

UCLV
Universidad Central
"Marta Abreu" de Las Villas



FIE
Facultad de
Ingeniería Eléctrica

Departamento de Electroenergética

TRABAJO DE DIPLOMA

Título: Material didáctico sobre el tema "Circuitos de segundo orden" para los estudiantes de la carrera Ingeniería Eléctrica.

Autor: Lázaro Marino Ávalos Carvajal

Tutores: Dr. C. Ileana Moreno Campdesuñer

MSc. Juan Curbelo Cancio

Junio 2019

Santa Clara

Copyright©UCLV

UCLV
Universidad Central
"Marta Abreu" de Las Villas



FIE
Facultad de
Ingeniería Eléctrica

Electroenergetic department

TRABAJO DE DIPLOMA

Title: Didactic material about the topic "Second order circuits" for the students of the Electrical Engineering Career

Author: Lázaro Marino Ávalos Carvajal

Thesis Director: Dr. C. Ileana Moreno Campdesuñer

MSc. Juan Curbelo Cancio

June 2019

Santa Clara
Copyright©UCLV

Este documento es Propiedad Patrimonial de la Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas, y se encuentra depositado en los fondos de la Biblioteca Universitaria “Chiqui Gómez Lubian” subordinada a la Dirección de Información Científico Técnica de la mencionada casa de altos estudios.

Se autoriza su utilización bajo la licencia siguiente:

Atribución- No Comercial- Compartir Igual



Para cualquier información contacte con:

Dirección de Información Científico Técnica. Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas. Carretera a Camajuaní. Km 5½. Santa Clara. Villa Clara. Cuba. CP. 54 830

Teléfonos.: +53 01 42281503-1419

DEDICATORIA

A mi madre por su incondicional apoyo.

AGRADECIMIENTOS

A mis tutores por su dedicación y apoyo a la realización de este trabajo, la Doctora Ileana Moreno Campdesuñer y al Master, Juan Curbelo Cancio.

RESUMEN

Los materiales didácticos forman parte de los documentos que jugarán un papel fundamental en la formación de las futuras generaciones de ingenieros, debido a que en el nuevo Plan de Estudio E se realiza una reestructuración que implica la reducción del tiempo de las carreras a cuatro años; haciéndose necesario potenciar aún más el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) no solo en las actividades presenciales, sino también durante el estudio independiente.

Para desarrollar el objetivo general de esta investigación se hace un amplio resumen de la teoría de los “Circuitos de segundo orden en estado transitorio”, la cual será de gran ayuda para entender el desarrollo de los ejercicios que se presentan; los que serán resueltos detalladamente de forma analítica y simulada. Para ello se utiliza el programa informático Matlab y su simulador Simulink, vinculando los conocimientos para el empleo de esta herramienta fundamental en la vida del ingeniero, como una de las ventajas que brindan las TIC.

Como resultado de este trabajo los estudiantes contarán con un material didáctico, que los guíe en el desarrollo de su estudio independiente, apoyando el fortalecimiento de los conocimientos sobre este tema de fundamental importancia y el uso de las TIC en la solución de futuras problemáticas.

Palabras Clave: Material didáctico, estudio independiente, subamortiguado, sobreamortiguado y críticamente amortiguado.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 1. Fundamentación teórico - metodológica acerca de la necesidad de los materiales didácticos para orientar el estudio independiente en la disciplina Circuitos Eléctricos del Plan E con apoyo de las TIC	4
1.1 Bases conceptuales del Plan de estudios E	4
1.1.1 Pautas para potenciar el tiempo de trabajo del estudiante con el Plan de estudios E	7
1.1.2 Contenidos para la disciplina Circuitos Eléctricos según Plan de estudios E	7
1.1.3 Importancia de los Circuitos de segundo orden para los estudiantes de carreras de perfil eléctrico	12
1.1.4 Desarrollo del tema “Circuitos de segundo orden” según la evolución de los planes de estudio	12
1.2 Las TIC en la Educación Superior	13
1.2.1 Generalidades del Matlab	15
1.2.2 Posibilidades que brinda el Simulink para la simulación de circuitos eléctricos	16
1.3 Necesidad de los materiales didácticos como guía del estudio independiente	16
1.4 Conclusiones del capítulo	18
CAPÍTULO 2. Circuitos de segundo orden	19
2.1 Propiedad de linealidad	19
2.2 Circuito RLC en paralelo sobreamortiguado	193

2.3	Amortiguamiento crítico.....	Error! Bookmark not defined.8
2.4	Circuito RLC en paralelo subamortiguado.....	31
2.5	Circuito RLC sin fuente	37
2.6	Respuesta completa del circuito RLC	41
2.7	Conclusiones del capítulo	47
CAPÍTULO 3. Problemas resueltos		48
3.1	Conclusiones del capítulo	487
CONCLUSIONES		567
RECOMENDACIONES		58
BIBLIOGRAFÍA.....		589
Anexo 1: Ejercicios propuestos.....		60

INTRODUCCIÓN

La educación superior tiene ante sí la gran responsabilidad de que se garanticen las expectativas que de sus egresados se tiene, en este sentido desde sus inicios y a lo largo del proceso revolucionario se perfeccionan sistemáticamente los planes de estudio.

En Cuba, los planes de estudio de las carreras universitarias se estructuran horizontalmente por año académico y verticalmente por disciplinas. Cada año académico se organiza en períodos lectivos cuya duración estará determinada por las características de la carrera en cuestión [1].

Desde la creación del Ministerio de Educación Superior en el año 1976, se ha mantenido como una de sus funciones principales el perfeccionamiento continuo de los planes de estudio, que en determinados momentos históricos adquirió tal significación que condujo a transformaciones curriculares. Estas modificaciones se llevan a cabo con el propósito de fortalecer cada vez más la preparación de la docencia y la investigación para la formación de profesionales con un perfil cada vez más amplio, que sean capaces de resolver con independencia y creatividad los problemas generales y frecuentes que se presenten en las diferentes esferas de la actividad profesional [1].

Desde el año 1977 hasta la fecha, se han aplicado cuatro generaciones de planes de estudio, como resultado de los cambios económicos y sociales que ha experimentado el país en respuesta a las condiciones del contexto internacional en que está inmerso. Las pautas a seguir para la conformación de los planes de estudio ha sido la reducción del número de las disciplinas, integrando los contenidos que tengan un hilo conductor común [1].

La Ingeniería Eléctrica no es una excepción en todo este proceso de cambios en el que con uno u otro enfoque docente-metodológico, están presentes los contenidos básicos como parte esencial de los contenidos de la especialidad.

La carrera Ingeniería Eléctrica de la Universidad Central “Marta Abreu” de las Villas, siguiendo la propuesta de reestructuración de carreras, implementada por el Ministerio de Educación Superior (MES), se encuentra en un proceso de ordenación, a través del cual diversas asignaturas reducirán sus temarios y cantidad de horas de clases, lo que traerá consigo el advenimiento del nuevo plan de estudios E.

La disciplina de Circuitos Eléctricos (CE) desempeña un rol fundamental dentro de las carreras de perfil eléctrico pues sienta las bases sobre las cuales se desarrollan el resto de las asignaturas de la especialidad. Entre los diversos temas tratados los “Circuitos de segundo orden” es uno de los más vinculados con la práctica de la profesión y debido a la disminución de su tiempo docente, se hace necesario el aumento de las horas de estudio independiente de los estudiantes. En este nuevo contexto se hace necesario impulsar medios y métodos que apoyen al estudiante en

su estudio independiente, en el que debe tener protagonismo considerable la utilización de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC).

Una condición muy importante para lograr este proceso es garantizar la interrelación que debe existir entre la teoría y la práctica, y aumentar el empleo de los materiales didácticos, siendo estos un recurso importante a la hora de guiar a los estudiantes en su estudio independiente.

Llegado a este término surge la interrogante del cómo facilitar el estudio individual sobre el tema de “Circuitos de segundo orden” según Plan E a los estudiantes de la carrera de Ingeniería Eléctrica apoyándose en las TIC.

Para dar solución al problema científico se plantea el siguiente objetivo general:

- Elaborar un material didáctico sobre el tema: “Circuitos de segundo orden”, para orientar el estudio independiente de los estudiantes de la carrera Ingeniería Eléctrica. Según Plan E apoyándose en las TIC.

Para cumplir con dicho objetivo se plantean los objetivos específicos siguientes:

1. Establecer la fundamentación teórico-metodológica acerca de la necesidad de los materiales didácticos para orientar el estudio independiente en la disciplina Circuitos Eléctricos del Plan E con apoyo de las TIC.
2. Describir la teoría básica fundamental sobre el tema “Circuitos de segundo orden”.
3. Solucionar los ejercicios seleccionados de forma teórica y mediante simulación en Matlab.

Dichos objetivos se ejecutarán a través de las tareas científicas siguientes:

- Estudio de la bibliografía relacionada con el tema: “Circuitos de segundo orden”
- Estudio de los contenidos fundamentales acerca del empleo del programa Matlab y su simulador Simulink, que permitan elevar los conocimientos en el área de la programación y simulación.
- Selección adecuada y coherente de ejercicios que respondan a los objetivos del tema “Circuitos de segundo orden” en la asignatura CE I en el plan de estudios E.
- Solución de los ejercicios seleccionados, verificando la solución de manera parcial o total con el Matlab y llevar a cabo la simulación de los circuitos, empleando el simulador Simulink.
- Elaboración, como resultado final del trabajo, un material didáctico que contenga la solución analítica de los ejercicios seleccionados, la solución parcial o total con ayuda del Matlab y los resultados de la simulación junto a los archivos.mdl correspondientes.
- Organización adecuada del informe de tesis, basándose en un diseño metodológico estratégico según la didáctica de la asignatura CE I Plan E y las orientaciones y normas aprobadas por el MES.

Como resultado de este trabajo se tendrá un material que contiene la teoría fundamental sobre el tema “Circuitos de segundo orden”, ejercicios resueltos que

además orienta a los estudiantes con ejercicios propuestos, por lo que facilitará en gran medida el estudio independiente, vinculando los conocimientos analíticos y los del Simulink, los cuales son de gran utilidad en la práctica.

El trabajo escrito cuenta con una introducción, tres capítulos, conclusiones, recomendaciones y bibliografía.

En el primer capítulo se describe la fundamentación teórico-metodológica acerca de la necesidad de los materiales didácticos y su vinculación con las TIC, para orientar el estudio independiente en la disciplina Circuitos Eléctricos en el Plan E.

En el segundo capítulo se describe la teoría básica fundamental de los circuitos de segundo orden, desarrollando por epígrafes cada uno de sus contenidos principales, de acuerdo al plan de estudios E.

En el tercer capítulo se muestran las soluciones tanto analíticas como simuladas de los diferentes ejercicios seleccionados.

CAPÍTULO 1. Fundamentación teórico - metodológica acerca de la necesidad de los materiales didácticos para orientar el estudio independiente en la disciplina Circuitos Eléctricos del Plan E con apoyo de las TIC

Este capítulo presenta la fundamentación teórico-metodológica acerca de la necesidad de utilizar materiales didácticos para apoyar el estudio independiente de los estudiantes de las carreras de perfil eléctrico; condicionado por el advenimiento del Plan de estudio E y la reestructuración que va a llevarse a cabo en la disciplina Circuitos Eléctricos, en cuanto a cantidad de horas y temas a impartir debido a la implementación del nuevo Plan de estudio. Se hará un análisis de cómo se ha ido impartiendo el tema en los planes de estudios anteriores y las perspectivas en el plan E, los principales cambios, la valoración de cómo mantener la calidad del egresado con un menor número de horas clases en las asignaturas, la importancia de preparar materiales de estudio en este tema y la forma en que se utilizarán para garantizar la preparación de los estudiantes, y la necesidad de aprovechar el potencial que brindan las Tecnologías de la Información y de la Comunicación (TIC).

1.1 Bases conceptuales del Plan de estudios E

La Educación Superior tiene la alta responsabilidad de formar los profesionales que necesita el país, para lo que define planes de estudio que deben cumplir esta honrosa misión. A raíz de la revisión exhaustiva de los programas de formación y desarrollo de los profesionales cubanos, y en correspondencia con los nuevos escenarios y condiciones complejas que se vislumbran para las próximas décadas del siglo XXI; se plantean un conjunto de políticas para el proceso de formación continua de los profesionales cubanos, una de las cuales expresa lo siguiente: “Perfeccionar la formación de pregrado en carreras de perfil amplio, reenfocándolas hacia la solución de problemas generales y frecuentes de la profesión en el eslabón de base”

Con este fin el Plan de estudios E plantea como bases conceptuales las siguientes: [2]

- ❖ El perfeccionamiento del modelo de formación de perfil amplio.

Debe hacerse realidad, en este plan de estudio, el hecho de que la formación de pregrado se dirija hacia el ejercicio de la profesión en el eslabón de base y que el egresado continúe su desarrollo profesional a través de la preparación para el empleo y la formación posgraduada. La determinación de los objetivos generales de la carrera y de los contenidos que realmente son necesarios para lograrlos posibilitará reducir el tiempo

de duración de las carreras y como resultado formar en menos tiempo los profesionales que la sociedad necesita y demanda.

- ❖ Mayor articulación del pregrado y el posgrado.

Lograr que los contenidos que se desarrollen en el pregrado no trasciendan el objetivo de formar profesionales de perfil amplio, y a partir de lo anterior, adecuar sistemáticamente los programas de formación de posgrado teniendo en cuenta las necesidades socioeconómicas locales, territoriales y nacionales.

- ❖ Lograr una efectiva flexibilidad curricular.

Se debe manifestar fundamentalmente por la existencia de tres tipos de contenidos curriculares (base, propio y optativo/electivo), que permitan la actualización permanente del plan de estudio de la carrera y su adaptación a las necesidades del país, del territorio, al desarrollo del claustro y a los intereses de los estudiantes.

- ❖ Mayor grado de racionalidad en el diseño de los planes de estudio.

Mediante la elaboración de programas de disciplinas y de asignaturas comunes para diferentes carreras, siempre que sea posible. Esto favorece el empleo racional de recursos humanos y materiales.

- ❖ Mayor nivel de esencialidad en los contenidos de las disciplinas.

Este aspecto se logra mediante la selección de aquellos contenidos que son fundamentales para el logro de los objetivos previstos en la carrera y asegurando una adecuada secuencia lógica y pedagógica de los mismos.

El proceso de integración de los contenidos científicos de diferentes disciplinas crea la necesidad de incluir enfoques intra, inter y transdisciplinarios, lo que evitaría la reiteración innecesaria de conocimientos.

- ❖ Lograr un equilibrio adecuado entre las actividades académicas, laborales e investigativas.

La formación del profesional es necesariamente una interacción del proceso docente educativo de la carrera con la vida profesional y social con un enfoque científico, lo que exige crear las bases en el diseño para prever espacios donde se materialice el uso social del conocimiento mediante la práctica profesional como parte de su formación, aportando así a la solución de problemas sociales, culturales, económicos y ambientales; así como, contar con las flexibilidades que permitan adaptar el contenido de estas prácticas a las necesidades de los territorios.

- ❖ El fortalecimiento de la formación humanista en todas las carreras.

La concepción de educación en la que se ha de sustentar el modelo de formación es humanista, lo que supone la formación de un ideal humano y la consideración de todos los factores a tener en cuenta para que tal aspiración se convierta en realidad. Se aboga por la formación integral del futuro profesional, por instruir su pensamiento y educar sus

sentimientos, de manera que pueda participar activa y responsablemente en el desarrollo social sostenible de su país. Es esta la concepción martiana de preparar al hombre para la vida y la fidelista de desarrollar desde muy temprano la personalidad humana.

