

Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas

Facultad Matemática Física Computación

Licenciatura en Física

Trabajo de Diploma

Modelación Matemática de la Dinámica del Fósforo en los Ecosistemas Acuáticos

Maibelin Castillo Alvarez

Tutores: Dr. C. Rolando Cárdenas Ortiz

Dr. C. Roberto González de Zayas

DEDICATORIA

A mis padres y hermano por tener tanta paciencia, dedicación y brindarme su amor y apoyo incondicional.

A mi familia, que lejos o cerca, en la tierra o en el cielo, siempre están presentes.

.....

A todo el que hizo posible este sueño.

AGRADECIMIENTOS

Aunque estoy completamente segura, que no me alcanzan las palabras, ni las páginas, para describir cuan agradecida estoy, eternamente, con todo aquel que de una manera u otra aportaron su granito de arena, y disculpen si se me olvida alguien, sepa que a pesar de que no lo mencione, jamás será olvidado su esfuerzo y dedicación para lograr que llegara hasta donde estoy hoy.

A mi familia, sobre todo padres y hermano por acompañarme, quererme y guiarme durante toda mi vida y mi carrera, y hacer realidad este sueño.

A mis tutores: R. Cárdenas y Roberto por su paciencia y dedicación durante estos tiempos difíciles, que me guiaron y apoyaron, de una forma u otra.

A Dailé, Yanelis, Julio, Fdragas, Jorge Alberto, Alain por su ayuda, paciencia y dedicación.

A mis amigos, donde quiera que estén, y compañeros de aula, sobre todo a “Leticia y Amelia” por acompañarme en buenos y malos momentos durante todos estos años.

A Mujica, que fue como un padre desde el primer día que llegué a esta universidad.

A todos los profesores que me enseñaron todo lo que necesito, para algún día llegar a ser como “ellos”, sobre todo a los del laboratorio de Ciencias Planetarias.

A los compañeros del CIEC, que con su ayuda y apoyo hicieron que este trabajo fluyera de una manera más fácil.

Al “Monte”, por su ayuda ilimitada.

.....

En fin, a todo el que me ayudó y apoyó, para que hoy pueda estar donde estoy.

PENSAMIENTO

Si he logrado ver más lejos, ha sido porque he subido a hombros de gigantes

Isaac Newton.

RESUMEN

En esta tesis se presentan las bases para la confección de un modelo de dinámica del fósforo para ecosistemas costeros cubanos. Se parte de un modelo 0-dimensional, el cual incluye diversos procesos físicos, químicos y biológicos, dependientes solamente del tiempo. En este, primero se consideró un ecosistema relativamente aislado, luego se consideraron las cargas contaminantes de las aguas pluviales de escorrentía. Posteriormente se incluyó la variable espacial vertical, dada la importancia que tiene para el fósforo la interacción con muchos fondos costeros. Esto redundó en un modelo 1-dimensional de naturaleza predominantemente termo-hidrodinámica, acoplado a un modelo de transferencia radiativa en atmósfera y océano. El esqueleto termo-hidrodinámico del modelo consiste en un sistema de tres ecuaciones en derivadas parciales cuyas soluciones se encontraron y resultaron bien comportadas desde el punto de vista matemático. Se hizo una aplicación preliminar a un caso de estudio. Finalmente, se presentan perspectivas para trabajos futuros.

Palabras claves: Ecosistema acuático, nutriente, fósforo

ABSTRACT

In this thesis a basic framework for the elaboration of a model of the dynamics of phosphorus in Cuban coastal ecosystems are presented. We start from a 0-dimensional model, which includes several physical, chemical and biological processes depending only on time. In this, first a relatively isolated ecosystem was considered, and then polluting loads from runoff were included. Then the vertical space variable was introduced, given the importance of the interaction of phosphorus with the bottom in many coastal ecosystems. This resulted in a 1-dimensional model of predominantly thermo-hydrodynamic model, coupled with a model of radiative transfer in atmosphere and ocean. The thermo-hydrodynamic frame of the model consists of a system of three partial differential equations whose solutions were found and turned out to be well behaved from a mathematical point of view. A preliminary application to a case study was done and analyzed. Finally, perspectives for further work are presented.

Key words: Aquatic ecosystem, nutrient, phosphorus

ÍNDICE

RESUMEN	IV
ABSTRACT	V
INTRODUCCIÓN	1
1.1 Representación en modelos del ciclo del fósforo acuático	4
1.1.1 Procesos de columna de agua	4
1.1.2 Procesos bentónicos	7
1.1.3 Marco físico	8
1.2 ¿Cómo funcionan los modelos fluviales, los modelos lacustres y los modelos marinos? Comparación	12
1.3 ¿Cómo cambian los modelos con el tiempo?	13
1.4 ¿Cómo se relaciona lo modelado con lo que se mide?	16
1.5 ¿Qué no se modela? Desafíos e insuficiencias	17
1.5.1 Transferencia limitada de nutrientes	17
1.5.2 Flujo a través de sedimentos	18
1.5.3 Efectos del secado y rehumectación de sedimentos	19
1.5.4 Bioquímica de la materia orgánica disuelta	19
1.5.4.1 ADN y ARN	20
1.5.4.2 Otros nucleótidos	20
1.5.4.3 Fosfatos de inositol	20
1.5.4.4 Fosfolípidos	21
1.5.4.5 Otros procesos	21
CAPÍTULO 2: Materiales y Métodos	22
2.1 Modelo 0-dimensional	22
2.1.1 Consideraciones	23
2.1.1.1 Primera aproximación	23
2.1.1.2 Segunda aproximación	24
2.2 Modelo 1-dimensional	25
2.2.1 Consideraciones	27

2.2.1.1 Primera aproximación	27
2.2.1.2 Segunda Aproximación	27
2.2.1.3 Tercera Aproximación	27
2.2.2 Modelo de Transporte Radiativo	28
2.2.2.1 Primera Vía	29
2.2.2.2 Segunda Vía.....	30
CAPÍTULO 3: Resultados y Discusión	31
3.1 Modelo 0-Dimensional	31
3.2 Análisis del modelo 0-Dimensional	32
3.3 Modelo 1-dimensional.....	32
3.4 Análisis de las propiedades matemáticas del modelo 1-Dimensional.....	33
3.5 Análisis de las propiedades físicas del modelo 1-Dimensional.....	35
3.6 Caso de estudio: Golfo de Ana María	35
3.6.1 Profundidad.....	36
3.6.3 Transferencia de momento por el viento	37
3.6.4 Difusividad de Remolino para el Momento (A_M) y Viscosidad (νM).....	37
3.6.5 Patrón de Corrientes Marinas obtenido	37
3.6.6 Introducción de parámetros radiacionales mediante el modelo de transporte radiativo COART.....	39
CONCLUSIONES.....	42
RECOMENDACIONES.....	43
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	44

Lista de figuras

Figura 1: Representaciones comunes de procesamiento biogeoquímico del fósforo en la columna de agua de los sistemas acuáticos.	4
a) Clásico modelo de nutrientes fitoplancton-zooplancton-Detritus	4
b) División de fósforo orgánico en partículas y fracciones disueltas	5
c) incluyendo fósforo orgánico disuelto	5
d) con la representación explícita de la biomasa bacteriana y componentes de fósforo inorgánico particulado (o fósforo adsorbido)	6
e) Un típico modelo más complejo, con fuentes adicionales de detritus y división de fósforo orgánico en dos grupos de diferente labilidad.....	6
Figura 2: Número de dimensiones espaciales en 96 modelos marinos y lacustres, agrupados por años de publicación	9
Figura 3: Imágenes de concentración de clorofila Chl-a (octubre 2011), obtenidas por el sensor SeaWiFS.....	39

Lista de tablas

Tabla 1: Ejemplos de dinámica física y su importancia primaria en el modelado de los ciclos fósforo inorgánico disuelto en los sistemas acuáticos	10
Tabla 2: Componentes y procesos de fósforo (considerados en esta revisión).....	14
Tabla 3: Valores promedios de coeficientes de atenuación de los tipos ópticos de aguas de (<i>Jerlov, 1976</i>)	29
Tabla 4: Clasificaciones óptica y trófica del Golfo de Ana María	29
Tabla 5: Solsticios y equinoccios por años	36
Tabla 6: Velocidades de las corrientes marinas a diferentes profundidades	37
Tabla 7: Obtención de la irradiancia PAR (I_0) en la superficie del Golfo de Ana María	39

INTRODUCCIÓN

Todas las formas de vida conocidas en la Tierra contienen, al menos, seis elementos químicos: Carbono (C), Hidrógeno (H), Oxígeno (O), Nitrógeno (N), Fósforo (P) y Azufre (S). Sin embargo, los que limitan el crecimiento de los organismos, generalmente, son el N o P. En el caso de los ecosistemas acuáticos, el nitrógeno con frecuencia es el limitante en el agua salada, y el fósforo, en el agua dulce (*Abell et al., 2010, Elser et al., 1990*). Sin embargo, esto depende de una multitud de procesos físicos, químicos y biológicos a que ambos elementos (y sus compuestos) están sometidos. Entre los elementos fundamentales que inciden sobre la dinámica del fósforo se identifican los siguientes:

- Entrada y salida (fuente y sumidero)
- Sedimentación del fósforo en la columna de agua
- Absorción y desorción, tanto en la columna de agua como en el fondo
- Intercambio entre la columna de agua y el fondo vía deposición/resuspensión y difusión
- Pérdidas por enterramiento
- Ingestión y metabolismo por las algas

Otro aspecto a tener en cuenta es la diversidad de compuestos que forma el fósforo en ambientes acuáticos. En general, estos se clasifican en cuatro categorías diferentes, en correspondencia con sus propiedades físico-químicas, de la siguiente forma:

1. Fósforo Orgánico Refractario Particulado: Generalmente, difíciles de transformar.
2. Fósforo Orgánico Lábil Particulado: Fáciles de transformar.
3. Fósforo Orgánico Disuelto
4. Fosfato total (PO_4t), o fósforo reactivo soluble (PRS)

Estas cuatro categorías no son totalmente independientes unas de otras. Actualmente se conocen varios procesos que transforman los compuestos de fósforo en las formas 1-3 en PRS (forma 4). Desde el punto de vista biológico, es muy importante si se tiene en cuenta que es esta la forma en que el fósforo es mayoritariamente asimilado por las algas.

El incremento de las concentraciones de fósforo en los ecosistemas acuáticos ha conducido a episodios de eutrofización, por ejemplo, en regiones agrícolas con amplio uso de fertilizantes. Varios autores opinan que la disminución de este en zonas costeras, por represamiento de los ríos o sequía, ha conllevado a notables alteraciones en el ensamblaje trófico.

A nivel internacional se han realizado diversas investigaciones acerca del comportamiento biogeoquímico del fósforo en los diferentes ecosistemas acuáticos, con el objetivo de tener un conocimiento más amplio de la dinámica de este nutriente; pero, dada su complejidad, se considera que aún son insuficientes los estudios y que las deducciones obtenidas no reflejan resultados muy realistas.

En Cuba son escasos los estudios relacionados con el comportamiento del fósforo en los ecosistemas acuáticos. Se han aplicado modelos numéricos desarrollados por la Land-ocean Interaction in The Coastal Zone (LOICZ) que describen la dinámica de los procesos biogeoquímicos en la zona costera, tanto a escala local, regional y global y están relacionados con los ciclos del C, N y P (*Montalvo and Loza, 2006*), en varias zonas del país, tales como los Golfos de Guacanayabo, Ana María, Bahía de Jigüey, entre otras.

Lo mencionado anteriormente ilustra la importancia de obtener predicciones de la dinámica del fósforo en los ecosistemas costeros. De ahí que el **problema científico** planteado sea: la modelación de la dinámica del fósforo en ecosistemas acuáticos tiene alto grado de complejidad debido a la multitud de procesos físicos, químicos, biológicos y geológicos a que este elemento químico se encuentra sometido.

Es por eso que se presenta como **objetivo general**:

Proponer un modelo de la dinámica del fósforo para ecosistemas costeros cubanos.

Para cumplir este objetivo general se plantean los siguientes **objetivos específicos**:

- Proponer un modelo conceptual del comportamiento del fósforo para identificar los procesos principales a los que está sometido.
- Presentar el modelo matemático correspondiente.
- Obtener soluciones del modelo y hacer una investigación preliminar de sus propiedades matemáticas y potenciales aplicaciones.

En el **Capítulo 1** se aborda el estado del arte del modelado del fósforo en varios ecosistemas. Se describen los procesos en las columnas de aguas, los procesos bentónicos, el marco físico de los modelos, como deben ser los modelos para mayor efectividad, se muestra la comparación entre los diferentes modelos, lacustres, marinos y fluviales, también se trata la bioquímica de la materia orgánica disuelta, entre otras.

En el **Capítulo 2** se desarrolla un modelo matemático de la dinámica del fósforo en los ecosistemas acuáticos. Inicialmente se presenta el modelo 0-dimensional, posteriormente el modelo 1-dimensional, en el que se acopla un modelo termo-hidrodinámico con uno de transporte radiativo en atmósfera y océano.

En el **Capítulo 3** se presentan soluciones analíticas de los modelos presentados (0-dimensional y 1-dimensional), se realiza un análisis de las propiedades matemáticas en cada caso y la potencial aplicabilidad. Se presenta la aplicación a un caso de estudio: el Golfo de Ana María.

