij} representan propiedades del material para el que se establecen las ecuaciones. Si se supone que el material es isótropo, estas constantes deben ser las mismas para cualquier sistema ortogonal de coordenadas en el punto en cuestión.

En lo que sigue se va a utilizar el camino «semiempírico» para obtener las ecuaciones tensión-deformación. Y se aclara ya que el nombre *semiempírico* procede del hecho de considerar ciertos supuestos cuya validez proviene de las numerosas confirmaciones experimentales llevadas a cabo en la práctica en condiciones adecuadas a las bases de este estudio. Los supuestos en cuestión, son:

- Una tensión normal, σ_x no produce deformación de cizalladura en los planos X, Y o Z.
- Una tensión tangencial, τ_{xy} sólo genera una deformación tangencial, γ_{xy} .
- Al ser las deformaciones *pequeñas*, el principio de superposición es válido sin restricciones.

En relación con el paralelepípedo elemental de la figura 4.1 bajo una tensión σ_x , la componente de la deformación ϵ_x de la ecuación 4.1 toma el valor: $\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$.

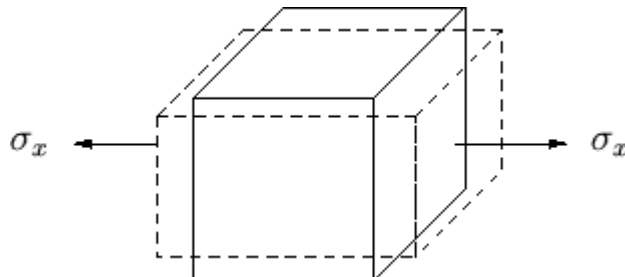


Fig. 4.1. Elemento bajo una tensión uniaxial

Acompañando a la elongación en la dirección X, habrá contracciones en las direcciones Y y Z, que vienen dadas por:

$$\varepsilon_Y = \varepsilon_Z = -\mu \left(\frac{\sigma_X}{E} \right)$$

Para muchos materiales, μ es constante en el estado elástico y la llamamos *coeficiente de Poisson*, como ya se conoce.

Se considerará ahora el elemento anterior sometido a un estado de tensión triaxial —ver figura 4.2— en la que la longitud inicial de AB es la unidad.

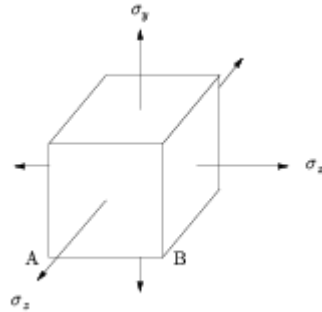


Fig. 4.2. Elemento bajo una tensión triaxial

La componente de la deformación, ε_x , la determinamos suponiendo que σ_x se aplica primero, cambiando la longitud AB una cantidad $\left(\frac{1}{E} \right) \sigma_x$. Luego se aplica σ_y , que produce un cambio adicional en la longitud AB igual a $-\left(\frac{\mu}{E} \right) \sigma_y \left(1 + \frac{\sigma_x}{E} \right)$. Pero como $\left(\frac{1}{E} \right) \sigma_x$ es una deformación elástica es despreciable con respecto a la unidad y la podemos eliminar. Cuando aplicamos σ_z e ignorando nuevamente el término de orden superior, el cambio de la longitud AB lo expresamos por $-\left(\frac{\mu}{E} \right) \sigma_z$.

La deformación total en la dirección del eje X, viene dada por:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (4.3)$$

Y por un razonamiento análogo se tendrán las otras dos deformaciones:

$$\varepsilon_Y = \frac{1}{E} [\sigma_Y - \mu(\sigma_X + \sigma_Z)]$$

$$\varepsilon_Z = \frac{1}{E} [\sigma_Z - \mu(\sigma_X + \sigma_Y)]$$

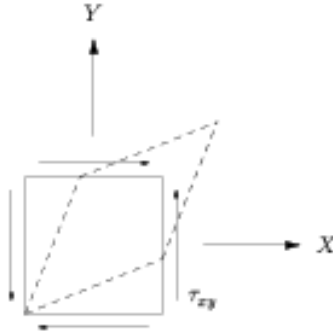


Fig. 4.3. Elemento bajo cizalladura pura

En lo que se refiere a la relación *tensión-deformación*, en un estado bidimensional de cizalladura pura —figura 4.3— experimentalmente se encuentra que cumple una relación del tipo:

$$\gamma_{XY} = \frac{1}{G} \tau_{XY} \quad (4.4)$$

y análogamente:

$$\gamma_{YZ} = \frac{1}{G} \tau_{YZ}$$

$$\gamma_{XZ} = \frac{1}{G} \tau_{XZ}$$

donde G se denomina *módulo de elasticidad tangencial* o más habitualmente *módulo de rigidez*.

De acuerdo con los supuestos aceptados en este camino *semiempírico*, las ecuaciones 4.3 y 4.4 son válidas para cualquier estado de tensiones tridimensional.

Como puede verse, se han introducido tres constantes elásticas que definen las relaciones tensión-deformación para un material elástico isótropo. Ahora se va a ver que sólo dos de esas constantes son independientes.

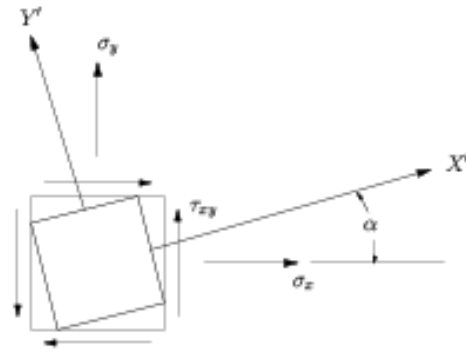


Fig. 4.4. Tensión plana en un elemento

Considérese un estado de tensión plana (Fig. 4.4) definido por:

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

Las componentes de la deformación según los planos X e Y vienen dadas por:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \quad (4.5)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \quad (4.6)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad (4.7)$$

Las componentes de las tensiones referidas a los ejes X^1 e Y^1 , de acuerdo con la ecuación 2.9, vienen dadas por:

$$\sigma_{x^1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \text{sen} 2\alpha \quad (4.8)$$

$$\sigma_{y^1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \text{sen} 2\alpha \quad (4.9)$$

y las ecuaciones de transformación de la deformación, 3.3 y 3.4 son:

$$\varepsilon_{x^1} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\alpha + \gamma_{xy} \text{sen} 2\alpha \quad (4.10)$$

$$\varepsilon_{Y^1} = \frac{\varepsilon_X + \varepsilon_Y}{2} - \frac{\varepsilon_X - \varepsilon_Y}{2} \cos 2\alpha - \gamma_{XY} \sin 2\alpha \quad (4.11)$$

Ahora bien, como el material es isótropo las constantes elásticas son las mismas sea el que sea el sistema de referencia, y por tanto las relaciones tensión-deformación referidas a los ejes X^1Y^1 , serán:

$$\varepsilon_{X^1} = \frac{1}{E} (\sigma_{X^1} - \mu \sigma_{Y^1}) \quad (4.12)$$

$$\varepsilon_{Y^1} = \frac{1}{E} (\sigma_{Y^1} - \mu \sigma_{X^1}) \quad (4.13)$$

A continuación se sustituyen los valores de σ_{X^1} , σ_{Y^1} y ε_{X^1} , ε_{Y^1} dados por las ecuaciones 4.8, 4.9, 4.10 y 4.11 en las dos ecuaciones 4.12 y 4.13. Las dos ecuaciones obtenidas se restan, obteniendo:

$$(\varepsilon_X - \varepsilon_Y) \cos 2\alpha + \gamma_{XY} \sin 2\alpha = \frac{1}{E} [(\sigma_X - \sigma_Y)(1 + \mu) \cos 2\alpha + 2\tau_{XY}(1 + \mu) \sin 2\alpha] \quad (4.14)$$

Por otro lado combinando las ecuaciones 4.5 y 4.6:

$$(\varepsilon_X - \varepsilon_Y) \cos 2\alpha = \frac{1}{E} [(\sigma_X - \sigma_Y)(1 + \mu) \cos 2\alpha] \quad (4.15)$$

Y se terminan estos *juegos malabares* restando a la ecuación 4.14 la 4.15 y obteniendo:

$$\gamma_{XY} = \frac{2(1 + \mu)}{E} \tau_{XY}$$

Comparando finalmente esta última con la ecuación 4.7, se ve que:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (4.16)$$

Por tanto, existen sólo dos constantes elásticas independientes para un material isótropo, tal y como se había planteado anteriormente.

Las relaciones entre tensión-deformación que constituyen la Ley de Hooke generalizada —o simplemente «Ley de Hooke»—, para un estado general de tensiones, consisten en las ecuaciones siguientes:

Relaciones Tensión-Deformación:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \\
\gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\
\gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \\
\gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Como se definió en el Capítulo III, las direcciones en las que las deformaciones tangenciales se anulan se denominan *direcciones principales de deformación*. Las deformaciones normales según estas direcciones se denominan *deformaciones principales*. Si se eligen los ejes en la dirección de las tensiones principales, se tiene que:

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

pero, de las ecuaciones 4.17, se ve que en ese caso:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

lo que pone de manifiesto que las direcciones de las tensiones principales coinciden con las de las deformaciones principales en materiales isótropos.

Si se despejan las tensiones en función de las deformaciones, las ecuaciones 4.17 quedan:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= 2G\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \\
\sigma_y &= 2G\varepsilon_y + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \\
\sigma_z &= 2G\varepsilon_z + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \\
\tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\
\tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \\
\tau_{zx} &= G\gamma_{zx}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

donde:

$$\lambda = \frac{\mu E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \tag{4.19}$$

A las constantes G y λ se les denomina *constantes de Lamé*.

III.3 Módulo Volumétrico

Se va a mencionar finalmente, otra constante importante en determinados casos de estudios elásticos y que puede ser de gran importancia en estudios de plasticidad.

Supongamos que se tiene un estado de tensiones definido por:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_y = \sigma_z = -p & (p > 0) \\ \tau_{xy} &= \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0\end{aligned}$$

si se aplican estos valores a las ecuaciones 4.18 se obtienen las componentes de la deformación:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \epsilon_y = \epsilon_z = -\left(\frac{1-2\mu}{E}\right)p \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0\end{aligned}$$

Se define la *dilatación* o *deformación volumétrica*, « ϵ » como el cambio de volumen unitario — cambio del volumen total dividido por el volumen original— y lo expresamos mediante:

$$\epsilon = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \quad (4.20)$$

Para el caso mencionado al comienzo de esta sección —que podría considerarse de *presión hidrostática*— se tendría:

$$\epsilon = -\frac{3}{E}(1-2\mu)p = -\frac{1}{k}p \quad (4.21)$$

donde $k = \frac{E}{[3(1-2\mu)]}$ es el *Módulo Volumétrico de Elasticidad*

Se ve que esta cantidad representa la razón negativa de la presión hidrostática con la dilatación resultante.

La constante ϵ así como σ_m , definida por la ecuación:

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (4.22)$$

y como ya se ha dicho antes, es de especial interés en el estudio de la plasticidad. El hecho de que la dilatación, bajo cualquier estado de tensiones, venga definida por la ecuación 4.21 es evidente, ya que las deformaciones tangenciales no producen cambio alguno en el volumen. En consecuencia, si se suman las tres primeras de las Ec. 4.17 y observando la Ec. 4.22, se tiene:

$$\epsilon = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{1-2\mu}{E}(3\sigma_m)$$

es decir, la relación:

$$\epsilon = \frac{1}{k}\sigma_m$$

Se cumple para cualquier estado de tensiones. A la cantidad σ_m se le conoce como *componente esférica —o hidrostática— de la tensión*. Los valores de ε y de σ_m son invariantes con respecto a cualquier transformación de ejes ortogonal.