- ❖ Potenciar el protagonismo del estudiante en su proceso de formación.

Hacer énfasis en el desarrollo de habilidades comunicativas en la lengua materna y en el idioma extranjero en los estudiantes, que les permitan establecer una interacción efectiva con el profesor y el resto de los estudiantes, fundamentalmente mediante el desarrollo de habilidades para la lectura, la expresión oral y escrita, tan importantes para el eficiente desempeño de su profesión. Todo lo anterior exige una transformación en los métodos, medios, formas organizativas y evaluación del aprendizaje, para lograr que el estudiante sea el actor principal del proceso.

En una época de rápida obsolescencia del conocimiento la importancia de que el estudiante aprenda a aprender y se motive para adquirir nuevos conocimientos constituye una necesidad para su formación permanente.

- ❖ Potenciar el tiempo de autopreparación del estudiante.

Se debe tener en cuenta que el proceso de aprendizaje no se restringe a los tiempos de actividades académicas presenciales; por lo que se torna necesaria la creación de espacios de tiempo en el currículo para la búsqueda, reflexión, interiorización y consolidación de los conocimientos por parte de los estudiantes, como vía para fomentar su autoaprendizaje. Lograr una adecuada orientación, ejecución y control de las diferentes actividades académicas que deben desarrollar los estudiantes en el tiempo no presencial con la debida exigencia por parte de los profesores, para que se apropien de los contenidos establecidos en los programas de estudio.

- ❖ Lograr transformaciones cualitativas en el proceso de formación como consecuencia de un amplio y generalizado empleo de las TIC.

Estas transformaciones han de expresarse fundamentalmente en la renovación de concepciones y prácticas pedagógicas que conlleven a reformular el papel del docente y a desarrollar modelos de aprendizaje de los estudiantes distintos a los tradicionales. Lo anterior se debe tener en cuenta en el diseño de los programas de disciplinas y asignaturas, considerando además que el uso de las TIC rompe con el concepto del profesor como fuente principal del conocimiento, pues deja de ser la única referencia que tiene el estudiante para el acceso al saber. Se debe lograr el empleo generalizado de software profesionales, plataformas interactivas y un acceso eficiente a fuentes confiables de información en la red de redes, entre otras.

- ❖ El fortalecimiento de los vínculos de las universidades con los organismos empleadores y todas las instancias que sean fuentes de empleo.

Debe lograrse una mayor pertinencia del currículo y contribuir mediante un desarrollo eficaz de la práctica laboral, a la preparación de un egresado capaz de resolver los problemas más generales de la profesión en el eslabón de base. Por ello la necesaria

integración de los organismos empleadores a los niveles organizativos de la carrera y a su concepción curricular. Este vínculo debe favorecer también la elevación de la calidad y la eficiencia de la etapa de preparación para el empleo.

- ❖ Lograr transformaciones en la evaluación del aprendizaje.

La tarea de evaluar debe considerarse en su carácter cualitativo y formativo. Esto supone integrarla al proceso pedagógico. Se debe mantener la evaluación sistemática teniendo en cuenta el desempeño del estudiante en el período, así como la tendencia a la disminución de exámenes finales tradicionales y al incremento de tipos de evaluación final que permitan comprobar el desarrollo de habilidades profesionales y que integren contenidos de diferentes disciplinas, como trabajos y proyectos de curso, siempre que sea posible.

1.1.1 Pautas para potenciar el tiempo de trabajo del estudiante con el Plan de estudios E.

En la creación del Plan de estudio E se redactaron pautas para potenciar el tiempo de trabajo del estudiante (Horas lectivas + Horas de estudio independiente) [1]

- ❖ La duración máxima de la carrera será de cuatro años.
- ❖ Las horas totales del plan de estudio no deben exceder las 3400.
- ❖ La práctica laboral debe constituir, como mínimo, el 15% del total de horas del plan de estudio, incluyendo las horas planificadas para el ejercicio de culminación de los estudios. (510 h)
- ❖ La cantidad de asignaturas por semestre no debe ser mayor que seis. En el último semestre la cantidad de asignaturas dependerá de las horas que requiera la culminación de los estudios de la carrera.
- ❖ El número máximo de exámenes finales será de seis por año académico.
- ❖ El currículo base que elabora la CNC hasta el nivel de disciplina, no debe ser superior al 80% del total de horas de la carrera.
- ❖ El currículo optativo/electivo no debe ser inferior al 5% del total de horas de la carrera. (170 h)
- ❖ El fondo de tiempo de las disciplinas Marxismo-Leninismo, Historia de Cuba y Preparación para la Defensa es el 8% de las horas totales de la carrera, distribuido en 4,5%; 1,5% y 2% respectivamente. (153h, 51h, 68h)

Con la aplicación de estas pautas se lograría una relación de alrededor de una hora de estudio independiente por cada hora lectiva.

1.1.2 Contenidos para la disciplina Circuitos Eléctricos según Plan de estudios E

Para ser consecuente con el Modelo del Profesional y con las bases conceptuales del Plan de estudios E ya abordadas anteriormente, se hace necesario precisar los

contenidos de la disciplina CE, con sus correspondientes conocimientos esenciales y habilidades a adquirir. A continuación se ilustran dichos contenidos, los cuales deben ser de pleno dominio por parte de los profesores y estudiantes de la carrera Ingeniería Eléctrica.

- ❖ Conocimientos esenciales a adquirir: [3]
 - Conceptos básicos de circuito eléctrico, clasificación, componentes, elementos reales y modelos, corriente, voltaje y potencia, resistencia y conductancia.
 - Fuentes de voltaje y de corriente, ideales y reales, dependientes e independientes. Leyes de Ohm y Kirchhoff. Propiedades de los Circuitos Eléctricos Lineales.
 - Transformaciones equivalentes en circuitos resistivos conectados en serie, paralelo. Divisores de voltaje y de corriente. Transformaciones de fuentes reales.
 - Métodos generales para el análisis de circuitos eléctricos. Teoremas de los circuitos lineales: Superposición, Thévenin, Norton. Condición de máxima transferencia de potencia.
 - Capacitores e inductores. Propiedades de los elementos almacenadores ideales. Método clásico para el cálculo de circuitos de primer y segundo orden simples con estímulos de corriente directa (CD), frecuencias naturales, propiedades de la respuesta transitoria.
 - Análisis de circuitos eléctricos con estímulos periódicos sinusoidales. Definiciones básicas del método fasorial, diagramas fasoriales. Leyes de Ohm y Kirchhoff en forma compleja para elementos R, L y C, impedancia, admitancia, reactancia, susceptancia, carácter de los circuitos, dependencia de la frecuencia. Transformaciones, reducción a circuitos equivalentes, teoremas y métodos generales en régimen de corriente alterna (CA).
 - Potencia activa, reactiva, aparente y aparente compleja. Factor de potencia. Mejoramiento del factor de potencia en la industria. Máxima transferencia de potencia.
 - Definiciones básicas sobre los circuitos trifásicos. Circuitos trifásicos conectadas en delta y en estrella, balanceados y desbalanceados. Cargas trifásicas en paralelo, balanceadas y desbalanceadas. Transformaciones recíprocas delta-estrella. Método de las componentes simétricas y sus propiedades para los circuitos trifásicos. Potencias en circuitos trifásicos.
 - Análisis de circuitos sencillos con inductancia mutua. Circuitos acoplados magnéticamente.
 - Análisis de circuitos en el dominio de la frecuencia compleja. Resonancia en circuitos eléctricos, propiedades de los circuitos resonantes serie, paralelo y serie-paralelo. Factor de calidad y ancho de banda.

-
- Método operacional. Leyes de Ohm y Kirchhoff en forma operacional, circuito operacional equivalente. Teoremas y métodos de análisis de los circuitos lineales operacionalmente en estado estable y transitorio.
 - Análisis de circuitos monofásicos y trifásicos estimulados por ondas no sinusoidales periódicas y estímulos aperiódicos (Análisis de Fourier). Espectros de las ondas periódicas no sinusoidales. Valor eficaz. Potencia en régimen periódico no sinusoidal. Factor de potencia. Propiedades de los armónicos en circuitos trifásicos. El THD (Distorsión Armónica Total)
 - Estudio de circuitos eléctricos no lineales.
 - Funciones básicas de los elementos que componen el sistema de medición. Esquemas funcionales y ecuaciones de transferencia.
 - Características estáticas y dinámicas de los elementos y del sistema de medición. Determinación de las variables y modelación del sistema.
 - Nociones básicas sobre metrología. Conservación y transmisión de las unidades patrones de magnitudes físicas.
 - Incertidumbre de las mediciones y medios de medición. Formas de expresar y normalizar los errores. Evaluación del error. Errores sistemáticos y aleatorios. Verificación de instrumentos.
 - Convertidores de medición resistivos, inductivos y capacitivos. Principio físico de funcionamiento. Características metrológicas.
 - Instrumentos de medición electrónicos, analógicos, digitales y ópticos. Procesamiento digital de señales. Puentes. Potenciómetros Principio de operación y características metrológicas.
 - Medición de voltaje e intensidad de corriente en corriente directa (CD) y corriente alterna (CA).
 - Ampliación del campo de medición de los instrumentos. Conectar, escoger el campo de medición y realizar la lectura con instrumentos analógicos y digitales.
 - Medición de resistencia eléctrica. Resistencias altas, medias y bajas. Medición de inductancia. Factor de calidad. Medición de capacitancia. Factor de pérdida.
 - Medición de potencia en circuitos de CD. Medición de potencias activa y reactiva en circuitos monofásicos y trifásicos.
 - Medición de energía en circuitos monofásicos y trifásicos. Contadores de energía de inducción y electrónicos. Determinación de la demanda máxima. Analizadores de carga. Medición de ángulo de fase y factor de potencia. Medición de frecuencia.
 - Transformadores de medición, principio de operación, conexiones, medidas de seguridad, clase de precisión. Conexiones de instrumentos a través de transformadores en circuitos trifásicos.

-
- Sistemas de adquisición de datos. Medición de magnitudes no eléctricas. Termógrafos. Analizadores de redes. Fundamentos de operación.
 - Sistemas automáticos de medición. Instrumentos analizadores y programables.
 - Introducción en la medición digital y el procesamiento digital de las señales en las mediciones de parámetros eléctricos periódicos y no periódicos.
- ❖ Habilidades principales a dominar: [3]
1. Aplicar las leyes de Ohm y Kirchhoff, los divisores de voltaje y de corriente, las simplificaciones y transformaciones de las conexiones serie, paralelo, serie-paralelo, delta y estrella; incluido el retorno al circuito original cuando sea necesario; así como las transformaciones de fuentes al cálculo de voltaje, corrientes y potencias en circuitos lineales.
 2. Aplicar los métodos generales, así como los teoremas de Thévenin, Norton y de Superposición, al análisis de circuitos lineales.
 3. Calcular en el dominio del tiempo, mediante el método clásico, e interpretar físicamente, procesos transitorios en circuitos lineales simples de primer orden y segundo orden con elementos en serie o paralelo, a estímulos de corriente directa y ondas rectangulares.
 4. Aplicar el método fasorial al análisis de circuitos de corriente alterna monofásicos para calcular impedancias y admitancias, trazar diagramas fasoriales, aplicar los métodos generales de análisis y los teoremas de Thévenin, Norton, Superposición y Máxima transferencia de potencia.
 5. Analizar circuitos trifásicos desbalanceados, en estado estable, en régimen de corriente alterna.
 6. Determinar las componentes simétricas de un sistema de voltajes trifásicos desbalanceados y resolver circuitos con carga trifásica balanceada, conectada en estrella o en delta, alimentada por el sistema de voltajes desbalanceados, aplicando el método de las componentes simétricas.
 7. Utilizar los métodos básicos de análisis de circuitos lineales en el cálculo de circuitos con inductancia mutua y aplicar las relaciones del transformador ideal y del transformador lineal.
 8. Utilizar los métodos básicos de análisis de los circuitos magnéticos.
 9. Calcular funciones transferenciales en función de la frecuencia compleja, identificar los polos y ceros y obtener la respuesta de frecuencia en forma aproximada a partir de la propia función.
 10. Describir el comportamiento de filtros sencillos (activos y pasivos). Aplicaciones prácticas.

-
11. Aplicar el concepto y las propiedades de los circuitos resonantes al análisis de redes RLC serie, paralelo y serie - paralelo.
 12. Aplicar la transformada de Laplace al cálculo de la respuesta en el tiempo y, fundamentalmente, al cálculo de funciones de redes en circuitos lineales.
 13. Aplicar el desarrollo en series de Fourier y el teorema de la Superposición al cálculo de circuitos monofásicos en régimen periódico no sinusoidal.
 14. Aplicar programas de computación al análisis de circuitos eléctricos de baja y mediana complejidad, incluyendo la interpretación de los resultados.
 15. Seleccionar, conectar y realizar mediciones con instrumentos analógicos y digitales para medir variables en circuitos eléctricos teniendo en cuenta las medidas de seguridad y protección.
 16. Evaluar los principales errores que aparecen en las mediciones digitales y el procesamiento digital de las señales.
 17. Utilizar, analizar e interpretar la información científico-técnica relacionada con dispositivos eléctricos y circuitos eléctricos. (manuales, especificaciones, artículos, libros y otros), en lengua materna y en inglés.
 18. Expresar con un lenguaje técnico riguroso, concreto, preciso, de forma oral y escrita, los conocimientos de circuitos eléctricos.
 19. Elaborar informes técnicos utilizando las normas técnicas orientadas para este fin, así como observar las reglas establecidas para la protección e higiene del trabajo.
 20. Adquirir de forma independiente conocimientos relacionados con la disciplina.
 21. Interpretar, analizar y resolver adecuadamente problemas generales y frecuentes de la profesión, fundamentando coherentemente sus razonamientos, basados en principios físicos y matemáticos.
 22. Montar y medir circuitos electrónicos teniendo en cuenta las medidas de seguridad y protección.
 23. Adquirir autodisciplina, caracterizada por la puntualidad, normas de comportamiento adecuadas, cumplimiento y sentido de la responsabilidad individual y colectiva.

Como se aprecia, estos contenidos están ordenados de manera gradual y ascendente, con una adecuada secuencia lógica y pedagógica en aras de lograr un conocimiento asequible por los estudiantes. Para lograr un mayor nivel de esencialidad en los contenidos de las disciplinas se seleccionaron estos contenidos que son fundamentales para el logro de los objetivos previstos en la carrera. Esto debe contribuir a la disminución de asignaturas y al adecuado balance entre las horas presenciales y el tiempo de autopreparación de los estudiantes, ya que el proceso de aprendizaje no se restringe a los tiempos de las actividades académicas presenciales.

Para esta investigación se profundiza en la solución de Circuitos de segundo orden: Superposición, Circuitos sobreamortiguados, subamortiguados y críticamente amortiguado.

1.1.3 Importancia de los Circuitos de segundo orden para los estudiantes de carreras de perfil eléctrico

El desarrollo científico técnico en el que se ha visto envuelta la humanidad, en su historia más reciente, ha condicionado el aumento de las áreas de aplicación de circuitos eléctricos; y esto a su vez ha causado la evolución de los circuitos simples a otros más complejos.

Los circuitos de segundo orden no solo aparecen con mucha frecuencia en la práctica, sino que también resultan modelos bastantes buenos para otros tipos de sistemas. Por ejemplo, se emplean como modelo para el sistema de suspensión de un automóvil, el comportamiento de un controlador de temperatura utilizado en el crecimiento de cristales semiconductores e incluso para la respuesta de un avión a los controles del timón de altitud y el alerón.