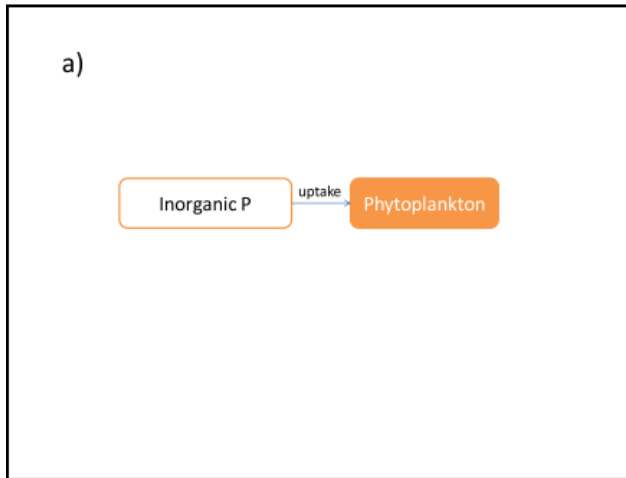
CAPÍTULO 1: Estado de arte en el modelado del fósforo en sistemas acuáticos

1.1 Representación en modelos del ciclo del fósforo acuático

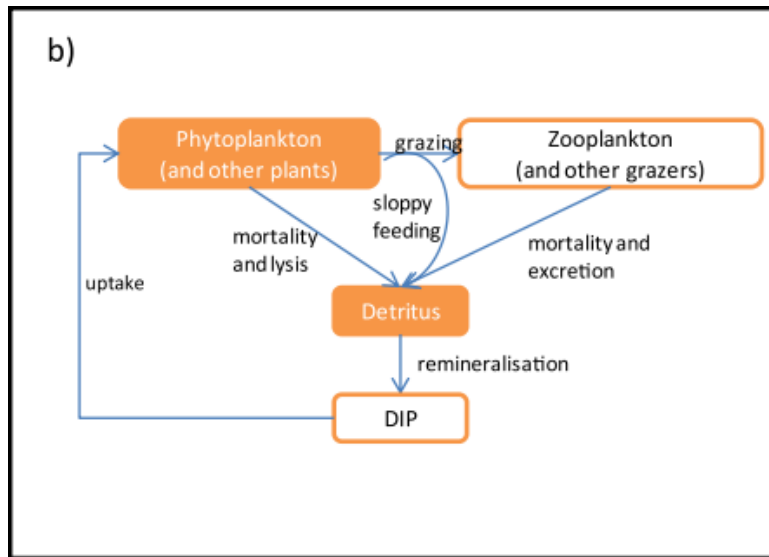
1.1.1 Procesos de columna de agua

Los modelos biogeoquímicos acuáticos pueden representar el ciclo del fósforo de varias formas, que difieren principalmente en el número de componentes (almacenes de fósforo) y procesos (transformaciones de fósforo) incluidos. La conservación de la masa es el principio fundamental gobernante; con la excepción de las transferencias a través de los límites del dominio del modelo, cualquier proceso que añade (o elimine) fósforo de un componente debe eliminar (o añadir) una masa igual de fósforo a otro grupo. Cinco ejemplos de representación conceptual de la columna de agua de ciclo del fósforo que se concreta en modelos mecánicos se muestran en la Figura 1 (a, b, c, d, e).

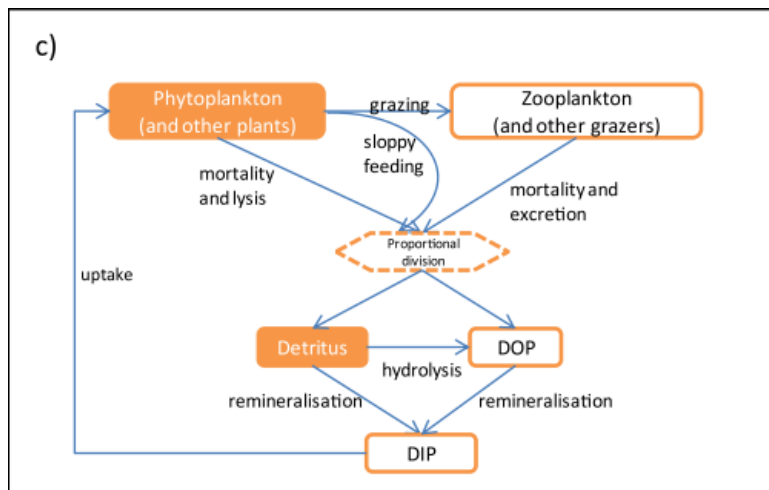
Figura 1: Representaciones comunes de procesamiento biogeoquímico del fósforo en la columna de agua de los sistemas acuáticos.



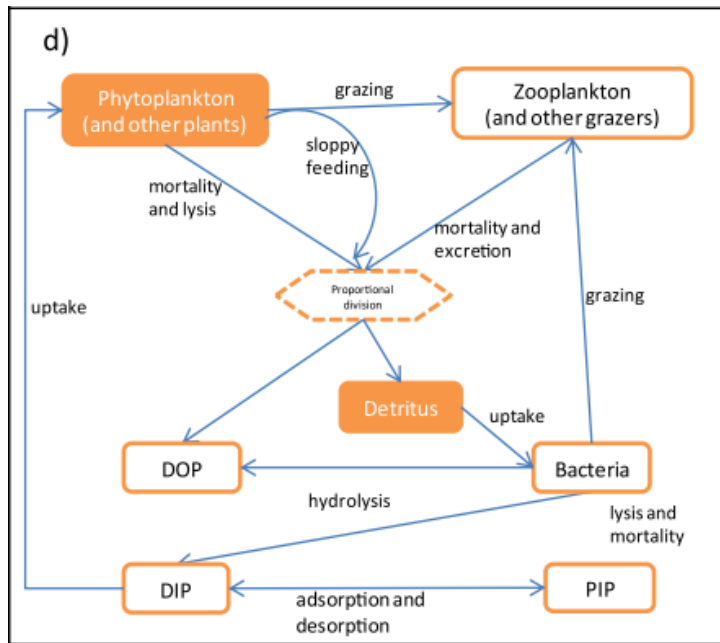
- a) Clásico modelo de nutrientes fitoplancton-zooplancton-Detritus (NPZD) (*Burger et al., 2008; Elliott et al.2000*)



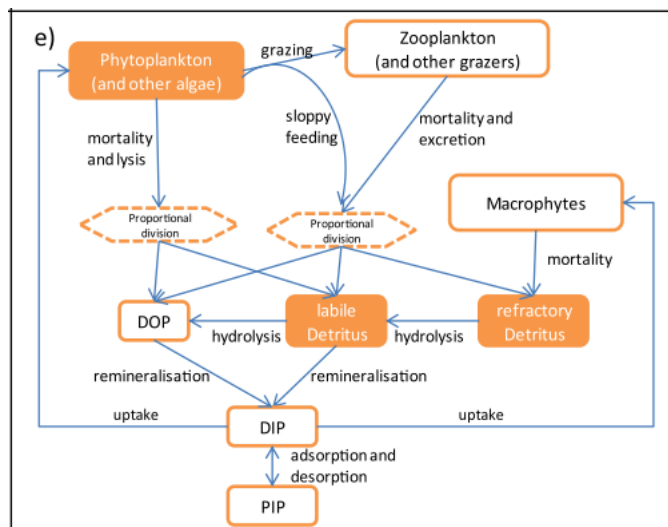
b) División de fósforo orgánico en partículas y fracciones disueltas (Cole and Wells, 2008; Petihakis et al., 2002)



c) incluyendo fósforo orgánico disuelto



d) con la representación explícita de la biomasa bacteriana y componentes de fósforo inorgánico particulado (o fósforo adsorbido) (Allen y Clarke, 2007; Garnier et al., 2005)



e) Un típico modelo más complejo, con fuentes adicionales de detritus y división de fósforo orgánico en dos grupos de diferente labilidad (Gal et al., 2009; Wild-Allen et al., 2011)

Las ecuaciones empíricas que se utilizan a menudo en los modelos acuáticos son comúnmente utilizadas para representar la adsorción y desorción de fósforo en los suelos, aunque pueden modificarse para representar la influencia del pH, oxígeno disuelto, el aluminio sedimentado y las concentraciones de hierro (McGechan and Lewis (2002).

1.1.2 Procesos bentónicos

Aunque los primeros modelos lacustres tendían a omitir las interacciones entre la columna de agua y los sedimentos bentónicos, y esto es cierto para la mayoría de los modelos oceánicos profundos y algunos modelos de ríos, los modelos costeros incluyen interacciones en la interfaz del sedimento. Esencialmente existen tres enfoques para esto:

1) Representar los bentos como una condición límite, aplicando flujos de fósforo calibrados especificados que pueden ser fijados como en CoastMab (*Hakanson and Bryhn, 2008*) y PROTECH (*Elliott et al., 2000*) o variar en función de la temperatura, oxígeno disuelto y fósforo inorgánico disuelto (DIP) en la capa inferior de agua (*Allen and Clarke, 2007, Robson et al., 2008*), como en implementaciones más simples de CAEDYM (*Robson and Hamilton, 2004*).

2) Componentes y procesos duplicados de la columna de agua en una o más capas de sedimentos (a menudo una capa aerobia de superficie y una capa anaeróbica de fondo), especificando diferentes valores de parámetros para controlar las tasas de remineralización o hidrólisis en capas aerobias y anaerobias, y omitiendo fitoplancton o reemplazándolas con microalgas bentónicas / microfitobentos en la capa de sedimento. Ejemplos de modelos que toman este enfoque incluyen EMS (*Wild-Allen et al., 2011*), E-QUAL-W2 (*Cole and Wells, 2008*) y recientes implementaciones de ERSEM (*Allen and Clarke, 2007*). Los modelos que incluyen plantas enraizadas también suelen incluir la absorción de fósforo a partir de sedimentos, aunque algunos simplemente asumen que las macrófitas (especialmente las hierbas marinas) no son limitadas por nutrientes, y las omiten del ciclo simulado de fósforo (*de Boer, 2007*).

3) Incorporar un modelo completo de diagénesis de sedimentos, simulando las condiciones redox en función de las concentraciones de iones relevantes (por ejemplo, Fe^{2+} , Fe^{3+} , Ca^{2+} , S^{2-} , SO_4^{2-} , H^+) e incluyendo representaciones de procesos tales como precipitación e inmovilización de fosfatos de apatita. Sólo unos pocos modelos toman este enfoque como las implementaciones más complejas de CAEDYM (*Hipsev and Busch, 2012*) y el modelo presentado por (*Komatsu et al., 2006*) como ejemplos clave.

El acercamiento 1 tiene la ventaja de simplicidad y no requiere una caracterización detallada del bento. Su gran desventaja es que la parametrización resultante será altamente específica y el

modelo no será capaz de simular cambios a largo plazo que alteren el estado o carácter de los sedimentos. Si los flujos de sedimento no se miden observacionalmente, también existe el peligro de que los flujos de sedimentos se conviertan en un "factor de alusión" en la calibración de tales modelos, ya que tienen una amplia gama de valores razonables y pueden tener una fuerte influencia sobre las concentraciones de la columna de agua pronosticada.

La aproximación 2 evita estos problemas y permite la conservación de la masa dentro del sistema como un todo, a un costo de un aumento en el número de parámetros incluidos y los requisitos de inicialización del modelo.

El enunciado 3 está fuertemente impulsado por una conceptualización geoquímica del sistema y permite una representación más fuerte de los procesos químicos abióticos que unen el fósforo inorgánico en los sedimentos, pero los resultados del modelo son muy complejos, computacionalmente costosos y escasos de datos, ya que requiere una serie de componentes adicionales que se incluirán en el modelo, tanto en la columna de agua como en capas de sedimentos múltiples (que pueden ser muy espacialmente heterogéneos). Este enfoque puede ser indicado cuando se modelan sistemas con sedimentos ricos en hierro, en los que la coprecipitación de fósforo puede ser un importante mecanismo de expulsión (*Baldwin et al., 2002*).

1.1.3 Marco físico

Los modelos biogeoquímicos y ecológicos acuáticos están típicamente incorporados en modelos hidrológicos o hidrodinámicos. Estos van desde simples modelos de caja de lagos (*Imboden, 1974*), hasta modelos de mares múltiples (*Baretta-Bekker et al., 1997*); modelos de redes de flujo de ríos (*Tolson and Shoemaker, 2007*), modelos unidimensionales con resolución vertical de los lagos (*Hamilton and Schladow, 1997*), modelos de ríos longitudinales unidimensionalmente resueltos (que pueden ser modelos hidrológicos simples o modelos hidráulicos basados en la física) (*Jia et al., 2010*), modelos de cuencas hidrográficas (a veces con capas adicionales que representan los almacenamientos subterráneos) (*Cole and Wells, 2008*) y modelos de ríos y estuarios bidimensional y verticalmente resuelto, hasta sistemas de modelado de baroclina hidrodinámica y tridimensionales completos (*Cerco, 2000*).