Se han definido a lo largo de este capítulo, cinco constantes elásticas. Estas cinco constantes están interrelacionadas de forma que sólo hay dos que sean independientes. Las constantes **E** y **G** se determinan con facilidad experimentalmente para un material dado y los valores de μ , **k** y λ se deducen de las ecuaciones 4.16 y 4.19.

IV.4 Relaciones entre las constantes elásticas

Para un medio isótropo caracterizado por dos constantes elásticas distintas, existen relaciones de dependencia entre las diversas constantes que se han introducido en esta sección. Las relaciones entre las constantes más habituales *E*, *G*, *K*, ν , λ y *M* vienen dadas en la tabla siguiente:

Tabla 4.1. Relación entre las constantes elásticas **E**, **G**, **K**, μ , λ y **M**

	Módulo de corte G	Módulo de Young E	Módulo confinado M	Módulo volumétrico K	Constante de Lamé λ	Coefficiente de Poisson μ
G, E	G	E	$\frac{G(4G-E)}{3G-E}$	$\frac{GE}{9G-3E}$	$\frac{G(E-2G)}{3G-E}$	$\frac{E-2G}{2G}$
G, M	G	$\frac{G(3M-4G)}{M-G}$	M	$M-\frac{4}{3}G$	M-2G	$\frac{M-2G}{2(M-G)}$
G, K	G	$\frac{9GK}{3K+G}$	$K+\frac{4}{3}G$	K	$K-\frac{2}{3}G$	$\frac{3K-2G}{2(3K+G)}$
G, λ	G	$\frac{G(3\lambda+2G)}{\lambda+G}$	$\lambda+2G$	$\lambda+\frac{2}{3}G$	λ	$\frac{\lambda}{2(\lambda+G)}$
G, μ	G	2G(1+ μ)	$\frac{2G(1-\mu)}{1-2\mu}$	$\frac{2G(1-\mu)}{3(1-2\mu)}$	$\frac{2G\mu}{1-2\mu}$	μ
E, K	$\frac{3KE}{9K-E}$	E	$\frac{K(9K+3E)}{9K-E}$	K	$\frac{K(9K-E)}{9K-E}$	$\frac{3K-E}{6K}$
E, μ	$\frac{E}{2(1+\mu)}$	E	$\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}$	$\frac{E}{3(1-2\mu)}$	$\frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}$	μ
K, λ	$\frac{3(K-\lambda)}{2}$	$\frac{9K(K-\lambda)}{3K-\lambda}$	3K-2 λ	K	λ	$\frac{\lambda}{3K-\lambda}$
K, M	$\frac{3(M-K)}{4}$	$\frac{9K(M-K)}{3K+M}$	M	K	$\frac{3K-M}{2}$	$\frac{3K(2M-1)+M}{3K(2M+1)-M}$
K, μ	$\frac{3K(1-2\mu)}{2(1+\mu)}$	3K(1-2 μ)	$\frac{3K(1-\mu)}{1+\mu}$	K	$\frac{3K\mu}{1+\mu}$	μ

IV.5 Resumen

Las relaciones tensión-deformación 4.17, o las equivalentes 4.18, completan el total de ecuaciones necesarias para resolver un problema de elasticidad. Se han desarrollado 15 ecuaciones, (2.20), (3.1) y (4.17) que deben ser satisfechas por las quince variables correspondientes a tensión, deformación y desplazamiento.

Las condiciones restantes que deben satisfacerse se expresan en relación con las fuerzas superficiales externas o los desplazamientos impuestos en los bordes. De esto trataremos en el próximo capítulo.

CAPÍTULO V. FORMULACIÓN DE PROBLEMAS

V. 1 Introducción

Como ya se ha dicho, la solución de un problema en Elasticidad, consiste en la determinación de las componentes de la tensión, deformación y desplazamientos como funciones de las coordenadas del sólido elástico. Las ecuaciones necesarias que dichas componentes deben satisfacer han sido presentadas en los capítulos anteriores. A continuación se escribirán en forma reducida. En primer lugar se tienen las ecuaciones que deben cumplir las tensiones:

$$\frac{\delta \sigma_x}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{xy}}{\delta y} + \frac{\delta \tau_{zx}}{\delta z} + F_x = 0 \quad (x, y, z) \quad (5.1)$$

donde el paréntesis (x, y, z) al final indica que existen dos ecuaciones más que se obtienen por permutación cíclica de estos valores. El segundo grupo de ecuaciones correspondiente a las deformaciones se escribirá:

$$\varepsilon_x = \frac{\delta u}{\delta x} \quad (x, y, z ; u, v, w) \quad (5.2)$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x}$$

y las relaciones entre tensiones y deformaciones (Ley de Hooke generalizada), quedan:

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda\varepsilon \quad (x, y, z) \quad (5.3)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

Donde $\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$.

Estas 15 ecuaciones *básicas* deben ser satisfechas en todos los puntos del sólido en equilibrio y, a veces, se les llama *ecuaciones de campo*.

Las ecuaciones de compatibilidad, 3.2, se derivan de las ecuaciones deformación-desplazamiento, 5.2 y, en consecuencia, no se considera que tengan el mismo rango. Estas ecuaciones se cumplirán automáticamente si se cumplen las 15 básicas.

En este capítulo se mostrarán varias combinaciones de las ecuaciones básicas que se pueden usar para resolver varios tipos de problemas de contorno. Se considerarán primero estados de deformación plana.

Cualquier conjunto de funciones de tensión, deformación y desplazamiento que cumpla las ecuaciones básicas, representará la solución a algún problema de elasticidad. Si se tiene un problema específico, por ejemplo una placa sometida a cargas superficiales prescritas, las tensiones no sólo deben satisfacer las ecuaciones de campo, sino que además deberán estar en equilibrio con las cargas exteriores si se evalúan en el mismo punto del borde.

Por tanto, expresado en forma más específica, la solución a un problema de elasticidad determinado consistirá en la obtención de las funciones de tensión, deformación y desplazamiento que satisfagan las ecuaciones de campo y las condiciones prescritas en los bordes, sea en tensiones o en desplazamientos. Se verá también que las soluciones encontradas que cumplan los requisitos anteriores, son únicas. Representan la única solución al problema dado.

En este capítulo, se va a concretar más en la *formulación matemática* de los problemas de elasticidad sin una explicación detallada de sus soluciones. Algunos métodos de solución se verán más adelante.

V. 2 Condiciones de Contorno

Considérese el cuerpo que se muestra en la Fig. 5.1. La distribución de la *fuerza de superficie* se especifica por medio de sus componentes, $\mathbf{T}_X^\mu, \mathbf{T}_Y^\mu, \mathbf{T}_Z^\mu$, donde μ es el vector unitario normal a la superficie y en dirección *hacia afuera*. Las coordenadas de los puntos en la superficie del contorno, se denominarán x_0, y_0, z_0 ; evidentemente, esas coordenadas están relacionadas por la ecuación de la superficie.

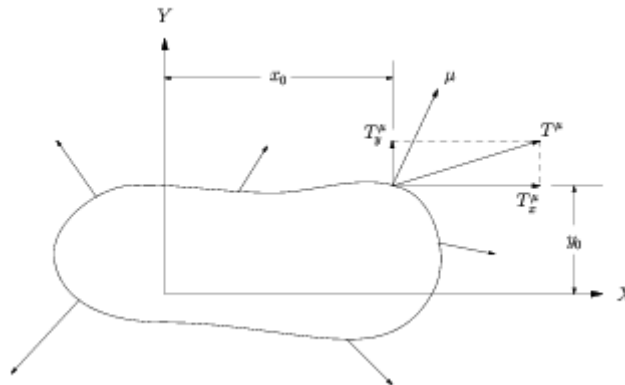


Fig. 5.1. Fuerzas de superficie

Aislando el tetraedro infinitesimal OABC de la Fig. 5.2, en el que la cara inclinada se supone que forma parte del contorno, y expresando el equilibrio de fuerzas, se obtienen las relaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_X^\mu &= \sigma_{x_0} \mu_x + \tau_{xy_0} \mu_y + \tau_{xz_0} \mu_z \\ \mathbf{T}_Y^\mu &= \tau_{xy_0} \mu_x + \sigma_{y_0} \mu_y + \tau_{yz_0} \mu_z \\ \mathbf{T}_Z^\mu &= \tau_{xz_0} \mu_x + \tau_{yz_0} \mu_y + \sigma_{z_0} \mu_z \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde $\sigma_{x_0}, \tau_{xy_0}$ etc. son componentes de las tensiones evaluadas en el borde y μ_x, μ_y, μ_z , son los cosenos directores de la normal.

En aquellas partes de la superficie contorno en las que las tensiones aplicadas $(\mathbf{T}_X^\mu, \mathbf{T}_Y^\mu, \mathbf{T}_Z^\mu)$ está prescrito, las componentes de las tensiones deben satisfacer las ecuaciones anteriores.

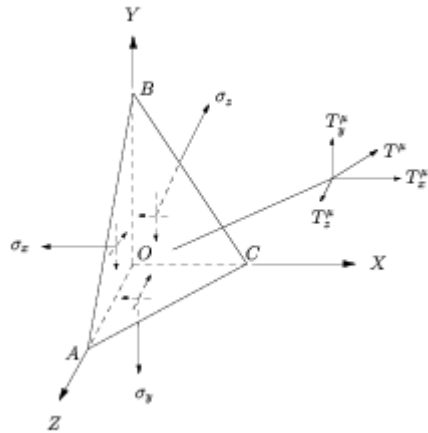


Fig. 5.2. Fuerzas de superficie

Por otro lado, si lo que se prescribe en el contorno —o en parte de él— son los desplazamientos, se tendrán las relaciones:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o, \mathbf{z}_o) = \mathbf{u}_b ; \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o, \mathbf{z}_o) = \mathbf{v}_b ; \quad \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o, \mathbf{z}_o) = \boldsymbol{\omega}_b \quad (5.5)$$

donde $(\mathbf{u}_b, \mathbf{v}_b, \mathbf{w}_b)$ son las componentes de los desplazamientos prescritos en el borde, y $\mathbf{u}(\mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o, \mathbf{z}_o) \dots$ son las funciones de desplazamiento en el sólido, evaluadas en el contorno.

Las condiciones de *carga* de un problema en elasticidad por tanto, se expresan imponiendo o bien las componentes de las tensiones o bien las de los desplazamientos —o una combinación de ambas— en cada superficie del sólido. Las fuerzas de masa se suponen conocidas en todos los casos.

Se llamará a \mathbf{T}^s *fuerza de superficie* impuesta y a las Ec. 5.4 las *condiciones* de las tensiones de borde. De forma análoga se referirán los valores de $\mathbf{u}_b \dots$ como los desplazamientos impuestos y las Ec. 5.5 serán las condiciones del desplazamiento en el borde.

Se define como un «*problema de contorno de primer orden*» en elasticidad, aquel en el que la tensión está prescrita sobre todo el contorno. Un ejemplo de esto sería una barra prismática rectangular con las aristas sobre los ejes coordenados y sometida a una tensión uniaxial \mathbf{p} en la dirección \mathbf{x} (longitudinal). En los extremos de la barra las fuerzas de superficie aplicadas o prescritas son:

$$\mathbf{T}_x^s = \pm \mathbf{p}, \quad \mathbf{T}_y^s = \mathbf{T}_z^s = \mathbf{0}$$

donde el signo positivo corresponde al plano \mathbf{x} positivo y lo contrario con el negativo, de acuerdo con la definición que se dio al comienzo de planos positivos y negativos.