La disciplina Circuitos Eléctricos (CE), es la base de las carreras de Ingeniería Eléctrica, Ingeniería en Telecomunicaciones y Electrónica e Ingeniería Automática y tiene bajo su responsabilidad dotar al estudiante de las herramientas y métodos básicos, necesarios para enfrentar y lograr comprender asignaturas posteriores, independientemente de que especialidad curso.

El estudiante de carrera de perfil eléctrico debe ser capaz de asimilar los teoremas y aplicarlos eficazmente a la solución de problemas, pues son herramientas poderosas que permiten la reducción de circuitos y redes complejas a una forma simple que ofrezca un análisis simple.

1.1.4 Desarrollo del tema “Circuitos de segundo orden” según la evolución de los planes de estudio

El tema “Circuitos de segundo orden” ha estado incluido en todos los planes de estudio que se han elaborado por la importancia que tiene en la formación de ingenieros de perfil eléctrico, la diferencia fundamental ha estado en la cantidad de horas presenciales que se le han destinado, las cuales han ido disminuyendo a medida que han ido perfeccionándose dichos planes, en busca de un mayor protagonismo del estudiante en su propio aprendizaje.

Con respecto al plan de estudios D hay una reducción del número de horas en la disciplina tal como se muestra en la tabla 1.1, donde se aprecia una disminución del 35,4 % del tiempo asignado [4].

Tabla 1.1: Distribución de horas para los planes de estudios D y E de la carrera IE.

Carrera Asignatura	Ingeniería Eléctrica	
	D	E
CE I	64	60
CE II	64	64
CE III	64	
Total	192	124
Diferencia (h)/%	68/35,4	

En el plan de estudios D vigente, el tema en cuestión comienza a estudiarse en CE I donde se tratan los circuitos eléctricos alimentados con Corriente Directa (CD) y luego, se aplican en circuitos alimentados con Corriente Alterna (CA) en CE II. Actualmente se destinan 10 horas para ese tema en CE I y 2 horas en CE II para un total de 12 horas. Sin embargo, para el Plan de estudios E, la propuesta es de 8 horas para el tema en CE I que incluye el análisis tanto en corriente directa como en alterna.

Debe señalarse que inicialmente se estudiaban estos teoremas en circuitos alimentados con fuentes independientes tanto de CD en CE I como de CA en CE II. Las fuentes dependientes se introducían en CE III y se trataba el tema nuevamente. En resumen, el tema era tratado en las tres asignaturas de CE. Desde el plan D se tratan todos los circuitos alimentados tanto con fuentes independientes como con fuentes dependientes, lo cual se mantiene en el Plan E.

Otra diferencia sustancial radica en los Teoremas de Miller y Dual de Miller, que se han impartido en los planes de estudios precedentes y el actual, no siendo así en el venidero Plan de Estudio E; tema pendiente a tratar en cursos de posgrados y pregrado en el caso de Ingeniería en Telecomunicaciones y Electrónica.

Por otra parte, durante todos los planes de estudios, el colectivo de CE de la FIE de la UCLV ha elaborado varios materiales en formato digital que permiten profundizar en el tema y que enriquecen la teoría sobre la que se sustenta.

1.2 Las TIC en la Educación Superior

La tecnología ha generado planteamientos y actitudes muy diferentes a lo largo de la historia, hay épocas de escepticismo, de optimismo y de desasosiego ante los logros y las posibilidades de la tecnología. En la actualidad la tendencia casi general es de confianza absoluta. El auge de las nuevas formas de comunicación que se está experimentando en

los últimos tiempos, en el marco de la llamada Sociedad de la Información, ejerce una fuerte influencia hacia todos los ámbitos de la sociedad; la educación, como es lógico, no queda exenta de ello. Se hace pues imprescindible una reflexión desde la universidad, sobre el impacto de estas nuevas herramientas en el proceso de enseñanza aprendizaje.

Las TIC son todos aquellos recursos, herramientas y programas que se utilizan para procesar, administrar y compartir la información mediante diversos soportes tecnológicos, tales como: computadoras, teléfonos móviles, televisores, reproductores portátiles de audio y video o consolas de juego [5].

Teniendo en cuenta que el acceso a la información es una condición indispensable para que se produzca el conocimiento; que el aprendizaje constituye la base sobre la cual se apoya el desarrollo, el progreso de las sociedades y que la tecnología facilita la información y por tanto el conocimiento, es necesario llamar la atención sobre la importancia de que las políticas educativas favorezcan, aún más, la formación del futuro profesional, en estrecha correspondencia con las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) y desde luego, con los cambios constantes que ellas experimentan.

Sería imperdonable concebir la formación de profesionales incapaces de enfrentar los retos que la sociedad le plantea por el hecho de no desarrollar en ellos una cultura tecnológica. Se propone entonces analizar algunos conceptos, características, ventajas referentes a las TIC, que demuestran su importancia en la educación.

Los avances más significativos de las TIC en las universidades conllevan: [6]

- La simplificación de la gestión, reduciendo tiempos de espera y mejorando la efectividad: realizar una matrícula, solicitar un certificado o consultar una duda con el personal administrativo son tareas completamente digitalizadas.
- Material didáctico en mayor cantidad y calidad. El material docente es de fácil acceso y consulta para todos los estudiantes a través de un dispositivo digital al igual que las bibliotecas y los centros de documentación.
- Entorno virtual para la comunicación fluida y efectiva: desde tutoriales virtuales a foros por asignaturas para debatir y compartir la información impartida en clase.
- La creación y uso de entornos colaborativos globales que tengan una doble vertiente: acceder a conocimientos y contribuir con experiencias y proyectos propios.

El manejo y la normalización de este tipo de sistemas mientras se realiza una carrera universitaria supone que el estudiante ya sepa manejar este tipo de tecnologías con un fin profesional y las aproveche para mejorar su rendimiento y acceder a mejores puestos de trabajo.

La Universidad Central "Marta Abreu de Las Villas" ofrece una serie de recursos tecnológicos que permiten mejorar las experiencias de aprendizaje.

El correo institucional @uclv.cu es uno de ellos y puede potencializarse aún más para obtener los mayores beneficios posibles, entre los que están:

- ❖ Recibir información académica y de becas.
- ❖ Tener acceso a internet, ya sea por teléfono, tablet o portátil, en los distintos campus de la UCLV.
- ❖ Mantener contacto directo con el profesorado.
- ❖ Facilitar el intercambio de información con otros centros docentes del país.

La web institucional intranet.uclv.edu.cu permite el acceso directo a un conjunto de sitios destinados a potenciar, facilitar y agilizar el proceso docente educativo y el acceso a información de calidad, siendo ejemplo concreto de este fin la existencia del Aula Virtual ; constituye además un medio dinámico para la comunicación y el debate a nivel universitario. Informa además de las actividades y proyectos científicos y culturales que promueve la Universidad.

1.2.1 Generalidades del Matlab

Matlab es el nombre abreviado de “MATrixLABoratory”. Matlab es un programa para realizar cálculos numéricos con vectores y matrices. Como caso particular puede también trabajar con números escalares tanto reales como complejos, con cadenas de caracteres y con otras estructuras de información más complejas. Una de las capacidades más atractivas es la de realizar una amplia variedad de gráficos en dos y tres dimensiones[7].

Matlab tiene también un lenguaje de programación propio. Matlab es un gran programa de cálculo técnico y científico. Para ciertas operaciones es muy rápido, cuando puede ejecutar sus funciones en código nativo con los tamaños más adecuados para aprovechar sus capacidades de vectorización. En otras aplicaciones resulta bastante más lento que el código equivalente desarrollado en C/C++ o Fortran. En cualquier caso, el lenguaje de programación de Matlab siempre es una magnífica herramienta de alto nivel para desarrollar aplicaciones técnicas, fácil de utilizar y que aumenta significativamente la productividad de los programadores respecto a otros entornos de desarrollo. Matlab dispone de un código básico y de varias librerías especializadas (toolboxes) [8].

Aunque el origen de Matlab estuvo íntimamente ligado a la manipulación y computación de y con matrices, durante los últimos años ha evolucionado de forma que hoy se puede considerar como un software de propósito general para todas las ramas de la matemática y la ingeniería desde el punto de vista numérico y computacional. También es posible el cálculo simbólico con Matlab siempre que se disponga del toolbox apropiado; en este caso el Symbolic toolbox. Existen muchos otros toolboxes que, sobre la base del núcleo de Matlab, proporcionan funciones específicas para el cálculo numérico de ciertas partes concretas de la matemática, la ingeniería y otras ciencias [7].

En los medios universitarios Matlab se ha convertido en una herramienta básica, tanto para los profesionales e investigadores de centros docentes, como una importante herramienta para el dictado de cursos universitarios, tales como sistemas e ingeniería de

control, álgebra lineal, procesamiento digital de imágenes, etc. En el mundo industrial Matlab está siendo utilizado como herramienta de investigación para la solución de complejos problemas planteados en la realización y aplicación de modelos matemáticos en ingeniería [7].

1.2.2 Posibilidades que brinda el Simulink para la simulación de circuitos eléctricos

Matlab posee un simulador propio, el Simulink, el cual es una extensión gráfica de Matlab, destinado a la modelación y simulación de sistemas lineales y no lineales. En Simulink los sistemas se dibujan en la pantalla como diagramas de bloque. La construcción de un modelo, se simplifica, empleando los numerosos bloques pertenecientes a diferentes librerías. El Simulink está integrado con Matlab y los datos pueden ser transferidos fácilmente entre los programas [8].

Simulink viene a ser una herramienta de simulación de modelos o sistemas, con cierto grado de abstracción de los fenómenos físicos involucrados en los mismos. Se hace hincapié en el análisis de sucesos, a través de la concepción de sistemas.

Es ampliamente usado en Ingeniería Electrónica en temas relacionados con el procesamiento digital de señales, involucrando temas específicos de ingeniería biomédica, telecomunicaciones, entre otros. También es muy utilizado en Ingeniería de Control y Robótica [9].

1.3 Necesidad de los materiales didácticos como guía del estudio independiente

El estudio independiente es una actividad orientada a la formación de habilidades intelectuales que permiten la construcción del conocimiento a partir de la reflexión personal, la creatividad y la originalidad, que permite al estudiante realizar proyectos de trabajo que satisfagan sus necesidades y a la vez adquirir las habilidades que desea [4].

Se caracteriza por el establecimiento de metas y objetivos educativos personales, basados en el reconocimiento de las propias posibilidades, y apoyado en un sistema motivacional que responde a necesidades y expectativas propias según el contexto grupal y social en que el individuo se desarrolla. Se desprende de lo anterior que la caracterización del estudio independiente necesariamente debe comprender tanto aspectos del contexto social como los propios del individuo, aunque la relevancia que adquieren estos últimos se hace evidente cuando se pretende que el estudiante desarrolle procesos motivacionales, habilidades para el estudio y el establecimiento de metas propias que implican un reconocimiento de la responsabilidad en el propio aprendizaje [10].

El estudiante puede organizar psicológicamente la información e incorporarla a su esquema de conocimiento cuando la presentación de esa información para su aprendizaje

sigue un patrón lógico y sistemático. Actualmente, los profesionales de la educación han empezado a tomar en cuenta la necesidad de apoyar al estudiante con una multiplicidad de apoyos didácticos para la apropiación de los contenidos académicos.

La secuenciación, jerarquización, esquematización de los contenidos, el mapa conceptual, las redes semánticas, la enseñanza de conceptos y procedimientos, en fin, los diferentes apoyos recogidos en propuestas curriculares, planes didácticos y materiales educativos están dirigidos a tratar de lograr esa correspondencia entre lo que se enseña y lo que se aprende.

Dentro de una perspectiva de tecnología educativa, los materiales didácticos resultan ser refuerzos valiosos para hacer cada vez más eficientes las formas de aprender los contenidos curriculares, a través de su presentación y enseñanza. Pero si se piensa que el aprendizaje se aproxima al conocimiento de una manera particular e idiosincrática, la eficiencia en el aprendizaje depende también de la disposición y el entrenamiento del propio sujeto en las formas estratégicas y particulares de aprender.

La tecnología del aprendizaje toma en cuenta tanto las estrategias didácticas como las de aprendizaje para apoyar al sujeto que busca conocer. Esto no es algo nuevo en la tecnología educativa que contempla el proceso integral de enseñanza- aprendizaje. Sin embargo, la confluencia de estrategias provenientes de quien enseña y de quien aprende resulta de una importancia capital en el estudio independiente, sobre todo cuando se considera la posibilidad de ubicar en ambos roles a la misma persona, con el apoyo de los materiales didácticos [4].

Los materiales didácticos son el conjunto de informaciones, orientaciones, actividades y propuestas que se elaboran para guiar al alumno en el proceso de aprendizaje y que están contenidos en un determinado soporte (impreso, audiovisual, informático). Los materiales cumplen una función muy importante, pues tienen una finalidad de enseñanza y expresan una propuesta pedagógica. Enseñan en tanto guían el aprendizaje de los alumnos, presentando y graduando los contenidos y las actividades, transmitiendo información actualizada sobre la temática del curso, planteando problemas, alentando la formulación de preguntas y el debate del grupo. Incrementan la motivación de nuestros alumnos con desarrollos serios, interesantes y atractivos. Pero, también, deberán proveer al alumno de una estructura organizativa capaz de hacerle sentir que está haciendo un curso, no solo leyendo un material. Se hace referencia aquí a la estructura que vincula los conocimientos previos con los nuevos aportes y que establece o ayuda a establecer las futuras conexiones de los mismos apoyando de este modo al alumno para que teja la trama de relaciones necesarias para el aprendizaje.

1.4 Conclusiones del capítulo

1. Debido a la reducción de las horas presenciales de las asignaturas, que trae consigo la implementación del Plan de estudio E, se hace necesario un aumento en el tiempo que los estudiantes dedican al estudio independiente.
2. La elaboración de materiales para apoyar al estudio independiente será de gran importancia para lograr una preparación óptima de los estudiantes.
3. Los materiales didácticos tomarán un papel preponderante dentro del Plan de estudio E pero en ningún momento deben sustituir al profesor, sino que este debe orientar a los estudiantes cómo utilizarlos para su mejor provecho.
4. Será necesario potencializar la utilización de las TIC en el proceso docente educativo como herramienta indispensable para el trabajo académico.
5. Matlab - Simulink son herramientas con poderosas aplicaciones en temas de perfil eléctrico.
6. La asignatura Circuitos Eléctricos que es la base de las carreras de la Facultad de Ingeniería Eléctrica propone los temas que deben ser impartidos en el Plan E, de acuerdo a las orientaciones recibidas, manteniendo un mayor número de horas dedicadas a las actividades prácticas.

Lo anterior constituye la justificación para la elaboración de esta tesis que es un material complementario, el cual será de gran ayuda en la preparación de los estudiantes, apoyando su estudio independiente.

CAPÍTULO 2. Circuitos de segundo orden

En este capítulo se expone la teoría fundamental sobre los circuitos de segundo orden en estado transitorio., la cual fue tomada del libro Análisis de Circuitos en Ingeniería de los autores William H. Hayt (Jr.), Jack E. Kemmerly y Steven M. Durbin [11].

2.1 Propiedad de linealidad

Se determina la respuesta natural, que en este caso se lleva a cabo de un modo más conveniente al considerar el circuito sin fuente. Luego se podrán incluir fuentes de cd, interruptores o fuentes de escalón en el circuito que representan la respuesta total como la suma de la respuesta natural y la respuesta forzada [9].

