



FACULTAD DE MATEMÁTICA, FÍSICA Y COMPUTACIÓN  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**Expansión acelerada del universo: teorías  $f(R)$  y  
energía oscura**

Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en  
Ciencias Físicas

Autor: Lic. Yoelsy Leyva Nodal

Santa Clara, Cuba  
2009



FACULTAD DE MATEMÁTICA, FÍSICA Y COMPUTACIÓN  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**Expansión acelerada del universo: teorías  $f(R)$  y  
energía oscura**

Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en  
Ciencias Físicas

Autor: Lic. Yoelsy Leyva Nodal  
Tutor: Dr. Rolando Cárdenas Ortiz

Santa Clara, Cuba  
2009

“... el sentimiento es también  
un elemento de la ciencia”

José Martí  
OC, 4, p-250

# Agradecimientos

“Cuando bebas agua,  
recuerda la fuente.”  
Proverbio chino

En primer lugar quiero expresarle mi agradecimiento a mi tutor Dr. Rolando Cárdenas, por haber compartido conmigo sus inquietudes relativas al cosmos y aceptarme como su alumno de doctorado. Por ser paciente y solidario.

Al Dr. Israel Quirós por ser el creador del Grupo de Gravitación y Cosmología, donde, gracias a su tesón y sabiduría, nos hemos formados todos sus miembros. Su ejemplo de dedicación a la investigación, muchas veces a costa de enormes sacrificios personales, su ética profesional y su desprendimiento natural para compartir sus ideas y proyectos me han hecho crecer como ser humano e investigador. Al Dr. Tamé González, por su presión permanente para hacerme avanzar en la investigación. Por sus consejos y ayuda en cada momento que lo he requerido. A Osmel Martín, Dania González y Yunelsy Nápoles por ser todos una verdadera banda de hermanos.

A los colegas del ICTP, en Trieste, Italia, por permitirme estar en tres ocasiones expuesto a la influencia de las ideas de otros muchos colegas de otras partes del mundo y, al mismo tiempo, poder compartir mis modestas opiniones sobre algunos de los problemas de la Cosmología. Mi interés actual por la formación de las grandes estructuras del universo nació allí, durante una charla del Profesor Simon White.

A los colegas mexicanos Dr. Alfredo Herrera y Dr. Ulises Nucamendi por invitarme y recibirme, en el Instituto de Física y Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, durante los días del *III International Meeting on Gravitation and Cosmology*. Las charlas de trabajo que sostuvimos fueron importantes para cambiar mi visión de varios aspectos de la Cosmología.

Al Dr. Vincenzo Cardone, de la Università di Torino, Italia, por ser un paciente colaborador en la distancia.

A los Profesores Alan Coley, de la Universidad de Dalhousie, Canadá, y Tonatiuh Matos, del CINVESTAV, México, por la ayuda desinteresada en pos de fortalecer el desarrollo del Grupo de Gravitación y Cosmología.

Al Profesor Carlos Cruz Inclán, del CEADEN, Habana, por revelarme la belleza que hay escondida en la Física. Fue, más que un mentor, un amigo y un padre durante el último año de la Licenciatura en Física Nuclear. De él aprendí que las grandes metas se logran a base de entrega y sacrificio.

A mis Padres porque sin ellos nunca hubiese llegado a esta meta, que no será la última. A mis suegros: Mary y Langué, por su preocupación constante. A mi *niña* Cora por tantos momentos de alegría. Y finalmente a mi esposa Mariela, por su amor y apoyo incondicional y por ser la maravillosa mujer que es.

A mi esposa Mariela,  
a mi *niña* Cora.

A mis Padres por tantos  
desvelos y sacrificios...

## Lista de Publicaciones

Los materiales originales en los que está basada esta Tesis han sido publicados en los siguientes artículos:

### Capítulo 3

- V. F. Cardone, R. P. Cardenas, and **Y. Leyva Nodal**, “Halting eternal acceleration with an effective negative cosmological constant,” *Class. Quant. Grav.* **25** (2008) 135010, [arXiv:0805.1267 \[astro-ph\]](#).
- **Y. Leyva Nodal**, V. F. Cardone, and R. P. Cardenas, “Halting eternal acceleration with a negative cosmological constant,” *AIP Conf. Proc.* **1083** (2008) 128–135.

### Capítulo 4

- I. Quiros, **Y. Leyva**, and Y. Napoles, “A Note on de Sitter Embedding of  $f(R)$  Theories,” *Phys. Rev.* **D80** (2009) 024022, [arXiv:0906.1190 \[gr-qc\]](#).

### Capítulo 5

- T. Gonzalez, R. Cardenas, I. Quiros, and **Y. Leyva**, “Evolution of density perturbations in double exponential quintessence models,” *Astrophys. Space Sci.* **310** (2007) 13-18, [arXiv:0707.2097 \[astro-ph\]](#).
- **Y. Leyva**, R. Cardenas, and V. Cardone, “Quinstant Dark Energy Predictions for Structure Formation,” *Astrophys. Space Sci.* **323** (2009) 107, [arXiv:0906.3713 \[astro-ph\]](#).

Los resultados de estas publicaciones han sido presentados por el autor en los siguientes Eventos Internacionales:

- *Workshop on Nuclear Physics*, Habana, Cuba. Febrero de 2007. **Charla Invitada: Dark Energy or Modified Gravity. Poster: Influence of Dark Energy on Structure Formation.**
- *III International Meeting on Gravitation and Cosmology*, IFM-UMSNH, Morelia, México. Mayo de 2008. **Charla Invitada: Halting eternal acceleration with negative cosmological constant.**

Otras publicaciones del autor relacionadas con el tema de esta Tesis::

- **Y. Leyva**, D. Gonzalez, T. Gonzalez, T. Matos, and I. Quiros, “Dynamics of a Self-interacting Scalar Field Trapped in the Braneworld for a Wide Variety of Self-interaction Potentials,” *Phys. Rev.* **D80** (2009) 044026,
- R. Cardenas, T. Gonzalez, **Y. Leyva**, O. Martin, and I. Quiros, “A model of the universe including dark energy accounted for by both a quintessence field and a (negative) cosmological constant,” *Phys. Rev.* **D67** (2003) 083501, [arXiv:astro-ph/0206315](#).

- O. Arias, T. Gonzalez, **Y. Leyva**, and I. Quiros, “Exact scaling solutions in normal and Brans-Dicke models of dark energy,” *Class. Quant. Grav.* **20** (2003) 2563, [arXiv:gr-qc/0307016](#).

# SÍNTESIS

En este trabajo se estudian modelos del Universo con inclusión de energía oscura, tanto del tipo quintaesencia como energía oscura compuesta tipo quintante. Los modelos de energía oscura se estudian desde el punto de vista de la formación de las estructuras del Universo. Con ayuda de esta prueba observacional se logra restringir el espacio de los parámetros libres de dos modelos de quintaesencia. Además se demuestra que el modelo quintante tiene predicciones satisfactorias en el régimen lineal pero falla en las relativas al régimen no lineal, especialmente en el conteo del número de cúmulos de galaxias, entrando en contradicción con el modelo jerárquico de formación de estructuras en el Universo.

Se investiga la equivalencia entre los modelos de energía oscura y de gravedad modificada tipo  $f(R)$  mediante el modelo quintante. Las teorías  $f(R)$  son estudiadas en detalle desde el punto de vista de la existencia y estabilidad de las soluciones de Sitter. Se demuestra que una amplia variedad de modelos  $f(R)$  no son capaces de tener soluciones de Sitter estables y que existe una clase de estos modelos que pueden describir, en un marco unificado, la inflación temprana y la expansión acelerada, presente y futura, del Universo.

# ÍNDICE

<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
<b>2. COSMOLOGÍA EN POCAS PALABRAS</b>	<b>7</b>
2.1. Cosmología del Big Bang . . . . .	7
2.2. Teoría General de la Relatividad vs descripción del Universo . . . . .	13
2.3. Modelos de la expansión del Universo con inclusión de la energía oscura . .	15
<b>3. TEORÍAS DE GRAVEDAD MODIFICADA</b>	<b>19</b>
3.1. Teorías escalares-tensoriales de gravitación . . . . .	19
3.1.1. Ecuaciones del Campo . . . . .	21
3.2. Teorías $f(R)$ . . . . .	21
3.2.1. Ecuaciones del Campo . . . . .	23
3.3. Mundos Branas . . . . .	25
3.3.1. Modelos Randall-Sundrum 2 ( $RS2$ ) . . . . .	26
3.3.2. Modelos de Dvali-Gabadadze-Porrati ( $DGP$ ) . . . . .	29
<b>4. ACCELERACIÓN DEL UNIVERSO Y TEORÍAS <math>f(R)</math></b>	<b>32</b>
4.1. Ecuaciones y formalismo básico . . . . .	34
4.2. Condiciones de Frontera . . . . .	36
4.3. Reconstrucción del $f(R)$ . . . . .	37

---

4.4. Conclusiones Parciales . . . . .	40
<b>5. ESTABILIDAD DE LAS SOLUCIONES DE SITTER EN LAS TEORÍAS <math>f(R)</math></b>	<b>41</b>
5.1. Condiciones de frontera . . . . .	42
5.2. La cuestión de la estabilidad . . . . .	44
5.3. Existencia y estabilidad de las soluciones de Sitter . . . . .	45
5.4. Teorías genéricas de $f(R)$ . . . . .	47
5.4.1. Potencias positivas de $R$ . . . . .	47
5.4.2. Potencias negativas de $R$ . . . . .	49
5.4.3. Potencias combinadas de $R$ . . . . .	51
5.5. Modificaciones de Dirac-Born-Infeld a la Relatividad General . . . . .	53
5.6. Consideraciones finales . . . . .	57
5.7. Conclusiones Parciales . . . . .	61
<b>6. FORMACIÓN DE ESTRUCTURAS</b>	<b>63</b>
6.1. Evolución de las perturbaciones de densidad en modelos de quintaesencia de doble exponencial . . . . .	64
6.1.1. Teoría de Einstein . . . . .	65
6.1.2. Modelo de Brans-Dicke(BD) . . . . .	66
6.1.3. Crecimiento lineal de las fluctuaciones . . . . .	68
6.2. Influencia de la energía oscura en la formación de estructuras . . . . .	72
6.2.1. Parametrización de la ecuación de estado . . . . .	73
6.2.2. Crecimiento lineal de las fluctuaciones . . . . .	76
6.2.3. Evolución no lineal de fluctuaciones esféricas . . . . .	79
6.2.3.1. Evolución hasta el punto de retorno . . . . .	81
6.2.3.2. Contraste de densidad para la virialización . . . . .	83
6.2.4. Conteo del número de clusters . . . . .	87

---

6.3. Conclusiones Parciales . . . . .	92
<b>7. CONCLUSIONES</b>	<b>93</b>
<b>8. RECOMENDACIONES</b>	<b>95</b>
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>96</b>
<b>A. AJUSTE ESTADÍSTICO DEL MODELO <math>f(R)</math></b>	<b>113</b>
<b>B. AJUSTE ESTADÍSTICO DE LA CURVA <math>w</math> vs <math>a</math></b>	<b>116</b>

# 1. INTRODUCCIÓN

La impresionante cantidad de datos astrofísicos que se han acumulado en los últimos 10 años han conducido hacia un nuevo paradigma cosmológico, de acuerdo con el cual, el universo es espacialmente plano y se halla en una fase de expansión acelerada. Fuertes evidencias en este sentido son el diagrama de Hubble de las Supernovas Ia [1, 2, 3] y las anisotropías observadas en la radiación cósmica de fondo [4, 5, 6]. Por otro lado, la abundancia de los cúmulos de galaxias [7, 8] y la fracción de masa de gas en ellos, restringen el parámetro adimensional de la densidad de materia ( $\Omega_m \sim 0,3$ ) conduciendo a la necesidad de una nueva componente con presión negativa para, al mismo tiempo, cerrar el universo ( $\Omega_m \approx 1$ ) y conducir su expansión acelerada. Esta nueva componente recibe el nombre de energía oscura.

La explicación más simple exige tomar en cuenta la constante cosmológica  $\Lambda$  [9, 10] y así de esta manera se obtiene el modelo  $\Lambda$ MOF (constante cosmológica + materia oscura fría). A pesar de ser el modelo que mejor ajusta la mayoría de los datos astrofísicos, el modelo  $\Lambda$ MOF tiene varios problemas teóricos.

Como respuesta a estos problemas, mucho interés ha sido dedicado a los modelos con energía de vacío dinámica, llamados *quintaesencia* [11, 12, 13]. Estos modelos típicamente involucran campos escalares con una clase de potenciales que le permiten, a la energía oscura, ser la componente dominante de la dinámica cósmica solo recientemente [14, 15,

16, 17, 18]. Otros candidatos para la energía oscura son, por ejemplo, el gas de Chaplygin [19, 20, 21], la K-esencia [22, 23, 24], etc. No obstante, los modelos de quintaesencia han sido, entre todos los posibles, los más estudiados.

En aras de obtener modelos de energía oscura viables, se requiere que la densidad de energía del campo escalar permanezca subdominante, durante los períodos donde dominan la radiación y la materia, emergiendo solamente para una época muy reciente de la historia del universo y siendo la responsable de la aceleración del universo.

Esta viabilidad ha sido estudiada desde el punto de vista de los sistemas dinámicos, estudiándose el comportamiento del sistema en los estados asintóticos. Los resultados obtenidos, en general, dependen de la forma del potencial del campo escalar [25, 26, 27, 28]. El primer caso de los modelos de quintaesencia, estudiado bajo esta óptica, fue el potencial exponencial [29], luego estos estudios se han extendido a modelos donde el campo escalar está acoplado de forma mínima y no mínima con el fluido de fondo, básicamente materia oscura [30]. Obteniéndose como resultado que los problemas básicos de la constante cosmológica pueden ser suavizados o eliminados para determinados tipos de modelos.

No obstante, como se mencionó anteriormente, existen una gran cantidad de modelos de energía oscura que en principio podrían ser viables. ¿Cómo discriminar entre todos los posibles miembros de esta fauna cósmica? Una forma, muy extendida y bien estudiada, de poder discernir entre que modelos de energía oscura predicen descripciones acertadas y cuales no, es comparar sus predicciones con las observaciones cosmológicas.

Estas observaciones se pueden dividir en dos grupos: las que dependen de la historia de la expansión y las que dependen de la historia de la formación de las grandes estructuras del universo. Entre ellas, las más usadas y de las cuales se espera más en un futuro inmediato son [31]:

- Supernovas Ia: esta es quizás la más usada y probada prueba que deben pasar los modelos de energía oscura. Se espera que en los próximos años se incremente el número de Supernovas Ia observadas en un orden de magnitud.
- Oscilaciones acústicas de los bariones: es una prueba relativamente reciente.
- Lentes gravitacionales: a través de esta prueba se observa como las estructuras evolucionan en el tiempo, aún cuando no es una prueba firmemente establecida se espera mucho de ella en el futuro.
- Conteos del número de cúmulos: esta prueba usa el conteo de la densidad del número de objetos colapsados, como los cúmulos de galaxias, para probar la dinámica de la formación de las estructuras del universo.

El desafío con estas pruebas observacionales es usarlas de forma combinada, tratando de restringir el espacio de los parámetros libres de los modelos bajo estudio. En este sentido queda mucho trabajo por hacer y hoy, diez años después de ser cambiado de forma radical el entendimiento sobre el estado presente y futuro de universo, no todos los modelos han sido puestos bajo la *lupa* de estas pruebas y por lo tanto, confirmados o descartados.

A pesar de los éxitos de la energía oscura, sus propiedades físicas aún no son muy conocidas a un nivel fundamental. De ella sólo conocemos que es una componente que no muestra capacidad de aglomeración y que es la responsable de la expansión acelerada del universo [32, 33]. Estas consideraciones han motivado un reciente interés hacia otras aproximaciones diferentes a la energía oscura.

¿Es la energía oscura o las modificaciones a las leyes de la gravedad? Quizás esta debió ser la primera pregunta por responder, pero sin dudas, es la más crucial.

En lugar de introducir una nueva y misteriosa componente, se ha sugerido que las leyes de la gravedad quizás no puedan ser aplicadas con precisión cuando son extrapoladas a

grandes escalas. La analogía es hecha frecuentemente a los esfuerzos, del siglo *XIX*, para explicar el salto del perihelio de Mercurio mediante la introducción de un planeta *oscuro* llamado Vulcan. Al final, la solución al problema fue realmente cambiar las leyes de la gravedad (de la newtoniana a la Relatividad General) en lugar de introducir una nueva componente en forma de planeta.

Numerosos modos de modificar la gravedad han sido considerados, pero todas estas teorías deben ser restringidas y ser capaces de recuperar a la Relatividad General en las escalas del sistema solar, donde esta última ha sido bien comprobada [34, 35, 36].

Una de las opciones para modificar la Relatividad General lo constituyen las llamadas teorías  $f(R)$  de gravedad modificada [37, 38, 39]. Estas formas están basadas en la introducción de correcciones al esquema tradicional de Einstein-Hilbert<sup>1</sup> y son capaces de explicar la aceleración cósmica de forma simple por el hecho que algunos términos subdominantes (como  $1/R$ ) se convierten en esenciales para curvaturas pequeñas conduciendo a la expansión actual.

Las teorías  $f(R)$  podrían además presentar una unificación natural de las fases de inflación del universo temprano y de aceleración actual y futura del universo gracias a los roles diferentes de términos gravitacionales que se hagan relevantes a pequeñas y grandes curvaturas.

**El objeto de esta investigación** es profundizar en el conocimiento del origen y la naturaleza de la expansión acelerada del universo desde la perspectiva de los modelos de energía oscura y de teorías  $f(R)$  de gravedad modificada, tratando de dar respuesta a las interrogantes antes formuladas.

Sobre esta base se formulan los siguientes **objetivos**:

- Estudiar las consecuencias de tomar en cuenta las condiciones de existencia y es-

---

<sup>1</sup>este tema es tratado con más profundidad en la sección (3).

tabilidad de las soluciones de Sitter en las teorías  $f(R)$  así como la equivalencia dinámica de estas teorías con los modelos de energía oscura.

- Investigar cómo el proceso de formación de estructuras, en sus regímenes lineal y no lineal, puede contribuir a discriminar entre diferentes modelos de energía oscura.

Teniendo en cuenta los objetivos anteriores se plantean las siguientes **hipótesis**:

- Si se selecciona una misma dinámica cósmica es posible construir una teoría  $f(R)$  equivalente a un modelo de energía oscura compuesta.
- El estudio de las condiciones de existencia y estabilidad de las soluciones de Sitter permiten discriminar entre teorías  $f(R)$  de gravedad modificada.
- Las predicciones relativas a la formación de las grandes estructuras del Universo permiten restringir el espacio de los parámetros libres de los modelos de energía oscura y discriminar entre modelos de energía oscura con predicciones similares relativas a la expansión del Universo.

Para trabajar las hipótesis planteadas se obtuvieron las ecuaciones del campo usando el Principio Variacional. Las soluciones de las ecuaciones de Friedmann se hallaron de forma numérica, seleccionando, de forma adecuada, las condiciones de frontera para cada modelo estudiado. Además se hizo uso de la Teoría de las Perturbaciones Cosmológicas para trabajar los regímenes lineales y no lineales en la evolución de las sobredensidades.

**La novedad** de esta investigación radica en los siguientes resultados:

- Se obtiene por primera vez una teoría  $f(R)$  a partir de una dinámica de un modelo de energía oscura compuesta (quintaesencia + constante cosmológica negativa), evaluándose, de este modo, los problemas asociados a la constante cosmológica negativa [40, 41].
- Se demuestra la existencia de una clase de modelos que exhiben una descripción

unificada de la evolución del Universo: inflación de tiempo temprano a expansión acelerada de tiempo tardío. También se demuestra que una amplia variedad de modelos no son capaces de exhibir soluciones de Sitter estables [42].

- Se refinan en buena medida el espacio de los parámetros libres de dos modelos de quintaesencia, ambos con potenciales doble exponenciales, basados en la Teoría de Einstein y de Brans-Dicke [43]. Se obtiene que un tercer modelo de energía oscura compuesta es capaz de reproducir, razonablemente bien, las predicciones de la formación de estructuras en su régimen lineal, pero falla en el régimen no lineal para corrimientos al rojo mayores que la unidad [44].

Esta Tesis está estructurada de la siguiente forma: En el Capítulos 1 se hace una breve revisión acerca del Modelo Cosmológico Estándar y de la Relatividad General. Una introducción a las teorías de gravedad modificada es desarrollada en el Capítulo 2. En el Capítulo 3 se deriva una teoría  $f(R)$  a partir de conocer la dinámica de un modelo de energía oscura compuesta. En el Capítulo 4 se hace un estudio de la existencia y estabilidad de las soluciones de Sitter para una amplia variedad de teorías  $f(R)$ . Finalmente, en el Capítulo 5 se estudian varios modelos de energía oscura desde la perspectiva de la formación de estructuras en el régimen lineal y no lineal. Las Conclusiones, Recomendaciones, Referencias Bibliográficas y Anexos se ubican a continuación.

## 2. COSMOLOGÍA EN POCAS PALABRAS

La comprensión de la génesis y evolución del Universo es uno de los grandes éxitos de la ciencia del siglo *XX*. Este conocimiento proviene de décadas de creativos experimentos y teorías. Los telescopios modernos en la tierra y en el espacio detectan la luz de galaxias alejadas millones de años luz de nosotros, mostrando como el Universo lucía cuando era joven. Los aceleradores de partículas prueban la física básica de las condiciones de altas energías del Universo temprano. Los satélites detectan la radiación cósmica de fondo, testigo sobreviviente de los estados iniciales de la expansión, suministrando una imagen del Universo en la mayor escala que podemos observar. Los mejores esfuerzos encaminados a explicar esta riqueza de datos es una teoría conocida como Modelo Cosmológico Estándar. En este Capítulo se introducen, brevemente, las bases fundamentales de la Cosmología.

### 2.1. Cosmología del Big Bang

En 1922 el teórico ruso Alexander A. Friedmann se dio cuenta que la descripción del Universo, de acuerdo a las ecuaciones de Einstein, era inestable: pequeñas perturbaciones podrían causar que se expandiera o se contrajese. Por esa época, Vesto M. Slipher del

Observatorio Lowell recolectaba la primera evidencia de que las galaxias se estaban, en realidad, alejando. Entonces, en 1929, el eminente astrónomo Edwin P. Hubble mostró que la velocidad con que las galaxias se alejan de nosotros es aproximadamente igual a la distancia que nos separa.

La existencia de un Universo que se expande implica que el cosmos ha evolucionado, desde un estado de una densidad muy elevada de materia, hacia uno caracterizado por una amplia propagación de galaxias. Fred Hoyle, un cosmólogo inglés, fue el primero en llamar a este proceso Big Bang. Hoyle tenía originalmente la intención de desacreditar a esta teoría, pero el nombre fue tan contagioso y las observaciones tan contundentes que ganó gran popularidad [45].

Es un hecho bien establecido que la Teoría del Big Bang está sustentada en tres pilares observacionales:

- la expansión de Hubble observada en el corrimiento al rojo de las galaxias,
- las mediciones detalladas de la Radiación Cósmica de Fondo,
- la abundancia de los elementos ligeros producidos durante la Nucleosíntesis Primordial.

Veamos brevemente los detalles de cada uno de ellos:

### **Ley de Expansión de Hubble**

Las observaciones de las galaxias y quásares distantes muestran que la luz que proviene de estos objetos están corridas al rojo, esto significa que la luz emitida desde ellas se han movido hacia mayores longitudes de onda. Este corrimiento de la frecuencia, o efecto Doppler, es proporcional a la velocidad relativa entre el emisor y la fuente y por lo tanto, puede ser usado para medir la velocidad a un objeto remoto. Cuando se construye un diagrama de estas velocidades contra las distancias de los objetos se observa una relación

lineal conocida como Ley de Hubble:

$$v = H_0 D, \tag{2.1}$$

donde  $v$  es la velocidad de alejamiento de la galaxia y otro objeto distante,  $D$  es la distancia al objeto y  $H_0 = 71,9_{-2,7}^{+2,6} \text{ km/s/Mpc}$  es el valor del parámetro de Hubble hoy en día [6].

La Ley de Hubble observada tiene dos posibles explicaciones. La primera es que somos observadores privilegiados y nos encontramos en el centro de una explosión de galaxias, lo cual es inaceptable desde el punto de vista del Principio Cosmológico<sup>1</sup>. La segunda explicación es que el Universo se está expandiendo uniformemente por todas partes como una propiedad única del espacio tiempo. Este tipo de Universo en expansión fue desarrollado matemáticamente en el contexto de la Teoría General de la Relatividad mucho antes que Edwin P. Hubble hiciera sus análisis y observaciones, y permanece como la piedra angular de la Teoría del Big Bang tal y como fue desarrollada por Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker.

### **Radiación Cósmica de Fondo**

La Teoría del Big Bang predecía la existencia de la Radiación Cósmica de Fondo (RCF en lo adelante), la cual está compuesta por fotones emitidos durante la bariogénesis. Debido a que el Universo temprano estaba en equilibrio térmico, la temperatura de la radiación y del plasma fueron iguales hasta que el plasma se recombinó. Antes que los átomos se formaran la radiación era constantemente absorbida y re-emitida mediante la dispersión de Compton: el Universo temprano era *opaco* a la luz. Sin embargo, el enfriamiento debido a la expansión del Universo le permitió a la temperatura caer eventualmente por debajo de los  $3,000 \text{ K}$ , para este momento los electrones y los átomos se combinaron para formar

---

<sup>1</sup>este Principio también se conoce como Principio de Copérnico.

los átomos y el plasma primordial se convirtió en un gas neutral en un proceso conocido como *recombinación y desacople de los fotones*. Un Universo con sólo átomos neutrales le permite a la radiación viajar sin grandes impedimentos.

Debido a que el Universo temprano estaba en equilibrio térmico, la radiación que proviene de esa época tenía un espectro de emisión de cuerpo negro que se ha transmitido hasta nuestros días, presentando un corrimiento al rojo debido a la expansión de Hubble, reduciendo la temperatura máxima del espectro de radiación de cuerpo negro.

En 1964, Arno Penzias y Robert Wilson descubrieron accidentalmente la Radiación Cósmica de Fondo [46]. Su descubrimiento aportó una confirmación sustancial a las predicciones generales de la RCF. La radiación encontrada correspondía con una distribución isotrópica y consistente con el espectro de radiación de un cuerpo negro a  $3\text{ K}$  aproximadamente.

EN 1989, la NASA lanzó el satélite COBE con la misión de explorar la Radiación Cósmica de Fondo. Sus hallazgos fueron consistentes con las predicciones de la Teoría del Big Bang en lo referente a la RCF. El COBE halló que la temperatura de la RCF era de  $2,726\text{ K}$  y determinó que la misma era isótropa con una precisión de  $1/105$  [47].

Las mediciones más recientes corresponden al satélite WMAP, el cual ha obtenido las mediciones más precisas de muchos de los parámetros cosmológicos. Las observaciones de este satélite también han refutado varios modelos específicos de inflación, pero los resultados son consistentes con la teoría inflacionaria en general [6].

### **Nucleosíntesis Primordial**

Usando el modelo del Big Bang es posible calcular las concentraciones de  ${}^4\text{He}$ ,  ${}^3\text{He}$ ,  ${}^2\text{H}$  y  ${}^7\text{Li}$  como proporción con respecto a la cantidad de hidrógeno ordinario ( $H$ ). Todas las abundancias dependen de un único parámetro, la razón de los fotones con respecto a los bariones. Las predicciones de las abundancias son de:  ${}^4\text{He}/H \approx 0,25$ ,  ${}^2\text{H}/H \approx 10^{-3}$ ,  ${}^3\text{He}/H \approx 10^{-4}$  y  ${}^7\text{Li}/H \approx 10^{-9}$  [48].

Las mediciones de todas las abundancias coinciden con las predicciones del Big Bang para un único valor de la razón de los fotones con respecto a los bariones. Este aspecto es considerado como una fuerte evidencia en favor del Big Bang, como teoría es la única explicación conocida para las abundancias relativas de los elementos ligeros [49].

Mientras que actualmente casi nadie duda de que el Big Bang ocurrió, en el pasado la comunidad de científicos estaba dividida entre aquellos que apoyaban el Big Bang y los que apoyaban modelos cosmológicos alternativos. A través del desarrollo histórico del tema, los problemas con la Teoría del Big Bang fueron colocados en el contexto de la controversia científica acerca de cual modelo podría describir mejor las observaciones cosmológicas. Con el abrumador consenso actual respaldando al modelo del Big Bang, muchos de esos problemas son recordados como de interés histórico. Las soluciones a ellos han sido obtenidas a través de modificaciones a la teoría o como resultado de mejorar las observaciones. Otros problemas, como el de la materia oscura fría, no son considerados como fatales ya que pueden ser abordados a través de refinamientos ulteriores de la teoría.

Los dos problemas actuales más importantes son<sup>2</sup>:

#### **a) Materia oscura**

En los años 30 del siglo pasado, el astrónomo suizo F. Zwicky observó que en el cúmulo de Coma había aparentemente un déficit de masa [50, 51], al ver que las galaxias del cúmulo se movían con velocidades demasiado elevadas, las cuales no podían ser explicadas con la masa observada. Estas observaciones quedaron un tanto olvidadas hasta que, en los años 70, Vera Rubin y sus colaboradores observaron algo semejante en las galaxias [52]. Estas observaciones mostraron que debía existir una cantidad enorme de materia no visible en las galaxias para que estas pudieran mantener su equilibrio. En la actualidad se han observado miles de galaxias comprobando que la discrepancia existe normalmente. En los

---

<sup>2</sup>una lista completa de todos los problemas, *históricos* y *actuales*, de la Teoría del Big Bang se pueden encontrar en [30].

cúmulos de galaxias la discrepancia es semejante a la observada en las galaxias, pero más pronunciada.