Como en las caras extremas de la barra $\mu_x = \pm 1$ y $\mu_y = \mu_z = 0$, las condiciones de contorno son:

$$\sigma_{x_0} = \tau_{xy_0} = \tau_{xz_0} = 0$$

de forma que si se define el plano x positivo por $\mathbf{x} = \mathbf{1}$, se tiene que $\sigma_x(\mathbf{l}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = p$, $\tau_{xy}(\mathbf{l}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \tau_{xz}(\mathbf{l}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0$ en ese plano. En las caras laterales las fuerzas de superficie prescritas son:

$$\mathbf{T}_X^\mu = \mathbf{T}_Y^\mu = \mathbf{T}_Z^\mu = \mathbf{0}$$

y los cosenos directores en esas caras, con normales *hacia afuera* y en las direcciones $\pm \mathbf{y}$, son $\mu_x = 0$, $\mu_y = \pm 1$, $\mu_z = 0$. De las Ec. 5.4 se ve que las condiciones de contorno en esos planos son: $\sigma_{y_0} = \tau_{xy_0} = \tau_{yz_0} = 0$. Y de la misma forma se puede verificar que las condiciones de contorno en los planos «z» son $\sigma_{z_0} = \tau_{yz_0} = \tau_{xz_0} = 0$.

En el caso de que sean los desplazamientos los que se imponen sobre toda la superficie del sólido, el problema se clasifica como un «problema de contorno de *segundo orden*» en elasticidad. Un ejemplo sencillo sería el que contemplara a un sólido sin posibilidad de expansión o contracción de ningún tipo y al que se somete a una variación de temperatura. En este específico caso los desplazamientos prescritos en el contorno serían:

$$\mathbf{u}_b = \mathbf{v}_b = \boldsymbol{\omega}_b = \mathbf{0}$$

en toda la superficie.

Finalmente, puede darse el caso de que los desplazamientos estén impuestos sobre una parte de la superficie del sólido y en cambio, en otra parte se impongan las tensiones que actúan. En esa situación se encontraría con un caso de «problema de contorno *mixto*» en elasticidad.

Puede que sea ahora conveniente puntualizar un extremo de la máxima importancia para el manejo de los problemas de elasticidad: en principio, los problemas de elasticidad se tratan de forma totalmente opuesta a los de Resistencia de Materiales. En Elasticidad, el tratamiento es prácticamente el mismo para todos los casos: se busca una solución que lo sea de las ecuaciones *básicas* o de campo y a su vez que satisfaga las condiciones de contorno. En Resistencia de Materiales, habitualmente, cada problema se trata de forma única y la solución se basa en variaciones supuestas de tensiones o deformaciones, siendo los supuestos correctos sólo en casos especiales de cargas y formas del cuerpo considerado.

V. 3 Ecuaciones básicas en Deformación plana

Se dice que existe un estado de *deformación plana* cuando las componentes de los desplazamientos en un cuerpo toman la forma:

$$\begin{aligned} u &= u(x, y) \\ v &= v(x, y) \\ \omega &= 0 \end{aligned} \tag{5.6}$$

es decir, los únicos desplazamientos que no se anulan son funciones sólo de \mathbf{x} e \mathbf{y} . En todos los problemas de importancia práctica que satisfacen la Ec. 5.6 el cuerpo tiene una sección constante que se alarga sobre el eje \mathbf{z} .

Se va a desarrollar las ecuaciones básicas para este supuesto así como las restricciones que se deben imponer a un sólido cargado para que se encuentre en un estado de deformación plana.

Sustituyendo las Ec. 5.6 en las Ec. 5.2 las componentes de la deformación vienen dadas por:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\delta u}{\delta x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\delta v}{\delta y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x} \\ \varepsilon_z &= \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0\end{aligned}\tag{5.7}$$

Donde ε_x , ε_y y γ_{xy} son funciones sólo de x e y . De la forma generalizada de la ley de Hooke, Ec. 5.3, las componentes de las tensiones serán:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2G\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= 2G\varepsilon_y + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \tau_{xz} &= \tau_{yz} = 0\end{aligned}\tag{5.8}$$

Sin embargo, no se debe olvidar que estas tensiones van acompañadas de la componente σ_z que viene dada por

$$\sigma_z = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \nu(\sigma_x + \sigma_y)\tag{5.9}$$

Normalmente, y como σ_x no aparece en ninguna de las otras ecuaciones, no suele ser preciso tenerla en cuenta. Conviene recordar no obstante, que en deformación plana ε_z es cero pero σ_z no lo es.

Siguiendo con nuestro estudio, las ecuaciones de equilibrio (5.1) se reducen a

$$\begin{aligned}\frac{\delta \sigma_x}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{xy}}{\delta y} + F_x &= 0 \\ \frac{\delta \sigma_y}{\delta y} + \frac{\delta \tau_{xy}}{\delta x} + F_y &= 0\end{aligned}\tag{5.10}$$

siendo la que sería la tercera: $F_z = 0$, ya que σ_z es sólo función de x e y y $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Como consecuencia, para que exista un caso de deformación plana, no puede haber fuerzas de masa en la dirección Z . Por otra parte, en este estado el sólido debe ser de tipo cilíndrico, o bien de longitud infinita o bien finita con las secciones extremas fijas, de forma que se cumpla:

$$\omega_b = \omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{o}) = \omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{L}) = \tau_{xz0} = \tau_{yz0} = 0$$

que se satisfacen idénticamente en el estado de deformación plana.

Por tanto, las únicas condiciones de borde que se precisan para la resolución de problemas en deformación plana, son aquellos que se especifican en la superficie lateral. Las fuerzas serán sólo función de x e y y se podrán expresar:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_X^\mu &= \mathbf{T}_X^\mu(x_0, y_0) \\ \mathbf{T}_Y^\mu &= \mathbf{T}_Y^\mu(x_0, y_0) \\ \mathbf{T}_Z^\mu &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Y en la superficie lateral, $\boldsymbol{\mu}_Z = \mathbf{0}$, por los que las ecuaciones de contorno, Ec. 5.4 se convierten en:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_X^\mu(x_0, y_0) &= \sigma_{x_0}\boldsymbol{\mu}_X + \tau_{xy_0}\boldsymbol{\mu}_Y \\ \mathbf{T}_Y^\mu(x_0, y_0) &= \sigma_{y_0}\boldsymbol{\mu}_Y + \tau_{xy_0}\boldsymbol{\mu}_X\end{aligned}\quad (5.11)$$

La tercera de las Ec. 5.4 se satisface idénticamente.

Si se especifican desplazamientos en vez de fuerzas en la superficie lateral, las ecuaciones de las condiciones de desplazamiento en el contorno quedan:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(x_0, y_0) &= \mathbf{ub} \\ \mathbf{v}(x_0, y_0) &= \mathbf{ub}\end{aligned}\quad (5.12)$$

Por tanto, la solución de un problema específico en deformación plana consiste en la determinación de las ocho variables:

$$\sigma_X, \sigma_Y, \tau_{XY}, \varepsilon_X, \varepsilon_Y, \gamma_{XY}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$$

que deben satisfacer las ecuaciones, Ec. 5.7, 5.8 y 5.10, así como las condiciones de contorno expresadas según sea el caso por las Ec. 5.11 o bien 5.12. Como σ_z no es cero, es preciso que exista una fuerza lateral de sujeción —en caso de sólido NO infinito— que se puede calcular al final utilizando:

$$P_z = \iint \sigma_z dx dy$$

Se van a reducir ahora las ocho ecuaciones básicas de los problemas de deformación plana a dos ecuaciones en términos de los desplazamientos \mathbf{u} y \mathbf{v} . Para ello, se sustituyen los valores de las componentes de la deformación dados en la Ec. 5.7 en las Ec. 5.8, lo que da:

$$\begin{aligned}\sigma_X &= \lambda \left(\frac{\delta \mathbf{u}}{\delta x} + \frac{\delta \mathbf{v}}{\delta y} \right) + 2G \frac{\delta \mathbf{u}}{\delta x} \\ \sigma_Y &= \lambda \left(\frac{\delta \mathbf{u}}{\delta x} + \frac{\delta \mathbf{v}}{\delta y} \right) + 2G \frac{\delta \mathbf{v}}{\delta y} \\ \tau_{XY} &= G \left(\frac{\delta \mathbf{u}}{\delta x} - \frac{\delta \mathbf{v}}{\delta y} \right)\end{aligned}\quad (5.13)$$

Combinando estas ecuaciones con las Ec. 5.10 y eliminando las variables correspondientes a la tensión, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}\nabla_{\mathbf{u}}^2 + (\lambda + \mathbf{G})\frac{\delta}{\delta\mathbf{x}}\left(\frac{\delta\mathbf{u}}{\delta\mathbf{x}} + \frac{\delta\mathbf{v}}{\delta\mathbf{y}}\right) + \mathbf{F}\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{G}\nabla_{\mathbf{v}}^2 + (\lambda + \mathbf{G})\frac{\delta}{\delta\mathbf{y}}\left(\frac{\delta\mathbf{u}}{\delta\mathbf{x}} + \frac{\delta\mathbf{v}}{\delta\mathbf{y}}\right) + \mathbf{F}\mathbf{y} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.14)$$

donde

$$\nabla^2 = \frac{\delta^2}{\delta\mathbf{x}^2} + \frac{\delta^2}{\delta\mathbf{y}^2}$$

Esta es la forma más apropiada de las ecuaciones básicas para problemas de contorno de segundo orden en elasticidad para deformación plana.

El sistema de ocho ecuaciones, también se puede reducir a uno de tres ecuaciones en función de las componentes de las tensiones. Si se deriva la primera de las Ec. 5.7 dos veces con respecto a \mathbf{y} , la segunda, dos veces con respecto a \mathbf{x} y la tercera dos veces, una respecto a \mathbf{x} y otra respecto a \mathbf{y} y se suman, se obtiene la ecuación de compatibilidad para deformación plana:

$$\frac{\delta^2\epsilon_{\mathbf{x}}}{\delta\mathbf{y}^2} + \frac{\delta^2\epsilon_{\mathbf{y}}}{\delta\mathbf{x}^2} = \frac{\delta^2\gamma_{\mathbf{xy}}}{\delta\mathbf{x}\delta\mathbf{y}} \quad (5.15)$$

Esta ecuación es, en realidad, la misma que la primera de las Ec. 3.2, ya que el resto de las últimas se satisfacen idénticamente para problemas en deformación plana.

Despejando en las Ec. 5.8 las componentes de la deformación en términos de las de la tensión (o usando una forma alternativa de la ley de Hooke), sustituyendo el resultado en la Ec. 5.15 y combinando con las Ec. 5.10, se obtienen las ecuaciones de compatibilidad en función de las tensiones, es decir:

$$\nabla^2(\sigma_{\mathbf{x}} + \sigma_{\mathbf{y}}) = -\frac{1}{1-\mu}\left(\frac{\delta\mathbf{F}\mathbf{x}}{\delta\mathbf{x}} + \frac{\delta\mathbf{F}\mathbf{y}}{\delta\mathbf{y}}\right) \quad (5.16)$$

Las Ec. 5.10 y 5.16 constituyen un sistema completo de tres ecuaciones con tres incógnitas, $\sigma_{\mathbf{x}}$, $\sigma_{\mathbf{y}}$ y $\tau_{\mathbf{xy}}$. Este sistema, extremadamente útil para resolver problemas de contorno de primer orden, puede ser reducido a una sola ecuación con una sola variable independiente, como se verá más adelante.