Los modelos de ecosistemas marinos, que incluyen la interacción de procesos físicos y biológicos, son la única herramienta para investigar a gran escala aspectos relacionados con el proceso de importantes problemas actuales, como la comprensión y cuantificación de los ciclos

biogeoquímicos en el océano, entre otros. Esta es la razón de la tendencia reciente hacia el desarrollo de modelos tridimensionales físico-biológicos para la aplicación a escalas globales o al menos de cuenca. Es razonable apoyar este trabajo mediante investigaciones que utilizan modelos unidimensionales que ofrecen la oportunidad de estudiar la idoneidad de diferentes estructuras de modelos de ecosistemas, la adecuación de descripciones matemáticas de procesos biológicos o químicos y las consecuencias de opciones de parámetros especiales con un esfuerzo computacional modesto comparado con diversos modelos tridimensionales.

Mayor resolución y dimensionalidad es cada vez más común a medida que los recursos informáticos mejoran (Figura 2), pero el modelado tridimensional no siempre debe ser el valor por defecto. A veces son necesarias tres dimensiones para simular dinámicas físicas importantes, pero implementar un modelo tridimensional de resolución razonable es costoso desde el punto de vista computacional, lo que limita las opciones disponibles para la estimación de parámetros, el análisis de sensibilidad y el análisis de incertidumbre.

Figura 2: Número de dimensiones espaciales en 96 modelos marinos y lacustres, agrupados por años de publicación

Los procesos físicos a veces dominan las respuestas biogeoquímicas y ecológicas y a menudo abruma cualquier otra consideración en un modelo de sistema acuático (*Robson, 2014*). La

elección del marco físico es muy importante en el modelado del fósforo, como se muestra en la tabla 1 (Kühn and Radach, 1997).

Tabla 1: Ejemplos de dinámica física y su importancia primaria en el modelado de los ciclos fósforo inorgánico disuelto en los sistemas acuáticos (Robson, 2014)

Tipo de sistema	Dinámica física importante	Modelo físico mínimamente suficiente	Ejemplo
Lago profundo o reservorio	Tiempo y duración de la estratificación térmica y mezcla	Modelo hidrodinámico baroclínico unidimensional resuelto verticalmente ej.(DYRESM)	(Trolle et al., 2008)
Lago de poca profundidad	Advección impulsada por el viento y la resuspensión	Modelo bidimensional verticalmente promediado	(Ji, 2007)
Estuario de cuña salina	Estratificación de la salinidad y movimiento (a lo largo del río) de la cuña salina	Modelo hidrodinámico baroclínico bidimensional, verticalmente y longitudinalmente resuelto	(Kurup et al., 1998)
Estuario macromareal	Resuspensión y Formación de una	Modelo hidráulico unidimensional longitudinalmente	(Even et al., 2007)

	zona de máxima turbidez	resuelto (puede ser barotrópico)	
Aguas marinas extraterritoriales (en alta mar)	Profundidad de termoclina relativa a profundidad de zona fótica	Modelo unidimensional verticalmente resuelto	(Kuhn and Radach, 1997)
Aguas marinas de la plataforma continental	afloramiento	Modelo hidrodinámico baroclínico tridimensional	(Zhurbas et al., 2008)

Los acoplamientos de modelos hidrodinámicos con biogeoquímicos presentan algunos retos. En un sistema modelo completamente acoplado, por ejemplo (*Skerratt et al., 2013*), el modelo hidrodinámico maneja directamente el transporte y la difusión de fósforo y otras especies biogeoquímicas, en el mismo paso de tiempo y la retícula espacial utilizada para la temperatura y la salinidad. Esto generalmente garantiza la conservación de la masa y la estabilidad numérica de los procesos de transporte, y permite la retroalimentación entre los procesos biogeoquímicos e hidrodinámicos, como el efecto de partículas y sustancias disueltas sobre la absorción de luz y calor. Este enfoque es también muy costoso desde el punto de vista computacional, ya que aumenta drásticamente el número de trazadores que se advierte por el modelo hidrodinámico y requiere biogeoquímica para ser manejado en un paso del tiempo que es a menudo mucho más corto que el tiempo de importantes procesos biogeoquímicos. Una desventaja adicional es que los animales (incluidos el zooplancton y a veces también los peces) se representan como "concentraciones" de fósforo en modelos totalmente acoplados, lo que limita los enfoques que pueden usarse para simular comportamientos de natación y dinámica de poblaciones.

El desacoplamiento de los procesos de transporte de los procesos cinéticos para permitir tiempos más largos y esquemas de integración más rápidos para las funciones biogeoquímicas y ecológicas que se ejecutan en la misma cuadrícula espacial que el modelo hidrodinámico permite aumentar

considerablemente la eficiencia computacional a un cierto costo para la exactitud numérica (*Lazzari et al.2010; Park and Kuo, 1996*).

Si la biogeoquímica y el transporte asociado se ejecutan "fuera de línea", después de la finalización de la ejecución del modelo hidrodinámico, son posibles los ensayos biogeoquímicos mucho más rápidos, por ejemplo (*Cerco and Noel, 2013*). Haciendo relativamente fácil intercambiar en diferentes modelos hidrodinámicos, aumentando la flexibilidad del sistema. Este enfoque requiere sustancialmente más espacio de almacenamiento, ya que las variables de transporte deben guardarse en todo el dominio en cada paso de tiempo y excluye la simulación de los posibles efectos de la biogeoquímica en la hidrodinámica.

Los modelos hidrodinámicos y biogeoquímicos pueden desacoplarse completamente, utilizando un método de seguimiento de partículas o de balance de masa para calcular los flujos de transporte a partir de los resultados del modelo hidrodinámico. Esto es potencialmente mucho más rápido, ya que permite que la biogeoquímica sea calculada tanto en un paso de tiempo más largo como en una estructura espacial diferente del modelo hidrodinámico subyacente. Esto puede ser una cuadrícula o malla diferente, por ejemplo (*Larsen et al., 2013*), o incluso un esquema de modelado Lagrangiano, por ejemplo (*Paster et al., 2013*). Es probable que se reduzca la exactitud del transporte, pero este enfoque facilita las simulaciones largas y el modelado de los ecosistemas basado en agentes.

1.2 ¿Cómo funcionan los modelos fluviales, los modelos lacustres y los modelos marinos?

Comparación

La diferencia entre modelos marinos y lacustres por un lado y modelos de captación / río por otro es sorprendente.

Los modelos lacustres y marinos son a menudo complejos y la formulación de ellos es muy similar. Si se incluye la salinidad, los modelos pueden ser idénticos, aunque CAEDYM (*Robson and Hamilton, 2004; Spillman et al.,2007; Trolle et al., 2011*), LakeMab / CoastMab y el asociado LakeWeb / BaltWeb (*Håkanson and Boulion, 2002, Hakanson and Eklund, 2007*) parecen ser inusuales en haber sido aplicados tanto a sistemas marinos como lacustres. Estos modelos a veces se aplican a la parte inferior de los ríos, incluyendo los estuarios (*Robson et al., 2008*), pero rara vez se extienden más arriba.

Los modelos marinos se extienden con mayor frecuencia para incluir ecosistemas (cadenas tróficas y una variedad de plantas), mientras que los modelos de los lagos con más frecuencia incluyen la química detallada del sedimento.

Si se consideran estos datos de manera diferente, se podrían dividir los modelos en tres grandes grupos:

- modelos de calidad del agua (aquellos que incluyen menos de 3 procesos biogeoquímicos o ecológicos),
- modelos biogeoquímicos (que incluyen 3 o más procesos biogeoquímicos, pero menos de tres Componentes de procesos ecológicos),
- modelos ecológicos (que incluyen 3 o más procesos o componentes ecológicos entre: múltiples grupos de fitoplancton, grupos múltiples de zooplancton, invertebrados bentónicos, otros animales, macroalgas, microfitobentos, periferia, macrofitas sumergidas, raíces y rizomas de macrofitos y bioturbación).

1.3 ¿Cómo cambian los modelos con el tiempo?

El mayor realismo fisiológico casi siempre se asocia con una mayor complejidad del modelo. Con el tiempo, la dificultad en todas las subdisciplinas está aumentando, al igual que la variabilidad en la complejidad entre los modelos.

Al evaluar la complejidad del modelo, se considera la cantidad de almacenamiento de fósforo y los tipos de procesos incluidos en los modelos. Se contó el "punto de complejidad" para la inclusión de cada uno de los componentes o procesos incluidos en cada categoría en la tabla 2.

Esto tiene un coste de reducción de la eficiencia computacional y una identificación reducida (*Beck, 1987*). Por ejemplo, los modelos más complejos incluyen más parámetros que requieren calibración. A su vez, los requisitos de datos para la estimación de parámetros robustos aumentan aproximadamente en proporción al cuadrado del número de parámetros. Modelos que son demasiado complejos en relación con el soporte de datos:

- Puede soportar múltiples conjuntos de parámetros que producen resultados de calibración igualmente buenos, pero hacen predicciones diferentes;

- Pueden tener mayor incertidumbre en los parámetros que los modelos más simples, que están mejor limitados por los datos observacionales; y
- Puede no ser adecuado para la prueba de hipótesis, ya que puede ser difícil identificar el punto de fracaso conceptual cuando el modelo no puede predecir correctamente las respuestas del sistema.

Tabla 2: Componentes y procesos de fósforo (considerados en esta revisión)

Detrítico	Plantas	Animales	Sedimentos bentónicos	Abióticos
Crecimiento bacteriano	Crecimiento del fitoplancton	Crecimiento del zooplancton	Establecimientos de sedimentos de fósforo	Fósforo inorgánico particulado (PIP)
Múltiples grupos de bacterias	Múltiple (funcional, taxonómicos o basado en tamaño) grupos fitoplancton	Múltiple (o tamaño funcional de base) de grupos de zooplancton	Múltiples capas de sedimentos	Múltiples tipos de PIP
La hidrólisis / remineralización de detritus	Macroalgas	Macroinvertebrados o zoobentos	Las capas de sedimentos se diferencian por la concentración de oxígeno	Alcalinidad
La captación directa de fósforo detrítico por heterótrofo	Microfitobentos o perifiton	Otros animales acuáticos	diagénesis redox	intercambio difusivo

La captación directa de fósforo orgánico disuelto por heterótrofo	Macrófitos sumergidos	Forrajeo y forrajeo ineficiente	Intercambios de columna de agua y sedimento difusivos	Las tasas de capa de transferencia de contorno limitan
Liberaciones bacterianas de fósforo orgánico disuelto o inorgánico	macrófitos emergentes	Mortalidad animal	Adsorción y desorción	Influencia de la salinidad
	epifitas	Respiración animal y excreción	Entierro	Influencia de la temperatura
	La vegetación marina o cultivos	Dependen de la excreción estequiométrica de los alimentos	Influencia de sulfatos	intercambios de agua subterránea
	Absorción de fósforo inorgánico disuelto por las plantas (incluyendo fitoplancton)	Bioturbación	Influencia de hierro	Precipitación de apatita
	Absorción directa de fósforo orgánico disuelto por las plantas		Influencia del manganeso	Fotodegradación

	Transferencia limitada de la absorción de fósforo		Influencia del pH	Sedimentación y (posiblemente) resuspensión
	Mortalidad de las plantas		Influencia de oxígeno	Saltación (lecho de transporte)
	Respiración de las plantas o excreción		Influencia de calcio	
	Lisis viral			

1.4 ¿Cómo se relaciona lo modelado con lo que se mide?

En los programas de vigilancia de rutina, las mediciones de fósforo-columna de agua se pueden tomar en cualquiera de una serie de grados de detalle, mediciones comúnmente reportadas:

1) Fósforo total (TP) solamente. Esto es común en los programas de monitoreo con escasos recursos, ya que es la forma más barata para medir el fósforo, lo que requiere el protocolo de muestreo más simple. Los modeladores deben recordar que TP no sólo incluye el material disuelto y particulado no vivo, sino también de fósforo asociados a bacterias, fitoplancton (y, en función de los procedimientos de muestreo, alguno zooplancton) en la columna de agua. En la interpretación de los datos de campo, los modeladores normalmente estiman la reserva de fósforo asociado con el fitoplancton asumiendo un radio fijo entre los almacenes intracelulares de fósforo y clorofila, aunque este supuesto es muy problemático (*Klausmeier et al., 2004, 2008*).

La forma química en que el fósforo está presente depende de sus fuentes y mecanismos de transporte, y puede tener un impacto dramático en su biodisponibilidad y reactividad.

Fósforo relativamente refractario en la forma de materia orgánica terrestre puede tener poca importancia en un tiempo de residencia de unas pocas horas o unos pocos días, pero puede ser

importante cuando se entrega a un embalse en el que puede desglosarse en el transcurso de meses o años.

2) Fósforo total más fósforo disuelto total (TP y TDP). Esto proporciona alguna información básica adicional que se puede utilizar en los modelos. Donde éstos son los únicos datos de observación disponibles, una suposición común es que todo el fósforo disuelto es lábil y disponibles para su absorción biológica inmediata, mientras que todo el fósforo particulado se asocia con cualquiera de fitoplancton o detritus orgánicos. La precisión de estos supuestos varía considerablemente entre los sistemas.

3) TP, TDP más fósforo orgánico total. En este caso, un supuesto de modelado común es que todo el fósforo orgánico no-algas es particulado y detrítico, mientras que todo el fósforo disuelto es inorgánico

4) Cualquiera o todos de: TP, fósforo reactivo soluble (SRP) o fosfato ($H_xPO_4^{(3-x)-}$), fósforo orgánico particulado (POP, que incluye fósforo en fitoplancton) y fósforo orgánico disuelto (DOP).