Esto condujo a la idea de que hasta un 90 % de la materia en el Universo no es materia común o bariónica, sino materia oscura. En los inicios su presencia era polémica debido a su naturaleza oscura, sin embargo, hoy es parte aceptada de la cosmología estándar aún cuando se ha detectado, únicamente, a través de su huella gravitacional. A nivel de laboratorio no ha sido encontrada ninguna partícula que le pueda corresponder, no obstante, varios candidatos de la física de partículas pugnan por ser los elegidos. La respuesta a cual será la partícula que pueda *encajar* dentro de la materia oscura quizás demore algunos años más, por el momento es un ingrediente fundamental en la Teoría del Big Bang.

### **b) Energía oscura**

A finales de los años 90 del siglo pasado dos equipos de cazadores de supernovas liderados por Saul Perlmutter y Brian Schmidt reportaron que la expansión del Universo era acelerada [53, 54, 55]. Para explicar esta aceleración, la Teoría General de la Relatividad necesita que una gran parte del Universo consista en un componente energético con gran presión negativa. Este problema parece tener relación con el hecho que el Universo es plano, tal y como indica la RCF, y que la densidad de masa del Universo es aproximadamente de un 30 % de la densidad crítica [14]. El 70 % restante se cree corresponde a esa componente *misteriosa* responsable de la fase actual de expansión acelerada y que es llamada energía oscura. Aún cuando se manejan varios candidatos tales como: la constante cosmológica, los campos escalares, los campos fantasmas, etc, la naturaleza de la energía oscura continúa siendo un misterio.

## 2.2. Teoría General de la Relatividad vs descripción del Universo

El Universo puede ser visto desde varios puntos de vista: místicos, teológicos, filosóficos o científicos. En la ciencia se sigue el camino difícil: se aceptan solamente aquello que pueda ser probado por los experimentos o por la observación. Albert Einstein dejó como legado la bien probada y aceptada Teoría General de la Relatividad, la cual establece la relación entre la masa, la energía, el espacio y el tiempo, a partir de la cual se puede estudiar la dinámica de la expansión del Universo.

La Teoría de la Relatividad General está basada en tres principios fundamentales:

- *El Principio General de la Relatividad*: Las leyes de la física deben ser las mismas para todos los observadores (inerciales o no).
- *El Principio General de la Covarianza*: Las leyes de la física deben tomar la misma forma en todos los sistemas de coordenadas.
- *El Principio de la Invarianza Local de Lorentz*: Las leyes de la relatividad especial se aplican localmente para todos los observadores inerciales.

Conjuntamente con estos principios, Einstein propuso que el espacio-tiempo está curvado por la interacción de este con la densidad de masa y energía contenida en él. Esta curvatura permite explicar los efectos gravitacionales como movimientos inerciales a través de las trayectorias geodésicas del espacio-tiempo.

Las ecuaciones del campo de Einstein se pueden escribir como:

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

donde  $R_{\mu\nu}$  es el tensor de curvatura de Ricci,  $R$  es el escalar de curvatura,  $g_{\mu\nu}$  es el

tensor métrico,  $T_{\mu\nu}$  es el tensor de energía-momentos,  $c$  es la velocidad de la luz y  $G$  es la Constante de Gravitación Universal y los índices griegos se definen como  $\mu = 0, i$  y  $\nu = 0, j$  y los latinos como  $i, j = 1, 2, 3$ . El último término de la derecha,  $\Lambda$ , es la constante cosmológica, que inicialmente fue introducida por Einstein para que las soluciones a sus ecuaciones reprodujeran un Universo estático. En estas ecuaciones se percibe la relación entre la geometría del espacio-tiempo (parte izquierda) y el contenido de masa-energía (parte derecha) del Universo.

Con el objetivo de poder hallar las cantidades covariantes implicadas en la ecuación (2.2), se define la métrica que caracterizará el espacio-tiempo. De acuerdo al Principio Cosmológico el Universo es homogéneo e isótropo para grandes escalas. La métrica más general para tal espacio-tiempo de cuatro dimensiones ( $4D$  en lo adelante) es la de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), para la cual, el elemento de línea que mide la distancia entre dos puntos cercanos, se define como:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{1}{1 - Kr^2} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (2.3)$$

donde  $t$  es el tiempo cosmológico,  $a(t)$  es el factor de escala (magnitud que permite dar una medida de la evolución de las distancias entre dos puntos fijos en una sección espacial dada),  $K$  es el parámetro de curvatura de la sección espacial dada,  $r$  es la coordenada radial, mientras que:

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\vartheta^2, \quad (2.4)$$

donde  $\theta$  es la coordenada azimutal y  $\vartheta$  es la coordenada angular polar.

A partir de la métrica y de sus derivadas podemos construir los objetos covariantes que caracterizan la geometría del espacio tiempo<sup>3</sup>. Tanto el tensor como el escalar de Ricci<sup>4</sup>

<sup>3</sup>la métrica del espacio-tiempo tiene signatura  $(-, +, +, +)$ . Las métricas con signaturas como estas se llaman Lorentzianas o también pseudo-Riemannianas.

<sup>4</sup>el escalar de Ricci se construye como la contracción  $R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  del tensor de Ricci.

son construidos a partir de la métrica a través de:

$$R_{\mu\nu} \equiv \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\alpha\lambda}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha} \Gamma_{\alpha,\nu}^{\lambda}, \quad (2.5)$$

donde  $\Gamma$  esta asociado a las conexiones de *Levi-Civita* de la métrica (estas  $\Gamma$  también son conocidas por el nombre de símbolos de Christoffel). Esto símbolos son obtenidos a través de las derivadas parciales de la métrica con respecto a las coordenadas:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \equiv \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (g_{\lambda\beta,\gamma} + g_{\lambda,\gamma,\beta} - g_{\beta\lambda,\gamma}). \quad (2.6)$$

Con ayuda de los símbolos de Christoffel se construye la derivada covariante, en el caso de un vector arbitrario  $V_{\beta}$  se define como:

$$\nabla_{\alpha} V_{\beta} = \frac{\partial V_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} V_{\lambda}, \quad (2.7)$$

aplicada al tensor de energía momentos  $T_{\mu\nu}$  obtenemos la generalización de la ley de conservación de energía y momentos en forma covariante:

$$\nabla^{\mu} T_{\mu\nu} = 0. \quad (2.8)$$

## 2.3. Modelos de la expansión del Universo con inclusión de la energía oscura

Dentro de la pléyade de modelos, con base en la inclusión de la energía oscura, que explican la expansión del Universo, el más conocido es el  $\Lambda$ MOF.

Tomando como elemento de partida la métrica FRW dada por el elemento de línea (2.3)

y resolviendo las ecuaciones de Einstein (2.2), se obtiene que las dos únicas componentes no nulas son:  $(0 - 0)$  y  $(i - j)$ .

La componente  $(0 - 0)$  aporta la ecuación de Friedmann:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_m + \frac{\Lambda}{3} - \frac{K}{a^2}, \quad (2.9)$$

donde  $\rho_m$  es la densidad de materia oscura y se ha introducido al parámetro de Hubble a través de su definición con respecto al factor de escala  $H = \dot{a}/a$ , significando el *punto* derivación con respecto al tiempo cosmológico. La constante cosmológica se relaciona con la densidad de energía del vacío como:

$$\rho_{vac} = \Lambda/8\pi G. \quad (2.10)$$

La ecuación (2.9) también puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\Omega(t) - 1 = \frac{K}{(aH)^2}, \quad (2.11)$$

donde  $\Omega(t) \equiv \rho(t)/\rho_c$  es el parámetro adimensional de la densidad de energía y  $\rho_c = 3H^2(t)/8\pi G$  es la densidad crítica. El contenido material claramente determina la geometría espacial del Universo:

$$\Omega > 1 \text{ o } \rho > \rho_c \rightarrow K = +1, \quad (2.12)$$

$$\Omega = 1 \text{ o } \rho = \rho_c \rightarrow K = 0, \quad (2.13)$$

$$\Omega < 1 \text{ o } \rho < \rho_c \rightarrow K = -1, \quad (2.14)$$

Las observaciones han mostrado que el Universo actual esta muy cercano a la geometría espacial plana ( $\Omega \approx 1$ ) [6]. Por lo que, en lo adelante se considera que el Universo es plano

( $K = 0$ ).

La otra componente no nula de las ecuaciones de Einstein (2.2) aporta la ecuación de Raychaudhuri:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_m + 3p_m) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.15)$$

donde el término  $p_m$  representa la presión de la materia oscura. Por otro lado se nota que la constante cosmológica da lugar a una fuerza repulsiva que puede contrarrestar la atracción gravitacional generada por la materia oscura. De esta ecuación la condición para que ocurra una expansión acelerada se verifica si  $\Lambda > 4\pi G(\rho_m + 3p_m)$

De la conservación del tensor de energía-momentos (2.8) se obtiene la ecuación de continuidad:

$$\dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + p_m) = 0. \quad (2.16)$$

Se puede apreciar que (2.9) y (2.16) forman un sistema de ecuaciones independientes y al mismo tiempo hay que lidiar con tres incógnitas:  $a$ ,  $\rho_m$  y  $p_m$ . Por lo que es necesario proponer una ecuación de estado que relacione a  $\rho_m$  y  $p_m$ <sup>5</sup>:

$$\omega_m = \frac{p_m}{\rho_m}, \quad (2.17)$$

en el caso particular de la materia oscura  $\omega_m = 0$ , lo que implica que  $p_m = 0$ . La constante cosmológica está caracterizada por  $\omega_\Lambda = -1$ , esto implica que  $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$  por lo que esta componente viola la llamada condición fuerte de energía ( $\rho + p \geq 0$ ) ya que:

$$\rho_\Lambda + 3p_\Lambda = -2\rho_\Lambda < 0. \quad (2.18)$$

La idea física del modelo está basada en que una vez que la materia se desacopla de

---

<sup>5</sup>todo el desarrollo anterior es válido si además de la materia oscura se considera otro fluido de fondo, como por ejemplo la radiación. En ese caso se toma en cuenta que  $\omega_{rad} = 1/3$ .

la radiación, esto ocurre un instante de tiempo después que  $\rho_m = \rho_{rad}$ , la densidad de materia oscura comienza a dominar la dinámica del Universo<sup>6</sup> y lo hace con una expansión desacelerada. A medida que el Universo continúa con su expansión la  $\rho_m$  va disminuyendo, mientras que la densidad de energía de la constante cosmológica permanece constante. A partir del momento en que  $\rho_m < \Lambda/4\pi G$ , la expansión se torna acelerada. Ese momento, de acuerdo a las observaciones, ocurrió para un tiempo cercano al actual (corrimiento al rojo aproximadamente igual a  $z = 0,5$ ).

A pesar de las bondades desde el punto de vista observacional de este modelo, que no por gusto se llama también *Modelo de Concordancia*, el mismo presenta tres problemas serios:

**i) Problema del ajuste fino.** El valor de la constante cosmológica debe ser ajustado de forma tal que su valor esté entre  $-10^{-47} < \Lambda < -10^{47}$  para que sea capaz de describir el Universo tal y como es hoy.

**ii) Problema de la constante cosmológica.** Existe una discrepancia de 123 órdenes de magnitud entre el valor teórico y el observado para  $\rho_\Lambda$ .

**iii) Problema de de la coincidencia.** ¿Será una coincidencia que las densidades de energía de la materia oscura y la energía oscura sean del mismo orden hoy en día?

Los problemas antes mencionados pueden ser suavizados e incluso alguno de ellos evadido si se consideran otras alternativas a la constante cosmológica, como por ejemplo los campos escalares. Una revisión exhaustiva sobre la dinámica de los modelos de energía oscura puede ser encontrada en [32].

---

<sup>6</sup>como  $\rho_{rad} \propto a^{-4}$  y  $\rho_m \propto a^{-3}$  la radiación se diluye más rápido con la expansión.

# 3. TEORÍAS DE GRAVEDAD MODIFICADA

¿Puede la aceleración del Universo actual ser la primera señal de una insuficiente comprensión de las interacciones gravitacionales? Después de presentar en el Capítulo precedente los aspectos más generales de la Relatividad General y de la Cosmología actual, ahora, la atención estará enfocada en un grupo de teorías de gravedad modificada en las que podría descansar la respuesta a la pregunta anterior.

## 3.1. Teorías escalares-tensoriales de gravitación

Uno de los pioneros en la discusión de las bases conceptuales de las teorías de gravitación ha sido Dicke. En 1961 motivado por el principio de Mach introdujo, junto a su estudiante Carls Brans, lo que hoy es conocido como la Teoría de Brans-Dicke [56, 57]. Esta teoría incluye, además de la métrica, también un campo escalar.

La acción de Brans-Dicke en el marco de Jordan (MJ) es:

$$S_{BD}^{MJ} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \phi R - \frac{\omega_0}{\phi} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi) \right] + S_M(g_{\mu\nu}, \psi), \quad (3.1)$$

donde  $\phi$  es el campo escalar,  $\omega_0$  es el parámetro de Brans-Dicke y  $G$  es la Constante

Gravitacional de Newton. Es importante notar que  $\phi$  no está presente en la acción de la materia, es decir el campo escalar no está acoplado con la materia, pero si lo está, de forma no mínima, a la gravedad.

Es apreciable de la acción (3.1) porque la Teoría de Brans-Dicke puede ser considerada como una teoría con una constante gravitacional variable, ya que se siempre se puede definir una *constante* gravitacional efectiva:

$$G_{eff} = \frac{G}{\phi}. \quad (3.2)$$

En consecuencia, esta teoría puede ciertamente ser pensada como una manifestación de la formulación del principio de Mach hecho por Dicke.

Esta teoría puede ser generalizada a lo que comúnmente se conoce como Teoría Escalar-Tensorial de Gravitación. La acción general para esta teoría es:

$$S_{BD}^{MJ} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \phi R - \frac{\omega(\phi)}{\phi} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi) - V(\phi) \right] + S_M(g_{\mu\nu}, \psi), \quad (3.3)$$

donde  $V(\phi)$  es el potencial del campo escalar  $\phi$  y  $\omega(\phi)$  es una función de  $\phi$ . La acción (3.1) puede ser recuperada si fijamos  $\omega(\phi) = \omega_0$  y excluimos al término  $V(\phi)$ . Es importante aclarar que la Teoría de Brans-Dicke y cualquier otra versión de la Teoría Escalar-Tensorial son teorías métricas de gravedad: el campo escalar no está acoplada directamente con la materia y debido a esto la materia sólo responde a la métrica. El rol del campo escalar es justamente intervenir en la generación de la curvatura del espacio-tiempo asociado con la métrica [58]. Los campos escalares acoplados no mínimamente con la gravedad están presentes en las acciones efectivas de bajas energías de teorías más fundamentales, tales como la Teoría de Cuerdas [59, 60].

### 3.1.1. Ecuaciones del Campo

Con ayuda del principio variacional se obtiene las siguientes ecuaciones del campo:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{\phi} T_{\mu\nu} + \frac{w(\phi)}{\phi^2} \left( \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\lambda \phi \nabla_\lambda \phi \right) + \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi) - \frac{V}{2\phi} g_{\mu\nu}, \quad (3.4)$$

$$\square \phi = -\frac{\phi}{2\omega} (R - V') - \frac{1}{2} \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi \left( \frac{w'(\phi)}{w(\phi)} - \frac{1}{\phi} \right), \quad (3.5)$$

donde  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$  es el tensor de Einstein,  $T_{\mu\nu} \equiv \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}$  es el tensor de energía-momento,  $\nabla$  indica diferenciación covariante,  $\square \equiv \nabla^\mu \nabla_\mu$  y la *prima* ( $'$ ) denota diferenciación con respecto al argumento.

Con ayuda de una transformación conforme de la métrica del espacio-tiempo, la Teoría Escalar-Tensorial puede ser reformulada en el marco de Einstein (ME), donde el acoplamiento entre el campo escalar y la curvatura desaparecen (las ecuaciones del campo se escriben de forma más sencilla), pero en su lugar, el acoplamiento entre el campo escalar y la materia es no mínimo. La acción escrita en el marco de Einstein se escribe de la siguiente forma:

$$S_{BD}^{ME} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ R - \left( \omega + \frac{3}{2} \right) (\nabla \phi)^2 - V(\phi) \right] + e^{2\phi} S_M(g_{\mu\nu}, e^{-\phi}). \quad (3.6)$$

## 3.2. Teorías $f(R)$

Una clase diferente de enfoque que se desvía de la Teoría General de la Relatividad son las llamadas teorías  $f(R)$  de gravedad modificada, las cuales se obtienen mediante una generalización directa del lagrangiano en la acción de Einstein-Hilbert:

$$S_{EH} = \frac{1}{2k} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (3.7)$$

donde  $k = 8\pi G$  ( $G$  es la Constante Gravitacional),  $c = \hbar = 1$  y  $R$  es el escalar de Ricci, para convertirse en una función general de  $R$ :

$$S_{EH} = \frac{1}{2k} \int d^4x \sqrt{-g} f(R). \quad (3.8)$$

La introducción de estas modificaciones están motivadas por muchas razones, entre ellas podemos mencionar que cuando son tomadas en cuenta la teoría de cuerdas o correcciones cuánticas, la acción efectiva de bajas energías para la gravedad admite invariantes de curvatura de órdenes superiores [61].

Por otro lado, más recientemente se ha sugerido que la actual expansión acelerada del Universo podría tener su origen, entre otras muchas posibilidades, en correcciones a las ecuaciones de movimiento de la Relatividad General, generadas por contribuciones no lineales del escalar de curvatura  $R$  en el lagrangiano puramente gravitacional de las teorías  $f(R)$  [62, 63, 64, 65]. Esta última motivación tiene el incentivo adicional de no tener que recurrir a componentes exóticas (por ejemplo: la energía oscura o la constante cosmológica y los problemas que de ellas se derivan). Sin embargo, se ha demostrado que los experimentos del sistema solar parecen descartar las teorías  $f(R)$  que son capaces de acomodar la expansión acelerada que se observa hoy en día [66, 67, 68]<sup>1</sup>. La demostración de este último aspecto descansa en la expansión, en el límite de campos débiles, del lagrangiano  $f(R)$  y el consecuente cálculo de las contribuciones post-newtonianas de los coeficientes afines [66, 67, 68, 38].

Sin embargo, aún cuando las teorías  $f(R)$  no sean un alternativa viable para explicar el estado actual de la expansión acelerada del Universo, su relevancia para estudiar la inflación de tiempo temprano [71] podría constituir un estímulo adicional en el interés por estas alternativas a la Relatividad General.

---

<sup>1</sup>una revisión profunda de este tópico puede ser encontrada en [39, 38, 69, 70].

El prototipo de acción de las teorías  $f(R)$  es el modelo [72, 65]:

$$f(R) = R - \frac{\mu^4}{R}, \quad (3.9)$$

donde  $\mu$  es una escala de masa del orden del valor hoy en día del parámetro de Hubble  $\mu \approx H_0 \approx 10^{-33} \text{ eV}$ . A pesar de estar excluido debido a su límite de campos débiles [73] y la inestabilidad de sus soluciones [74], este modelo muestra la idea subyacente de los modelos  $f(R)$  de gravedad modificada: el término  $1/R$  es despreciable en comparación con  $R$  para los grandes valores de la curvatura correspondientes a un Universo temprano y entra en acción sólo cuando  $R \rightarrow 0$ , tarde en la historia del Universo.

### 3.2.1. Ecuaciones del Campo

Las teorías  $f(R)$  de gravedad modificada se dividen en tres grupos, en dependencia de la forma en que se obtienen las ecuaciones del campo:

- formalismo métrico
- formalismo de Palatini
- formalismo métrico-conexiones afines

en lo adelante sólo se muestra el primero de ellos<sup>2</sup>. En el formalismo métrico y añadiendo la acción de la materia, la ecuación (3.8) se transforma en:

$$S_{metric} = \frac{1}{2k} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S^{materia}, \quad (3.10)$$

---

<sup>2</sup>una revisión detallada de los dos últimos formalismos puede ser encontrada en [38].

y aplicando el principio variacional se obtienen las siguientes ecuaciones del campo:

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{f(R)}{2}g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu} \square f'(R) + kT_{\mu\nu}, \quad (3.11)$$

donde la *prima* ( $'$ ) denota diferenciación con respecto a  $R$ . Los primeros dos términos de la derecha introducen derivadas de cuarto orden de la métrica, de aquí el nombre de *teorías de gravedad de cuarto orden* con que algunas veces se denomina a estas teorías.

La traza de la ecuación (3.11) conduce a:

$$3\square f'(R) + Rf'(R) - 2f(R) = kT, \quad (3.12)$$

donde  $T \equiv T^\mu{}_\mu$  es la traza del tensor de energía-momento de la materia. Esta ecuación diferencial de segundo orden para  $f'(R)$  difiere profundamente de la traza de la ecuación de Einstein  $R = kT$ , la cual, en cambio, relaciona algebraicamente al escalar de Ricci con  $T$ .

Formalmente se puede reescribir la ecuación del campo (3.11) en la forma de una ecuación de Einstein efectiva como:

$$G_{\mu\nu} = k(T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(eff)}), \quad (3.13)$$

donde

$$T_{\mu\nu}^{(eff)} = \frac{1}{k} \left[ \frac{f(R) - Rf'(R)}{2} g_{\mu\nu} + \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu} \square f'(R) \right], \quad (3.14)$$

es un tensor de energía momento efectivo debido a términos geométricos. Como es usual cuando se adopta este tipo de procedimiento,  $T_{\mu\nu}^{(eff)}$  no satisface ninguna condición energética y la densidad de energía efectiva no se define, en general, como una cantidad positiva. De estas ecuaciones se infiere que en las teorías  $f(R)$  de gravedad es también posible definir un acoplamiento gravitacional efectivo  $G_{eff} \equiv G/f'(R)$ , de un modo análogo a

como es hecho en las Teorías Escalares Tensoriales vistas en la sección anterior. En consecuencia,  $f'(R)$  debe ser una cantidad positiva con el propósito de que el gravitón porte energía cinética positiva.

Para una métrica plana de FRW (2.3) las ecuaciones del campo de la cosmología  $f(R)$  toman la forma:

$$H^2 = \frac{k}{3f'(R)} \left[ \rho^{materia} + \frac{Rf'(R) - f(R)}{2} - 3H\dot{R}f''(R) \right], \quad (3.15)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\frac{k}{f'(R)} \left[ p^{materia} + f'''(R) (\dot{R})^2 + 2H\dot{R}f''(R) + \ddot{R}f''(R) + \frac{f(R) - Rf'(R)}{2} \right], \quad (3.16)$$

donde el *punto* ( $\dot{\phantom{x}}$ ) denota diferenciación con respecto al tiempo comóvil.

### 3.3. Mundos Branas

Otra de las ideas que se ha propuesto en los últimos años, es la concierne a que el Universo observable pudiera ser una hipersuperficie tipo  $1 + 3$  (llamada *brana*), que está empotrada en un espacio-tiempo de dimensión  $D > 4$  (bulk por su nombre en inglés). Es común en estos modelos que las partículas y campos del modelo estándar estén atrapados en la brana, mientras que la gravedad, comportándose como una verdadera interacción universal, es libre de poder acceder al bulk.

Las motivaciones para introducir este nuevo punto de vista vienen del hecho que para energías suficientemente altas (límite ultravioleta), la Teoría General de la Relatividad (en lo adelante *TGR*) deja de funcionar y debe ser sustituida por una Teoría Cuántica de

la Gravedad. Esta nueva teoría debe eliminar las singularidades predichas por la *TGR*, por ejemplo: las relacionadas con el Big Bang. Además deben aparecer correcciones apreciables a la *TGR* cuando crucemos la escala que marca la transición hacia la gravedad cuántica. En este sentido el estudio de los modelos fenomenológicos de branas puede ayudar a apreciar la magnitud de estas correcciones.

Por otro lado, los modelos de branas también pueden introducir correcciones a la *TGR* en el límite de bajas energías (límite infrarrojo), debido al escape de la gravedad hacia la dimensión extra (fuga hacia el bulk) lo cual conlleva a que se pueda obtener, de forma natural, un Universo con expansión acelerada.

### 3.3.1. Modelos Randall-Sundrum 2 (RS2)

Los modelos de branas de Randall-Sundrum (*RS*) tienen un impacto apreciable en la cosmología del Universo temprano, en particular, sobre el paradigma inflacionario. Una característica distintiva de una cosmología de campo escalar confinado en una brana *RS* es que la velocidad de expansión del Universo difiere, a altas energías, de la vaticinada por la *TGR*. Esto es debido a un término cuadrático en la densidad de energía, el cual produce un incremento en la fricción que actúa sobre el campo escalar. Esto quiere decir que, en la cosmología de mundos branas de *RS*, la inflación es posible para una variedad más amplia de potenciales que los presentes en el modelo cosmológico estándar [75]. Incluso potenciales que no son lo suficientemente planos, desde el punto de vista del paradigma inflacionario convencional, pueden producir inflación. Para energías suficientemente bajas (mucho menores que la tensión de la brana), el comportamiento cósmico estándar es recuperado antes de la escala de la nucleosíntesis primordial ( $T \approx 1 \text{ MeV}$ ) ocurriendo una salida natural de la inflación ya que el potencial es acelerado hacia la cuesta del potencial de auto-interacción [76]. Por otro lado el mismo campo escalar puede jugar el papel de

quintaesencia y explicar el proceso de la expansión acelerada del Universo, toda vez que el campo de inflatón no necesariamente decae durante la inflación en los modelos de branas *RS2* [76, 77, 78, 79, 80, 81, 82]

El modelo *RS2* se compone de una sola brana dotada de una tensión positiva  $\lambda$ , donde están confinados los grados de libertad del Modelo Estándar y que se empotra en un espacio tiempo *5D* anti-de Sitter (bulk con constante cosmológica negativa). Para este modelo la ecuación generalizada de Friedmann en la brana considerando una métrica FRW es<sup>3</sup>:

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{6} \rho_{bulk} + \frac{\kappa^4}{36} \rho_{brana}^2 + \frac{\epsilon}{a^4} - \frac{K}{a^2}, \quad (3.17)$$

si se define  $8\pi G_N = \kappa^4 \lambda / 6$  y si en la densidad de materia de la brana se toma en cuenta la contribución de la tensión de la brana  $\rho_{brana} = \lambda + \rho_T$ , donde  $\rho_T$  es la densidad de la materia atrapada en la brana, entonces la ecuación anterior queda como:

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{6} \left( \rho_{bulk} + \frac{\kappa^2}{6} \lambda^2 \right) + \frac{8\pi}{3} G_N \left( \rho_T + \frac{\rho_T^2}{2\lambda} \right) + \frac{\epsilon}{a^4} - \frac{K}{a^2}, \quad (3.18)$$

si se tiene en cuenta la condición impuesta a su modelo por Randall y Sundrum (con el objetivo de recuperar la gravedad estándar) en relación a que la constante cosmológica negativa del bulk esté ajustada finamente con relación a la tensión de la brana de forma tal que  $\rho_{bulk} = -\kappa^2 \lambda / 6$  entonces el primer término de la derecha se anula quedando finalmente la ecuación de Friedmann generalizada para la brana como:

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} G_N \rho_T \left( 1 + \frac{\rho_T}{2\lambda} \right) + \frac{\epsilon}{a^4} - \frac{K}{a^2}, \quad (3.19)$$

donde el término  $\epsilon/a^4$  se asocia con la reacción del bulk al ser influenciado por la gravedad de la brana, el mismo usualmente se llama *radiación oscura* por la forma en que evoluciona

---

<sup>3</sup>ver [83] para una descripción detallada de la obtención de estas ecuaciones.

con el factor de escala ( $a^{-4}$ ). Este término decae muy rápidamente con la expansión y bajo este argumento podría ser despreciado.

Otro aspecto importante a señalar con relación a la ecuación (3.19) es que se diferencia de la ecuación de Friedman de la TGR en el término que muestra una dependencia cuadrática con relación a la densidad de energía de la materia atrapada en la brana,  $\rho_T$ . Para tiempos tempranos de la evolución cósmica  $\rho_T \gg \lambda$ , lo cual implica que  $\rho_T/2\lambda \gg 1$  y con ello el parámetro de Hubble evoluciona de forma proporcional a la densidad de materia atrapada en la brana:  $H \propto \rho_T$ . A medida que avanza la evolución del Universo la densidad de energía de la materia se diluye y para tiempos tardíos, cuando  $\rho_T \ll \lambda$  entonces  $\rho_T/2\lambda \ll 1$  y  $H \propto \rho_T^{1/2}$  recuperándose el comportamiento estándar de la Relatividad General.

Finalmente si se desprecia el término de la *radiación oscura* y se considera el caso  $K = 0$ , correspondiente a una métrica plana en la brana, las ecuaciones de Einstein generalizadas para los modelos *RS2* quedarían como la ecuación de Friedmann:

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} G_N \rho_T \left( 1 + \frac{\rho_T}{2\lambda} \right), \quad (3.20)$$

la ecuación de Raychaudhuri:

$$2\dot{H} = -8\pi G_N (\rho_T + p_T) (1 + 2\lambda\rho_T), \quad (3.21)$$

donde  $G_N = 1/m_{pl}^2$  y  $m_{pl}^2$  es la masa de 4D efectiva de Planck.

En caso en que la materia atrapada en la brana fuese un campo escalar con un potencial<sup>4</sup> de auto interacción arbitrario y un fluido barotrópico el set de ecuaciones lo completarían la ecuación de Klein Gordon:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi}, \quad (3.22)$$

---

<sup>4</sup>una revisión exhaustiva de la dinámica de los modelos *RS2* con campos escalares atrapados en la brana  $4D$ , para una amplia variedad de potenciales de autointeracción, puede ser encontrada en [84].

y la ecuación de continuidad:

$$\dot{\rho}_m = -3\gamma H \rho_m, \quad (3.23)$$

donde  $\gamma$  es el índice barotrópico del fluido.

