



UNIVERSIDAD CENTRAL "MARTA ABREU" DE LAS VILLAS  
FACULTAD DE MATEMÁTICA FÍSICA Y COMPUTACIÓN



UNIVERSIDADE AGOSTINHO NETO  
INSTITUTO SUPERIOR DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO  
ISCED-HUAMBO

*Tesis para optar por el título de*  
***Master en Matemática Aplicada***

***"La resolución de problemas: su incidencia en el perfeccionamiento del  
Proceso de Enseñanza – Aprendizaje del Análisis Matemático"***

**Lic. Juca Martins Celestino Sachipia**

Santa Clara

2010



UNIVERSIDAD CENTRAL "MARTA ABREU" DE LAS VILLAS  
FACULTAD DE MATEMÁTICA FÍSICA Y COMPUTACIÓN



UNIVERSIDADE AGOSTINHO NETO  
INSTITUTO SUPERIOR DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO  
ISCED-HUAMBO

*Tesis para optar por el grado de*

## ***Master en Matemática Aplicada***

***"La resolución de problemas: su incidencia en el perfeccionamiento del  
Proceso de Enseñanza – Aprendizaje del Análisis Matemático"***

***Autor:*** Lic. Juca Martins Celestino Sachipia<sup>1</sup>

***Tutores:*** Dr. Antonio Martínez Fonseca<sup>2</sup>

Dr. José Enrique Martínez Serra<sup>3</sup>

Santa Clara, 2010

---

<sup>1</sup> Licenciado en Educación, especialidad Matemática. Profesor Asistente del Instituto Superior de Ciencias de la Educación, Huambo, Angola.

<sup>2</sup> Licenciado en Matemáticas. Doctor en Ciencias Pedagógicas, Profesor Titular de la Universidad Central "Marta Abreu" de las Villas.

<sup>3</sup> Licenciado en Educación, especialidad Matemática y Computación. Doctor en Ciencias Pedagógicas, Profesor Auxiliar de la Universidad Central "Marta Abreu" de las Villas.

## RESUMEN

La tesis que se presenta ha tenido como objetivo general diseñar una estrategia didáctica basada en la resolución de problemas que contribuya a elevar la calidad del tratamiento metodológico de los conceptos y teoremas en el proceso de Enseñanza - Aprendizaje del Análisis Matemático en la carrera Licenciatura en Educación, especialidad Matemática del ISCED de Huambo, Angola .

Para cumplimentar este objetivo, se ha escogido como campo de acción “El papel de la resolución de problemas para abordar los conceptos y teoremas en el proceso de Enseñanza - Aprendizaje del tema Cálculo Diferencial de la disciplina Análisis Matemático de dicha carrera”.

El objetivo propuesto ha sido cumplido, pues se ha elaborado un folleto didáctico contenedor del sistema de clases del tema “Cálculo Diferencial de funciones reales” contenedor de siete conferencias, catorce clases prácticas, un seminario y un laboratorio, donde se emplea la enseñanza basada en la resolución de problemas, encaminada al logro de un aprendizaje activo, mediado y significativo de los contenidos relativos a dicho tema.

En este folleto se exponen los problemas para cada subproceso de los procesos que intervienen en el tratamiento de los conceptos y teoremas, así como la intención didáctica de los mismos, los cuales responden al sistema de acciones propuesto en la estrategia general.

Se demuestra, a través de los resultados obtenidos durante su valoración por consulta a especialistas, que la estrategia didáctica propuesta en general y su sistema de acciones en particular, puede contribuir a perfeccionar los procesos de que intervienen en el tratamiento de conceptos (formación, desarrollo y generalización) y teoremas (obtención, demostración, valoración y aplicación).

## INDICE

Introducción.....	1
CAPITULO 1. Consideraciones teóricas que fundamentan el empleo de la Resolución de Problemas en el Proceso de Enseñanza - Aprendizaje de la Matemática en la carrera Licenciatura en Educación, especialidad Matemática del ISCED-HBO.....	12
1.1 Fundamentos lógicos.....	12
1.2 Fundamentos psicopedagógicos.....	14
1.2.1 Fundamentos del aprendizaje activo y mediado.....	14
1.2.2 Fundamentos del aprendizaje significativo.....	16
1.3 Fundamentos didácticos.....	18
1.3.1 Aspectos relativos a la Didáctica General.....	18
1.3.2 Aspectos relativos a la Didáctica de las Matemáticas, en torno al papel de la resolución de problemas en el PEA de la Matemática Superior.....	24
1.3.2.1 Primer significado: resolver problemas como contexto. Enseñanza para la resolución de problemas.....	27
1.3.2.2 Segundo significado: resolver problemas como habilidad. Enseñanza de la resolución de problemas.....	28
1.3.2.3 Tercer significado del empleo de la resolución de problemas: resolver problemas es "hacer matemática". Enseñanza por medio de la resolución de problemas.....	30
CAPITULO 2. Estrategia didáctica para el tratamiento de la resolución de problemas en la carrera Licenciatura en Ciencias de la Educación, especialidad Matemática .....	36
2.1 Contextualización sobre las características generales de la estrategia didáctica...	36
2.2 Propuesta de la estrategia didáctica para los procesos de formación, desarrollo y generalización de conceptos matemáticos (con un proceso de formación inductivo) en la carrera de Licenciatura en Matemática.....	38
2.2.1 Fundamentación.....	38
2.2.1.1 El aprendizaje de conceptos y teoremas como proceso activo, mediado y significativo mediante la enseñanza basada en la resolución de problemas.....	38
2.2.1.2 Aspectos del modelo del profesional del Licenciado en Educación, especialidad Matemática que incitan a la realización de esta estrategia.....	46
2.2.2 Diagnóstico inicial. Necesidad del planteamiento de una estrategia didáctica..	47
2.2.3 Componentes rectores de la estrategia.....	49
2.2.4 Fases de la estrategia.....	51

2.2.4.1 Fase de planificación.....	52
2.2.4.2 Fase de implementación.....	63
2.2.4.3 Fase de control.....	64
CAPITULO 3. Implementación y valoración de los resultados de la estrategia.....	67
3.1 Planificación.....	67
3.1.1 Sobre la preparación del profesor.....	67
3.1.2 Sobre el diagnóstico de necesidades didácticas de los conceptos y teoremas a tratar. ....	67
3.1.3 Sobre el diagnóstico de los conocimientos previos en torno a los conceptos y teoremas a tratar. ....	69
3.1.4 Sistema de acciones por temas.....	70
3.2 Implementación de la estrategia planificada.....	71
3.3 Control de la estrategia implementada.....	74
3.4 Valoración de los resultados del trabajo por consulta a especialistas.....	79
CONCLUSIONES.....	82
RECOMEDACIONES.....	83
BIBLIOGRAFIA.....	s/p
ANEXOS.....	s/p

## Introducción

Uno de los objetivos sociales abordados por el Ministerio de Educación de Angola se refiere al aumento progresivo de la calidad de la educación en un país que acaba de cumplir 34 años de independencia y solo 7 años de paz después de una prolongada guerra civil que produjo una paralización en su desarrollo. A tal efecto en González & Navarrete (2004, p.1) se señala:

*“Su sociedad actualmente está envuelta en crecientes y vertiginosas transformaciones económicas, sociales, políticas, culturales, y educativas, que requieren de la formación de una fuerza de trabajo calificada que pueda responder a las nuevas exigencias. Esta fuerza al mismo tiempo debe caracterizarse por tener comportamientos flexibles y creativos, elevados conocimientos científicos, valores humanos, disposición y competencia para participar en importantes tareas que se presentan como son la reunificación nacional, el desarrollo integral del país y el enfrentamiento a las complejidades y retos del mundo contemporáneo”.*

Este planteamiento revela el valor que para el sistema de educación angolano tiene el hecho de que los alumnos eleven la calidad de sus conocimientos.

Una de las ciencias más importantes que debe coadyuvar al logro de tales propósitos es aquella que revela las relaciones cuantitativas y espaciales del mundo real, como es la Matemática, la que ofrece las herramientas teóricas necesarias para fundamentar las teorías de las demás ciencias, incluso de las ciencias sociales, a la vez que ofrece las herramientas aplicadas necesarias para modelar y resolver una amplia gama de problemas que se presentan en las esferas de la producción y los servicios.

La enseñanza de esta ciencia desde los primeros años, contribuye a la formación paulatina del pensamiento lógico y abstracto en los educandos, condición necesaria para enfrentar los retos de la vida en sociedad y para desarrollar una personalidad integral que esté acorde con las exigencias del momento actual y contribuya al desarrollo de un país que está en una fase de recuperación después de muchos años de guerra como es Angola.

Unido a esto, la enseñanza de la Matemática contribuye a la formación de la concepción científica del mundo, que es la que predomina en el sistema educativo laico angolano; por esta razón las cuestiones filosóficas de la Matemática, sus conceptos, leyes, modos de trabajo y métodos adquieren importancia en los diferentes niveles de enseñanza de la Educación General.

Para lograr esta última contribución de la Matemática, resulta imprescindible una adecuada formación de los encargados de llevar la enseñanza de la Matemática a las aulas de los

alumnos de los niveles de Secundaria y Preuniversitario. Estos encargados son, precisamente, los egresados de la carrera Licenciatura en Ciencias de la Educación, especialidad Matemática, que se estudia en cinco institutos del Ministerio de Educación Superior de Angola, de ahí la importancia que tiene el hecho de formar estos licenciados con las herramientas teórico – metodológicas necesarias para que emprendan eficientemente su labor una vez egresados.

Según los métodos de investigación aplicados, encuesta a profesores (anexos 1 y 3), encuesta a estudiantes (anexo 2), hemos podido constatar que el Proceso de Enseñanza Aprendizaje (PEA) de la Matemática en general y el Análisis Matemático en particular que se lleva a cabo con los alumnos de la carrera Licenciatura en Ciencias de la Educación, especialidad Matemática, posee una serie de deficiencias que traen como consecuencia algunas debilidades que manifiestan posteriormente los profesores que egresan de la misma, cuando ejercen la docencia.

Comenzaremos analizando cuáles son las principales tendencias avanzadas de la educación matemática a nivel internacional, cuáles se han aplicado en Angola, para más tarde plasmar explícitamente las deficiencias que hemos detectado en el PEA de la Matemática durante la formación de pregrado de la carrera en estudio, y finalmente, proponer un diseño de investigación, cuya ejecución y control ofrezca resultados que contribuyan a subsanar las deficiencias detectadas.

Un rasgo común de muchas investigaciones pedagógicas contemporáneas es que hacen ver a los profesores la necesidad de que los educandos no sean vistos como receptores pasivos de volúmenes de contenidos, sino, como individuos capaces de aprender activa y significativamente.

Desde la antigüedad, en varias obras de clásicos de la Pedagogía como Comenius, Pestalozzi, Varela, Rosseau, etc, se reconoce el necesario papel activo en el aprendizaje del alumno por encima de la recepción mecanicista y dogmática que predominaba en épocas antiguas; con los aportes de la escuela soviética de Teoría de la Actividad, se han obtenido resultados esclarecedores sobre este papel; por ejemplo, "...se logra un mayor aprendizaje activo de los estudiantes, en la medida en que aprendan a: formularse metas, organizar el conocimiento, construir significados y utilizar estrategias". Beltrán, (1998, p.34).

No menos interesante ha sido la evolución que ha tenido el reconocimiento por los pedagogos, del papel mediado del aprendizaje que, a nuestro criterio, encuentra su fundamentación más completa en el enfoque histórico-cultural de Lev S. Vygotski, en el que se destacan su

importancia, formas y métodos de desarrollarlo, tomando como bases la “ley genética fundamental del desarrollo” y las categorías “otros” y “Zona de Desarrollo Próximo (ZDP)”.

En cuanto al aprendizaje significativo, este surgió como un intento de contrarrestar el aprendizaje memorístico - repetitivo y va dirigido a establecer las relaciones esenciales y no de modo arbitrario entre lo que debe aprenderse y lo que es conocido (lo que se encuentra en las estructuras cognitivas del alumno).

Aportes sustanciales a la teoría de aprendizaje significativo han sido los trabajos de David P. Ausubel y sus seguidores, en cuya esencia se expresa que, aprender de un modo significativo consiste en realizar un proceso de actualización de los esquemas de conocimientos relativos a la situación en consideración, o sea, poder atribuirle un significado al material objeto de estudio.

Una de las ventajas de este tipo de aprendizaje radica en sus grandes perspectivas de contribuir al logro de una mejor organización y durabilidad del conocimiento; pues, en contraposición al aprendizaje memorístico, en el que el conocimiento es necesario extraerlo de la memoria de la misma forma en que fue aprendido; con el aprendizaje significativo se extraen estructuras organizadas que reflejan las características fundamentales del objeto de estudio, y aplicando estrategias de elaboración puede obtenerse más información de esas estructuras.

Por otra parte, la educación matemática, en aras de perfeccionar el proceso de enseñanza aprendizaje (PEA) de la matemática, ha propuesto el empleo de la resolución de problemas en tres direcciones principales: el PEA por medio de la resolución de problemas (cuando se motiva e introduce el nuevo contenido por medio de la resolución de problemas sencillos, cuyas herramientas de solución están en la zona de desarrollo actual del alumno); el PEA de la resolución de problemas (cuando se hace énfasis en los procesos que intervienen en el proceso en sí de resolución de problemas) y el PEA para la resolución de problemas (cuando se emplean los problemas para ilustrar las aplicaciones del contenido o ampliar sus significados), términos estos que manejaremos por el momento de manera intuitiva y que se definen en el capítulo 1 con mayor exactitud.

El doctor Paúl Torres, citado por Díaz (2003, p. 2) plantea: “...¿cómo puede lograrse el aprendizaje desarrollador en la enseñanza de la Matemática? ....De acuerdo con lo que se ha venido reflexionando no puede faltar en ella el trabajo sistemático con problemas, pues sin él la apropiación no podrá ser activa ni creadora”.

En Angola, el empleo de la resolución de problemas se limita al PEA para la resolución de problemas al finalizar los sistemas de clases y unidades temáticas con vistas a la fijación y



aplicación del contenido, pues en general no se emplean los problemas para motivar o introducir los nuevos contenidos (PEA basado en la resolución de problemas). También se ha hecho énfasis en los pasos que se siguen al resolver problemas, pero no se profundiza en el empleo de estrategias y recursos heurísticos.

El PEA basado en la resolución de problemas, en primera instancia, permite que el alumno realice conexiones entre la teoría y el mundo real; facilita que el estudiante se involucre en su propio proceso de aprendizaje, y que el profesor y los alumnos sean mediadores entre el conocimiento y el alumno, para que este utilice la teoría o los contenidos de una o más asignaturas como herramientas que le permitan identificar problemas, determinar causas, proponer y seleccionar alternativas de solución; propicia el logro de su motivación intrínseca (condición necesaria para el logro de una actitud de aprendizaje significativo), para que sea el mismo estudiante quien trate de relacionar la teoría con un problema real y de su entorno, que sea capaz de relacionar los conocimientos previos con los nuevos para construir su propio conocimiento y de esta manera lograr un aprendizaje significativo y permanente.

El estudio del papel de los problemas en la lógica y estructura del proceso docente constituye un aspecto de cardinal importancia en los fundamentos sobre el aprendizaje de la matemática en los trabajos de A. Schoenfeld (1985), Jeremy Kilpatrick (1990), Miguel De Guzmán (1993), Marie Lise Peltier (1993), Joseph Gascón (1994), Luz Manuel Santos (1995), Campistrous (1996) y otros, que no sólo se restringen al estudio de los procesos heurísticos que transcurren en la solución del problema propiamente, como la mayoría de los trabajos de G. Polya, sino que discuten sobre sus aspectos epistemológicos como base para las sugerencias pedagógicas; sobre sus principales aportes se profundiza en el capítulo 1.

En cuanto al tratamiento de conceptos, en la enseñanza superior los conceptos son de naturaleza abstracta y muchos poseen una extensión dinámica (como el de función, que depende del dominio que se considere); sin embargo, se lleva a cabo un tratamiento muy restringido de los mismos, al ocuparse solo de elementos particulares de su extensión.

En este nivel, solo se profundiza en el empleo de los conceptos en la solución de ejercicios semejantes a algunos ya resueltos, no se transmite una adecuada conceptualización sobre las características lógicas (extensión y contenido) fundamentales de los conceptos matemáticos. No se emplean organizadores importantes como mapas de extensiones y de proposiciones, no se logra un conocimiento sobre los diferentes tipos de generalizaciones que se realizan -en ocasiones ni siquiera se tiene la idea de que se ha realizado una generalización-, no se dispone de criterios para determinar la calidad de las generalizaciones, se demuestran muchos

teoremas y sin embargo, esta importante acción se ve desligada del proceso de desarrollo conceptual.

Por otra parte, el tratamiento de los teoremas matemáticos requiere de la preparación del camino para su obtención, debe realizarse su demostración ya sea en la propia clase o en el estudio independiente debidamente controlado, lo cual requiere de una preparación para su demostración, que incluye: el despertar de la motivación para la misma, la determinación de las hipótesis y las tesis, la elección del método de demostración más adecuado, la elaboración del plan de demostración. Durante la ejecución del plan, deben dejarse claras las reglas de inferencias que se utilizan, los principios, reglas y estrategias heurísticas que se emplean. Debe llevarse a cabo un tratamiento óptimo de explotación del error que cometen los estudiantes y analizar las condiciones perspectivas y retrospectivas del mismo. Ver (Ballester y otros, 1992).

Con el objetivo de analizar cómo se manifiesta el tratamiento de algunos conceptos y teoremas matemáticos, el papel de la resolución de problemas y el aprendizaje activo, mediado y significativo en la disciplina Análisis Matemático de la carrera Licenciatura en Ciencias de la Educación, especialidad Matemática, se aplicaron algunos instrumentos que permitieron apreciar la existencia de algunas dificultades.

Se revisaron tesis doctorales como Martínez, J. (2005), Martínez A. (2003), González (2001), del Seminario de Matemática Educativa de la Universidad Central de las Villas, que disciernen sobre el proceso de modelación matemática, los procesos que intervienen en el tratamiento conceptual, el papel de la resolución de problemas; Díaz (2003), Rebollar (2000), las que utilizan el enfoque de “la enseñanza basada en problemas”, Vázquez (1998), Delgado (1999), Alonso (2000) que se basan en “la enseñanza de la resolución de problemas”, Arteaga (2001), propone el empleo de la enseñanza problémica para el desarrollo de la creatividad, entre otras. Además, se aplicó una encuesta a profesores tanto cubanos como angolanos (ver anexos 1 y 3) que han impartido docencia en esta carrera y una encuesta a los estudiantes de tercer, cuarto y quinto año de la carrera durante el segundo semestre del curso 08-09 (ver anexo 2), con el objetivo de constatar qué acciones se han realizado durante los diferentes procesos que intervienen en el tratamiento de conceptos y teoremas matemáticos, y cuáles consideran que debieron haberse realizado.

Resumiendo y formalizando algunas de las ideas aquí expresadas, según la literatura consultada, la experiencia del autor en la docencia, la observancia de diferencias significativas en la manera de enseñar de los profesores angolanos con respecto a los cubanos, los resultados obtenidos durante seis años de ejercicio de la docencia de la Matemática a alumnos

de dicha carrera, se tiene, sobre la relación resolución de problemas – tratamiento de conceptos – tratamiento de teoremas – aprendizaje significativo en el PEA del Análisis Matemático, los resultados siguientes:

- Sobre los procesos que intervienen en el tratamiento de conceptos:
  - Son muchos los conceptos de varios temas de la disciplina Análisis Matemático, que pueden ser formados mediante el proceso de comparación de objetos particulares (vía inductiva), sin embargo esto no se hace. En la mayoría de los casos, el tratamiento conceptual parte de su definición; esto se debe, principalmente, al presupuesto de tiempo. No obstante, los estudiantes deben conocer el proceso de formación inductivo, por lo que resulta necesario implementarlo con algunos conceptos a partir de la resolución de problemas.
  - Dada la naturaleza abstracta de los objetos y la infinitud de la extensión de los conceptos matemáticos que se tratan en esta carrera, no existe motivación para establecer su comparación y no se emplean problemas adecuados para lograr esto.
  - Los estudiantes no son conducidos a la determinación de los rasgos esenciales y no realizan, el proceso de abstracción de rasgos no esenciales; no tienen conciencia del proceso de síntesis de los rasgos esenciales y de su consideración en un determinado conjunto (el contenido).
  - No existe un conocimiento acabado sobre aspectos esenciales relativos al trabajo con conceptos como son: en qué consisten los procesos en que se subdivide el tratamiento conceptual (formación, desarrollo y generalización), cuáles son las características lógicas del concepto (contenido y extensión), cuáles son las operaciones lógicas que se pueden realizar con conceptos (definición, clasificación, generalización), etc.
  - Durante los procesos de desarrollo y generalización conceptual, no se llevan a cabo suficientes acciones que traigan consigo un conocimiento más acabado del concepto en estudio.
- Sobre el tratamiento de teoremas:
  - No existe una preparación del camino de obtención del teorema.
  - Muchas veces, por presupuestos de tiempo, no se realiza la demostración del teorema, y cuando se hace, no se lleva a cabo una preparación para su

demostración, que incluye la motivación para la misma, la determinación de las hipótesis y las tesis, la elección del método de demostración más adecuado, la elaboración del plan de demostración.

- Durante la ejecución del plan, no se dejan claras las reglas de inferencias que se utilizan, ni los principios, reglas y estrategias heurísticas que se emplean.
  - No se lleva a cabo un tratamiento óptimo de explotación del error que cometen los estudiantes
  - No se analizan las condiciones perspectivas y retrospectivas del mismo, no se realiza una valoración de la calidad del teorema obtenido ni se realizan acciones para la aplicación del teorema.
- En ocasiones, la articulación entre los conocimientos que tiene el estudiante con los nuevos no se lleva a cabo significativamente, pues no se emplean adecuados organizadores (como mapas de extensiones, de contenidos, diagramas) encaminados a modificar las estructuras mentales de los estudiantes que permitan organizar el contenido en estructuras relacionadas más fáciles de recordar a largo plazo, salvo el olvido de aspectos secundarios.
  - Muchas veces no se logra la necesaria motivación intrínseca en los alumnos y por ende, la actitud de aprendizaje significativo para abordar situaciones de aprendizaje, por medio de la resolución de problemas cercanos a los intereses del futuro profesor de Matemáticas, que traigan consigo una implicación afectiva del alumno, lo que da al traste con que solo se esfuercen en su estudio para salir bien en las evaluaciones de las asignaturas.
  - El sistema de evaluación generalmente está encaminado a la reproducción de contenidos aprendidos por medio de evaluaciones orales y escritas (frecuentes, parciales y finales), priorizando la función sumativa de la misma y no a la realización de la evaluación formativa, suscitando escenarios de autoevaluación y coevaluación, no solo de contenidos, sino de la calidad de los procesos que han intervenido en el aprendizaje.