La frecuencia y la resolución espacial de las mediciones puede ser un problema. Mientras que los modelos biogeoquímicos acuáticos pueden tener una resolución de segundos, horas o días (diseñado para que coincida con la escala de tiempo de los procesos que se consideran importantes por los requisitos de estabilidad de los modelos hidrodinámicos acoplados), muchos programas de vigilancia tienen intervalos de muestreo de meses o más y la muestra a sólo unos pocos sitios dentro de un área que puede abarcar cientos de kilómetros.

1.5 ¿Qué no se modela? Desafíos e insuficiencias

Los modelos biogeoquímicos acuáticos actuales tienen sus raíces en el manejo y modelado de las proliferaciones de algas nocivas. Estos modelos fueron diseñados con aguas mesotróficas a eutróficas. ¿Qué procesos faltan en la generación de modelos que podrían ser importantes en los otros contextos en los que estos modelos se están aplicando?

1.5.1 Transferencia limitada de nutrientes

La absorción de fósforo por las plantas se controla mediante:

- velocidad a la que se puede incorporar en la infraestructura celular de la planta

- velocidad a la que pasa a través de sitios receptores en la superficie celular (y la densidad de dichos sitios)
- la velocidad a la que se mueve desde la masa de agua a la superficie celular de las plantas

Para el fitoplancton, la tasa de transferencia a la superficie de las células se controla principalmente por la concentración de fósforo en la columna de agua, ya que el espesor de la capa límite difusiva alrededor de la célula planctónica puede considerarse constante.

Sin embargo, para las plantas y corales bentónicos, esta espesura de la capa límite varía en función de la velocidad del agua, rigidez de las hojas, morfometría y rugosidad superficial. En ambientes oligotróficos (bajos nutrientes), la tasa de transferencia de fósforo disuelto a través de la capa límite de difusión es probable que sea el control principal sobre la velocidad a la que las plantas son capaces de absorber el fósforo de la columna de agua.

(*Hearn et al., 2001*) presentan una formulación para modelar la absorción de nutrientes limitada por flujo hacia afuera en los arrecifes de coral, (*Stevens et al., 2003 and Fram et al., 2008*) hacen el mismo para el quelpo gigante, mientras que (*Townsend and Padovan, 2009*) y (*Robson, 2010*) consideran la absorción de nutrientes limitada en el modelado de macroalgas bentónicas en un río tropical relativamente antiguo. Sin embargo, las formulaciones aún no han sido ampliamente adoptadas en paquetes completos de modelado biogeoquímico o ecológico. Aunque hay algunas excepciones en el modelado marino, parece haber poco conocimiento de este tema en el modelado de agua dulce.

1.5.2 Flujo a través de sedimentos

Flujo a través de sedimentos debido a las interacciones del agua superficial con las aguas subterráneas (*Jones and Holmes, 1996; Vanliere and Mur, 1982*), flujo a través de ondulaciones de arena (*Rocha, 2008*), gradientes de presión de marea (*Werner et al., 2006*) y la acción de las olas (*Cardenas et al., 2008*) aumenta en gran medida la interacción entre la columna de agua y el sedimento, y puede agrandar la actividad microbiana y las tasas de muchas reacciones biogeoquímicas, proporcionando condiciones redox dinámicas y la exposición a superficies de partículas reactivas.

(*Rocha, 2008*) presenta un análisis de los sedimentos arenosos como reactores biogeoquímicos, pero la importancia cuantitativa de este a través de una amplia gama de ambientes acuáticos aún

no está bien entendida. Estas interacciones aún no se encuentran generalmente consideradas en los modelos biogeoquímicos, en ambientes intermareales, las corrientes superficiales y las aguas en las que las velocidades de reacción son de otra manera baja (esto puede ser un descuido importante).

1.5.3 Efectos del secado y rehumectación de sedimentos

Los sedimentos en muchos ambientes acuáticos están sujetos a mojado y secado en épocas de marea en ambientes costeros, escalas de tiempo estacional en ríos y en estaciones húmedas, y durante años en tiempos de muchas inundaciones. El secado y posterior rehumidificación puede tener implicaciones biogeoquímicas complejas entre la respiración anaeróbica, aeróbica y el cambio de comunidades bacterianas (*Baldwin and Mitchell, 2000*). El procesamiento biogeoquímico continúa cuando el suelo está seco, y puede resultar en la liberación de grandes cantidades de fósforo inmediatamente después de la rehumectación, esto depende de las concentraciones y proporciones de sulfuros, hierro oxidado y fosfato en los sedimentos (*Baldwin et al., 2000, Loeb et al., 2008*). En la actualidad, incluso los modelos que simulan la física del mojado y secado (*Bruce et al., 2006; Wild-Allen et al., 2010*) no suponen procesos biogeoquímicos en células secas.

1.5.4 Bioquímica de la materia orgánica disuelta

La comprensión biogeoquímica del fósforo orgánico en ambientes acuáticos es incompleta, pero se ha desarrollado rápidamente en los últimos años.

La mayoría de los modelos biogeoquímicos acuáticos modernos representan fósforo en alguna forma. Muchos, por ejemplo (*Chavan and Dennett, 2008; Eilola et al., 2009; Reed et al., 2011*) no distinguen entre formas del fosforo orgánico particulado y disuelto, y representan todo el material orgánico como "detrito". Algunos asumen una relación C: N: P constante para este detrito, requiriendo cualquier exceso de fósforo para estar inmediatamente disponible como DIP para mantener un balance de la masa de fósforo.

Los modelos más complejos hacen un seguimiento del N orgánico, C y P por separado para permitir una estequiometría variable, y dividir el fósforo orgánico en partículas separadas y partes disueltas.

El origen del P orgánico en ambientes acuáticos determina su composición química y sus características físicas, que a su vez afecta a la biodisponibilidad, la disponibilidad y calidad nutricional química. El P orgánico se puede encontrar en forma de ácidos nucleicos (incluyendo

ADN, ARN y otros nucleótidos), fosfatos de inositol y fosfolípidos, entre otras formas (*Baldwin, 2013*).

1.5.4.1 ADN y ARN

Los ácidos nucleicos (ADN y ARN) constituyen una proporción sustancial de fósforo orgánico disuelto (DOP) en los sistemas acuáticos, aunque esa proporción varía entre los sistemas, entre el depósito de agua y los depósitos de sedimentos, y con el tiempo.

La proporción de P orgánico que se encuentra en la forma de ADN y ARN es a la vez importante y altamente variable. Esta proporción se ha encontrado que varía como una función del estado trófico, con los sistemas eutróficos que tiene una mayor proporción de DOP como ácidos nucleicos que los sistemas oligotróficos o mesotróficas (*Siuda and Chrost, 2001*), probablemente debido a la liberación de DOP desde el fitoplancton por lisis.

El ADN y el ARN son a menudo muy biodisponible en comparación con otras formas de fósforo orgánico (*Siuda and Chrost (2000)*).

1.5.4.2 Otros nucleótidos

Otros nucleótidos (incluyendo ATP, AMP y GTP) también contienen fósforo en forma orgánica, y se han medido en lagos y sistemas marinos, aunque en pequeñas cantidades. Se sabe relativamente poco acerca de la biogeoquímica de estas moléculas en sistemas acuáticos (*Baldwin, 2013*). Aunque las concentraciones son bajas, la tasa de recambio de nucleótidos puede ser muy alta (*Bjorkman and Karl, 2005*), y se ha sugerido que el ATP en particular puede ser importante en los ciclos de fósforo de los sistemas oligotróficos (*Azam and Hodson, 1977; Baldwin, 2013*). ATP y AMP son producidos por fitoplancton durante las floraciones y puede ser absorbido por las superficies minerales, lo que reduce su reactividad (*Baldwin, 2013*).

1.5.4.3 Fosfatos de inositol

Los fosfatos de inositol son comunes en suelos y plantas terrestres, con altas concentraciones presentes en las semillas, incluidas semillas de macrófitos acuáticos. Los fosfatos de inositol pueden representar una proporción sustancial de fósforo orgánico en sistemas acuáticos (hasta 80% de sedimento fósforo orgánico (*Mckelvie, 2007*)), pero esto aún no se ha evaluado suficientemente (*Baldwin, 2013*).

Los fosfatos de inositol en los sistemas acuáticos pueden ser en gran parte de origen terrestre. Cuando se libera a través de la descomposición de las plantas, estos fosfatos se unen rápidamente a las superficies del suelo, pero pueden ser liberados en los estuarios cuando se exponen a salinidades marinas. Podrían ser modelados como una forma refractaria de fósforo orgánico que está presente en forma de detrito en las cargas terrestres, es absorbida a las superficies del sedimento en descomposición del material detrítico terrenal, y es liberado como fósforo orgánico disuelto refractario a salinidades superiores.

1.5.4.4 Fosfolípidos

Los fosfolípidos (grasas que contienen fósforo) están presentes principalmente en forma de partículas y pueden concentrarse en la superficie de cuerpos de agua (Por ejemplo, en espumas marinas) y en superficies de sedimentos. Pueden representar un importante sumidero de fósforo en sistemas oligotróficos, eliminándolo efectivamente del ciclo del fósforo acuático en escalas de tiempo relevantes para modelar la calidad del agua (*Baldwin, 2013*). Este mecanismo de eliminación todavía no se ha considerado en modelos de fósforo acuático.

1.5.4.5 Otros procesos

Otros procesos e interacciones que generalmente no están contenidos en los modelos biogeoquímicos acuáticos incluyen:

- Absorción directa de algunas formas de fósforo orgánico disuelto por fitoplancton; que puede ser una vía principal cuando las concentraciones de fósforo inorgánico disuelto son bajas (*Cotner and Wetzel, 1992*);
- El transporte de albergue (saltación) de partículas portadoras de fósforo (*Campbell, 1978*);
- Cambios en las tasas de absorción de fósforo de las plantas acuáticas asociadas con un suministro de nutrientes pulsado (*Touchette and Burkholder, 2000*);
- Adaptaciones a la privación de nutrientes, como cambios en la pigmentación de cianobacterias y cambios entre la fotosíntesis C3 y C4 (*Touchette and Burkholder, 2007*);
- La influencia de los animales de madriguera en la ventilación del sedimento (*Van Cappellen et al., 2005*).

CAPÍTULO 2: Materiales y Métodos

2.1 Modelo 0-dimensional

Con vistas a abordar la dinámica del PRS, se parte de la ecuación cinética del PRS (5.4.7) que aparece en (Ji, 2008):

$$\frac{\partial PO_{4T}}{\partial t} = \sum_{x=c,d,g} (FPI_x \cdot BM_x + FDIP \cdot PR_x - P_x) APC \cdot B_x + K_{DOP} \cdot DOP + \frac{\partial (WS_{TSS} \cdot PO_{4p})}{\partial z} + \frac{BFPO_{4d}}{\Delta z} + \frac{WPO_{4T}}{V}, \quad (2.1)$$

donde:

PO_{4t} : Fosfato total (gP/m^3), o sea, la suma de fosfato disuelto y absorbido

t : tiempo (día)

PO_{4p} : Fosfato absorbido (gP/m^3)

FPI_x : Fracción de fósforo metabolizado por las algas del grupo x , llevado a fósforo inorgánico

c : Grupo de algas “cianobacterias”

d : Grupo de algas “diatomeas”

g : Grupo de algas “verde-azules”

BM_x : Metabolismo basal del grupo x de algas ($\text{gP/m}^3 \cdot \text{día}$)

$FDIP$: Fracción de fósforo depredado llevado a fósforo inorgánico

PR_x : Velocidad de predación del fósforo por el grupo x de algas ($\text{gP/m}^3 \cdot \text{día}$)

P_x : Velocidad de crecimiento del grupo x de algas (día^{-1})

APC : Razón promedio fósforo/carbono en todos los grupos de algas

B_x : Biomasa del grupo x de algas (gC/m^3)

K_{DOP} : Velocidad de hidrólisis del fósforo orgánico disuelto (día^{-1})

DOP : Fósforo orgánico disuelto (gP/m^3)

WS_{TSS} : Velocidad de sedimentación (m/día)

z : coordenada vertical (m)

$BFPO_{4d}$: Intercambio de flujo de fosfato entre el sedimento y el agua (gP/m²/día)

Δz : El grosor de la capa del fondo en que ocurre intercambio de fosfato (m)

WPO_{4t} : Cargas (adiciones) externas de fosfato total (gP/día)

V: Volumen (m³).

2.1.1 Consideraciones

2.1.1.1 Primera aproximación

Se asume un ecosistema relativamente aislado, lo cual justifica desprestigiar el último término de la ecuación (2.1). Con vistas a aumentar la tratabilidad matemática, se propone considerar como una constante K los demás términos del miembro derecho, exceptuando el término de la derivada.