Se comenzará con el cálculo de la respuesta natural de un circuito simple que se forma al conectar R , L y C en paralelo.

Cuando un capacitor *físico* se conecta en paralelo con un inductor y el capacitor tiene asociada una resistencia finita, se demuestra que la red resultante tiene un modelo de circuito equivalente como el de la figura 2.1.

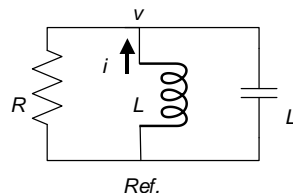


Figura 2.1 Circuito RLC paralelo sin fuente.

La presencia de esta resistencia se usa para simular las pérdidas de energía en el capacitor; además, todos los capacitores reales se descargarán a la larga, incluso si se desconectan de un circuito. Las pérdidas de energía en el inductor físico también se toman en cuenta mediante la adición de una resistencia ideal (en serie con el inductor ideal). Sin embargo, por simplicidad se restringe el análisis al caso de un inductor ideal en paralelo con un capacitor “con fugas”.

Deducción de la ecuación diferencial de un circuito RLC en paralelo

En el siguiente análisis se supondrá que, inicialmente, se podría almacenar la energía en el inductor y en el capacitor; en otras palabras, se presentarían valores iniciales distintos de cero tanto de la corriente del inductor como de la tensión del capacitor. Con base en la figura 2.1 como referencia, se escribiría la ecuación nodal simple

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v dt' - i(t_0) + C \frac{dv}{dt} = 0 \quad (1)$$

Se puede observar que el signo menos es consecuencia de la dirección supuesta de i . Se debe resolver la ecuación [1] sujeta a las condiciones iniciales

$$i(0^+) = I_0 \quad (2)$$

y
$$i(0^+) = V_0 \quad (3)$$

Cuando ambos lados de la ecuación (1) se diferencian una vez con respecto al tiempo, el resultado consiste en una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden. Los circuitos en este capítulo contienen inductores y capacitores, por tanto, las ecuaciones diferenciales describen circuitos de segundo orden. Por eso, tales circuitos se nombran circuitos de segundo orden [12].

$$C \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L} v = 0 \quad (4)$$

cuya solución $v(t)$ es la respuesta natural deseada.

Solución de la ecuación diferencial

Se utiliza la forma exponencial para resolver la ecuación (4)

$$v = Ae^{st}$$

es la forma más general posible y que permite que A y s sean números complejos, en caso de ser necesario. Al sustituir la ecuación (5) en la ecuación (4) se obtiene

$$CA s^2 e^{st} + \frac{1}{R} A s e^{st} + \frac{1}{L} A e^{st} = 0 \quad \text{o} \quad A e^{st} \left(C s^2 + \frac{1}{R} s + \frac{1}{L} \right) = 0$$

Para que se satisfaga esta ecuación todo el tiempo, al menos uno de los tres factores debe ser cero. Si cualquiera de los primeros dos factores se iguala a cero, entonces $v(t) = 0$. Ésta es una solución trivial de la ecuación diferencial que no puede satisfacer las condiciones iniciales dadas. Por lo tanto, se iguala a cero el factor restante:

$$Cs^2 + \frac{1}{R}s + \frac{1}{L} = 0 \quad (6)$$

Se suele denominar a esta expresión *ecuación auxiliar* o **ecuación característica**. Si es posible satisfacerla, entonces es correcta la solución supuesta. Puesto que la ecuación (6) es cuadrática, hay dos soluciones identificadas como s_1 y s_2 :

$$s_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (7)$$

$$\text{y } s_2 = -\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (8)$$

Si *cualquiera* de estos valores se usa para s en la solución supuesta, entonces la solución satisface la ecuación diferencial dada; de tal modo ésta se convierte en una solución válida de la ecuación diferencial.

Suponga que se sustituye s por s_1 en la ecuación (5), con lo cual se obtiene

$$v_1 = A_1 e^{s_1 t}$$

y, de manera similar,

$$v_2 = A_2 e^{s_2 t}$$

La primera satisface la ecuación diferencial

$$C \frac{d^2 v_1}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{L} v_1 = 0$$

y la última satisface

$$C \frac{d^2 v_2}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dv_2}{dt} + \frac{1}{L} v_2 = 0$$

Si se suman estas dos ecuaciones diferenciales y se combinan términos semejantes, se obtiene

$$C \frac{d^2(v_1 + v_2)}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{d(v_1 + v_2)}{dt} + \frac{1}{L}(v_1 + v_2) = 0$$

Prevalece la linealidad y se observa que la *suma* de ambas soluciones también es una solución. De este modo, la forma general de la respuesta natural es

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (9)$$

donde s_1 y s_2 están dadas por las ecuaciones (7) y (8); A_1 y A_2 son dos constantes arbitrarias que se deben seleccionar para satisfacer las dos condiciones iniciales especificadas.

Definición de términos de frecuencia

La forma de la respuesta natural, como se da en la ecuación (9), ofrece poca información acerca de la naturaleza de la curva que se podría obtener si $v(t)$ se graficara como una función del tiempo. Las amplitudes relativas de A_1 y A_2 , por ejemplo, serán en verdad importantes para determinar la forma de respuesta. Además, las constantes s_1 y s_2 son números reales o números complejos conjugados, lo cual depende de los valores de R , L y C en la red dada. Estos dos casos producirán formas de respuesta fundamentalmente diferentes. Por lo tanto, será útil efectuar algunas sustituciones simplificatorias en la ecuación (9).

En razón de que los exponentes $s_1 t$ y $s_2 t$ deben ser adimensionales, resulta necesario que s_1 y s_2 tengan las unidades de alguna cantidad adimensional “por segundo”. Así, en las ecuaciones (7) y (8) se observa que las unidades de $1/2RC$ y $1/\sqrt{LC}$ deben también ser s^{-1} (es decir, segundos^{-1}). Las unidades de este tipo se llama **frecuencias**.

Se define un nuevo término, ω_0 (**omega subíndice cero o solo omega cero**):

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (10)$$

y se reserva para éste el término **frecuencias resonante**. Por otro lado, se conocerá como $1/2RC$ a la **frecuencia de Neper** o el **coeficiente de amortiguamiento exponencial**, y se representará mediante el símbolo α (alfa):

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \quad (11)$$

Esta última expresión descriptiva se usa debido que α es una medida de lo rápido que decae o se amortigua la respuesta natural hasta su valor final permanente (a menudo cero.) Por último, s_1 y s_2 , que son cantidades que formarán las bases de nuestro trabajo posterior, se denominan **frecuencias complejas**.

Se debe advertir que s_1 , s_2 , α y ω_0 son solo símbolos utilizados solo para simplificar el análisis de los circuitos *RLC* no son nuevas propiedades.

Se deben poner juntos estos resultados, en cuyo caso la respuesta natural del circuito *RLC* en paralelo es

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (9)$$

donde:

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (12)$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (13)$$

y A_1 y A_2 deben determinarse aplicando las condiciones iniciales dadas.

Se pueden observar dos escenarios básicos posibles en las ecuaciones (12) y (13) en función de los tamaños relativos de α y ω_0 (los cuales están determinados por los valores de R , L y C). Si $\alpha > \omega_0$, s_1 y s_2 serán números reales, lo que conduce a lo que se conoce como **respuesta sobreamortiguada**. En el caso contrario, donde $\alpha < \omega_0$, donde s_1 como

s_2 tendrán componentes imaginarios diferentes de cero, lo que conduce a lo que se conoce como **respuesta subamortiguada**. Ambas situaciones se consideran por separado en las secciones siguientes, junto con el caso especial en el que $\alpha = \omega_0$, que lleva a lo que se conoce **respuesta críticamente amortiguada**. Se debe observar también que la respuesta general comprendida en las ecuaciones (9) a (13) describe no solamente la tensión sino también las tres corrientes en las ramas del circuito *RLC* en paralelo, desde luego, las constantes A_1 y A_2 serán diferentes entre sí.

2.2 Circuito *RLC* en paralelo sobreamortiguada

Una comparación de las ecuaciones (10) y (11) muestra que α será mayor que ω_0 si $LC > 4R^2C^2$. En este caso, el radical utilizado en el cálculo de s_1 y s_2 será real, así que s_1 y s_2 también lo serán. Además, las siguientes desigualdades

$$\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} < \alpha$$

$$(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}) < (-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}) < 0$$

se aplicarían a las ecuaciones (12) y (13) para mostrar que tanto s_1 como s_2 son números reales *negativos*. De tal manera, la respuesta $v(t)$ se expresa como la suma algebraica de dos términos exponenciales decrecientes que tienden a cero cuando aumenta el tiempo. En realidad, puesto que el valor de s_2 es mayor que el de s_1 , el término que contiene a s_2 tiene una tasa de reducción más rápida, y para valores de tiempo grandes la expresión límite se escribiría como

$$v(t) \rightarrow A_1 e^{s_1 t} \rightarrow 0 \text{ como } t \rightarrow \infty$$

El siguiente paso consiste en determinar las constantes arbitrarias A_1 y A_2 según las constantes iniciales. Se elige un circuito *RLC* en paralelo con $R = 6 \Omega$, $L = 7 \text{ H}$ y, para simplificar el cálculo, $C = \frac{1}{42} \text{ F}$. El almacenamiento de energía inicial se especifica mediante una tensión inicial en el circuito $v(0) = 0$ y una corriente de inductor inicial $i(0) = 10 \text{ A}$, donde v y i se definen en la figura 2.2.

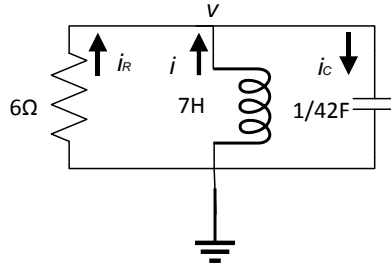


Figura 2.2 Circuito *RLC* en paralelo utilizado como ejemplo numérico. El circuito está sobreamortiguado.

Se determinarían con facilidad los valores de varios parámetros

$$\alpha = 3.5 \qquad \omega_0 = \sqrt{6}$$

$$s_1 = -1 \qquad s_2 = -6 \quad (\text{todo } s^{-1})$$

y de inmediato se escribiría la forma general de la respuesta natural:

$$v(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-6t} \qquad (14)$$

Cálculo de los valores de A_1 y A_2

Solo resta la evaluación de las dos constantes A_1 y A_2 . Si se conociera la respuesta $v(t)$ en dos valores diferentes del tiempo, tales valores podrían sustituirse en la ecuación (14), de modo que A_1 y A_2 se determinarían sin ningún problema. Sin embargo, se conoce solo un valor instantáneo de $v(t)$,

$$v(0) = 0$$

y, por lo tanto,
$$0 = A_1 + A_2 \qquad (14)$$

Se puede obtener una segunda ecuación que relaciona A_1 y A_2 si se toma la derivada de $v(t)$ con respecto al tiempo en la ecuación (14), se determina el valor inicial de la derivada mediante el uso de la condición inicial restante $i(0) = 10$ y se igualan los resultados. De esta forma, al derivar ambos lados de la ecuación (14) se tiene

$$\frac{dv}{dt} = -A_1 e^{-t} - 6A_2 e^{-6t}$$

y al evaluar la derivada en $t = 0$, $\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = A_1 - 6A_2$

se obtiene una segunda ecuación. Si bien esta forma parece ser útil, no se tiene un valor numérico del valor inicial de la derivada, por lo que no se dispone todavía de dos ecuaciones con incógnita. La expresión dv/dt sugiere una corriente de capacitor, puesto que

$$i_C = C \frac{dv}{dt}$$

La ley de Kirchhoff de corrientes debe cumplirse en cualquier instante de tiempo, ya que se fundamenta en la conservación de electrones. De tal modo, se podría escribir

$$-i_C(0) + i(0) + i_R(0) = 0$$

Al sustituirse nuestra expresión para la corriente del capacitor y al dividir entre C , se tiene

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_C(0)}{C} = \frac{i(0) + i_R(0)}{C} = \frac{i(0)}{C} = 420 \text{ V/s}$$

puesto que la tensión inicial cero en la resistencia requiere de una corriente inicial cero a través de ella. En consecuencia, se tiene la segunda ecuación,

$$420 = -A_1 - 6A_2 \quad (16)$$

y la solución simultánea de las ecuaciones (15) y (16) proporciona dos amplitudes $A_1 = 84$ y $A_2 = -84$. Por lo tanto, la solución numérica final de la respuesta natural de este circuito es

$$v(t) = 84(e^{-t} - e^{-6t})\text{V} \quad (17)$$

Representación gráfica de la respuesta sobreamortiguada

Se regresa ahora a la ecuación (17) y se observa la información adicional que se puede determinar respecto de este circuito. Se puede interpretar el primer término exponencial

como si tuviera una constante de tiempo de 1 s, y la otra exponencial, como si tuviera 1/6 de s. Cada uno empieza con amplitud unitaria, aunque el último decae con mayor rapidez; $v(t)$ nunca es negativa. Cuando el tiempo se vuelve infinito, cada término tiende a cero, y la respuesta misma se desvanece, como debe ser. Por lo tanto, se tiene una curva de respuesta que es cero en $t = 0$, cero en $t = \infty$, y como nunca es negativa; puesto que no es cero en todos lados, debe poseer al menos un máximo, el cual no es un punto difícil de determinar con exactitud. Se deriva la respuesta:

$$\frac{dv}{dt} = 84(-e^{-t} + 6e^{-6t})$$

se iguala la derivada a cero para determinar el tiempo t_m con el cual la tensión se vuelve máxima:

$$0 = -e^{-t_m} + 6e^{-6t_m}$$

simplificando,

$$e^{5t_m} = 6$$

y se obtiene

$$t_m = 0.358 \text{ s}$$

y

$$v(t_m) = 48.9 \text{ V}$$

Se puede elaborar un dibujo razonable de la respuesta graficando los términos exponenciales $84e^{-t}$ y $84e^{-6t}$ para después tomar su diferencia. La utilidad de esta técnica se indica mediante las curvas de la figura 3; las dos exponenciales corresponden a trazas delgadas, y su diferencia, la respuesta total $v(t)$, se dibuja como una traza a color. Las curvas verifican también que el comportamiento funcional de $v(t)$ para t es muy grande, de $84e^{-t}$, el término exponencial contiene la magnitud más pequeña de s_1 y s_2 .

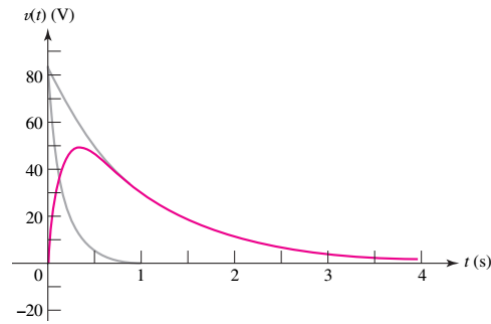


Figura 2.3 Respuesta $v(t) = 84(e^{-t} - e^{-6t})$ de la red que se muestra en la figura 2.2

Una pregunta que se plantea con frecuencia se refiere al tiempo que transcurre en realidad para que desaparezca (o se “amortigüe”) la parte transitoria de la respuesta. En la práctica, muchas veces resulta deseable conseguir que esta respuesta transitoria tienda a cero tan rápido como sea posible; esto es, se debe minimizar el **establecimiento del tiempo** t_s . En teoría, desde luego, t_s es infinito debido que $v(t)$ nunca se establece como cero en un tiempo finito. Sin embargo, una respuesta despreciable se presenta luego de que se estableció la magnitud de $v(t)$ en valores que permanecen menores a 1% de su valor absoluto máximo $|v_m|$. Se define el tiempo que se requiere para que esto ocurra como el tiempo de establecimiento. Puesto que $|v_m| = v_m = 48.9$ V en ejemplo, el tiempo de establecimiento es el necesario para que la respuesta disminuya hasta 0.489 V. Al sustituir este valor de $v(t)$ en la ecuación (17) e ignorar el segundo término exponencial, que se sabe que es posible omitir en este caso, se encuentra que el tiempo de establecimiento correspondiente a 5.15 s.