Las componentes de la tensión en un cuerpo en estado de deformación plana, deben satisfacer las Ec. 5.10 y 5.16 así como las condiciones de contorno impuestas. Si se obtiene la solución a un problema determinado en estado de deformación plana en función de la tensión, se puede determinar la deformación a través de la ley de Hooke y los desplazamientos a través de las

relaciones deformación-desplazamiento que ya conocemos. Si lo que se determina primeramente son los desplazamientos a través de las Ec. 5.14, se seguiría el camino inverso para terminar conociendo las tensiones.

En el próximo capítulo se continuará con el estudio de la elasticidad plana, tensión plana, relación entre tensión y deformación plana, etc.

V. 4 Ecuaciones básicas en tres dimensiones

Las ecuaciones básicas en tres dimensiones son las Ec. (5.1), (5.2) y (5.3), es decir 15 ecuaciones con 15 incógnitas. Un método de solución, por tanto, sería tantear soluciones que satisfagan estas 15 ecuaciones y las condiciones de contorno impuestas. Sin embargo este sistema de ecuaciones no es práctico, por lo que se reducirá a sistemas más manejables en función de las condiciones de borde que se tengan. El procedimiento de reducción es similar al utilizado en la parte que se acaba de estudiar, de deformación plana.

Se empezará con la formulación de los desplazamientos. Sustituyendo las Ec. (5.2) en las (5.3) se obtendrán seis ecuaciones «tensión-desplazamiento» de la forma:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \lambda \varepsilon + 2G \frac{\delta u}{\delta x} \\
 \sigma_y &= \lambda \varepsilon + 2G \frac{\delta v}{\delta y} \\
 \sigma_z &= \lambda \varepsilon + 2G \frac{\delta \omega}{\delta z} \\
 \tau_{xy} &= G \left(\frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x} \right) \\
 \tau_{yz} &= G \left(\frac{\delta \omega}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta z} \right) \\
 \tau_{zx} &= G \left(\frac{\delta \omega}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta z} \right)
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

donde, como se sabe, $\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta \omega}{\delta z}$. Junto con las tres ecuaciones de equilibrio (5.1), se tendrá un sistema con 9 ecuaciones y 9 incógnitas. Una vez resuelto, las componentes de la deformación se pueden calcular a través de la ley de Hooke.

Las 9 ecuaciones encontradas en el párrafo anterior pueden ser reducidas más, eliminando las tensiones y llegando a tres ecuaciones en desplazamientos con las tres incógnitas correspondientes a éstos. Eliminando las componentes de las tensiones, sustituyendo las Ec. (5.17) en las (5.1), se encuentra:

$$\begin{aligned}
(\lambda + G) \frac{\delta \varepsilon}{\delta x} + G \nabla^2 u + F_x &= 0 \\
(\lambda + G) \frac{\delta \varepsilon}{\delta y} + G \nabla^2 v + F_y &= 0 \\
(\lambda + G) \frac{\delta \varepsilon}{\delta z} + G \nabla^2 \omega + F_z &= 0
\end{aligned} \tag{5.18}$$

donde se ha utilizado la conocida notación:

$$\nabla^2 = \frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2} + \frac{\delta^2}{\delta z^2}$$

Este grupo se llama *ecuaciones de equilibrio en términos de los desplazamientos* y son más conocidas como ecuaciones de *Navier*.

Si se utiliza este sistema de ecuaciones para resolver un problema en el que las fuerzas de superficie están prescritas sobre una parte del contorno, resulta conveniente expresar los términos de la derecha de las ecuaciones de las condiciones en el borde, Ec. (5.4), en función de las derivadas de los desplazamientos, o sea:

$$\begin{aligned}
T_x^\mu &= \lambda \varepsilon \mu_x + G \left(\frac{\delta u}{\delta x} \mu_x + \frac{\delta u}{\delta y} \mu_y + \frac{\delta u}{\delta z} \mu_z \right) + G \left(\frac{\delta u}{\delta x} \mu_x + \frac{\delta v}{\delta x} \mu_y + \frac{\delta \omega}{\delta x} \mu_z \right) \\
T_y^\mu &= \lambda \varepsilon \mu_x + G \left(\frac{\delta v}{\delta x} \mu_x + \frac{\delta v}{\delta y} \mu_y + \frac{\delta v}{\delta z} \mu_z \right) + G \left(\frac{\delta u}{\delta y} \mu_x + \frac{\delta v}{\delta y} \mu_y + \frac{\delta \omega}{\delta y} \mu_z \right) \\
T_z^\mu &= \lambda \varepsilon \mu_x + G \left(\frac{\delta \omega}{\delta x} \mu_x + \frac{\delta \omega}{\delta y} \mu_y + \frac{\delta \omega}{\delta z} \mu_z \right) + G \left(\frac{\delta u}{\delta z} \mu_x + \frac{\delta v}{\delta z} \mu_y + \frac{\delta \omega}{\delta z} \mu_z \right)
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Una vez obtenida la solución de \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} , las componentes de la deformación se pueden obtener a través de las Ec. (5.2) y las de la tensión, de las Ec. (5.3) o bien (5.17).

Otra forma de reducir el número de ecuaciones y variables es la formulación en términos de las tensiones, es decir, eliminar todas las variables a excepción de las componentes de la tensión. Para ello, se eliminarían primero las variables \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} , de las ecuaciones deformación-desplazamiento (5.2) obteniendo las ecuaciones de compatibilidad (3.2). Como se explicó en el Apartado 3.3, estas seis ecuaciones equivalen a tres ecuaciones de cuarto orden. Junto con las Ec. (5.1) y (5.3), forman un grupo de ecuaciones que se pueden resolver para las doce incógnitas.

El paso siguiente consiste en eliminar las componentes de la deformación de este último grupo, es decir entre las Ec. (5.1), (5.3) y (3.2). Para ello se escriben las dos últimas de las Ec. (5.1) de la forma:

$$\frac{\delta \tau_{yz}}{\delta z} = - \left(\frac{\delta \sigma_y}{\delta y} + \frac{\delta \tau_{xy}}{\delta x} + F_y \right)$$

y

$$\frac{\delta\tau_{YZ}}{\delta y} = -\left(\frac{\delta\sigma_z}{\delta z} + \frac{\delta\tau_{zx}}{\delta x} + Fz\right)$$

Derivando la primera respecto a y y la segunda respecto a z y sumando, se obtiene:

$$-2\frac{\delta^2\tau_{YZ}}{\delta y\delta z} = \frac{\delta^2\sigma_z}{\delta z^2} + \frac{\delta^2\sigma_y}{\delta y^2} + \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta\tau_{xz}}{\delta z} + \frac{\delta\tau_{xy}}{\delta y}\right) + \frac{\delta Fz}{\delta z} + \frac{\delta Fy}{\delta y}$$

y usando la primera de las Ec. (5.1), queda:

$$-2\frac{\delta^2\tau_{YZ}}{\delta y\delta z} = -\frac{\delta^2\sigma_x}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\sigma_y}{\delta y^2} + \frac{\delta^2\sigma_z}{\delta z^2} - \frac{\delta Fx}{\delta x} + \frac{\delta Fy}{\delta y} + \frac{\delta Fz}{\delta z} \quad (5.20)$$

Por otro lado, la segunda de las Ec. (3.2) y utilizando la ley de Hooke, Ec.(5.3), se puede escribir de la forma:

$$\frac{\delta^2}{\delta z^2} [(1+\mu)\sigma_y - \mu\theta] + \frac{\delta^2}{PAy^2} [(1+\mu)\sigma_z - \mu\theta] = \frac{\delta^2}{\delta y\delta z} [2(1+\mu)\tau_{yz}] \quad (5.21)$$

donde

$$\theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

Eliminando los términos que contienen τ_{yz} de las Ec. (5.20) y (5.21), se obtiene:

$$(1+\mu)\left(\nabla^2\theta - \nabla^2\sigma_x - \frac{\delta^2\theta}{\delta x^2}\right) - \mu\left(\nabla^2\theta - \frac{\delta^2\theta}{\delta x^2}\right) = (1+\mu)\left(\frac{\delta Fx}{\delta x} - \frac{\delta Fy}{\delta y} - \frac{\delta Fz}{\delta z}\right) \quad (5.22)$$

Operando de la misma forma, se pueden obtener otras dos ecuaciones similares a la (5.22).

Y, finalmente, se tiene el resultado:

$$\nabla^2 = -\frac{(1+\mu)}{(1-\mu)}\left(\frac{\delta Fx}{\delta x} + \frac{\delta Fy}{\delta y} + \frac{\delta Fz}{\delta z}\right) \quad (5.23)$$

y sustituyendo este valor de $\nabla^2\theta$ en la Ec. (5.22) se obtiene la primera de las ecuaciones que vienen a continuación. Las otras dos se deducen de forma análoga:

$$\begin{aligned} \nabla^2\sigma_x + \frac{1}{1+\mu}\frac{\delta^2\theta}{\delta x^2} &= -\frac{\mu}{1-\mu}\left(\frac{\delta Fx}{\delta x} + \frac{\delta Fy}{\delta y} + \frac{\delta Fz}{\delta z}\right) - 2\frac{\delta Fx}{\delta x} \\ \nabla^2\sigma_y + \frac{1}{1+\mu}\frac{\delta^2\theta}{\delta y^2} &= -\frac{\mu}{1-\mu}\left(\frac{\delta Fx}{\delta x} + \frac{\delta Fy}{\delta y} + \frac{\delta Fz}{\delta z}\right) - 2\frac{\delta Fy}{\delta y} \\ \nabla^2\sigma_z + \frac{1}{1+\mu}\frac{\delta^2\theta}{\delta z^2} &= -\frac{\mu}{1-\mu}\left(\frac{\delta Fx}{\delta x} + \frac{\delta Fy}{\delta y} + \frac{\delta Fz}{\delta z}\right) - 2\frac{\delta Fz}{\delta z} \end{aligned} \quad (a) \quad (5.24)$$

De la misma manera, se obtendrían tres ecuaciones en función de las componentes de las tensiones tangenciales:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \tau_{yz} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\delta^2 \theta}{\delta y \delta z} &= - \left(\frac{\delta F_x}{\delta y} + \frac{\delta F_y}{\delta z} \right) \\
\nabla^2 \tau_{zx} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\delta^2 \theta}{\delta z \delta x} &= - \left(\frac{\delta F_x}{\delta z} + \frac{\delta F_z}{\delta x} \right) \\
\nabla^2 \tau_{xy} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\delta^2 \theta}{\delta x \delta y} &= - \left(\frac{\delta F_y}{\delta x} + \frac{\delta F_x}{\delta y} \right)
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Las seis ecuaciones (5.25) que son equivalentes a tres ecuaciones independientes de cuarto orden son las *ecuaciones de compatibilidad en tensiones* y son habitualmente conocidas como las *ecuaciones de compatibilidad de Beltrami-Michell en tensiones*. Estas ecuaciones junto con las correspondientes al equilibrio, suponen seis ecuaciones independientes de las que se pueden obtener las seis componentes de las tensiones. Una vez conocidas las tensiones, las deformaciones se calculan a través de las Ec. (5.3), como ya se ha repetido, y los desplazamientos se pueden obtener integrando las Ec. (5.2).