Donde:

$$k_b = \sum_{x=c,d,g} (FPI_x \cdot BM_x + FDIP \cdot PR_x - P_x) APC \cdot B_x,$$

$$k_q = K_{DOP} \cdot DOP,$$

$$k_{fq} = \frac{BFPO_{4d}}{\Delta z},$$

$$k_L = \frac{WPO_{4T}}{V},$$

$$K = k_b + k_q + k_{fq},$$

$$K_1 = k_b + k_q + k_{fq} + k_L. \quad (2.2)$$

Denotando el PO_{4T} como PRS, y considerando la velocidad de sedimentación como una constante K₂, queda un modelo simplificado para la dinámica del fósforo en un ecosistema relativamente aislado:

$$\frac{\partial(PRS)}{\partial t} = K + K_2 \frac{\partial}{\partial z}(PRS). \quad (2.3)$$

El primer término del miembro derecho representa las distintas fuentes y sumideros del fósforo reactivo soluble (PRS) dentro de los ecosistemas acuáticos, de naturaleza física, química o biológica (gP/m³.día), el segundo representa el movimiento e interacción del fósforo en la

coordenada vertical (incluyendo la interacción con el fondo), siendo K_2 la velocidad de movimiento del PRS en la coordenada vertical (m/día).

2.1.1.2 Segunda aproximación

Se considera incluir en el modelo la adición externa de fósforo mediante las escorrentías de las cuencas hidrográficas.

Se utiliza el método para calcular las cargas contaminantes de las aguas pluviales de escorrentía para las zonas urbanas (*Protection, 2001*). La técnica incluye el área de sub-cuenca de drenaje y cubierta impermeable, las concentraciones de contaminantes de las aguas pluviales de escorrentía y la precipitación anual.

Este método calcula las cargas contaminantes de componentes químicos como el producto del volumen de flujo anual y la concentración de contaminantes, como:

$$L = 0.226 \cdot R \cdot C \cdot A, \quad (2.4)$$

donde:

L : Cargas anuales (libras)

R : Escorrentía anual (pulgadas)

C : Concentración de contaminantes (mg/l)

A : Área (hectáreas)

0.226: Factor de conversión de unidades.

La escorrentía anual se calcula como un producto del volumen anual de escorrentía, y un coeficiente de escorrentía (R_v).

$$R = P \cdot P_j \cdot R_v. \quad (2.5)$$

Donde

R : Escorrentía anual (pulgadas)

P : Lluvia anual (pulgadas)

P_j : Fracción de eventos de lluvias anuales que producen escorrentía (por lo general 0,9)

R_v : Coeficiente de escorrentía

P : Lluvia total media, 2011 = 1273.433333 pulgadas

$$R_v = 0.05 + 0.9I_a$$

Donde $I_a = 10\%$ (pues esta es una zona de baja densidad residencial, casi no hay población)

$$R_v = 0.14$$

Siendo así

$$R = 6.317031494 \text{ pulgadas}$$

C : Las concentraciones de contaminantes por uso de la tierra de fósforo total (mg / l) para la zona residencial es: 0.4

A : El área estimada de las cuencas que vierten hacia el golfo de Ana María es: 2102154,15 hectáreas.

2.2 Modelo 1-dimensional

Dada la importancia que tiene la interacción del fósforo con el fondo de los acuatorios, se consideró incluir la coordenada espacial vertical, resultando un modelo unidimensional. Para ello se adaptó un modelo biofísico pelágico para el nitrógeno, a un modelo costero para el fósforo. El modelo de partida es un modelo de cierre de turbulencia de segundo orden de nivel 2 desarrollado por (*Mellor and Yamada, 1974, 1982*), que se describe por un sistema de ecuaciones diferenciales parciales para el momento y la temperatura:

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial \left[(A_M + v_M) \frac{\partial u(z,t)}{\partial z} \right]}{\partial z} + fv(z,t), \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial \left[(A_M + v_M) \frac{\partial v(z,t)}{\partial z} \right]}{\partial z} - fu(z,t), \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial \left[(A_H + v_H) \frac{\partial T(z,t)}{\partial z} \right]}{\partial z} + \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial I(z)}{\partial z}, \quad (2.8)$$

$$I(z) = I_0\{ae^{\zeta_1 z} + (1 - a)e^{\zeta_2 z}\}, \quad (2.9)$$

donde:

- u y v: indican las componentes horizontales de la velocidad en las direcciones este y norte, respectivamente.
- T: es la temperatura.
- t: el tiempo
- z: la coordenada vertical
- f: el parámetro de Coriolis
- ρ : densidad del agua del mar
- c_p : La capacidad calorífica específica del agua de mar en condiciones normales
- I: La intensidad de la radiación solar a la profundidad z
- A_M y A_H : Son las difusividades de remolino verticales dependientes de la profundidad, para el momento y el calor
- ν_M y ν_H : La viscosidad y difusividad molecular, respectivamente
- I_0 : Es la irradiancia de la banda visible en la superficie del mar, obtenido mediante un modelo de transferencia radiativa que acopla atmósfera y océano (calculado por el programa computacional COART¹)
- ζ_1 y ζ_2 : coeficientes de atenuación de la luz (en diferentes espectros)
- a: factor de peso

El modelo que se propone consta de tres ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden:

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial t} = K_3 \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2}, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} = K_3 \frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2}, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = K_4 \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial I(z)}{\partial z}. \quad (2.12)$$

¹ Couple Ocean and Atmosphere Radiative Transfer, desarrollado por el grupo de Radiación Solar y Nubes de la NASA.

A continuación, se exponen las principales consideraciones tenidas en cuenta para proponer estas ecuaciones.

2.2.1 Consideraciones

2.2.1.1 Primera aproximación

Se despreció la fuerza de Coriolis, debido a que la aceleración que esta implica es muy pequeña y por ende su influencia en la velocidad de los elementos de fluido es poco notable para trayectorias verticales cortas, como es el caso de las zonas costeras. Esto se aprecia mejor considerando la expresión:

$$\vec{a}_C = 2(\vec{\omega} \times \vec{v}), \quad (2.13)$$

donde:

a_c : es la aceleración de Coriolis

v : velocidad del elemento de fluido

w : es la velocidad angular de la Tierra ($7,292 \cdot 10^{-5}$ rad/s).

2.2.1.2 Segunda Aproximación

Se consideró que las difusividades de remolino para el momento y la temperatura (A_M y A_H), y la viscosidad y la difusividad molecular (ν_M y ν_H) son constantes, por tanto:

$$A_M + \nu_M = K_3, \quad (2.14)$$

$$A_H + \nu_H = K_4, \quad (2.15)$$

donde K_3 y K_4 son nuevas constantes.

2.2.1.3 Tercera Aproximación

Se consideró un tratamiento unificado de toda la banda visible del espectro electromagnético, lo cual transforma la ecuación (2.9) en la ley de Lambert-Beer de la Óptica:

$$I(z, t) = I_0 e^{-\zeta z}, \quad (2.16)$$

donde ahora ζ es el coeficiente de atenuación promedio para la luz visible.

2.2.2 Modelo de Transporte Radiativo

La transferencia radiativa es el fenómeno físico de la transferencia de energía en forma de radiación electromagnética. La propagación de la radiación a través de un medio se ve afectada por los procesos de absorción, emisión y dispersión. La ecuación de la transferencia radiativa plantea que a medida que un haz de radiación viaja, pierde energía por absorción, gana energía por emisión y redistribuye la energía por dispersión. Su forma integro-diferencial es:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \hat{\Omega} \cdot \nabla I_\nu + (k_{\nu,s} + k_{\nu,a}) I_\nu = j_\nu + \frac{1}{4\pi} k_{\nu,s} \int I_\nu d\Omega. \quad (2.17)$$

donde:

c : Velocidad de la luz en el vacío

I_ν : Radiancia espectral

t : Tiempo

Ω : Ángulo sólido

$k_{\nu,s}$: Opacidad de dispersión

$k_{\nu,a}$: Opacidad de absorción

j_ν : Coeficiente de emisión.

Esta ecuación tiene aplicación en una amplia variedad de áreas, tales como la Óptica, la Astrofísica, las Ciencias Atmosféricas y la Teledetección. Existen soluciones analíticas para casos simples, pero para medios más realistas, con efectos de dispersión múltiple compleja, se requieren métodos numéricos.

En esta tesis se propone conectar las soluciones del modelo termohidrodinámico (2.10) -(2.12) con un modelo de transporte radiativo en atmósfera y océano. Para esto, debe tenerse en cuenta que las aguas superficiales en la hidrosfera en principio se pueden clasificar de la siguiente manera:

- Oceánicas
- Costeras
- Estuarinas (salobres)

- Sistemas acuáticos continentales (agua dulce)

Para esta primera aproximación solamente se tienen en cuenta los tipos de aguas oceánicas y costeras, cuyas propiedades ópticas fueron estudiadas en trabajos previos en el laboratorio de investigaciones al que pertenece la autora.

Para conectar el modelo termohidrodinámico con el de transporte radiativo se proponen dos vías, las cuales se detallan a continuación.

2.2.2.1 Primera Vía

Se propone estimar parámetros tales como I_0 , y en general los espectros a nivel del mar, mediante soluciones de la ecuación del transporte radiativo en atmósfera, y además propagar los espectros en la columna de agua utilizando valores medios de los coeficientes de atenuación de la luz utilizando las tablas de referencia de Jerlov (Tabla 3) y aplicando la solución de la ecuación del transporte radiativo cuando en el agua solamente se considera la absorción y se desprecian la dispersión y la emisión. Esta solución analítica se conoce como ley de Lambert-Beer (ecuación 2.16).

Tabla 3: Valores promedios de coeficientes de atenuación de los tipos ópticos de aguas de (*Jerlov, 1976*). UV: Radiación Ultravioleta. PAR: Siglas en inglés de Radiación Fotosintéticamente Activa

Esta vía se ha utilizado en varios trabajos previos realizados en el laboratorio de investigaciones de la autora de esta tesis. En algunos de estos se utilizaron soluciones numéricas de la ecuación de transporte radiativo calculadas mediante el software TUV, el cual es código abierto elaborado en el Centro Nacional de Investigaciones Atmosféricas de los EEUU (NCAR). Posteriormente se propagaron los espectros en la columna de agua utilizando la ley de Lambert-Beer y la clasificación óptica de Jerlov. Es de destacar la clasificación realizada de las aguas del Golfo de Ana María acorde a las tablas de referencia de Jerlov (Tabla 4):

Tabla4: Clasificaciones óptica y trófica del Golfo de Ana María (*Alvarez-Salgueiro, 2015*)

Estación	Profundidad; m	Profundidad de Secchi; m	[K]; m ⁻¹	Tipo óptico de agua	El (PRS)	Clasificación trófica
98	17	3,75	0,53	C5	2,48	Oligotróficas
101	21	3,75	0,53	C5	5,33	Eutróficas
17	6	5,5	0,36	C3	2,39	Oligotróficas
26	9	4,25	0,47	C5	2,31	Oligotróficas
27	9	3,5	0,57	C5	2,07	Oligotróficas
3	12	6,5	0,30	C1	2,15	Oligotróficas
170	18	4,5	0,44	C3	2,64	Oligotróficas
137	5	2,75	0,73	C7	2,32	Oligotróficas
51	6	3,5	0,57	C5	2,14	Oligotróficas

2.2.2.2 Segunda Vía

Para la segunda vía se propone un transporte radiativo unificado en atmósfera y océano, el cual implica soluciones de la ecuación del transporte radiativo considerando al océano como la capa inferior de la atmósfera. Esto podría hacerse utilizando el código de transferencia radiativa COART (Jin, 2017). O sea, si bien el TUV considera al océano como capa límite, COART trata al océano como "capas atmosféricas" adicionales, pero con propiedades ópticas significativamente diferentes.

CAPÍTULO 3: Resultados y Discusión

3.1 Modelo 0-Dimensional

La ecuación (2.3) es equivalente a una ecuación diferencial lineal no homogénea en derivadas parciales de primer orden de la siguiente forma:

$$P \frac{\partial(PRS)}{\partial t} + Q \frac{\partial}{\partial z}(PRS) = R, \quad (3.1)$$

en la que se considera que los valores de P , Q , R asumen la parametrización $P=1$, $Q=-K_2$ y $R=K_1$.

Las cargas contaminantes de las aguas pluviales de escorrentía para las zonas urbanas son:

$$L = 1200455,407 \text{ lb} = 544517413,1 \text{ g}$$

En este caso se estiman las cargas contaminantes generadas durante las tormentas.

La ecuación (2.3) puede escribirse:

$$\frac{\partial(PRS)}{\partial t} = K_1 + K_2 \frac{\partial}{\partial z}(PRS). \quad (3.2)$$

Resolviendo esta ecuación diferencial por el método que aparece en (*Elgoltz, L, 1983*), (p.248) queda:

$$PRS = K_1 t + k. \quad (3.3)$$

La constante k es la concentración del fósforo reactivo soluble para el tiempo $t=0$, o sea, PRS_0 , quedando entonces la solución:

$$PRS = K_1 t + PRS_0. \quad (3.4)$$

La solución obtenida muestra una dependencia lineal del PRS con el tiempo. La constante K_1 representa la suma de una serie de procesos que generan (fuentes) o consumen (sumideros) fósforo.

Por ejemplo, constituyen fuentes:

- el PRS que los diferentes tipos de algas consumen cuando hacen fotosíntesis,
- los demás compuestos de fósforo orgánicos que se convierten en inorgánicos para asimilarse mejor (no todas las especies de algas consumen PO_4 a la misma velocidad),
- el PO_4 que es expulsado al medio cuando mueren los organismos.