Estas deficiencias se manifiestan, entre otros aspectos, debido a que en el proceso de formación de los profesores de Matemática en el Instituto Superior de Ciencias de la Educación (ISCED) de Huambo en la República de Angola no se ha implementado un sistema de superación que conduzca, de manera efectiva la necesaria relación que debe existir entre el empleo de la resolución de problemas, el tratamiento de conceptos, el tratamiento de teoremas y el aprendizaje significativo en el PEA de las disciplinas matemáticas en general y del Análisis Matemático en particular.

Por todo lo antes expuesto, se ha podido constatar la existencia del siguiente problema científico:

**Problema Científico:** ¿Cómo puede perfeccionarse el proceso de enseñanza aprendizaje de la disciplina Análisis Matemático en la carrera Licenciatura en Ciencias de la Educación, especialidad de Matemática del ISCED-HBO?

Por tanto la presente investigación tiene como **objeto de estudio:** “El Proceso de Enseñanza - aprendizaje del Análisis Matemático en la carrera Licenciatura en Ciencias de la Educación, especialidad de Matemática del ISCED-HBO”

**Nuestro campo de acción es:** “El papel de la resolución de problemas para abordar los conceptos y teoremas en el proceso de Enseñanza - Aprendizaje del tema Cálculo Diferencial de la disciplina Análisis Matemático de la carrera antes citada”

**El objetivo general es:** diseñar una estrategia didáctica basada en la resolución de problemas que contribuya a elevar la calidad del tratamiento metodológico de los conceptos y teoremas en el proceso de Enseñanza - Aprendizaje del Análisis Matemático en dicha carrera.

**Preguntas de Investigación:**

1. ¿Cuál es el estado actual que presenta el objeto a investigar en cuanto al tratamiento de la resolución de problemas?
2. ¿Cuáles son los presupuestos teóricos que sustentan la estrategia didáctica que contribuya a elevar la calidad del tratamiento metodológico de la resolución de problemas en el proceso de Enseñanza - Aprendizaje del Análisis Matemático en la carrera Licenciatura en Ciencias de la Educación, especialidad Matemática del ISCED-HBO”
3. ¿Cómo diseñar una estrategia didáctica que permita llevar a cabo el tratamiento de la resolución de problemas de manera acertada en dicha disciplina?
4. ¿Cómo puede comprobarse la validez de esta estrategia?

**Objetivos Específicos:**

1. Determinación del estado actual del problema de investigación.
2. Establecimiento del marco teórico de la investigación a través del análisis de la bibliografía existente y los resultados obtenidos por el autor en trabajos precedentes.

3. Diseño de una estrategia didáctica para llevar a cabo el tratamiento de la resolución de problemas en la carrera Licenciatura en Ciencias de la Educación, especialidad de Matemática del ISCED-HBO.
4. Comprobación de la validez de esta estrategia.

### **Métodos de Investigación:**

Para realizar la investigación se utilizaron **métodos** del nivel teórico, empíricos y matemáticos.

La aplicación de los **métodos teóricos** permitió la integración de las principales ideas alrededor de la problemática que se aborda, así como la concepción de los fundamentos de la propuesta y la interpretación de la información acopiada por medio de los diferentes instrumentos diseñados.

**Analítico - Sintético:** Fue utilizado para la revisión y búsqueda de información de las diversas fuentes bibliográficas y otros documentos consultados sobre la temática para llegar al estado deseado según lo normado, dándonos como resultado el estado real del mismo. Asimismo para el procesamiento de la información acopiada por medio de los diferentes instrumentos diseñados.

**Inductivo - Deductivo:** Se utilizó durante toda la investigación con énfasis en la consulta de fuentes y documentos, para hacer generalizaciones lógicas de toda la información empírica teniendo en cuenta el problema objeto de investigación. Además, a lo largo de toda la investigación a través del diseño y la intencionalidad de la investigación.

**Histórico – lógico:** Se empleó para obtener información sobre los antecedentes del problema objeto de investigación, para conocer su evolución y el ordenamiento lógico

**Sistémico-estructural:** Para la elaboración de la estrategia.

### **Del nivel empírico:**

Permitieron la recopilación de la información necesaria que sustentó el problema científico de la investigación.

### **La entrevista y la encuesta:**

A docentes angolanos del Departamento de Matemática del ISCED-HBO/ y profesores cubanos que cumplieron misión en la República de Angola en el ISED-HBO en dicho departamento, con el propósito de profundizar en sus opiniones, criterios y valoraciones con relación al empleo de la resolución de problemas en sus clases y en las que han tenido la

oportunidad de visitar. A estudiantes de dicha carrera para conocer sus impresiones sobre algunos aspectos del PEA del Análisis Matemático que han recibido.

**La observación**, para apreciar el desempeño del profesor en formación en el proceso de enseñanza-aprendizaje y medir indicadores de calidad de la estrategia.

**Análisis de Documentos.** Se realiza el análisis de documentos rectores y normativos que rigen el trabajo docente metodológico, así como las orientaciones metodológicas emanadas del Ministerio de Educación para el tratamiento de la resolución de problemas por parte de los profesores en formación en la carrera objeto de investigación.

### **Métodos Matemáticos:**

**El análisis porcentual:** Se utiliza para hacer una valoración desde el punto de vista porcentual de los resultados obtenidos en algunos de los métodos anteriores que nos permitan arribar a valoraciones cualitativas que pueden corroborarse con la aplicación de otros métodos.

**El criterio de expertos:** Para corroborar la validez del diseño de la estrategia propuesta.

**Novedad científica:** Esta tesis resulta novedosa porque ofrece la construcción de conjuntos de problemas que facilitan los procesos didácticos que intervienen en el tratamiento de los conceptos y teoremas de la disciplina Análisis Matemático.

La ***significación práctica*** de la investigación está dada porque:

- ◆ La aplicación de la estrategia durante los procesos que intervienen en el tratamiento de los conceptos y teoremas del Análisis Matemático garantiza la participación activa de los estudiantes en estos procesos, el logro de un aprendizaje significativo y una mayor calidad de los mismos.
- ◆ Se ofrece un folleto didáctico contenedor del sistema de clases del tema “Cálculo Diferencial de funciones reales” contenedor de siete conferencias, catorce clases prácticas, un seminario y un laboratorio, donde se exponen los problemas para cada subproceso de los procesos que intervienen en el tratamiento de los conceptos y teoremas, así como la intención didáctica de los mismos.
- ◆ Se explican las potencialidades que posee la estrategia para contribuir a una mejor preparación matemática y metodológica de los profesores en dos sentidos:
  - En el tratamiento de conceptos y teoremas del postgrado.

- En la apropiación de un sistema de acciones para llevar a cabo el tratamiento de conceptos con más calidad en sus grupos de clase.

En cuanto a la **estructura de la tesis**, esta consta de las siguientes **partes**: introducción, tres capítulos, conclusiones, recomendaciones, bibliografía y anexos.

**El primer capítulo** se dedica a la fundamentación teórica del trabajo por medio de la exposición de los fundamentos filosóficos, lógicos, psicopedagógicos y didácticos, donde se escoge como paradigma a seguir en cuanto a teoría de aprendizaje al “Enfoque Histórico Cultural”, sobre el que se fundamentan los aprendizajes activo, mediado y significativo y se resalta la importancia de la enseñanza basada en la resolución de problemas para la consecución del objetivo propuesto.

El **segundo capítulo** comienza con una fundamentación de la estrategia que se presenta, donde se contextualizan los aspectos tratados en el capítulo 1 a la relación entre: la enseñanza basada en la resolución de problemas – los procesos que intervienen en el tratamiento de conceptos y teoremas – aprendizaje activo, mediado y significativo; posteriormente se diseña la estrategia didáctica para llevar a cabo el tratamiento de conceptos y teoremas del Análisis Matemático, en la carrera Licenciatura en Educación, especialidad Matemática por medio del planteamiento y la resolución de problemas, para de esta manera dar respuesta al problema científico de la investigación, y se valoran sus perspectivas.

El **tercer capítulo** está dedicado a la validación de la estrategia didáctica por medio los conceptos y teoremas de la asignatura Análisis Matemático I, por medio de la consulta a expertos y se dejan sentadas las dimensiones e indicadores para evaluar los resultados después de su implementación con una muestra de estudiantes de la carrera Licenciatura en Educación, especialidad Matemática, durante la continuidad de esta tesis.



## **CAPITULO 1. Consideraciones teóricas que fundamentan el empleo de la Resolución de Problemas en el Proceso de Enseñanza - Aprendizaje de la Matemática en la carrera Licenciatura en Educación, especialidad Matemática del ISCED-HBO.**

### **1.1 Fundamentos lógicos.**

Mediante el **pensamiento abstracto** el hombre descubre las leyes del mundo y las tendencias de desarrollo de los acontecimientos, analiza lo universal y lo particular en cada objeto. Sus formas esenciales son: **el concepto**, el juicio y el razonamiento.

El **concepto** se define en Guetmánova (1991, p.58) como “*forma del pensamiento abstracto que refleja los indicios sustanciales de una clase de objetos homogéneos*”; en Ballester y otros (1992, p.281).

El **juicio** es definido en Guetmánova (1991, p.147) como la “*forma del pensamiento abstracto en que se afirma o se niega algo respecto a los objetos, los vínculos entre un objeto y sus propiedades o las relaciones entre objetos*”.

El **razonamiento** es entendido por Guetmánova (1991, p.259) como “*la forma del pensamiento mediante la cual, y a base de ciertas reglas de inferencia, de uno o varios juicios verdaderos se obtiene un nuevo juicio que se infiere de aquellos de modo necesario o con determinado grado de probabilidad*”.

Por otra parte, según Microsoft® Encarta® 2008, se entiende por **proposición**: una enunciación de una verdad demostrada o que se trata de demostrar, y por **Teorema**: una proposición demostrable lógicamente partiendo de axiomas o de otros **teoremas** ya demostrados, mediante reglas de inferencia aceptadas.

De estas tres definiciones resulta evidente que **una de las funciones de los conceptos** es la de ser condición necesaria para la comprensión de los juicios y los razonamientos, respectivamente; por ende, en la base de esta cadena están los conceptos como primer eslabón necesario para concatenar los otros dos; aunque es necesario señalar que los juicios y razonamientos que se hacen sobre conceptos ya conocidos, son los que conducen a la formación de nuevos conceptos.

Sobre los **componentes lógicos del concepto**: *contenido* (conjunto de propiedades esenciales del objeto modelado en el concepto) y *extensión* (clase de modelos de objetos que dicho concepto abarca) y otros aspectos relacionados con estos componentes ya se ha profundizado en varias tesis y libros de Lógica.

Cabe señalar que existen algunas **interpretaciones erróneas del contenido y de la extensión**, como son:

- Muchas veces se considera erróneamente el contenido como el propio objeto, como algo estancado, invariable y separado de otros rasgos no esenciales.
- En el PEA de conceptos, muchas veces se da preferencia al trabajo con el contenido, llegándose casi a absolutizarlo, pues solo se analizan caracterizaciones o condiciones necesarias y suficientes del concepto. Esto tiene consecuencias negativas, pues impide llegar a conocer el otro componente tan importante como el contenido: la extensión; esto también acarrea consecuencias negativas desde el punto de vista psicopedagógico, pues se desarrollan sólo habilidades de carácter lógicas y no se aprovechan las facilidades que proporciona el estudio de la extensión para el desarrollo de la creatividad y la intuición.

Por otra parte, el tratamiento de los teoremas matemáticos requiere de la preparación del camino para su obtención, debe realizarse su demostración ya sea en la propia clase o en el estudio independiente debidamente controlado, lo cual requiere de una preparación para su demostración, que incluye: el despertar de la motivación para la misma, la determinación de las hipótesis y las tesis, la elección del método de demostración más adecuado, la elaboración del plan de demostración. Durante la ejecución del plan, deben dejarse claras las reglas de inferencias que se utilizan, los principios, reglas y estrategias heurísticas que se emplean. Debe llevarse a cabo un tratamiento óptimo de explotación del error que cometen los estudiantes y analizar las condiciones perspectivas y retrospectivas del mismo. Ver (Ballester y otros, 1992).

También son resultados lógicos importantes, los que se encuentran en los textos ya citados y en los obtenidos y difundidos por miembros del Grupo de Enseñanza de la UCLV mediante las tesis doctorales González, B. (2001), Martínez A. (2003), Martínez J. (2005) y por los artículos Mederos y Martínez (2000a, 2000b, 2001, 2004) y Mederos y otros (1997), entre los que se encuentran: La consideración de un concepto como un par (E,C), donde E es la extensión y C, el contenido. Ver González (2001, p.41) y Martínez (2003, p.18-19). Operaciones lógicas y requisitos de las mismas a realizar con el concepto (definición, clasificación, restricción, generalización). Ver Martínez (2003, p.19-24).

- Los procesos que intervienen en el tratamiento de un concepto: de formación, de desarrollo y de generalización. Ver Martínez J. (2005)
- Clasificación de los conceptos por la cantidad de elementos de su extensión (de extensión vacía, conceptos singulares y conceptos universales). Ver Guetmánova (1991, p.59).
- Clasificación de los conceptos por la relación entre sus extensiones (Subordinante, subordinado, equipotentes, cruzados, cosubordinados, contradictorios, contrarios). Ver Guetmánova (1991, p.267).
- Los requisitos a tener en cuenta en el tratamiento de teoremas matemáticos, tanto en el proceso de formulación, como de demostración, valoración y aplicación. Ver Ballester (1992, p. 320-370), los cuales son enriquecidos en la actual tesis.

## **1.2 Fundamentos psicopedagógicos.**

### **1.2.1 Fundamentos del aprendizaje activo y mediado.**

La concepción de aprendizaje que compartimos y que nos ha servido de pauta a seguir, tanto en el ámbito docente como el investigativo, ha sido **El Enfoque Histórico Cultural (EHC)**, que tuvo una acertada continuidad en la **Escuela Soviética de Teoría de la Actividad**.

Lev Semiónovich Vygotski (1896-1934), fue un psicólogo soviético que elaboró su teoría, génesis del EHC, entre 1924 y 1934. Debido a su prematura muerte por tuberculosis cuando tenía sólo 38 años, se vio truncada su valiosa obra, la cual ha sido enriquecida y ha ganado gran número de adeptos en las comunidades pedagógicas durante los últimos tiempos.

La teoría psicológica de Vygotski se fundamenta en el marxismo. Él consideraba, a diferencia de Piaget, que *más importante que estudiar el producto del desarrollo es estudiar el proceso que lleva a ese producto*; lo cual está en total correspondencia con el planteamiento del materialismo dialéctico relativo a que los fenómenos hay que estudiarlos como procesos en desarrollo. Consecuentemente, critica las teorías psicológicas que se basan en estudiar las capacidades ya desarrolladas del alumno.

La escuela soviética, en la que, además de Vygotski, pueden citarse a Luria, Leontiev, Rubinstein, Galperin, Talyzina y muchos otros, considera que el psiquismo y la conducta intelectual adulta son el resultado de la influencia social en el organismo de cada individuo. En definitiva, es el ser social el que crea la conciencia.

Otras ideas de mucha importancia en esta dirección, son el carácter prospectivo del desarrollo y su relación con el concepto (categoría) Zona de Desarrollo Próximo (ZDP), la relación entre

desarrollo y aprendizaje, y la intervención de los integrantes de la categoría “otros” en el proceso de aprendizaje.

**La ley genética fundamental** en la educación que puede verse en Vygotski (1989, p.109) plantea: *“Cualquier función psicológica superior en el proceso del desarrollo infantil se manifiesta dos veces, en primer lugar como función de la conducta colectiva, como la organización de la colaboración del alumno con las personas que le rodean; luego, como una función individual de la conducta, como una capacidad interior de la actividad del proceso psicológico en el sentido estricto y exacto de esta palabra”*.

En Vygotski (1989, Pág.64) puede leerse: *“Lo que el alumno puede hacer hoy en cooperación mañana podrá hacerlo solo. Por tanto, el único tipo de instrucción adecuado es el que marcha delante del desarrollo y lo conduce; debe ser dirigida más a las funciones de maduración que a lo ya maduro... La educación debe ser orientada hacia el futuro, no hacia el pasado”*.

En nuestra investigación el *aprendizaje mediado*, durante el estudio de conceptos, se fundamenta en la ley genética fundamental detallada anteriormente y en las categorías “otros” y “zona de desarrollo próximo (ZDP)”, sobre las que puntualizaremos a continuación.

La **ZDP** es definida en Vygotski (1989, p.86) como *“la distancia entre el nivel de desarrollo actual determinado por la capacidad para resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con compañeros más capaces”*

Obsérvese que en esta definición, se hace énfasis en la ayuda proveniente de otra persona, lo que se reafirma en Vygotski (1989, p.90), cuando plantea *“un aspecto esencial del aprendizaje es que éste crea la ZDP, esto es, el aprendizaje despierta una variedad de procesos de desarrollo que son capaces de operar sólo cuando el alumno interactúa con otras personas de su ambiente y con sus compañeros”*

La ZD potencial define funciones que aún no han madurado, que se hallan en proceso de maduración o embrionario, a diferencia del “nivel de desarrollo real” que se encuentra en la ZD que Vygotski (1989, p.7) lo define como: *“funciones ya maduras, productos finales del desarrollo”*.

En su teoría, Vygotski resalta la importancia de la intervención deliberada de los miembros del grupo social (maestros, padres y condiscípulos más aventajados) como mediadores entre la cultura y el individuo. Señala que no basta el simple contacto del sujeto con el objeto de conocimiento para que se produzca el aprendizaje, hace falta la participación de los **“otros”**

como un factor esencial para el desarrollo de los alumnos. Entre los “otros” se reconocen que pueden estar: padres, maestros y coetáneos más avanzados, grupos, medios interactivos: TV, video, computadoras, psicólogos, orientadores, trabajadores sociales y el propio sujeto.

Por otra parte, esbozando aspectos relativos al aprendizaje mediado, en González (2001, p.91) se define **la actividad** como *“...aquellos procesos mediante los cuales el individuo, respondiendo a sus necesidades, se relaciona con la realidad, adoptando determinada actitud hacia la misma”*.

Muy conocidas resultan las fases orientación, ejecución y control por las que transita toda actividad dirigida, sobre todo las que tienen lugar en el salón de clases.

El proceso de **internalización** se describe como el proceso de transformación en interna de una operación que es externa al sujeto, que pertenece a su entorno social.

Aunque no vamos a profundizar en la teoría de Galperin, sí consideramos adecuado reseñar las cinco etapas que él señala para escalonar las tareas que deben interiorizarse:

1. Crear una concepción preliminar de la tarea.
2. Dominar la acción utilizando objetos.
3. Dominar la acción en el plano del habla audible.
4. Transferir la acción al plano mental.
5. Consolidar la acción mental.

### **1.2.2 Fundamentos del aprendizaje significativo.**

Según D. Ausubel, principal exponente de la **Teoría del Aprendizaje Significativo**, el aprendizaje significativo surgió como un intento de contrarrestar el aprendizaje repetitivo y el carácter no significativo del aprendizaje y va dirigido a garantizar el establecimiento de las relaciones esenciales y no de un modo arbitrario entre lo que debe aprenderse y lo que es conocido, es decir, lo que se encuentra en las estructuras cognitivas del alumno.

Uno de los principales exponentes de estas teorías es el español César Coll que al reconocer el carácter no espontáneo del aprendizaje significativo fundamenta las condiciones en que este se produce (ver Hidalgo (1992. p. 86)).

1. *El contenido de la enseñanza debe ser potencialmente significativo desde el punto de vista de su estructuración interna, significatividad lógica, coherencia, claridad y organización. Esta condición no se reduce a la estructura misma del contenido, sino que abarca también la*

*presentación que de él se efectúa que tiene en cuenta los esquemas de conocimientos previos existentes en la estructura cognitiva de la persona que aprende.*

- 2. El alumno debe disponer del bagaje indispensable para efectuar la atribución de significados, o sea, disponer de los conocimientos previos necesarios que le van a permitir abordar el nuevo aprendizaje.*
- 3. La actitud favorable a la realización de aprendizajes significativos que requiere realizar una actividad cognitiva compleja (seleccionar esquemas previos de conocimientos y aplicarlos a la nueva situación, revisarlos, modificarlos, proceder a su reestructuración, al establecimiento de nuevas relaciones, evaluar su adecuación, etc.) para la cual el alumno debe estar suficientemente motivado.*

Para entender el comportamiento individual de un sujeto puesto ante una situación matemática (ya sea de interpretación o de resolución de problemas), se necesita saber cuáles son las herramientas matemáticas que tiene a su disposición: ¿qué información relevante tiene a mano?, ¿cómo accede a esa información y cómo la utiliza?

Los esquemas o estructuras organizadas del sujeto, en el momento de aprender el nuevo conocimiento determinan lo que el estudiante aprenderá, es decir, el conocimiento que el sujeto va a construir al estudiar o realizar la tarea. El conocimiento previo establece fronteras y límites para identificar la semejanza y singularidad de la nueva información. Se produce aprendizaje no solo cuando se tiene una extensión de algún campo de conceptos interconectados, sino también cuando ocurre un cambio en la forma del conocimiento, lo cual crea las condiciones para que el sujeto realice nuevos descubrimientos.

Para aprender significativamente es necesario modificar los esquemas o redes de conocimiento existentes, ya que todo nuevo contenido informativo para ser aprendido crea la necesidad de reestructurar, ampliar o modificar esos esquemas existentes.

Un aspecto importante que hay que tener en cuenta en el proceso de aprendizaje significativo es el de la **transferencia**, la cual tiene lugar cuando una persona desarrolla habilidades cognitivas o comunicativas, estrategias de aprendizaje, en un contexto determinado y es capaz de aplicarlo luego en otro. Enseñar a transferir implica mostrar al estudiante cómo una idea se puede aplicar a otra, cómo pueden utilizar ampliamente lo que se aprendió, cómo entender una idea en función de otra.

La transferencia no es automática; el poseer información, destrezas e ideas no aseguran en sí mismo que se aplicarán siempre y cuando sea apropiado, pero sí está claro que el hecho de

utilizar lo que se ha aprendido en la escuela y enfrentarse a problemas nuevos fuera de la escuela, son imperativos.

**La transferencia** por lo tanto es un proceso consciente que permite aplicar el conocimiento en el mismo contexto o en otro que tenga relación. Algunas de las estrategias anteriormente mencionadas contribuyen a la transferencia del conocimiento, estas son, entre otras: aprendizaje significativo por problemas, estudios de casos, desarrollo de proyectos, la investigación aplicada.

### 1.3 Fundamentos didácticos

#### 1.3.1 Aspectos relativos a la Didáctica General.

Álvarez (1989, p.3), considera que, *“la didáctica es la ciencia que estudia el proceso docente-educativo”*. Esta es la definición que compartimos, pues sintetiza las demás, plasmando explícitamente el objeto de estudio, a partir del cual se derivan características expresadas en otras definiciones.