V. 5 Principio de superposición

En el capítulo tercero, se habló de este principio aplicado a las deformaciones y se demostró para un caso particular, que el campo de desplazamientos debido a dos distribuciones de deformaciones diferentes, pueden sumarse —superponerse— para dar el resultante de la acción de ambas actuando al mismo tiempo. También se hizo notar que esto era cierto siempre que las deformaciones o desplazamientos fueran *pequeños* de forma que la relación existente entre unas y otros fuera lineal. En este apartado se va a analizar este principio para las ecuaciones básicas en elasticidad lineal.

Bajo el supuesto de deformaciones infinitesimales y relaciones tensión-deformación también lineales, todas las ecuaciones básicas en elasticidad, tal y como se muestran, y las ecuaciones que establecen las condiciones de contorno, Ec. (5.4) y (5.5), son ecuaciones lineales. Además, esas ecuaciones son o bien homogéneas en las variables dependientes, o bien no homogéneas pero con los términos correspondientes a las fuerzas externas como únicos términos no homogéneos, como en las Ec. (5.1), (5.25) y (5.4).

Debido a la naturaleza de estas ecuaciones, las variables dependientes varían linealmente en función de las cargas externas y pueden, por tanto, superponerse. El principio de superposición se puede enunciar como sigue: «Las variables dependientes obtenidas para cada conjunto de fuerzas externas actuando por separado, pueden superponerse para obtener el efecto de todas las fuerzas externas actuando en conjunto.»

Para demostrar lo anterior se considerará la formulación en tensiones donde las ecuaciones básicas son las ecuaciones de equilibrio (5.1) y las de compatibilidad en tensiones (5.25). Sean $\sigma_x \dots \tau_{xz}$ las componentes de las tensiones que satisfacen las ecuaciones básicas y las condiciones de contorno impuestas, para un cierto sólido elástico sometido a las fuerzas de masa $\mathbf{F}_x \dots$ y a las de superficie $\mathbf{T}_x^\mu \dots$. Por otro lado, llamemos $\sigma_x^I \dots \tau_{zx}^I$ a las componentes de las tensiones

generadas en el mismo sólido por las fuerzas $F_X^I \dots T_X^{I\mu}$. Por lo tanto las componentes con o sin «prima» cumplirán los sistemas de ecuaciones siguientes:

- Ecuaciones de equilibrio,

$$\frac{\delta\sigma_x}{\delta x} + \frac{\delta\tau_{xy}}{\delta y} + \frac{\delta\tau_{xz}}{\delta z} + F_x = 0 \quad (x, y, z)$$

$$\frac{\delta\sigma_x^I}{\delta x} + \frac{\delta\tau_{xy}^I}{\delta y} + \frac{\delta\tau_{xz}^I}{\delta z} + F_x^I = 0 \quad (x, y, z)$$

- Ecuaciones de compatibilidad,

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1+\mu} \frac{\delta^2 \theta}{\delta x^2} &= -\frac{\mu}{1-\mu} \left(\frac{\delta F_x}{\delta x} + \frac{\delta F_y}{\delta y} + \frac{\delta F_z}{\delta z} \right) - 2 \frac{\delta F_x}{\delta x} \\ \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\delta^2 \theta}{\delta y \delta z} &= -\left(\frac{\delta F_z}{\delta y} + \frac{\delta F_y}{\delta z} \right) \end{aligned} \right\} (x, y, z)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \sigma_x^I + \frac{1}{1+\mu} \frac{\delta^2 \theta^I}{\delta x^2} &= -\frac{\mu}{1-\mu} \left(\frac{\delta F_x^I}{\delta x} + \frac{\delta F_y^I}{\delta y} + \frac{\delta F_z^I}{\delta z} \right) - 2 \frac{\delta F_x^I}{\delta x} \\ \nabla^2 \tau_{xy}^I + \frac{1}{1+\mu} \frac{\delta^2 \theta^I}{\delta y \delta z} &= -\left(\frac{\delta F_z^I}{\delta y} + \frac{\delta F_y^I}{\delta z} \right) \end{aligned} \right\} (x, y, z)$$

- Ecuaciones de condiciones de contorno,

$$\begin{aligned} \sigma_{x_0} \mu_x + \tau_{xy_0} \mu_y + \tau_{xz_0} \mu_z &= T_x^\mu & (x, y, z) \\ \sigma_{x_0}^I \mu_x + \tau_{xy_0}^I \mu_y + \tau_{xz_0}^I \mu_z &= T_x^{I\mu} & (x, y, z) \end{aligned}$$

y sumando cada grupo de ecuaciones dos a dos, se obtiene:

$$\frac{\delta(\sigma_x + \sigma_x^I)}{\delta x} + \frac{\delta(\tau_{xy} + \tau_{xy}^I)}{\delta y} + \frac{\delta(\tau_{xz} + \tau_{xz}^I)}{\delta z} + (F_x + F_x^I) = 0 \quad (x, y, z)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2(\sigma_x + \sigma_x^I) + \dots &= -\frac{\mu}{1-\mu} \left[\frac{\delta(F_x + F_x^I)}{\delta x} + \dots \right] \dots \\ \nabla^2(\tau_{yz} + \tau_{yz}^I) + \dots &= -\left[\frac{\delta(F_x + F_x^I)}{\delta y} + \dots \right] \end{aligned} \right\} (x, y, z)$$

y por último

$$(\sigma_{x_0} + \sigma_{x_0}^I) \mu_x + (\tau_{xy_0} + \tau_{xy_0}^I) \mu_y + (\tau_{xz_0} + \tau_{xz_0}^I) \mu_z = (T_x^\mu + T_x^{I\mu}) \quad (x, y, z)$$

Los resultados muestran que las componentes de las tensiones $(\sigma_x + \sigma_x^I) \dots (\tau_{xz} + \tau_{xz}^I)$ son las soluciones para el sólido elástico dado sometido a las fuerzas de masa $(F_x + F_x^I) \dots$ y a las

fuerzas de superficie ($\mathbf{T}_x^\mu + \mathbf{T}_x^{1\mu}$)... En otras palabras, dos o más campos de tensiones pueden ser superpuestos y el resultado obtenido es el mismo que el que se obtendría partiendo del campo suma de los primeros.

V. 6 Unicidad de las Soluciones

Se va a demostrar en lo que sigue, que las soluciones obtenidas, en elasticidad, son únicas. Es decir, para una distribución de fuerzas de masa y de superficie dada, sólo existe una solución para las componentes de las tensiones que sea consistente con las ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad.

Se considera un sólido sometido a una distribución de fuerzas de contorno $\mathbf{T}_x^\mu, \mathbf{T}_y^\mu, \mathbf{T}_z^\mu$, dada, y a un campo de fuerzas de masa $\mathbf{F}_x, \mathbf{F}_y, \mathbf{F}_z$, también dado. Ahora se supone que hay dos conjuntos diferentes de componentes de las tensiones que satisfacen las ecuaciones básicas y las condiciones de contorno. Si se llama al primer conjunto: $\sigma_x^1 \dots \tau_{xy}^1$ y al segundo: $\sigma_x^2 \dots \tau_{xy}^2$ y escribiendo las ecuaciones de equilibrio para cada conjunto, se tendrá:

$$\frac{\delta\sigma_x^1}{\delta x} + \frac{\delta\tau_{xy}^1}{\delta y} + \frac{\delta\tau_{xz}^1}{\delta z} + \mathbf{F}_x = 0 \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$$

$$\frac{\delta\sigma_x^2}{\delta x} + \frac{\delta\tau_{xy}^2}{\delta y} + \frac{\delta\tau_{xz}^2}{\delta z} + \mathbf{F}_x = 0 \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$$

Análogas ecuaciones se podrían escribir para la compatibilidad y las condiciones de contorno. Si se restan las dos ecuaciones anteriores, se obtendrá:

$$\frac{\delta\sigma_x}{\delta x} + \frac{\delta\tau_{xy}}{\delta y} + \frac{\delta\tau_{xz}}{\delta z} = 0 \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$$

ya que el valor de \mathbf{F}_x es una constante dada.

Se ve que las tensiones $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ representan el estado de tensiones de un sólido libre sin carga alguna, luego, es evidente que estas últimas tensiones son nulas y en consecuencia, como $\sigma_x = \sigma_x^1 - \sigma_x^2 = 0$ tendremos que $\sigma_x^1 = \sigma_x^2$ y lo mismo ocurre con las variables $\tau \dots$, así es que demostramos que esos dos teóricos conjuntos de tensiones coinciden y son iguales. Solo existe una solución.

V. 7. Resumen

En este capítulo se ha visto que la solución de un problema dado en elasticidad, consiste en determinar el valor de las tensiones, las deformaciones y los desplazamientos que satisfagan las 15 ecuaciones básicas y las tensiones y/o desplazamientos impuestos en el contorno. En la solución de un problema determinado, existen cinco conjuntos de ecuaciones que se pueden utilizar dependiendo la elección, de los datos que se den en el enunciado del problema.

Las ecuaciones de la elasticidad se simplifican de manera importante en determinado tipo de situaciones en las que las tensiones o desplazamientos deben cumplir unas condiciones específicas. Así se tiene el caso estudiado de la *deformación plana*.

Finalmente, se ha visto que la solución de un problema de elasticidad lineal, es única, siendo por tanto cierto el principio de la *unicidad de la solución*.

CAPÍTULO VI. CRITERIOS DE FALLAS

VI. 1 Introducción

Una pieza de una máquina puede fallar por diferentes causas:

- Excesiva deformación elástica
- Excesiva deformación plástica
- Rotura bajo carga estática
- Rotura bajo cargas de impacto
- Rotura bajo cargas cíclicas
- Desgaste

El objetivo de este capítulo es estudiar el fallo bajo **cargas estáticas**. Una carga estática es una acción estacionaria de una fuerza o un momento que actúan sobre cierto objeto. Para que una fuerza o momento sean estacionarios o estáticos deben poseer magnitud, dirección y punto (o puntos) de aplicación que no varíen con el tiempo.

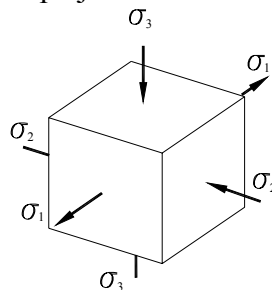
- *Distorsión o deformación plástica*: la pieza adquiere una deformación plástica tal que le impide cumplir su misión. El por ciento de deformación admisible depende de cada aplicación. El límite elástico nominal de los materiales suele definirse para un 0,2 % de deformación plástica.

- *Rotura*: el fallo por rotura puede ser de dos tipos: dúctil (precedida de gran deformación plástica) o frágil (no precedida de gran deformación plástica y por lo tanto muy peligrosa). Obviamente, dicho comportamiento definirá el criterio de fallo a emplear en materiales dúctiles y materiales frágiles.

La resistencia (fluencia y rotura) es una propiedad o característica de un material o elemento mecánico. Esta propiedad puede ser inherente al material o bien originarse de su tratamiento y procesado. Habitualmente sólo se dispone de información correspondiente al ensayo de tracción. Los componentes de máquinas en general trabajan bajo estados de tensión multidireccional. El objetivo de las teorías de fallo estático es relacionar el fallo en un estado **unidireccional** (ensayo de tracción) con el fallo bajo **cualquier** estado de tensiones.

En este capítulo se examinarán las relaciones existentes entre la resistencia de una pieza y su carga estática previsible, a fin de seleccionar el material y sus dimensiones óptimas para cumplir el requisito de que la pieza no falle en servicio.