### 3.3.2. Modelos de Dvali-Gabadadze-Porrati (DGP)

Otro modelo de mundos branas que ha recibido mucha atención en los últimos años, es el modelo de Dvali-Gabadadze-Porrati (*DGP*) [85, 86, 87, 88, 89]. El mismo describe una brana  $4D$ , empotrada en un bulk  $5D$  tipo *Minkowski*, que permite introducir modificaciones en el límite infrarrojo (bajas energías), correspondiente a grandes escalas, para las leyes de la gravedad. Un ingrediente distintivo de este modelo es la acción inducida de Einstein-Hilbert sobre la brana, la cual es responsable de recuperar, para escalas moderadas, la TGR de Einstein en  $4D$ . La aceleración de la expansión del Universo, para tiempos tardíos, es explicada como consecuencia de la fuga de la gravedad hacia dentro del bulk para escalas cosmológicas grandes; constituyendo esto un efecto geométrico puramente  $5D$  el cual no está relacionado con ningún tipo de fluido exótico de energía oscura.

Considerando una métrica FRW plana en la brana, las ecuaciones de Friedmann quedarían como:

$$H^2 \pm \frac{H}{r_c} = \frac{8\pi G}{3} \rho, \quad (3.24)$$

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p)H = 0, \quad (3.25)$$

donde la segunda de estas es la ecuación de continuidad. Sin embargo, la primera ecuación es ciertamente una nueva ecuación de Friedmann<sup>5</sup> que constituye una modificación de la ecuación convencional de Friedmann, en  $4D$ , del modelo cosmológico estándar.

<sup>5</sup>se ha despreciado el término de *radiación oscura*  $\epsilon/a^4$  usando los mismos argumento esgrimidos en los modelos *RS2*.

Examinemos en detalle la ecuación (3.24). La nueva contribución del escenario de *DGP* es la introducción del término  $\pm H/r_c$  en la parte izquierda de la ecuación de Friedmann generalizada, donde  $r_c$  es la *longitud de cruce* y marca la escala a partir de la cual los efectos  $5D$  se comienzan a hacer apreciables sobre la dinámica  $4D$ . Para tiempos tempranos, cuando  $H \gg r_c$ , se recupera la ecuación de Friedmann estándar, pero para tiempos tardíos en la evolución del Universo el término  $H/r_c$  es importante y la ecuación de Friedmann sufre modificaciones de origen extra-dimensional.

La elección del signo representa dos fases cosmológicas distintas. Deffayet [90] fue el primero que notó la existencia de ambas fases. La primera de ellas, tomando el signo positivo (+) es comúnmente llamada como fase *normal* y no muestra aceleración cósmica inducida de forma espontánea, sino que requiere que exista energía oscura atrapada en la brana *DGP* para que la expansión ocurra a ritmo acelerado. A pesar de esto tiene algunas características atractivas, entre ellas el hecho que el parámetro de la ecuación de estado efectiva  $\omega_{eff}$  es capaz de cruzar la frontera  $\omega_{eff} = -1$  sin tener que recurrir a la energía oscura fantasma [91]. La segunda rama es la que posee signo negativo (-). En ella, la cosmología para el Universo temprano se comporta de acuerdo a la ecuación de Friedmann convencional en  $4D$ , pero para tiempos tardíos tiende asintóticamente a una rama *auto-acelerada*.

En esta última rama, el modelo *DGP* provee de una explicación alternativa para aceleración cósmica actual. Si tomamos la fase cosmológica *auto-acelerada* y fijamos la *longitud de cruce* ( $r_c$ ) que sea del orden de  $H_0^{-1}$ , donde  $H_0$  es el valor actual de la escala de Hubble, entonces el modelo *DGP* podría ser el responsable de la aceleración cósmica actual debido a la existencia de una dimensión extra y las modificaciones a las leyes de la gravedad que ella introduce.

En caso en que la materia atrapada en la brana *DGP* fuese un campo escalar autointe-

ractuante<sup>6</sup> y un fluido barotrópico (con densidad de energía  $\rho_m$ ) el set de ecuaciones quedaría como:

$$Q^2 = \frac{8\pi G}{3} \left( \rho_m + \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right), \quad (3.26)$$

$$\dot{\rho}_m = -3\gamma H \rho_m, \quad (3.27)$$

$$\ddot{\phi} + \partial_\phi V = -3H\dot{\phi}, \quad (3.28)$$

donde  $\gamma$  es el índice barotrópico del fluido de fondo,  $V$  es el potencial de autointeracción,  $\phi$  el campo escalar atrapado en la brana *DGP* y:

$$Q_\pm^2 \equiv H^2 \pm \frac{H}{r_c}. \quad (3.29)$$

---

<sup>6</sup>una revisión exhaustiva de la dinámica de los modelos *DGP* con campos escalares atrapados en la brana *4D*, para una amplia variedad de potenciales de autointeracción, puede ser encontrada en [84].

## 4. ACELERACIÓN DEL UNIVERSO Y TEORÍAS $f(R)$

Las teorías  $f(R)$  de gravedad modificada fueron introducidas en el Capítulo precedente, como alternativa para explicar la aceleración actual del Universo. El principal problema en estas teorías radica en la adecuada selección de la función genérica del escalar de Ricci  $f(R)$ , debido a que la misma debe cumplir una serie de requisitos para que el modelo construido sea consistente desde el punto de vista teórico y al mismo tiempo, compatible con las observaciones y experimentos cosmológicos [92].

El modelo debe, entre otras características:

- tener una correcta dinámica cosmológica,
- ser compatible, en el límite de campos débiles, con los experimentos del Sistema Solar (recuperación de la acción de Einstein-Hilbert para curvaturas pequeñas),
- estar libre de fantasmas,
- ser ajustable para ciertas singularidades (por ejemplo la singularidad de Schwarzschild)

Una de las opciones desarrolladas en los últimos tiempos para lidiar con estos requerimientos es construir un  $f(R)$  a partir de conocer la evolución del parámetro de Hubble

( $H(z)$ ) del Universo. En lugar de proponer una teoría y comprobarla con las observaciones se sigue el camino opuesto: comenzar por las observaciones y determinar que teoría  $f(R)$  es capaz de reproducirlas. En este sentido, se trabaja con el *problema inverso*.

Aunque este formalismo puede concebirse como un método basado en las observaciones [63, 93, 94, 95], la aproximación que se mostrará sigue un camino un tanto diferente. Como se mostró anteriormente para reconstruir la función  $f(R)$  lo que se precisa es conocer una expresión para  $H(z)$ . Como consecuencia se puede adoptar una expresión para  $H(z)$  que halla sido obtenida como predicción de un modelo de energía oscura y determinar cual es el  $f(R)$  que brinda la misma evolución del Universo.

Con este fin se selecciona un modelo de energía oscura compuesta: campo escalar de *quintaesencia* + una *constante* cosmológica negativa, al que se ha llamado modelo *quintante*. Este modelo propuesto originalmente en [96] está caracterizado por explicar de forma satisfactoria la presente expansión acelerada del Universo y al mismo tiempo, predecir que esta aceleración no será eterna y el Universo terminará en una singularidad tipo Gran Compresión en un tiempo finito. El ingrediente clave en este modelo es el hecho de asumir que una de las dos componentes de la energía oscura es una constante cosmológica negativa. No obstante sus virtudes desde el punto de vista de la historia de la expansión del Universo, existen dificultades para reconciliar esta última componente dentro del marco de la Teoría Cuántica del Campo. Motivados por este último aspecto, se usará el método antes mencionado para obtener una teoría  $f(R)$  que tenga las mismas bondades de este modelo, sin tener que lidiar con los problemas antes mencionados.

El modelo quintante fue sometido recientemente a un refinamiento de sus parámetros libres usando una amplia variedad de pruebas observacionales [40], garantizando con ello, una adecuada expresión para  $H(z)$ .

Los resultados que se muestran en este Capítulo han sido publicados previamente en

[40, 41].

## 4.1. Ecuaciones y formalismo básico

Las ecuaciones de Friedmann (3.15) y (3.16) escritas en una forma más compacta<sup>1</sup>:

$$H^2 = \frac{1}{3} \left[ \frac{\rho_m}{f'(R)} + \rho_{curv} \right], \quad (4.1)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 = -\omega_{curv}\rho_{curv}, \quad (4.2)$$

donde la *prima* (') denota derivadas con respecto a  $R$ ,  $\rho_{curv}$  es la densidad de energía de un *fluido efectivo de curvatura* expresada como:

$$\rho_{curv} = \frac{1}{f'(R)} \left( \frac{1}{2}[f(R) - Rf'(R)] - 3H\dot{R}f''(R) \right), \quad (4.3)$$

y el factor barotrópico del fluido de curvatura es:

$$\omega_{curv} = -1 + \frac{\ddot{R}f''(R) + \dot{R}[\dot{R}f'''(R) - Hf''(R)]}{[f(R) - Rf'(R)]/2 - 3H\dot{R}f''(R)}. \quad (4.4)$$

Asumiendo que no hay interacción entre la materia y el término de curvatura, la ecuación de continuidad para el fluido efectivo de curvatura queda como [94]:

$$\dot{\rho}_{curv} + 3H(1 + \omega_{curv})\rho_{curv} = \frac{3H_0^2\Omega_m\dot{R}f''(R)}{[f'(R)]^2}a^{-3}. \quad (4.5)$$

<sup>1</sup>es este Capítulo se usa el sistema de unidades naturales, en las cuales  $8\pi G = c = 1$ .

Usando las ecuaciones (4.1) y (4.2) y la definición de  $H$ , se puede obtener la ecuación maestra para la evolución del parámetro de Hubble:

$$\dot{H} = -\frac{1}{2f'(R)}3H_0^2\Omega_m a^{-3} + \ddot{R}f''(R) + \dot{R}[\dot{R}f'''(R) - Hf''(R)], \quad (4.6)$$

si en la ecuación precedente se inserta la expresión del escalar de curvatura  $R$  como función del parámetro de Hubble:

$$R = -6(\dot{H} + 2H^2), \quad (4.7)$$

se obtiene una ecuación diferencial no lineal de cuarto orden para el factor de escala  $a(t)$ , la cual no puede ser resuelta analíticamente ni tan siquiera para los casos más simples (por ejemplo,  $f(R) \propto R^n$ ) a menos que la contribución de la materia oscura sea despreciada. Por otra parte, aunque técnicamente sea abordable, una solución numérica para la ecuación (4.6) estaría plagada por una gran incertidumbre, debido a las condiciones de frontera (valor actual del factor de escala y sus derivadas hasta tercer orden) que deben ser impuestas para hallar  $a(t)$ .

Este problema matemático no está presente cuando se obtiene, a partir de la misma ecuación, el  $f(R)$  que es capaz de reproducir un  $a(t)$  dado por el modelo bajo estudio. En este sentido se reagrupan los diferentes términos de la ecuación (4.6) para obtener una ecuación diferencial lineal de tercer orden en función del tiempo<sup>2</sup>:

$$\mathcal{H}_3(t)\frac{d^3 f}{dt^3} + \mathcal{H}_2(t)\frac{d^2 f}{dt^2} + \mathcal{H}_1(t)\frac{df}{dt} = -3H_0^2\Omega_m \dot{R}^2 a^{-3}(t), \quad (4.8)$$

con

$$\mathcal{H}_1 = 2\dot{H}\dot{R} + H\ddot{R} + 2\ddot{R}^2\dot{R}^{-1} - \frac{d^3 R}{dt^3}, \quad (4.9)$$

<sup>2</sup>el método desarrollado en [94] usa el corrimiento al rojo,  $z$ , como variable de integración ya que es común en los modelos obtener expresiones analíticas para el parámetro de Hubble como función de  $z$  en lugar del tiempo. Sin embargo, ese no es el caso para el modelo quintante, por lo que extenderá el análisis usando a  $t$  como variable de integración.

$$\mathcal{H}_2 = -(2\ddot{R} + H\dot{R}), \quad (4.10)$$

$$\mathcal{H}_3 = \dot{R}, \quad (4.11)$$

donde se ha introducido la notación  $f(t) = f[R(t)]$  y  $R$  está dada por la ecuación (4.7). Para integrar la ecuación (4.8) se necesitan especificar las condiciones de frontera, estas son más convenientes asignarlas para el tiempo presente.

## 4.2. Condiciones de Frontera

En las teorías  $f(R)$  la *constante gravitacional efectiva* se define como  $G_{eff} = G/f'(R)$ , donde  $G$  es la constante gravitacional de Newton. Su evolución en el tiempo viene dada por la siguiente expresión:

$$\frac{\dot{G}_{eff}}{G_{eff}} = -\frac{1}{t_0} \frac{f''(R)}{f'(R)} \frac{dR}{dt}. \quad (4.12)$$

Es muy natural asumir que el acoplamiento gravitacional Newtoniano y el efectivo tomen los mismos valores hoy en día<sup>3</sup>, esto se traduce en la siguiente condición:

$$f'(R_0) = 1. \quad (4.13)$$

Evaluando la ecuación (4.12) para  $t = t_0$  podremos determinar  $f''(R_0)$  siempre que se conozca una estimación de  $(\dot{G}_{eff}/G_{eff})_{t=t_0}$ . De esta forma se obtiene la condición de frontera:

$$f''(R_0) = -t_0 \left( \frac{\dot{G}_{eff}}{G_{eff}} \right)_{obs} \left( \frac{dR}{dt} \right)^{-1}. \quad (4.14)$$

---

<sup>3</sup>el subíndice  $0$  indica evaluaciones de las magnitudes involucradas para el tiempo presente.

Finalmente, insertando las ecuaciones (4.13) y (4.14) en (4.3) y esta última en (4.1) y evaluando para tiempo presente se obtiene:

$$f(R_0) = 6H_0^2 \left(1 - \Omega_m + \frac{R_0}{6H_0^2}\right) f'(R_0) + 6H_0 \left(\frac{dR}{dt}\right)_{t=t_0} f''(R_0). \quad (4.15)$$

De las ecuaciones (4.14) y (4.15) las siguientes condiciones de frontera se obtienen de forma directa:

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{t=t_0} = \left(\frac{dR}{dt}\right)_{t=t_0} f'(R_0), \quad (4.16)$$

$$\left(\frac{d^2f}{dt^2}\right)_{t=t_0} = \left(\frac{dR}{dt}\right)_{t=t_0}^2 f''(R_0) + \left(\frac{d^2R}{dt^2}\right)_{t=t_0} f'(R_0), \quad (4.17)$$

las que deben ser usadas junto a la ecuación (4.15) para resolver de forma numérica la ecuación (4.8). Combinando la solución obtenida para  $f(t)$  con  $R(t)$ , evaluada esta última a través de la ecuación (4.7) se halla, finalmente, la función  $f(R)$  que recupera la teoría de orden superior que simula el modelo de energía oscura quintante escogido. Otros ejemplos de la aplicación de esta metodología se pueden encontrar en [94, 97, 98].

### 4.3. Reconstrucción del $f(R)$

Todo lo que se necesita para aplicar el procedimiento descrito en la sección anterior es una expresión del parámetro de Hubble,  $H$ , como función del tiempo cósmico así como escoger el valor de  $\dot{G}_{eff}/G_{eff}$  con el objetivo de fijar la condición inicial para  $f''(R_0)$ . El parámetro de Hubble para el modelo quintante fue obtenido de forma numérica [40, 41] y de acuerdo con la mayoría de las estimaciones reportadas en [99]<sup>4</sup>, se fija  $\dot{G}_{eff}/G_{eff} = 0$ .

<sup>4</sup>cambiar el valor de  $\dot{G}_{eff}/G_{eff}$  dentro del rango de incertidumbre reportado en [99] no afecta de forma significativa los resultados obtenidos.

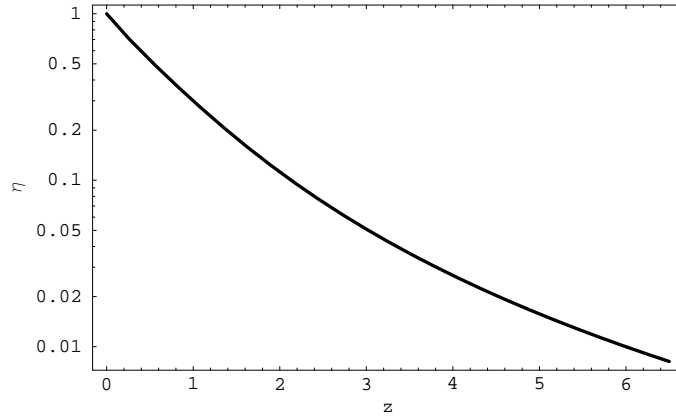


Figura 4.1.:  $\eta$  como función del corrimiento al rojo  $z$  para el  $f(R)$  reconstruido usando los mejores valores de ajuste del modelo quintante.

Más que reconstruir al  $f(R)$  directamente, es más conveniente considerar primero:

$$\eta = \left[ \frac{f(R)}{R} \right] \times \left[ \frac{f(R)}{R} \right]_{z=0}^{-1}, \quad (4.18)$$

esta magnitud es igual a 1 para el lagrangiano de Einstein-Hilbert,  $f(R) = R$ . Desviaciones de  $\eta$  de la unidad cuantifican cuanto el lagrangiano modificado debe desviarse del estándar para poder ajustar los datos, así como el parámetro de Hubble de entrada. La figura. (4.1) muestra la evolución de  $\eta$  con el corrimiento al rojo sobre el rango  $0 \leq z \leq 6$ . Es evidente que el  $f(R)$  reconstruido difiere dramáticamente del Einsteniano a medida que  $z$  aumenta. Esto no es un resultado inesperado, ya que para poder fijar los datos, con un Universo lleno solamente con materia, se debe modificar el lagrangiano estándar de la Relatividad General y esto es precisamente lo que muestra la figura. (4.1).

A pesar que el  $f(R)$  reconstruido es obtenido de forma numérica usando el procedimiento mostrado en el epígrafe anterior, es útil tener una aproximación analítica. Para ello se usa la ecuación (4.18), a partir de cual se obtiene:

$$f(R) = \eta f_0 R_s, \quad (4.19)$$

donde  $f_0 = f(R)_{z=0}$ ,  $R_s = R/R_0$  y se procede a parametrizar la curva  $\eta$  vs  $R_s$  a partir de proponer como modelo<sup>5</sup>:

$$\eta(R_s) = 1 + (\alpha R_s^n + \beta R_s^{-m}) \ln R_s, \quad (4.20)$$

donde  $(\alpha, \beta, n, m)$  son parámetros reales que son fijados con los datos numéricos en el proceso de minimizar la función  $\chi^2$ . Finalmente se obtiene que:

$$f(R) = f_0 R_s [1 + (\alpha R_s^n + \beta R_s^{-m}) \ln R_s], \quad (4.21)$$

lográndose el mejor ajuste con los siguientes valores de los parámetros libres:<sup>6</sup>

$$(\alpha; \beta; n; m) = (-0,39; -0,61; -0,15; 0,71). \quad (4.22)$$

La aproximación analítica dada por la ecuación (4.21) reproduce el  $f(R)$  reconstruido dentro del 6% sobre el rango completo del corrimiento al rojo explorado. A pesar de la excelente aproximación obtenida, la ecuación (4.21) solo ha sido probada en el rango de corrimiento al rojo de  $(0, 6)$ , por lo que no puede ser extrapolada para valores superiores de  $z$ .

Es interesante considerar el parámetro de la ecuación de estado  $w_{curv}$  del fluido efectivo de curvatura, el cual aparece en la figura. (4.2). Esta figura muestra que el fluido de curvatura se comporta realmente como una especie de constante cosmológica, con un parámetro de la ecuación de estado que aumenta con  $z$ , pero permanece muy cercano al valor de  $\Lambda$  ( $\omega = -1$ ) sobre el rango de corrimiento al rojo explorado por los datos. Las pequeñas fluctuaciones que aparecen son debidas al ruido del cálculo numérico.

<sup>5</sup>esta curva se construye a partir de las curvas  $\eta$  vs  $z$  y  $R_s$  vs  $z$ .

<sup>6</sup>el Anexo 1 muestra el comportamiento estadístico del ajuste del modelo.

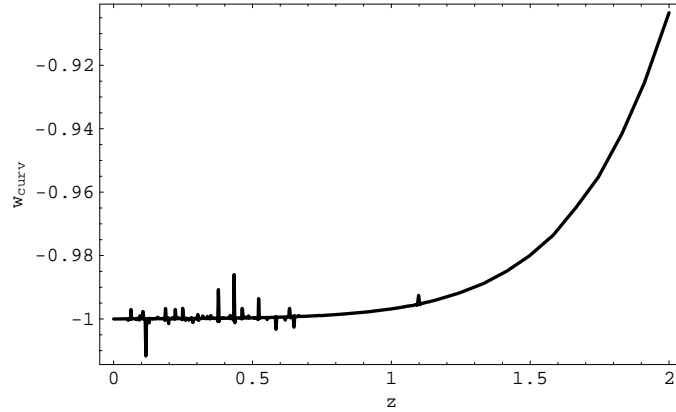


Figura 4.2.: El parámetro de la ecuación de estado  $w_{curv}$  del fluido efectivo de curvatura para la teoría  $f(R)$  reconstruida.

## 4.4. Conclusiones Parciales

En este Capítulo se ha reconstruido un  $f(R)$  imponiendo la condición de tener la misma dinámica cósmica que la determinada por la acción de un campo escalar y una constante cosmológica negativa.

Como el parámetro de Hubble es el mismo en los dos escenarios, ambos modelos son capaces de ajustar los datos observacionales de la misma forma. Por otra parte el  $f(R)$  reconstruido no incluye ningún término de energía oscura mostrando que la constante cosmológica negativa podría ser la consecuencia de forzar un lagrangiano de cuarto orden a transformarse en uno linear tipo Einstein.

# 5. ESTABILIDAD DE LAS SOLUCIONES DE SITTER EN LAS TEORÍAS $f(R)$

En el Capítulo precedente se obtuvo una teoría  $f(R)$  compatible con la expansión acelerada del Universo actual, sobre la base de conocer la dinámica de un modelo de energía oscura. Es obvio que en principio se podría construir tantas teorías  $f(R)$  como modelos de energía oscura conozcamos, extrapolando de esta forma la degeneración<sup>1</sup> que existe entre estos últimos al terreno de esta alternativa para modificar las ecuaciones de Einstein de la Relatividad General.

En el presente Capítulo se estudiará la estabilidad de la correspondencia de las soluciones locales de las teorías  $f(R)$  con las del espacio-tiempo de fondo. Aspecto este que es fundamental en el estudio del límite de campos débiles y de la métrica post-newtoniana de estas teorías. Este estudio se basará en el formalismo métrico y se enfocará en las restricciones que imponen la existencia y la estabilidad de las soluciones de Sitter de las teorías  $f(R)$  sobre los parámetros del lagrangiano<sup>2</sup>. Aunque las condiciones para la existencia y la

---

<sup>1</sup>por degeneración se entiende la existencia de una amplia gama de modelos de energía oscura, contruidos con motivaciones diferentes y con predicciones similares en lo relativo a la expansión del Universo. Un mecanismo para lidiar con este problema es mostrado en el próximo Capítulo.

<sup>2</sup>la estabilidad de los espacios de Sitter fue estudiado por primera vez en [100].

estabilidad de estas soluciones son usualmente asumidas como que se cumplen, una consideración profunda de las mismas en los cálculos estándares de los parámetros relevantes está casi siempre ausente. Un análisis riguroso de las condiciones que hacen coincidir las soluciones locales con las del espacio de Sitter máximamente simétrico pueden ahorrar suposiciones adicionales, en su mayoría innecesarias, sobre la dinámica cósmica y alcanzar sólidas conclusiones físicas.

En aras de poder juzgar acerca de la viabilidad teórica de un modelo  $f(R)$  dado, las restricciones impuestas para hacer coincidir las soluciones locales de las ecuaciones de la teoría con las soluciones asintóticas de curvatura constante  $R = R_c$ , en un fondo máximamente simétrico, son usadas para ajustar los parámetros efectivos que caracterizan las no-linealidades de la teoría  $f(R)$ , tales como el acoplamiento gravitacional efectivo y la masa efectiva del grado escalar de libertad adicional,  $\phi = f'(R)$ . En particular se mostrará que varios lagrangianos comunes de  $f(R)$  o no admiten soluciones estables de Sitter ( $dS$ ), o admiten en su lugar una coincidencia asintóticamente estable de las soluciones locales con la métrica de fondo de un espacio anti-de Sitter ( $AdS$ ).

Los resultados que se muestran en este Capítulo han sido publicados previamente en [42].

## 5.1. Condiciones de frontera

Una descripción completa de un sistema físico tiene que tomar en cuenta no sólo al sistema sino también su interacción con el medio. En este sentido, cualquier sistema físico está rodeado por el resto del Universo. La relación del sistema local con el resto del Universo se manifiesta por si misma en una serie de condiciones de frontera. En este caso, de acuerdo con las ecuaciones (3.11) y (3.12), la métrica y la función  $f(R)$  están sujetas a condiciones de frontera dado que ambas cantidades son campos dinámicos.

Las condiciones de frontera para la métrica pueden ser halladas mediante un adecuado cambio de coordenadas. En otras palabras, se puede considerar que la métrica es tipo Minkowski en la región asintótica y se fija sus primeras derivadas a cero [58]. Por otra parte, la función  $f'(R)$  debe tender al valor cósmico  $f'(R_c)^3$  a medida que nos alejamos del sistema local. El valor preciso de  $f'(R_c)$  es obtenido hallando la solución de las ecuaciones de movimiento para la cosmología correspondiente. De acuerdo a esto, el sistema local interactuará con la cosmología asintótica de fondo mediante el valor de frontera  $f'(R_c)$  y sus derivadas con respecto al tiempo. Debido a que las escalas de tiempo cósmicas son mucho mayores que las escalas de tiempo típicas de los sistemas locales (billones de años los primeros, por años los segundos), se pueden asumir una interacción adiabática entre el sistema local y la cosmología de fondo. Así, de esta manera, se desprecian los términos del tipo  $\dot{f}'(R_c)$ , donde el *punto* denota derivada con respecto al tiempo cósmico. Con vistas a obtener soluciones de las ecuaciones (3.11) se debe expandir la métrica alrededor del métrica asintótica de Minkowski<sup>4</sup>  $\eta_{\mu\nu}$ :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(t, x), \quad (5.1)$$

donde  $h_{\mu\nu}$  representa pequeñas perturbaciones alrededor de la métrica de fondo de forma tal que ( $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ ) y al mismo tiempo, se expande el grado de libertad del campo escalar  $\phi = f'$ :

$$\phi = \phi_c + \varphi(t, x). \quad (5.2)$$

---

<sup>3</sup> $R_c$  es el valor cósmico del escalar de curvatura de Ricci.

<sup>4</sup>la expansión alrededor de la métrica de Minkowski no conlleva realmente a la existencia de soluciones globales de Minkowski. De hecho, las soluciones generales del presente problema resultan ser asintóticamente espacio-tiempos de Sitter [68]. La expansión alrededor de la métrica de Minkowski es local, con el espacio-tiempo de Sitter proporcionando la métrica de fondo.

La ecuación de la traza (3.12) tiende a:

$$3\Box_c f'_c + f'_c R_c - 2f_c = \kappa^2 T_c, \quad (5.3)$$

donde para un fondo de vacío  $T_c = 0$ . Aquí  $f_c = f(R_c)$ ,  $f'_c = f'(R_c)$ , etc. Se puede también calcular el cuadrado de la masa efectiva de la perturbación del campo escalar que se propaga en el fondo [66, 67, 101, 34]:

$$m_\varphi^2 = \frac{f'_c - R_c f''_c}{3f''_c}, \quad (5.4)$$

la cual puede ser usado como criterio para juzgar la viabilidad de la teoría. Sólo perturbaciones del campo escalar con valor positivo ( $m_\varphi^2 > 0$ ) tienen sentido físico (las perturbaciones se amortiguan exponencialmente). De lo contrario, para valores negativos ( $m_\varphi^2 < 0$ ), las perturbaciones del grado de libertad del campo escalar oscilan. Estas últimas corresponden a soluciones carentes de sentido físico, como ha sido demostrado por [66].

## 5.2. La cuestión de la estabilidad

Un criterio independiente para evaluar la viabilidad de una coincidencia asintótica dada de soluciones locales está basada en la estabilidad de Ricci de las teorías  $f(R)$ . La condición de estabilidad  $f''(R_c) \geq 0$  expresa el hecho de que el grado de libertad escalar  $\phi(R) = f'(R)$  no sea fantasma [102]. Adicionalmente, estudios de la estabilidad lineal de las perturbaciones escalares conducen a la siguiente condición [38], la cual fue obtenida por primera vez por [103]:

$$f'_c \geq R_c f''_c. \quad (5.5)$$

El requerimiento simultáneo de la estabilidad lineal y de Ricci

$$(f'_c \geq R_c f''_c \quad f''_c \geq 0),$$

conducen a que el cuadrado de la masa efectiva del grado de libertad del campo escalar sea positiva ( $m_\varphi^2 \geq 0$ ). Sin embargo, nótese que el enunciado contrario no es cierto de forma general. De hecho, el cuadrado de la masa efectiva también es positiva si, simultáneamente, se cumple que:  $f'_c < R_c f''_c$  y  $f''_c < 0$ . Para evitar resultados engañosos, se usará como criterio independiente para juzgar acerca de la existencia y estabilidad de las soluciones de Sitter los siguientes requerimientos:

- Valor positivo del cuadrado de la masa efectiva ( $m_\varphi^2 \geq 0$ ),
- Estabilidad de Ricci ( $f''_c \geq 0$ ).