Por tanto, K_1 puede escribirse como la suma de funciones fuentes o sumideros que se desprecian de la ecuación original (2.1). Sin embargo, en este primer trabajo se ha considerado constante para facilitar el tratamiento matemático del modelo, dejando para estudios posteriores el desglose de esta constante como una suma de funciones.

3.2 Análisis del modelo 0-Dimensional

K_1 podría considerarse aproximadamente constante en situaciones muy específicas en que podría existir una diferencia constante entre los términos que aportan PRS (los positivos) y los que lo extraen (los negativos). Esto enmarca los límites de aplicación de este modelo, y define un paso ulterior a seguir: determinar bajo qué condiciones esta constancia de K_1 podría cumplirse.

K_1 podría reflejar la realidad durante breves intervalos de tiempo (días) en que la dinámica del fósforo podría variar lentamente en determinado ecosistema acuático. Sin embargo, se espera que esto no se cumpla para grandes períodos de tiempo (estaciones de lluvia y sequía).

3.3 Modelo 1-dimensional

Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales propuesto (2.10) -(2.12), por el método de separación de variables (*Tijonov and Samarsky, 1972*), se proponen las siguientes condiciones iniciales y de contorno:

Para $u(z, t)$:

$$\left. \begin{aligned} u(z, 0) &= \frac{\tau}{\rho K_3} f(l + z) + U_0, \\ \left(\frac{\partial u(z, t)}{\partial z} \right)_{z=0} &> 0, \\ u(0, t) &= \frac{\tau l}{\rho K_3}, \\ u(l, t) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Para $v(z, t)$:

$$\left. \begin{aligned} v(z, 0) &= \frac{\tau}{\rho K_3} f(l+z) + V_0, \\ \left(\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} \right)_{z=0} &> 0, \\ v(0, t) &= \frac{\tau l}{\rho K_3}, \\ v(l, t) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Para $T(z, t)$:

$$\left. \begin{aligned} T(z, 0) &= \frac{Q_0}{\rho c_p K_4} z + T_0, \\ \left(\frac{\partial T(z, t)}{\partial z} \right)_{z=0} &= \frac{Q_0}{\rho c_p K_4}, \\ T(l, t) &= T_l, \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

donde:

U_0, V_0 : Velocidades iniciales

T_0 : Temperatura ambiente

τ : Componente del esfuerzo del viento en la superficie del agua

Q_0 : Flujo de calor neto a través de la superficie

f : factor de calibración.

Las soluciones del sistema son:

$$u(z, t) = v(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{4Tl(-1+(-1)^n)}{\rho K_3 n^2 \pi^2} e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 K_3 t} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} z \right] + \frac{fT(l+z)}{\rho K_3}, \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} T(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\left(\frac{1}{n\pi} \right)^2 \left[4l(-1)^n \left(\frac{Q_0}{\rho c_p K_4} - \frac{T_l}{l} \right) + ((-1)^n - 1) \left[\frac{2lQ_0}{\rho c_p K_4} - \frac{2T_l}{l} \right] \right] \right) e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 K_4 t} + \right. \\ \left. \frac{2l^3 I_0 \zeta^2 ((-1)^n e^{\zeta l} - 1)}{\rho c_p K_4 (n\pi)^2 ((l\zeta)^2 - (n\pi)^2)} \left(1 - e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 K_4 t} \right) \right\} \cos \frac{n\pi}{l} z + \frac{Q_0 z}{\rho c_p K_4} + \frac{z^2}{l} \left(\frac{T_l}{l} - \frac{Q_0}{\rho c_p K_4} \right). \quad (3.9) \end{aligned}$$

3.4 Análisis de las propiedades matemáticas del modelo 1-Dimensional

Los términos con número de orden n par en las series de las soluciones se anulan, entonces las soluciones quedan:

$$u(z, t) = v(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{4\Upsilon l(-1+(-1)^{2n+1})}{\rho K_3(2n+1)^2 \pi^2} e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi}{l}\right)^2 K_3 t} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi}{l} z \right] + \frac{f\Upsilon(l+z)}{\rho K_3}, \quad (3.10)$$

$T(z, t)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left(\left(\frac{1}{(2n+1)\pi} \right)^2 \left[4l(-1)^{(2n+1)} \left(\frac{Q_0}{\rho c_p K_4} - \frac{T_l}{l} \right) + ((-1)^{(2n+1)} - 1) \left[\frac{2lQ_0}{\rho c_p K_4} - \frac{2T_l}{l} \right] \right] \right) e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi}{l}\right)^2 K_4 t} \right. \\ \left. + \frac{2l^3 I_0 \zeta^2 ((-1)^{(2n+1)} e^{\zeta l} - 1)}{\rho c_p K_4 ((2n+1)\pi)^2 ((l\zeta)^2 - ((2n+1)\pi)^2)} \left(1 - e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi}{l}\right)^2 K_4 t} \right) \right. \\ \left. \cdot \cos \frac{(2n+1)\pi}{l} z + \frac{Q_0 z}{\rho c_p K_4} + \frac{z^2}{l} \left(\frac{T_l}{l} - \frac{Q_0}{\rho c_p K_4} \right) \right\}. \quad (3.11)$$

Haciendo:

$$A = \frac{8\Upsilon l}{\rho K_3 \pi^2}$$

$$B = \frac{1}{\pi^2} \left[4l \left(\frac{T_l}{l} - \frac{Q_0}{\rho c_p K_4} \right) - \frac{4lQ_0}{\rho c_p K_4} + \frac{4T_l}{l} \right]$$

$$C = \frac{-2l^3 I_0 \zeta^2 (e^{\zeta l} + 1)}{\rho c_p K_4 \pi^2}$$

$$D = (l\zeta)^2$$

Entonces:

$$u(z, t) = v(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{A}{(2n+1)^2} e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi}{l}\right)^2 K_3 t} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi}{l} z \right\} + \frac{f\Upsilon(l+z)}{\rho K_3}, \quad (3.12)$$

$$T(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{B}{(2n+1)^2} e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi}{l}\right)^2 K_4 t} \right. \\ \left. + \frac{C}{D(2n+1)^2 - \pi^2(2n+1)^4} \left(1 - e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi}{l}\right)^2 K_4 t} \right) \right\} \cos \frac{(2n+1)\pi}{l} z + \frac{Q_0 z}{\rho c_p K_4} \\ + \frac{z^2}{l} \left(\frac{T_l}{l} - \frac{Q_0}{\rho c_p K_4} \right). \quad (3.13)$$

Las series de las ecuaciones (3.12) y (3.13) son continuas y convergen uniformemente, esto se demuestra por el criterio de Weierstrass, lo que significa que las soluciones se pueden sustituir directamente en las ecuaciones iniciales y pueden ser derivadas (o integradas) término a término.

3.5 Análisis de las propiedades físicas del modelo 1-Dimensional

Las series de las ecuaciones (3.12) y (3.13) son convergentes e hiperarmónicas, por lo que tienden a un valor determinado. Esto es de importancia capital porque permite tronchar la serie, ya que infinitos términos no son útiles físicamente. Se tronchó la serie para $n=1$, porque la suma de los primeros dos términos de la serie va a ser mayor que la suma de los demás términos, siendo esta última el error absoluto que se comete al realizar el truncamiento. Las soluciones quedan:

$$u(z, t) = v(z, t) = Ae^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 K_3 t} \operatorname{sen} \frac{\pi}{l} z + \frac{1}{9} Ae^{-\left(\frac{3\pi}{l}\right)^2 K_3 t} \operatorname{sen} \frac{3\pi}{l} z + \frac{fT(l+z)}{\rho K_3}, \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} T(z, t) = & Be^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 K_4 t} + \frac{C}{D - \pi^2} \left(1 - e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 K_4 t}\right) \cos \frac{\pi}{l} z + \frac{1}{9} Be^{-\left(\frac{3\pi}{l}\right)^2 K_4 t} \\ & + \frac{C}{9D - 81\pi^2} \left(1 - e^{-\left(\frac{3\pi}{l}\right)^2 K_4 t}\right) \cos \frac{3\pi}{l} z + \frac{Q_0 z}{\rho c_p K_4} \\ & + \frac{z^2}{l} \left(\frac{T_l}{l} - \frac{Q_0}{\rho c_p K_4}\right), \quad (3.15) \end{aligned}$$

donde el error absoluto es:

$$A \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = A \frac{1}{72} (-80 + 9\pi^2) = 4,78 \cdot 10^{-10} \quad (3.16)$$

Y el error relativo, referido al valor absoluto de la suma de los dos primeros términos, es de un 0,153%.

Dada la complejidad de la función de la temperatura, esta será estudiada con mayor profundidad en posteriores investigaciones que incluyan procesos bióticos que influyen en la dinámica del fósforo y que tienen fuerte dependencia de la temperatura.

3.6 Caso de estudio: Golfo de Ana María

El Golfo de Ana María, situado al sur de las provincias de Sancti Spíritus, Ciego de Ávila y Camagüey, tiene gran importancia económica para nuestro país, especialmente por ser una zona de gran importancia para la pesca y el turismo. Las secciones siguientes muestran aspectos considerados para aplicarle la propuesta de modelo 1-dimensional. En la mayoría de los casos, se

persiguió una continuidad con trabajos previos con el Golfo de Ana María realizados en el grupo de la autora (*Alvarez-Salgueiro, 2015*).

3.6.1 Profundidad

Se obtuvo el promedio de profundidad de las estaciones de muestreo consideradas en (*Alvarez-Salgueiro, 2015*), el cual resultó 11,4m.

3.6.2 Tiempo

Se tuvo en cuenta un ciclo de un año completo, seleccionando para evaluar las soluciones de las velocidades aquellos tiempos que marcan los cambios de las estaciones: los solsticios y equinoccios (Tabla 5).

Tabla 5: Solsticios y equinoccios por años (*Wikipedia, 2017*)

UTC fecha y hora de solsticios y equinoccios ¹								
año	Equinox Mar		Solsticio Jun		Equinox Sept		Solsticio Dic	
	día	hora	día	hora	día	hora	día	hora
2004	20	06:49	21	00:57	22	16:30	21	12:42
2005	20	12:33	21	06:46	22	22:23	21	18:35
2006	20	18:26	21	12:26	23	04:03	22	00:22
2007	21	00:07	21	18:06	23	09:51	22	06:08
2008	20	05:48	20	23:59	22	15:44	21	12:04
2009	20	11:44	21	05:45	22	21:18	21	17:47
2010	20	17:32	21	11:28	23	03:09	21	23:38
2011	20	23:21	21	17:16	23	09:04	22	05:30
2012	20	05:14	20	23:09	22	14:49	21	11:12
2013	20	11:02	21	05:04	22	20:44	21	17:11
2014	20	16:57	21	10:51	23	02:29	21	23:03
2015	20	22:45	21	16:38	23	08:20	22	04:48
2016	20	04:30	20	22:34	22	14:21	21	10:44
2017	20	10:28	21	04:24	22	20:02	21	16:28
2018	20	16:15	21	10:07	23	01:54	21	22:23

3.6.3 Transferencia de momento por el viento

En este modelo el viento transmite momento horizontal en la dirección vertical z debido a la tensión cortante o de cizalladura que ejerce en la superficie marina, lo cual se representa por la tensión \mathcal{T} en las soluciones (3.14). Esta se calcula mediante:

$$\mathcal{T} = \rho_a C_D U_{10}^2, \quad (3.17)$$

donde:

ρ_a : densidad del aire (1.3 kg/m³)

C_D : coeficiente de arrastre

U_{10} : velocidad del viento a 10m sobre la superficie del mar.

Respecto a U_{10} , se usó el promedio planetario: 7,4 m/s (*Stewart, 2006*). De acuerdo a la Figura 4.6 de esta referencia, para esa velocidad el coeficiente de arrastre es de 0,001 aproximadamente.

3.6.4 Difusividad de Remolino para el Momento (A_M) y Viscosidad (ν_M)

Estos parámetros son muy importantes, ya que influyen en la transferencia de momento en la dirección vertical, y por ende en el régimen de corriente marina que se establece. Los valores tomados son:

ν_M : $1,34 \cdot 10^{-5}$ m²/s (*Mellor and Durbin, 1975*)

A_M : $1,3 \cdot 10^{-4}$ m²/s; difusividad media de remolinos (*Stewart, 2006*)

3.6.5 Patrón de Corrientes Marinas obtenido

Con los datos anteriores se procedió a evaluar las soluciones (3.12) para las velocidades. Para ello, al factor de calibración f se le asignó un valor tal que reprodujera la velocidad promedio en la superficie del Golfo de Ana María, la cual se tomó como 0,15m/s; según datos reportados en (*Arriaza et al., 2008*). En la Tabla 6 y la Figura 2 se muestran las velocidades obtenidas, para el equinoccio de verano (22/septiembre), por ser la fecha más cercana a la campaña de muestreo cuyos datos se utilizaron en (*Alvarez-Salgueiro, 2015*). El patrón de velocidades obtenido para las otras fechas consideradas es similar.

Tabla 6: Velocidades de las corrientes marinas a diferentes profundidades

u y v; cm/s	z; m
15,0	0
12,4	-2
9,74	-4
7,10	-6
4,47	-8
1,84	-10
0,00	-11,4

Este patrón de velocidades es típico de los regímenes estacionarios de circulación de fluidos, e indica que los términos dependientes del tiempo (los de la serie) son muy pequeños respecto al término independiente del tiempo. Este patrón se ha observado con frecuencia en la naturaleza, patrones más complejos que reflejen una circulación más compleja podrían obtenerse considerando la difusividad de remolino y la viscosidad como funciones y no como constantes, lo cual será considerado en estudios posteriores.