Analizando un estado tensional (ET) complejo:



$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \quad \text{y} \quad \tau_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

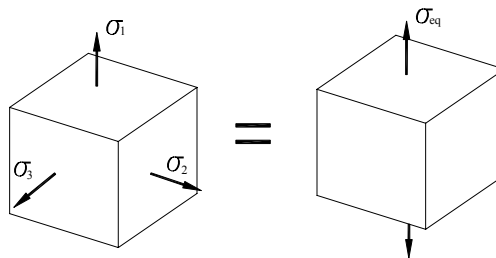
Para el E.T. lineal, es fácil determinar el estado límite del material, como se planteó anteriormente, con solo hacer un ensayo de tracción (σ_Y ó σ_{MAX}).

Sin embargo, en el caso del E.T. complejo (plano ó volumétrico) muy frecuentes en elementos de máquinas, la determinación de las tensiones límites σ_{1lim} , σ_{2lim} y σ_{3lim} para que ocurra la rotura o fluencia del material es imposible de realizar, pues los E.T. son infinitos, por lo que habría que realizar un número infinito de experimentos con máquinas y aparatos muy complejos.

Por consiguiente es importante establecer criterios de comportamiento de materiales bajo estados tensionales complejos, los que se conocen como **Teorías de Resistencia** o **Criterios de Fallas**.

Desafortunadamente hasta la fecha son incompletos los criterios cuantitativos para la fluencia y fractura de los materiales bajo estados multiaxiales de esfuerzos, ya que ciertas cuestiones permanecen sin establecer y son parte activa de investigación de los materiales.

Los **Criterios de Falla** tienen un objetivo común que es el de sustituir el E.T. complejo por un E.T. simple equivalente uniaxial, para el que, como ya se ha estudiado, es fácil establecer la condición de resistencia.



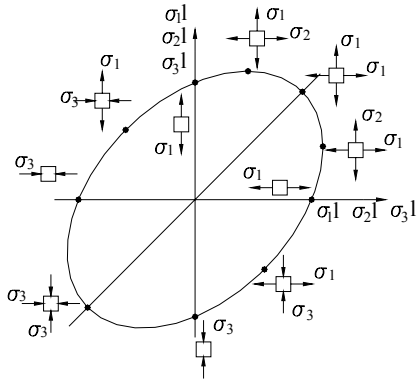
Se denomina por tanto **Tensión Equivalente** o **Patrón** a la tensión que se debe crear en una barra sometida a tracción para que su estado tensional sea tan peligroso como el E.T. en cuestión. De modo que una vez establecida la σ_{eq} el chequeo de resistencia se realiza como en el caso del E.T. uniaxial.

Por lo tanto el problema se reduce a expresar σ_{eq} en función de σ_1 , σ_2 y σ_3 .

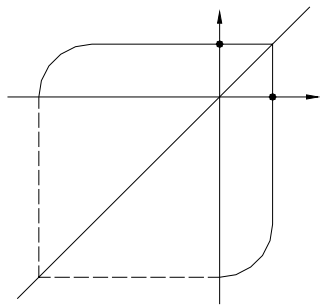
$$\sigma_{eq} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

La seguridad de una u otra hipótesis de resistencia se comprueba experimentalmente a partir de ensayos de E.T. biaxiales, los que se obtienen cuando se ensayan tubos de paredes delgadas sometidos a una presión interna y una fuerza axial simultánea. Variando la relación entre las tensiones principales se puede plantear una curva sobre la base de las tensiones principales límites dadas por el momento de la rotura o el comienzo de la fluencia.

De esta forma se pueden construir los **Diagramas de las Tensiones Límites**:



MATERIAL DUCTIL



MATERIAL FRÁGIL

A continuación se estudiarán las teorías de resistencia de acuerdo al orden de aparición de cada una.

VI.2- Primera teoría o Teoría de la tensión Normal Máxima

Surgió en el siglo XVII y la planteó Galileo Galilei.

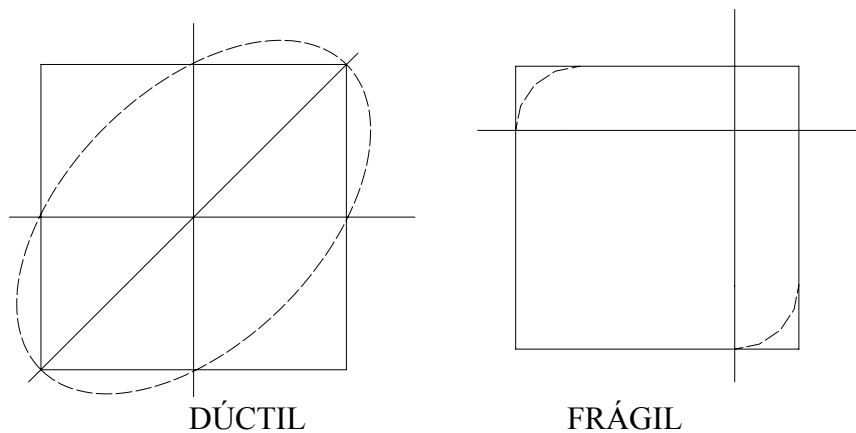
“Un material sometido a un estado tensional complejo no fallará si la tensión normal máxima que actúa sobre el mismo no excede a la tensión normal admisible para el estado uniaxial de tensiones”.

Condición de resistencia:

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 \leq [\sigma]_T$$

Si $|\sigma_1| < |\sigma_3|$ entonces además se debe cumplir que:

$$\sigma_{eq} = \sigma_3 \leq [\sigma]_C$$



Esta hipótesis considera solamente la influencia de la tensión principal máxima y prescinde de las otras dos para evaluar la resistencia del material.

Aplicación actual: NINGUNA

VI.3. Segunda teoría de resistencia o Teoría de las deformaciones lineales máximas.

Surge en el siglo XVII y fue planteada por Edmund Mariotte:

“Un material sometido a un estado tensional complejo no fallará si la deformación lineal unitaria máxima no excede a la deformación unitaria admisible para el estado tensional simple”.

La condición de resistencia se obtiene aplicando la Ley de Hooke generalizada:

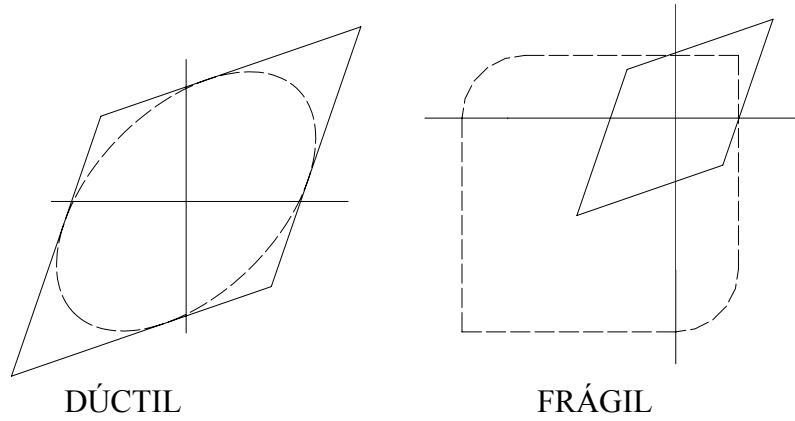
$$\text{Estado lineal} \rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\text{Estado volumétrico} \rightarrow \varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3))$$

$$\frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{\sigma}{E}$$

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]_T$$

Al graficar los resultados se obtiene:



Al principio esta teoría fue muy utilizada, pero se desechó debido a su inexactitud.

VI.4. Tercera teoría de resistencia.

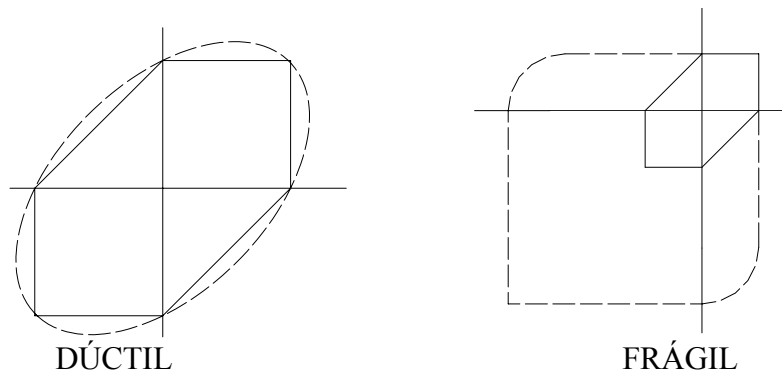
Desarrollado en el siglo XVIII por Coulomb. Utiliza como criterio la tensión tangencial máxima. “Un material sometido a un E.T. complejo no fallará si la tensión tangencial máxima que actúa sobre el mismo no excede la tensión tangencial admisible para el E.T. simple”.

$$\text{E.T. simple} \rightarrow \tau_{MAX} = \frac{\sigma}{2}$$

$$\text{E.T. complejo} \rightarrow \tau_{MAX} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

$$\frac{\sigma}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

$$\sigma_{EQ} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]_T$$



La teoría es segura para los materiales dúctiles pero se desaprovecha mucho el material en los de comportamiento frágil en caso de existir compresiones.

Esta teoría se utiliza actualmente para el caso de materiales dúctiles.

VI.5- Cuarta teoría

Desarrollada en el siglo XX por Nises, Hubert y Hencky. Utiliza como criterio de resistencia la energía potencial unitaria por cambio de forma.

“Un material sometido a un E.T. complejo no fallará si la energía potencial de deformación unitaria por cambio de forma máxima no excede al valor de la energía potencial de cambio de forma admisible para el E.T. uniaxial”.

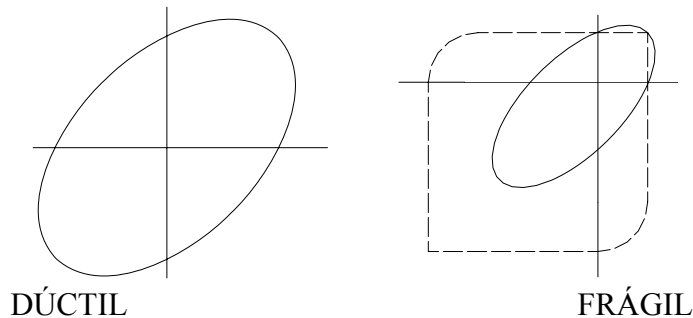
$$\frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] \leq \frac{1+\mu}{6E} 2[\sigma]^2$$

$$\sigma_{EQ} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} \leq [\sigma]$$

Si una de ellas es nula:

$$\sigma_{EQ}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3 = \sigma_{LIM}^2$$

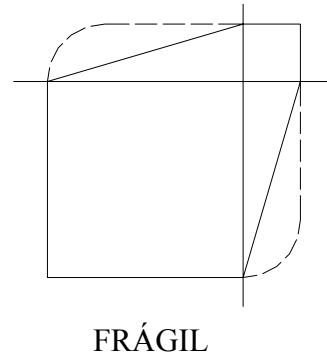
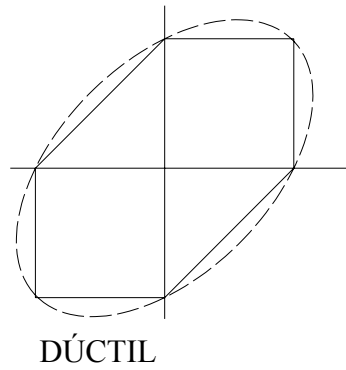
Lo que corresponde a la ecuación de una elipse.



Siendo más exacta la 4ta que la 3ra pues coincide exactamente.

VI.6- Teoría de Mohr

Desarrollada por Otto Mohr en el siglo XX. A partir del diagrama circular del E.T. de Mohr para el caso de Tracción y compresión uniaxial se llega a la condición de resistencia.



$$\sigma_{EQ} = \sigma_1 - k \sigma_3 \leq [\sigma]_T$$

$$k = \frac{[\sigma]_T}{[\sigma]_C}$$

Para el caso de materiales dúctiles esta teoría se comporta similar a la 3ra, pero en el caso de materiales frágiles aprovecha mucho mejor la zona.