El cumplimiento simultáneo de los requerimientos antes mencionados conducen a que la estabilidad lineal también se satisfaga.

### 5.3. Existencia y estabilidad de las soluciones de Sitter

El objetivo será fijar los parámetros efectivos que caracterizan la no-linealidad de las teorías  $f(R)$  en el entorno de soluciones con curvatura constante  $R = R_c$  en un fondo máximamente simétrico con  $T = 0$  [104, 105, 106]. De acuerdo con la ecuación de la traza (3.12), la condición para estas soluciones queda como:

$$f'_c R_c - 2f_c = 0 \Rightarrow R_c = 2 \frac{f_c}{f'_c}, \quad (5.6)$$

la cual, para una función  $f(R)$  dada, es una ecuación algebraica en  $R$  que constituye una ecuación de restricción. Si  $R = 0$  es una raíz de esta ecuación y se toma esa raíz, entonces

la ecuación (3.11) se reduce a  $R_{\mu\nu} = 0$  y la solución máximamente simétrica es el espacio-tiempo de Minkowski. Por otro lado, si la raíz de la ecuación (5.6) es un valor constante de la curvatura  $R = R_c$ , entonces la ecuación (3.11) se reduce a:

$$R_{\mu\nu} = \frac{R_c g_{\mu\nu}}{4}, \quad (5.7)$$

y la solución máximamente simétrica es el espacio-tiempo de Sitter ( $dS$ ) o de anti-de Sitter ( $AdS$ ), dependiendo del signo de  $R_c$ .

La condición que establece la ecuación de restricción (5.6), junto a los requerimientos de que el cuadrado de la masa cumpla con  $m_\varphi^2 \geq 0$ , y la estabilidad de Ricci ( $f_c'' \geq 0$ ), son los puntos centrales en el análisis subsiguiente ya que, en general, (5.6) se reduce a una ecuación de restricciones sobre todos los parámetros libres del lagrangiano de  $f(R)$ .

Por ejemplo, si se toma una teoría  $f(R)$  que pueda ser escrita en la forma  $f(R) = R + \alpha g(R)$ , donde  $\alpha$  es un parámetro pequeño<sup>5</sup>, la condición (5.6) se transforma en la siguiente restricción sobre el valor en la frontera de  $g'$ :

$$g'_c - 2\frac{g_c}{R_c} = \frac{1}{\alpha}. \quad (5.8)$$

Para ver como esta condición previa restringe los parámetros globales de una teoría dada, se considera, como ejemplo, la teoría  $f(R) = R + \alpha R^2$  propuesta en [71]. En este caso  $g(R) = R^2 \Rightarrow g'_c = 2R_c$ , mientras que  $g_c/R_c = R_c$ , de forma tal que la condición (5.8) implica que:

$$g'_c - 2\frac{g_c}{R_c} = 0 = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \infty, \quad (5.9)$$

contrario al requerimiento que  $\alpha$  sea una cantidad pequeña. Esto significa que para este modelo la correspondencia de las soluciones locales con las soluciones asintóticas de vacío

---

<sup>5</sup>en el límite cuando  $\alpha \rightarrow 0$  se recupera la Relatividad General.

de curvatura constante no están permitidas. Expresado de otra manera: las soluciones de Sitter no existen para el modelo propuesto en [71].

Una conclusión un tanto similar es obtenida para modelos genéricos con  $g(R) = R^n$  ( $n > 2$ ). Sin embargo, en este caso las condiciones de correspondencia de las soluciones locales con las del espacio de fondo de curvatura constante conducen a:

$$R_c = \left[ \frac{1}{(n-2)\alpha} \right]^{1/n-1}, \quad (5.10)$$

de forma tal que como  $\alpha$  es una cantidad muy pequeña, la correspondencia sólo puede ser consistente para curvaturas muy grandes.

## 5.4. Teorías genéricas de $f(R)$

Como ejemplos adicionales de la importancia de la condición (5.6) para juzgar acerca de la existencia y estabilidad de las soluciones de Sitter, en esta sección se exploran varios casos de teorías genéricas  $f(R)$  que han sido estudiadas de forma amplia, por ejemplo, en las referencias [65, 66, 67, 38, 107, 108, 109, 110].

### 5.4.1. Potencias positivas de $R$

Ejemplos de teorías  $f(R)$  con potencias positivas de  $R$  han sido introducidos por [65, 66, 67] y tienen la siguiente forma:

$$f(R) = R + \frac{\epsilon R^n}{M^{2n-2}}, \quad (5.11)$$

donde  $M$  representa una escala de masa muy grande,  $\epsilon \equiv \pm 1 \Rightarrow \epsilon^2 = 1$  y  $n \geq 0$ . La función  $f(R)$  en la ecuación (5.11) abarca varios casos estudiados con anterioridad por

[71, 107, 108, 109]. Por ejemplo, el modelo propuesta por [71] se recupera si en (5.11) fijamos  $n = 2$ .

En el caso general de la ecuación (5.11) la restricción (5.6) puede ser escrita como:

$$2\frac{f_c}{f'_c} = \frac{2M^{2n-2}R_c + 2\epsilon R_c^n}{M^{2n-2} + \epsilon n R_c^{n-1}} = R_c,$$

la cual conduce a la siguiente relación entre el valor de frontera  $R_c$  y el parámetro  $M$ :

$$\left(\frac{M^2}{R_c}\right)^{n-1} = \epsilon(n-2). \quad (5.12)$$

Por otro lado, para el cuadrado de la masa efectiva de la perturbación del campo escalar dada por la ecuación (5.4) se obtiene [66, 67]:

$$m_\varphi^2 = \frac{R_c}{3\epsilon(n-1)} \left[ \frac{1}{n} \left(\frac{M^2}{R_c}\right)^{n-1} - \epsilon(n-2) \right]. \quad (5.13)$$

Si se sustituye la ecuación (5.12) en (5.13), obtenemos la siguiente expresión para el cuadrado de la masa:

$$m_\varphi^2 = -\left(\frac{n-2}{3n}\right) R_c, \quad (5.14)$$

mientras que por otro lado:

$$f_c'' = \frac{\epsilon n(n-1)}{R_c} \left(\frac{R_c}{M^2}\right)^{n-1} = \frac{n}{R_c} \left(\frac{n-1}{n-2}\right). \quad (5.15)$$

Nótese que en las expresiones de más arriba para  $m_\varphi^2$  y  $f_c''$  no hay una dependencia explícita de  $\epsilon$ , implicando que los resultados del estudio de la estabilidad son independientes del signo del segundo término en el lado derecho de la ecuación (5.11).

Como claramente se puede apreciar que para  $n > 2$  la correspondencia asintótica de

las soluciones locales con el espacio de Sitter ( $R_c > 0$ ) son inestables, puesto que los requerimientos del signo positivo del cuadrado de la masa y de la estabilidad de Ricci no pueden ser satisfechos simultáneamente. Lo mismo se verifica para las soluciones anti-de Sitter ( $R_c < 0$ ). Para afirmarlo más claramente: para la región del espacio de parámetros  $n > 2$  el espacio máximamente simétrico de vacío con curvatura constante no puede ser solución de los modelos  $f(R)$  dados por la ecuación (5.11). Vale la pena mencionar que la misma conclusión es válida para  $1 < n < 2$  ya que en este caso,  $m_\varphi^2$  y  $f_c''$  son de signo opuesto.

Sólo en la región del espacio de parámetros  $0 \leq n < 1$  la correspondencia es posible. Este es un resultado importante pues como fue discutido en [38], teorías con  $f(R)$  dados por la ecuación (5.11) son compatibles con las observaciones en la región del espacio de parámetros  $0 < n \leq 0,25$ . Sin embargo, en este caso  $M$  tiene que ser una escala de masa lo suficientemente pequeña.

### 5.4.2. Potencias negativas de $R$

Una alternativa interesante a las potencias positivas dadas por la ecuación (5.11) puede ser construida como [66, 67]:

$$f(R) = R + \frac{\epsilon\mu^{2n+2}}{R^n}, \quad (5.16)$$

donde, como en el caso anterior,  $\epsilon = \pm 1$  y  $\mu^2$  es una escala muy pequeña de masa ( $n \geq 0$ ). La expresión anterior para  $f(R)$  contiene como caso particular, por ejemplo, el estudiado en [110]. En el caso general dado por la ecuación (5.16) la restricción (5.6) se convierte en:

$$2\frac{f_c}{f_c'} = \frac{2R_c + 2\epsilon\mu^{2n+2}/R_c^n}{1 - \epsilon\mu^{2n+2}/R_c^{n+1}} = R_c, \quad (5.17)$$

conduciendo a la siguiente relación:

$$\left(\frac{R_c}{\mu^2}\right)^{n+1} = -\epsilon(n+2), \quad (5.18)$$

la que, en general, es cierta para el signo negativo de  $\epsilon = -1$ . Cuando esta restricción es sustituida en la expresión para el cuadrado de la masa efectiva de las perturbaciones escalares [66, 67]:

$$m_\varphi^2 = \frac{R_c}{3\epsilon(n+1)} \left[ \frac{1}{n} \left(\frac{R_c}{\mu^2}\right)^{n+1} - \epsilon(n+2) \right], \quad (5.19)$$

se obtiene la siguiente expresión:

$$m_\varphi^2 = -\left(\frac{n+2}{3n}\right) R_c, \quad (5.20)$$

mientras que por otro lado:

$$f_c'' = -\left(\frac{n+1}{n+2}\right) \frac{n}{R_c}. \quad (5.21)$$

Nótese que al igual que sucedía en el caso anterior, las expresiones para  $m_\varphi^2$  y  $f_c''$  no contienen a  $\epsilon$ , significando que la existencia y estabilidad de las soluciones de Sitter no dependen del signo del segundo término de la parte derecha de la ecuación(5.16).

De las ecuaciones (5.20) y (5.21), considerando los requerimientos  $m_\varphi^2 \geq 0$ ,  $f_c'' \geq 0$ , es evidente que las soluciones  $dS$  son inestables, mientras que la correspondencia asintótica  $AdS$  de las soluciones locales son estables. En consecuencia, las soluciones locales de las ecuaciones de la teoría  $f(R)$  dada por (5.16), puede ser correspondidas de forma consistente sólo con un espacio de fondo asintóticamente  $AdS$ .

### 5.4.3. Potencias combinadas de $R$

Una generalización natural de los modelos dados por las ecuaciones (5.11) y (5.16), puede estar basada en la siguiente forma de la función  $f(R)$  [111, 112]:

$$f(R) = R \pm \frac{\mu^{2n+2}}{R^n} + \frac{R^m}{M^{2m-2}}, \quad (5.22)$$

donde, como antes,  $\mu$  y  $M$  son escalas de masas pequeñas y grandes respectivamente y se considera que  $n \geq 0$  y  $m \geq 2$ . La expresión anterior contiene como caso particular la función [38]:

$$f(R) = R - \frac{\mu^4}{R} + \alpha R^2.$$

Para el caso general dado por la ecuación (5.22) la condición (5.6), para que el espacio asintótico de curvatura constante sea una solución de este modelo  $f(R)$ , puede ser escrita en la forma siguiente:

$$\left(\frac{R_c}{M^2}\right)^{m-1} = \frac{1 \pm (n+2)(\mu^2/R_c)^{n+1}}{m-2}, \quad (5.23)$$

mientras que el cuadrado de la masa efectiva de la perturbación escalar esta dada por:

$$m_\varphi^2 = \frac{1 \pm n(n+2)\left(\frac{\mu^2}{R_c}\right)^{n+1} + m(m-2)\left(\frac{R_c}{M^2}\right)^{m-1}}{3f''(R_c)},$$

donde:

$$f''(R_c) = \frac{\pm n(n+1)}{R_c} \left(\frac{\mu^2}{R_c}\right)^{n+1} + \frac{m(m-1)}{R_c} \left(\frac{R_c}{M^2}\right)^{m-1}.$$

Cuando la condición (5.23) es sustituida en las expresiones anteriores se obtiene:

$$m_\varphi^2 = \frac{m+1 \pm (m-n)(n+2)(\mu^2/R_c)^{n+1}}{3f''(R_c)}, \quad (5.24)$$

$$f''(R_c) = \frac{m(m-1)}{R_c(m-2)} \left[ 1 \pm k \left( \frac{\mu^2}{R_c} \right)^{n+1} \right], \quad (5.25)$$

donde, para acortar, se ha introducido el siguiente parámetro:

$$k \equiv \frac{n(n+1)(m-2) + m(m-1)(n+2)}{m(m-1)},$$

y se ha considerado sólo los casos donde  $m > n$ .

De estas ecuaciones, es evidente que cuando es considerado el signo positivo del segundo término en el miembro derecho de la ecuación (5.22), las soluciones de Sitter de la teoría  $f(R)$  son estables. En cambio, si se selecciona el signo negativo en la ecuación (5.22):

$$f(R) = R - \frac{\mu^{2n+2}}{R^n} + \frac{R^m}{M^{2m-2}},$$

entonces puede ser demostrado que:

$$k > \frac{(m-n)(n+2)}{m+1},$$

implica que la estabilidad de las soluciones de Sitter correspondientes a la teoría  $f(R)$  puede ser lograda solamente si:

$$(R_c/\mu^2)^{n+1} \geq k.$$

En los resultados mostrados anteriormente, el caso  $m = 2$  no puede ser considerado debido a que varias expresiones se indefinen. A pesar de esto, este caso (con  $n = 1$ ) ha sido estudiado en [38].

## 5.5. Modificaciones de Dirac-Born-Infeld a la Relatividad General

Una teoría que es capaz de cumplir con los requerimientos que, desde el punto de vista fenomenológico, deben satisfacer modificaciones no-lineales a la Relatividad General<sup>6</sup>, está contenida en la siguiente acción del tipo Dirac-Born-Infeld [113]:

$$S = \frac{1}{\kappa^4} \int d^4x \sqrt{|g|} \left( 1 - \sqrt{1 - \alpha\kappa^2 R + \beta\kappa^4 \mathcal{G}} \right), \quad (5.26)$$

donde:

$$\mathcal{G} \equiv R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\sigma\nu}R^{\mu\nu\sigma\nu},$$

es el invariante de Gauss-Bonnet. En [113] se demuestra que esta acción recupera la acción de Einstein-Hilbert para pequeñas curvaturas, es libre de fantasmas y muestra indicios de ser capaz de anular la singularidad de Schwarzschild tipo Coulomb para una región apropiada del espacio de parámetros.

Con el propósito de aplicar de forma expresa la aproximación abordada en las secciones precedentes, primero la atención estará enfocada en la siguiente modificación simplificada tipo Dirac-Born-Infeld (en lo adelante DBI) de la acción de Einstein-Hilbert:

$$S_g = \frac{1}{\kappa^4} \int d^4x \sqrt{|g|} \left( 1 - \sqrt{1 - \alpha\kappa^2 R} \right), \quad (5.27)$$

esta modificación a la acción de Einstein-Hilbert es un caso particular de (5.26) para  $\beta = 0$ . En consecuencia la acción (5.27) cumple con los requerimientos esbozados en la introducción del Capítulo 3. En particular, como fue demostrado en [113], tiene un límite correcto de Einstein-Hilbert para curvaturas pequeñas y esta libre de fantasmas.

---

<sup>6</sup>una lista completa de estos requerimientos puede ser hallada en la introducción del Capítulo 3.

Usando la aproximación mostrada en las secciones precedentes, se mostrará que la afirmación hecha anteriormente acerca de que la acción (5.27) esta libre de fantasmas es incorrecta para valores positivos del parámetro  $\alpha$ . En realidad la teoría dada por la ecuación (5.27) puede ser reescrita dentro de una teoría  $f(R)$  del tipo dado por la ecuación (3.8) con:

$$f(R) = \frac{2}{\kappa^2} \left( 1 - \sqrt{1 - \alpha\kappa^2 R} \right). \quad (5.28)$$

Para este caso, la condición (5.6) para la existencia y estabilidad de la correspondencia asintótica de las soluciones locales de la teoría  $f(R)$ , con el espacio de fondo máximamente simétrico (de vacío) de curvatura constante, conduce a la siguiente relación entre los valores de frontera de la curvatura  $R_c$  y los parámetros  $\alpha$ ,  $\kappa^2$ :

$$2 \frac{f_c}{f'_c} = R_c \Rightarrow R_c = \frac{8}{9} \frac{1}{\alpha\kappa^2}, \quad (5.29)$$

cuando este valor de frontera de  $R_c$  es sustituido en la definición del cuadrado de la masa efectiva del grado de libertad del campo escalar se obtiene que:

$$m_\varphi^2 = \frac{f'_c - R_c f''_c}{3f''_c} = -\frac{R_c}{4} \left( = -\frac{2}{9} \frac{1}{\alpha\kappa^2} \right), \quad (5.30)$$

donde se ha tomado en cuenta que:

$$f''_c = \frac{27\alpha^2\kappa^2}{2},$$

esta expresión conduce a que la teoría dada por la teoría (5.28) tiene estabilidad de Ricci para cualquier valor de los parámetros del modelo, sin embargo la ecuación (5.30) nos muestra que esta teoría puede ser asintóticamente correspondida sólo con un fondo tipo *AdS* ( $\alpha < 0$ ). De lo contrario, para valores positivos de  $\alpha$  el grado de libertad escalar, que acarrea las contribuciones no lineales en  $R$ , es un grado de libertad fantasma y por tanto

carente se sentido físico. Este hecho excluye a este tipo de modificación a la Relatividad General como un candidato para explicar la fase actual de expansión acelerada.

Sin embargo, hay que señalar que la inclusión de un término tipo Gauss Bonnet en una acción más general como la (5.26) podría cambiar esta imagen pesimista. Algunas indicaciones en este sentido para un modelo general del tipo:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{|g|} f(R, \mathcal{G}) \\ &= \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{|g|} f(R, P, Q), \end{aligned} \quad (5.31)$$

donde  $P \equiv R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ ,  $Q \equiv R_{\mu\nu\sigma\tau}R^{\mu\nu\sigma\tau}$  han sido dadas, por ejemplo, en [114]<sup>7</sup> Para este caso general la condición para la existencia de soluciones de vacío, máximamente simétricas con curvatura constante  $R_c$ , pueden ser escritas del modo siguiente ( $f_R \equiv \partial_R f$ ,  $f_P \equiv \partial_P f$ ,  $f_Q \equiv \partial_Q f$ ):

$$\left[ 2f - Rf_R - \frac{R^2}{2}f_P - \frac{R^2}{3}f_Q \right]_{R_c} = 0. \quad (5.32)$$

Para espacios máximamente simétricos de curvatura constante se tiene que:  $P = R_c^2/4$ ,  $Q = R_c^2/6$ ,  $\mathcal{G} = Q = R_c^2/6$  y para el caso dada por la acción (5.26) donde:

$$f(R, P, Q) = \frac{2}{\kappa^2}(1 - s), \quad (5.33)$$

$$s \equiv \sqrt{1 - \alpha\kappa^2 R + \beta\kappa^4 \mathcal{G}}, \quad (5.34)$$

se obtiene que:

$$s_c = \sqrt{1 - \alpha\kappa^2 R_c + \beta\kappa^4 R_c^2/6}. \quad (5.35)$$

Por lo tanto, la condición para la existencia de soluciones máximamente simétricas de

<sup>7</sup>en términos de los invariantes  $P$  y  $Q$ , el invariante de Gauss-Bonnet puede ser escrito como  $\mathcal{G} = R^2 - 4P + Q$ .

curvatura constante (5.32) conducen a la siguiente ecuación de restricción sobre  $R_c$ :

$$\beta\kappa^4 R_c^2 - 3\alpha\kappa^2 R_c = 12s_c(s_c - 1),$$

o alternativamente:

$$\beta\kappa^4 R_c^2 - 9\alpha\kappa^2 R_c + 12 = 12s_c. \quad (5.36)$$

Ha sido demostrado en [113] que no hay fantasmas asociados el grado de libertad adicional de spin-2 de esta teoría (5.31). Sin embargo, nada concreto se ha dicho acerca del grado de libertad escalar. El cuadrado de la masa efectiva de este último puede ser escrito de la siguiente forma:

$$m_\varphi^2 = \frac{[f_R - Rf_{RR}]_{R_c}}{\Sigma_\varphi^c}, \quad (5.37)$$

donde se ha introducido que:

$$\Sigma_\varphi^c \equiv \left[ 3f_{RR} + 2(f_P + f_Q) + R(3f_{RP} + 2f_{RQ}) + R^2\left(\frac{3}{4}f_{PP} + f_{PQ} + \frac{1}{3}f_{QQ}\right) \right]_{R_c}, \quad (5.38)$$

Si se sustituye la condición (5.36) en la expresiones anteriores se obtiene que:

$$m_\varphi^2 = \frac{3R_c(2\beta\kappa^4 R_c - \alpha\kappa^2)^2}{23\beta^2\kappa^8 R_c^2 - 18\alpha\beta\kappa^6 R_c - \alpha^2\kappa^4}. \quad (5.39)$$

Para cumplir con la condición de que el cuadrado de la masa efectiva sea positiva se requiere que:

$$R_c > \frac{(9 + 5\sqrt{6})\alpha}{23\beta\kappa^2},$$

para un espacio de fondo tipo de Sitter o en su lugar

$$R_c < \frac{(9 - 5\sqrt{6})\alpha}{23\beta\kappa^2},$$

para una solución anti-de Sitter. Aquí se está asumiendo que tanto  $\alpha$  como  $\beta$  son positivos. En consecuencia no existen grados de libertad escalares asociados a comportamientos fantasmas, dado que la condición antes mencionada se cumple para la teoría descrita por la acción (5.26).

## 5.6. Consideraciones finales

Un tratamiento adecuado de las condiciones de frontera en las teorías  $f(R)$  requiere resolver las ecuaciones (3.11) y (3.12)<sup>8</sup>, para la métrica y el campo escalar  $\phi = f'(R)$  respectivamente, en el régimen cósmico, donde la homogeneidad e isotropía conducen a la métrica de Friedman-Robertson-Walker:

$$g_{\mu\nu}^c = \text{diag}(-1, a(t)^2 \delta_{ij}),$$

y a un valor del campo escalar independiente del espacio  $\phi_c = \phi_c(t)$  [66, 67]. Para escalas más pequeñas las desviaciones locales a partir de los valores cósmicos de los campos se hacen apreciables. Entonces, usualmente, se invoca el límite de campos débiles y se tratan estas desviaciones como pequeñas perturbaciones alrededor de los valores de frontera del fondo  $g_{\mu\nu}^c$  y  $\phi_c$  [66, 67, 68, 58].

Por consiguiente, está claro el rol que juegan la existencia y estabilidad de las soluciones de Sitter en los modelos fenomenológicos de  $f(R)$ : ellas actúan como reglas de selección para escoger una teoría cuyas soluciones locales puedan ser asintóticamente correspondidas con modelos fenomenológicos cosmológicamente viables. Esta es la razón por la cual se opta por buscar correspondencias estables de las soluciones locales con espacios de fondos asintóticos (máximamente simétricos) con curvatura constante (positiva)  $R_c > 0$ :

---

<sup>8</sup>igualmente se pueden usar las ecuaciones (3.13) y (3.14).

en el marco cosmológico tales espacios se ajustan muy bien a la evidencia observacional existente sobre la fase actual de expansión cósmica acelerada.

Se ha investigado las condiciones para la existencia y estabilidad del fondo de Sitter (de vacío), impuestas sobre los parámetros del lagrangiano  $f(R)$ . Aunque estas condiciones son asumidas usualmente como que se cumplen, su consideración de forma rigurosa en los cálculos estándares de los parámetros relevantes está ausente. En [66, 67], por ejemplo, las expresiones para el cuadrado de la masa efectiva del grado de libertad del campo escalar están dadas, pero las condiciones de existencia y estabilidad de espacios de fondo de Sitter no están sustituidas en estas expresiones, en consecuencia, el autor fue capaz de hacer conclusiones físicas sólo después de asumir una solución cosmológica dada (para la época de dominio de la materia, en este caso particular). Por el contrario, una minuciosa consideración de la condición (5.6) permite ahorrar las suposiciones (la mayoría de ellas innecesarias) adicionales sobre la dinámica cósmica para alcanzar conclusiones físicas robustas.

Los modelos de  $f(R)$  fueron inicialmente introducidos para explicar la aceleración cósmica actual. La razón detrás de este efecto es que, durante el curso de la expansión cósmica, la curvatura se diluye y los términos no-lineales en  $R$  comienzan a dominar la dinámica de la expansión del Universo actual, actuando como una fuente de energía oscura escondida en el tensor de energía momentos efectivo (3.14). Sin embargo, existen varios modelos de  $f(R)$  que fallan en ser compatibles con la dinámica cosmológica actual. La aproximación asumida en este Capítulo permite tener una prueba adicional de consistencia. Por ejemplo, el modelo de  $f(R)$  dado por la ecuación (5.16):

$$f(R) = R + \epsilon \frac{\mu^{2n+2}}{R^n},$$

donde  $\epsilon = \pm 1$ . En la sección (5.4.2) se demostró que presenta soluciones estables tipo anti-

de Sitter. De lo contrario, las soluciones locales de la teoría correspondiente no pueden ser correspondidas de forma asintótica con los espacios de Sitter, lo cual significa que cualquier solución de las ecuaciones de la teoría que sea compatible con la aceleración cósmica, o no existe o tiene que ser necesariamente inestable. Este resultado debe ser considerado como un criterio adicional para juzgar acerca de la viabilidad fenomenológica de la teoría  $f(R)$  dada por la ecuación (5.16).

Para modelos donde la función  $f(R)$  esté dada por (5.11):

$$f(R) = R + \epsilon \frac{R^n}{M^{2n-2}},$$

se puede encontrar una región del espacio de parámetros,  $0 \leq n < 1$ , donde las soluciones de Sitter de fondo son estables. Nunca antes se había dado un argumento tan conclusivo sobre teorías  $f(R)$  del tipo (5.11). Una circunstancia afortunada está relacionada con el hecho que, la región del espacio de parámetros donde el modelo dado por la ecuación (5.11) es compatible con las observaciones cosmológicas ( $0 < n \leq 0,25$ ) está contenida dentro de la región que permiten soluciones de Sitter estables.

En ambos casos (teorías  $f(R)$  dadas por las ecuaciones (5.11) o (5.16)), la existencia y estabilidad de las soluciones de Sitter son independientes del signo de  $\epsilon$  en el término no-lineal en  $R$ . Constituyendo esta otra conclusión robusta sobre el espacio de parámetros de ambas teorías.

Unos comentarios adicionales merecen los modelos de  $f(R)$  dados por la ecuación (5.22) [111, 112] los cuales contienen potencias combinadas de  $R$ . Como fue señalado anteriormente, si se considera solamente el signo positivo en frente del segundo término en el miembro derecho de la ecuación (5.22):

$$f(R) = R + \frac{\mu^{2n+2}}{R^n} + \frac{R^m}{M^{2m-2}},$$

el correspondiente modelo admite soluciones estables de Sitter, por lo que puede ser una alternativa apropiada para tratar con la expansión acelerada observada en la actualidad en el Universo. Debido a la existencia de dos escalas de masa:  $M$  para las escalas grandes (la cual establece la escala para cuando la inflación de tiempo temprano ocurre) y  $\mu$  para las escalas pequeñas (la cual establece la escala donde la expansión acelerada ocurre para tiempos actuales), este modelo puede representar una alternativa interesante para conducir una descripción unificada de la inflación de tiempo temprano (sin el inflatón), y la expansión acelerada del Universo correspondiente a tiempo presente (sin energía oscura). Para energías suficientemente altas el tercer término  $\propto R^n$  en el lado derecho de la ecuación antes mencionadas provoca la inflación en el Universo, mientras que el segundo término  $\propto R^{-n}$  domina desde una época reciente.

La aproximación asumida en este Capítulo permite además demostrar que las modificaciones tipo *DBI* de la Relatividad General, propuestas en [113], puede estar libre de fantasmas implicando esto que ciertas restricciones sobre la curvatura de Sitter se mantienen ciertas, mientras que el caso particular de esta teoría, dado por la acción (5.27), es libre de fantasmas sólo para valores negativos del parámetro  $\alpha < 0$ . El posible conflicto de este resultado, con el mostrado en [113], es debido a que, en aras de garantizar que la teoría este libre de fantasmas, el autor sólo demanda que la masa del grado de libertad adicional, asociado con una partícula de spin-2 (grado de libertad que no está presente en esta versión más simple)  $m_2 \rightarrow \infty$ . Sin embargo no proporciona ningún criterio adicional acerca del grado de libertad escalar (spin-0)  $m_0^2$  ( $m_\varphi^2$  según la notación empleada en este Capítulo), aspecto este central en la presente discusión.

Finalmente, es importante notar que si fueran tomados en consideración modelos  $f(R)$  realmente viables<sup>9</sup>, la condición (5.6) se convierte en una ecuación algebraica de orden superior y sus raíces no pueden ser halladas de forma algebraica, por lo que los métodos

---

<sup>9</sup>como el hallado en el Capítulo anterior o los propuestos en [37, 115].

numéricos, como el Teorema de Sturm o la Regla de los Signos de Descartes, son necesarios para hallarlas. Un ejemplo de los problemas de este tipo que pueden aparecer debido a la estructura altamente no-lineal de las teorías en discusión es mostrado en [37], donde las herramientas de los sistemas dinámicos son usadas para estudiar el problema de la estabilidad de las soluciones de Sitter para varios modelos  $f(R)$ . En este ejemplo, los Universos de Sitter tienen que ser construidos con las herramientas numéricas principalmente y para simplificar el problema no tomaron en cuenta la contribución de la materia.