Es decir, mientras la Pedagogía estudia todo tipo de proceso educativo, en sus distintas manifestaciones, la didáctica como ciencia pedagógica, atiende sólo al proceso más sistémico, organizado y eficiente (el docente-educativo), que se ejecuta sobre fundamentos teóricos y por personal especializado: los profesores.

La didáctica, por tanto, no puede prescindir de la pedagogía general, que le brinda sus “leyes” o principios generales y sus fundamentos teóricos, que se particularizan y se operacionalizan en esta ciencia en especial. A ella le corresponde ilustrar al maestro cómo organizar, desarrollar y controlar en la práctica el complejo proceso de enseñar y de aprender, por medio de diferentes formas de organización y por distintas vías, al seguir un fin y objetivos determinados.

Es válido destacar que existen varias acepciones para expresar el proceso docente-educativo, en ocasiones se le denomina instructivo-educativo o de enseñanza-aprendizaje (PEA), denominación esta última que empleamos en nuestra tesis; no obstante, sea cual sea la denominación es importante tener claro que en cualquiera de ellas, la instrucción y la educación forman un par dialéctico que no pueden ser separados. Ambos tienen sus funciones específicas pero se dan en un sólo y único acto educativo. Como dijera Martí *“Las cualidades morales suben de precio cuando son realizadas por las cualidades inteligentes”*.

En cualquier PEA de una materia que eduque, instruya y desarrolle, debe llevarse a cabo un seguimiento a un conjunto de normas y **principios didácticos**. Para el destacado especialista

alemán Lothar Klingberg citado por Chávez (2002, p.9), los principios didácticos "son postulados generales sobre la estructuración del contenido, la organización y los métodos de enseñanza que se derivan de las leyes y de los objetivos de la enseñanza, que expresan el complejo carácter de esta y que por dicho motivo han de verse y considerarse por su complejidad".

Son reconocidos por mayor parte de la literatura pedagógica los siguientes principios didácticos: *del carácter científico, de la sistematicidad, de la vinculación de la teoría con la práctica, de la vinculación de lo concreto y lo abstracto, de la asequibilidad, de la solidez de los conocimientos, del carácter consciente y de la actividad independiente de los estudiantes y de la vinculación de lo individual y lo colectivo.*

Los principios didácticos, que poseen un carácter rector en todo el quehacer didáctico, poseen las características siguientes: carácter general, pues se aplican a todas las asignaturas y niveles de enseñanza; son esenciales, pues determinan el contenido, los métodos y las formas de organización. Su incumplimiento convierte el proceso docente en un caos, por tanto, su observancia tiene un carácter obligatorio. Constituyen un sistema, en consecuencia, el cumplimiento de uno supone el del resto y el incumplimiento de alguno afecta al sistema.

Por otra parte, **las categorías de la didáctica**, que constituyen un sistema y se dan en una relación dialéctica son: *Objetivo, Contenido, Método, Medio, Evaluación y Formas de organización.*

La categoría **objetivo** ocupa un lugar destacado en la dirección del PEA, cumple la importante función de determinar el contenido, los métodos y las formas de organización de la enseñanza, al expresar la transformación planificada que se desea lograr en el alumno en función de la formación del hombre a que aspira la sociedad.

Los objetivos expresan el para qué se enseña y se educa al alumno. Entre los elementos que integran la estructura de los objetivos están, *los conocimientos, los hábitos, las habilidades, las capacidades, las convicciones, los sentimientos, las actitudes, las particularidades del carácter, el sistema de motivos o intereses, etc.*

Es prudente destacar el carácter sistémico y multilateral de los objetivos, así como la necesidad de realizar una derivación gradual de los mismos encaminada a cumplimentar los principios didácticos relacionados con la asequibilidad y solidez de los conocimientos.

Los **contenidos** de la enseñanza expresan el qué se enseña. Estos comprenden una unidad indisoluble de: un sistema de conocimientos, que algunos autores denominan conceptuales o



declarativos, que son: conceptos, hechos, datos; un conjunto de conocimientos que se expresan metodológicamente, que algunos autores llaman contenidos *procedimentales*, como habilidades, hábitos, operaciones, procedimientos propiamente dichos, etc.; y un conjunto de conocimientos *actitudinales*, que tienen en su base la formación de los valores.

Un mismo contenido tiene potencialidades para expresarse de uno o de otro tipo, de acuerdo a los objetivos que se formulen.

Los contenidos se expresan en las asignaturas, que están incluidas en el plan de estudio y en los programas, en los libros de texto y en otros materiales de carácter docente.

Existen una serie de principios para la estructuración de los contenidos, entre ellos: *carácter científico, sistematización, carácter único y diverso y el de la relación intermateria*.

Por otra parte, el éxito de la enseñanza depende en gran medida de su correcta dirección y en ella ocupa un destacado lugar el **método** de enseñanza.

Es indudable el valor que posee el objetivo y el contenido como elementos decisivos en la concepción del proceso de enseñanza, pero para llevarlos a vías de hecho resulta determinante el método.

Según Lerner, citado por Chávez (2002, p.6), *“los métodos de enseñanza se definen como las formas de organizar la actividad cognoscitiva de los estudiantes que aseguran el dominio de los conocimientos, de los propios métodos del conocimiento, de la actividad práctica...”*.

Según Danilov, citado en la referencia anterior, se expresa que *“el método de enseñanza constituye un sistema de acciones del maestro, dirigido a un objetivo, que organiza la actividad cognoscitiva y práctica del alumno, con lo que asegura que éste asimile el contenido de la enseñanza”*.

La didáctica por lo general, no distingue entre los métodos utilizados en la enseñanza media y otros particulares de la enseñanza superior.

Existen numerosas clasificaciones de los métodos de enseñanza, de acuerdo a diferentes puntos de vista. Asumiremos los criterios del destacado especialista alemán Lothar Klimberg, que propone una clasificación muy generalizada, según el tipo de proceso de comunicación y el grado de independencia del trabajo de los alumnos; estos son: *el método expositivo, el de trabajo independiente de los alumnos y el de elaboración conjunta*.

En el método **expositivo** se aprovechan todas las potencialidades instructivas y educativas que se derivan de la palabra del maestro o profesor. Predomina la actividad de este: él informa,

narra, ejemplifica, demuestra. La actividad del alumno es eminentemente receptiva.

En el método de **trabajo independiente** de los alumnos se transforma la situación antes planteada. La actividad de los alumnos pasa a un primer plano. Trabajan con intensidad al solucionar de modo relativamente independiente sus problemas.

La forma típica de manifestarse el método de **elaboración conjunta** es la conversación en clase (socrática, heurística o discusión). Se caracteriza por la actividad comunicativa del alumno.

Durante el diseño de nuestra estrategia se propone combinar estos métodos de enseñanza a través de las diferentes formas de docencia, predominando el expositivo en la conferencia taller, y el de elaboración conjunta y de trabajo independiente en las clases prácticas y seminarios.

**Los medios de enseñanza** son los componentes del proceso de enseñanza que sirven de sostén material a los métodos; constituyen distintas imágenes y representaciones de los objetos y fenómenos que se confeccionan especialmente para la docencia, también abarcan objetos naturales e industriales, tanto en su forma normal como preparada, los cuales contienen información y se utilizan como fuente de conocimientos.

En Chávez (2002, p.7) puede verse que *“...los medios de enseñanza permiten crear las condiciones materiales- objetivas- favorables para cumplir con las exigencias científicas del mundo contemporáneo, durante el proceso de enseñanza- aprendizaje”*

Existen también numerosas **clasificaciones** de los medios de enseñanza, una bastante difundida con la que coincidimos, es la que los divide en los siguientes grupos: *objetos naturales e industriales; objetos impresos y estampados; medios sonoros y de proyección; y finalmente, materiales derivados de la tecnología educativa.*

Algunas **características que debe reunir** la selección y/o elaboración de los medios son: deben ser bien seleccionados de acuerdo al objetivo de la actividad docente, pueden emplearse en diferentes momentos del PEA, deben poseer la calidad y estética acordes con las exigencias higiénicas, didácticas y psicopedagógicas requeridas.

La pizarra, el libro de texto, etc., pueden ser medios eficaces del proceso de enseñanza si son bien elegidos y se saben utilizar en su momento. En la estrategia que se propone, estos son los medios fundamentales que se proponen emplear, a los que se une, el empleo de las TIC en la búsqueda de información por Internet y el uso del paquete Mathematica en la constatación y/o visualización de resultados derivados del estudio conceptual.

Otro componente didáctico de mucha importancia es: **la evaluación**.

Concebir **la evaluación** en un sentido amplio significa utilizarla como instrumento que permite, por una parte, establecer en diferentes momentos del proceso, la calidad con que se van cumpliendo los objetivos planteados, y por otra, y en dependencia de los resultados alcanzados, determinar las correcciones que es necesario introducir para acercar cada vez más los resultados a las exigencias de los objetivos; o sea, debe verse la evaluación como componente que permite valorar la calidad, tanto de los procesos como de los resultados.

En su sentido más estrecho, la evaluación se refiere al momento de comprobación en el que se establece una calificación expresada en una nota o índice que signifique el nivel de calidad alcanzado en el proceso general y el resultado del aprovechamiento que manifiesta cada uno de los alumnos. Cuando nos referimos a la evaluación en un sentido más estrecho, lo identificamos con el juicio de valor que se emite cuando concluye el proceso evaluativo.

El carácter de continuidad de la evaluación permite la constante comprobación del resultado del proceso de enseñanza y la convierte en guía orientadora de este.

La evaluación cumple varias funciones: instructiva, educativa, de diagnóstico, de desarrollo y de control.

Según su temporalidad, los diferentes tipos de control pueden clasificarse en: control sistemático, corriente o continuo, control parcial, examen final.

Sobre la presencia de este componente didáctico en la Didáctica de la Matemática, específicamente en la enseñanza basada en la resolución de problemas, se profundizará más adelante.

Por otra parte, existen distintas **formas de organización de la enseñanza**, pero señalaremos las que propone Chávez (2002, p.10), que comentaremos a continuación:

- a) Individual (en la enseñanza general se presenta por medio de la orientación de estudio individual, trabajos investigativos; en la enseñanza superior, además de las anteriores, por medio de la organización de tutorías, cursos personalizados, realización de prácticas laborales, proyectos, etc)
- b) Grupo-clase (más generalizada en la enseñanza general)
- c) Conferencias- seminarios (más generalizada en la enseñanza superior)

La clase, en cualquier nivel de enseñanza, es la forma básica de la organización del PEA. Su

planificación constituye una etapa fundamental del trabajo del educador, es un proceso creador en el que se manifiesta su preparación, su sentido de responsabilidad y su habilidad para estructurarla tomando como base las exigencias que debe reunir en la escuela moderna y las características del grupo y de cada alumno. De la calidad de su planificación depende en gran medida su efectiva realización. La necesidad de que cada una posea una lógica interna de acuerdo con sus objetivos, contenidos y métodos, hace imposible la creación de una estructura única para todas.

Existen diferentes **tipos de clases** en la enseñanza general: para el tratamiento del nuevo contenido, de consolidación, de ejercitación, de aplicación, de generalización de los contenidos, clases de control.

En aras de lograr el necesario enfoque de sistema de un conjunto de clases dentro de una unidad temática, es importante que el maestro planifique todas las que corresponden a dicha unidad, pues de esa manera logra tener una visión del conjunto y puede realizar una retroalimentación efectiva; así como reajustes durante la implementación, a medida que va realizando el control correspondiente.

Dentro de las formas de organización contempladas en el sistema de trabajo didáctico en la Educación Superior Angolana se señalan las conferencias, seminarios, clases prácticas, laboratorios y clases consulta, en cada una de ellas predomina una estructura metodológica semejante: introducción, desarrollo y conclusiones. Cada uno de estos elementos estructurales posee sus especificidades acorde con la forma de docencia escogida y los objetivos que esta persigue.

En la estrategia didáctica que proponemos se combinan estas formas de organización.

Un aparte especial merece la realización de consideraciones didácticas relativas al logro de la necesaria unidad entre lo cognitivo y lo afectivo que debe existir en el PEA.

En primer lugar, los alumnos deben ser movidos a realizar las actividades en el aula por un proceso de motivación intrínseca, por lo que para lograr esto es necesario profundizar en el conocimiento de aspectos motivacionales.

En cuanto a la **motivación extrínseca**, se puede decir de manera muy simplificada, que existen dos formas de mover a los estudiantes desde el exterior: utilizando el sistema de la recompensa o el de la sanción. El primero consiste en recompensar a los estudiantes por sus esfuerzos y los buenos resultados. El de la sanción utiliza el miedo, el castigo para penalizar la falta de esfuerzo y los malos resultados.

Actualmente la mayoría de los maestros están conscientes que la enseñanza por sanción es muy ineficiente a mediano y a largo plazo, puesto que raramente consigue estimular la creatividad de sus alumnos. El castigo tal vez funcione para que los estudiantes dejen de hacer algo, pero está muy lejos de motivarlos para que actúen hacia su mejora constante. La educación por sanciones motiva a una sola acción: evitar la sanción.

Por otra parte, en cuanto a la motivación por recompensas, esta es más compleja y menos efectiva de lo que pudiera parecer a primera vista, pues: pueden entorpecer las relaciones entre los alumnos, ya que los compañeros se convierten en obstáculos, no en compulsores y mediadores; las recompensas ignoran las causas del comportamiento; no se corresponden con lo que los estudiantes valoran; estimulan y refuerzan algo terminado, de modo que limitan la experimentación y la intuición; pueden transformar las tareas (problemas) en un medio para un fin, ya que estimulan a los estudiantes a trabajar por su obtención.

Cuando un problema de aprendizaje es extrínseco, una vez que se resuelva, no hay ya ninguna necesidad de seguir recordando las materias aprendidas con su solución y la retención, la comprensión y su utilización serán mucho menores que cuando se aprenden las materias porque el estudiante desea hacerlo. Si para la solución de un problema fue necesario aprender cierta teoría con el único objetivo de aprobar un examen, una vez aprobado éste, no existirá ya la razón para fijar esa teoría.

Lograr **la motivación intrínseca** en un estudiante consiste en conseguir que enriquezca su trabajo con su energía, su personalidad, su constancia y su creatividad. La energía que mueve a las personas, y que constituye la base de la motivación viene de dentro y parte de los valores individuales de cada cual. Cuando una persona desarrolla un estado de tensión resultante de las necesidades no satisfechas, se dice que se siente motivada. Evidentemente, la motivación desempeña un papel fundamental en el aprendizaje. Los estudiantes motivados trabajan enérgicamente y con intención, a la vez que presentan pocos problemas de disciplina.

En la estrategia didáctica que proponemos se deja claro cómo la existencia de la motivación intrínseca, es una de las condiciones necesarias para lograr un el aprendizaje activo, mediado y significativo durante los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual.

### **1.3.2 Aspectos relativos a la Didáctica de las Matemáticas, en torno al Papel de la resolución de problemas en el PEA de la Matemática Superior.**

La habilidad de plantear y resolver problemas con una variedad de estrategias y recursos, aparece no sólo como contenido procedimental, sino también como una de las bases del

enfoque general con que han de trabajarse los contenidos de Matemática en la Enseñanza General de cualquier país, situándose como un aspecto central del PEA; aspecto que no ocurre así en la enseñanza superior, donde los problemas generalmente solo son empleados al final de las unidades temáticas como aplicaciones de los contenidos tratados.

El estudio del papel de los problemas en la lógica y estructura del PEA de la Matemática constituye un aspecto de cardinal importancia en los trabajos de A. Schoenfeld (1985), Miguel De Guzmán (1993), Luz Manuel Santos (1995), Joseph Gascón (1994), Jeremy Kilpatrick (1990), Marie Lise Peltier (1993) y otros, que no sólo se restringen al estudio de los procesos heurísticos que transcurren en la solución del problema; sino que ofrecen discusiones sobre su empleo como base para las sugerencias didácticas.

Sobre **qué se entiende por problema**, han existido muchas disquisiciones.

Al respecto Polya afirma: *“Tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata”*.

Otra definición, parecida a la de Polya, es la de Krulik y Rudnik (1980, p.65): *“Un problema es una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cuál no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma”*.

Schoenfeld (1985) usa el término problema como una *tarea que es difícil para el individuo que está tratando de resolverla*. Además expresa que *la dificultad portadora del problema debe ser un impase intelectual y no solamente a nivel operacional o de cálculo*.

En este sentido Miguel de Guzmán (1993, p. 12) plantea: *“Tengo un verdadero problema cuando me encuentro en una situación desde la que quiero llegar a otra, unas veces bien conocida; otras, un tanto confusamente perfilada y no conozco el camino que me puede llevar de una a otra”*.

Al respecto, entenderemos por **problema**, una situación a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cual no se vislumbra un medio, algoritmo o camino rutinario y obvio que conduzca a la misma.

Esta caracterización identifica tres componentes de un problema: *estar consciente de una dificultad, tener deseos de resolverla y la no existencia de un camino inmediato para resolverla*.

Por otra parte, son reconocidas por la literatura **las funciones de los problemas** en el PEA de la Matemática. Estas funciones son:

- **Instructiva**, ya que permiten formar en el alumno un sistema de conocimientos, capacidades, habilidades y hábitos matemáticos, contribuyendo con esto a la asimilación de conceptos, teoremas y procedimientos.
- **Desarrolladora**, pues la RP está encaminada a fomentar el pensamiento de los alumnos y a dotarlos de métodos efectivos de actividad intelectual, lo que se ve reflejado en el hecho de que en los problemas existen potencialidades educativas, orientadas a la formación de la concepción científica del mundo, al desarrollo de intereses cognoscitivos, la independencia, hábitos de trabajo y a la formación de valores, convicciones y cualidades morales.
- **De control**, pues la RP permite comprobar en qué medida se cumplen los objetivos planteados para el PEA que se ejecuta.

Dado que en Angola no existe una formalización en la literatura pedagógica de resultados en el empleo de la resolución de problemas, y que las experiencias transmitidas por los profesores cubanos en el ISCED de Angola han sido muy positivas en este sentido, es que profundizamos en la experiencia cubana con relación al papel de la RP.

Al respecto, se destacan las investigaciones del psicólogo Alberto Labarrere, el pedagogo Carlos M. Alvarez de Zayas, los metodólogos de la enseñanza de la Matemática Luis Campistrous y Celia Rizo, entre otros.

A. Labarrere, (1988, p.18) plantea: *“para que la enseñanza de la solución de problemas permita a la vez asimilar conocimientos, formar hábitos y habilidades y desarrollar el pensamiento del alumno, es necesario concebirla y estructurarla de una forma determinada, especialmente planificada, con objetivos de desarrollo claramente formulados”*.

De la teoría de Carlos M. Alvarez, resaltamos el papel asignado a la motivación asociado al planteamiento y solución de problemas; la estructuración del sistema de conocimientos sobre la base de un núcleo, que constituyen las invariantes de las habilidades; la organización del proceso docente la concibe siguiendo la lógica de la ciencia y la reafirmación de que el conocimiento se adquiere en la actividad.

En las investigaciones realizadas por los doctores L. Campistrous y C. Rizo sobre el aprendizaje de la resolución de problemas destacan algunas barreras que existen para la

resolución de los problemas aritméticos, las cuales deben ser tenidas en cuenta de modo general. Estas barreras se concentran en: *“la excesiva actuación del maestro, el alumno no logra formas de actuación generalizadas, los problemas se utilizan en función del desarrollo de habilidades y no como objeto de enseñanza en sí mismos, no se enseñan técnicas de trabajo, los parámetros de dificultad para los problemas son poco precisos y no se trabajan los significados prácticos”*. Campistrous, (1996. P. X-XI).

Al estudiar el papel de la **resolución de problemas (RP)** en las estrategias empleadas por los profesores para dirigir el PEA, reconoce que se realiza de tres formas fundamentales:

- ❖ Los problemas son presentados al final del tema, con fines de evaluación (PEA para la RP).
- ❖ El problema es presentado como medio del aprendizaje (PEA de la RP).
- ❖ El problema es presentado como móvil del aprendizaje. (PEA por medio de la RP).

Estas precisiones sobre el lugar del problema en la estructura del PEA nos han permitido destacar la tendencia que se manifiesta actualmente en **nuestras universidades**, a seguir la primera y la segunda, apareciendo los problemas en la etapa final de estudio de los diferentes contenidos, o como medio para explicar el programa heurístico a seguir durante la RP, respectivamente, o de forma ocasional para motivar la introducción de un concepto, teorema o procedimiento y en pocos casos motivar el estudio del tema, o llevar a cabo un PEA de gran parte o toda la teoría objeto de estudio, por medio de la RP.

En este sentido, consideramos importante tener en cuenta que los problemas satisfagan las tres posiciones indicadas en la dirección del PEA.

La utilización de los términos “problema” y “resolución de problemas (RP)” ha tenido múltiples **significados** a través de los años, como se describe en los tres siguientes epígrafes.

#### **1.3.2.1 Primer significado: resolver problemas como contexto. Enseñanza para la resolución de problemas.**

Desde esta concepción, los problemas son utilizados como vehículos al servicio de otros objetivos curriculares, jugando los roles siguientes, relacionados en Vilanova (1999):

*Como medio para desarrollar nuevas habilidades:* se cree que, cuidadosamente secuenciados, los problemas pueden proporcionar a los estudiantes nuevas habilidades y proveer el contexto para discusiones relacionadas con algún tema.



*Como práctica:* la mayoría de las tareas matemáticas en la escuela se incluyen aquí. Se muestra una técnica a los estudiantes y luego se presentan problemas de práctica hasta que se ha dominado la técnica.

*Como actividad recreativa:* muestran que la matemática puede ser “divertida” y que hay usos entretenidos para los conocimientos matemáticos.

En cualquiera de estas formas, los problemas son usados como medios para algunas de las metas señaladas; o sea, la RP no es vista como una meta en sí misma, sino como facilitadora del logro de otros objetivos.

Según el doctor español Juan Antonio García Cruz en García y otros (2000), esta interpretación se refiere a la proposición de más problemas a los estudiantes, emplear aplicaciones de los problemas a la vida diaria y a las ciencias, generalmente al final de las unidades temáticas.

### **1.3.2.2 Segundo significado: resolver problemas como habilidad. Enseñanza de la resolución de problemas.**

La resolución de problemas es frecuentemente vista como una de tantas habilidades a ser enseñadas en el curriculum. Muchos de los desarrollos curriculares que han existido bajo el término resolución de problemas a partir de la década de los 80 son de este tipo.

La heurística moderna, inaugurada por Polya, trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas y las operaciones típicamente útiles en este proceso.