2.3 Amortiguamiento crítico

El caso sobreamortiguado se caracteriza por

$$\alpha > \omega_0 \quad \text{o}$$

$$LC > 4R^2C^2$$

y da lugar a valores reales negativos para s_1 y s_2 , además de una respuesta expresada como suma algebraica de dos exponenciales negativas.

Se ajustan ahora los valores de los elementos hasta que α y ω_0 sean iguales. Es un caso muy especial que recibe el nombre de **amortiguamiento crítico**. Si se tratara de construir un circuito *RLC* en paralelo que estuviera críticamente amortiguado, se intentaría una tarea en esencia imposible, puesto nunca se podría lograr que α fuera exactamente igual a ω_0 . Sin embargo, para completar el tema se explicará el circuito críticamente amortiguado, ya que muestra una transición interesante entre el sobreamortiguamiento y el subamortiguamiento [13].

El amortiguamiento crítico se obtiene cuando

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = \omega_0 \\ LC = 4R^2C^2 \\ L = 4R^2L \end{array} \right\} \text{amortiguamiento crítico}$$

Se elegirá R y se aumentará su valor hasta que se obtenga el amortiguamiento crítico y luego se dejará a ω_0 inalterada. El valor necesario de R es $7\sqrt{6/2}\Omega$; L sigue siendo 7H y C se mantiene en 1/42 F. Así, se tiene que

$$\alpha = \omega_0 = \sqrt{6} \text{ s}^{-1}$$

$$s_1 = s_2 = -\sqrt{6} \text{ s}^{-1}$$

y recuerde las condiciones iniciales que se especificaron, $v(0) = 0$ e $i(0) = 10 \text{ A}$.

Forma de una respuesta críticamente amortiguada

Se procede a tratar de construir una respuesta como la suma de dos exponenciales,

$$v(t) = A_1 e^{-\sqrt{6}t} + A_2 e^{-\sqrt{6}t}$$

la cual se podría escribir como: $v(t) = A_3 e^{-\sqrt{6}t}$

Se tiene una respuesta que contiene solo una constante arbitraria, pero hay dos condiciones iniciales, $v(0) = 0$ e $i(0) = 10 \text{ A}$, y ambas debe ser satisfechas por esta constante. Si se elige $A_3 = 0$, entonces $v(t) = 0$, lo cual resulta congruente con la tensión inicial del capacitor. Sin embargo, aunque no hay energía almacenada en el capacitor en $t = 0^+$, se tiene 350 J de energía almacenada inicialmente en el inductor, la cual originará

una corriente transitoria que fluirá hacia fuera del inductor y propiciará una tensión distinta de cero en los tres elementos. Lo anterior parece estar en conflicto directo con la solución propuesta.

Se infiere al principio que la ecuación diferencial podría resolverse suponiendo una solución exponencial, lo cual resultó incorrecto para este caso especial simple de amortiguamiento crítico. Cuando $\alpha = \omega_0$, la ecuación diferencial, ecuación (4), se convierte en:

$$\frac{d^2v}{dt^2} = 2\alpha \frac{dv}{dt} + \alpha^2 v = 0$$

La solución de esta ecuación no es un proceso muy complejo, pero no se va a desarrollar aquí, ya que es de tipo normal y se encuentra en los textos comunes de ecuaciones diferenciales. La solución es: $v = e^{-\alpha t}(A_1 t + A_2)$ (18)

Se observa que la solución sigue expresándose como la suma de dos términos, donde uno es la familiar exponencial negativa y el otro es t veces una exponencial negativa. Se puede observar que la solución contiene las *dos* constantes arbitrarias esperadas.

Cálculo de los valores de A_1 y A_2

Se completará el ejemplo numérico. Luego de sustituir el valor conocido de α en la ecuación (18), se obtiene $v = A_1 t e^{-\sqrt{6}t} + A_2 e^{-\sqrt{6}t}$ y se establece los valores de A_1 y A_2 al imponer las condiciones iniciales sobre la propia $v(t)$, $v(0) = 0$; de tal modo, $A_2 = 0$. Este simple resultado aparece debido a que se eligió como nulo el valor inicial de la respuesta $v(t)$; el caso más general requerirá la solución simultánea de dos ecuaciones. La segunda condición inicial debe aplicarse a la derivada dv/dt exactamente como en el caso sobreamortiguado. Por lo tanto, se deriva recordando que $A_2 = 0$:

$$\frac{dv}{dt} = A_2 t(-\sqrt{6})e^{-\sqrt{6}t} + A_2 e^{-\sqrt{6}t}$$

se evalúa en $t = 0$: $\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = A_1$

y se expresa la derivada en términos de la corriente inicial en el capacitor:

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_C(0)}{C} = \frac{i_R(0)}{C} + \frac{i(0)}{C}$$

donde las direcciones de referencia de i_C , i_R e i son las definidas en la figura 2.2.

En consecuencia, $A_1 = 420 \text{ V}$

La respuesta es, por lo tanto: $v(t) = 420te^{-2.545t} \text{ V}$ (19)

Representación gráfica de la respuesta críticamente amortiguada

Antes de graficar en detalle esta respuesta, se tratará de anticipar otra vez su forma mediante un razonamiento cualitativo. El valor inicialmente especificado es cero, que coincide con la ecuación (19). No se manifiesta de inmediato que la respuesta tienda también a cero cuando t se vuelve infinitamente grande, debido a que $te^{-2.45t}$ es una forma indeterminada. Sin embargo, este obstáculo se supera con facilidad mediante el empleo de la regla de L'Hôpital, la cual establece que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 420 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{2.45t}} = 420 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2.45e^{2.45t}} = 0$$

y una vez más se tiene una respuesta que empieza y termina en cero y que tiene valores positivos en todos los demás tiempos. Un valor máximo v_m ocurre otra vez en el tiempo t_m ; en el ejemplo: $t_m = 0.408 \text{ s}$ y $v_m = 63.1 \text{ V}$

Este máximo es mayor que el que obtuvo en el caso sobreamortiguado, y además es una consecuencia de las pérdidas más pequeñas que ocurren en una resistencia más grande; el tiempo de la respuesta máxima es un poco mayor que el correspondiente al sobreamortiguamiento. El tiempo de establecimiento también se determinaría resolviendo:

$$\frac{v_m}{100} = 420t_s e^{-2.45t_s}$$

$$t_s = 3.12 \text{ s}$$

que es un valor más pequeño que el que resulta en el caso sobreamortiguado (5.15s). En realidad, se demuestra que, para valores dados de L y C , la selección del valor de R que

proporcione amortiguamiento crítico siempre dará un tiempo de establecimiento más breve que cualquiera elección de R que produzca una respuesta sobreamortiguada. Sin embargo, se obtendría una ligera mejora (reducción) del tiempo de establecimiento mediante un pequeño aumento en la resistencia; una respuesta ligeramente sobreamortiguada tal que no alcanzaría al eje cero antes de desvanecerse provocará que el tiempo de establecimiento sea más breve.

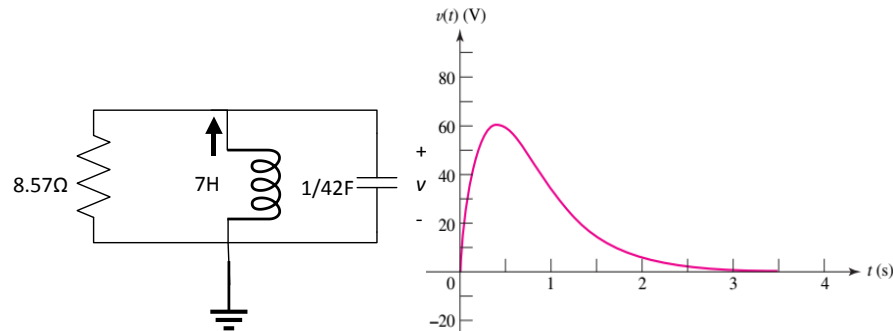


Figura 2.4 Respuesta de la red que se presenta en la figura 2.2, con R modificada para proporcionar amortiguamiento crítico.

La curva de respuesta del amortiguamiento crítico que se dibuja en la figura 2.4 puede compararse con el caso sobreamortiguado (y subamortiguado) de la figura 2.7.

2.4 Circuito RLC en paralelo subamortiguado

Continuando con el proceso que se inició en la última sección se incrementará R una vez más para obtener lo que se denominará una respuesta **subamortiguada**. De esta forma, el coeficiente de amortiguamiento α disminuye mientras ω_0 permanece constante, α^2 se hace más pequeña que ω_0^2 y el radicando que aparece en la expresión de s_1 y s_2 se vuelve negativo. Lo anterior provoca que la respuesta tome un carácter muy diferente, aunque no es necesario regresar de nuevo a la ecuación diferencial básica. Mediante el uso de números complejos, la respuesta exponencial se convierte en una *respuesta senoidal amortiguada* que está compuesta en su totalidad por cantidades reales, de modo que las cantidades complejas solo son necesarias en la deducción [13].

Formas de la respuesta subamortiguada

Se comienza con la forma exponencial $v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$

donde: $s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$

y en ese caso, sea: $\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-1} \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = j \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$

donde $j \equiv \sqrt{-1}$

Se considera ahora el nuevo radical, que es real para el caso subamortiguado, pero se denominará ω_d , la **frecuencia resonante natural**:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

La respuesta se escribiría ahora como

$$v(t) = e^{-\alpha t} (A_1 e^{j\omega_d t} + A_2 e^{-j\omega_d t}) \quad [20]$$

o en forma más extensa pero equivalente,

$$v(t) = e^{-\alpha t} \left\{ (A_1 + A_2) \left[\frac{e^{j\omega_d t} + e^{-j\omega_d t}}{2} \right] + j(A_1 - A_2) \left[\frac{e^{j\omega_d t} - e^{-j\omega_d t}}{j2} \right] \right\}$$

Al aplicar las identidades, el primer corchete de la ecuación anterior es exactamente igual a $\omega_d t$, y el segundo, $\omega_d t$. Por consiguiente:

$$v(t) = e^{-\alpha t} [(A_1 + A_2) \cos \omega_d t + j(A_1 - A_2) \text{sen } \omega_d t]$$

de esta forma se asignarían nuevos símbolos a los factores multiplicadores:

$$v(t) = e^{-\alpha t} (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \text{sen } \omega_d t) \quad (19)$$

donde las ecuaciones (20) y (21) son idénticas.

La expresión ha aparecido originalmente con un componente complejo, y ahora es solo real. Sin embargo, se permitió al principio que A_1 y A_2 fueran complejos, lo mismo que s_1 y s_2 . En cualquier situación, si se está tratando con el caso subamortiguado, se deja ahora a un lado a los números complejos. Lo anterior debe ser cierto, pues α , ω_d y t son

cantidades reales, por lo que la propia $v(t)$ debe ser una cantidad real (que podría presentarse mediante un osciloscopio, un voltímetro o una hoja de papel gráfico). La ecuación (21) es la forma funcional deseada de la respuesta subamortiguada y su validez se verifica mediante la sustitución directa en la ecuación diferencial original; este ejercicio se deja a los incrédulos. Las dos constantes reales B_1 y B_2 se eligen de nuevo para que se ajusten a las condiciones iniciales dadas.

Ahora se regresará al circuito RLC simple en paralelo de la figura 2.2 con $R = 6 \Omega$, $C = 1/42F$ y $L = 7 H$, pero se incrementará la resistencia a un valor de 10.5Ω . Por lo tanto,

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = 2s^{-1}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{6}s^{-1} \quad y$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{2} \text{ rad/s}$$

Salvo por la evaluación de las constantes arbitrarias, en este caso se conoce la respuesta:

$$v(t) = e^{-2t}(B_1 \cos \sqrt{2}t - B_2 \sin \sqrt{2}t)$$

Cálculo de los valores de B_1 y B_2

Para el cálculo de los constantes se procede como antes. Si se continúa suponiendo que $v(0) = 0$ e $i(0) = 10$, entonces B_1 debe ser cero. De ahí que

$$v(t) = B_2 e^{-2t} \sin \sqrt{2}t$$

La derivada es:

$$\frac{dv}{dt} = \sqrt{2}B_2 e^{-2t} \cos \sqrt{2}t - 2B_2 e^{-2t} \sin \sqrt{2}t$$

y en $t = 0$ se convierte es

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = \sqrt{2}B_2 = \frac{i_C(0)}{C} = 420$$

donde i_C se define en la figura 2.2. Por lo tanto, $v(t) = 210\sqrt{2}e^{-2t} \sin \sqrt{2}t$

Representación gráfica de la respuesta subamortiguada

Observar que, como antes, esta función de respuesta tiene un valor inicial de cero, debido a la condición de tensión inicial que se impuso, y un valor final de cero en virtud de que el término exponencial se anula para valores grandes de t . Cuando t aumenta a partir de cero, en pequeños valores positivos, $v(t)$ aumenta como $210\sqrt{2}\text{sen}\sqrt{2}t$, pues el término exponencial permanece en esencia igual a la unidad. Pero en cierto tiempo t_m , la función exponencial empieza a disminuir más rápido a medida que la función $\text{sen}\sqrt{2}t$ crece. De tal modo, $v(t)$ alcanza un máximo v_m y empieza a disminuir. Es necesario observar que t_m no es el valor de t para el cual $\text{sen}\sqrt{2}t$ es un máximo, sino que debe ocurrir un poco antes de que $\text{sen}\sqrt{2}t$ alcance su máximo.

Cuando $t = \pi/\sqrt{2}$, $v(t)$ es cero. En consecuencia, en el intervalo $\pi/\sqrt{2} < t < \sqrt{2}\pi$, la respuesta es negativa, y se vuelve cero de nuevo en $t = \sqrt{2}\pi$. Por consiguiente, $v(t)$ es una función oscilatoria del tiempo y cruza el eje de tiempo un número infinito de veces en $t = n\pi/\sqrt{2}$, donde n es cualquier entero positivo. Sin embargo, en el ejemplo la respuesta solo es un poco subamortiguada, y el término exponencial provoca que la función se desvanezca tan rápido que la mayor parte de los cruces por cero no serán evidentes en el dibujo.

La naturaleza oscilatoria de la respuesta se nota más cuando α disminuye. Si α es cero, lo cual corresponde a una resistencia infinitamente grande, entonces $v(t)$ es una senoide subamortiguada que oscila con amplitud constante. Nunca hay un tiempo para el que $v(t)$ se reduzca y permanezca por debajo de 1% de su valor máximo; en consecuencia, el tiempo de establecimiento es infinito, aunque no es el movimiento perpetuo. Se supuso tan solo una energía inicial en el circuito y no se proporcionó ningún medio para disiparla, por lo que se transfiere desde su ubicación inicial en el inductor hasta el capacitor, para luego regresar al inductor, etc., por siempre.