VI.7- Criterio de Mohor modificado

Este criterio representa una modificación del criterio de Coulomb-Mohr. El criterio de resistencia se escribe matemáticamente mediante tres condiciones que deben cumplirse para que el punto resista:

$$\sigma_1 < \sigma_{UT}$$

$$\sigma_3 > -\sigma_{UC}$$

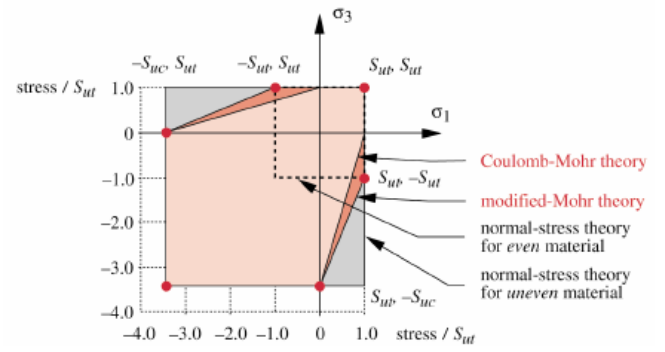
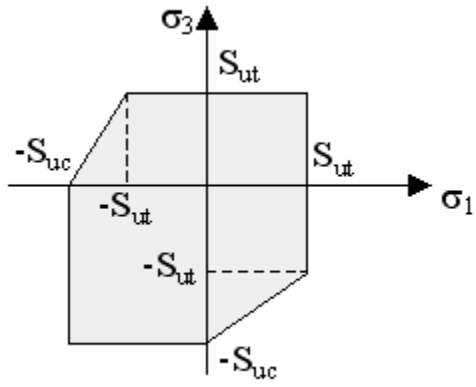
$$\sigma_1 \cdot \frac{\sigma_{UC} - \sigma_{UT}}{\sigma_{UC} \cdot \sigma_{UT}} - \frac{\sigma_3}{\sigma_{UC}} < 1$$

Donde:

σ_1, σ_2 y σ_3 son las tensiones principales en el punto analizado, ordenadas de forma que:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

Este criterio de resistencia puede representarse gráficamente en un diagrama σ_1 - σ_3 , como se indica en la figura, representando la zona sombreada la zona segura, para la cual el material resiste de acuerdo con dicho criterio.



CAPÍTULO VII. APLICACIÓN EN EXTENSOMETRÍA

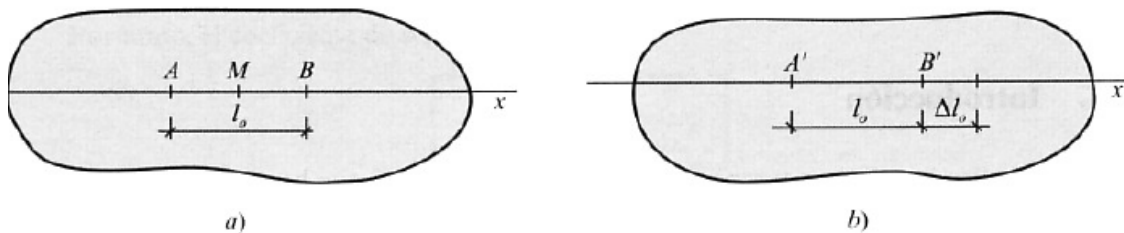
VII. 1. Introducción

El objetivo que se persigue con los métodos experimentales es el conocimiento de la distribución de tensiones en un sólido elástico. Con la extensometría se llega al conocimiento del estado tensional mediante la obtención experimental de los desplazamientos dada la relación lineal que existe entre tensiones y deformaciones.

Se supone, por ejemplo, el sólido representado en la Fig. (a) y se considerará un punto M, en el que se desea conocer el valor de la deformación longitudinal unitaria en la dirección del eje x . Si se procede experimentalmente, se marcan los puntos A y B que determinan un segmento en la dirección del eje x y tales que M es el punto medio. Al cargar el sólido y deformarse, la distancia $AB = l_0$ ha experimentado una variación de longitud Δl_0 , por lo que la deformación longitudinal unitaria en M, en la dirección del eje x será:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l_0}{l_0}$$

Pero el valor de ε_x obtenido operando de la forma indicada no es exacto, salvo en el caso que sea una función lineal de la abscisa x . Se habrá cometido un error, que depende del gradiente de deformaciones y de la longitud l_0 del segmento.



Vemos, pues, una primera particularidad que se presenta en los métodos extensométricos: la dificultad de calcular con exactitud la matriz de deformación en un determinado punto del sólido elástico.

Definición de Extensometría:

Robert Hooke estableció en 1678 la relación que existe entre tensiones y deformaciones en los cuerpos sometidos a sollicitaciones mecánicas. Si el material es isótropo y homogéneo y no se sobrepasa su límite elástico, entonces la relación es lineal.

Basándonos en este principio, *la extensometría es el método que tiene por objeto la medida de las deformaciones superficiales de los cuerpos.*

Principio de funcionamiento de los extensómetros eléctricos.

Los extensómetros eléctricos se basan en el principio de que los metales cambian su resistencia eléctrica cuando sufren una deformación.

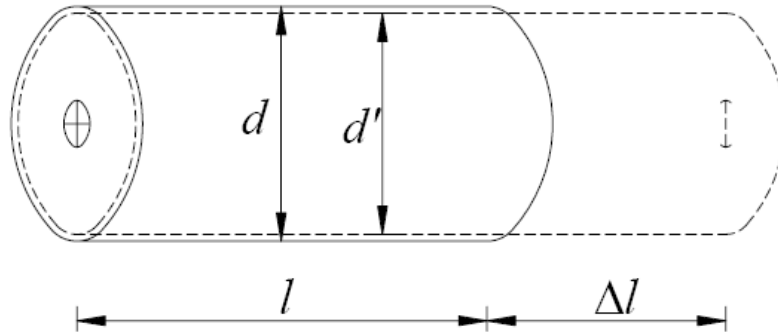


Fig.7.1. Deformación de un alambre sometido a tracción

En la Fig. la línea continua muestra parte de un alambre metálico, como los usados en los extensómetros, donde l es la longitud original antes de la deformación, y en ese momento tiene una resistencia eléctrica R . La línea de trazos representa el alambre estirado, su longitud ahora es igual a $l + \Delta l$ y la resistencia igual a $R + \Delta R$. La resistencia R es dada por:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$$

Donde:

- A : área de la sección transversal del alambre.
- ρ : resistencia del metal del alambre.

Las galgas extensométricas eléctricas fueron introducidas en 1939 por Runge y Simmons. Una galga extensométrica de resistencia eléctrica está constituida por un hilo metálico muy fino y dispuesto formando una rejilla continua, como se indica en la Fig. 7.1, es decir, que la mayor parte de su longitud está distribuida paralelamente a una dirección fija, y está adherida a una base muy delgada no conductora. Los extremos del hilo, más gruesos, sirven para soldar los terminales a los cables de conexión de los instrumentos de medida.

Estos extensómetros pueden ser de sección transversal circular o rectangular.

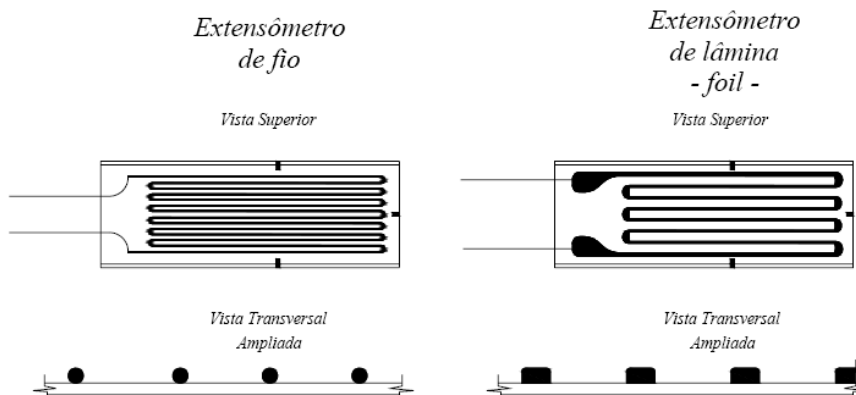


Fig. 7.2. Extensómetros eléctricos de resistencia

Las deformaciones específicas pueden ser determinadas por medio de la variación de la resistencia eléctrica dada por la ecuación siguiente:

$$\frac{\Delta R}{R} = K \varepsilon$$

Donde:

R es la resistencia eléctrica del alambre, en Ω .

ΔR es la variación de la resistencia eléctrica del alambre, en Ω .

ε es la deformación unitaria del alambre, en mm. En este caso, se denomina alambre al conductor de la red de medida del extensómetro.

K es la constante característica del extensómetro:

$$K = \frac{\Delta R/R}{\varepsilon}$$

Que depende, como se ve, del cambio de dimensiones del conductor y de la variación de la resistividad. Se denomina *factor de sensibilidad* del extensómetro, y es un valor que siempre lo proporciona el fabricante.

Selección de los extensómetros

Existe una gran cantidad de extensómetros de diferentes especificaciones en dependencia del propósito y de las condiciones de medición. Una selección incorrecta resultará en una adquisición de medidas no efectiva. Para la correcta selección de los extensómetros es necesario tener en cuenta algunas características de operación tales como:

- Rango de temperaturas a que el extensómetro estará sometido.
- Límite máximo de deformación del propio extensómetro.
- Corriente (amperaje) máximo soportado por el extensómetro.
- Resistencia a la humedad.
- Durabilidad necesaria.

Cada fabricante brinda las especificaciones más precisas sobre cada tipo fabricado, así la tabla que sigue es solamente una indicación sobre los tipos más usados de extensómetros y sus características.

Tabla. 7.1. Especificaciones sobre tipos de extensómetros

Tipo (base)	Temperatura de operação (°C)	Alongamento máximo (%)	Corrente máxima (mA)	Mudança da resistência do extensômetro com a idade	Principais aplicações
Lâmina (Phester)	-50 ~ +180	2	30 ou menos	Pequena	Medidas gerais de tensão, transdutores, medidas de tensões residuais.
Lâmina (poliamida)	-50 ~ +200	2	30 ou menos	Pequena	Medidas gerais de tensão, transdutores, medidas de tensões residuais.
Lâmina (poliamida para grandes deformações)	-10 ~ +120	8 ~ 10	30 ou menos	Pequena	Medidas de deformações plásticas
Fios * (papel)	-50 ~ +80	1,2	25 ou menos	Ligeira variação	Medidas usuais de tensões
Fios (poliéster)	-50 ~ +170	1	25 ou menos	Pequena	Medidas usuais de tensão em estruturas no campo

Es importante resaltar que cabe al especialista la correcta selección del extensómetro para el fin deseado, y como se indicó anteriormente, un error en este sentido dará como resultado que las lecturas podrán ser perjudicadas, haciendo que los datos obtenidos no coincidan con el fenómeno estudiado.