La enseñanza de la resolución de problemas, tal como lo plantea Polya, se vuelve difícil para los docentes por tres razones diferentes: **matemáticamente**, porque los docentes deben poder percibir las implicaciones de las diferentes aproximaciones que realizan los alumnos, darse cuenta si pueden ser fructíferas o no, y qué podrían hacer en lugar de eso; **pedagógicamente**, porque el docente debe decidir cuándo intervenir, qué sugerencias ayudarán a los estudiantes, sin impedir que la resolución siga quedando en sus manos, y realizar esto para cada alumno o grupo de alumnos de la clase; y **personalmente**, porque el docente estará a menudo en la posición (inusual e incómoda para muchos profesores) de *no saber* (sobre todo de cuestiones pedagógicas para conducir mejor el proceso). Trabajar bien sin saber todas las respuestas, requiere experiencia, confianza y autoestima.

Muchas veces se les resuelve un problema a manera de ejemplo a los alumnos, luego se les formula otro problema semejante con datos numéricos distintos, y nos encontramos con la no grata sorpresa que no hallan forma de resolverlo. Esto nos lleva a interrogarnos si hemos

explicado consistentemente los procedimientos adecuados para resolver problemas o si hemos exigido mayor práctica, porque según Polya: para ser hábiles en la resolución de problemas, tenemos que resolver problemas.

### **Modelo de Polya para la resolución de problemas.**

Este modelo consta de cuatro etapas que dirigen la acción de quien se enfrenta a un problema, con el fin de ayudarlo a eliminar las discrepancias entre el objeto del problema su solución: *comprender el problema, concebir el plan, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida*. Analizando y sintetizando lo que al respecto se expresa en Polya (1986), tenemos que:

Para **comprender el problema** se hace necesario dirigir la reflexión sobre:

¿Cuál es la incógnita?, ¿Cuáles son los datos?, ¿Cuál es la condición?, ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?, ¿Es insuficiente?, ¿Redundante?, ¿Contradictoria?

En la segunda etapa, las reflexiones encaminadas a **concebir el plan**, deben centrarse en:

-¿Se ha encontrado con un problema semejante?

-¿Ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?

-¿Conoce algún problema relacionado con este? ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil? Mire atentamente la incógnita y trate de recordar un problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una incógnita similar.

-He aquí un problema relacionado al suyo y que se ha resuelto ya. ¿Podría usted utilizarlo? ¿Podría utilizar el resultado? ¿Podría emplear su método? ¿Le haría falta introducir algún elemento auxiliar?

-¿Podría enunciar el problema de otra forma? ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente?

-Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero algún problema similar. ¿Podría imaginarse un problema análogo un tanto más accesible? ¿Un problema más general? ¿Un problema más particular? ¿Un problema análogo? ¿Puede resolver una parte del problema?

-Considere solo una parte de la condición; descarte la otra parte; ¿En qué medida la incógnita queda ahora determinada? ¿En que forma puede variar? ¿Puede usted deducir algún elemento útil de los datos? ¿Puede pensar en algunos otros datos apropiados para determinar

la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita o los datos, o ambos si es necesario, de tal forma que estén más cercanos entre sí?

-¿Ha empleado todos los datos? ¿Ha empleado toda la condición? ¿Ha considerado usted las nociones esenciales concernientes al problema?

Para la **ejecución del plan** debe indicarse:

-Compruebe cada uno de los pasos, al ejecutar su plan de la solución.

-¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede usted demostrarlo?

Al **examinar la solución** se indica hacer una visión retrospectiva de lo realizado, proponiendo las preguntas siguientes:

-¿Puede usted verificar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento?

-¿Puede obtener el resultado en forma diferente? ¿Puede verlo de golpe?

-¿Puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema?

-¿Puede plantear un nuevo problema relacionado con este?

Las fases anteriores caracterizan al alumno que es bueno resolviendo problemas. Cada fase se acompaña de una serie de preguntas, al estilo socrático, cuya intención es actuar como guía para la acción.

Una pregunta se impone, ¿por qué es tan difícil entonces, para la mayoría de los alumnos, la resolución de problemas en Matemáticas?

Los trabajos de Schoenfeld (1987) suponen, por otro lado, un intento de búsqueda de explicaciones para la conducta de los solucionadores reales de problemas. Propone un marco con cuatro componentes que sirven para el análisis de la complejidad del comportamiento en la resolución de problemas: **recursos cognitivos**: conjunto de hechos y procedimientos a disposición del solucionador; **heurísticas**: reglas para progresar en situaciones difíciles; **control**: aquello que permite un uso eficiente de los recursos disponibles; y el **sistema de creencias**: perspectiva con respecto a la naturaleza de la Matemática y como trabajar en ella.

### **1.3.2.3 Tercer significado del empleo de la resolución de problemas: resolver problemas es "hacer matemática". Enseñanza por medio de la resolución de problemas.**

En la actualidad, algunas tendencias contemporáneas de la enseñanza de la Matemática sustentan la enseñanza por resolución de problemas que pone énfasis en los procesos de

pensamiento que tienen como eje principal la actividad del alumno colocándolo en la situación de participar en el descubrimiento del nuevo conocimiento.

En el método de enseñanza por resolución de problemas se trata de armonizar adecuadamente la componente heurística (atención a los procesos de pensamiento) y los contenidos específicos del pensamiento matemático; sin embargo, se critica la falta de modelos adecuados que orienten al profesor en la integración de los contenidos y los procesos en un todo armonioso en la dirección del aprendizaje.

En Rebollar (2000, p. 25) puede leerse: *“La enseñanza basada en problemas consiste en el planteo y resolución de problemas en cuya resolución se produce el aprendizaje. En este caso no se trata de problematizar el objeto de enseñanza ni de plantear problemas complejos que requieran de nuevos conocimientos matemáticos, más bien se trata de resolver problemas matemáticos relacionados con el objeto de enseñanza, sin confundirse con él, y que van conformando hitos en el nuevo aprendizaje. Este tipo de enseñanza no está didácticamente estructurado....”*

La enseñanza por problemas involucra todo un proceso de aprendizaje, donde el tutor debe ser un agente mediador entre el conocimiento y el alumno para conducirlo a utilizar la teoría o los contenidos de una o más asignaturas como herramientas que le permitan identificar problemas, determinar causas, proponer y seleccionar alternativas de solución, relacionados con el área de su disciplina. Pero también debe promover su **motivación intrínseca** para que sea el mismo estudiante quien trate de relacionar la teoría con un problema real y de su entorno, que sea capaz de relacionar los conocimientos previos con los nuevos para construir su propio conocimiento y de esta manera lograr un aprendizaje significativo.

Algunas de las acciones que hemos aplicado con buenos resultados al utilizar la resolución de problemas como un medio para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática son:

1. Utilizar la resolución de problemas para que los estudiantes participen en la construcción de la matemática que aprenden y para que le encuentren un adecuado sentido a sus técnicas, ideas, objetivos, estructuras, etc.
2. Utilizar problemas adecuados que motiven y faciliten la formación y desarrollo de conceptos y la formulación y demostración de teoremas.
3. Utilizar cadenas de problemas del tipo (problema planteado – problema resuelto – nuevos problemas planteados) que motiven y faciliten diferentes generalizaciones del problema planteado, o del concepto al cual pudiera referirse el problema, teniendo en cuenta el

desarrollo del tipo de pensamiento que corresponde a cada nivel (pensamiento numérico en la enseñanza general y pensamiento funcional en la enseñanza superior).

4. Insistir en que la obtención de la solución de un problema no debe considerarse como la etapa final del mismo. Una vez resuelto, se debe realizar un análisis de las ventajas, calidad o deficiencias de las estrategias o métodos utilizados; se debe analizar además, las posibilidades de generalización del problema, por ejemplo, eliminando restricciones bajo las cuales se resolvió, ampliando el contexto conceptual en que se planteó, etc.
5. Mediar para que en el transcurso de la resolución del problema afloren distintas formas de resolución, teniendo en cuenta los diferentes estilos de aprendizajes de los alumnos, mediante la orientación de su análisis desde la perspectiva de diferentes contextos matemáticos (geométrico, algebraico, aritmético, funcional, etc). Muchos estudiantes que llegan a la universidad han desarrollado muy pocas habilidades en el análisis y la utilización de diferentes vías para resolver un problema, y lo que resulta más agravante, terminan su carrera sin esta habilidad.
6. Ofrecer impulsos y adecuados niveles de ayuda para que los estudiantes sientan la necesidad, una vez que han logrado la solución de un problema, de plantear nuevos problemas que estén dirigidos, por ejemplo, a eliminar alguna restricción bajo la cual fue resuelto, a extenderlo a un contexto matemático más general, o a resolver un problema de su vida relacionado con el problema resuelto.
7. Motivar el estudio de un nuevo tema mediante el planteamiento de un conjunto de problemas que les permita a los estudiantes comprender la importancia de dicho tema, y que resolverán durante el desarrollo del mismo. Estos problemas pueden tratar sobre el desarrollo histórico del tema, aplicaciones, el entorno, situaciones de otras áreas matemáticas, etc.; de manera que el planteamiento del nuevo aprendizaje (conocimientos en la ZD potencial) mediante la formulación del problema y el proceso de solución del mismo se lleven a cabo de manera significativa, teniendo en cuenta las estructuras mentales existentes (conocimientos en la ZD), las que, después de resuelto el problema, son susceptibles de modificarse; esto es, ampliarse, rechazarse, reemplazarse, etc.
8. Tener presente que el PEA basado en la resolución de problemas debe contribuir a ampliar la esfera de intereses de los alumnos, de manera que se vayan automotivando cada vez más y permita desarrollar habilidades en el planteamiento y resolución de problemas.

Esta estrategia permite **al alumno**, relacionar los problemas con la realidad, encontrar una vía de relacionar el conocimiento nuevo con el que ya tiene, correlacionar la asignatura con otras asignaturas, disciplinas del año (articulación horizontal) y de otros años (articulación vertical), y en general, con el entorno; utilizar la teoría para la búsqueda de causas y soluciones; investigar, descubrir, crear, proponer soluciones y mostrar resultados; desarrollar el pensamiento hipotético y deductivo necesario en todo proceso de investigación; aplicar los conocimientos de manera inmediata; desarrollar habilidades de comunicación y aprendizaje; trabajar en grupos interdisciplinarios para socializar hallazgos, discutir, reflexionar sobre resultados, plantear otras soluciones y compartir conocimientos; desarrollar el sentido de responsabilidad y compromiso social; desarrollar el pensamiento crítico; tomar decisiones; participar (aprendizaje activo) en el proceso de construcción de su conocimiento y en el propio desarrollo de la asignatura.

Como **estrategia pedagógica** implica que el planteamiento y la resolución de los problemas se lleve cabo de manera significativa, activa y mediada cuando se requiera; que el rol del **docente** deje de ser el de transmisor del conocimiento y se convierta en el mediador principal, contribuyendo a que el alumno juegue su papel protagónico en el PEA; que incentive el espíritu de investigación en el estudiante mediante acciones encaminadas a la identificación de los problemas, a su planteamiento y formulación, así como a la búsqueda de soluciones posibles; estimular el interés por el estudio y la **motivación intrínseca**, obteniéndose mejores resultados en el aprendizaje; por último, el docente debe realizar un efectivo control del proceso encaminado al logro del aprendizaje significativo.

### ¿Cómo evaluar el aprendizaje por problemas?

Para evaluar eficientemente este tipo de aprendizaje es necesario combinar las diferentes formas de este componente didáctico.

Según su **temporalidad**: se recomienda combinar evaluaciones frecuentes y parciales.

Según sus **agentes**, se deben realizar tanto *coevaluaciones* como *autoevaluaciones*.

Por otra parte, deben combinarse evaluaciones que contribuyan a la valoración por el profesor, no solo del grado de dominio por los alumnos de los *resultados* obtenidos durante el PEA, sino de los *procesos* que han intervenido en su obtención.

También deben combinarse preguntas tanto reproductivas, productivas como creativas y debe priorizarse la evaluación en su función formativa sobre la sumativa.

Sobre las características de **la función sumativa de la evaluación**, podemos afirmar que: se evalúa fundamentalmente a través de controles y exámenes puntuales encaminados a comprobar el grado de asimilación de los resultados obtenidos en el PEA, como saberes conceptuales y procedimentales, su calificación es numérica y uniforme, considera que los instrumentos empleados son indicadores fiables de los saberes de los alumnos; por lo que sino se combina con la evaluación formativa, entonces no se tienen en cuenta las diferencias individuales, no se evalúan los procesos que intervienen durante el aprendizaje, a la vez que no se valoran otras variables importantes del PEA.

Sobre las características de **la función formativa de la evaluación**, podemos afirmar que:

- Se centra tanto en el proceso como en el resultado, pues su propósito no es juzgar y sancionar el aprendizaje producido, sino que se centra en la ayuda a conseguirlo.
- Contribuye a que se produzca un aprendizaje significativo; de manera que presta especial atención a evaluar: si lo que el alumno sabe (con lo cual se debe relacionar el nuevo conocimiento) lo tiene estructurado significativamente, en caso que no sea así, debe contribuir a que se pueda organizar este conocimiento previo significativamente; lo que no sabe y es necesario para que se pueda estructurar adecuadamente el nuevo conocimiento; y si el nuevo conocimiento se presenta significativamente.
- Según Martínez (2002, p.91) *“Permite la incorporación de los estudiantes al proceso de evaluación, pues el alumno participa en la evaluación de sus compañeros (coevaluación) y realiza su autoevaluación, el profesor debe mostrar alta sensibilidad y tacto pedagógico en el tratamiento diferenciado,..., creando un clima de comprensión y ayuda mutua, a la vez que suscita el afianzamiento de importantes valores morales como la responsabilidad, la honestidad, la honradez y la solidaridad.”*

**Otras acciones del docente durante el aprendizaje por problemas**, pueden ser:

- Definir si durante todo el desarrollo de la asignatura trabajará la estrategia de aprendizaje por problemas o si se aplicará en puntos estratégicos de la misma.
- Mediar adecuadamente para que en el proceso de solución se manifiesten los aprendizajes activo, con la correspondiente autogestión del aprendizaje y autorregulación de los procesos; mediado, con niveles de ayuda adecuados para vencer dificultades, aunque sin caer en manifestaciones de ayuda prematura, explotación de los errores; y significativo, con el empleo de adecuados organizadores, logro de transferencias de conocimientos, etc.

- Fomentar la aplicación, por los alumnos, de soluciones alternas del problema para así estimular el deseo de utilizar el conocimiento adquirido y reconocer la contribución del problema al desarrollo de su conocimiento y sus habilidades.
- Suscitar la autorregulación mediante la reflexión honesta y sincera con él mismo sobre los resultados, como diseñador y guía de la evaluación del trabajo.

Como se puede observar, la estrategia del “**aprendizaje por problemas**” puede contribuir a que se desarrollen los procesos de aprendizaje activo, mediado y significativo, a la generación y desarrollo del espíritu de investigación y a despertar el interés por el estudio en la medida que participan en el desarrollo de la teoría y en su aplicación a problemas variados que pudieran incluir contenidos que estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, a la vez que los motiva a buscar su solución, mediante la aplicación de los conocimientos adquiridos, lográndose con ello un conocimiento verdaderamente significativo.



## **Capítulo 2. Estrategia didáctica para el tratamiento de la resolución de problemas en la carrera Licenciatura en Ciencias de la Educación, especialidad Matemática**

### **2.1 Contextualización sobre las características generales de la estrategia didáctica.**

Consideramos que una propuesta bastante acabada sobre la **definición y los componentes de una estrategia**, es la que exponen los investigadores del “Centro de Estudios de Ciencias Pedagógicas” (CECIP) de la Universidad Pedagógica “Félix Varela”, que han destacado: *“En el contexto de la Pedagogía, la estrategia establece la dirección inteligente, y desde una perspectiva amplia y global, de las acciones encaminadas a resolver los problemas detectados en un determinado segmento de la actividad humana. Se entienden como problemas las contradicciones o discrepancias entre el estado actual y el deseado, entre lo que es y debería ser, acorde con determinadas expectativas que dimanen de un proyecto educativo dado. Su diseño implica la articulación dialéctica entre objetivos (metas perseguidas) y metodología (vías instrumentadas para alcanzarlas).”*

Es importante saber en qué momento se requiere realizar una investigación para obtener una estrategia como resultado científico. Esto es necesario cuando el propósito esencial del trabajo sea la proyección a corto, mediano y largo plazo de la transformación de un objeto temporal y espacialmente ubicado, desde un estado real hasta un estado deseado, mediante la utilización de determinados recursos y medios que responden a determinados objetivos.

**Rasgos generales de una estrategia**, señalados por los miembros del CECIP, se relacionan a continuación.

- Concepción con enfoque sistémico en el que predominan las relaciones de coordinación, aunque no dejan de estar presentes las relaciones de subordinación y dependencia.
- Una estructuración a partir de fases o etapas relacionadas con las acciones de orientación, ejecución y control, independientemente de la disímil nomenclatura que se utiliza para su denominación.
- El hecho de responder a una contradicción entre el estado actual y el deseado de un objeto concreto ubicado en el espacio y en el tiempo que se resuelve mediante la utilización programada de determinados recursos y medios.
- Un carácter dialéctico que le viene dado por la búsqueda del cambio cualitativo que se producirá en el objeto (estado real a estado deseado), por las constantes adecuaciones y

readecuaciones que puede sufrir su accionar y por la articulación entre los objetivos (metas perseguidas) y la metodología (vías instrumentadas para alcanzarlas).

- La adopción de una tipología específica que viene delimitada a partir de lo que se constituya en objeto de transformación.

Un ejemplo de tesis en la que se observa claramente las **fases de una estrategia** es Alonso (2000), en la que se describe sucintamente: *“La estrategia se concibe de manera tal que su desarrollo ocurre en tres fases que se denominan: **preparatoria, ejecutiva y evaluativa...**”*

Sobre los elementos y condiciones que deben contener cada una de las fases se encuentran:

**Fase preparatoria:** existencia de insatisfacciones respecto a los fenómenos, objetos o procesos educativos en un contexto a ámbito determinado; diagnóstico de la situación; planteamiento de objetivos y metas a alcanzar en determinados plazos de tiempo; definición de actividades y acciones que respondan a los objetivos trazados y entidades responsables; y, planificación de recursos y métodos para viabilizar la ejecución y el control. En la planificación del control se definen los indicadores y los parámetros a tener en cuenta para su control.

**Fase de ejecución:** ejecución de las acciones previstas en la planificación, readecuando las mismas a las exigencias que la práctica vaya exigiendo.

**Fase de evaluación:** evaluación de resultados obtenidos durante la implementación, por medio de la valoración de la calidad de los indicadores previstos, valiéndose de métodos como: la entrevista, la encuesta, la observación, las pruebas de contenido, estudio de casos, etc.

También coincidimos con los miembros del CECIP, cuando plantean los siguientes **aspectos organizativos de una estrategia** en los marcos de un trabajo científico:

- I. Introducción. Fundamentación. Se establece el contexto y ubicación de la problemática a resolver, ideas y puntos de partida que fundamentan la estrategia.
- II. Diagnóstico. Indica el estado real del objeto y evidencia el problema en torno al cual gira y se desarrolla la estrategia.
- III. Planteamiento del objetivo general.
- IV. Planeación estratégica. Se definen metas u objetivos a corto y mediano plazo que permiten la transformación del objeto desde su estado real hasta el estado deseado.
- V. Planificación por etapas de las acciones, recursos, medios y métodos que corresponden a estos objetivos.

- VI. Instrumentación. Explicar como se aplicará, bajo qué condiciones, durante qué tiempo, responsables, participantes.
- VII. Evaluación. Definición de los logros, obstáculos que se han ido venciendo, valoración de la aproximación lograda al estado deseado.

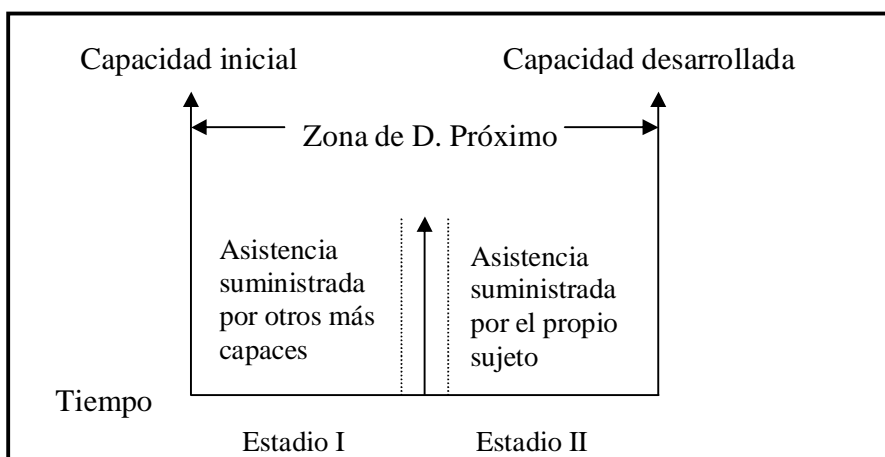
**2.2 Propuesta de la estrategia didáctica para los procesos de formación, desarrollo y generalización de conceptos matemáticos (con un proceso de formación inductivo) en la carrera de Licenciatura en Matemática.**

**2.2.1 Fundamentación.**

**2.2.1.1 El aprendizaje de conceptos y teoremas como proceso activo, mediado y significativo mediante la enseñanza basada en la resolución de problemas.**

Aunque en el epígrafe 1.3 se ofreció una fundamentación psicopedagógica, basada principalmente en El Enfoque Histórico Cultural, de los aprendizajes activo, mediado y significativo de cualquier tipo de contenido en general, en este epígrafe, basándonos en esas ideas generales, profundizaremos en los fundamentos didácticos de estos aprendizajes, particularizando en el caso de la resolución de problemas como medio para el estudio de conceptos y teoremas matemáticos en el nivel superior.

**El aprendizaje como un proceso cognitivo mediado** se justifica en la definición de ZDP dada por Vygotski expuesta en el capítulo 1, para la cual mostramos un organizador elaborado por Martínez Serra (2005, 67) a manera de esquema



De este esquema puede apreciarse que, tomando como base la ZDP, en el aprendizaje hay que distinguir entre lo que el estudiante hace por sí mismo y lo que puede hacer y aprender con ayuda de otras personas (categoría “otros” de Vygotski).

La aceptación de que la mediación facilita el aprendizaje, compromete a los estudiantes a ser mediadores en el aprendizaje de sus compañeros; así como en su propio aprendizaje. Luego, deben: compartir lo que conocen (y lo que no conocen) sobre la situación de aprendizaje con los restantes compañeros de grupo, para contribuir al incremento de su actividad mental; utilizar lo que conocen para hacer predicciones y plantear conjeturas que, posteriormente, mediante un conjunto de acciones e interacciones con el profesor y otros estudiantes sean probadas, modificadas o refutadas; ajustar el nuevo aprendizaje con el conocimiento anterior por medio de nuevos modelos, esquemas, etc.