Figura 2: Velocidades de las corrientes marinas a diferentes profundidades

La Figura 2 muestra como a mayor profundidad las velocidades de las corrientes van a ir disminuyendo hasta tender a cero a 11,4m aproximadamente, lo cual es un resultado bastante realista debido a que en la superficie es donde mayor velocidad tienen las corrientes dada la interacción del viento con esta, y cerca del fondo tienden a cero por la interacción de la corriente con este.

3.6.6 Introducción de parámetros radiacionales mediante el modelo de transporte radiativo COART

La evaluación de la solución de la temperatura (3.15) requiere de la introducción de parámetros radiacionales, tales como la irradiancia I_0 en la superficie del océano, en la banda PAR. Para esto se propone el uso de soluciones numéricas de la ecuación de transporte radiativo (2.17) mediante el modelo COART.

La Tabla 7 muestra la obtención de la irradiancia PAR (I_0) en la superficie del Golfo de Ana María. Para esto, se consideró un tipo tropical de atmósfera, despreciándose los aerosoles en esta primera aproximación, y la velocidad del viento, el promedio planetario mencionado es 7,4m/s. Los parámetros relacionados con el océano se acercan más a las especificidades del Golfo de Ana María. La profundidad promedio es 11,4m, reportada anteriormente. En cuanto a la concentración de clorofila, se utilizó el valor medio aproximado que sugiere la inspección visual de la fotografía de un satélite de observación marina de la NASA (Figura 3). Las otras magnitudes que se introdujeron, el coeficiente de dispersión y el albedo del fondo, fueron las típicas de los ambientes costeros.

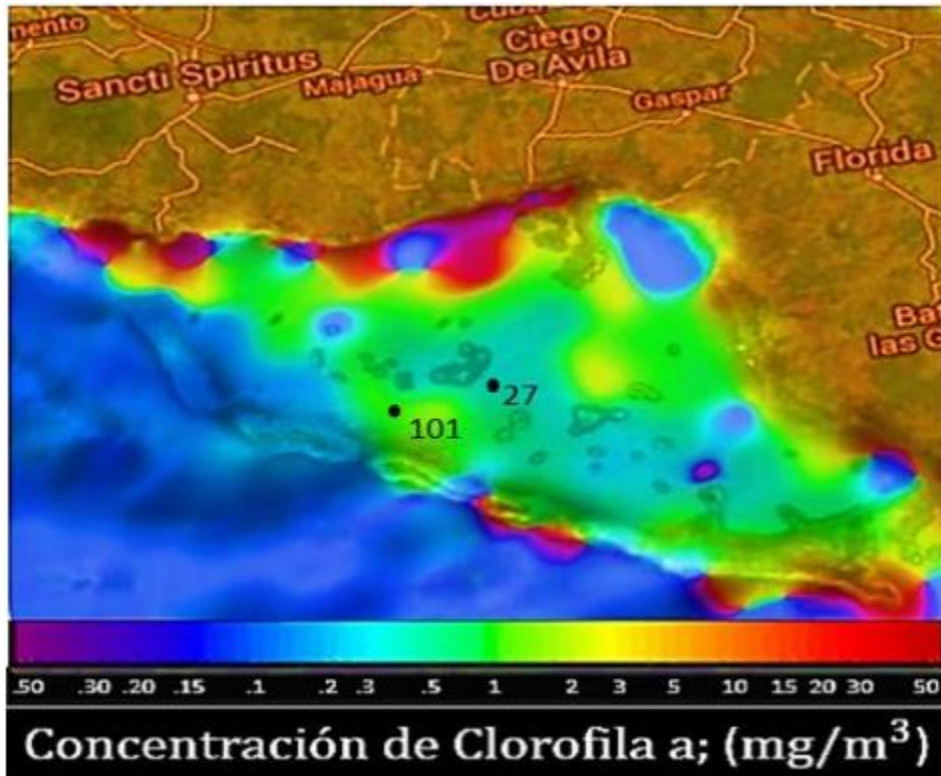


Figura 3: Imágenes de concentración de clorofila Chl-a (octubre 2011), obtenidas por el sensor SeaWiFS (<http://oceancolor.gsfc.nasa.gov/cgi/level3.pl>)

De manera general, con el modelo COART se pueden obtener muchas magnitudes ópticas tanto en atmósfera como en océano, como se muestra en la Tabla 7 (que en este caso resalta el valor de I_0 por su utilidad para evaluar la temperatura). Para estudios posteriores se propone la obtención de campos de luz subacuáticos, lo cual puede ser base para la estimación de tasas de fotosíntesis de productores primarios, los cuales consumen fósforo y por tanto influyen en su dinámica. Por tanto, COART también servirá para el correspondiente acople de este modelo del fósforo a un modelo ecológico.

Tabla 7: Obtención de la irradiancia PAR (I_0) en la superficie del Golfo de Ana María

Atmospheric profile: Tropical
 Boundary layer aerosol model: No boundary layer aerosol
 Stratospheric aerosol model: No stratospheric layer aerosol
 Wind speed (m/s) = 7.4
 Ocean depth (m) = 11.4
 Chl (mg/m³) = 1.0
 Ocean particle scattering function: Petzold coastal water(bb/b=0.013)
 Bottom surface albedo = 0.1

WVL1 (um)	WVL2	SZA	H(km) (-m)	Dif_Down	Dir_Down	TotalDown	Total_Up	Up/Down
0.400	0.700	35.0	100.000	0.000E+00	4.315E+02	4.315E+02	4.383E+01	0.1016
0.400	0.700	35.0	10.000	1.101E+01	4.063E+02	4.173E+02	3.751E+01	0.0899
0.400	0.700	35.0	0.000	3.144E+01	3.583E+02	3.898E+02	1.677E+01	0.0430
0.400	0.700	35.0	-5.000	1.501E+02	1.188E+01	1.620E+02	7.972E+00	0.0492

CONCLUSIONES

Se han presentado las bases conceptuales para la elaboración de un modelo de la dinámica del fósforo en los ecosistemas costeros cubanos.

Para el caso 0-dimensional, se obtuvo una solución analítica lineal al complicado modelo presentado en (Ji, 2008). Esta solución puede representar situaciones en los ecosistemas en escalas temporales del orden de los días, pero es de esperar que la mayor variabilidad que implica el cambio de estaciones (lluvia-sequía) responda a soluciones más complicadas.

Posteriormente, se presentó un modelo 1-dimensional con la inclusión de la variable espacial vertical, en el contexto de un modelo termo-hidrodinámico acoplado a un modelo de transferencia radiativa en atmósfera y océano. Se obtuvieron las soluciones analíticas del correspondiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales y se comprobó un buen comportamiento de estas desde el punto de vista matemático.

Se comenzó el análisis de la aplicabilidad física de las mencionadas soluciones, mediante la aplicación al Golfo de Ana María como caso de estudio, proponiéndose perspectivas para hacer el modelo 1-dimensional más abarcador, sobre todo mediante el acople con un modelo ecológico de productores primarios, los cuales consumen fósforo y por ende influyen en la dinámica de este.

RECOMENDACIONES

- Investigar con mayor profundidad la aplicabilidad de las soluciones obtenidas para el modelo 1-dimensional.
- Investigar el efecto de la inclusión de difusividades de remolino y viscosidad como funciones y no como constantes.
- Acoplar al modelo 1-dimensional un modelo ecológico para incluir los efectos bióticos en la dinámica del fósforo.
- Extender el estudio a aguas estuarinas y a sistemas acuáticos continentales (agua dulce).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abell, J.M., Ozkundakci, D., Hamilton, D.P., 2010. Nitrogen and phosphorus limitation of phytoplankton growth in New Zealand Lakes: implications for eutrophication control. *Ecosystems* 13 (7), 966-977.
- Allen, J.I., Clarke, K.R., 2007. Effects of demersal trawling on ecosystem functioning in the North Sea: a modelling study. *Mar. Ecol. Prog. Ser.* 336, 63-75
- Alvarez-Salgueiro, J. 2015. Habitabilidad Primaria del Fitoplancton en el Golfo de Ana María. Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas.
- Arriaza, L., Simanca, J., Rodas, L., Lorenzo, S., Hernández, M., Linares, E. O., Milian, D. & Romero, P. 2008. Corrientes marinas estimadas en la plataforma suroriental cubana.
- Baldwin, D., Mitchell, A., Olley, J., 2002. PollutanteSediment interactions: sorption, reactivity and transport of phosphorus. In: P., H., Jarvis, S. (Eds.), *Agriculture, Hydrology, and Water Quality*. CABI Publishing, Wallingford, pp. 265-280
- Baldwin, D.S., 2013. Organic phosphorus in the aquatic environment. *Environ. Chem.* 10 (6), 439-454
- Baldwin, D.S., Mitchell, A.M., 2000. The effects of drying and re-flooding on the sediment and soil nutrient dynamics of lowland river-floodplain systems: a synthesis. *Regul. Rivers-Res. Manag.* 16 (5), 457-467.
- Baldwin, D.S., Mitchell, A.M., Rees, G.N., 2000. The effects of in situ drying on sediment-phosphate interactions in sediments from an old wetland. *Hydrobiologia* 431 (1), 3-12
- Baretta-Bekker, J., Baretta, J., Ebenhöh, W., 1997. Microbial dynamics in the marine ecosystem model ERSEM II with decoupled carbon assimilation and nutrient uptake. *J. Sea Res.* 38 (3), 195-211
- Beck, M.B., 1987. Water-quality modeling-a review of the analysis of uncertainty. *Water Resour. Res.* 23 (8), 1393-1442

- Bjorkman, K.M., Karl, D.M., 2005. Presence of dissolved nucleotides in the North Pacific subtropical Gyre and their role in cycling of dissolved organic phosphorus. *Aquat. Microb. Ecol.* 39 (2), 193-203
- Bruce, L.C., Hamilton, D., Imberger, J., Gal, G., Gophen, M., Zohary, T., Hambright, K.D., 2006. A numerical simulation of the role of zooplankton in C, N and P cycling in Lake Kinneret, Israel. *Ecol. Model.* 193 (3-4), 412-436
- Burger, D.F., Hamilton, D.P., Pilditch, C.A., 2008. Modelling the relative importance of internal and external nutrient loads on water column nutrient concentrations and phytoplankton biomass in a shallow polymictic lake. *Ecol. Model.* 211 (3-4), 411-423.
- Butenschon, M., Zavatarelli, M., Vichi, M., 2012. Sensitivity of a marine coupled physical biogeochemical model to time resolution, integration scheme and time splitting method. *Ocean. Model.* 52-53, 36-53
- Campbell, I.C., 1978. Inputs and outputs of water and phosphorus from Four Victorian catchments. *Mar. Freshw. Res.* 29 (5), 577
- Cardenas, M.B., Cook, P.L.M., Jiang, H.S., Traykovski, P., 2008. Constraining denitrification in permeable wave-influenced marine sediment using linked hydrodynamic and biogeochemical modeling. *Earth Planet. Sci. Lett.* 275 (1-2), 127-137
- Cerco, C.F., 2000. Phytoplankton kinetics in the Chesapeake Bay eutrophication model. *Water Qual. Ecosyst. Model.* 1 (1), 5-49
- Cerco, C.F., Noel, M.R., 2013. Twenty-one-year simulation of Chesapeake Bay water quality using the Ce-Qual-Icm eutrophication model. *J. Am. Water Resour. Assoc.* 49 (5), 1119-1133
- Chavan, P.V., Dennett, K.E., 2008. Wetland simulation model for nitrogen, phosphorus, and sediments retention in constructed wetlands. *Water Air Soil. Pollut.* 187 (1-4), 109-118
- Cole, T.M., Wells, S.A., 2008. CE-QUAL-W2: A Two-dimensional, Laterally Averaged, Hydrodynamic and Water Quality Model, Version 3.2. U.S. Army Corps of Engineers
- Cotner, J.B., Wetzel, R.G., 1992. Uptake of dissolved inorganic and organic phosphorus-compounds by phytoplankton and Bacterioplankton. *Limnol. Oceanogr.* 37 (2), 232-243

de Boer, W.F., 2007. Seagrass-sediment interactions, positive feedbacks and critical thresholds for occurrence: a review. *Hydrobiologia* 591, 5-24

Eilola, K., Meier, H.E.M., Almroth, E., 2009. On the dynamics of oxygen, phosphorus and cyanobacteria in the Baltic Sea; a model study. *J. Mar. Syst.* 75 (1-2), 163-184

Elgoltz, L., 1983. Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional. Editorial Mir. Moscú, 3^{ra} edición.

Elliott, J.A., Reynolds, C.S., Irish, T.E., 2000. The diversity and succession of phytoplankton communities in disturbance-free environments, using the model PROTECH. *Arch. für Hydrobiol.* 149 (2), 241-258

Elser, J.J., Marzolf, E.R., Goldman, C.R., 1990. Phosphorus and nitrogen limitation of phytoplankton growth in the fresh-waters of North-American review and critique of experimental enrichments. *Can. J. Fish. Aquatic Sci.* 47 (7), 1468-1477

Even, S., Thouvenin, B., Bacq, N., Billen, G., Garnier, J., Guezennec, L., Blanc, S., Ficht, A. & Le Hir, P. 2007. An integrated modelling approach to forecast the impact of human pressure in the Seine estuary. *Hydrobiologia*, 588, 13e29.