## 5.7. Conclusiones Parciales

En este Capítulo se han explorado las consecuencias fenomenológicas de tomar en cuenta, de forma rigurosa, las condiciones para la existencia y estabilidad de las soluciones de Sitter para una clase extensa de teorías  $f(R)$ . Además, la interacción del sistema local con la cosmología de fondo, impone condiciones de frontera las cuales, cuando son tomadas en cuenta, imponen restricciones sobre los parámetros globales del lagrangiano  $f(R)$ . Aunque este es un hecho bien conocido, no es usado de forma rigurosa para restringir el espacio de parámetros de los modelos.

Se ha demostrado que una amplia variedad de modelos no son capaces de pasar la prueba de estabilidad de Sitter. Hay modelos que admiten la correspondencia de las soluciones locales con cosmologías de fondo tipo anti-de Sitter. Otros, en general, no admiten correspondencia asintótica estable de las soluciones locales con la cosmología de fondo máximamente simétrica de curvatura constante  $R_{\mu\nu} = R_c g_{\mu\nu}/4$ . Adicionalmente, se ha demostrado que la no existencia de soluciones fantasmas en las modificaciones tipo *DBI* a la Relatividad General estudiadas con anterioridad en [113] demandan ciertas restricciones sobre la curvatura del espacio de Sitter. Para el modelo más simple donde el invariante de Gauss-Bonnet es fijado como nulo, la ausencia de fantasmas se alcanza sólo para valores

---

negativos de uno de los parámetros del lagrangiano ( $\alpha < 0$ ). Este último resultado entra en conflicto con el encontrado en [113], donde se afirma que las teorías basadas en Lagrangianos del tipo (5.26), que incluye como caso particular al dado por (5.27), son libres de fantasmas en general.

Existe una clase de modelos  $f(R)$  donde los términos no-lineales en  $R$  poseen tanto potencias positivas como negativas (ver la ecuación (5.22)). Debido a la coexistencia de dos escalas de masas diferentes en (5.22), para una región apropiada del espacio de parámetros, estos modelos podrían proporcionar un escenario atractivo para tratar, en una imagen unificada, la inflación de tiempo temprano y la expansión acelerada del Universo actual.

## 6. FORMACIÓN DE ESTRUCTURAS

Como se ha visto en los Capítulos precedentes la fase actual de expansión acelerada puede ser explicada desde diferentes puntos de vistas (modelos) con diferentes motivaciones físicas de fondo. Para distinguir entre las muchas posibilidades teóricas se requieren observaciones más refinadas de la historia de la expansión del Universo, pero incluso estas dejarán algunas degeneraciones entre las alternativas. Por fortuna, este conjunto de características del Universo no son las únicas observables. El contenido de la densidad de energía ha evolucionado a partir de un estado extremadamente caliente, denso y casi uniforme en el comienzo del Universo hasta uno relativamente frío, difuso y de agrupamiento en el caso de la materia. Mientras que las dos primeras propiedades son debidas puramente a la expansión de un Universo homogéneo, siendo cualitativamente una propiedad cinemática, la última propiedad se origina a partir de un Universo no homogéneo, que presenta fluctuaciones, siendo esta esencialmente una propiedad dinámica.

El crecimiento de las grandes estructuras del Universo constituye una importante prueba de compañía, ella junto a la historia de la expansión forman un criterio sólido para discernir acerca de la naturaleza de la nueva razón física que está detrás de la expansión acelerada.

En este Capítulo se presenta este tema desde dos enfoques diferentes. El primer enfoque usa la formación de estructuras como prueba observacional que puede ayudar a restringir el espacio de valores de los parámetros libres de los modelos (se muestran los resultados

para dos modelos diferentes de quintaesencia con potenciales doble exponenciales). El segundo la usa como prueba discriminante entre modelos de predicciones similares desde el punto de vista de la historia de la expansión.

## 6.1. Evolución de las perturbaciones de densidad en modelos de quintaesencia de doble exponencial

En esta sección se muestran los resultados de utilizar el análisis del régimen lineal del crecimiento de las fluctuaciones para limitar el espacio de los parámetros libres en dos modelos cosmológicos. Ambos modelos parten de usar campos escalares con potencial doble exponencial de la forma:

$$V = V_1 e^{-\alpha\phi} + V_2 e^{-\beta\phi}, \quad (6.1)$$

donde  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  son parámetros libres. El uso de este tipo de potencial resulta muy atractivo ya que permite obtener un escenario donde el Universo puede evolucionar a través de un régimen radiación-materia (solución atractora de pasado) y desde una época reciente evolucionar hacia un régimen dominado por un campo escalar (solución atractora de futuro). Estos modelos donde la energía oscura está mínimamente acoplada han sido investigados en [116, 117] mientras que, los modelos de Brans-Dicke con este tipo de potencial han sido estudiados por ejemplo en [116].

Los resultados de esta sección fueron publicados previamente en [43].

### 6.1.1. Teoría de Einstein

En este epígrafe la atención se centra en las soluciones a las ecuaciones de Einstein para una métrica plana de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) con dos fluidos: un fluido barotrópico de fondo (caracterizado por el índice barotrópico  $\gamma$ ) y un campo escalar como energía oscura.

En [116] se demostró que si en este modelo se selecciona la siguiente relación entre el índice barotrópico del fluido de fondo ( $\gamma$ ) y los parámetros libres del modelo:

$$\beta = \frac{3\gamma}{\alpha}, \quad (6.2)$$

entonces:

$$a(\tau) = \left\{ \sqrt{\frac{1}{2-3\varepsilon}} \sinh[\mu_E(\tau + \tau_0)] \right\}^{\frac{2}{3\gamma-\alpha^2}}, \quad (6.3)$$

es una solución exacta de las ecuaciones del campo de Einstein con potencial dado por (6.1) donde:

$$\mu_E = (3\gamma - \alpha^2) \sqrt{\frac{\gamma(2-3\varepsilon)}{3\gamma - \alpha^2}}, \quad (6.4)$$

$\tau_0$  es una constante de integración y en lugar del tiempo cósmico se ha introducido una nueva coordenada de tiempo  $\tau$  definida como:

$$dt = a^{\frac{\alpha^2}{2}} d\tau. \quad (6.5)$$

Otros parámetros de interés observacional, obtenidos a partir de (6.3), son el parámetro de Hubble:

$$H(\tau) = \sqrt{\frac{\gamma(2-3\varepsilon)}{3\gamma - \alpha^2}} a(\tau)^{-\frac{\alpha^2}{2}} \coth[\mu_E(\tau - \tau_0)], \quad (6.6)$$

el parámetro de densidad de materia:

$$\Omega_m(\tau) = (1 - \varepsilon) \coth[\mu_E(\tau - \tau_0)], \quad (6.7)$$

y el parámetro de la ecuación de estado:

$$\omega_\phi(\tau) = -1 + \frac{\alpha^2}{3(1 - \Omega_m(\tau))}. \quad (6.8)$$

Esta solución depende sólo de dos parámetros  $(\alpha, \varepsilon)$ , toda vez que se ha fijado  $\gamma = 1$  (esto corresponde a considerar materia oscura fría) y  $\varepsilon$  es la densidad de la energía oscura  $\Omega_m(z)$  en los primeros momentos de la evolución ( $z \gg 1$ ). Usando los resultados de las pruebas observacionales de la radiación cósmica de fondo [118] y la nucleosíntesis primordial [119, 120] se pudo limitar el espacio de parámetros en el rango:  $(0 < \alpha < \infty)$  y  $(0 \leq \varepsilon \leq 0,045)$  [116].

### 6.1.2. Modelo de Brans-Dicke(BD)

En este caso los fluidos son: un fluido barotrópico de fondo (caracterizado por el índice barotrópico  $\gamma$ ) y un campo escalar autointeractuante de BD como energía oscura. En este caso el modelo es desarrollado en el marco de Einstein (en este marco las ecuaciones son más simples de tratar).

Si se escoge en este marco [116] la siguiente relación entre los parámetros libres del modelo:

$$\beta = \frac{3\gamma}{\alpha} + \frac{4 - 3\gamma}{2\sqrt{\omega + \frac{3}{2}}}, \quad (6.9)$$

donde  $\omega$  es el parámetro de acoplamiento de BD, entonces:

$$\bar{a}(r) = \left\{ \sqrt{\frac{1}{2-3\varepsilon}} \sinh[\mu_B(r+r_0)] \right\}^{\frac{2}{\alpha(\beta-\alpha)}}, \quad (6.10)$$

es una solución exacta con:

$$\mu_B = \frac{\alpha(\beta-\alpha)}{2} \sqrt{\frac{2-3\varepsilon}{3n^2(1-\varepsilon)}}, \quad (6.11)$$

$$n = \frac{2\sqrt{\omega + \frac{3}{2}} - \alpha}{2\sqrt{\omega + \frac{3}{2}}}. \quad (6.12)$$

La coordenada del tiempo  $r$  y el tiempo cósmico en el marco de Einstein  $\bar{t}$  están relacionados mediante la siguiente expresión:  $d\bar{t} = \bar{a}^{\frac{\alpha^2}{2}} dr$ . La notación con la barra encima significa que se está trabajando en el marco de Einstein de la Teoría de BD. Los otros parámetros útiles son el parámetro de Hubble:

$$\bar{H}(r) = \sqrt{\frac{2-3\varepsilon}{3n^2(1-\varepsilon)}} \bar{a}(r)^{-\frac{\alpha^2}{2}} \coth[\mu_B(r-r_0)], \quad (6.13)$$

el parámetro de densidad de masa:

$$\bar{\Omega}_m(r) = n^2(1-\varepsilon) \{ \cosh[\mu_B(r+r_0)] \}^{-2}, \quad (6.14)$$

el parámetro de la ecuación de estado:

$$\bar{\omega}_\phi(r) = -1 + \frac{\alpha^2}{3(1-\bar{\Omega}_m(r))}. \quad (6.15)$$

Como en el caso anterior se fija  $\gamma = 1$  por lo que el espacio de los parámetros libres queda determinado por  $(\alpha, \varepsilon)$  y siguiendo un análisis similar al anterior los parámetros

son limitados a:  $(0 < \alpha < 0,37)$  y  $(0 \leq \varepsilon \leq 0,045)$  [116].

### 6.1.3. Crecimiento lineal de las fluctuaciones

En este epígrafe se desarrollará el estudio de la evolución el contraste de densidad ( $\delta = \delta\rho/\rho$ ) en la distribución de masa, modelada como materia oscura, en la teoría de las perturbaciones lineales. La evolución de la densidad de quintaesencia no es modelada ya que en general no exhibe formación de cúmulos para escalas menores de 100 Mpc [121].

La ecuación de la evolución en el tiempo del contraste de densidad [122, 123, 124, 125] está dada por:

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m - 4\pi G\rho_m\delta_m = 0, \quad (6.16)$$

donde el *punto* significa derivada con respecto al tiempo comóvil. En estas ecuaciones la contribución relativa de la energía oscura a la evolución del contraste de densidad está dada por la expresión del parámetro de Hubble ( $H$ ). Se debe considerar esta ecuación a partir del periodo en que domina la materia, cuando la contribución de la radiación es realmente despreciable<sup>1</sup>.

La teoría lineal de perturbaciones relaciona el campo de velocidades peculiares  $v$  y el contraste de densidad [126, 127] mediante:

$$v(x) = H_0 \frac{f}{4\pi} \int \delta_m(y) \frac{x-y}{|x-y|^3} d^3y, \quad (6.17)$$

donde el contraste de densidad es definido como:

$$f \equiv \frac{d \ln \delta_m}{d \ln a}. \quad (6.18)$$

---

<sup>1</sup>los dos modelos en consideración sólo pueden ser tomados como válidos después del desacople de la materia y la radiación.

Tabla 6.1.: Parámetros característicos para cada modelo

Parámetros	Teoría de Einstein	Modelo de BD
X	$\sinh[\mu_E(\tau + \tau_0)]$	$\sinh[\mu_B(r + r_0)]$
c	$\frac{10-3\alpha^2}{2(3-\alpha^2)}$	$\frac{\alpha(\beta-2\alpha)+4}{\alpha(\beta-\alpha)}$
d	$\frac{4-\alpha^2}{2(3-\alpha^2)}$	$\frac{4-\alpha^2}{\alpha(\beta-\alpha)}$
e	$\frac{1}{2(3-\alpha^2)}$	$\frac{6n^2(1-\varepsilon)}{\alpha^2(\beta-\alpha)^2}$

Resulta muy útil reescribir la ecuación (6.16) en términos de variables adecuadas que permitan simplificarla con vistas a hallar la evolución del contraste de densidad:

$$X^2(1 + X^2) \frac{d^2 \delta_m}{dX^2} + X \frac{d\delta_m}{dX} (X^2 c + d) - e \delta_m = 0, \quad (6.19)$$

donde la nueva variable  $X$  y los parámetros  $(c, d, e)$  son diferentes para cada modelo (ver Tabla 6.1). La ecuación (6.19) tiene dos soluciones linealmente independiente, el modo creciente  $\delta_{m+}$  y el modo decreciente  $\delta_{m-}$ . Ambos pueden ser expresados en términos de la función hipergeométrica de segunda clase  ${}_2F_1$ :

$$\delta_{m+} \propto X^{\frac{1}{2}(1-D+g)} \cdot {}_2F_1\left[\frac{1}{4} - \frac{d}{4} + \frac{1}{4}g, -\frac{1}{4} + \frac{c}{2} - \frac{d}{4} + \frac{1}{4}g, 1 + \frac{1}{2}g, -X^2\right], \quad (6.20)$$

$$\delta_{m-} \propto X^{\frac{1}{2}(1-D-g)} \cdot {}_2F_1\left[\frac{1}{4} - \frac{d}{4} - \frac{1}{4}g, -\frac{1}{4} + \frac{c}{2} - \frac{d}{4} - \frac{1}{4}g, 1 - \frac{1}{2}g, -X^2\right], \quad (6.21)$$

donde:

$$g = \sqrt{(d-1)^2 + 4e}.$$

Para  $\tau \ll 1$  y  $r \ll 1$  podemos escribir:

$$\delta_{m+} \propto X^{\frac{1}{2}(1-D+g)}, \quad (6.22)$$

$$\delta_{m-} \propto X^{\frac{1}{2}(1-D-g)}. \quad (6.23)$$

Para determinar el índice de crecimiento de las fluctuaciones se usa el modo creciente  $\delta_{m+}$  (ecuación (6.22)) y se sustituye en la ecuación (6.18). Como se observa el modo creciente depende de los parámetros libres  $(\alpha, \varepsilon)$  por lo que usando el valor de las estimaciones observacionales del índice de crecimiento  $f$  se puede restringir aún más los parámetros libres de los modelos bajo estudio. Para un valor de  $z = 0,15$  el valor estimado del índice de crecimiento es de  $f = 0,51 \pm 0,11$  [128, 129, 130].

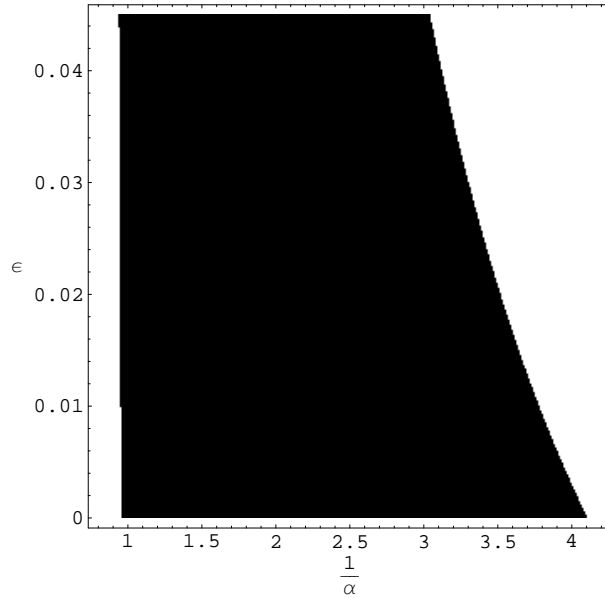


Figura 6.1.: Espacio de parámetros para el modelo basado en la gravedad de Einstein.

Aunque el cálculo del índice de crecimiento no restringe más al parámetro  $\varepsilon$  en el modelo basado en la Teoría de Einstein, como muestra la Figura. 6.1, si limita al parámetro  $\alpha$  a una región más estrecha.

En este caso el parámetro  $\varepsilon = \Omega_\phi(z \rightarrow \infty)$  representa la cantidad de energía oscura en los primeros momentos del Universo, la cual no puede ser una cantidad apreciable ya que

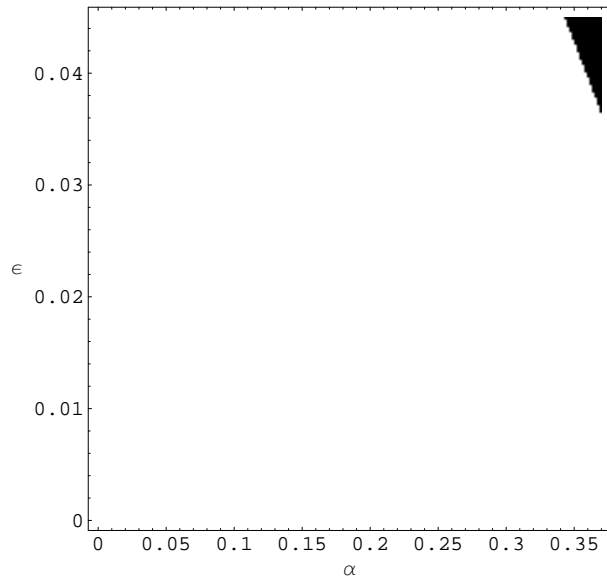


Figura 6.2.: Espacio de parámetros para el modelo de BD obtenido usando el análisis del índice de crecimiento.

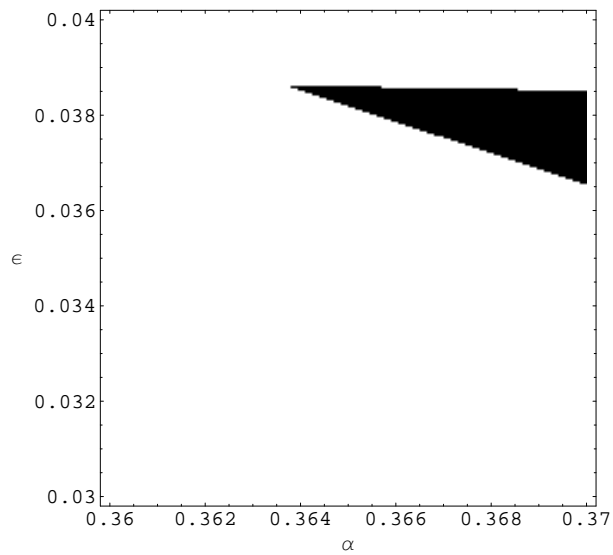


Figura 6.3.: Espacio de parámetros final para el modelo de BD. Esta región obedece a la unión de todos los análisis hechos en [116] + índice de crecimiento.

de serlo, en esa época, la expansión del Universo sería lo suficientemente rápida como para evitar la formación de estructuras. Por otro lado, el uso del índice de crecimiento permite localizar al parámetro  $\alpha$  en una región más limitada, y de ese modo actúa como un selector de una clase de soluciones atractoras del tipo halladas en [29, 131, 117, 116].

La Figura. 6.2 muestra el espacio de parámetros obtenido para el modelo basado en BD. Como se observa en la figura. 6.3 los parámetros  $(\alpha, \beta)$  fueron considerablemente restringido en comparación con el rango reportado en [116].

## 6.2. Influencia de la energía oscura en la formación de estructuras

En esta sección se estudia un modelo del Universo que posee tres componentes no inter-actuantes: materia oscura, un campo escalar de *quintaesencia* con potencial exponencial y la presencia de una *constante* cosmológica negativa<sup>2</sup>. Este es un modelo bien estudiado, que es capaz de pasar exitosamente las pruebas observacionales que tienen en cuenta la historia de la expansión del Universo, los resultados de las mismas han sido publicadas en [96, 40, 41]. En esta ocasión se mostrarán sus predicciones con relación a la formación de estructuras en el régimen lineal y no lineal. Los resultados que se muestran en esta sección fueron publicados previamente en [44].

En este modelo el potencial viene dado por la siguiente expresión [117, 132]:

$$V(\phi) \propto \exp\left\{-\sqrt{\frac{3}{2}}\phi\right\}. \quad (6.24)$$

---

<sup>2</sup>este modelo recibe el nombre de *quintante* debido a las dos últimas componentes.

Para este potencial las siguientes substituciones:

$$a^3 = uv, \quad (6.25)$$

$$\phi = -\sqrt{\frac{2}{3}} \ln\left(\frac{u}{v}\right), \quad (6.26)$$

donde  $a$  es el factor de escala,  $u_1$  y  $u_2$  son funciones del tiempo, hacen posible integrar la ecuación de Friedmann de forma exacta. Si se fija para hoy en día ( $\tau = 0$ ):  $a(0) = 1$ ,  $\dot{a}(0) = 1$  y  $H(0) = 1$  se obtiene la evolución del factor de escala en función del tiempo:

$$a = \left[ \frac{\cos^2 \omega\tau}{2\omega\sqrt{-\Omega_\Lambda}} (a_1 + b_1 \tan \omega\tau)(a_2 + b_2 \tan \omega\tau) \right], \quad (6.27)$$

con:

$$a_1 = 1, \quad (6.28)$$

$$b_1 = u_1/u_2, \quad (6.29)$$

$$a_2 = w(2\sqrt{-\Omega_\Lambda} - u_1 u_2 \tau), \quad (6.30)$$

$$b_2 = 2\sqrt{-\Omega_\Lambda}(3 - u_1 \omega/u_2) + u_1 u_2 + u_2^2 \omega \tau, \quad (6.31)$$

$$w = 2\sqrt{-\Omega_\Lambda}/2. \quad (6.32)$$

### 6.2.1. Parametrización de la ecuación de estado

Las ecuaciones de la evolución del contraste de densidad de la materia, tanto en su régimen lineal (6.16) como en el no lineal, resultan difíciles de resolver en general. Sólo en contados casos (como el visto en el epígrafe anterior) tienen soluciones analíticas ya que dependen de la expresión del parámetro de Hubble ( $H = \dot{a}/a$ ). De la ecuación (6.27) se aprecia que la expresión para  $H$  será compleja de tratar por eso en lugar de obtener su expresión

a través de su definición se obtendrá mediante la expresión de la primera ecuación de Friedmann. La dificultad que tiene este proceder es que se necesita considerar el efecto de los dos fluidos que actúan como energía oscura (campo escalar + constante cosmológica negativa) como un solo fluido efectivo [40, 41] y para este último obtener la expresión de la evolución del parámetro de la ecuación de estado  $\omega$  con respecto al factor de escala.

Esto último exige parametrizar la curva  $\omega$  vs  $a$  ya que esta, para el caso de este modelo, se obtiene de forma numérica. El tema de obtener una parametrización del parámetro de la ecuación de estado  $\omega$  es un tópico muy socorrido en los últimos años, las expresiones más comunes han sido desarrolladas en [133, 134, 135, 136, 137, 138] donde los ajustes propuestos poseen, en general, entre dos y cuatro parámetros libres.

En el caso del modelo *quintante* las parametrizaciones antes señaladas no funcionan de forma adecuada<sup>3</sup> debido a la rápida evolución  $\omega$  vs  $a$ . En este caso la opción más factible es usar la parametrización propuesta en [139], la cual tiene la característica de ser una ecuación de cuatro parámetros que se ajustan a la forma de la curva  $\omega$  vs  $a$ . Esta idea es similar a la aproximación *Kink* propuesta en [140, 141, 142]:

$$\omega(a) = \omega_0 + \frac{\omega_m - \omega_0}{1 + \left(\frac{a}{a_T}\right)^{1/\tau}}, \quad (6.33)$$

donde en esta parametrización los cuatro parámetros no pueden tomar valores arbitrarios ya que cada uno de ellos está relacionado con periodos importantes de la evolución de  $\omega$  vs  $a$ . En este sentido,  $a_T$  es el valor del factor de escala en el punto de transición entre la época en que domina la materia, caracterizada por  $\omega = \omega_m$ , y la época presente en que domina la energía oscura,  $\omega = \omega_0$ . La rapidez de esta evolución es medida por  $\tau$ .

La figura 6.4 muestra la parametrización donde el mejor ajuste se logra con los siguientes

---

<sup>3</sup>el análisis estadístico de esta aseveración aparece en el Anexo B.

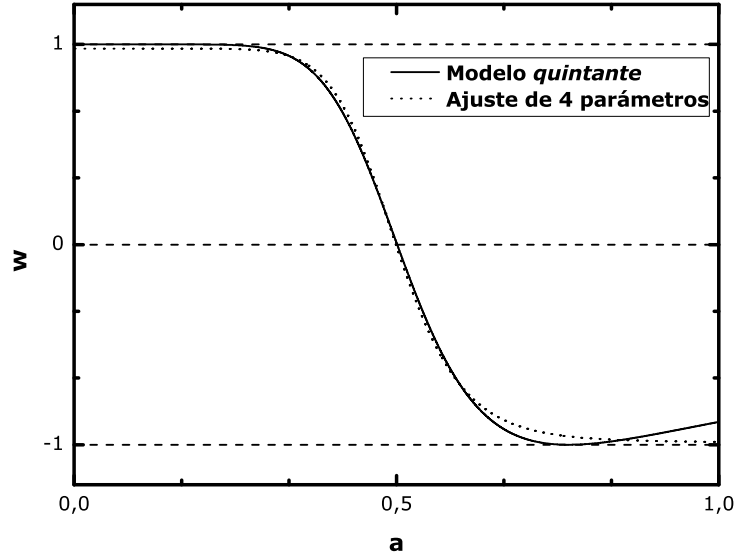


Figura 6.4.: Comportamiento del parámetro de la ecuación de estado  $\omega$  vs  $a$ . Las líneas discontinuas corresponden a los casos límites, de arriba a abajo: a)  $\omega = 1$  materia rígida, b)  $\omega = 0$  Materia Oscura Fría, c)  $\omega = -1$  constante cosmológica.

valores de los parámetros:

$$\omega_0 = -0,98794 \pm 0,00064, \quad (6.34)$$

$$\omega_m = 0,97944 \pm 0,00097, \quad (6.35)$$

$$a_T = 0,49939 \pm 0,00012, \quad (6.36)$$

$$\tau = 0,10254 \pm 0,00021. \quad (6.37)$$

Como se aprecia la curva es capaz de describir el comportamiento de  $\omega(a)$  de forma satisfactoria durante la mayor parte de la evolución del Universo, con excepción de la época más reciente en que las diferencias entre la curva real y la del ajuste pueden llegar a valores un poco menores que el 10 %. Esto último ocurre en el rango de  $0,82 \leq a \leq 1$  que expresado en función del corrimiento al rojo corresponde a  $0 \leq z \leq 0,22$ . Si se toma en cuenta que la casi totalidad de las grandes estructuras del Universo se han formado para

valores del corrimiento al rojo  $z \geq 1^4$  [143, 144] pues entonces se puede usar la anterior parametrización para estudiar el proceso de evolución de las fluctuaciones de la densidad de materia, tanto en el régimen lineal como no lineal, ya que en la época en que ambos procesos se desarrollan la parametrización propuesta es capaz de reproducir la curva real. Esta parametrización permite escribir el parámetro de Hubble de forma explícita:

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \Omega_{m0}a^{-3} + (1 - \Omega_{m0})a^{-3(1+\omega_m)} \left(1 + a_T^{-1/\tau}\right)^{-3\tau\Delta\omega} \left(1 + \left(\frac{a}{a_T}\right)^{1/\tau}\right)^{3\tau\Delta\omega}, \quad (6.38)$$

esta expresión será fundamental en lo adelante para poder hacer las estimaciones de la evolución de las fluctuaciones en el régimen lineal y no lineal.

### 6.2.2. Crecimiento lineal de las fluctuaciones

En el régimen lineal las fluctuaciones evolucionan en el tiempo de acuerdo con la ecuación (6.16). Desde el punto de vista físico resulta conveniente estudiar las fluctuaciones en términos del factor de escala  $a$  en lugar del tiempo  $t$ . Como en la época en que domina la materia se verifica que  $\delta_m \sim a$  es también útil introducir una nueva variable que caracterice el crecimiento de las fluctuaciones  $D(a) \equiv \frac{\delta_m}{a}$ . Usando esta nueva variable la ecuación (6.16) queda como:

$$D'' + D' \left[ \frac{5}{a} + \frac{(\ln E^2)'}{2} \right] + \frac{D}{a} \left[ \frac{3}{a} \left( 1 - \frac{\Omega_M}{2E^2 a^3} \right) + \frac{(\ln E^2)'}{2} \right] = 0, \quad (6.39)$$

donde la *prima* ( $'$ ) denota derivadas con respecto al factor de escala  $a$  y se ha introducido a  $E^2 \equiv \left(\frac{H}{H_0}\right)^2$ . Esta ecuación se resuelve numéricamente usando las condiciones iniciales:  $D(a_{LSS}) = 1$  y  $D'(a_{LSS}) = 0$ . Aquí  $a_{LSS} = \frac{1}{1+z_{LSS}}$  es el factor de escala evaluado en el

<sup>4</sup>para valores del corrimiento al rojo entre  $0 \leq z \leq 1$  la energía oscura se vuelve dominante sobre las demás componentes del Universo y debido a su naturaleza *repulsiva* las estructuras apenas incrementan su tamaño.