Función de la resistencia finita

Una R finita en el circuito RLC en paralelo actúa como un tipo de intermediario de transferencia eléctrica. Cada vez que la energía se transfiere de L a C o de C a L , ocurre disipación. En poco tiempo se habrá tomado toda la energía, disipándose de manera

desenfrenada hasta el último joule. La L y C se quedan sin un joule propio, sin tensión y sin corriente. Los circuitos RLC en paralelo reales pueden construirse a fin de que tengan valores eficaces de R tan grandes que se conserve durante años una respuesta senoidal subamortiguado natural, sin suministrar ninguna energía adicional.

Regresando al problema numérico específico, la diferenciación localiza el primer máximo de $v(t)$, $v_{m_1} = 718 \text{ V}$ en $t_{m_1} = 0.435 \text{ s}$

el mínimo siguiente, $v_{m_2} = -0.845 \text{ V}$ en $t_{m_2} = 2.66 \text{ s}$

y así en forma sucesiva. La curva de respuesta se muestra en la figura 2.5, y las curvas de respuesta adicionales de circuitos cada vez más subamortiguados, en la figura 2.6.

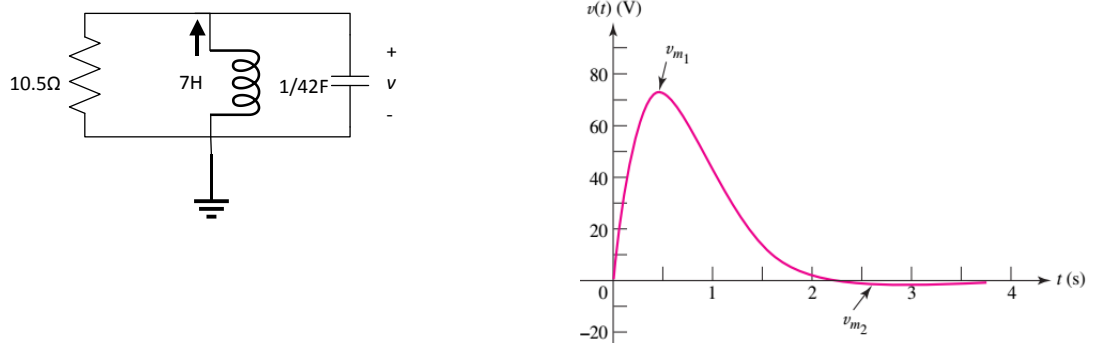


Figura 2.5 La respuesta $v(t) = 210\sqrt{2}e^{-2t} \text{ sen } \sqrt{2}t$ de la red que se muestra en la figura 2.2 con R incrementada para producir una respuesta subamortiguada.

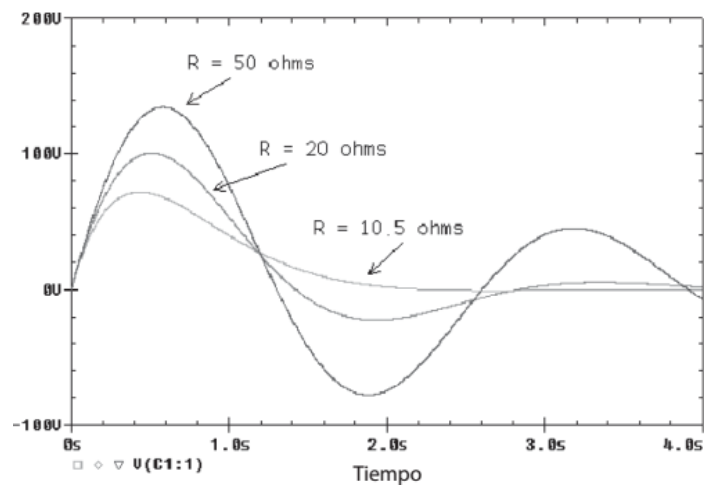


Figura 2.6 Respuesta a una tensión subamortiguada simulada de una red de tres valores diferentes de resistencia, que muestran un incremento del comportamiento oscilatorio a medida que R aumenta.

Es posible obtener el tiempo de establecimiento mediante una solución de ensayo y error, y para $R = 10.5 \Omega$, resulta ser de 2.92 s , algo más pequeño que en el amortiguamiento crítico. Obsérvese que t_s es mayor que t_{m_1} debido a que la magnitud de v_{m_2} es mayor que 1% de la magnitud de v_{m_1} . Ello sugiere que una ligera reducción de R disminuiría la magnitud de la distancia al eje y permitiría que t_s fuera *menor* que t_{m_2} .

Las respuestas sobreamortiguada y subamortiguada de esta red, según la simulada PSpice, se presentan en la misma gráfica de la figura 2.7

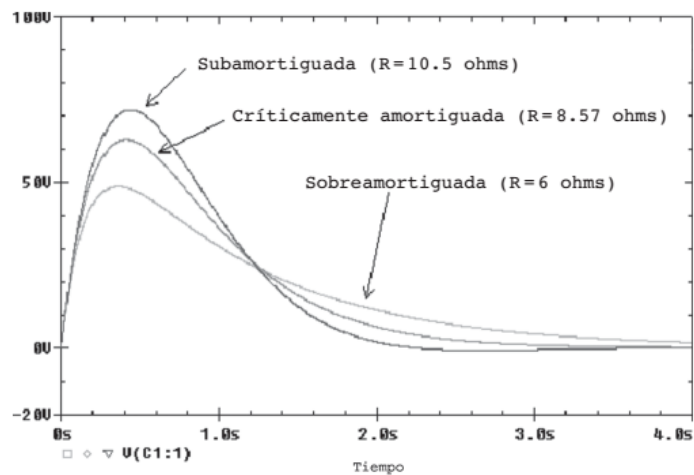


Figura 2.7 Respuesta de tensión sobreamortiguada , críticamente amortiguada y subamortiguada simuladas para la red del ejemplo, que se obtiene cuando se modifica el valor de la resistencia R en paralelo.

Una comparación de las tres curvas hace posibles las siguientes conclusiones generales:

- Cuando el amortiguamiento cambia al incrementar el tamaño de la resistencia en paralelo, la magnitud máxima de la respuesta resulta mayor y la cantidad de amortiguamiento menor.

- La respuesta se vuelve oscilatoria cuando se presenta el subamortiguamiento, por lo que el tiempo de establecimiento mínimo se obtiene para un subamortiguamiento ligero.

2.5 Circuito RLC sin fuente

En esta sección se comprobarán los teoremas de Thévenin y Norton aplicando el principio de superposición. Se desea ahora determinar la respuesta natural de un modelo de circuito compuesto por una resistencia ideal, un inductor ideal y un capacitor ideal conectados en *serie*. La resistencia ideal tal vez represente una resistencia física conectada en un circuito *LC* o *RLC* en serie; quizás también represente las pérdidas óhmicas y las pérdidas en el núcleo ferromagnéticos del inductor, o tal vez se use para representar todos los casos anteriores y otros dispositivos que absorben energía [14].

EL circuito *RLC* en serie es el *dual* del circuito *RLC* en paralelo, así que este simple hecho resulta suficiente para hacer que su análisis sea un asunto trivial. La figura 2.8a presenta al circuito en serie.

La ecuación integrodiferencial fundamentalmente es

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i dt' - v_C(t_0) = 0$$

y debe compararse con la ecuación análoga del circuito *RLC* en paralelo, redibujado en la figura 2.8b

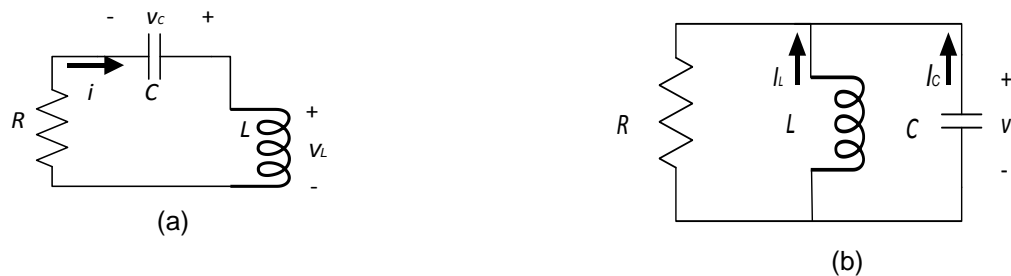


Figura 2.8(a)Circuito *RLC* en serie que es el dual de (b) un circuito *RLC* en paralelo. Los de los elementos no son, desde luego, idénticos en ambos circuitos.

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{1}{R} v + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v dt' - i_L(t_0) = 0$$

Las respectivas ecuaciones de segundo orden que se obtienen diferenciando estas dos ecuaciones con respecto al tiempo también son duales:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0 \quad (22)$$

$$C \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L} v = 0 \quad (23)$$

El análisis completo del circuito *RLC* en paralelo se aplica de manera directa al circuito *RLC* en serie; las condiciones iniciales sobre la tensión en el capacitor y la corriente en el inductor son equivalentes a las condiciones iniciales en la corriente en el inductor y la tensión en el capacitor; la respuesta de *tensión* consistente en una respuesta de *corriente*. Así, se puede volver a leer las cuatro secciones anteriores utilizando el lenguaje dual, a fin de obtener una descripción completa del circuito *RLC* en serie.

Breve resumen de la respuesta del circuito en serie

Resulta fácil presentar un breve resumen de la respuesta del circuito en serie. En términos del circuito que se presenta en la figura 2.8a, la respuesta sobreamortiguada es

$$i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

donde:

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

y por ello:

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad \text{y} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

La forma de la respuesta *críticamente amortiguada* es

$$i(t) = e^{-\alpha t} (A_1 t + A_2)$$

y la respuesta *subamortiguada* se escribiría como

$$i(t) = e^{-\alpha t} (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \text{sen } \omega_d t)$$

Un resumen de todas las respuestas posibles para los circuitos RLC en estado transitorio, aparece en la tabla 2.1.

Tabla 2.1: Resumen de las ecuaciones relevantes de los RLC sin fuentes

Tipo	Condición	Criterio	α	ω_0	Respuesta
Paralelo	Sobreamortiguado	$\alpha < \omega_0$	$\frac{1}{2RC}$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t},$ donde $s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$
Serie			$\frac{R}{ZL}$		
Paralelo	Críticamente amortiguado	$\alpha = \omega_0$	$\frac{1}{2RC}$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$e^{-\alpha t}(A_1 t + A_2)$
Serie			$\frac{R}{ZL}$		
Paralelo	Subamortiguado	$\alpha > \omega_0$	$\frac{1}{2RC}$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$e^{-\alpha t}(B_1 \cos \omega_0 t + B_2 \text{sen } \omega_0 t),$
Serie			$\frac{1}{2RC}$		donde $\omega_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$

donde:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

Es evidente que si se trabaja en términos de los parámetros α , ω_0 y ω_d , las formas matemáticas de las respuestas para las situaciones duales son idénticas. Un aumento en α en el circuito en serie o en paralelo, siempre y cuando ω_0 se mantenga constante, tiende hacia una respuesta sobreamortiguada. La única precaución que se debe tomar radica en el cálculo de α , que corresponde a $1/2RC$ en el caso del circuito en paralelo, y a $R/2L$ en el del circuito en serie; por consiguiente, α se incrementa al aumentar la resistencia en serie, o al disminuir la resistencia en paralelo. Por conveniente, las ecuaciones clave de los circuitos *RLC* en serie y paralelo se resumen en la tabla.

2.6 Respuesta completa del circuito *RLC*

Considerar ahora los circuitos *RLC* en los que las fuentes de cd se conmutan en la red y producen respuestas forzadas que no necesariamente se anulan cuando el tiempo se vuelve infinito. La solución general se obtiene mediante el mismo procedimiento que se siguió en los circuitos *RL* y *RC*: la respuesta forzada se determina por completo; la respuesta natural se obtiene como una forma funcional adecuada que contiene el número apropiado de constantes arbitrarias; la respuesta completa se escribe como la suma de las respuestas forzada y natural; además, las condiciones iniciales se determinan y se aplican a la respuesta completa a fin de calcular los valores de las constantes [15].

En consecuencia, aunque la determinación de las condiciones iniciales no difiere en lo básico en el caso de un circuito que contiene fuentes de cd, de la correspondiente a los circuitos sin fuente que ya se estudiaron con cierto detalle, este tema recibirá un tratamiento destacado en los ejemplos que siguen [16].

La mayor parte de la confusión al determinar y aplicar las condiciones iniciales surge por la simple razón de que no se cuenta con un conjunto de reglas rigurosas dispuestas, que sea viable seguir. En cierto punto de cada análisis suele surgir una situación en la se ve involucrada alguna idea que resulta más o menos única para ese problema particular, lo cual es casi siempre la fuente de la dificultad.

La respuesta *completa* (supuesta de manera arbitraria como la respuesta de tensión) de un sistema de segundo orden consiste en una respuesta *natural*:

$$v_f(t) = V_f$$

que es una constante de la excitación de cd, y una respuesta *natural*:

$$v_n(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$$

En consecuencia:

$$v(t) = V_f + Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$$

Se supone que s_1 , s_2 , y V_f ya se determinaron en el circuito y en las funciones forzadas que se indican; queda por conocer A y B . La última ecuación muestra la interdependencia funcional de A , B , v , y t , de modo que la sustitución del valor conocido de v en $t = 0^+$ da entonces una sola ecuación que relaciona A y B , $v(0^+) = V_f + A + B$.

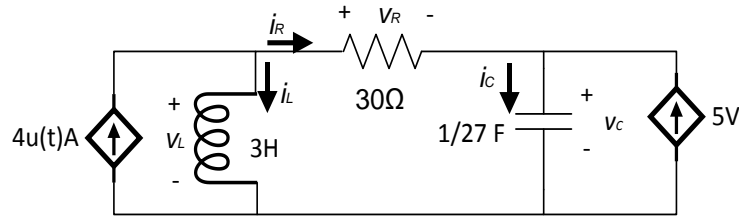
Ahora, se requiere otra relación entre A y B la cual se obtiene casi siempre al tomar la derivada de la respuesta:

$$\frac{dv}{dt} = 0 + s_1 A e^{s_1 t} + s_2 B e^{s_2 t}$$

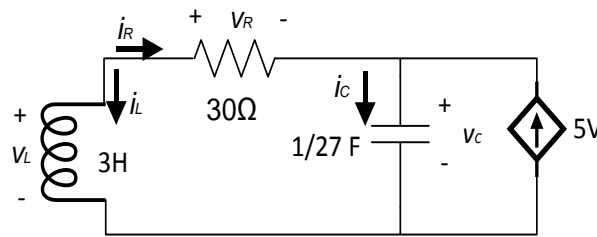
y al sustituir el valor conocido de dv/dt en $t = 0^+$. Así, se tienen dos ecuaciones que relacionan a A y B y que se resolverían de manera simultánea para evaluar las dos constantes.

El único problema que resta es determinar los valores de v y dv/dt en $t = 0^+$. Suponga que v es una tensión en el capacitor, v_C . Puesto que $i_C = Cdv_C/dt$, se debe reconocer la relación entre el valor inicial de dv/dt y el valor inicial de alguna corriente en el capacitor. Si se pudiera establecer un valor de dicha corriente inicial en el capacitor, entonces se establecería de manera automática el valor de dv/dt . Casi siempre los estudiantes pueden obtener con facilidad $v(0^+)$ pero suelen titubear un poco al determinar el valor inicial de dv/dt . Si se hubiera elegido una corriente en el inductor i_L como nuestra respuesta, entonces el valor inicial de di_L/dt estaría íntimamente relacionado con el valor inicial de cierta tensión en el inductor. Otras variables, aparte de las tensiones en el capacitor y de las corrientes en el inductor, se determinan al expresar sus valores iniciales y los valores iniciales de sus derivadas en términos de los valores correspondientes de v_C y i_L .