Sobre **el aprendizaje mediado en la resolución de problemas** G. Polya (1986), afirma:

*“...una de las más importantes funciones del maestro es auxiliar a sus alumnos como guía permanente, lo cual es una tarea nada fácil; debido a que se requiere tiempo, práctica, dedicación y buenos principios...El estudiante debe adquirir en su trabajo personal la más amplia experiencia posible. Pero si se deja sólo frente a un problema, sin ayuda alguna, puede que no progrese. Por otra parte, si el maestro ayuda demasiado, nada se deja al alumno”.*

**El aprendizaje como un proceso cognitivo activo** se justifica en que los estudiantes, para entender los contenidos que reciben, tienen que realizar diferentes actividades; y en dependencia de las actividades que realizan adquieren diferentes aprendizajes, como muestra la siguiente tabla:

Relación actividad /aprendizaje	
Actividad que realiza	Aprendizaje que obtiene
Repite	Repetitivo
Reproduce	Reproductivo
Relaciona los contenidos	Significativo

Sin embargo, es muy difícil convencer a los estudiantes de que el aprendizaje verdadero, importante y duradero sólo se produce con su actividad, y que si él decide no participar activamente en el proceso de aprendizaje, entonces ese aprendizaje no se produce. Surge entonces la pregunta: ¿Qué deben hacer los estudiantes para lograr un aprendizaje activo?

La consecución de un aprendizaje activo por los alumnos requiere de: la *formulación de metas*, la *organización del conocimiento*, la *construcción de significados* y la *utilización de estrategias*.

Para que el estudiante aprenda a **plantearse metas**, la enseñanza debe proporcionar situaciones en que él se vea obligado a ello. Metas que el estudiante debe aprender a plantearse son: comprender, completar o dividir una tarea en tareas más simples; las metas que

el estudiante se plantea determinan si se producirá o no el aprendizaje, así como el tipo de actividad mental necesaria para su aprendizaje. Luego, el aprendizaje es un proceso intencional ya que está orientado a la meta. Entre las actividades mentales necesarias para alcanzar una meta están las siguientes: “*Analizar la tarea de aprendizaje que incluye la meta, analizar las condiciones para lograrla, dividir la meta en submetas y diseñar un plan adecuado para alcanzar la meta o las submetas*”. Beltrán (1998. p.34).

En la estrategia didáctica que se propone se orienta la implementación de acciones en este sentido durante el estudio de conceptos matemáticos.

### **Sobre el empleo de organizadores.**

Todos los que nos hemos ejercitado en el aprendizaje, sabemos que resulta muy difícil aprender la información que recibimos de manera desorganizada y, hemos desarrollado un conjunto de estrategias de **organización de la información**. Luego, los profesores, debemos guiar y dar impulsos a los estudiantes para que encuentren una estructura en los contenidos informativos que le presentamos o para que los estructuren de la mejor manera en relación con sus conocimientos anteriores y para que encuentren patrones, rasgos y significados. Una buena organización de los contenidos contribuye a que el aprendizaje sea duradero y no se pierda cuando se reciben otros aprendizajes.

La **construcción del conocimiento** significa que el estudiante integre lo que aprende con lo que ya conoce. La mejor manera de almacenar el conocimiento en nuestra mente es mediante organizadores como: redes de conceptos o esquemas, por ejemplo, mediante mapas de extensiones, mapas de contenidos, diagramas conmutativos, diferentes representaciones, etc. El aprendizaje se logra, como ya hemos señalado, cuando se establecen las conexiones apropiadas entre la nueva información y la información existente. La calidad y velocidad con que se establecen estas conexiones depende de cómo se tenga organizado el conocimiento anteriormente adquirido y de cómo se organiza la nueva información.

Por otra parte, para que se produzca el aprendizaje el estudiante tiene que utilizar diferentes **estrategias de procesamiento de la información**; entre otras, estrategias generales tales como *organizar, elaborar, repetir, controlar y evaluar*. Sin estas estrategias el aprendizaje puede ser deficiente. La aplicación de las mismas produce un cambio en el conocimiento a partir de la nueva comprensión. Cuando el estudiante logra una profunda comprensión de un conocimiento puede, por una parte, incorporar ese conocimiento a su pensamiento y, por otra, puede pensar

sobre ese conocimiento. Todo lo cual permite utilizar ese conocimiento, que es precisamente la mejor prueba de su correcta comprensión.

El papel del estudiante en el logro de un aprendizaje activo, corresponde al de un ser autónomo, auto-regulado, que conoce sus propios procesos cognitivos y tiene en sus manos el control del aprendizaje, que no se limite a adquirir conocimiento, sino que lo construye usando la experiencia previa para comprender y moldear el nuevo aprendizaje.

Muy importante resulta la concepción del **aprendizaje como un proceso cognitivo significativo**, pues en el PEA se deben propiciar situaciones para que los estudiantes construyan significados, es decir, estructuras cognitivas organizadas y relacionadas. Si el contenido nuevo que se les presenta los estudiantes lo relacionan de manera arbitraria o no lo relacionan con el conocimiento que ellos tienen; entonces a lo más que podemos aspirar es a que se produzca un aprendizaje memorístico o repetitivo.

Si al estudiar un determinado contenido totalmente articulado curricularmente con contenidos anteriores, el estudiante no tiene las estructuras necesarias para su aprendizaje, entonces para que se realice aprendizaje significativo habrá que recurrir a otro tipo de organizador.

Por otra parte, el aprendizaje además de estar determinado por el conocimiento previo, depende de la capacidad adquirida por el alumno a lo largo de su desarrollo, o sea, del nivel alcanzado por sus estructuras mentales que le permiten poner en marcha una determinada capacidad de pensar y aprender. Por ejemplo, en Matemática no es posible pretender lograr un aprendizaje que requiera estructuras relativas a un pensamiento funcional, cuando el alumno ha tenido sólo un desarrollo de su pensamiento numérico.

En el estudio conceptual, la modificación de los modelos mentales del alumno pueden producirse, por ejemplo, cuando el alumno tiene que colocar el nuevo concepto dentro del sistema de conceptos que ya posee, por medio de adecuados organizadores, como mapas de extensiones, de contenidos, simbólicos, diagramas, etc.

La construcción de conocimientos está orientada a compartir significados. Para lograr esto, en el PEA se debe realizar un conjunto de actividades en las que intervengan los estudiantes y el profesor, encaminadas a compartir colecciones de significados cada vez más amplias relativas a los contenidos del currículo, específicamente de los conceptos ya estudiados y los que están en estudio.

Según Ausubel y otros (2000, p.46), “...el aprendizaje significativo por recepción o por descubrimiento requiere tanto de una actitud de aprendizaje significativo como de la presentación de material potencialmente significativo”.

En el análisis del rendimiento en **situaciones de resolución de problemas**, los aspectos centrales a investigar generalmente se relacionan con lo que el individuo sabe y cómo usa ese conocimiento, cuáles son las opciones que tiene a su disposición y por qué utiliza o descarta algunas de ellas. Es importante señalar que en estos contextos, el conocimiento de base puede contener información incorrecta, de manera que el alumno puede arrastrar sus concepciones previas o sus limitaciones conceptuales a la resolución de problemas y esas son las herramientas con las que cuentan.

También existen otros aspectos no menos importantes de cualquier proyecto de aprendizaje que eduque, instruya y desarrolle, estos aspectos se basan en los cuatro pilares de la educación para el siglo XXI “La educación a lo largo de la vida”, expuestos en el informe Delors (1996) de la UNESCO.

Estos pilares son: **Aprender a Conocer** (incluye aspectos cognitivos como las habilidades de pensamiento: conceptualización, observación, clasificación, comparación y contraste, inducción, deducción, abstracción; así como el manejo y comprensión de la información que permiten construir el conocimiento de una manera significativa; también incluye aspectos metacognitivos, que implican autorreflexión y autorregulación de los procesos y productos de aprendizaje, con el fin de detectar debilidades y fortalezas para así plantear estrategias de mejoramiento, como por ejemplo: desaprender conductas inapropiadas de control aprendidas antes), **Aprender a Hacer** (que incluye los saberes procedimentales), **Aprender a Ser y Aprender a Convivir** (que van más a los saberes actitudinales y la formación de valores).

### **Sobre el tratamiento de los conceptos. Los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual.**

En cuanto al **proceso de formación conceptual**, es conocido que la formación de un concepto es un proceso complejo cuyo comienzo puede ser la contemplación de la realidad concreta no analizada: sensaciones, percepciones y representaciones (vía inductiva); sin embargo, no todos los conceptos surgen directamente de las sensaciones y las percepciones. El punto de partida en la formación de un concepto puede ser otro concepto ya formado y con cierto nivel de desarrollo (vía deductiva).

En la formación de conceptos por vía inductiva, la **comparación** juega un papel muy importante, pues gracias a ella es posible determinar relaciones importantes entre los objetos y fenómenos de la realidad como son las de identidad, semejanza, diferencia, etc. Por medio de la comparación se pueden determinar rasgos comunes entre diferentes objetos de la realidad.

Es de destacar el hecho de que en el PEA de la Matemática Superior, los objetos que se comparan en el proceso de formación conceptual son objetos abstractos.

Junto con el proceso de comparación se realizan **procesos de análisis discriminativos** de los rasgos o patrones comunes, y mediante procesos de análisis más profundos se separan los rasgos esenciales y no cualquier rasgo común de los objetos que se analizan. Parejamente al proceso de selección de rasgos comunes o patrones comienza un proceso de transformación de estos rasgos, que en el caso de la matemática puede ser bastante profundo. Precisamente el **proceso de abstracción** consiste en transformar todo lo dado (observado) excluyendo, quitando lo accesorio, que complica y oculta su esencia.

Para formar un concepto es necesario abstraer, separar los elementos y considerarlos aparte de la totalidad de la experiencia concreta en la cual están los objetos.

En la adecuada formación de un concepto, la unión es tan importante como la separación: la **síntesis** debe ser combinada con el análisis. Por medio del proceso de síntesis se agrupan los modelos de rasgos esenciales en una clase que sirve de criterio para modelar los objetos particulares que se comparan y analizan, en una clase de objetos abstractos (en el caso de la matemática en una clase de objetos más abstractos); y para determinar si nuevos objetos pueden modelarse atendiendo a esa clase de modelos de rasgos esenciales en la referida clase de objetos abstractos.

El proceso de agrupar los objetos particulares mediante sus modelos abstractos en una clase particular, que se caracteriza por satisfacer los rasgos esenciales sintetizados en una clase de modelos de rasgos es lo que denomina primer proceso de **generalización** conceptual.

Se considera que un concepto se ha formado cuando, al menos, se ha determinado un conjunto de modelos rasgos comunes (en matemática, un conjunto de rasgos esenciales) que caracterizan en ese sentido a los objetos analizados (o al menos a una parte de ellos) y a otros posibles, se agrupan en otra clase los modelos de los objetos analizados, así como los modelos de otros posibles objetos y se utiliza un símbolo lingüístico para designarlo.

La formación de conceptos sigue dos vías principales:



- De lo particular a lo general (vía inductiva), para lo cual se deben seguir los procesos de comparación – análisis, abstracción, síntesis y generalización de forma similar a como se plantea para la formación de conceptos generales. En este caso el proceso de formación conceptual constituye una de las vías del paso del conocimiento de la práctica al razonamiento abstracto (donde la práctica puede tener, y en la matemática en muchos casos tiene, un determinado nivel de abstracción).
- De lo general a lo particular (vía deductiva), que usualmente parte de conceptos ya formados y utiliza también los procesos del caso anterior, sustituyendo el proceso de generalización por el de restricción, para formar conceptos de extensión menor.

En ambos casos, el proceso de formación culmina con la definición del concepto, donde quedan establecidos su contenido y su extensión.

Por otra parte, **el proceso de desarrollo** de un concepto se logra trabajando en las direcciones siguientes:

1. *Mediante la ampliación de la extensión de la clase de los elementos conocidos, lo cual se puede lograr por las vías, entre otras, siguientes: análisis de nuevos elementos y determinación del cumplimiento de los rasgos esenciales que forman el contenido, así como la utilización de operaciones u operadores para determinar nuevos elementos.*
2. *Por medio de la determinación de nuevas propiedades de los elementos de la extensión, lo cual se logra a un nivel abstracto en un sistema lógico–deductivo.*
3. *El establecimiento de relaciones significativas con otros conceptos ya desarrollados o en proceso de desarrollo.*

Resultan muy útiles para ayudar a establecer este tipo de relaciones, la ampliación de organizadores como mapas de extensiones y mapas de contenidos de conceptos anteriormente desarrollados, mediante la inclusión adecuada de la extensión del concepto que se está desarrollando en el mapa de extensiones y con el establecimiento de relaciones mediante proposiciones entre el concepto nuevo y los conceptos estudiados, mediante la manipulación de sus mapas de contenidos.

4. *El análisis de las propiedades de las estructuras algebraicas o topológicas que el nuevo concepto hereda de su concepto de partida u otras nuevas que haya adquirido.*
5. *La determinación de caracterizaciones, condiciones necesarias y suficientes del concepto definido.*

6. *El establecimiento de la utilidad del concepto definido, por medio de la ampliación de sus significados y el establecimiento de aplicaciones del mismo a situaciones diversas.*

Otro proceso importante en el tratamiento conceptual es el **proceso de generalización del concepto**.

Durante la construcción del contenido matemático, para lograr una generalización de un concepto, en muchas ocasiones, es necesario realizar varias generalizaciones para lograr una con determinadas características deseadas. En Martínez (2003, p.39-41) se expone un procedimiento bastante amplio para facilitar la participación de los estudiantes en este tipo de proceso. Aquí hacemos una adaptación de algunos de los pasos de este procedimiento que son necesarios para nuestro trabajo:

- a) Realizar un correcto estudio de los procesos de formación y desarrollo del concepto a generalizar. Para dar cumplimiento a este paso hay que definir científicamente el concepto, conocer la mayor cantidad posible de propiedades de dicho concepto y prepararlo para su generalización.
- b) Encontrar un concepto de partida para la generalización que puede ser de dos tipos:
  - o Primer tipo: el mismo que el considerado en la definición del concepto que se generaliza.
  - o Segundo tipo: más amplio que el concepto de partida considerado para definir el concepto que se generaliza.
- c) Realizar un conjunto de generalizaciones del concepto definido; para el primer tipo se realiza el debilitamiento de algunas propiedades del contenido del concepto que se generaliza y para el segundo, puede considerarse el mismo contenido del concepto que se generaliza o puede debilitarse el mismo.
- d) Utilizar un criterio de bondad para determinar la calidad de las generalizaciones hechas.

En cuanto al tratamiento de teoremas matemáticos, acciones que pueden realizarse son:

- a) Proponer problemas debidamente graduados que contribuyan a la motivación por la obtención y a la preparación del camino de obtención del teorema.
- b) Proponer problemas para llevar a cabo una preparación para su demostración, que incluye la motivación para la misma, la determinación de las hipótesis y las tesis, la elección del método de demostración más adecuado, la elaboración del plan de demostración.

- c) Durante la ejecución del plan, dejar claras las reglas de inferencias que se utilizan, así como los principios, reglas y estrategias heurísticas que se emplean.
- d) Aprovechar el error que cometen los estudiantes como recurso didáctico.
- e) Analizar las condiciones retrospectivas (otras vías de obtención y demostración, calidad de la vía escogida, rigor de los pasos efectuados, etc) y perspectivas del mismo (importancia para futuros contenidos, posibles generalizaciones, obtención de corolarios, aplicaciones de los teoremas, etc).

En la validación de la estrategia didáctica que proponemos, se escogen los conceptos y teoremas del tema: “Cálculo Diferencial de funciones reales de una variable real” a los que se les realizan estas acciones durante los procesos que intervienen en su estudio.

### **2.2.1.2 Aspectos del modelo del profesional del Licenciado en Educación, especialidad Matemática que incitan a la realización de esta estrategia.**

Del documento Modelo del Profesional del Licenciado en Educación, especialidad Matemática pueden leerse:

“El modo de actuación profesional del educador es la dirección del proceso educativo encaminado a la formación integral de la personalidad de los educandos, por medio de los contenidos de la Matemática, y de sus relaciones interdisciplinarias con otras asignaturas, y la coordinación, desde la escuela, de las influencias educativas de la familia y la comunidad”

El segundo de los objetivos instructivos expresa:

“Emplear métodos adecuados que permitan llevar a cabo el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática y aporten estrategias a los estudiantes de aprender a aprender y aprender a enseñar los diferentes **conceptos**, **teoremas** y relaciones del contenido de la asignatura. Incluir el manejo de situaciones **problémicas** convenientes para la asimilación de los conocimientos que se presten para ello.”

Ofreciendo una interpretación actual de estos aspectos, se hace evidente la necesidad de que para que los graduados de la Licenciatura en Educación, especialidad Matemática en Angola realicen las transferencias necesarias del conocimiento atesorado durante sus estudios universitarios al ejercicio de la docencia y la investigación pedagógica, es necesario que hayan aprendido los **conceptos y teoremas del Análisis Matemático con un enfoque basado en la resolución de problemas, de manera activa, mediada y significativa**, lo cual proponemos se logre mediante la estrategia que se diseña.

### 2.2.2 Diagnóstico inicial. Necesidad del planteamiento de una estrategia didáctica.

Como se ha visto en la introducción de esta tesis, en la enseñanza de la Matemática para el nivel superior, hemos detectado una serie de necesidades didácticas que nos han incitado a la elaboración y puesta en práctica de una estrategia que nos llevara de un estado actual en el que los procesos para el tratamiento de los conceptos y teoremas del Análisis Matemático no transcurren con la calidad necesaria, a un estado deseado en el que se subsanen estas deficiencias y conduzca a un aprendizaje activo, mediado y significativo por los estudiantes.

Algunas de las principales **necesidades didácticas** (más precisamente explicadas que en la introducción) detectadas son:

- En cuanto al tratamiento de conceptos del Análisis Matemático:
  - La mayoría de los conceptos, a pesar de su naturaleza abstracta y extensión dinámica, se abordan con recursos eminentemente deductivos sin hacer partícipes de manera activa a los estudiantes en su tratamiento y sin llevar a cabo significativamente los procesos de formación, desarrollo y generalización de los mismos, debido al escaso presupuesto de tiempo y exigencias del currículo, lo que provoca un aprendizaje no significativo, y en ocasiones no mediado ni activo.
  - No se realizan acciones suficientes para facilitar los procesos de comparación, análisis – abstracción, síntesis y generalización que tienen lugar durante el proceso complejo de formación de un concepto.
  - Los estudiantes no disponen de los conceptos de definición científica, ni de extensión y contenido de un concepto; lo cual impide que puedan comprender lo que aportan cada uno de los procesos que intervienen en el proceso de formación conceptual y que puedan terminar este proceso con una definición científica adecuada.
  - Como parte del desarrollo conceptual, no se amplía suficientemente la colección de elementos conocidos de su extensión, ni se establecen relaciones significativas entre los elementos de la extensión del concepto y entre la extensión del concepto y las extensiones de otros, no se determinan las propiedades que hereda el concepto de las estructuras algebraicas o topológicas del concepto de partida, no se amplían suficientemente los significados del concepto ni se expresa la utilidad del concepto definido en toda su magnitud, no se establecen clasificaciones oportunas, etc.

- No se realizan, o se realizan pocas, generalizaciones del concepto en estudio, y cuando se hace, no se logra una conciencia sobre los tipos de generalizaciones realizadas, en ocasiones ni siquiera se tiene la idea de que se ha realizado una generalización, etc.
- En cuanto al tratamiento de teoremas:
  - No existe una preparación del camino de obtención del teorema.
  - Muchas veces, por presupuestos de tiempo, no se realiza la demostración del teorema, y cuando se hace, no se lleva a cabo una preparación para su demostración, que incluye la motivación para la misma, la determinación de las hipótesis y las tesis, la elección del método de demostración más adecuado, la elaboración del plan de demostración.
  - Durante la ejecución del plan, no se dejan claras las reglas de inferencias que se utilizan, ni los principios, reglas y estrategias heurísticas que se emplean.
  - No se lleva a cabo un tratamiento óptimo de explotación del error que cometen los estudiantes.
  - No se analizan las condiciones perspectivas y retrospectivas del mismo, no se establecen criterios valorativos sobre la calidad el teorema obtenido o demostrado, ni se realizan acciones de aplicación del mismo.
- En cuanto al necesario aprendizaje significativo y la manera de evaluarlo:
  - No se emplean adecuados organizadores en la articulación del nuevo conocimiento conceptual con el previo, como por ejemplo: mapas de extensiones, simbólicos o de proposiciones, diagramas, etc.
  - Muchas veces no se logra la necesaria motivación intrínseca en los alumnos y por ende, la actitud de aprendizaje significativo para abordar situaciones de aprendizaje, por medio de la resolución de problemas cercanos a los intereses del futuro profesor de Matemáticas, que traigan consigo una implicación afectiva del alumno, lo que da al traste con que solo se esfuercen en su estudio para salir bien en las evaluaciones de las asignaturas.
  - El sistema de evaluación generalmente está encaminado a la reproducción de contenidos aprendidos por medio de evaluaciones orales y escritas (frecuentes, parciales y finales), priorizando la función sumativa de la misma y no a la realización de la evaluación formativa, suscitando escenarios de autoevaluación y coevaluación, no solo de contenidos, sino de la calidad de los procesos que han intervenido en el aprendizaje.

Todo esto provoca que los alumnos no realicen un aprendizaje significativo del concepto en estudio, por lo que se suscita el hecho de que no queden huellas perdurables en la memoria de los estudiantes sobre los conceptos tratados y que resulte difícil la transferencia de aprendizajes a situaciones nuevas.

Un **ejemplo** concreto de un concepto cuyo tratamiento presenta estas dificultades es el de **derivada de una función en un punto**, que se imparte en la asignatura [Análisis Matemático I](#) de la Licenciatura en Educación, especialidad Matemática, cuyo tratamiento se limita a ofrecer su definición por medio del límite en un punto de un cociente de incrementos, para posteriormente realizar su interpretación geométrica, obtener las derivadas de algunas colecciones de funciones, estudiar las propiedades de la derivada de la suma, producto, cociente y composición de funciones, para más tarde realizar la discusión y representación de funciones y resolver problemas de optimización empleando la derivada como utilitaria.

### **2.2.3 Componentes rectores de la estrategia.**

Dadas las dificultades detectadas, con la estrategia propuesta se espera que, después de implementada y debidamente controlada, se cumplimente el **objetivo general**: llevar a cabo el tratamiento de los conceptos y teoremas del tema: Cálculo Diferencial de la asignatura Análisis Matemático I, mediante la resolución de problemas, que traigan consigo un aprendizaje activo, mediado y significativo de dichos contenidos.