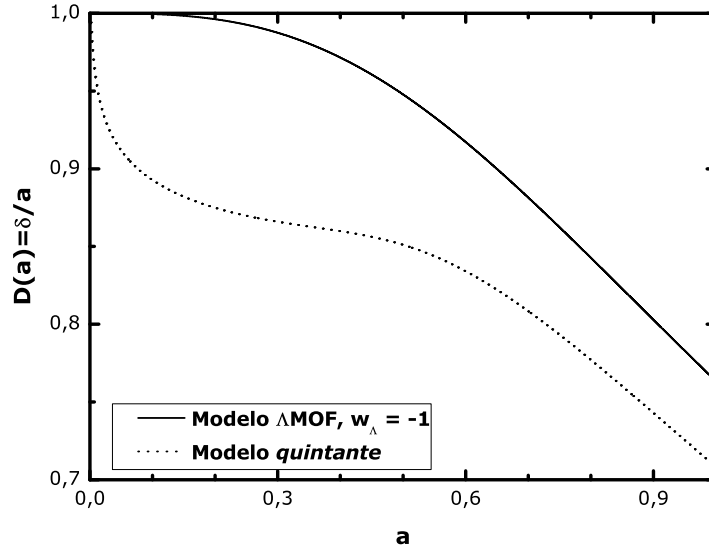


Figura 6.5.: La historia del crecimiento es mostrada para el modelo *quintante*.

valor del corrimiento al rojo para la superficie de la última dispersión. En estos cálculos se toma el valor aproximado de  $z_{LSS} \approx 1089$  [127, 145].

La historia del crecimiento es mostrada en la figura. 6.5. La desviación porcentual ( $\Delta D(a) = 1 - D(a)/D_{\Lambda}(a)$ ) del factor de crecimiento, para el modelo *quintante* con respecto al modelo de concordancia  $\Lambda$ MOF es mostrada en la figura. 6.6; se puede apreciar que la desviación actual es menor del 8 %.

En la teoría lineal de las perturbaciones el índice de crecimiento puede ser medido mediante el campo de las velocidades peculiares  $\mathbf{v}$ , como se mostró en la sección precedente. Sin embargo, es mejor resolver directamente una ecuación para  $f$  con el propósito de evitar la propagación de errores numéricos procedentes del cálculo de  $\delta_m$ . Con este propósito, simplemente se usará la definición de  $f$  (ver ecuación (6.18)) simultáneamente con (6.39) para finalmente obtener la ecuación de la evolución del índice de crecimiento:

$$f' + \frac{f^2}{a} + \left[ \frac{2}{a} + \frac{(\ln E^2)'}{2} \right] f - \frac{3\Omega_M}{2E^2 a^4} = 0. \quad (6.40)$$

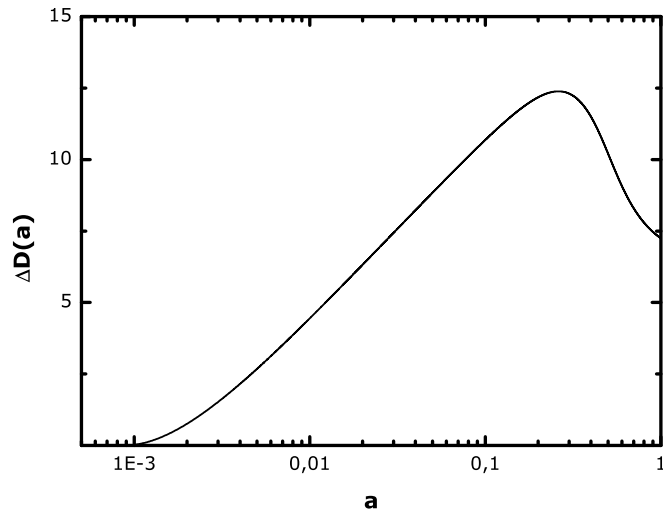


Figura 6.6.: Desviación porcentual de la variable de crecimiento  $D$  con respecto a las predicciones del modelo  $\Lambda$ MOF.

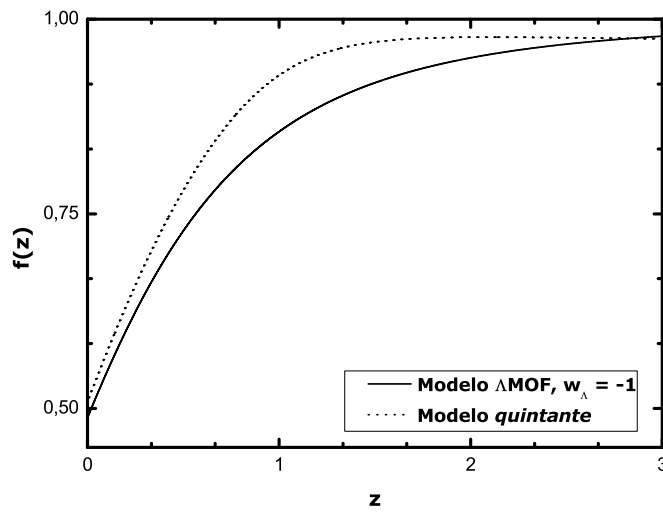


Figura 6.7.: El índice de crecimiento como función de  $z$  para el modelo *quintante*.

Esta ecuación se resuelve numéricamente usando la condición inicial  $f(a_{LSS}) = 1$  y la ecuación (6.38). El resultado es mostrado en la figura 6.7. Para analizar el comportamiento de las predicciones de  $f$  entre el escenario de concordancia y el modelo *quintante* se

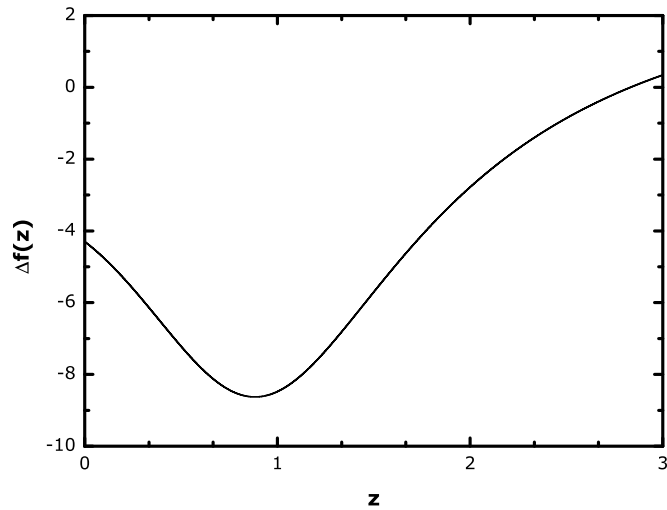


Figura 6.8.: Desviación porcentual del índice de crecimiento  $f$  con respecto a las predicciones del modelo  $\Lambda$ MOF.

calcula la desviación porcentual entre sus predicciones como  $\Delta f(z) = 1 - f(z)/f_{\Lambda}(z)$ . Este resultado es mostrado en la figura 6.8. Podemos notar que  $\Delta f$  siempre es negativa, lo cual es consecuencia de que el índice de crecimiento es mayor en el modelo de energía oscura compuesta que en  $\Lambda$ MOF. A pesar de este resultado las predicciones del valor del índice de crecimiento para  $z = 0,15$  concuerdan muy bien con los valores estimados en [145].

### 6.2.3. Evolución no lineal de fluctuaciones esféricas

Otra herramienta poderosa para comprender como una pequeña porción esférica de sobre-densidad homogénea es capaz de formar un sistema enlazado, a través de la inestabilidad gravitacional, es el modelo del colapso esférico [146, 147, 148, 149, 150]. Desde el punto de vista matemático, las ecuaciones cosmológicas básicas mencionadas en Capítulo 2 son válidas lo mismo para todo el Universo que para las fluctuaciones homogéneas esféricas

(reemplazando al factor de escala global  $a$  por el radio de la sobredensidad  $r$ ):

$$\frac{\ddot{r}}{r} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_{cluster} + \rho_{X,eff}), \quad (6.41)$$

donde  $\rho_{cluster}$  es la densidad de materia dentro del cúmulo formado y:

$$\rho_{X,eff} = \rho_X + 3p_X = (3\omega(r) + 1)\rho_X, \quad (6.42)$$

es la densidad de energía efectiva de la energía oscura (componente X). Para el caso en que está componente sea modelada como una constante cosmológica,  $\rho_{X,eff}$  será constante. Nótese que para  $\omega(r) \neq -1$  y  $\omega(r) \neq -1/3$  la densidad de la componente X dentro de la sobredensidad depende de la evolución del fondo.

Se debe seguir la evolución de la sobredensidad esférica partiendo que posee una sobredensidad inicial. Para tiempos tempranos, en los comienzos de la evolución del Universo, esta región que posee la sobredensidad se expandirá junto con el fluido de fondo. Si la sobredensidad inicial excede cierto valor crítico, la región donde está contenida la sobredensidad se separará de la evolución general del Universo y pasará a través de tres fases: (i) expansión hasta el punto de retorno<sup>5</sup>, (ii) colapso y (iii) virialización.

En lo adelante se definirá a:  $z_{ta}$  como el valor del corrimiento al rojo para el punto de retorno,  $z_{coll}$  el corrimiento al rojo para el cual la esfera inmediatamente alcanzará la virialización,  $r_{ta}$  y  $r_{coll}$  los radios correspondientes de la esfera en ambos momentos.

---

<sup>5</sup>este punto también es conocido mediante el término equivalente en inglés: punto de turnaround.

### 6.2.3.1. Evolución hasta el punto de retorno

Si se ejecutan las siguientes transformaciones:

$$x = \frac{a}{a_{ta}}, \quad (6.43)$$

$$y = \frac{r}{r_{ta}}, \quad (6.44)$$

donde  $a_{ta}$  es el factor de escala de la evolución del Universo evaluado en el punto de retorno. La evolución de las cantidades arriba definidas, usando las ecuaciones (6.38) y (6.41) y considerando una cosmología plana ( $K = 0$ ), viene dada por [146, 148]:

$$\dot{x} = H_{ta} \Omega_{ta}^{1/2} [\Omega(x)x]^{-1/2}, \quad (6.45)$$

$$\ddot{y} = -\frac{H_{ta} \Omega_{ta}^{1/2}}{2} \left[ \frac{\zeta}{y^2} + \frac{\Omega_{X,ta}}{\Omega_{ta}} y [1 + 3\omega(x)] f(x) \right], \quad (6.46)$$

donde se ha considerado que las sobredensidades esféricas evolucionan en presencia de energía oscura homogénea (se considera que la energía oscura no forma estructuras enlazadas para escalas menores que 100  $Mpc$  [121]) y que además la masa del cúmulo formado se conserva:

$$\rho_{cluster} r^3 = \rho_{cluster,ta} r_{ta}^3, \quad (6.47)$$

y donde la sobredensidad de la masa del cúmulo formado para el punto de retorno es:

$$\zeta = \left( \frac{\rho_{cluster}}{\rho_{backg}} \right)_{z_{ta}}. \quad (6.48)$$

El valor de  $\zeta$  puede ser hallado integrando las ecuaciones diferenciales (6.45) y (6.46) usando simultáneamente las condiciones de frontera  $(dy/dt)_{x=1} = 0$  y  $y_{x=0} = 0$ .

Las variaciones de las perturbaciones para colapsos que ocurren hoy en día para diferentes

cosmologías son comparadas en la figura 6.9. Los valores  $\omega_0 = -0,75$  y  $\omega_1 = 0,4$  fueron usados para la parametrización  $\omega = \omega_0 + \omega_1(1 - a)$  mientras que, el eje  $x$  muestra el tiempo normalizado para el tiempo en que ocurre el retorno en el modelo de concordancia  $\Lambda$ MOF ( $\omega_\Lambda = -1$ ). El modelo *quintante* alcanza el punto de retorno y el colapso antes que los demás modelos, este comportamiento es debido al efecto de la constante cosmológica negativa, la cual contribuye con una presión *positiva* durante toda la evolución.

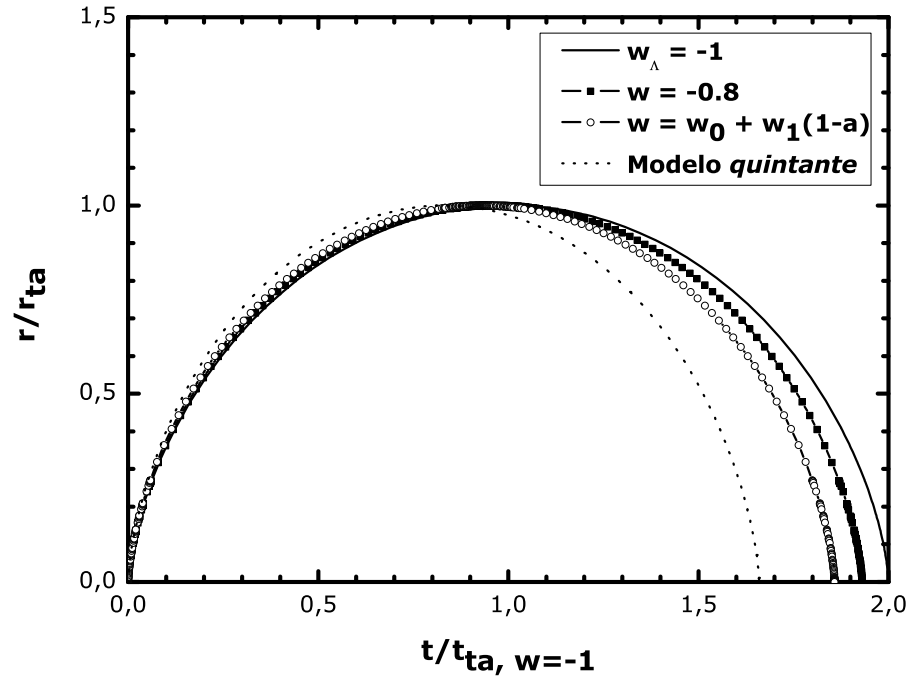


Figura 6.9.: Evolución de las perturbaciones que colapsan hoy en día ( $z_{coll} = 0$ ) para diferentes cosmologías.

La evolución de la sobredensidad  $\zeta$  en función del corrimiento al rojo del colapso es mostrado en la figura 6.10. Todos los modelos de quintaesencia muestra que las perturbaciones que colapsan para un determinado corrimiento al rojo son más densas en el momento del retorno, relativas al valor del fondo, que las que muestra el modelo  $\Lambda$ MOF. Estos modelos tienden para valores altos del corrimiento al rojo al valor de 5,6 el cual corresponde a un Universo Einstein-de Sitter. Sin embargo, el modelo *quintante* muestra una evolución

inusual debido a que su densidad relativa crece mientras el corrimiento al rojo aumenta.

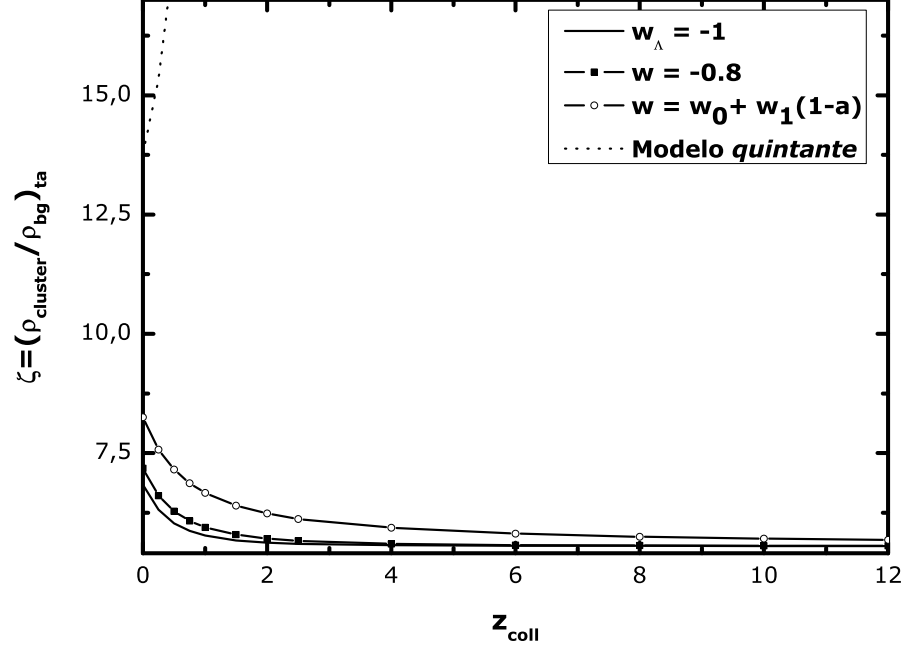


Figura 6.10.: Evolución de la sobredensidad para diferentes cosmologías.

Este comportamiento preocupante es más evidente en la figura 6.11. Esta es la primera desviación importante del modelo *quintante* de energía oscura con respecto a la corriente principal de la interpretación de las observaciones astrofísicas.

### 6.2.3.2. Contraste de densidad para la virialización

Para poder obtener más información acerca de las predicciones del modelo bajo estudio desde el punto de vista de la historia del crecimiento de las estructuras, se necesita calcular el contraste de densidad de los cúmulos virializados como función del corrimiento al rojo que corresponde al colapso:

$$\Delta_{vir} = \frac{\rho_{vir}}{\rho_{bg,vir}} = \eta^{-3} \zeta \left( \frac{1 + z_{ta}}{1 + z_{coll}} \right)^3, \quad (6.49)$$

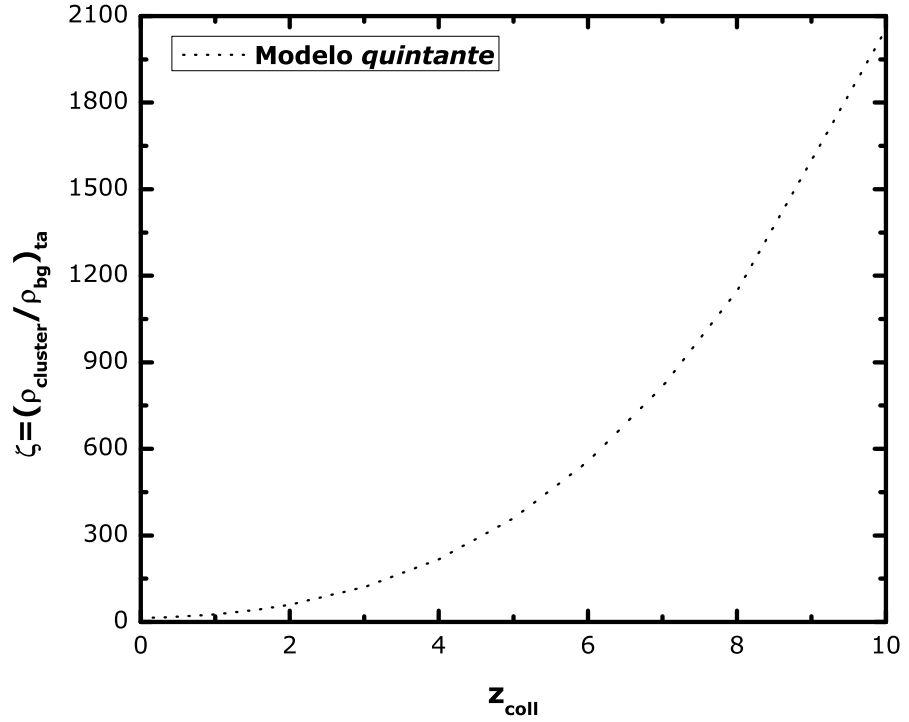
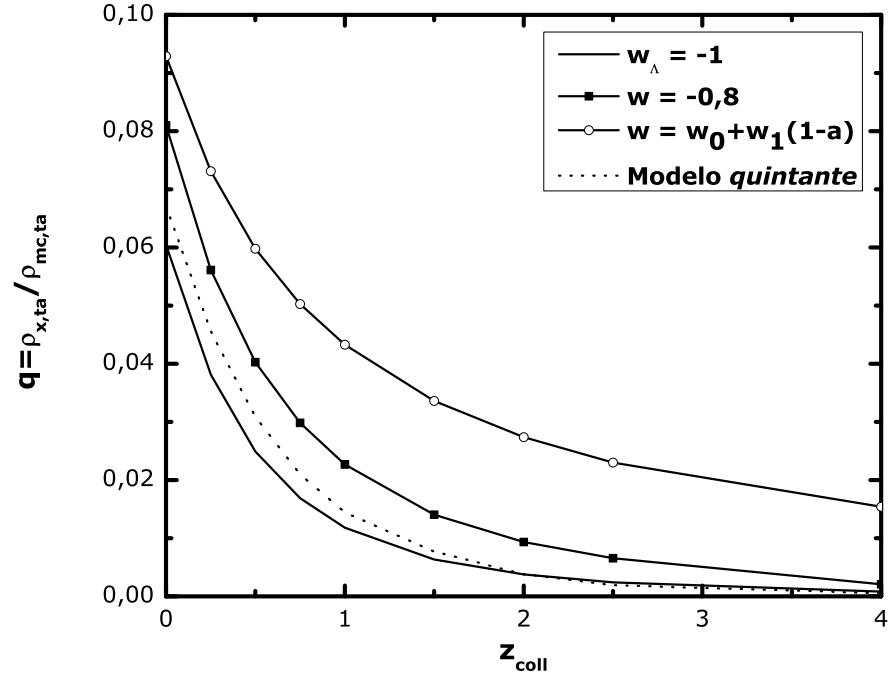


Figura 6.11.: Evolución de la sobredensidad para el modelo *quintante* de energía oscura.

donde  $\eta = \rho_{\text{vir}} / \rho_{\text{ta}}$  es la razón de la densidad de la esfera virializada con respecto su densidad en el momento del retorno. Para determinar a este parámetro es preciso combinar la ecuación que se obtiene de aplicar el teorema del virial a la estructura final enlazada<sup>6</sup> y la conservación de la energía, para obtener una relación entre la energía potencial de la esfera colapsada en el momento del retorno y en el momento de la virialización. En este proceso la energía potencial de la sobredensidad de la materia oscura será modificada por un nuevo término debido al efecto que sobre ella causa la energía oscura [148, 149, 150, 151].

En el contexto de una componente de energía oscura dinámica (por ejemplo: quintaesencia), que está distribuida de forma homogénea, se considera que las partículas de la materia oscura pueden alcanzar un estado de quasi-equilibrio [150, 151] en el cual el teorema del virial se alcanza instantáneamente, debido a que en la época en que domina la materia

<sup>6</sup>ambas componentes del modelo *quintante* tienen sus energías potenciales proporcionales a  $R^2$ .


 Figura 6.12.: Evolución del parámetro  $q$  con respecto a  $z_{coll}$ .

los efectos de la energía oscura siguen siendo pequeños y por tanto despreciables. De esta manera, asumiendo que la materia oscura ha alcanzado este estado de quasi-equilibrio,  $\eta$  puede ser calculada mediante la siguiente ecuación cúbica [150]:

$$4q(1 + 3\omega_{X,vir})\eta^3 - 2(1 + (1 + 3\omega_{X,ta})q)x + 1 = 0, \quad (6.50)$$

donde  $q = \rho_{X,ta}/\rho_{mc,ta}$  caracteriza la *fuerza* de la energía oscura en el momento del retorno. La figura 6.12 muestra la evolución de  $q$  en función del  $z_{coll}$  para diferentes cosmologías. El efecto de la energía oscura sobre la estructuras virializadas decrece a medida que estas alcanzan el estado de virialización para corrimientos al rojo mayores. En el modelo quintante la contribución de  $\rho_{X,ta} < 2\%$  para  $z_{coll} \geq 1$ .

Las variaciones de la razón del radio de la virialización con respecto al radio del punto de retorno es mostrado en la figura 6.13. La forma de la evolución del modelo *quintante*

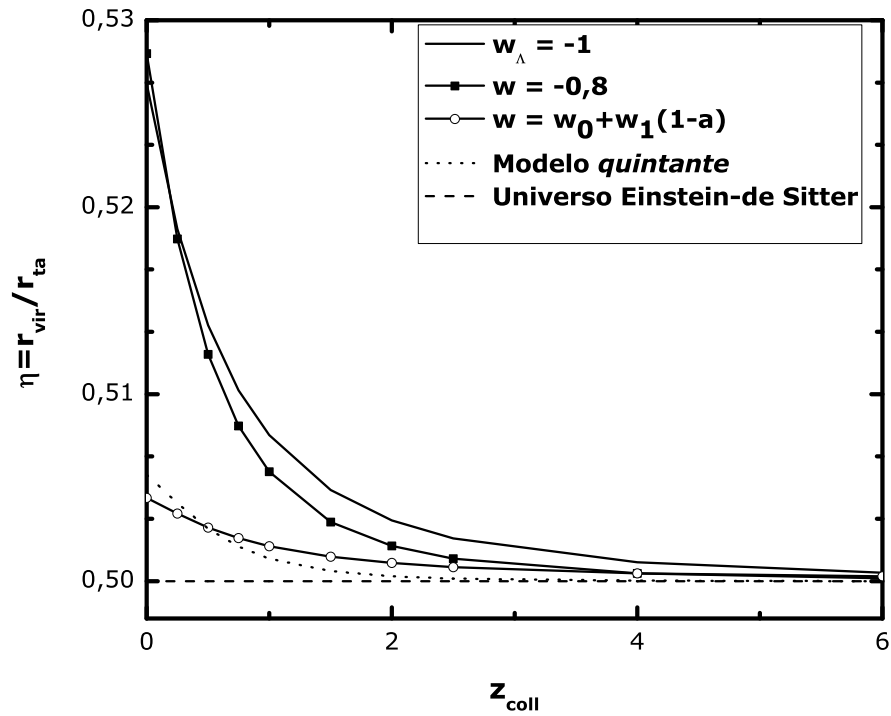


Figura 6.13.:  $\eta = r_{vir}/r_{ta}$  como función de  $z_{coll}$ .

está sobre el valor estándar de un Universo tipo Einstein-de Sitter. El valor de  $\eta > 0,5$  es debido al hecho que la fuerza repulsiva efectiva de la energía oscura sobre las partículas de la materia oscura les permite alcanzar el estado de quasi-equilibrio con un radio mayor. Este comportamiento es menos marcado en el caso del modelo *quintante* de energía oscura que en el resto, debido a que la constante cosmológica negativa contribuye a la evolución con una presión *positiva* en contraste con la presión *negativa* de la quintaesencia.

Finalmente, el contraste de densidad en el momento de la virialización se muestra en la figura 6.14. Todos los modelos tienen sobredensidades que decrecen con el valor de  $z_{coll}$  sin embargo, el modelo *quintante* de energía oscura tiene un comportamiento diferente:  $\Delta_{vir}$  crece a medida que  $z_{coll}$  aumenta. Este resultado inusual, que aleja a este modelo de la corriente principal de la interpretación de las observaciones astrofísicas, es consistente con los mostrados en las figuras 6.10 y 6.11.

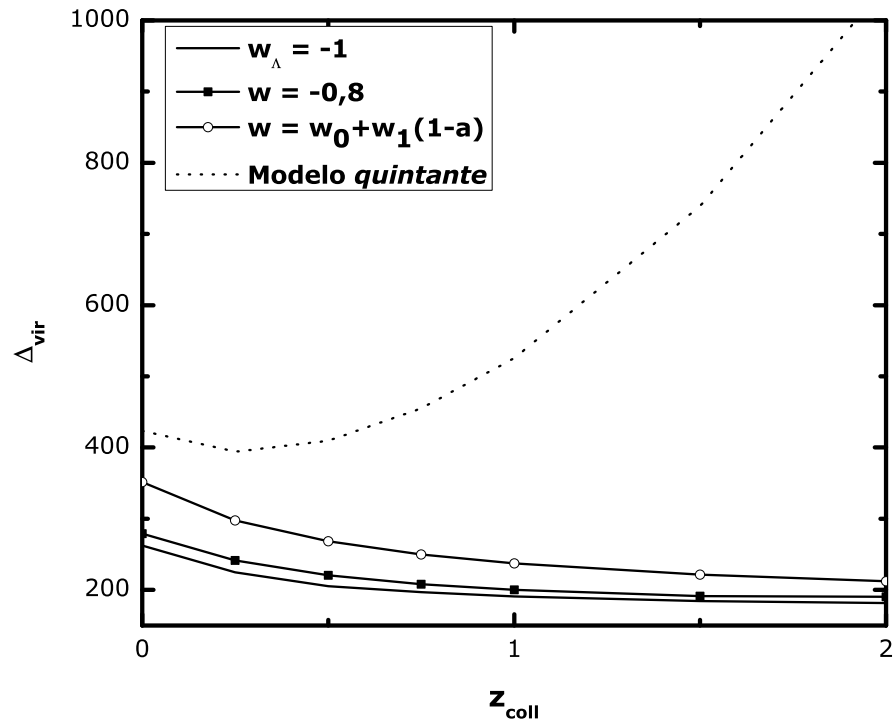


Figura 6.14.: Sobredensidad  $\Delta_{vir}$  como función de  $z_{coll}$  para varios modelos cosmológicos.

#### 6.2.4. Conteo del número de clusters

Con el objetivo de estimar el número de cúmulos de materia oscura fría para diferentes rangos de corrimiento al rojo y de masa de los cúmulos se usará la aproximación de Press-Schechter [152]. Para esta estimación podrían ser usadas funciones de masa más realistas<sup>7</sup> pero el ánimo de esta sección es obtener una comparación entre las predicciones generales del conteo del número de cúmulos del modelo *quintante* de energía oscura compuesta en relación con el modelo  $\Lambda$ MOF.