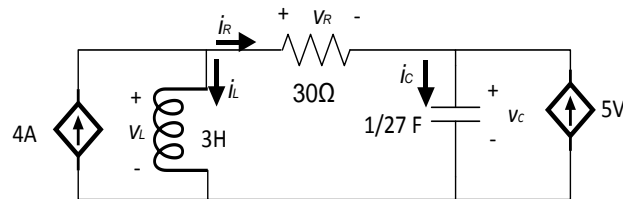
Se ilustra el procedimiento y se calculan todos estos valores mediante el análisis cuidadoso del circuito de la figura 2.9. Para simplificar el análisis, se usa de nuevo una gran capacitancia que es irreal.



(a)



(b)



(c)

Figura 2.9 (a) Circuito *RLC* que se emplea para ilustrar varios procedimientos mediante los pueden obtener las condiciones iniciales. Las respuestas deseada se toma nominalmente como $v_c(t)$, (b) $t = 0^-$, (c) $t > 0$.

Se pudo haber recurrido a un método un poco diferente para evaluar estas corrientes y tensiones en $t = 0^-$ y en $t = 0^+$. Antes de la operación de conmutación, en el circuito solo existen corrientes y tensiones, ambas directas. Por lo tanto, se podría reemplazar el

inductor por un cortocircuito, su equivalente de cd, en tanto que el capacitor se sustituye por un circuito abierto.

Al volverse a dibujar de esta manera, el circuito de la figura 2.9a aparece como en la figura 2.10a. Solo la fuente de corriente de la derecha se encuentra activa y sus 5 A fluyen a través de la resistencia y del inductor. En consecuencia, se tiene $i_R(0^-) = -5$ A y $v_R(0^-) = -150$ V, $i_L(0^-) = 5$ A y $v_L(0^-) = 0$, y $I_C(0^-) = 0$ y $v_C(0^-) = 150$ V, como antes.

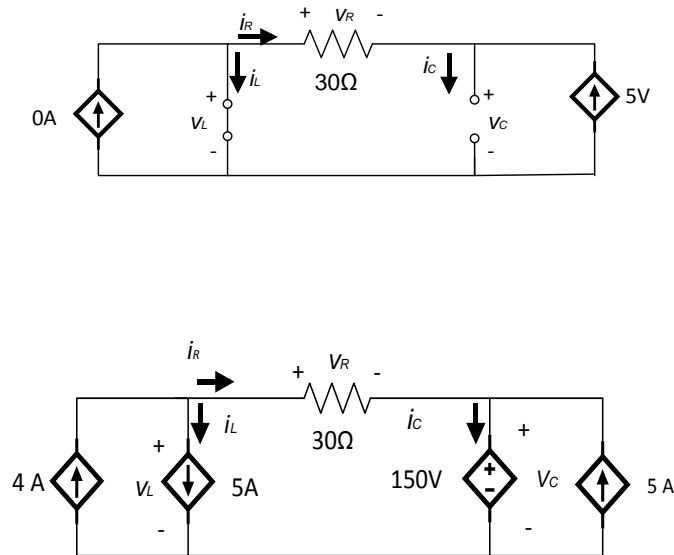


Figura 2.10(a) Circuito simple equivalente correspondiente al circuito de la figura 2.9a para $t = 0^+$. **(b)** Circuito con las tensiones y corrientes indicadas, válidas en el instante definido por $t = 0^+$.

La atención se enfocará ahora en el problema de dibujar un circuito equivalente que ayudará a determinar varias tensiones y corrientes en $t = 0^+$. Cada tensión en el capacitor y cada corriente en el inductor deben permanecer constantes durante el intervalo de conmutación. Estas condiciones se aseguran sustituyendo el inductor por una fuente de corriente y el capacitor por una fuente de tensión; asimismo, cada fuente sirve para mantener una respuesta constante durante la discontinuidad. Se produce el circuito equivalente de la figura 2.10b de modo que resulta necesario advertir que dicho circuito es válido solo para el intervalo entre 0^- y 0^+ .

Las tensiones y las corrientes en $t = 0^+$ se obtienen al analizar este circuito de cd. La solución no es difícil, aunque el número más o menos grande de fuentes presentes en la

red originen una vista un tanto extraña. Para resolver primero las corrientes, empieza en el nodo izquierdo superior y se ve que $i_R(0^+) = 4 - 5 = -1\text{A}$. Al moverse hacia el nodo derecho superior, se encuentra que $i_C(0^+) = -1 + 5 = 4\text{ A}$, y, desde luego, $i_L(0^+) = 5\text{ A}$.

A continuación, se analizan las tensiones. Al utilizar la ley de Ohm se puede observar que $v_R(0^+) = 30(-1) = -30\text{ V}$. En el caso del inductor, la LKV da $v_L(0^+) = -30 + 150 = 120$. Por último, al incluir $v_C(0^+) = 150\text{ V}$, se tienen todos los valores en $t = 0^+$.

Antes de dejar este problema del cálculo de los valores iniciales necesarios, debe señalarse que al menos se ha omitido otro método poderoso para determinarlos: se pudieron haber escrito las ecuaciones generales de nodo, o de lazo, del circuito original. Luego, la sustitución de los valores cero conocidos de la tensión en el inductor y de la corriente en el capacitor, en $t = 0^-$ descubriría varios valores de respuesta extra en $t = 0^-$ y permitiría que el resto se calculara sin ninguna dificultad. En ese caso debe efectuarse un análisis similar en $t = 0^+$ lo cual constituye un método importante que se hace necesario en circuitos más complicados, que no pueden analizarse por medio de los más simples procedimientos paso a paso.

A continuación se explicará en forma breve la determinación de la respuesta $v_C(t)$ en el caso del circuito original de la figura 2.9a. Con ambas fuentes desconectadas, el circuito se presenta como uno de *RLC* en serie y se descubre con facilidad que s_1 y s_2 son, respectivamente, -1 y -9 . La respuesta forzada se calcula por inspección o, si es necesario, dibujado el equivalente de cd, que es similar a la figura 2.10a, con la adición de una fuente de corriente de 4 A . La respuesta forzada equivalente a 150 V . Por lo tanto,

$$v_C = 150 + Ae^{-t} + Be^{-9t}$$

y
$$v_C(0^+) = 150 = 150 + A + B$$

o
$$A + B = 0$$

Entonces,
$$\frac{dv_C}{dt} = -Ae^{-t} - 9Be^{-9t}$$

y
$$\left. \frac{dv_C}{dt} \right|_{t=0^+} = 108 = -A - 9B$$

Por último: $A = 13.5$ $B = -13.5$

y $v_C = 150 + 13.5(e^{-t} - e^{-9t})V$

Resumen del proceso de solución

En síntesis, cada vez que se desee determinar el comportamiento transitorio de un circuito *RLC* simple de tres elementos, se debe decidir primero si se está resolviendo un circuito en serie o paralelo, a fin de que se utilice la relación correcta para α . Las dos ecuaciones son:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \quad (\text{RLC en paralelo})$$

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad (\text{RLC en serie})$$

La segunda decisión se toma después de comparar α con ω_0 , la cual se indica a partir de cualquier circuito por medio de

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Si $\alpha > \omega_0$, el circuito está *sobreamortiguado* y la respuesta natural tiene la forma:

$$f_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

Donde: $s_{1,2} = -\alpha \pm (\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})$

Si $\alpha = \omega_0$, entonces estás *críticamente amortiguado* y:

$$f_n(t) = e^{-\alpha t}(A_2 t + A_2)$$

Por último, si $\alpha < \omega_0$, entonces se enfrenta uno a la respuesta *subamortiguada*:

$$f_n(t) = e^{-\alpha t}(A_1 \cos \omega_d t + A_2 \text{sen } \omega_d t)$$

Donde: $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$

La última decisión depende de las fuentes independientes. Si no hay alguna que actúe en el circuito después de que se termine la conmutación o la discontinuidad, entonces el circuito no tiene fuente y la respuesta natural equivale a la respuesta completa. Si aún están presentes fuentes independientes, el circuito está activado y debe determinarse una respuesta forzada. La respuesta completa es, en ese caso, la suma.

$$f(t) = f_n(t) + f_f(t)$$

2.7 Conclusiones del capítulo

Para encontrar la respuesta de los circuitos de segundo orden se tiene que:

1. Representar el circuito mediante una ecuación diferencial de segundo orden.
2. Encontrar la solución general de la ecuación diferencial homogénea, esta representa la respuesta natural $x_n(t)$; en la cual se encuentran dos constantes desconocidas que se hallarán más adelante.
3. Encontrar la solución particular que se representa como $x_f(t)$.
4. Representar la respuesta como $x(t) = x_n(t) + x_f(t)$
5. Utilizar las condiciones iniciales para evaluar las constantes desconocidas.

Como en los circuitos de segundo orden hay dos V.E (i_L y v_C) hay que establecer un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden (ecuaciones de estado).

En dependencia de los valores relativos de R , L , y C existirán 3 respuestas posibles en la red RLC :

Si $\alpha > \omega_0 \Rightarrow$ sobreamortiguado y la respuesta es: $x_{(t)} = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + x_f$

Si $\alpha = \omega_0 \Rightarrow$ críticamente amortiguado y la respuesta es: $x_{(t)} = (A_1 t + A_2) e^{\lambda t} + x_f$

Si $\alpha < \omega_0 \Rightarrow$ subamortiguado y la respuesta es: $x_{(t)} = e^{-\alpha t} (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t) + x_f$

donde: $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$

$\alpha = \frac{R}{2L}$ para el circuito RLC serie y $\alpha = \frac{1}{2RC}$ para el paralelo. $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

El resistor del circuito es determinante en el tipo de respuesta ya que en él se disipa la energía.

CAPÍTULO 3. Problemas resueltos

En este capítulo se presentan un conjunto de ejercicios resueltos, seleccionados del material didáctico elaborado, con diferentes variantes representativas de los circuitos de segundo orden en estado transitorio.

3.1 Solución de circuitos de segundo orden en estado transitorio

El material didáctico sobre “Circuitos de segundo orden” constará de 11 ejercicios resueltos de forma analítica, programada y simulada mediante su implementación en Matlab-Simulink en este capítulo; 3 ejercicios adicionales se pueden consultar en el material de esta tesis, conformando un total de 14 ejercicios resueltos. Además, como parte de esta en el Anexo 1 se presentan 2 ejercicios propuestos para el trabajo independiente.

1. En referencia al circuito de la figura, halle $v(t)$ e $i(t)$ para $t > 0$. Considere estos casos: $R = 5 \Omega$, $R = 4 \Omega$ y $R = 1 \Omega$.

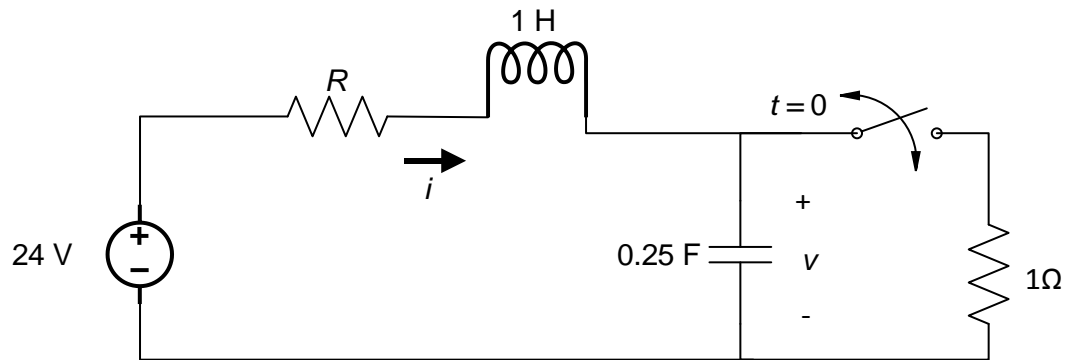


Figura 3.1: Figura del ejercicio 1

CASO 1 Cuando $R = 5 \Omega$. Para $t < 0$, el interruptor está cerrado durante mucho tiempo. El capacitor se comporta como circuito abierto, mientras que el inductor actúa como cortocircuito. La corriente inicial a través del inductor es

$$i(0) = \frac{24}{5+1} = 4 \text{ A}$$

la tensión inicial a través del capacitor es la misma que la tensión del resistor de 1Ω ; esto es,

$$v(0) = 1i(0) = 4 \text{ V}$$

Para $t > 0$, el interruptor está abierto, de modo que el resistor de 1Ω está desconectado. Lo que resta es el circuito RLC en serie con la fuente de tensión. Las raíces características se determinan de esta forma:

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{5}{2 \times 1} = 2.5 \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1 \times 0.25}} = 2$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -1, -4$$

Puesto que $\alpha > \omega_0$, se tiene la respuesta natural sobreamortiguada. Por lo tanto, la respuesta total es

$$v(t) = v_{ss} + (A_1 e^{-t} + A_2 e^{-4t})$$

Desde v_{ss} es la respuesta en estado estable. Éste es valor final de la tensión del capacitor. En la figura, $v_f = 24 \text{ V}$. Así,

$$v(t) = 24 + (A_1 e^{-t} + A_2 e^{-4t}) \quad (1)$$

Ahora se debe hallar A_1 y A_2 usando las condiciones iniciales.

$$v(0) = 4 = 24 + A_1 + A_2$$

o sea

$$-20 = A_1 + A_2 \quad (2)$$

La corriente a través del inductor no puede cambiar abruptamente, y es igual que la corriente a través del capacitor en $t = 0^+$, porque el inductor y el capacitor están ahora en serie. En consecuencia,

$$i(0) = C \frac{dv(0)}{dt} = 4 \Rightarrow \frac{dv(0)}{dt} = \frac{4}{C} = \frac{4}{0.25} = 16$$

Antes de usar esta condición, se debe tomar la derivada de v de la ecuación (1)

$$\frac{dv}{dt} = -A_1 e^{-t} - 4A_2 e^{-4t} \quad (3)$$

En $t = 0$,

$$\frac{dv(0)}{dt} = 16 = -A_1 - 4A_2 \quad (4)$$

Con base en las ecuaciones (2) y (4), $A_1 = -64/3$ y $A_2 = 4/3$. Al sustituir A_1 y A_2 en la ecuación (1) se obtiene

$$v(t) = 24 + \frac{4}{3}(-16e^{-t} + e^{-4t}) \text{ V} \quad (5)$$

Dado que el inductor y el capacitor están en serie para $t > 0$, la corriente del inductor es igual que la corriente del capacitor. Así,

$$i(t) = C \frac{dv}{dt}$$

La multiplicación de la ecuación (3) por $C = 0.25$ y la sustitución de los valores de A_1 y A_2 da por resultado

$$i(t) = \frac{4}{3}(4e^{-t} - e^{-4t}) \text{ A} \quad (6)$$

Adviértase que $i(0) = 4 \text{ A}$, como era de esperar.