Fram, J.P., Stewart, H.L., Brzezinski, M.A., Gaylord, B., Reed, D.C., Williams, S.L., MacIntyre, S., 2008. Physical pathways and utilization of nitrate supply to the giant kelp, *Macrocystis pyrifera*. *Limnol. Oceanogr.* 53 (4), 1589-1603

Gal, G., Hipsey, M.R., Parparov, A., Wagner, U., Makler, V., Zohary, T., 2009. Implementation of ecological modeling as an effective management and investigation tool: Lake Kinneret as a case study. *Ecol. Model.* 220 (13-14), 1697-1718

Garnier, J., Nemery, J., Billen, G., They, S., 2005. Nutrient dynamics and control of eutrophication in the Marne River system: modelling the role of exchangeable phosphorus. *J. Hydrol.* 304 (1-4), 397-412

González-De Zayas, R., Lestayo, J.A., Merino-Ibarra, M., Castillo, F.S. (2012): Condiciones hidrodinámicas recientes de la zona central del golfo de Ana María. Cuba. *Rev. Invest. Mar.* 32(2), pp. 9-14.

- González-De Zayas, R., Zúñiga, A., Camejo, O., Batista, L., Cárdenas, R. (2006): Atributos físicos del ecosistema Jardines de la Reina. En: Ecosistemas Costeros: Biodiversidad y manejo de recursos naturales. Sección II. Ecosistema Jardines de la Reina. CIEC. Editorial CUJAE.
- Håkanson, L., Boulion, V.V., 2002. The Lake Foodweb: Modelling Predation and Abiotic/biotic Interactions. Backhuys Publishers
- Hakanson, L., Eklund, J.M., 2007. A dynamic mass balance model for phosphorus fluxes and concentrations in coastal areas. *Ecol. Res.* 22 (2), 296-320
- Hakanson, L., Bryhn, A.C., 2008. Modeling the foodweb in coastal areas: a case study of Ringkobing Fjord, Denmark. *Ecol. Res.* 23 (2), 421-444
- Hearn, C.J., Robson, B.J., 2001. Inter-annual variability of bottom hypoxia in shallow Mediterranean estuaries. *Estuar. Coast. Shelf Sci.* 52 (5), 643-657
- Hipsey, M.R., Busch, B.D., 2012. Lower Lakes Water Quality Recovery Dynamics
- Imboden, D.M., 1974. Phosphorus model of Lake eutrophication. *Limnol. Oceanogr.* 19 (2), 297-304
- Ji, Y. 2007. Analysis of water quality in shallow lakes with a two-dimensional flowsediment model. *J. Hydrodyn.. Ser. B*, 19, 501e508.
- Ji, Zheng-Gang.: Hydrodynamics and Water Quality. Wiley Interscience, 2008
- Jia, H.F., Zhang, Y.S., Guo, Y., 2010. The development of a multi-species algal codynamic model for urban surface water systems and its application. *Ecol. Model.* 221 (15), 1831-1838
- Jin, Z. 2017. Coupled Ocean and Atmosphere Radiative Transfer (COART). Disponible en: <https://cloudsgate2.larc.nasa.gov/jin/coart.html>, online.
- Jones, J.B., Holmes, R.M., 1996. Surface-subsurface interactions in stream ecosystems. *Trends Ecol. Evol.* 11 (6), 239-242
- Klausmeier, C.A., Litchman, E., Daufresne, T., Levin, S.A., 2004. Optimal nitrogen-tophosphorus stoichiometry of phytoplankton. *Nature* 429 (6988), 171-174.

Klausmeier, C.A., Litchman, E., Daufresne, T., Levin, S.A., 2008. Phytoplankton stoichiometry. *Ecol. Res.* 23 (3), 479-485

Komatsu, E., Fukushima, T., Shiraishi, H., 2006. Modeling of P-dynamics and algal growth in a stratified reservoir mechanisms of P-cycle in water and interaction between overlying water and sediment. *Ecol. Model.* 197 (3), 331-349

Kühn, W., & Radach, G. (1997). A one-dimensional physical-biological model study of the pelagic nitrogen cycling during the spring bloom in the northern North Sea (FLEX '76). *Journal of Marine Research*, 55, 687–734. <https://doi.org/10.1357/0022240973224229>

Kurup, G. R., Hamilton, D. P. & Patterson, J. C. 1998. Modelling the effect of seasonal flow variations on the position of salt wedge in a microtidal estuary. *Estuar. Coast. Shelf Sci*, 47, 191e208.

Larsen, J., Mohn, C., Timmermann, K., 2013. A novel model approach to bridge the gap between box models and classic 3D models in estuarine systems. *Ecol. Model.* 266 (0), 19-29

Lazzari, P., Teruzzi, A., Salon, S., Campagna, S., Calonaci, C., Colella, S., Tonani, M., Crise, A., 2010. Pre-operational short-term forecasts for Mediterranean Sea biogeochemistry. *Ocean. Sci.* 6 (1), 25-39

Loeb, R., Lamers, L.P.M., Roelofs, J.G.M., 2008. Prediction of phosphorus mobilization in inundated floodplain soils. *Environ. Pollut.* 156 (2), 325-331

McGechan, M., Lewis, D., 2002. SWdsoil and water: sorption of phosphorus by soil, part 1: principles, equations and models. *Biosyst. Eng.* 82 (1), 1-24

Mckelvie, I.D., 2007. Separation, preconcentration and speciation of organic phosphorus in environmental samples. In: Turner, B.L., Frossard, E., Baldwin, D.S. (Eds.), *Organic Phosphorus in the Environment*. CABI, Cambridge, MA, USA, pp. 261-278

Mellor, G. L. & Durbin, P. A. 1975. The structure and dynamics of the ocean surface mixed layer. *J. Phys. Oceanogr.* 5, 18-728.

Mellor, G. L. & Yamada, T. 1974. A hierarchy of turbulence closure models for planetary boundary layers. *J. Appl. Meteor.*, 13, 1791-1806.

- Mellor, G. L. & Yamada, T. 1982. Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems. *Rev. Geophys. Space Phys.*, 20, 851-875
- Montalvo, J. F. and Loza, S. (2006) 'Serie Oceanológica. No. 2, 2006 ISSN 2072-800x', (2), pp. 1-2.
- Park, K., Kuo, A.Y., 1996. A multi-step computation scheme: decoupling kinetic processes from physical transport in water quality models. *Water Res.* 30 (10), 2255-2264
- Paster, A., Bolster, D., Benson, D.A., 2013. Particle tracking and the diffusion-reaction equation. *Water Resour. Res.* 49 (1), 1-6
- Petihakis, G., Triantafyllou, G., Allen, I.J., Hoteit, I., Dounas, C., 2002. Modelling the spatial and temporal variability of the Cretan Sea ecosystem. *J. Mar. Syst.* 36 (3-4), 173-196
- Protection, C. F. W. 2001. *The Simple Method to Calculate Urban Stormwater Loads*. New York State Stormwater Management Design Manual Ellicott City, MD.
<https://www.hydrocad.net/pdf/NY-Simple-Method.pdf>
- Reed, D.C., Slomp, C.P., Gustafsson, B.G., 2011. Sedimentary phosphorus dynamics and the evolution of bottom-water hypoxia: a coupled benthic-pelagic model of a coastal system. *Limnol. Oceanogr.* 56 (3), 1075-1092
- Robson, B.J., 2010. Howflow and nutrients affect plants and algae in the Daly River, N.T. In: Swayne, D.A., Yang, W., Voinov, A.A., Rizzoli, A., Filatova, T. (Eds.), *International Environmental Modelling and Software Society (iEMSs) 2010 International Congress on Environmental Modelling and Software*. International Environmental Modelling and Software Society (iEMSs), Ottawah, Canada
- Robson, B.J., 2014. State of the art in modelling of phosphorus in aquatic systems: Review, criticisms and commentary. *Environmental Modelling & Software*, 61, 339-359.
- Robson, B.J., 2014. When do aquatic systems models provide useful predictions, what is changing, and what is next? *Environ. Model. Softw* 61, 287e296.<http://dx.doi.org/10.1016/j.envsoft.2014.01.009>

- Robson, B.J., Hamilton, D.P., 2004. Three-dimensional modelling of a *Microcystis* bloom event in the Swan River estuary, Western Australia. *Ecol. Model.* 174 (1-2), 203-222
- Robson, B.J., Hamilton, D.P., Webster, I.T., Chan, T., 2008. Ten steps applied to development and evaluation of process-based biogeochemical models of estuaries. *Environ. Model. Softw.* 23 (4), 369-384
- Rocha, C., 2008. Sandy sediments as active biogeochemical reactors: compound cycling in the fast lane. *Aquat. Microb. Ecol.* 53 (1), 119-127
- Siuda, W., Chrost, R.J., 2000. Concentration and susceptibility of dissolved DNA for enzyme degradation in lake water - some methodological remarks. *Aquat. Microb. Ecol.* 21 (2), 195-201.
- Siuda, W., Chrost, R.J., 2001. Utilization of selected dissolved organic phosphorus compounds by bacteria in lake water under non-limiting orthophosphate conditions. *Pol. J. Environ. Stud.* 10 (6), 475-483
- Skerratt, J., Wild-Allen, K., Rizwi, F., Whitehead, J., Coughanowr, C., 2013. Use of a high resolution 3D fully coupled hydrodynamic, sediment and biogeochemical model to understand estuarine nutrient dynamics under various water quality scenarios. *Ocean. Coast. Manag.* 83, 52-66
- Spillman, C.M., Imberger, J., Hamilton, D.P., Hipsey, M.R., Romero, J.R., 2007. Modelling the effects of Po River discharge, internal nutrient cycling and hydrodynamics on biogeochemistry of the Northern Adriatic Sea. *J. Mar. Syst.* 68 (1-2), 167-200
- Stewart, R. H. 2006. *Introduction To Physical Oceanography*, Texas A & M University.
- Tijonov, A. and Samarsky, A. (1972) *ecuaciones de la fisica matematica*. MirMoscu.
- Tolson, B.A., Shoemaker, C.A., 2007. Cannonsville reservoir watershed SWAT2000 model development, calibration and validation. *J. Hydrol.* 337 (1-2), 68-86
- Trolle, D., Hamilton, D.P., Pilditch, C.A., Duggan, I.C., Jeppesen, E., 2011. Predicting the effects of climate change on trophic status of three morphologically varying lakes: implications for lake restoration and management. *Environ. Model. Softw.* 26 (4), 354-370

Trolle, D., Skovgaard, H. & Jeppsen, E. 2008. The water framework directive: setting the phosphorus loading target for a deep lake in Denmark using the 1D lake ecosystem model DYRESMeCAEDYM. *Ecol. Model.*, 219 138e152.

Touchette, B.W., Burkholder, J.M., 2000. Review of nitrogen and phosphorus metabolism in seagrasses. *J. Exp. Mar. Biol. Ecol.* 250 (1-2), 133-167

Touchette, B.W., Burkholder, J.M., 2007. Effects of temperature and nitrate on phosphomonoesterase activities between carbon source and sink tissues in *Zostera marina* L. *J. Exp. Mar. Biol. Ecol.* 342 (2), 313-324

Townsend, S.A., Padovan, A.V., 2009. A model to predict the response of the benthic macroalga spirogyra to reduced baseflow in the tropical Australia. *River Res. Appl.* 25 (9), 1193-1203

Van Cappellen, P., Meile, C., Koretsky, C., 2005. Irrigation in early diagenetic models: from one-dimensional mass transfer coefficients to multi-dimensional, ecologically-based models. *Geochim. Cosmochim. Acta* 69 (10), A112

Vanliere, L., Mur, L.R., 1982. The influence of simulated groundwater-movement on the phosphorus release from sediments, as measured in a continuous-flow system. *Hydrobiologia* 91-2 (Jul), 511-518

Werner, U., Bird, P., Wild, C., Ferdelman, T., Polerecky, L., Eickert, G., Jonstone, R., Hoegh-Guldberg, O., de Beer, D., 2006. Spatial patterns of aerobic and anaerobic mineralization rates and oxygen penetration dynamics in coral reef sediments. *Mar. Ecol. Prog. Ser.* 309, 93-105

Wikipedia, L. E. L. Equinoccio. Disponible en: <https://es.wikipedia.org/wiki/Equinoccio>, <consultada: 28 may 2017>

Wild-Allen, K., Herzfeld, M., Thompson, P.A., Rosebrock, U., Parslow, J., Volkman, J.K., 2010. Applied coastal biogeochemical modelling to quantify the environmental impact of fish farm nutrients and inform managers. *J. Mar. Syst.* 81 (1-2), 134-147

Wild-Allen, K., Thompson, P.A., Volkman, J.K., Parslow, J., 2011. Use of a coastal biogeochemical model to select environmental monitoring sites. *J. Mar. Syst.* 88 (1), 120-127

Zhurbas, V., Laanemets, J. & Vahtera, E. 2008. Modeling of the mesoscale structure of coupled upwelling/downwelling events and the related input of nutrients to the upper mixed layer in the Gulf of Finland, Baltic Sea. *J. Geophys. Res.-Oceans* 113.