El formalismo de Press-Schechter asume que la fracción de masa del Universo, contenida en sistemas enlazados gravitacionalmente con masas mayores que  $M$ , está dada por la fracción del espacio donde el contraste de densidad que ha evolucionado de forma lineal

<sup>7</sup>es posible usar una función de masa más realista que tiene su justificación física en el modelo del colapso elipsoidal [153, 154].

excede un umbral  $\delta_c$  y que el contraste de densidad está distribuido de forma normal con  $\mu = 0$  y con varianza  $\sigma^2(M)$ . Como cada escala de masa  $M$  colapsa para un determinado corrimiento al rojo (los cuerpos con masas mayores, correspondientes a escalas mayores, colapsan más tarde), el contraste de densidad crítica es una función del corrimiento al rojo,  $\delta_c = \delta_c(z)$ . Estas suposiciones conducen a la conocida fórmula para la densidad del número clusters de masa comprendida en el rango de  $m$  y  $M + dM$  para un corrimiento al rojo dado:

$$\frac{dn}{dM}(M, z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\rho_{m0}}{M} \frac{\delta_c(z, \omega)}{\sigma(M, z)} \frac{d \ln \sigma(M, z)}{dM} e^{-\frac{\delta_c^2(z)}{2\sigma^2(M, z)}}, \quad (6.51)$$

donde  $\rho_{m0}$  es la densidad actual de materia del Universo,  $\delta_c(z)$  es la sobredensidad lineal de las fluctuaciones que colapsan para un corrimiento al rojo  $z$ :  $\delta_c(z, \omega) = \delta_{lin}(z = z_{coll})$ . Para determinar la  $\delta_c(z, \omega)$  se usa el ajuste propuesto en [155] debido a que este parámetro muestra una dependencia muy débil con respecto al modelo cosmológico que se estudie y su valor hoy en día es muy cercano al de un Universo Einstein-de Sitter de 1,68:

$$\delta_c(z, \omega) = \frac{3(12\pi)^{2/3}}{20} [1 + \alpha \log_{10} \Omega_m(z)], \quad (6.52)$$

donde:

$$\alpha = 0,353w^2 + 1,044w^3 + 1,128w^2 + 0,555w + 0,131. \quad (6.53)$$

La cantidad:

$$\sigma(M, z) = D(z)\sigma_M, \quad (6.54)$$

es la desviación típica de las fluctuaciones de la densidad de la esfera de radio  $R$  que contiene la masa  $M$ , donde  $D_n(z) \equiv \delta_m(z)/\delta_z(z = 0)$  es la función de crecimiento lineal normalizada con respecto al valor presente del contraste de densidad lineal obtenida a

partir de la ecuación (6.39) y se usa el ajuste propuesto en [156] para obtener a:

$$\sigma_M = \sigma_8 \left( \frac{M}{M_8} \right)^{-\frac{\gamma(M)}{3}}, \quad (6.55)$$

donde  $M_8 = 6 \times 10^{14} \Omega_{m0} h^{-1} M_\odot$  es la masa dentro de una esfera de radio  $R_8 = 8h^{-1} Mpc$ , y  $\sigma_8$  es la desviación típica de la sobredensidad sobre una escala de tamaño  $R_8$ . El índice  $\gamma(M)$  es una función de la escala de masas en la que se trabaje y del llamado *parámetro de formación*:

$$\gamma(M) = (0,3\Gamma + 0,2) \left[ 2,92 + \frac{1}{3} \log \left( \frac{M}{M_8} \right) \right], \quad (6.56)$$

donde se ha fijado  $\Gamma = 0,149$  [156].

Para poder comparar a modelos diferentes se usa la ecuación de normalización (aquí el subíndice *mod* es sinónimo de modelo):

$$\sigma_{8,mod} = \frac{\delta_{c,M}(z=0)}{\delta_{c,\Lambda}(z=0)} \sigma_{8,\Lambda}. \quad (6.57)$$

El valor de  $\sigma_{8,\Lambda} = 0,796$  es restringido por las observaciones del WMAP[6]. El efecto de la energía oscura sobre el número de cúmulos de materia oscura fría es analizado mediante el cálculo del número de cúmulos por unidad de corrimiento al rojo, para un rango de masa dado:

$$N_{bin} = \frac{dN}{dz} \int_{4\pi} d\Omega \int_{M_{inf}}^{M_{sup}} \frac{dn}{dM} \frac{d^2V}{dzd\Omega} dM, \quad (6.58)$$

donde el volumen comóvil es:

$$\frac{d^2V}{dzd\Omega} = c \frac{d_A(z)^2 (1+z)^2}{H(z)}, \quad (6.59)$$

y  $d_A(z)$  es la distancia diámetro angular.

El número de conteo de cúmulos de galaxias virializadas,  $N_{bin} = dN/dz$ , obtenidas a partir

de (6.58), son mostrados en las figuras 6.15, 6.16 y 6.17. Todos los modelos exhiben un comportamiento similar: las estructuras más masivas son menos abundantes y se forman más tarde. Este es un resultado en concordancia con el modelo jerárquico de formación de estructuras<sup>8</sup>.

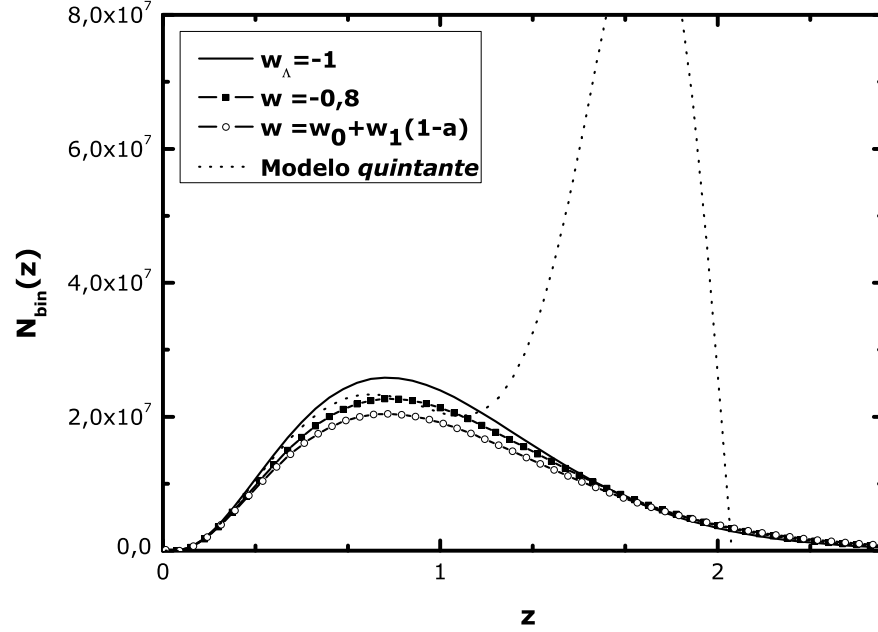


Figura 6.15.: Evolución del conteo del número de cúmulos de galaxias virializadas con masas dentro del rango  $10^{13} < M/(h^{-1}M_{\odot}) < 10^{14}$ .

El modelo *quintante* de energía oscura es capaz de reproducir los resultados de los demás modelos de un modo satisfactorio para la época más reciente de la formación de estructuras. Esto es para valores del corrimiento al rojo no mucho mayores de  $z = 1$  para los tres rangos de valores. Sin embargo, para corrimientos al rojo mayores muestra picos abruptos de la formación de estructuras, constituyendo esto una seria desviación del modelo jerárquico de las estructuras de gran escala. Esto parece ser causado por el valor inusual que muestra el parámetro de la ecuación de estado de la energía oscura *quintante*, la cual se comporta como materia rígida (*stiff*). Esto podría traer consigo una acumulación

<sup>8</sup>en [157] se discuten estos efectos para otras parametrizaciones de modelos de energía oscura.

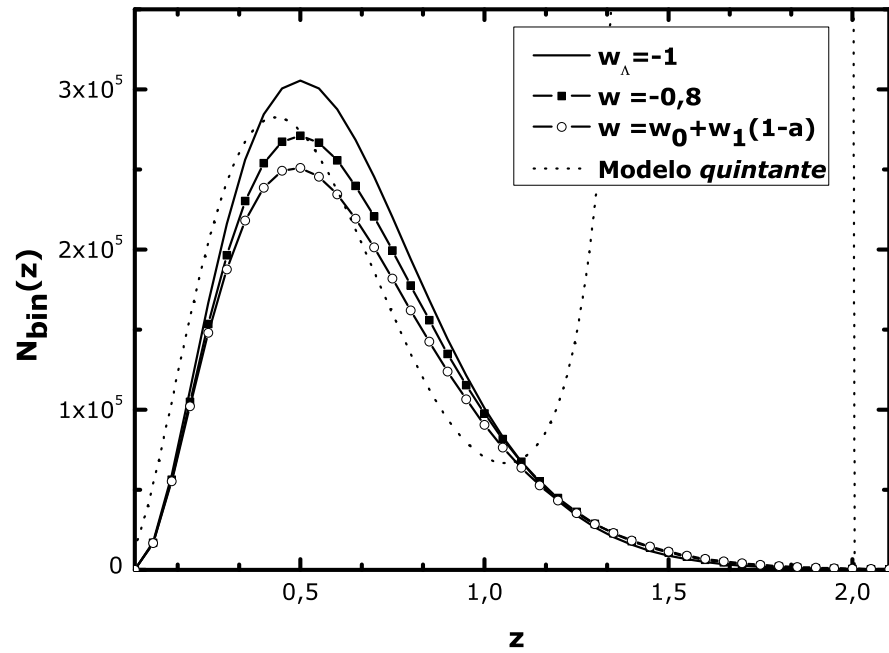


Figura 6.16.: Evolución del conteo del número de cúmulos de galaxias virializadas con masas dentro del rango  $10^{14} < M/(h^{-1}M_{\odot}) < 10^{15}$ .

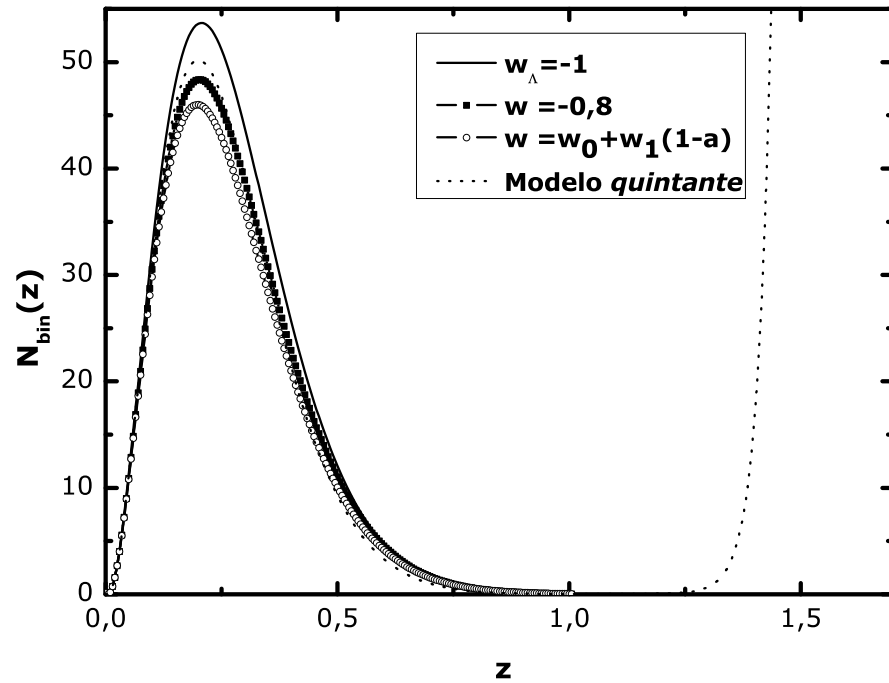


Figura 6.17.: Evolución del conteo del número de cúmulos de galaxias virializadas con masas dentro del rango  $10^{15} < M/(h^{-1}M_{\odot}) < 10^{16}$ .

mejorada de las estructuras que se forman por el efecto gravitacional y de las fuerzas viscosas.

### 6.3. Conclusiones Parciales

En este Capítulo se han estudiados tres modelos del Universo, desde la perspectiva de la formación de las estructuras en el Universo.

Los dos primeros casos poseen en común que la energía oscura es modelada usando un campo escalar con potenciales doble exponencial pero son estudiados siguiendo modelos basados en la Teoría de Einstein y de Brans-Dicke. En ambos casos los parámetros libres fueron refinados en mayor grado, usando el índice de crecimiento de las fluctuaciones cosmológicas en su régimen lineal. Estos parámetros habían sido refinados con anterioridad usando los resultados observacionales de la radiación cósmica de fondo y la nucleosíntesis primordial.

Finalmente el modelo *quintante* fue sometido al análisis de la evolución lineal y no lineal de las fluctuaciones cosmológicas así como a las predicciones del número de cúmulos de galaxias y se compararon sus resultados con los de otros modelos, entre ellos el modelo de concordancia  $\Lambda$ MOF. Aún cuando fue capaz de pasar la primera prueba de forma razonablemente bien, en las dos últimas mostró serias discrepancias con la corriente principal de la interpretación de las observaciones astrofísicas, por ejemplo con el modelo jerárquico de formación de estructuras.

## 7. CONCLUSIONES

Esta Tesis ha estado dirigida a ahondar en el conocimiento del origen y naturaleza de la fase actual de expansión acelerada del Universo, mediante el estudio de dos clases de modelos: las teorías  $f(R)$  de gravedad modificada y los modelos de energía oscura. Ambas aproximaciones están motivadas, entre otras razones, por la capacidad que tienen de poder explicar dicha fase.

En el caso de teorías  $f(R)$ , el estudio se centró en la posibilidad de encontrar un marco donde la energía oscura es reemplazada por una función genérica de  $R$  cuyo efecto sobre la expansión global del Universo es equivalente y en el estudio de las consecuencias fenomenológicas de tomar en cuenta, de forma rigurosa, las condiciones de existencia y estabilidad de las soluciones de Sitter para una clase extensa de teorías  $f(R)$ . En este sentido se logró la reconstrucción de una teoría  $f(R)$  a partir de una dinámica conocida de un modelo de energía oscura imponiendo la condición de que tuviesen la misma dependencia del parámetro de Hubble con el tiempo. Esto último implica que el nuevo modelo no sólo será capaz de pasar las pruebas observacionales que dependen de la expansión del Universo, sino que además, estará libre de términos de energía oscura y con ello de los problemas teóricos que presenta la presencia de una constante cosmológica.

Además se demostró que una amplia gama de modelos  $f(R)$  o no admiten soluciones estables de Sitter ( $dS$ ), o admiten en su lugar una coincidencia asintóticamente estable

de las soluciones locales con la métrica de fondo de un espacio anti-de Sitter ( $AdS$ ). Quedando descartados estos modelos como solución a la expansión acelerada del Universo. Con relación a las teorías  $f(R)$  cuyos términos no lineales posean potencias combinadas de  $R$  se demostró que pueden constituir escenarios atractivos de unificación de la dinámica de inflación temprana y de la expansión acelerada de Universo tardío. Esto se logra para una región del espacio de parámetros debido a la existencia de dos escalas de masa diferentes. Finalmente, se generalizó la condición de no existencias de grados de libertad fantasmas para las modificaciones tipo  $DBI$  a la Relatividad General, hallándose que esta implica una restricción sobre uno de los parámetros del modelo.

Con relación a los modelos de energía oscura se estudiaron tres de ellos desde el punto de vista de la formación de estructuras, desarrollándose un formalismo efectivo, que permitió usar la historia de la formación de las grandes estructuras del Universo como prueba de compañía capaz de ayudar a refinar los parámetros libres del modelo bajo estudio. Esto último se logró en dos modelos de energía oscura cuyos campos escalares tienen potenciales doble exponenciales.

Se investigaron las evoluciones de las fluctuaciones cosmológicas en los regímenes lineal y no lineal para un modelo de energía oscura compuesta. Se compararon sus análisis con los del modelo de concordancia  $\Lambda$ MOF y con otros dos modelos cuyos parámetros de la ecuación de estado obedecen a parametrizaciones conocidas. Las predicciones del modelo de energía oscura compuesta fueron aceptables dentro del régimen lineal pero mostraron serias discrepancias en el régimen no lineal. Estas discrepancias se hicieron más evidentes cuando el modelo fue sometido al cálculo del número de cúmulos de galaxias mostrando un comportamiento que no se corresponde con el modelo jerárquico de formación de estructuras.

## 8. RECOMENDACIONES

Luego de realizar un estudio de modelos del Universo en los marcos de las teorías  $f(R)$  de gravedad modificada y de modelos de energía oscura se realizan las siguientes recomendaciones:

- Extender el estudio de la formación de estructuras al caso de las teorías  $f(R)$  capaces admitir soluciones estables de Ricci.
- Extender el estudio de los modelos de energía oscura a los Mundos Branas y con ayuda de las herramientas de los sistemas dinámicos, estudiar las propiedades asintóticas de los modelos cosmológicos con campo escalar auto-interactuante con potencial arbitrario, atrapado en una brana de Randall-Sundrum (RS) y en una brana Dvali-Gabadadze-Porrati (DGP).

# REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] **Supernova Search Team** Collaboration, A. G. Riess *et al.*, “Type Ia Supernova Discoveries at  $z > 1$  From the Hubble Space Telescope: Evidence for Past Deceleration and Constraints on Dark Energy Evolution,” *Astrophys. J.* **607** (2004) 665–687, [arXiv:astro-ph/0402512](#).
- [2] **Supernova Cosmology Project** Collaboration, A. J. Conley *et al.*, “Measurement of  $\Omega_m$ ,  $\Omega_\Lambda$  from a blind analysis of Type Ia supernovae with CMAGIC: Using color information to verify the acceleration of the Universe,” *Astrophys. J.* **644** (2006) 1, [arXiv:astro-ph/0602411](#).
- [3] **The High Z SN Search** Collaboration, A. Clocchiatti *et al.*, “Hubble Space Telescope and Ground-Based Observations of Type Ia Supernovae at Redshift 0.5: Cosmological Implications,” *Astrophys. J.* **642** (2006) 1–21, [arXiv:astro-ph/0510155](#).
- [4] S. Ho, C. Hirata, N. Padmanabhan, U. Seljak, and N. Bahcall, “Correlation of CMB with large-scale structure: I. ISW Tomography and Cosmological Implications,” *Phys. Rev.* **D78** (2008) 043519, [arXiv:0801.0642 \[astro-ph\]](#).
- [5] C. M. Hirata, S. Ho, N. Padmanabhan, U. Seljak, and N. A. Bahcall, “Correlation of CMB with large-scale structure: II. Weak lensing,” *Phys. Rev.* **D78** (2008) 043520, [arXiv:0801.0644 \[astro-ph\]](#).

- [6] **WMAP** Collaboration, E. Komatsu *et al.*, “Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation,” *Astrophys. J. Suppl.* **180** (2009) 330–376, [arXiv:0803.0547 \[astro-ph\]](#).
- [7] W. J. Percival, “Cosmological constraints from galaxy clustering,” *Lect. Notes Phys.* **720** (2007) 157–186, [arXiv:astro-ph/0601538](#).
- [8] K. Hirano, K. Kawabata, and Z. Komiya, “Spatial Periodicity of Galaxy Number Counts, CMB Anisotropy, and SNIa Hubble Diagram Based on the Universe Accompanied by a Non-Minimally Coupled Scalar Field,” *Astrophys. Space Sci.* **315** (2008) 53–72, [arXiv:0804.4240 \[astro-ph\]](#).
- [9] S. M. Carroll, W. H. Press, and E. L. Turner, “The Cosmological constant,” *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **30** (1992) 499–542.
- [10] V. Sahni and A. A. Starobinsky, “The Case for a Positive Cosmological Lambda-term,” *Int. J. Mod. Phys.* **D9** (2000) 373–444, [arXiv:astro-ph/9904398](#).
- [11] B. Ratra and P. J. E. Peebles, “Cosmological Consequences of a Rolling Homogeneous Scalar Field,” *Phys. Rev.* **D37** (1988) 3406.
- [12] C. Wetterich, “Cosmologies with variable Newton’s ‘constant’,” *Nucl. Phys.* **B302** (1988) 645.
- [13] R. R. Caldwell, R. Dave, and P. J. Steinhardt, “Cosmological Imprint of an Energy Component with General Equation-of-State,” *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 1582–1585, [arXiv:astro-ph/9708069](#).
- [14] P. J. E. Peebles and B. Ratra, “The cosmological constant and dark energy,” *Rev. Mod. Phys.* **75** (2003) 559–606, [arXiv:astro-ph/0207347](#).
- [15] T. Padmanabhan, “Cosmological constant: The weight of the vacuum,” *Phys. Rept.* **380** (2003) 235–320, [arXiv:hep-th/0212290](#).

- [16] S.-Y. Zhou, “A New Approach to Quintessence and a Solution of Multiple Attractors,” *Phys. Lett.* **B660** (2008) 7–12, [arXiv:0705.1577 \[astro-ph\]](#).
- [17] E. V. Linder, “The Dynamics of Quintessence, The Quintessence of Dynamics,” *Gen. Rel. Grav.* **40** (2008) 329–356, [arXiv:0704.2064 \[astro-ph\]](#).
- [18] T. Gonzalez and I. Quiros, “Exact models with non-minimal interaction between dark matter and (either phantom or quintessence) dark energy,” *Class. Quant. Grav.* **25** (2008) 175019, [arXiv:0707.2089 \[gr-qc\]](#).
- [19] M. Bouhmadi-Lopez and R. Lazkoz, “Chaplygin DGP cosmologies,” *Phys. Lett.* **B654** (2007) 51–57, [arXiv:0706.3896 \[astro-ph\]](#).
- [20] Z.-K. Guo and Y.-Z. Zhang, “Cosmology with a variable Chaplygin gas,” *Phys. Lett.* **B645** (2007) 326–329, [arXiv:astro-ph/0506091](#).
- [21] H. Garcia-Compean, G. Garcia-Jimenez, O. Obregon, and C. Ramirez, “Crossing the phantom divide in an interacting generalized Chaplygin gas,” *JCAP* **0807** (2008) 016, [arXiv:0710.4283 \[hep-th\]](#).
- [22] P. Jorge, J. P. Mimoso, and D. Wands, “On the dynamics of k-essence models,” *J. Phys. Conf. Ser.* **66** (2007) 012031.
- [23] R. de Putter and E. V. Linder, “Kinetic k-essence and Quintessence,” *Astropart. Phys.* **28** (2007) 263–272, [arXiv:0705.0400 \[astro-ph\]](#).
- [24] S. Sur and S. Das, “Multiple kinetic k-essence, phantom barrier crossing and stability,” *JCAP* **0901** (2009) 007, [arXiv:0806.4368 \[astro-ph\]](#).
- [25] R. Lazkoz, G. Leon, and I. Quiros, “Quintom cosmologies with arbitrary potentials,” *Phys. Lett.* **B649** (2007) 103–110, [arXiv:astro-ph/0701353](#).
- [26] T. Matos, A. Vazquez-Gonzalez, and J. Magana, “Study of several potentials as scalar field dark matter candidates,” *AIP Conf. Proc.* **1083** (2008) 144–170.

- [27] W. Fang, Y. Li, K. Zhang, and H.-Q. Lu, “Exact Analysis of Scaling and Dominant Attractors Beyond the Exponential Potential,” *Class. Quant. Grav.* **26** (2009) 155005, [arXiv:0810.4193 \[astro-ph\]](#).
- [28] L. A. Urena-Lopez and M. J. Reyes-Ibarra, “On the dynamics of a quadratic scalar field potential,” *Int. J. Mod. Phys.* **D18** (2009) 621–634, [arXiv:0709.3996 \[astro-ph\]](#).
- [29] E. J. Copeland, A. R. Liddle, and D. Wands, “Exponential potentials and cosmological scaling solutions,” *Phys. Rev.* **D57** (1998) 4686–4690, [arXiv:gr-qc/9711068](#).
- [30] T. Gonzalez Cruz, *Modelos del Universo con Inclusión de Campos Escalares e Interacción no Gravitatoria entre la Materia Oscura y la Energía Oscura*. PhD thesis, Departamento de Física. Facultad de Matemática, Física y Computación. Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas. Cuba, 2006.
- [31] R. Crittenden, “A dark energy primer,” *AIP Conf. Proc.* **1083** (2008) 74–95.
- [32] E. J. Copeland, M. Sami, and S. Tsujikawa, “Dynamics of dark energy,” *Int. J. Mod. Phys.* **D15** (2006) 1753–1936, [arXiv:hep-th/0603057](#).
- [33] J. A. Frieman, “Lectures on dark energy and cosmic acceleration,” *AIP Conf. Proc.* **1057** (2008) 87–124.
- [34] S. Nojiri and S. D. Odintsov, “Unifying inflation with LambdaCDM epoch in modified  $f(R)$  gravity consistent with Solar System tests,” *Phys. Lett.* **B657** (2007) 238–245, [arXiv:0707.1941 \[hep-th\]](#).
- [35] G. Allemandi and M. L. Ruggiero, “Constraining Extended Theories of Gravity using Solar System Tests,” *Gen. Rel. Grav.* **39** (2007) 1381, [arXiv:astro-ph/0610661](#).

- [36] C. G. Boehmer, T. Harko, and F. S.Ñ. Lobo, “Solar system tests of brane world models,” *Class. Quant. Grav.* **25** (2008) 045015, arXiv:0801.1375 [gr-qc].
- [37] G. Cognola *et al.*, “A class of viable modified  $f(R)$  gravities describing inflation and the onset of accelerated expansion,” *Phys. Rev.* **D77** (2008) 046009, arXiv:0712.4017 [hep-th].
- [38] T. P. Sotiriou and V. Faraoni, “ $f(R)$  Theories Of Gravity,” arXiv:0805.1726 [gr-qc].
- [39] S. Nojiri and S. D. Odintsov, “Dark energy, inflation and dark matter from modified  $F(R)$  gravity,” arXiv:0807.0685 [hep-th].
- [40] V. F. Cardone, R. P. Cardenas, and Y. Leyva Nodal, “Halting eternal acceleration with an effective negative cosmological constant,” *Class. Quant. Grav.* **25** (2008) 135010, arXiv:0805.1267 [astro-ph].
- [41] Y. Leyva Nodal, V. F. Cardone, and R. P. Cardenas, “Halting eternal acceleration with a negative cosmological constant,” *AIP Conf. Proc.* **1083** (2008) 128–135.
- [42] I. Quiros, Y. Leyva, and Y. Napoles, “A Note on de Sitter Embedding of  $f(R)$  Theories,” *Phys. Rev.* **D80** (2009) 024022, arXiv:0906.1190 [gr-qc].
- [43] T. Gonzalez, R. Cardenas, I. Quiros, and Y. Leyva, “Evolution of density perturbations in double exponential quintessence models,” *Astrophys. Space Sci.* **310** (2007) 13–18, arXiv:0707.2097 [astro-ph].
- [44] Y. Leyva, R. Cardenas, and V. Cardone, “Quinstant Dark Energy Predictions for Structure Formation,” *Astrophys. Space Sci.* **323** (2009) 107, arXiv:0906.3713 [astro-ph].
- [45] F. Hoyle, “A New Model for the Expanding universe,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc* **108** (1948) 372.