MATLAB:

```
>> syms t A1 A2
>> vt=24+(A1*exp(-t)+A2*exp(-4*t))
vt =
A1/exp(t) + A2/exp(4*t) + 24
>> derivadadevt=diff(vt,'t')
derivadadevt =
- A1/exp(t) - (4*A2)/exp(4*t)
```

Simulink:

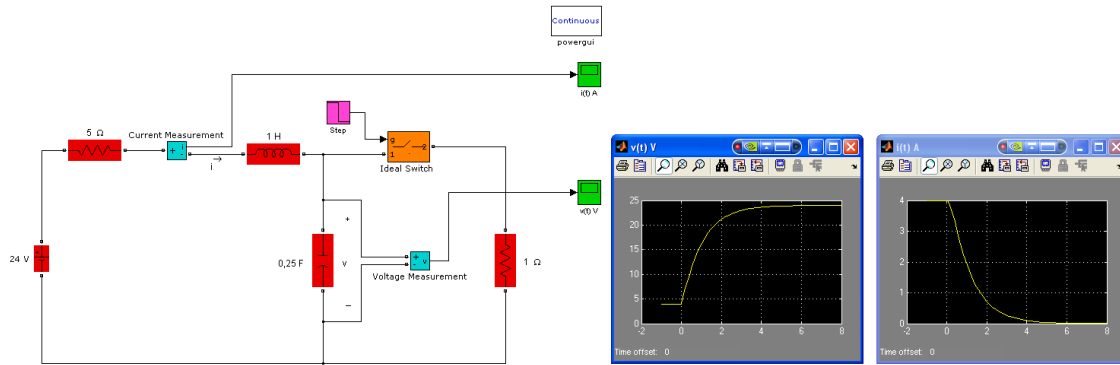


Figura 3.2: Diagrama de bloques Simulink para el ejercicio 1

2. Caso 2

Cuando $R = 4 \Omega$. De nuevo cuenta, la corriente inicial a través del inductor es

$$i(0) = \frac{24}{4 + 1} = 4.8 \text{ A}$$

y la tensión inicial del capacitor es

$$v(0) = 1i(0) = 4.8 \text{ V}$$

Para las raíces características,

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{4}{2 \times 1} = 2$$

mientras que $\omega_0 = 2$ permanece igual. En este caso, $s_1 = s_2 = -\alpha = -2$, y se tiene la respuesta natural críticamente amortiguada. En consecuencia, la respuesta total es

$$v(t) = v_{ss} + (A_1 + A_2 t)e^{-2t}$$

y, como en el caso anterior, $v_{ss} = 24 \text{ V}$,

$$v(t) = 24(A_1 + A_2 t)e^{-2t} \quad (7)$$

Para hallar A_1 y A_2 , se emplean las condiciones iniciales. Se escribe

$$v(0) = 4.8 = 24 + A_1 \quad \Rightarrow \quad A_1 = -19.2 \quad (8)$$

Puesto que $i(0) = Cdv(0)/dt = 4.8$, o

$$\frac{dv(0)}{dt} = \frac{4.8}{C} = 19.2$$

A partir de la ecuación (7)

$$\frac{dv}{dt} = (-2A_1 - 2tA_2 + A_2)e^{-2t} \quad (9)$$

En $t = 0$,

$$\frac{dv(0)}{dt} = 19.2 = -2A_1 + A_2 \quad (10)$$

Con base en las ecuaciones (8) y (10), $A_1 = -19.2$ y $A_2 = -19.2$. Así, la ecuación (7) se convierte en

$$v(t) = 24 - 19.2(1 + t)e^{-2t} \text{V} \quad (11)$$

La corriente del inductor es igual que la corriente del capacitor; esto es,

$$i(t) = C \frac{dv}{dt}$$

La multiplicación de la ecuación (9) por $C = 0.25$ y la sustitución de los valores de A_1 y A_2 da por resultado

$$i(t) = (4.8 + 9.6t)e^{-2t} \text{A} \quad (12)$$

Adviértase que $i(0) = 4.8 \text{ A}$, como era de esperar.

MATLAB:

```
>> syms t A1 A2
>> vt=24+(A1+A2*t)*exp(-2*t)
vt =
(A1 + A2*t)/exp(2*t) + 24
>> derivadadevt=diff(vt,t)
derivadadevt =
A2/exp(2*t) - (2*(A1 + A2*t))/exp(2*t)
```

Simulink:

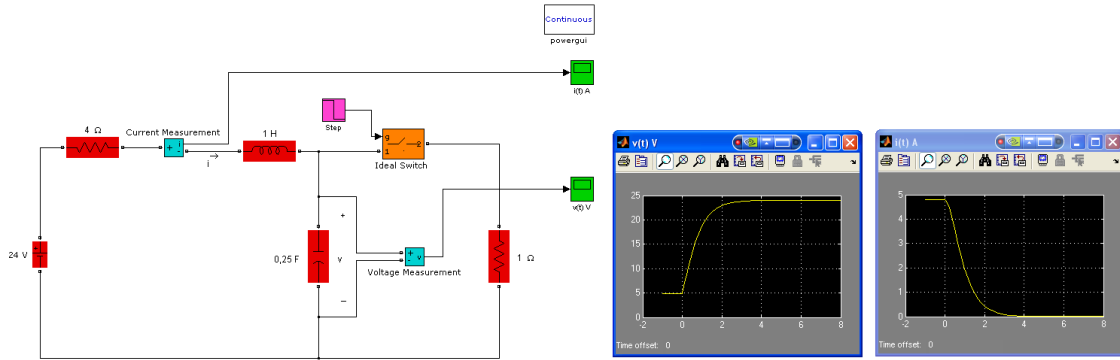


Figura 3.3: Diagrama de bloques Simulink para el ejercicio 2

3. Caso 3

Cuando $R = 1 \Omega$. La corriente inicial del inductor es

$$i(0) = \frac{24}{1 + 1} = 12 \text{ A}$$

y la tensión inicial a través del capacitor es igual que la tensión a través del resistor de 1Ω ,

$$v(0) = 1i(0) = 12 \text{ V}$$

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{1}{2 \times 1} = 0.5$$

Puesto que $\alpha = 0.5 < \omega_0 = 2$, se tiene la respuesta subamortiguada

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2} = -0.5 \pm j1.936$$

La respuesta total es en consecuencia

$$v(t) = 24 + (A_1 \cos 1.936t + A_2 \sen 1.936t)e^{-0.5t} \quad (13)$$

Ahora se determina A_1 y A_2 . Se escribe

$$v(0) = 12 = 24 + A_1 \Rightarrow A_1 = -12 \quad (14)$$

Dado que $i(0) = Cdv(0)/dt = 12$,

$$\frac{dv(0)}{dt} = \frac{12}{C} = 48 \quad (15)$$

Pero

$$\frac{dv}{dt} = e^{-0.5t}(-1.936A_1 \text{ sen } 1.936t + 1.936A_2 \text{ cos } 1.936t) - 0.5e^{-0.5t}(A_1 \text{ cos } 1.936t - A_2 \text{ sen } 1.936t) \quad (16)$$

En $t = 0$,

$$\frac{dv(0)}{dt} = 48 = (-0 + 1.936A_2) - 0.5(A_1 + 0)$$

La sustitución de $A_1 = -12$ da $A_2 = 21.694$, y la ecuación (13) se convierte en

$$v(t) = 24 + (21.649 \text{ sen } 1.936t - 12 \text{ cos } 1.936t)e^{-0.5t} \text{ V} \quad (17)$$

La corriente del inductor es

$$i(t) = C \frac{dv}{dt}$$

La multiplicación de la ecuación de la ecuación (16) por $C = 0.25$ y la sustitución de los valores de A_1 y A_2 origina

$$i(t) = (3.1 \text{ sin } 1.936t + 12 \text{ cos } 1.936t)e^{-0.5t} \text{ A} \quad (18)$$

Adviértase que $i(0) = 12 \text{ A}$, como era de esperar.

MATLAB:

```
>> t=0:0.01:8;
>> vt=24+(21.694.*sin(1.936*t)-12.*cos(1.936*t)).*exp(-0.5*t);
>> plot(t,vt)
>> grid
>> xlabel('t (s)')
>> ylabel('v(t) (V)')
```

Simulink:

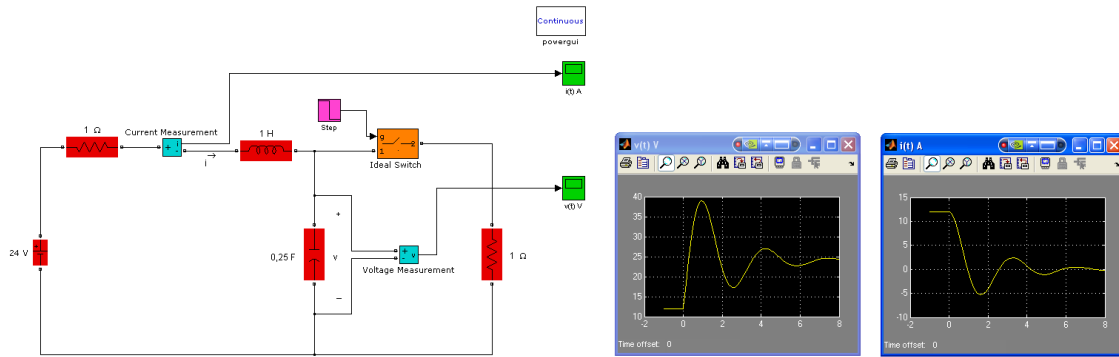


Figura 3.4: Diagrama de bloques Simulink para el ejercicio 3

3.2 Conclusiones del capítulo

1. La elaboración de un material didáctico requiere del tratamiento gradual y progresivo de sus contenidos, guiando el estudio independiente desde ejercicios básicos hasta otros más complejos.
2. Al abordar un nuevo tema se debe tener en cuenta la necesidad de interrelacionar este con otro ya vencido, para así ejercitar continuamente lo aprendido.
3. Se debe resolver el ejercicio de forma teórica inicialmente, dando paso a su posterior implementación en Matlab y Simulink; haciendo énfasis en la comprobación de los resultados por estas tres vías.

CONCLUSIONES

1. Al establecer los fundamentos teóricos de esta investigación se justifica la necesidad de la elaboración de materiales didácticos para apoyar el estudio independiente de los estudiantes a partir de la disminución de horas clases de las asignaturas según la concepción del Plan de estudios E.
2. El material didáctico sobre el tema: "Circuitos de segundo orden" describe su teoría básica fundamental y con apoyo de las TIC, orientará el estudio independiente de los estudiantes de la carrera de Ingeniería Eléctrica.
3. La solución de los ejercicios seleccionados de forma teórica y con el uso del Matlab, en especial su simulador, facilitará el aprendizaje tanto en el ámbito docente como en la práctica, de ahí la importancia de su utilización en las distintas carreras de la Facultad de Ingeniería Eléctrica.

RECOMENDACIONES

1. Colocar este material en la red para que pueda ser utilizado por todos los que lo necesiten, tanto estudiantes como profesores.
2. Continuar con la elaboración de otros materiales didácticos, que abarquen mayor cantidad de contenidos, en los cuales los ejercicios vayan aumentando su dificultad y su vinculación con la práctica.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] «Documento Base para el diseño de los planes de Estudios E». Ministerio de Educación Superior, 2016.
- [2] «Bases Conceptuales para el diseño de los planes de estudios E». Ministerio de Educación Superior, 2017.
- [3] «Plan de Estudio E ». Ministerio de Educación Superior, 2018.
- [4] A. Fiol Guerra, «Material didáctico sobre el tema “Circuitos trifásicos balanceados” para orientar el estudio independiente de los estudiantes de la carrera Ingeniería Eléctrica según Plan E», Dep. Electroenergética, Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas, Santa Clara, 2017.
- [5] Y. J. Ortega Oyón, «La implementación de las TIC en la Universidad», *Rev. Iber. Inves. Desa. Educ.*, vol. 12, pp 4-16, jun. 2014.
- [6] J. Cabrero Almenara, «Las TIC y las universidades: retos, posibilidades y preocupaciones», *Rev. Educ. Super.*, vol. XXXIV, México: sep. 2015.
- [7] J. García de Jalón, J. Ignacio, y A. Brazález, *Aprenda MatLab 6.1 como si estuviera en primero*, 2ª ed., 2001.
- [8] M. Díaz de Santos, *Introducción rápida a MatLab y Simulink para ciencia e ingeniería*, 2ª ed., 2003.
- [9] (2012) Estudio Independiente. *Revista: Investigación y desarrollo*.
- [10] M. Vargas, M. Pérez, and L. M. Saravia, *Materiales educativos: Conceptos en construcción*. Bogotá: Convenio Andrés Bello, 2001.
- [11] J. E. Kemmerly, S. M. Durbin, y W. H. Hayt, *Análisis de circuitos en ingeniería*, 7ª ed. McGraw-Hill Interamerica, 2017.
- [12] C. K. Alexander y M. N. O. Sadiku, *Fundamentos de Circuitos Eléctricos*, 3ª ed., Universidad Iberoamericana, Ciudad de México: McGraw-Hill, 2004.
- [13] J. Bird, *Electrical Circuit Theory and Technology*, 2ª ed. Oxford: McGraw-Hill, 2001.
- [14] J. A. Edminister y M. Nahvi, *Circuitos Eléctricos*, 3ª ed., McGraw-Hill, 2012
- [15] J. A. Svoboda y R. C. Dorf, *Introduction to Electric Circuits*, 9ª ed. Oxford: McGraw-Hill, 2014.
- [16] M. Tadeusiewicz, *Electric Circuits*: Technical University of Łódź International Faculty of Engineering, 2009.

Anexo 1: Ejercicios propuestos

1. The element values in the circuit shown are $R = 2\text{k}\Omega$, $L = 250\text{ mH}$, and $C = 10\text{ nF}$. The initial current I_0 in the inductor is -4 A , and the initial voltage on the capacitor is 0 V . The output signal is voltage v . Find (a) $i_R(0^+)$; (b) $i_C(0^+)$; (c) $dv(0^+)/dt$; (d) A_1 ; (e) A_2 ; and (f) $v(t)$ when $t \geq 0$.

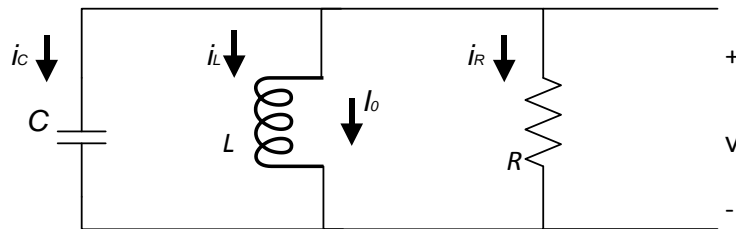


Figura 1: Figura del ejercicio 1

Answer: (a) 0; (b) 4 A; (c) $4 \times 10^8\text{ V/s}$; (d) 13,333 V; (e) -13.333 V ; (f) $13,333(e^{-10000t} - e^{-40000t})\text{ V}$.

2. Después de estar abierto durante mucho tiempo, el interruptor de la figura 2 se cierra en $t = 0$. Determinar (a) $i_L(0^-)$; (b) $v_C(0^-)$; (c) $i_R(0^+)$; (d) $i_C(0^+)$; (e) $v_C(0.2)$.

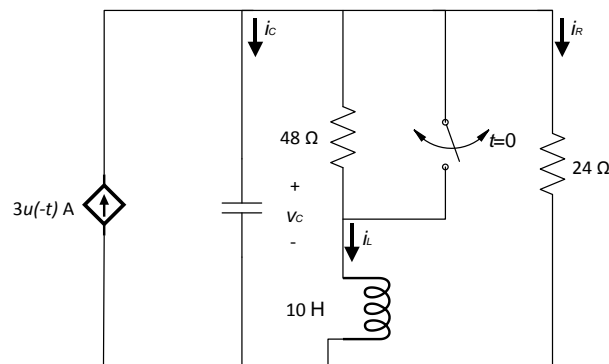


Figura 2: Figura del ejercicio 2

Respuestas: 1A; 48V; 2A; -3A; -17.54V

V/s; 0.695 V; 1.609 ms.