Análisis de los datos obtenidos con galgas extensométricas

Los extensómetros eléctricos se adhieren normalmente a la superficie libre de un sólido elástico, sobre el punto en el que se quiere calcular su estado tensional. Si se toma un sistema de ejes x e y con origen en dicho punto, dado que las galgas miden las deformaciones longitudinales unitarias y la expresión de ε_n para una determinada dirección en el plano, definida por $\bar{u}(\alpha, \beta)$, viene dada por:

$$\varepsilon_n = \varepsilon_x \alpha^2 + \varepsilon_y \beta^2 + \gamma_{xy} \alpha \beta$$

Es evidente que se tendrá que hacer tres medidas, es decir, colocar tres extensómetros para determinar ε_x , ε_y y γ_{xy}

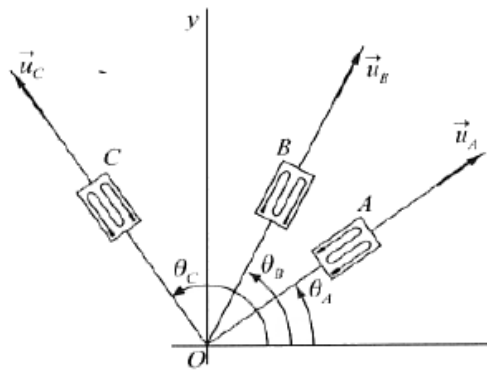


Fig. 7.3. Colocación de tres extensómetros

Si ε_A , ε_B , ε_C son las lecturas de los extensómetros A, B y C, respectivamente, se tiene el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} \varepsilon_A = \varepsilon_X \cos^2 \theta_A + \varepsilon_Y \operatorname{sen}^2 \theta_A + \gamma_{XY} \cos \theta_A \cdot \operatorname{sen} \theta_A \\ \varepsilon_B = \varepsilon_X \cos^2 \theta_B + \varepsilon_Y \operatorname{sen}^2 \theta_B + \gamma_{XY} \cos \theta_B \cdot \operatorname{sen} \theta_B \\ \varepsilon_C = \varepsilon_X \cos^2 \theta_C + \varepsilon_Y \operatorname{sen}^2 \theta_C + \gamma_{XY} \cos \theta_C \cdot \operatorname{sen} \theta_C \end{cases}$$

cuyas soluciones son las componentes de la matriz de deformación en el punto considerado.

Conocida ésta queda perfectamente determinado el estado de deformación en dicho punto.

Las tres galgas suelen venir montadas en rosetas, como indica la Fig. 7.4. a). En casos particulares es posible la determinación de las tensiones mediante rosetas de menos de tres elementos, como ocurriría en el caso de una pieza sometida a tracción o compresión axial, en el que bastaría colocar una sola galga, o en caso de un estado tensional isotrópico $\sigma_{nx} = \sigma_{ny} = \sigma_1 = \sigma_2$ y $\tau_{xy} = 0$ en el que la lectura de una sola galga en una dirección cualquiera da la tensión en cualquier dirección:

$$\sigma = \frac{E}{1 - \mu} \varepsilon$$

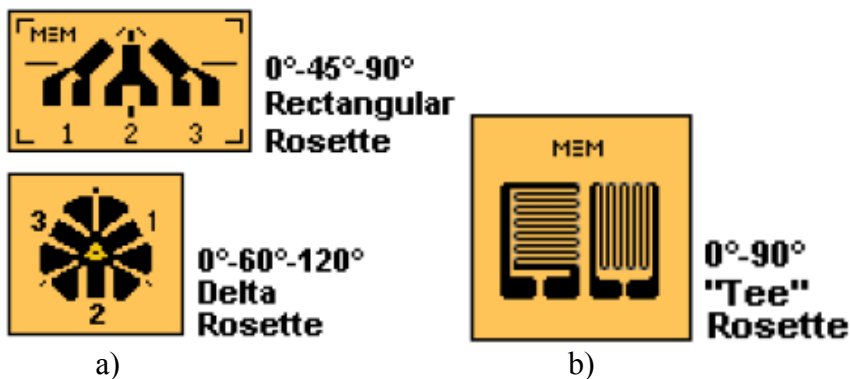


Fig. 7.4. Rosetas

Si fueran necesarias dos galgas, una disposición de las galgas en direcciones ortogonales es la indicada Fig. 7.4. b).

A partir de las componentes de la matriz de deformación obtenidas se pueden calcular las deformaciones principales mediante el Círculo de Mohr, o con las ecuaciones:

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_X + \varepsilon_Y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_X - \varepsilon_Y)^2 + \gamma_{XY}^2}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_X + \varepsilon_Y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_X - \varepsilon_Y)^2 + \gamma_{XY}^2}$$

y las direcciones principales:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{\gamma_{XY}}{\varepsilon_X - \varepsilon_Y}$$

La forma más simple de obtener las tensiones principales es despejarlas de las leyes de Hooke:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu\sigma_2) \quad ; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \mu\sigma_1)$$

$$\sigma_1 = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2) \quad ; \quad \sigma_2 = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1)$$

Por su amplia utilización se particularizarán los casos de las rosetas siguientes:

- a) Roseta rectangular de tres elementos.
- b) Roseta en delta.

Calculando en cada caso los valores de las tensiones y deformaciones principales, así como las direcciones correspondientes.

a) Roseta rectangular de tres elementos

En esta roseta dos galgas están colocadas ortogonalmente y la tercera en la bisectriz de las otras dos, es decir, las tres galgas forman ángulos de 45° y 90° con el eje x, como se indica en la Fig 7.5.

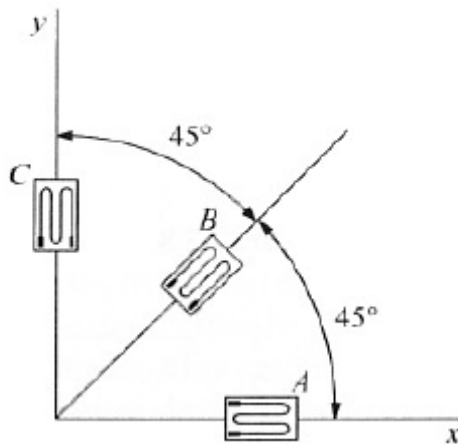


Fig 7.5. Roseta de 45°

El sistema aplicado a este caso se reduce a:

$$\begin{cases} \varepsilon_A = \varepsilon_X \\ \varepsilon_B = \varepsilon_X \frac{1}{2} + \varepsilon_Y \frac{1}{2} + \gamma_{XY} \frac{1}{2} \\ \varepsilon_C = \varepsilon_Y \end{cases}$$

Cuyas soluciones son inmediatas:

$$\begin{aligned} \varepsilon_X &= \varepsilon_A \\ \varepsilon_Y &= \varepsilon_C \\ \gamma_{XY} &= 2\varepsilon_B - \varepsilon_A - \varepsilon_C \end{aligned}$$

Con estos valores se puede construir el círculo de Mohr y a partir de él calcular las deformaciones principales:

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_C}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_A - \varepsilon_C)^2 + (2\varepsilon_B - \varepsilon_A - \varepsilon_C)^2}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_C}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_A - \varepsilon_C)^2 + (2\varepsilon_B - \varepsilon_A - \varepsilon_C)^2}$$

Y las direcciones principales:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\varepsilon_B - \varepsilon_A - \varepsilon_C}{\varepsilon_A - \varepsilon_C}$$

Las tensiones principales tendrán por expresiones:

$$\sigma_1 = E \left[\frac{\varepsilon_A + \varepsilon_C}{2(1-\mu)} + \frac{1}{2(1+\mu)} \sqrt{(\varepsilon_A - \varepsilon_C)^2 + (2\varepsilon_B - \varepsilon_A - \varepsilon_C)^2} \right]$$

$$\sigma_2 = E \left[\frac{\varepsilon_A + \varepsilon_C}{2(1-\mu)} - \frac{1}{2(1+\mu)} \sqrt{(\varepsilon_A - \varepsilon_C)^2 + (2\varepsilon_B - \varepsilon_A - \varepsilon_C)^2} \right]$$

b) Roseta en delta

En esta roseta los ejes de las tres galgas forman ángulos $\theta_A = 0^\circ$; $\theta_B = 120^\circ$; $\theta_C = 240^\circ$ con el eje x. (Fig. 7.6)

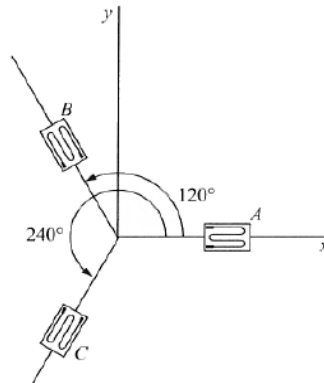


Fig. 7.6. Roseta de 120°

Las componentes de la matriz de deformación en el punto en el que se ha colocado la roseta serán las soluciones del sistema de ecuaciones aplicado a este caso:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_A = \varepsilon_X \\ \varepsilon_B = \varepsilon_X \frac{1}{4} + \varepsilon_Y \frac{3}{4} - \gamma_{XY} \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \varepsilon_C = \varepsilon_X \frac{1}{4} + \varepsilon_Y \frac{3}{4} + \gamma_{XY} \frac{\sqrt{3}}{4} \end{array} \right.$$

Es decir:

$$\begin{aligned}\varepsilon_X &= \varepsilon_A \\ \varepsilon_Y &= \frac{1}{3} [2(\varepsilon_B + \varepsilon_C) - \varepsilon_A] \\ \gamma_{XY} &= \frac{2\sqrt{3}}{3} (\varepsilon_C - \varepsilon_B)\end{aligned}$$

Con estos valores se puede construir el círculo de Mohr y a partir de él calcular las deformaciones principales:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{3}(\varepsilon_A + \varepsilon_B + \varepsilon_C) + \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_A - \varepsilon_B)^2 + (\varepsilon_B - \varepsilon_C)^2 + (\varepsilon_C - \varepsilon_A)^2} \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{3}(\varepsilon_A + \varepsilon_B + \varepsilon_C) - \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_A - \varepsilon_B)^2 + (\varepsilon_B - \varepsilon_C)^2 + (\varepsilon_C - \varepsilon_A)^2}\end{aligned}$$

Y las direcciones principales:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} (\varepsilon_C - \varepsilon_B)}{\varepsilon_A - \frac{1}{3} (2\varepsilon_B + 2\varepsilon_C - \varepsilon_A)} = \frac{\sqrt{3} (\varepsilon_C - \varepsilon_B)}{2\varepsilon_A - \varepsilon_B - \varepsilon_C}$$

Finalmente, las tensiones principales se obtienen aplicando las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= E \left[\frac{\varepsilon_A + \varepsilon_B + \varepsilon_C}{3(1-\mu)} + \frac{\sqrt{2}}{3(1+\mu)} \sqrt{(\varepsilon_A - \varepsilon_B)^2 + (\varepsilon_B - \varepsilon_C)^2 + (\varepsilon_C - \varepsilon_A)^2} \right] \\ \sigma_2 &= E \left[\frac{\varepsilon_A + \varepsilon_B + \varepsilon_C}{3(1-\mu)} - \frac{\sqrt{2}}{3(1+\mu)} \sqrt{(\varepsilon_A - \varepsilon_B)^2 + (\varepsilon_B - \varepsilon_C)^2 + (\varepsilon_C - \varepsilon_A)^2} \right]\end{aligned}$$

BIBLIOGRAFIA

- TIMOSHENKO, S.P. y J.N. GOODIER. Theory of Elasticity. McGraw-Hill, 1970.
- MARTIN H. SAAD. Elasticity, theory, applications and numerics. ELSEVIER. 2005.
- DE MATTOS P. Fundamentos da Mecânica dos Sólidos das Estruturas. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. 2006.
- Dugdale y Ruiz. Elasticidad para Técnicos. Editorial REVERTÉ, S.A.
- Soutas-Little R. W. Elasticity. DOVER PUBLICATIONS, INC. 1999.