- [46] A. A. Penzias and R. W. Wilson, “A Measurement of excess antenna temperature at 4080- Mc/s,” *Astrophys. J.* **142** (1965) 419–421.
- [47] C. L. Bennett *et al.*, “4-Year COBE DMR Cosmic Microwave Background Observations: Maps and Basic Results,” *Astrophys. J.* **464** (1996) L1–L4, [arXiv:astro-ph/9601067](#).
- [48] S. Burles, K. M. Nollett, and M. S. Turner, “Big-Bang Nucleosynthesis Predictions for Precision Cosmology,” *Astrophys. J.* **552** (2001) L1–L6, [arXiv:astro-ph/0010171](#).
- [49] T. Dent, S. Stern, and C. Wetterich, “Primordial nucleosynthesis as a probe of fundamental physics parameters,” *Phys. Rev.* **D76** (2007) 063513, [arXiv:0705.0696 \[astro-ph\]](#).
- [50] F. Zwicky, “Spectral displacement of extra galactic nebulae,” *Helv. Phys. Acta* **6** (1933) 110–127.
- [51] F. Zwicky, “On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae,” *Astrophys. J.* **86** (1937) 217–246.
- [52] V. C. Rubin and J. Ford, W. Kent, “Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions,” *Astrophys. J.* **159** (1970) 379–403.
- [53] **Supernova Cosmology Project** Collaboration, S. Perlmutter *et al.*, “Discovery of a Supernova Explosion at Half the Age of the Universe and its Cosmological Implications,” *Nature* **391** (1998) 51–54, [arXiv:astro-ph/9712212](#).
- [54] **Supernova Cosmology Project** Collaboration, S. Perlmutter *et al.*, “Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae,” *Astrophys. J.* **517** (1999) 565–586, [arXiv:astro-ph/9812133](#).
- [55] **Supernova Search Team** Collaboration, B. P. Schmidt *et al.*, “The High-Z

- Supernova Search: Measuring Cosmic Deceleration and Global Curvature of the Universe Using Type Ia Supernovae,” *Astrophys. J.* **507** (1998) 46–63, [arXiv:astro-ph/9805200](#).
- [56] C. Brans and R. H. Dicke, “Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation,” *Phys. Rev.* **124** (1961) 925–935.
- [57] C. H. Brans, “Scalar-tensor theories of gravity: Some personal history,” *AIP Conf. Proc.* **1083** (2008) 34–46.
- [58] C. M. Will, “Theory and experiment in gravitational physics,”. Cambridge, UK: Univ. Pr. (1993) 380 p.
- [59] Y. Fujii and K. Maeda, “The scalar-tensor theory of gravitation,”. Cambridge, USA: Univ. Pr. (2003) 240 p.
- [60] V. Faraoni, “Cosmology in scalar tensor gravity,”. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers (2004) 267 pages. Vol.139, Fundamental Theories of Physics Series, ISBN 1-4020-1988-2.
- [61] G. A. Vilkovisky, “Effective action in quantum gravity,” *Class. Quant. Grav.* **9** (1992) 895–903.
- [62] S. Nojiri and S. D. Odintsov, “Introduction to modified gravity and gravitational alternative for dark energy,” *ECONF* **C0602061** (2006) 06, [arXiv:hep-th/0601213](#).
- [63] S. Capozziello, “Curvature Quintessence,” *Int. J. Mod. Phys.* **D11** (2002) 483–492, [arXiv:gr-qc/0201033](#).
- [64] D. t. Vollick, “Curvature Corrections as the Source of the Cosmological Acceleration,” *Phys. Rev.* **D68** (2003) 063510, [arXiv:astro-ph/0306630](#).
- [65] S. M. Carroll, V. Duvvuri, M. Trodden, and M. S. Turner, “Is cosmic speed-up

- due to new gravitational physics?," *Phys. Rev.* **D70** (2004) 043528, arXiv:astro-ph/0306438.
- [66] G. J. Olmo, "The gravity lagrangian according to solar system experiments," *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005) 261102, arXiv:gr-qc/0505101.
- [67] G. J. Olmo, "Post-Newtonian constraints on  $f(R)$  cosmologies in metric and Palatini formalism," *Phys. Rev.* **D72** (2005) 083505.
- [68] G. J. Olmo, "Limit to general relativity in  $f(R)$  theories of gravity," *Phys. Rev.* **D75** (2007) 023511, arXiv:gr-qc/0612047.
- [69] T. P. Sotiriou, "6+1 lessons from  $f(R)$  gravity," arXiv:0810.5594 [gr-qc].
- [70] V. Faraoni, " $f(R)$  gravity: successes and challenges," arXiv:0810.2602 [gr-qc].
- [71] A. A. Starobinsky, "A new type of isotropic cosmological models without singularity," *Phys. Lett.* **B91** (1980) 99–102.
- [72] S. Capozziello, S. Carloni, and A. Troisi, "Quintessence without scalar fields," *Recent Res. Dev. Astron. Astrophys.* **1** (2003) 625, arXiv:astro-ph/0303041.
- [73] T. Chiba, T. L. Smith, and A. L. Erickcek, "Solar System constraints to general  $f(R)$  gravity," *Phys. Rev.* **D75** (2007) 124014, arXiv:astro-ph/0611867.
- [74] A. D. Dolgov and M. Kawasaki, "Can modified gravity explain accelerated cosmic expansion?," *Phys. Lett.* **B573** (2003) 1–4, arXiv:astro-ph/0307285.
- [75] R. M. Hawkins and J. E. Lidsey, "Inflation on a single brane: Exact solutions," *Phys. Rev.* **D63** (2001) 041301, arXiv:gr-qc/0011060.
- [76] G. Huey and J. E. Lidsey, "Inflation, braneworlds and quintessence," *Phys. Lett.* **B514** (2001) 217–225, arXiv:astro-ph/0104006.
- [77] A. S. Majumdar, "From brane assisted inflation to quintessence through a single

- scalar field,” *Phys. Rev.* **D64** (2001) 083503, [arXiv:astro-ph/0105518](#).
- [78] V. Sahni, M. Sami, and T. Souradeep, “Relic gravity waves from brane world inflation,” *Phys. Rev.* **D65** (2002) 023518, [arXiv:gr-qc/0105121](#).
- [79] M. Sami and V. Sahni, “Quintessential inflation on the brane and the relic gravity wave background,” *Phys. Rev.* **D70** (2004) 083513, [arXiv:hep-th/0402086](#).
- [80] K. Dimopoulos and J. W. F. Valle, “Modeling quintessential inflation,” *Astropart. Phys.* **18** (2002) 287–306, [arXiv:astro-ph/0111417](#).
- [81] K. Dimopoulos, “The curvaton hypothesis and the eta-problem of quintessential inflation, with and without branes,” *Phys. Rev.* **D68** (2003) 123506, [arXiv:astro-ph/0212264](#).
- [82] A. Gonzalez, T. Matos, and I. Quiros, “Unified models of inflation and quintessence,” *Phys. Rev.* **D71** (2005) 084029, [arXiv:hep-th/0410069](#).
- [83] R. Maartens, “Brane-world gravity,” *Living Rev. Rel.* **7** (2004) 7, [arXiv:gr-qc/0312059](#).
- [84] Y. Leyva, D. González, T. González, T. Matos, and I. Quiros, “Dynamics of a Self-interacting Scalar Field Trapped in the Braneworld for a Wide Variety of Self-interaction Potentials,” *Phys. Rev.* **D80** (2009) 044026.
- [85] G. R. Dvali, G. Gabadadze, and M. Porrati, “4D gravity on a brane in 5D Minkowski space,” *Phys. Lett.* **B485** (2000) 208–214, [arXiv:hep-th/0005016](#).
- [86] G. R. Dvali, G. Gabadadze, M. Kolanovic, and F. Nitti, “The power of brane-induced gravity,” *Phys. Rev.* **D64** (2001) 084004, [arXiv:hep-ph/0102216](#).
- [87] C. Deffayet, G. R. Dvali, and G. Gabadadze, “Accelerated universe from gravity leaking to extra dimensions,” *Phys. Rev.* **D65** (2002) 044023, [arXiv:astro-ph/0105068](#).

- [88] I. Quiros, R. Garcia-Salcedo, T. Matos, and C. Moreno, “Self accelerating solutions in a DGP brane with a scalar field trapped on it: the dynamical systems perspective,” *Phys. Lett.* **B670** (2009) 259–265, [arXiv:0802.3362 \[gr-qc\]](#).
- [89] M. R. Setare and P. Moyassari, “Quintom dark energy in DGP braneworld cosmology,” *Phys. Lett.* **B674** (2009) 237–242, [arXiv:0806.2418 \[gr-qc\]](#).
- [90] C. Deffayet, “Cosmology on a brane in Minkowski bulk,” *Phys. Lett.* **B502** (2001) 199–208, [arXiv:hep-th/0010186](#).
- [91] L. P. Chimento, R. Lazkoz, R. Maartens, and I. Quiros, “Crossing the phantom divide without phantom matter,” *JCAP* **0609** (2006) 004, [arXiv:astro-ph/0605450](#).
- [92] S. Deser and G. W. Gibbons, “Born-Infeld-Einstein actions?,” *Class. Quant. Grav.* **15** (1998) L35–L39, [arXiv:hep-th/9803049](#).
- [93] S. Capozziello, V. F. Cardone, S. Carloni, and A. Troisi, “Curvature quintessence matched with observational data,” *Int. J. Mod. Phys.* **D12** (2003) 1969–1982, [arXiv:astro-ph/0307018](#).
- [94] S. Capozziello, V. F. Cardone, and A. Troisi, “Reconciling dark energy models with  $f(R)$  theories,” *Phys. Rev.* **D71** (2005) 043503, [arXiv:astro-ph/0501426](#).
- [95] S. Capozziello, “Extended gravity: theory and phenomenology,” *PoS QG-PH* (2007) 015.
- [96] R. Cardenas, T. Gonzalez, Y. Leyva, O. Martin, and I. Quiros, “A model of the universe including dark energy accounted for by both a quintessence field and a (negative) cosmological constant,” *Phys. Rev.* **D67** (2003) 083501, [arXiv:astro-ph/0206315](#).
- [97] T. Multamaki and I. Vilja, “Cosmological expansion and the uniqueness of

- gravitational action,” *Phys. Rev.* **D73** (2006) 024018, [arXiv:astro-ph/0506692](#).
- [98] S. Capozziello, V. F. Cardone, E. Piedipalumbo, and C. Rubano, “Dark energy exponential potential models as curvature quintessence,” *Class. Quant. Grav.* **23** (2006) 1205–1216, [arXiv:astro-ph/0507438](#).
- [99] J.-P. Uzan, “The fundamental constants and their variation: Observational status and theoretical motivations,” *Rev. Mod. Phys.* **75** (2003) 403, [arXiv:hep-ph/0205340](#).
- [100] J. D. Barrow and A. C. Ottewill, “The Stability of General Relativistic Cosmological Theory,” *J. Phys.* **A16** (1983) 2757.
- [101] S. Nojiri and S. D. Odintsov, “Newton law corrections and instabilities in  $f(R)$  gravity with the effective cosmological constant epoch,” *Phys. Lett.* **B652** (2007) 343–348, [arXiv:0706.1378 \[hep-th\]](#).
- [102] V. Faraoni, “de Sitter space and the equivalence between  $f(R)$  and scalar-tensor gravity,” *Phys. Rev.* **D75** (2007) 067302, [arXiv:gr-qc/0703044](#).
- [103] V. Muller, H. J. Schmidt, and A. A. Starobinsky, “The Stability of the de Sitter Space-Time in Fourth Order Gravity,” *Phys. Lett.* **B202** (1988) 198.
- [104] D. Wands, “Extended gravity theories and the Einstein-Hilbert action,” *Class. Quant. Grav.* **11** (1994) 269–280, [arXiv:gr-qc/9307034](#).
- [105] A. Hindawi, B. A. Ovrut, and D. Waldram, “Non-Trivial Vacua in Higher-Derivative Gravitation,” *Phys. Rev.* **D53** (1996) 5597–5608, [arXiv:hep-th/9509147](#).
- [106] T. Chiba, “Generalized gravity and ghost,” *JCAP* **0503** (2005) 008, [arXiv:gr-qc/0502070](#).
- [107] L. Amendola, R. Gannouji, D. Polarski, and S. Tsujikawa, “Conditions for the

- cosmological viability of  $f(R)$  dark energy models,”  
*Phys. Rev.* **D75** (2007) 083504, [arXiv:gr-qc/0612180](#).
- [108] L. Amendola, D. Polarski, and S. Tsujikawa, “Are  $f(R)$  dark energy models cosmologically viable ?,” *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007) 131302, [arXiv:astro-ph/0603703](#).
- [109] L. Amendola, D. Polarski, and S. Tsujikawa, “Power-laws  $f(R)$  theories are cosmologically unacceptable,” *Int. J. Mod. Phys.* **D16** (2007) 1555–1561, [arXiv:astro-ph/0605384](#).
- [110] A. L. Erickcek, T. L. Smith, and M. Kamionkowski, “Solar system tests do rule out  $1/R$  gravity,” *Phys. Rev.* **D74** (2006) 121501, [arXiv:astro-ph/0610483](#).
- [111] S. Nojiri and S. D. Odintsov, “Modified gravity with negative and positive powers of the curvature: Unification of the inflation and of the cosmic acceleration,” *Phys. Rev.* **D68** (2003) 123512, [arXiv:hep-th/0307288](#).
- [112] S. Nojiri and S. D. Odintsov, “Modified gravity with  $\ln R$  terms and cosmic acceleration,” *Gen. Rel. Grav.* **36** (2004) 1765–1780, [arXiv:hep-th/0308176](#).
- [113] D. Comelli, “Born-Infeld type gravity,” *Phys. Rev.* **D72** (2005) 064018, [arXiv:gr-qc/0505088](#).
- [114] G. Cognola, E. Elizalde, S. Nojiri, S. D. Odintsov, and S. Zerbini, “Dark energy in modified Gauss-Bonnet gravity: Late-time acceleration and the hierarchy problem,” *Phys. Rev.* **D73** (2006) 084007, [arXiv:hep-th/0601008](#).
- [115] W. Hu and I. Sawicki, “Models of  $f(R)$  Cosmic Acceleration that Evade Solar-System Tests,” *Phys. Rev.* **D76** (2007) 064004, [arXiv:0705.1158 \[astro-ph\]](#).
- [116] O. Arias, T. Gonzalez, Y. Leyva, and I. Quiros, “Exact scaling solutions in normal

- and Brans-Dicke models of dark energy,” *Class. Quant. Grav.* **20** (2003) 2563, [arXiv:gr-qc/0307016](#).
- [117] C. Rubano and P. Scudellaro, “On some exponential potentials for a cosmological scalar field as quintessence,” *Gen. Rel. Grav.* **34** (2002) 307–328, [arXiv:astro-ph/0103335](#).
- [118] P. S. Corasaniti and E. J. Copeland, “Constraining the quintessence equation of state with SnIa data and CMB peaks,” *Phys. Rev.* **D65** (2002) 043004, [arXiv:astro-ph/0107378](#).
- [119] R. Bean, S. H. Hansen, and A. Melchiorri, “Constraining the dark universe,” *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **110** (2002) 167–172, [arXiv:astro-ph/0201127](#).
- [120] R. Bean, S. H. Hansen, and A. Melchiorri, “Early universe constraints on dark energy,” *Phys. Rev.* **D64** (2001) 103508, [arXiv:astro-ph/0104162](#).
- [121] R. Dave, R. R. Caldwell, and P. J. Steinhardt, “Sensitivity of the cosmic microwave background anisotropy to initial conditions in quintessence cosmology,” *Phys. Rev.* **D66** (2002) 023516, [arXiv:astro-ph/0206372](#).
- [122] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman, and R. H. Brandenberger, “Theory of cosmological perturbations. Part 1. Classical perturbations. Part 2. Quantum theory of perturbations. Part 3. Extensions,” *Phys. Rept.* **215** (1992) 203–333.
- [123] N. Bartolo, P. S. Corasaniti, A. R. Liddle, and M. Malquarti, “Perturbations in cosmologies with a scalar field and a perfect fluid,” *Phys. Rev.* **D70** (2004) 043532, [arXiv:astro-ph/0311503](#).
- [124] L. Amendola, “Linear and non-linear perturbations in dark energy models,” *Phys. Rev.* **D69** (2004) 103524, [arXiv:astro-ph/0311175](#).
- [125] R. H. Brandenberger, “Lectures on the theory of cosmological perturbations,”

- Lect. Notes Phys.* **646** (2004) 127–167, [arXiv:hep-th/0306071](#).
- [126] P. J. E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology*. Princeton University Press, 1993.
- [127] T. Padmanabhan, *Structure Formation in the Universe*. Cambridge University Press, 1995.
- [128] L. Verde *et al.*, “The 2dF Galaxy Redshift Survey: The bias of galaxies and the density of the Universe,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **335** (2002) 432, [arXiv:astro-ph/0112161](#).
- [129] E. Hawkins *et al.*, “The 2dF Galaxy Redshift Survey: correlation functions, peculiar velocities and the matter density of the Universe,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **346** (2003) 78, [arXiv:astro-ph/0212375](#).
- [130] Y. Wang and M. Tegmark, “New dark energy constraints from supernovae, microwave background and galaxy clustering,” *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004) 241302, [arXiv:astro-ph/0403292](#).
- [131] T. Barreiro, E. J. Copeland, and N. J. Nunes, “Quintessence arising from exponential potentials,” *Phys. Rev.* **D61** (2000) 127301, [arXiv:astro-ph/9910214](#).
- [132] R. Cardenas, O. Martin, and I. Quiros, “Comments on the paper [astro-ph/0103335](#) by C. Rubano and P. Scudellaro,” *Gen. Rel. Grav.* **34** (2002) 1877–1885, [arXiv:astro-ph/0112316](#).
- [133] D. Huterer and M. S. Turner, “Revealing Quintessence,” *Phys. Rev.* **D60** (1999) 081301, [arXiv:astro-ph/9808133](#).
- [134] D. Huterer and M. S. Turner, “Probing the dark energy: Methods and strategies,” *Phys. Rev.* **D64** (2001) 123527, [arXiv:astro-ph/0012510](#).
- [135] J. Weller and A. J. Albrecht, “Opportunities for future supernova studies of cosmic

- acceleration,” *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001) 1939–1942, [arXiv:astro-ph/0008314](#).
- [136] M. Chevallier and D. Polarski, “Accelerating universes with scaling dark matter,” *Int. J. Mod. Phys.* **D10** (2001) 213–224, [arXiv:gr-qc/0009008](#).
- [137] E. V. Linder, “Exploring the expansion history of the universe,” *Phys. Rev. Lett.* **90** (2003) 091301, [arXiv:astro-ph/0208512](#).
- [138] E. V. Linder, “Probing gravitation, dark energy, and acceleration,” *Phys. Rev.* **D70** (2004) 023511, [arXiv:astro-ph/0402503](#).
- [139] E. V. Linder and D. Huterer, “How many dark energy parameters?,” *Phys. Rev.* **D72** (2005) 043509, [arXiv:astro-ph/0505330](#).
- [140] P. S. Corasaniti and E. J. Copeland, “A model independent approach to the dark energy equation of state,” *Phys. Rev.* **D67** (2003) 063521, [arXiv:astro-ph/0205544](#).
- [141] P. S. Corasaniti, B. A. Bassett, C. Ungarelli, and E. J. Copeland, “Model-independent dark energy differentiation with the ISW effect,” *Phys. Rev. Lett.* **90** (2003) 091303, [arXiv:astro-ph/0210209](#).
- [142] B. A. Bassett, P. S. Corasaniti, and M. Kunz, “The essence of quintessence and the cost of compression,” *Astrophys. J.* **617** (2004) L1–L4, [arXiv:astro-ph/0407364](#).
- [143] C. R. Mullis *et al.*, “Discovery of an X-ray-Luminous Galaxy Cluster at  $z=1.4$ ,” *Astrophys. J.* **623** (2005) L85–L88, [arXiv:astro-ph/0503004](#).
- [144] S. A. Stanford *et al.*, “The XMM Cluster Survey: A Massive Galaxy Cluster at  $z=1.45$ ,” *Astrophys. J.* **646** (2006) L13–L16, [arXiv:astro-ph/0606075](#).
- [145] A. A. Sen, V. F. Cardone, S. Capozziello, and A. Troisi, “Structure formation and CMBR anisotropy spectrum in the inflessence model,” *Astron. Astrophys.* **460** (2006) 29–36, [arXiv:astro-ph/0511313](#).

- [146] S. Basilakos, “Cluster formation rate in models with ”dark energy”,”  
*Astrophys. J.* **590** (2003) 636–640, [arXiv:astro-ph/0303112](#).
- [147] D. F. Mota and C. van de Bruck, “On the spherical collapse model in dark energy cosmologies,” *Astron. Astrophys.* **421** (2004) 71–81, [arXiv:astro-ph/0401504](#).
- [148] C. Horellou and J. Berge, “Dark energy and the evolution of spherical overdensities,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **360** (2005) 1393–1400,  
[arXiv:astro-ph/0504465](#).
- [149] I. Maor and O. Lahav, “On Virialization with Dark Energy,”  
*JCAP* **0507** (2005) 003, [arXiv:astro-ph/0505308](#).
- [150] P. Wang, “Virialization in Dark Energy Cosmology,”  
*Astrophys. J.* **640** (2006) 18–21, [arXiv:astro-ph/0507195](#).
- [151] D.-F. Zeng and Y.-H. Gao, “Spherical collapse model and dark energy. II,”  
[arXiv:astro-ph/0505164](#).
- [152] W. H. Press and P. Schechter, “Formation of galaxies and clusters of galaxies by selfsimilar gravitational condensation,” *Astrophys. J.* **187** (1974) 425–438.
- [153] R. K. Sheth and G. Tormen, “Large scale bias and the peak background split,”  
*Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **308** (1999) 119, [arXiv:astro-ph/9901122](#).
- [154] A. Jenkins *et al.*, “Mass function of dark matter halos,”  
*Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **321** (2001) 372, [arXiv:astro-ph/0005260](#).
- [155] N. Weinberg and M. Kamionkowski, “Constraining dark energy from the abundance of weak gravitational lenses,”  
*Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **341** (2003) 251, [arXiv:astro-ph/0210134](#).
- [156] P. T. P. Viana and A. R. Liddle, “The Cluster Abundance in Flat and Open Cosmologies,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **281** (1996) 323,

arXiv:astro-ph/9511007.

- [157] L. Liberato and R. Rosenfeld, “Dark energy parameterizations and their effect on dark halos,” *JCAP* **0607** (2006) 009, arXiv:astro-ph/0604071.

# A. AJUSTE ESTADÍSTICO DEL MODELO $f(R)$

Los valores de los parámetros libres del mejor ajuste del modelo dado por la ecuación (4.20) son los siguientes:

$$a = -0,388125 \pm 0,000468$$

$$b = -0,609366 \pm 0,000431$$

$$n = -0,15342 \pm 0,000206$$

$$m = 0,712558 \pm 0,000424$$

La correspondencia entre la data real y la ajustada mediante la ecuación (4.20) es mostrada en la figura A.1. La desviación porcentual entre ambas es presentada en la figura A.2, se puede apreciar que la desviación es menor que el 6 % para el intervalo estudiado.

La tabla A.1 muestra otros parámetros de interés estadístico como son: el coeficiente de múltiple determinación ( $R^2$ ), el Criterio de Información de Akaike (AIC, por sus siglas en inglés), el Criterio de Información Bayesiano (BIC, por sus siglas en inglés) y el error de la varianza ( $\hat{\sigma}^2$ ).

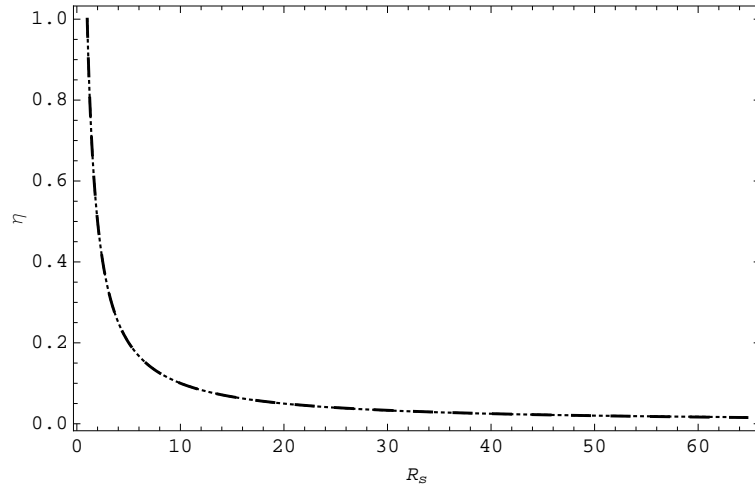


Figura A.1.: Comportamiento del parámetro  $\eta$  vs  $R_s$ . La línea discontinua muestra el comportamiento real. La línea de puntos muestra la evolución de la aproximación analítica dada por la ecuación (4.20).

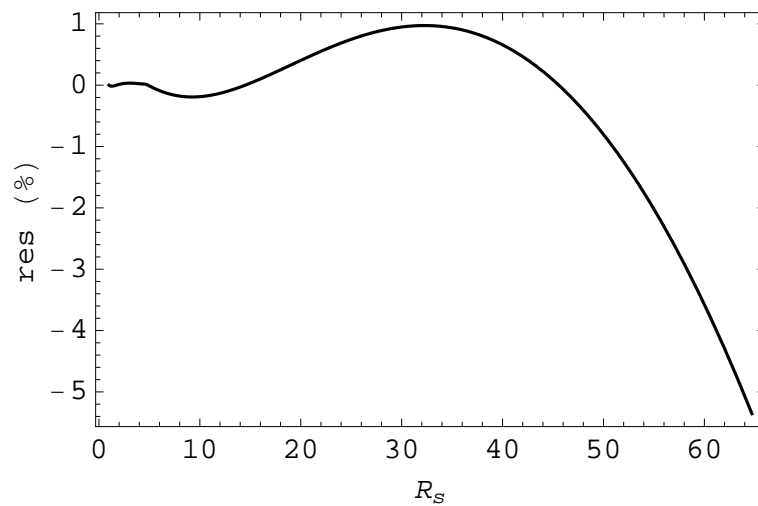


Figura A.2.: Desviación porcentual entre la curva real y el modelo analítico dado por la ecuación (4.20).

Tabla A.1.: Parámetros de interés estadístico

Parámetros	Valor
$R^2$	0.999999
AIC	-13651.9
BIC	-13627.8
$\hat{\sigma}^2$	$1.83496 \cdot 10^{-8}$

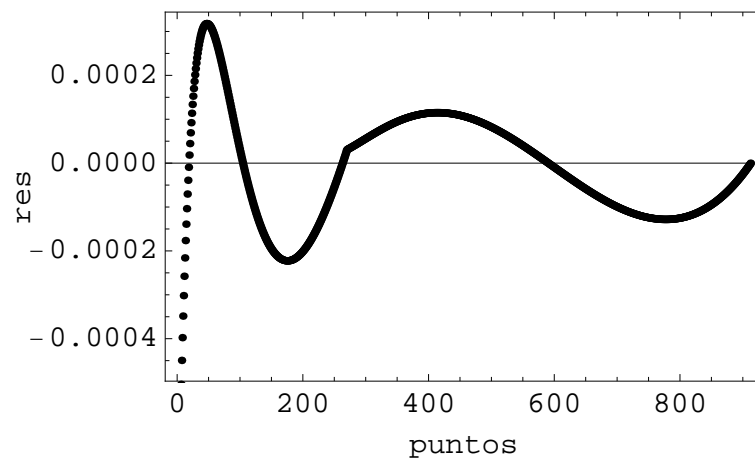


Figura A.3.: Dispersión de los residuos para el ajuste del modelo analítico.

## B. AJUSTE ESTADÍSTICO DE LA CURVA $w$ vs $a$

Las parametrizaciones más usadas en cosmología para describir la evolución del parámetro de la ecuación de estado  $w$  como función del factor de escala  $a$  son:

- (a) 2 parámetros:  $w(a) = w_0 + w_1(1 - a)$
- (b) 3 parámetros:  $w(a) = w_0 + w_1(1 - a^b)$
- (c) 3 parámetros:  $w(a) = w_0 + w_1(1 - a) + w_2(1 - a)^3$
- (d) 3 parámetros:  $w(a) = w_0 + w_1(1 - a) + w_2 \left( \frac{e^{1-1/a}}{1} - 1 \right)$
- (e) 4 parámetros:  $w(a) = w_0 + \frac{w_m - w_0}{1 + (\frac{a}{a_T})^{1/\tau}}$

Para obtener la mejor parametrización que ajusta la curva  $w$  vs  $a$  se siguieron los siguientes criterios estadísticos:

- Minimizar la función  $\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{y_i - y(x_i, a)}{\sigma_i} \right)^2$
- Suma de Residuales al Cuadrado:  $SRC = \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2$ . Este parámetro da la suma de los cuadrados de las diferencias entre los puntos de la data real y los valores pronosticados. (Suma Total de Cuadrados:  $STC = \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y}_i)^2$ )
- Coeficiente de múltiple determinación:  $R^2 = 1 - \frac{SRC}{STC}$ . Este parámetro mide la proporción de variación en los puntos  $y_i$  de la data que son explicados por el modelo

de regresión.  $R^2 = 1$  significa que la curva de del modelo teórico pasa por todos los puntos de la data.

- Criterio de información de Akaike (AIC, por sus siglas en inglés):  $AIC = N \ln \hat{\sigma}^2 + 2P$ , donde  $N$  es el número de puntos de la curva real,  $P$  es el número de parámetros libres del modelo y  $\hat{\sigma}^2 = \frac{SRC}{N}$ . Este criterio penaliza la adición de parámetros y selecciona a aquel modelo que mejor ajusta (primer término de la expresión para el AIC) y que tenga el menor número de parámetros libres. En general el modelo más simple es preferible, a menos que el modelo más complicado ajuste mucho mejor y sea mucho más probable. El modelo con menor AIC será el modelo más probable de ser el correcto entre todos los modelos especificados para esa data, es decir será el modelo preferido.

La tabla B.1 muestra los resultados del estudio estadístico para seleccionar la parametrización que mejor ajusta la curva  $\omega$  vs  $a$  apreciándose que el modelo de 4 parámetros es el que mejor ajusta la curva real. El ajuste visual se puede observar en la figura B.1.

Tabla B.1.: Parámetros de interés estadístico

Modelo	$R^2$	SRC	AIC	$\Delta AIC$	Pesadas AIC
(a)	0,8229	1058,23	-22485,12	43592,68	$9.32 \cdot 10^{-9467}$
(b)	0,8436	934,62	-23728,36	42349,44	$5.49 \cdot 10^{-8974}$
(c)	0,8558	843,59	-24754,41	41323,39	$5.49 \cdot 10^{-8974}$
(d)	0,8953	625,67	-27743,11	38334,69	$5.34 \cdot 10^{-8325}$
(e)	0,9989	12,5358	-66077,80	0	1.00

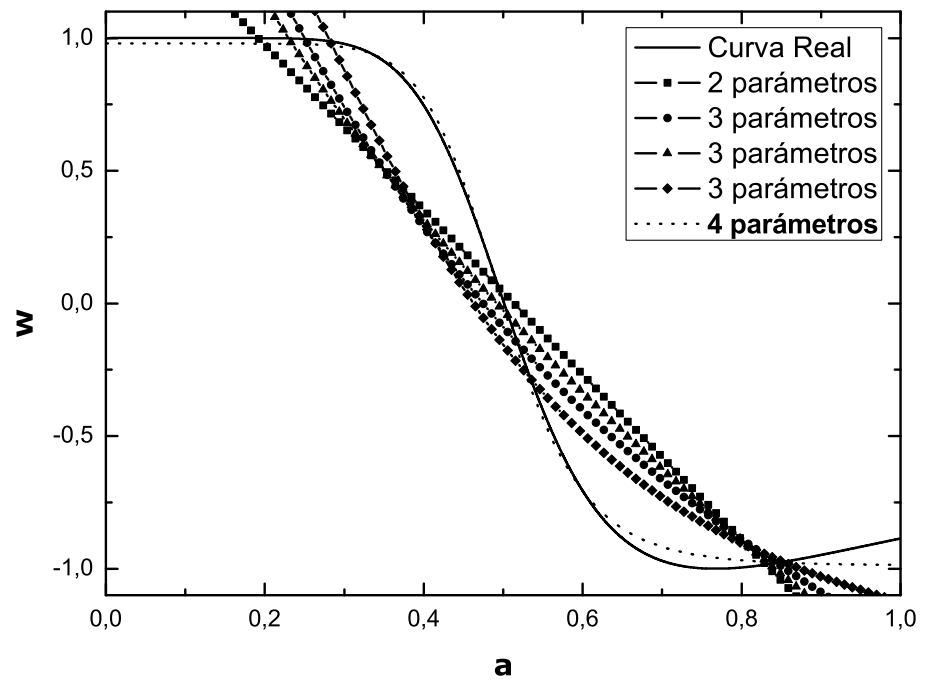


Figura B.1.: Ajustes a la curva real de las diferentes parametrizaciones.