**Los presupuestos teóricos** que sustentan la estrategia están relacionados con:

- **El modelo del profesional del Licenciado en Educación, especialidad Matemática. Papel de los conceptos y teoremas matemáticos en el mismo.** Este presupuesto nos permite situarnos en los objetivos que pretende el tratamiento de conceptos y teoremas matemáticos en la formación del Licenciado en Educación, especialidad Matemática, de manera que los resultados a alcanzar con esta estrategia tributen a dichos objetivos y constituyan un catalizador en la formación matemática y pedagógica de los educandos.
- **Tratamiento de conceptos matemáticos mediante acciones a implementar durante los subprocesos que tienen lugar en los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual.** Como se ha destacado en la fundamentación teórica de la tesis, constituye uno de los aspectos novedosos de la estrategia el empleo de la enseñanza basada en la resolución de problemas durante los subprocesos que tienen lugar durante los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual.

- **Tratamiento de teoremas matemáticos mediante acciones encaminadas a la obtención, demostración, valoración y aplicación de los mismos** de manera que se empleen problemas adecuados que motiven la realización exitosa de ambos procesos.
- **Aprendizaje activo, mediado y significativo de conceptos y teoremas matemáticos.** Este presupuesto recoge las causas del por qué escogimos y las consecuencias de haber escogido como paradigma rector, la concepción de aprendizaje que proponen el enfoque histórico cultural y la escuela soviética de la teoría de la actividad; así como los fundamentos del aprendizaje significativo que ha tenido una abundante y fructífera presencia en investigaciones pedagógicas actuales.
- **Concepciones sobre la enseñanza basada en problemas.** Al exponer los argumentos didácticos relacionados con la enseñanza basada en la resolución de problemas, se establecieron las grandes potencialidades que esta ofrece para llevar a cabo los procesos que intervienen en el tratamiento de conceptos y teoremas y contribuir al necesario aprendizaje activo, mediado y significativo durante estos procesos.
- **Relación existente entre los presupuestos anteriores.** Resulta evidente la necesidad de considerar este aspecto como presupuesto teórico de la estrategia que se propone, pues mediante las consideraciones didácticas realizadas hasta el momento se ha dejado ver claramente la estrecha relación existente entre los presupuestos teóricos anteriores, sin la cual no es posible realizar una eficiente planificación, ejecución y control de las acciones que incluye la estrategia.

Por otra parte, al concebir una estrategia basada en la resolución de problemas matemáticos para lograr que los procesos que intervienen en el tratamiento de conceptos y teoremas transcurran con una alta calidad deben establecerse **principios metodológicos** adaptados a nuestra estrategia, que respondan a los principios didácticos establecidos en el capítulo 1. Estos son:

- Diagnóstico previo y seguimiento del mismo.
- Logro de la motivación intrínseca necesaria en los estudiantes para ser partícipes activos durante la ejecución de la estrategia.
- Planteamiento y resolución de los problemas de manera significativa, activa y mediada.
- Aplicación reflexiva del conocimiento a situaciones diversas.
- Integración en la evaluación de acuerdo a sus diferentes formas.

- Articulación de los componentes didácticos objetivo, contenido, método, medio, evaluación.
- Unidad entre lo cognitivo y lo afectivo durante el PEA.

Obsérvese que los principios considerados los hemos denominado metodológicos, en lugar de didácticos generales, aunque sin dudas existe una estrecha relación entre ellos. Esto se debe, principalmente, a que responden más a la manera en que se emplean los métodos de enseñanza para llevar a cabo un óptimo PEA de los conceptos matemáticos, estableciendo la debida relación con los demás componentes didácticos objetivo, contenido, medio, evaluación; a la vez que permite profundizar en el empleo de procedimientos (heurísticos, inductivos, deductivos) y estrategias (enseñanza basada en la resolución de problemas, para la resolución de problemas) que estén relacionados con el método escogido.

Ballester (1992, p.75) plantea *“en nuestra asignatura la nomenclatura de los métodos se corresponde con los métodos didácticos generales de manera que permite revelar su esencia pedagógica”*.

Los **principios** considerados expresan las ideas rectoras para la dirección de las tareas a definir y las acciones a desarrollar para que la misma cumpla con el objetivo que se propone. Estos principios están orientados a que las acciones que se propongan partan de determinar las necesidades de aprendizaje para, de este diagnóstico, derivar acciones encaminadas a lograr un valor funcional de los conocimientos, lo que pretendemos lograr por medio del planteamiento y resolución de problemas de manera activa, mediada y significativa y una unidad entre lo cognitivo y afectivo en el PEA.

#### **2.2.4 Fases de la estrategia.**

Para el desarrollo de la estrategia, se conciben las **fases**: preparatoria o de planificación, que contiene, entre otros aspectos (preparación del profesor que implementará la estrategia, diagnóstico de necesidades, establecimiento del sistema de acciones); así como implementación o de ejecución y control o de evaluación, que contienen los aspectos descritos en el epígrafe 2.1.3.

Estas **fases se interrelacionan** en el tiempo, pues aunque se realice un diseño preliminar, en el transcurso de la implementación y control se recoge información que permite mejorar y adaptar el diseño preliminar a las condiciones reales que se presentan.

Teniendo en consideración los principios metodológicos establecidos al concebir una estrategia para perfeccionar los procesos que intervienen en el tratamiento de conceptos y teoremas del



Análisis Matemático en la formación del Licenciado en Educación, especialidad Matemática, a continuación se describe la forma de desarrollar cada una de las fases de la estrategia.

#### **2.2.4.1 Fase de planificación.**

##### **Preparación del profesor.**

El profesor debe comenzar por conocer en qué consiste el logro de los aprendizajes activo, mediado y significativo en el tratamiento conceptos y teoremas del Análisis Matemático por medio de la resolución de problemas, los presupuestos teóricos y principios para la concepción de la estrategia, los aspectos a tener en cuenta en cada fase, debe ser capaz de diseñar la estrategia adaptada a los conceptos y teoremas al concepto que escoja y llegar a dominar este diseño, lo que permitirá su mejor implementación.

Debe prepararse en base a los métodos y técnicas pedagógicas que le permita realizar el diagnóstico de necesidades y el control como se conciben en el diseño de la estrategia.

##### **Diagnóstico de necesidades.**

###### **➤ Diagnóstico de necesidades didácticas del concepto o teorema a abordar.**

Para la realización de este diagnóstico se proponen las acciones siguientes:

- Determinación de las dificultades más comunes en su tratamiento. (por ejemplo, como las determinadas anteriormente con el concepto de función convexa).

Esto puede hacerse por medio de: análisis de los programas y orientaciones metodológicas de las asignaturas de la carrera en estudio, pruebas de contenido a estudiantes, observaciones a clases, entrevistas a estudiantes y profesores de la carrera, para recoger información acerca de sus percepciones y conocimientos sobre la manera en que se ha llevado a cabo el tratamiento de los conceptos y teoremas matemáticos.

Con toda la información recogida, debe realizar un análisis de contenido que le permita arribar a las necesidades que se presentan.

###### **➤ Diagnóstico de los conocimientos previos en torno al concepto a tratar.**

Después que se selecciona un concepto o un teorema determinado para implementar la estrategia, las acciones diagnósticas deben estar dirigidas a averiguar con los estudiantes: ¿Qué conocen? ¿Qué pueden hacer con lo que conocen en situaciones diversas de manera reflexiva?

Con estas acciones diagnósticas se pretende determinar el tipo de conocimiento previo que tienen los estudiantes (conceptuales, procedimentales o actitudinales).

Para esto se propone: realizar acciones para averiguar los conocimientos precedentes de los alumnos, relacionados con el concepto o el teorema en estudio para determinar la zona de desarrollo de cada alumno y del grupo en el que se implementará la estrategia.

Se sugiere emplear entrevistas, observación participante y pruebas (orales y escritas) de contenidos.

#### ➤ **Diagnóstico de niveles de aprovechamiento iniciales de los alumnos.**

En aras de llevar a cabo una eficiente atención a las diferencias individuales durante la implementación de la estrategia y analizar la evolución que van teniendo los alumnos, es necesario realizar un diagnóstico inicial sobre el aprovechamiento docente de los estudiantes.

Para lograr esto se recomienda: realizar una clasificación en niveles bajos, medios y altos, cuyos criterios de medición pueden regirse por aspectos como: resultados en la prueba de diagnóstico inicial, resultados en evaluaciones anteriores, índice académico del semestre anterior, opinión del colectivo del año cursante o del anterior, opinión del colectivo de disciplina (en caso de que algún profesor, incluyendo el investigador, del colectivo tenga referencias sobre el grupo), opinión de los miembros del grupo, etc.

#### **Establecimiento del sistema de acciones para lograr el aprendizaje activo, mediado y significativo en los procesos que intervienen en el tratamiento de los conceptos y teoremas.**

A continuación se expone un sistema de acciones generales a desarrollar para lograr el objetivo planteado, algunas de las cuales deberán rediseñarse de acuerdo a los conceptos y teoremas escogidos, a los diagnósticos realizados y las necesidades detectadas.

#### ➤ **Prediseño de temas de estudio.**

Asegurar que en este prediseño aparezcan los elementos esenciales a tener en cuenta en la planificación de las actividades docentes (objetivos educativos, objetivos instructivos, sistema de conocimientos, sistema de habilidades), teniendo en cuenta que cuanto mayor sea el grado de significatividad del aprendizaje realizado, tanto mayor será su funcionalidad. Esto debe ser una preocupación constante en la formación del profesional, de manera que, perspectivamente, pueda relacionar el conocimiento adquirido con nuevas situaciones y puedan ser efectivamente utilizados cuando las circunstancias en las que se encuentra el alumno así lo exijan.

Durante el diseño de estos temas deben contemplarse acciones para cada uno de ellos, relacionadas con:

- El planteamiento de problemas que tributen al perfeccionamiento de los subprocesos que tienen lugar en los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual.
- La utilización de conceptos y teoremas ya enseñados y aprendidos en la asignatura, el año, la carrera o niveles de enseñanza precedentes y la valoración de la contribución que hacen los nuevos contenidos que se tratan a contenidos de otras asignaturas del año o años venideros. (Visión cíclica, articulación conceptual horizontal y vertical).
- La introducción, el desarrollo y la consolidación de la nueva información atendiendo a los diferentes niveles de aprovechamiento diagnosticados.
- La precisión de acciones del profesor para que los alumnos de bajo, medio y alto nivel participen en los procesos que intervienen en la formación, desarrollo y generalización conceptual, así como en la formulación y demostración de teoremas.
- La consideración de organizadores óptimos en cada tema que garanticen un aprendizaje significativo por los estudiantes.
- La creación de ambientes en que se suscite un aprendizaje mediado, activo y significativo.
- El desarrollo en los estudiantes de la capacidad de autorregulación, que les permita analizar lo que se hizo mal y el porqué del error, asumiendo que en el proceso deban discernir en las fallas del aprendizaje, ya sea en los conocimientos previos o en los que ya tenía.
- El logro de la unidad entre lo cognitivo y lo afectivo durante el PEA.

Es necesario aclarar que si la implementación requiere de un semestre lectivo de alguna asignatura de una disciplina (como la que se llevó a cabo con esta investigación), es necesario diseñar un programa con la debida fundamentación de la relación asignatura ↔ disciplina.

➤ **Acciones relativas al planteamiento de los problemas.**

- ◇ **Durante todos los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual, así como de búsqueda, demostración, valoración y aplicación de teoremas.**

Los problemas que se planteen deben estar encaminados a:

- Relacionar esencialmente, y no de modo arbitrario, el conocimiento nuevo con los conocimientos previos que tienen los alumnos aplicando el concepto vygotskiano de Zona de Desarrollo Próximo.
- Modificar los esquemas y modelos mentales por medio de un proceso personal de equilibrio → desequilibrio → reequilibrio.
- Propiciar las condiciones para que los alumnos planteen problemas por sí solos, como consecuencia natural de las insatisfacciones con los vacíos que se deben ir llenando al relacionar los conceptos significativamente.
- Cuando un problema, o conjunto de problemas, ha sido resuelto por la mayoría de los alumnos con ayuda del profesor o de otros compañeros más capaces (aprendizaje mediado), deben plantearse otros, con objetivos semejantes a los anteriores, hasta lograr que la mayoría de los estudiantes los resuelvan independientemente y, paulatinamente, plantear otros que requieran de cierta dosis de creatividad, hasta lograr, con su resolución, un aprendizaje activo de los alumnos.
- A la hora de escoger el problema a plantear debe tenerse en cuenta que el aprendizaje significativo del contenido que este incluye queda determinado, no solo por el conocimiento previo que debe tener el alumno, sino por la capacidad adquirida a lo largo de su desarrollo.

◇ **Durante el proceso de formación del concepto por vía inductiva.**

Plantear problemas encaminados a:

- Presentar a los estudiantes cierto número de objetos, especialmente seleccionados, con el objetivo que los comparen y los analicen.
- Mediar para que los alumnos seleccionen propiedades de cada objeto, los comparen con los otros objetos, determinen las propiedades comunes y hagan su abstracción de las propiedades no comunes.
- Facilitar el proceso mental de síntesis, para que se seleccione un conjunto mínimo de propiedades (esenciales), a partir de las cuales se puedan obtener todas las demás propiedades comunes.
- Dejar claro mediante la generalización, la posible existencia de un conjunto de objetos más amplio que los considerados, que satisfacen estas características esenciales, y la posibilidad de que algunos de los presentados no se incluya en el concepto.

- Utilizar una denominación verbal para nombrar la clase de todos los objetos que cumplen las propiedades esenciales, y realizar la definición científica del concepto correspondiente a la clase de propiedades seleccionada.

◇ **Durante el proceso de desarrollo del concepto.**

Plantear problemas encaminados a:

- Obtener caracterizaciones del concepto definido.
- Realizar un estudio de la extensión del concepto caracterizado por:
  - El estudio de estructuras algebraicas y topológicas.
  - La ampliación de la clase de elementos conocidos de su extensión.
  - El establecimiento de isomorfismos entre su extensión y la extensión de otros conceptos u otros conjuntos.
  - La determinación de relaciones significativas con las extensiones de otros conceptos.
  - La construcción de mapas de extensiones que tienen lugar entre la extensión del concepto estudiado con las extensiones de otros conceptos, y de los mapas de contenido correspondientes.
  - La determinación de objetos límite y casos especiales del concepto en estudio.
- Realizar aplicaciones importantes del concepto en problemas intramatemáticos extramatemáticos; así como ampliar sus significados.
- Ejercitar a los estudiantes en las técnicas de demostración para ampliar las propiedades del concepto, utilizando para ellos las caracterizaciones más adecuadas.

◇ **Durante el proceso de generalización del concepto.**

Plantear problemas encaminados a

- Preparar el concepto para su generalización.
- Realizar generalizaciones:
  - Por debilitamiento del contenido del concepto.
  - Por consideración de contextos más amplios.
- Establecer criterios de bondad para valorar la calidad de las generalizaciones hechas.

◇ **Durante el proceso de obtención del teorema.**

Plantear problemas encaminados a:

- Preparar el camino para la obtención del teorema, que incluye:
  - La motivación para la misma.
  - La visualización geométrica del resultado que se pretende enunciar.
  - La realización de preguntas heurísticas cuyas respuestas permiten la obtención de resultados parciales que en su conjunto conducen a la formulación del teorema.

◇ **Durante el proceso de demostración del teorema.**

Plantear problemas encaminados a:

- Realizar la demostración de la mayoría de los teoremas, y las que no puedan hacerse en clases por presupuesto de tiempo, entonces orientarlas como estudio independiente para ser posteriormente controladas, preferiblemente en seminarios.
  - Llevar a cabo una preparación para su demostración, que incluye la motivación para la misma, la determinación de las hipótesis y las tesis, la elección del método de demostración más adecuado, la elaboración del plan de demostración.
  - Durante la ejecución del plan, dejar claras las reglas de inferencias que se utilizan, así como los principios, reglas y estrategias heurísticas que se emplean.
  - Llevar a cabo un tratamiento óptimo de explotación del error que cometen los estudiantes.
- ◇ **Durante el proceso de valoración de la calidad del teorema obtenido.** (Analizar las condiciones perspectivas y retrospectivas del mismo)

Plantear problemas encaminados a:

- Relacionar más de una vía de demostración en aquellos teoremas factibles para ello.
- Valorar validez de contrarrecíprocos, poner contraejemplos, mencionar condiciones necesarias, suficientes o caracterizaciones.
- Valorar posibilidades de empleo en contenidos venideros.
- Reproducir las demostraciones definidas en el programa como básicas.

◇ **Durante el proceso de aplicación del teorema.**

Deben realizarse preguntas heurísticas encaminadas a:

- Identificar cuál teorema debe aplicarse en determinados pasos de la solución de algunos problemas.
- Cuando identifica el teorema que debe usarse, debe garantizarse que se emplee correctamente.

➤ **Acciones relativas a la resolución de los problemas.**

Existen varios programas heurísticos generales para llevar a cabo el proceso de resolución de problemas; entre ellos: el de Polya (1986), el de Schoenfeld (1985) y el de Miguel de Guzmán (1992); los cuales presentan muchos aspectos coincidentes. Teniendo en cuenta estos tres programas y las acciones que han realizado los profesores del Seminario de Matemática Educativa de la UCLV en su trabajo profesional a la hora de guiar esta actividad en asignaturas de la carrera Licenciatura en Matemática de la UCLV, planteamos a continuación el programa heurístico general y los procedimientos correspondientes para la resolución de problemas que pretendemos seguir.

**Fases y acciones del programa heurístico general para la resolución de los problemas durante los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual y durante la formulación y demostración de teoremas matemáticos.**

Este programa heurístico general se implementa cuando se proponen los problemas relativos a los procesos descritos anteriormente de: llevar a cabo el proceso de formación por vía inductiva (desarrollo o generalización) conceptual de un concepto matemático, o de llevar a cabo el proceso de obtención (demostración) de teoremas en la carrera Licenciatura en Educación, especialidad Matemática del ISCED de Angola”.

**Durante la resolución de los problemas particulares que se plantean en cada árbol de problemas, puede seguirse el programa heurístico siguiente, tomado de Martínez (2005, 85):**

- Comprensión del problema:
  - ❖ Lectura cuidadosa.
  - ❖ Selección e interpretación de palabras claves.
  - ❖ Modelación verbal del problema, eliminando la información no esencial.
  - ❖ Elaborar figuras, tablas o esquemas que proporcionen una mejor comprensión del problema.
- Trabajo en el problema:

❖ Precisión del problema:

- Determinar las magnitudes conocidas y buscadas.
- Determinar leyes a utilizar del área que corresponde el problema.
- Establecer relaciones y dependencias entre las magnitudes.
  - Modelación gráfica, tabular, mediante principios o leyes del área a que corresponde el problema.

❖ Modelación matemática del problema.

- Modelación matemática de las magnitudes del problema.
- Modelación de relaciones entre magnitudes.
  - Obtención del modelo matemático a partir del modelo mediante principios o leyes del área a que corresponde el problema.

❖ Determinación de las características del modelo matemático con respecto a su solución.

❖ Después de obtenido el modelo matemático del problema, con respecto a su solución, puede ocurrir una de tres variantes siguientes:

V1. El alumno conoce, al menos, un método de solución del modelo.

V2. El alumno no conoce un método de solución y le es permitido utilizar las tecnologías de la información y las comunicaciones (TIC) para resolver el modelo.

V3. El alumno no conoce un método de solución y no se le permite utilizar las TIC para resolver el modelo.

**Fases correspondientes a cada una de estas variantes.**

En la primera variante:

- Si conoce un solo método de solución, debe pasar a la fase de solución del modelo.
- Si conoce más de un método de solución, debe:
  - ❖ Determinar el método óptimo para la solución del problema.
    - Aplicar estrategias en este sentido.

En la segunda variante:

- ❖ Determinar el paquete que va a utilizar para resolver el problema.
  - Seleccionar la herramienta computacional que va a utilizar.

En la tercera variante:

- ❖ Determinar la idea de solución.
  - Elaboración de un plan de solución.
  - Determinación de medios y estrategias, por ejemplo, utilizar la estrategia de trabajo hacia adelante o hacia atrás.
  - Realización de estimados.

○ Solución del modelo matemático.

- ❖ Determinación de la solución.



De acuerdo con la variante que corresponda se utilizará un método de solución, se empleará la herramienta computacional escogida, o se aplicará el plan de solución diseñado.

- Evaluación del proceso matemático de solución y de su resultado.
  - ❖ Comprobación de la solución.
  - ❖ Consideraciones perspectivas y retrospectivas.
  - Reflexiones sobre el proceso de solución aplicado.
  - Valoración de la aplicación de otros procesos de solución.
  - Posibilidad de empleo del proceso de solución en otros problemas semejantes.
  - Determinación de las restricciones con las que ha sido resuelto el problema.
  - ❖ Determinación de otros resultados matemáticos necesarios para dar solución al problema original.
- Transferencias de resultados matemáticos.
  - ❖ Aplicación del proceso inverso al de modelación.
  - Transferencia de resultados matemáticos a frases verbales.
  - Transferencia de resultados matemáticos a afirmaciones verbales.
- Planteamiento de nuevos problemas matemáticos.
  - ❖ Eliminar restricciones con las que fue resuelto el modelo matemático.
  - ❖ Analizar la posibilidad de ampliar el dominio de solución del modelo.
- Planteamiento de otros problemas contextuales.
  - ❖ Planteamiento de otros problemas contextuales que se resuelvan con un modelo similar al que se empleó en el problema resuelto.
  - ❖ Planteamiento de nuevos problemas contextuales en correspondencia con las generalizaciones del modelo obtenido en la fase anterior.

### **Procedimientos heurísticos.**

- Principios heurísticos: analogía, reducción, inducción, generalización, movilidad, medir y comprobar, consideración de casos especiales y casos límites.
- Estrategias heurísticas.
  - ❖ Trabajo hacia adelante.
    - Determinación de una caracterización óptima.
    - Utilización de propiedades conocidas adecuadas.
    - Aplicación de reglas de inferencia correctas.
  - ❖ Trabajo hacia atrás.
    - Trabajo operacional obviando reglas de inferencia hasta llegar a una solución probable.
    - Comprobación de la solución probable.
  - ❖ Modelación.
    - Modelación verbal del problema.
    - Modelación gráfica, tabular o mediante leyes contextuales.

- Modelación matemática.
- Solución del modelo matemático.
- Transferencia de resultados matemáticos a frases y afirmaciones verbales.

➤ **Acciones relativas al logro de la motivación intrínseca durante todos los procesos.**

Acciones a realizar en este sentido pueden ser:

- Involucrar a los alumnos en el planteamiento de problemas debidamente dosificados con cierta significatividad experiencial para los alumnos, los que pueden ser extramatemáticos o intramatemáticos de la misma rama del concepto o de otras áreas de la matemática.
- Plantear problemas encaminados a resaltar las necesidades no satisfechas, encaminados a que los estudiantes se esfuercen en su resolución de manera enérgica y con intención.
- Plantear variedad de problemas encaminados al planteamiento de metas por los alumnos, alcanzables con diferentes niveles de esfuerzos.
- Plantear problemas encaminados a despertar la duda, la perplejidad, la contradicción, la confusión o la inadecuación.
- Hacerles ver que de los errores que se cometen también se aprende, lo que ayuda a elevar o mantener estable la autoestima del alumno ante un error cometido.

➤ **Acciones para el logro de un PEA con la unidad entre lo cognitivo y lo afectivo.**

En el epígrafe 1.4.1 se profundizó en este importante aspecto. No obstante, antes de determinar acciones que tributen a esta unidad, consideramos pertinente destacar que: la comunicación como relación entre los sujetos y como vía para el logro de un aprendizaje mediado, en la cual se establecen múltiples motivaciones; es el proceso que adquiere, en el sentido afectivo, un carácter fundamental.

Se proponen las acciones siguientes:

- Lograr que los alumnos con mayores dificultades planteen sus dudas y conducirlos, por medio de adecuados niveles de ayuda, a la asimilación del contenido.
- Estimular a los estudiantes en la posibilidad del desarrollo de tareas (resolución de problemas, elaboración o completamiento de organizadores de la información, etc.) que les permitan descubrir, aplicar u organizar los conocimientos matemáticos.
- Fortalecer la autoestima de los estudiantes de acuerdo con el nivel de desarrollo que presenten. Los de bajo aprovechamiento en el sentido que pueden vencer los objetivos

fundamentales, sin suscitar una ayuda prematura por parte del profesor u otro alumno, y los de medio y alto aprovechamiento, que pueden ser capaces de mejorar su actuación.

- Estimular la correspondencia entre lo que se piensa y se hace, para evitar manifestaciones de doble moral y desalentar el fraude académico, creando motivaciones para el estudio y convirtiendo éste en un deber social y un placer para el estudiante.
- Velar porque se cumplan las normas de educación formal durante el desarrollo del PEA.
- Suscitar escenarios que contribuyan a desarrollar valores como: la solidaridad, la laboriosidad, el patriotismo, etc, aprovechando para ello, las potencialidades que brinda la enseñanza basada en la resolución de problemas.

➤ **Acciones encaminadas a la realización de una adecuada evaluación de los conocimientos.**

Anteriormente apuntamos que uno de los componentes del *currículum* que más conflictos provoca en los alumnos es la evaluación concebida como instrumento de control y sanción del aprendizaje producido, en la que predomina la función sumativa de la evaluación.

La evaluación debe usarse no solo para la promoción de los alumnos de una asignatura dada, debiendo ser el objetivo primordial ayudar a conseguir un aprendizaje significativo, gratificante y satisfactorio; esto obliga a considerar prioritariamente su función formativa. Desde la concepción formativa de la evaluación como instrumento de perfeccionamiento y ayuda al alumno; para llevarla a cabo, de acuerdo con el objetivo de la estrategia, se debe atender a dos direcciones fundamentales, en las que se proponen las acciones:

- Integrar la tipología evaluativa
  - a) Según su intención: formativa o sumativa.
  - b) Según su temporalidad: diagnóstica, frecuente o continua y final.
  - c) Según sus agentes: autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación.
- En los instrumentos evaluativos, incluir preguntas que midan la calidad tanto de procesos como de resultados, combinar preguntas reproductivas, con productivas y creativas.
- Contrarrestar las patologías más frecuentes de la evaluación.

#### 2.2.4.2 Fase de implementación.

Durante la fase de implementación se concreta en el PEA todo lo diseñado anteriormente.

Para la comprensión del desarrollo de esta fase se realiza un análisis de las relaciones que se establecen en el PEA de los contenidos matemáticos, las cuales se estructuran sobre la base de los **componentes didácticos**: objetivo, contenido, método, medio y evaluación.

En este proceso se distinguen tres etapas relacionadas dialécticamente, que como cualquier actividad humana las distingue estructural y funcionalmente, que son: **la orientación, la ejecución y el control**. Durante la **orientación** prevalecen fundamentalmente el objetivo y el contenido, el primero como componente orientador, determinador y valorativo y el segundo desempeña funciones de base material. En la etapa de **ejecución** se manifiestan esencialmente el método y los medios. El método es la categoría central del proceso, en tanto los medios es su soporte material. En la etapa de **control** es la evaluación el componente fundamental, que es en definitiva quien permite regular la calidad del proceso.

Se sugiere para esta fase las **acciones**:

- Escoger uno o varios conceptos y teoremas, mediante los cuales se vaya a implementar la estrategia.
- Precisar los objetivos a lograr y realizar la distribución de contenidos de acuerdo con aspectos organizativos de espacio y tiempo en las actividades docentes que se programen y según esto concretar las acciones a realizar en cada actividad o temática.
- Desarrollar las actividades docentes de acuerdo con lo previsto e ir atendiendo de forma sistemática a los resultados docentes que van alcanzando los estudiantes, según el sistema de evaluación que se debe instaurar. Lo anterior permite ir modificando lo planificado, en caso de ser necesario, para que se cumplan los objetivos previstos, o sea, la retroalimentación que se va obteniendo hace posible ir adecuando las acciones a realizar en cada tema para así manera corregir la estrategia en función de que en cada actividad del proceso, los contenidos sean lo más significativo posible para los alumnos y que puedan aplicar el concepto o teorema estudiado a problemas de la vida o relacionados con su especialidad.

Como se puede apreciar, en este diseño de la estrategia para la fase de implementación se incluyen solo acciones generales a implementar con un concepto o teorema hipotético. En el capítulo 3, esta fase es ejemplificada por medio de los conceptos y teoremas escogidos.

### 2.2.4.3 Fase de control.

En esta fase de la estrategia se van analizando los resultados obtenidos durante todo el proceso para, en caso necesario, modificar o redirigir las acciones a realizar y al final trazar las direcciones de trabajo para posteriores aplicaciones de la misma.

El control está dirigido a valorar si la estrategia didáctica, mediante el sistema de acciones previsto para el tratamiento del concepto o teorema escogido, contribuye a lograr una alta calidad de los procesos que intervienen y por ende a un aprendizaje activo, mediado y significativo del mismo. Además, este control debe ir evaluando si las acciones realizadas han propiciado que se integre el carácter significativo de los contenidos, se atienda al valor funcional de los conocimientos y se tenga en cuenta la necesaria unidad entre lo afectivo y lo cognitivo durante el PEA.

Por las características del control a realizar y la información a obtener, las acciones a implementar son:

- Definir los aspectos de la estrategia que se van a controlar, cuidando que estos sean medibles, y definir los parámetros del control; en nuestro caso, los parámetros a medir son:
  1. Calidad del concepto formado:
    - a. Comprobar si son capaces de relacionar las propiedades del contenido del concepto.
    - b. Determinar si, dado un elemento de un concepto subordinante, el alumno es capaz de determinar si pertenece o no a su extensión.
  2. Calidad del concepto desarrollado.
    - a. Determinar si son capaces de utilizar diferentes caracterizaciones.
    - b. Comprobar si conocen subcolecciones infinitas de elementos de la extensión.
    - c. Determinar si dominan estrategias para establecer relaciones conjuntistas entre la extensión del concepto en estudio con las extensiones de otros conceptos.
  3. Calidad del concepto generalizado.
    - a. Analizar si utilizan criterios de generalización adecuados.
    - b. Determinar si son capaces de realizar cadenas de generalizaciones.
    - c. Comprobar si dominan criterios para determinar la calidad de una generalización.
  4. Calidad del teorema obtenido.

- a. Analizar si están motivados para resolver los problemas que conducen a la obtención del teorema.
  - b. Comprobar si son capaces de articular los resultados parciales obtenidos para llegar a formular el teorema.
5. Calidad del proceso de demostración del teorema.
- a. Analizar si están motivados para llevar a cabo la demostración del teorema.
  - b. Comprobar si son capaces de determinar las hipótesis y la tesis del teorema.
  - c. Determinar si son capaces de elegir el método de demostración más adecuado.
  - d. Analizar si son capaces de elaborar el plan de demostración.
  - e. Analizar si son capaces de ejecutar el plan de demostración.
6. Nivel de aprendizaje significativo logrado.
- a. Conocer los diagramas o estructuras que posee el alumno que integran el nuevo concepto con contenidos previos.
  - b. Determinar si poseen estructurado el concepto de diferentes formas.
  - c. Comprobar si el alumno es capaz de plantear problemas o interrogantes como necesidad para la ampliación o modificación de sus estructuras mentales.
7. Nivel del papel activo del aprendizaje logrado.
- a. Determinar si son capaces de resolver problemas destinados al trabajo independiente.
  - b. Determinar si son capaces de responder preguntas hechas por el profesor.
  - c. Comprobar si pueden elaborar preguntas o realizar conjeturas acertadas.
8. Nivel del papel mediado del aprendizaje logrado.
- a. Determinar si son capaces de aprovechar las sugerencias mínimas ofrecidas por el profesor u otro alumno.
  - b. Comprobar si, durante el trabajo en equipos, pueden aportar resultados sustanciales a la solución de las tareas.
9. Manifestación de nivel de motivación y actividad volitiva.
- a. Comprobar si sienten la necesidad de resolver los problemas planteados.
  - b. Analizar si comprenden la importancia del contenido en su formación profesional

- c. Determinar si muestran esfuerzos personales, laboriosidad, trabajo enérgico y con intención por resolver los problemas, realizar las actividades de autopreparación y por subsanar las dificultades que se presentan en el proceso de resolución.
- d. Comprobar si son capaces de formular preguntas, conjeturas o nuevos problemas.

10. Resultados de las evaluaciones en los cortes realizados.

- a. Determinación de la calidad del rendimiento de cada alumno a partir de la valoración de los resultados obtenidos en las evaluaciones frecuentes y pruebas parciales.
- b. Determinación de la calidad de su participación en escenarios de coevaluación y autoevaluación.

Para cada uno de estos indicadores se definirán parámetros más refinados de acuerdo al concepto que se escoja en la implementación de la estrategia.

- Definir qué vías de control se van a emplear (observación participante, pruebas de conocimientos, análisis de casos, encuestas, entrevistas, etc.)
- Exponer cuantitativa y cualitativamente los resultados del control y los cambios operados en la evolución de los diferentes indicadores, lo cual puede lograrse por medio de cortes evaluativos convenientemente distribuidos.
- Valorar la influencia de la estrategia en los cambios observados que se van obteniendo en el control a través de los diferentes cortes.
- Arribar a conclusiones parciales y finales de los resultados que se obtienen a través de todo el proceso, responder a ¿Cómo estaban antes?, ¿Cómo están después?

El desarrollo de esta fase se va retroalimentando de acuerdo con los resultados y se modifica el diseño inicial, de ser necesario, para que se cumpla con el objetivo propuesto. Es de destacar que las fases de establecimiento del sistema de acciones, implementación y control no se desarrollan de manera lineal, en algunos casos se superponen u ocurren de forma conjunta.

### **Capítulo 3. Implementación y valoración de los resultados de la estrategia propuesta.**

Los conceptos y teoremas escogidos para aplicar la estrategia diseñada son algunos relativos al Tema “Cálculo Diferencial de funciones reales” de la asignatura Análisis Matemático I de la carrera Licenciatura en Educación, especialidad Matemática del ISCED de Huambo, Angola.

En el ámbito de esta maestría, está prevista la validación de la estrategia mediante el criterio de expertos, para más adelante, durante la implementación de la tesis doctoral, implementar con estudiantes en Angola.

#### **3.1 Planificación.**

##### **3.1.1 Sobre la preparación del profesor.**

Para diseñar la estrategia, el profesor comenzó preparándose metodológicamente en el aprendizaje como proceso cognitivo complejo activo, mediado y significativo; así como en los aspectos afectivos y axiológicos de éste, específicamente en lo que respecta a los procesos de formación, desarrollo y generalización de un concepto y de obtención y demostración de un teorema por medio de la resolución de problemas.

Se preparó además en los presupuestos teóricos y principios generales para la concepción de la estrategia, y en los aspectos a tener en cuenta en cada fase; formuló el objetivo general a lograr con el desarrollo de la misma y realizó el diseño que se propone. También adquirió una preparación acerca de los métodos y técnicas pedagógicas que le permitan realizar el diagnóstico de necesidades y la propuesta del control como se conciben en el diseño de la estrategia.

##### **3.1.2 Sobre el diagnóstico de necesidades didácticas de los conceptos y teoremas a tratar.**

Sobre el concepto de **derivada de una función en un punto** y otros conceptos que utilizan la derivada como condición necesaria y/o suficiente, así como los teoremas relativos a los mismos se determinó la conveniencia de validar la estrategia por medio de estos, así como el tratamiento tradicional que se le da a los mismos.

Teniendo en cuenta que el maestrante es graduado de la carrera Lic. en Ciencias de la Educación, especialidad Matemática de Huambo en el 2008; que en los cursos 03 - 04 y 04 – 05 recibió de uno de sus tutores durante el 1er y 2do año de su carrera (Dr. Antonio Martínez Fonseca) la enseñanza del Análisis Matemático con un enfoque basado en problemas, que revolucionó el enfoque tradicional con que se enseñaba esta disciplina en la carrera en estudio



y que fue profesor de Análisis Matemático I y II de dicha carrera durante el curso escolar 2008 – 2009, en el que aplicó con sus 35 estudiantes, un enriquecimiento de la propuesta que el Dr. Martínez llevó al ISCED en el curso 2003 – 2004; es que se escogen el concepto de **derivada de una función en un punto** y otros conceptos que utilizan la derivada como condición necesaria y/o suficiente, así como los teoremas relativos a los mismos para validar la estrategia, por ser este un tema que posee las ventajas siguientes:

- Por ser la derivada un concepto cuyo tratamiento propuesto engloba elementos importantes de tres contextos diferentes (geométrico, algebraico y del Análisis Matemático) propicia el trabajo interdisciplinario y de integración de conocimientos (articulación horizontal).
- Facilita el trabajo de articulación vertical desde la enseñanza media hasta la universitaria, al ampliarse los resultados con la utilización de las herramientas del cálculo.
- Mediante su tratamiento pueden surgir adecuados organizadores que pueden contribuir a un verdadero aprendizaje significativo.
- Se trata de un concepto al cual se le conocen varios significados (en diferentes contextos), aplicaciones, caracterizaciones, conceptos subordinados, subordinantes, susceptible de ser generalizado en los dos sentidos (por debilitamiento del contenido y por consideración de un conjunto de partida más amplio).
- Se le pueden realizar un amplio conjunto de acciones tanto en la formación, desarrollo y generalización que contribuyan a un aprendizaje significativo del mismo.
- Posee potencialidades para diseñar actividades encaminadas a un papel activo y mediado de los estudiantes en el PEA.
- Por la riqueza y facilidad de conocimientos previos que se necesitan y por la susceptibilidad de este concepto a ser aprendido por descubrimiento significativo (no por recepción), puede emplearse de manera acertada la enseñanza por medio de la resolución de problemas.
- Por la riqueza y belleza de sus características, unido al despertar de adecuadas motivaciones, puede contribuir a ampliar la esfera de intereses de los estudiantes y lograr una motivación intrínseca.
- Posibilita el empleo de cadenas de problemas de manera natural que ofrecen una estructura de árbol muy interesante.

- Es un concepto muy necesario en el Análisis Matemático y en las asignaturas de Optimización de la carrera de Matemática.
- Como parte de los teoremas derivados del mismo, se amplía la utilidad del mismo para caracterizar otros conceptos (como el de función monótona, función cóncava hacia arriba, etc) y facilita el establecimiento de un conjunto de desigualdades que se presentan en la enseñanza media, las que especialmente se abordan con alumnos de concurso; consecuentemente es necesario un tratamiento que tenga en cuenta esta diversidad.
- Favorece el inicio de un proceso de generalización que comienza en el primer año de la carrera y pudiera terminar en el postgrado.

Por otra parte, este es un concepto al que se le pueden realizar un amplio conjunto de acciones de formación, desarrollo y generalización en el año en que se implementa, pues los contenidos necesarios para ello deben estar en la zona de desarrollo del grupo de alumnos, a diferencia de otros conceptos en los que se necesita mayor bagaje teórico-matemático, aún no estudiado por los alumnos.

### **3.1.3 Sobre el diagnóstico de los conocimientos previos en torno a los conceptos a tratar.**

Se propone, durante la primera semana del curso, realizar una prueba de diagnóstico de contenidos en la que se mida saberes conceptuales, procedimentales y actitudinales sobre los conocimientos previos en torno a los conceptos a tratar, como son: ecuación de la recta conocidos dos puntos, concepto de pendiente de una recta, concepto de tangente a una función en un punto, vecindad de un punto, puntos especiales de un conjunto (de acumulación, aislados, frontera), concepto de límite de una función en un punto, concepto de función continua en un punto, clasificación de los puntos de discontinuidad, cálculo de límites, eliminación de indeterminaciones, funciones equivalentes, propiedades de las funciones (dominio, imagen, paridad, periodicidad, monotonía, asíntotas, extremos), acciones de desarrollo y generalización conceptual, mapas de extensiones, diagramas de Venn.

Con los resultados del diagnóstico y las orientaciones dadas en el diseño de la estrategia, se pone en práctica el sistema de acciones previsto encaminado a cumplimentar el **objetivo específico**: Llevar a cabo los procesos de formación, desarrollo y generalización del concepto de derivada de una función en un punto y los teoremas relativos al mismo, mediante la resolución de problemas de manera que se logre una mayor calidad del aprendizaje durante estos procesos.

Como primera acción concreta realizada está la tenencia en cuenta del programa de la disciplina (anexo 4), en el que se destaca la fundamentación de la disciplina, el sistema de objetivos instructivos y educativos, el sistema de conocimientos, el de habilidades, orientaciones metodológicas y de organización, así como la bibliografía básica y complementaria.

Se elabora el programa de la asignatura Análisis Matemático I (anexo 5), donde se recogen: los objetivos instructivos de la asignatura (pues los educativos de la disciplina se mantienen en la asignatura), el sistema de conocimientos, el sistema de habilidades matemáticas, la dosificación de clases (donde se resaltan las dedicadas al Tema Cálculo Diferencial de funciones reales), así como la bibliografía a emplear en la asignatura.

### **3.1.4 Sistema de acciones por temas.**

Algunas acciones de carácter general que se proponen durante el desarrollo de los temas son:

1. Exposición significativa por el profesor suscitando la participación activa de los estudiantes caracterizada por:
  - 1.1 Planteamiento de problemas interesantes del área de intereses de los alumnos, en aras de lograr una motivación intrínseca y una implicación afectiva de los mismos.
  - 1.2 Empleo y elaboración de adecuados organizadores de la información como: mapas conceptuales, de extensiones, de proposiciones, simbólicos, diagramas, esquemas.
  - 1.3 Establecimiento de las transferencias correspondientes de un mapa a otro.
  - 1.4 Que los alumnos respondan preguntas hechas por el profesor.
  - 1.5 Que ejemplifiquen situaciones que se tratan.
2. Planteamiento de problemas por parte del profesor y de los estudiantes.
3. Resolución de problemas de manera activa por parte de los estudiantes por medio de los cuales se va construyendo el conocimiento.
4. Ofrecimiento de niveles de ayuda adecuados por parte del profesor que puede darse por medio de:
  - 4.1 Sugerencias sobre la utilización de herramientas matemáticas.
  - 4.2 Impulsos heurísticos, estrategias, procedimientos, etc.
  - 4.3 Utilización del error como recurso de aprendizaje.
5. Propiciar trabajo en grupos o equipos, para facilitar la mediación del profesor y del resto del grupo en el aprendizaje de cada alumno.
6. Planteamiento de problemas por parte de los alumnos de manera que surjan como una necesidad natural durante los procesos que se estudian.
7. Planteamiento de preguntas orales debidamente dosificadas por el profesor que susciten la búsqueda parcial de resultados.
8. Observación por el profesor del:

- 8.1 Nivel de motivación intrínseca de los alumnos.
- 8.2 Nivel de participación de los alumnos.
- 8.3 Nivel de cooperación entre los alumnos.
- 8.4 Grado de comprensión del contenido tratado por parte de los estudiantes.
- 8.5 Grado de cumplimiento de los objetivos.
- 8.6 Comportamiento de la toma de notas por los alumnos.

Otras acciones específicas llevadas a cabo en cada tema pueden verse en el Folleto Didáctico que se presenta en el anexo 6 (en CD-ROOM) contenedor del Sistema de Clases relativo al tema “Cálculo Diferencial de funciones reales”.

### **3.2 Implementación de la estrategia planificada.**

Para la implementación de la estrategia planificada se deben poner en práctica, a través de las clases planificadas, las acciones previstas en el epígrafe anterior por medio de la resolución de problemas de manera activa, mediada y significativa durante el tratamiento de los conceptos y teoremas del tema escogido sobre la base de la articulación de los componentes didácticos: objetivo, contenido, método, medio y evaluación; y, siguiendo las orientaciones que se ofrecen en el programa de la disciplina (anexo 4).

En el anexo 6 se presenta el sistema de conferencias talleres (7), clases prácticas (14), seminarios (1) y laboratorios (1) donde se plasman los problemas que se proponen para facilitar los procesos didácticos que intervienen en el tratamiento de los conceptos y teoremas del Cálculo Diferencial de funciones reales.

A continuación se expone la cantidad de problemas que se proponen en cada una de las conferencias talleres:

- *Conferencia Taller # 1: Derivadas de funciones de una variable real (9)*
- *Conferencia Taller # 2: Operaciones con funciones derivables (14)*
- *Conferencia Taller # 3: Derivada de las funciones compuestas e inversas (10)*
- *Conferencia Taller # 4: Teoremas básicos del cálculo diferencial (9)*
- *Conferencia Taller # 5: Regla de L'Hôpital, fórmula y serie de Taylor (9)*
- *Conferencia Taller # 6: Extremos locales o relativos de una función. Problemas de optimización (11)*
- *Conferencia Taller # 7: Convexidad y punto de inflexión. Esquema de discusión del gráfico de una función (10)*

Total. (72)

A continuación se expone la cantidad de problemas presentados en cada acción de cada uno de los procesos que intervienen en el tratamiento de cada uno de los conceptos y teoremas del tema Cálculo diferencial de funciones reales, los cuales pueden encontrarse explícitamente en el anexo 6.

### CONCEPTOS

Proceso  Cpto	Proceso de formación del concepto					Proceso de desarrollo del concepto										Proceso generalización del concepto	
	Comparación	Análisis	Síntesis	Abstracción	Generalización	Ampliación de la colección de elementos conocidos de E	Expresión de la utilidad del concepto	Obtención de condiciones necesarias	Obtención de condiciones suficientes	Obtención de caracterizaciones	Ampliación de significados del cpto	Establecimiento de relaciones de E con otras extensiones	Ejemplificación de casos especiales	Determinación de propiedades de estructuras algebraicas de E	Ampliación de la colección de elementos conocidos de E <sub>c</sub>	Preparación para la generalización	Realización de la generalización
Tgite a una curva	3	1	1	1	1	5	6										
Derivada	2	1	1	1	1	42	28	1		2	3	2	6	4	16	1	1
Derivada lateral		1	1	1	1	7					1						
Incremento de la función		1	1	1	1		2										
Diferencial	1	1	1	1	2	5	4			1	1	1		3			
Suma finita						1											
Derivada de orden superior		1	1	1	1	9					1			3			
Dif. de orden superior		1	1	1	1									3			
Pto estacio-		1	1	1	1	2	5				1						

nario																	
Pto crítico		1	1	1	1	2	5				1						
Extremo local		1	1	1	1	6	5	1	2				1		4		
Monotonía						3		1	2	1			1				
Fción convexa	1	1	1	1	1	7	1			1							
Pto de inflexión		1	1	1	1	6				1					3		
Asintota	1	1	1	1	1	5	1	1	1	1			1		4		

## TEOREMAS

Proceso Teorema	De preparación para la obtención del teorema	Empleo de recursos heurísticos para la demostración del teorema	De valoración de la calidad del teorema obtenido	De aplicación del teorema
Relación entre función derivable y función continua	3	1	1	
Derivada de la suma, producto y cociente de funciones	2	3	1	11
Expresión del diferencial en función de la derivada	2	2		5
Unicidad del diferencial	1			
Diferencial de la suma, producto y cociente de funciones	1	1		2
Derivada de la función compuesta	1	1		10
Derivada de la función potencial con exponente real	1	1		4
Derivada de la función inversa	1	1		4
Derivada de la función paramétrica	1	1		3
Derivada de la función potencial – exponencial	1	1	1	4
Derivadas y diferenciales de orden superior	1			5
Teorema de Fermat	1	2	2	13
Teorema de Rolle	1		3	3
Teorema de Lagrange	1	2	2	3
Regla de L'Hospital –	3		6	16

Bernoulli				
Polinomio de Taylor	2	1	4	8
Serie de Taylor	1		1	14
Condición necesaria de extremos	1	1		6
Condición suficiente de monotonía	1	1	1	
Caracterización de la monotonía	1		1	5
Condición suficiente de extremos locales (criterio 1ra derivada)	1		2	6
Condición suficiente de extremos locales (criterio 2da derivada)	2	2	2	6
Condición necesaria y suficiente de convexidad	2			8
Condición necesaria de punto de inflexión	1		1	2
Criterio de la 3ra derivada para punto de inflexión		1		2
Criterio de la derivada n-sima	1			2

En la implementación de la estrategia, la fase de control juega un importante rol, la que se desarrolla durante todo el proceso de aplicación. Los resultados del control en esta primera fase de la investigación se limitan a realizar la valoración de la consulta a expertos, a los cuales se les presenta el diseño de la estrategia incluyendo la manera en que se piensa realizar la fase de control de manera experimental con muestras de estudiantes durante una futura validación práctica. Estos resultados se exponen en el próximo epígrafe.

### 3.3 Control de la estrategia implementada.

Para valorar la calidad de los conceptos y teoremas tratados y lograr una medida de su nivel de desarrollo alcanzado en los alumnos, se proponen los indicadores:

#### 1. Calidad del concepto formado:

- Capacidad de utilizar en situaciones concretas las propiedades del contenido del concepto formado.
- Determinación si, dado un elemento, es capaz de determinar si pertenece a la extensión del concepto formado.

#### 2. Calidad del concepto desarrollado.

- Capacidad de utilizar caracterizaciones.

- Conocimiento de subcolecciones de la extensión.
- Dominio de estrategias para establecer relaciones conjuntistas entre la extensión del concepto con las de otros.
- Conocimiento sobre diferentes significados del concepto.
- Utilización del concepto en la solución de problemas.

### 3. Calidad del concepto generalizado.

- Utilización de criterios de generalización adecuados.
- Capacidad para realizar cadenas de generalizaciones.
- Empleo de criterios para determinar la calidad de estas.

### 4. Calidad del teorema obtenido.

- Contestación de las preguntas heurísticas realizadas durante el proceso de obtención.
- Determinación de las hipótesis y las tesis de la mayoría.
- Manejo de argumentos para valorar la calidad de los teoremas obtenidos (recíprocos, contraejemplos, mencionar condiciones necesarias, suficientes o caracterizaciones)

### 5. Calidad del teorema demostrado.

- Contestación de preguntas heurísticas durante la demostración.
- Realización de manera independiente los pasos de menor dificultad conducentes a resultados en la demostración.
- Relación de más de una vía de demostración en aquellos teoremas factibles para ello.
- Reproducción de las demostraciones definidas como básicas.

### 6. Calidad del teorema aplicado.

- Identificación de cuáles teoremas deben aplicarse en determinados pasos de la solución de algunos problemas.
- Empleo correcto del teorema identificado.

### 7. Nivel de aprendizaje significativo logrado.

- Manejo de diagramas o estructuras que integran el nuevo concepto con contenidos previos.
- Capacidad de estructurar el concepto de varias formas.
- Capacidad de plantear problemas o interrogantes como necesidad para la ampliación o modificación de sus estructuras mentales.

### 8. Papel activo del alumno.

- Necesidad e interés por participar en clases.
- Capacidad de resolver problemas planteados destinados al trabajo independiente.
- Capacidad para responder preguntas orales.



- Elaboración de preguntas o conjeturas acertadas.

#### 9. Papel mediado del aprendizaje logrado.

- Determinar si son capaces de aprovechar las sugerencias mínimas ofrecidas por el profesor u otro alumno.
- Comprobar si, durante el trabajo en equipos, pueden aportar resultados sustanciales a la solución de las tareas.

#### 10. Resultados de las evaluaciones en los cortes realizados.

- Determinación de la calidad del rendimiento de cada alumno a partir de la valoración de las notas obtenidas en las evaluaciones frecuentes y pruebas parciales.
- Determinación de la calidad de la coevaluación y la autoevaluación que se lleva a cabo en el aula.
- Determinación de la calidad de la evaluación sumativa y la formativa realizadas.

Para la medición de estos indicadores durante la implementación con alumnos se propone una clasificación en tres categorías, en bajo (B), medio (M) y alto (A).

1. **Calidad de los conceptos formados (pf)**, Nivel bajo (1): no es capaz de relacionar las propiedades del contenido del concepto formado; ni de determinar si, dado un elemento de un concepto subordinante, este pertenece o no a su extensión; Nivel medio (2): es capaz de relacionar solo algunas propiedades del contenido del concepto formado; en general, es capaz de determinar si, dado un elemento de un concepto subordinante, este pertenece o no a su extensión; Nivel alto (3): cumple con las dos acciones relacionadas anteriormente.
2. **Calidad de los conceptos desarrollados (pd)**: Nivel bajo (1): no es capaz de utilizar diferentes caracterizaciones, no conoce subcolecciones infinitas de elementos de la extensión, no domina estrategias para establecer relaciones conjuntistas entre la extensión del concepto en estudio con las extensiones de otros conceptos, no domina los significados establecidos del concepto, no es capaz de utilizar eficientemente el concepto en la solución de problemas de diferentes ramas matemáticas o extramatemáticas; Nivel medio (2): es capaz de realizar las acciones anteriores solo parcialmente; Nivel alto (3): es capaz de realizar estas acciones.
3. **Calidad de los conceptos generalizados (pg)**, Nivel bajo (1): no es capaz de determinar las dos formas de generalizar el concepto, ni de realizar cadenas de generalizaciones y restricciones del concepto; Nivel medio (2): realiza una de las dos acciones anteriores o las dos solo parcialmente; Nivel alto (3): es capaz de realizar las dos acciones.
4. **Calidad de los teoremas obtenidos (to)**, Nivel bajo (1): en general no responde preguntas heurísticas realizadas durante el proceso de obtención de los teoremas, no es capaz de

determinar de manera precisa las hipótesis y las tesis de la mayoría de los teoremas, en general no posee argumentos para valorar la calidad de los teoremas obtenidos (valorar validez de contrarrecíprocos, poner contraejemplos, mencionar condiciones necesarias, suficientes o caracterizaciones); Nivel medio (2): realiza dos de las tres acciones anteriores o las tres solo parcialmente; Nivel alto (3): al menos es capaz de realizar dos acciones y la otra parcialmente.

5. **Calidad de los teoremas demostrados (td)**, Nivel bajo (1): en general no responde preguntas heurísticas realizadas durante el proceso de demostración de los teoremas, no es capaz de realizar de manera independiente los pasos de menor dificultad que conducen a resultados parciales en el proceso de demostración, no es capaz de relacionar más de una vía de demostración en aquellos teoremas factibles para ello, no es capaz de reproducir las demostraciones definidas en el programa como básicas; Nivel medio (2): al menos realiza dos de las cuatro acciones anteriores o tres solo parcialmente; Nivel alto (3): al menos es capaz de realizar tres acciones y la otra parcialmente.
6. **Calidad de los teoremas aplicados (ta)**, Nivel bajo (1): en general no identifica cuál teorema debe aplicarse en determinados pasos de la solución de algunos problemas, cuando identifica el teorema que debe usarse no es capaz de emplearlo correctamente; Nivel medio (2): al menos realiza una de las dos acciones anteriores o las dos solo parcialmente; Nivel alto (3): al menos es capaz de realizar una de las acciones y la otra parcialmente.
7. **Calidad del aprendizaje significativo logrado (as)**, Nivel bajo (1): es capaz de establecer relaciones entre el concepto nuevo con los precedentes por medio de mapas, diagramas que sintetizan la información, etc. no es capaz de plantear problemas o interrogantes como necesidad para la ampliación o modificación de sus estructuras mentales; Nivel medio (2): realiza una de las dos acciones anteriores o las dos solo parcialmente; Nivel alto (3): es capaz de realizar las dos acciones.
8. **Nivel del papel activo del aprendizaje logrado (pa)**, Nivel bajo (1): es capaz de resolver solo pocos problemas planteados destinados al trabajo independiente, de responder solo las preguntas más sencillas hechas por el profesor, no es capaz de elaborar preguntas o realizar conjeturas acertadas; Nivel medio (2): realiza estas acciones de manera parcial, o no realiza algunas pero realiza otras eficientemente; Nivel alto (3): realiza estas tres acciones de manera eficiente.

9. **Nivel del papel mediado del aprendizaje logrado (pm)**, Nivel bajo (1): no es capaz de aprovechar las sugerencias mínimas ofrecidas por el profesor u otro alumno, durante el trabajo en equipos, no aporta resultados sustanciales a la solución de las tareas; Nivel medio (2): en ocasiones es capaz de aprovechar las sugerencias mínimas ofrecidas por el profesor u otro alumno, durante el trabajo en equipos, aporta algunos resultados a la solución de las tareas; Nivel alto (3): realiza estas acciones de manera eficiente.
10. **Resultados en las evaluaciones (re) (1 prueba parcial, 1 seminario, 1 laboratorios, 14 clases prácticas, 4 preguntas escritas, intercambio de libretas, sistema de ponencias-oponencias, autovaloraciones)**. Nivel bajo (1): Desaprueba la prueba parcial y dos preguntas escritas, no realiza buenas valoraciones durante el intercambio de libretas y pruebas realizadas, ni en ponencias u oponencias, no realiza una adecuada autovaloración (se subvalora o sobrevalora) sobre su trabajo y potencialidades, no es capaz de explicar ejercicios del seminario; Nivel medio (2): Aprueba la prueba parcial con nota de regular u obtiene varias notas de 3, realiza valoraciones aceptables en escenarios de coevaluación y autoevaluación; Nivel alto (3): Aprueba la prueba parcial con nota entre 4 y 5, a lo sumo obtiene un 3 en evaluaciones frecuentes, realiza buenas valoraciones durante actividades de coevaluación y autovaloraciones.

Para comprobar la evolución de estos indicadores en el grupo en que se implementará la estrategia didáctica, los datos obtenidos se valorarán mediante análisis porcentual y la estadística descriptiva.

Para medir la manera en que se manifestarán estos indicadores se aplicarán los métodos: encuestas y entrevistas a estudiantes, observación participante en diferentes momentos y escenarios, pruebas de contenidos y estudio de casos.

#### **Clasificación inicial de los estudiantes de acuerdo a su rendimiento académico.**

Para la clasificación inicial de los estudiantes, estos se clasificarán por su aprovechamiento docente en alto, medio y bajo, de acuerdo a los siguientes criterios:

**Alto:** Los que han sido evaluados de B durante el primer corte de asistencia y evaluación del semestre y obtuvieron buenos resultados en el diagnóstico inicial (nota  $\geq 16$ ), opinión favorable del colectivo de profesores del año sobre el rendimiento académico del alumno (Incluye una buena participación en clases que evidencie el poder aplicar a la resolución de los problemas, los conocimientos precedentes de Matemática).

**Medio:** Los que tienen han sido evaluados de R durante el primer corte de asistencia y evaluación del semestre, obtuvieron en el diagnóstico inicial  $10 \leq n \leq 15$ , aunque presentan algunas dificultades, conocen y aplican los conocimientos precedentes pero cometen algunos errores que no le permiten concluir de forma correcta. Además si tiene un índice superior a 4.25 pero presentó muchas dificultades en el diagnóstico inicial. Los profesores del año opinan que su rendimiento es medio.

**Bajo:** Todos los que no cumplen con los requerimientos para ser clasificados como de alto o medio.

Con la estrategia propuesta e implementada se requiere estudiar cómo fue cambiando el comportamiento de los alumnos, su evolución, sobre todo los que al inicio demostraron un bajo aprovechamiento.

Dado que los grupos de la carrera en estudio son únicos se propone llevar a cabo un diseño de preexperimento diagramado de la forma siguiente:

- $G_{\text{único}} O_1 X_1 O_2$  Ver Sampier (2003, p.136), donde  $O_1$  corresponde al primer corte, donde se controla la prueba de diagnóstico inicial realizado y  $O_2$ , corresponde al control de la implementación  $X_1$  de la estrategia.

### **3.4 Valoración de los resultados del trabajo por consulta a especialistas.**

Para la realización del trabajo con especialistas utilizamos las ideas fundamentales que se proponen en Campistrous y Rizo (1998).

#### **a) Selección de los especialistas.**

Para la determinación de la pertinencia de una serie de aspectos y subaspectos propuestos que avalan la calidad del trabajo desarrollado, no solo en el diseño de la estrategia, sino en la planificación prevista para su ejecución y control, seleccionamos un grupo de 7 especialistas integrado por profesores de los departamentos de Matemática de varias universidades de Cuba y de Angola.

Aunque existen variadas formas para objetivar la selección de los especialistas, decidimos realizar la misma por medio de una serie de criterios que exponemos a continuación:

- Ser profesores de alguna de las disciplinas matemáticas de algún CES de Cuba o de Angola.
- Tener por lo mínimo 10 años de experiencia como profesores.

- Poseer conocimientos de Geometría Plana, Álgebra Elemental, Lógica y Análisis Matemático en una o varias variables.
- Haber impartido el tema Cálculo Diferencial de funciones reales en alguna carrera universitaria.
- Estar de acuerdo en colaborar con la investigación.
- Autovalorarse con una puntuación entre 7 y 10 puntos (de una escala de 10, como valor máximo) en cuanto a su nivel de conocimiento sobre el tema.

Los especialistas seleccionados autovaloran que poseen un conocimiento alto sobre el tema que se trata, como muestra el hecho de que 5 especialistas se autocalifican con 9 puntos sobre su conocimiento del tema, 1 con 8 y 1 con 7, de una escala de 10 puntos posibles como valor máximo. Esta autovaloración fue obtenida por medio del §6 del instrumento.

***b) Características del instrumento de consulta a los especialistas.***

El anexo # 7 recoge en CD-ROOM el material enviado para la consulta por los evaluadores externos de la propuesta.

El mismo cuenta con siete epígrafes, cuyos títulos son: §1. Diseño de la investigación, §2. Establecimiento del sistema de acciones, §3. Propuesta de implementación de la estrategia, §4. Planificación del control de la implementación del sistema de acciones, §5. Consulta a los expertos §6. Autovaloración acerca de su competencia como experto sobre el tema consultado, §7. Autovaloración acerca de las fuentes que le permiten argumentar sus criterios, §8. Datos generales del experto, y, §9. Otras consideraciones.

La aplicación del instrumento solo se realiza por vía correo electrónico, por lo que, con el objetivo de encaminar a los especialistas en su análisis y facilitar su valoración sobre la propuesta, fue necesario realizar una explicación sobre el problema científico que nos lleva a proponernos e implementar la estrategia didáctica, los aportes teóricos y prácticos de la misma, entre otros aspectos, que constituyen en su conjunto, componentes del diseño de la investigación (estos se relacionan en §1).

Está claro que los principales aspectos a valorar por los especialistas son los relativos al diseño de la estrategia sobre las fases de orientación, ejecución y control, por lo que también se incluyen en el instrumento en los epígrafes §2, §3 y §4.

El epígrafe §5 es el más importante del instrumento, pues es donde los especialistas valoran la pertinencia de los subaspectos (explicados en epígrafes anteriores) incluidos en una serie de aspectos propuestos, mediante una escala de 1 (no adecuado) a 5 (muy adecuado).

### **c) Interpretación de los resultados.**

En el anexo # 8 se muestra una tabla de frecuencias relativas sobre las opiniones de los especialistas.

Una valoración matemática de estos resultados demuestra que los aspectos y subaspectos considerados poseen alta pertinencia en cuanto a su consideración y forma de medición, pues se aprecia que ninguno de los especialistas estimó a ninguno de los aspectos considerados como poco adecuado o inadecuado.

Para realizar una valoración matemática de estos resultados, confeccionamos la variable  $P$ , tal

que  $P = \sum_{i=1}^5 C_i \cdot n_i$  donde  $C_i$  es el valor numérico asignado a la categoría y  $n_i$  es su frecuencia

(cantidad de especialistas que votaron por  $C_i$ ), de esa forma, para cada aspecto o subaspecto se tiene que  $7 \leq P \leq 35$ . Estos valores de  $P$  están contemplados en la última columna de la tabla del anexo 8 y son susceptibles de ser considerados como datos continuos, a los que se les pueden determinar medidas de la estadística descriptiva que ofrezcan una caracterización sobre la manera en que los especialistas valoraron la calidad del diseño de la estrategia .

De la cual puede interpretarse que, en todos los aspectos,  $P$  se manifiesta mayor o igual que 31.

- Media = 32.6, como promedio, lo que significa que los expertos valoran en alta pertinencia los aspectos considerados, pues la media es “cercana” al valor máximo de  $P$ .
- Moda = 32, valor que más se repite, como se aprecia, es alto.
- Desviación = 0.94, los valores de  $P$  se concentran cercanos a la media obtenida, sin una varianza considerable.

Con esto puede afirmarse que los especialistas consideran como muy adecuada la propuesta en general.

## CONCLUSIONES

A partir del trabajo investigativo realizado, los métodos teóricos de investigación empleados y los resultados obtenidos con el criterio de especialistas, pueden arribarse a las siguientes síntesis conclusivas:

1. Se ha cumplido el objetivo de nuestra investigación, pues se ha diseñado una estrategia didáctica basada en la resolución de problemas que, como se demuestra a través de los resultados obtenidos durante su valoración por consulta a especialistas, puede contribuir a perfeccionar los procesos de que intervienen en el tratamiento de conceptos y teoremas matemáticos.
2. El programa heurístico general que se emplea, recoge como elementos novedosos, la construcción de conjuntos de problemas debidamente dosificados para garantizar la participación de los estudiantes en los procesos didácticos que se derivan de los grandes problemas a resolver que consisten en: la realización del proceso de formación (desarrollo, generalización) de un concepto matemático y la realización del proceso de obtención (demostración, valoración y aplicación) de un teorema.
3. El sistema de acciones propuesto en el diseño de la estrategia es suficiente para abordar el tratamiento de una amplia gama de conceptos y teoremas matemáticos, aunque durante su implementación, debe adaptarse de forma eficiente y creadora al contenido escogido.
4. El sistema de acciones propuesto puede contribuir, por medio de una adecuada implementación con estudiantes, al logro de un aprendizaje activo, mediado y significativo de los conceptos y teoremas del Cálculo Diferencial.

## RECOMEDACIONES

Debido a los resultados derivados de esta investigación y a la experiencia acumulada en la labor docente del autor, se proponen las siguientes recomendaciones:

1. Implementar la propuesta realizada con muestras de estudiantes de la carrera Licenciatura en Educación, especialidad Matemática.
2. Emplear la estrategia durante el tratamiento de otros conceptos centrales del currículo del Licenciado en Educación, especialidad Matemática.
3. Realizar colectivos de carrera encaminados a acordar cuáles pueden ser los conceptos y teoremas susceptibles de ser tratados con la estrategia propuesta y qué acciones de la misma pueden llevarse a cabo a través de los diferentes años de la carrera.
4. Utilizar la estrategia en cursos de preparación de profesores, tanto para llevar a cabo los procesos del tratamiento conceptual de conceptos matemáticos del postgrado y como recurso metodológico a poner en práctica en el aula de clases. La utilización de esta estrategia en la superación de profesores es un valioso recurso de superación postgraduada que puede contribuir a dar un vuelco favorable al tratamiento de conceptos y teoremas matemáticos en la enseñanza superior, como muestran los resultados obtenidos con su aplicación en una muestra de profesores del municipio de Placetas que cursan la Maestría en Matemática Aplicada que oferta el dpto de Matemáticas de la UCLV.



## BIBLIOGRAFÍA

1. Addine Fernández F. et al. (2007): Didáctica: Teoría y Práctica. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana.
2. Alonso, I. (2000). La resolución de problemas matemáticos. Una alternativa didáctica centrada en la representación. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Universidad de Oriente. Cuba.
3. Álvarez de Zayas, C. M. (1998): Pedagogía como ciencia. La Habana. Editorial Félix Varela.
4. Álvarez de Zayas, C. M. (1999): Didáctica. La escuela en la vida. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana.
5. Álvarez de Zayas, C. (1984). Fundamentos teóricos de la dirección del proceso de formación del profesional de perfil ancho. Ciudad de la Habana.
6. Arteaga, E. (2000). El sistema de tareas para el trabajo independiente creativo de los alumnos en la enseñanza de la Matemática en el nivel medio superior. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. No publicada. Instituto Superior Pedagógico "Conrado Benítez García". Cienfuegos. Cuba.
7. Ausubel, D. P., Novak, J. D. & Hanesian, H. (2000). Psicología educativa. Un punto de vista cognitivo. México: Trillas.
8. Ballester, S. (1999). Los ejercicios de nuevo tipo. Educación, (97), 25-30. La Habana: Pueblo y Educación.
9. Ballester, S. y otros (1992). Metodología de la enseñanza de la Matemática, tomo I. La Habana: Pueblo y Educación.
10. Ballester, S. y otros (2000). Metodología de la enseñanza de la Matemática, tomo II. La Habana: Pueblo y Educación.
11. Beltrán, A. (2007, abril). Los objetivos y las tareas de la investigación, su relación con la estructura de la tesis. Recuperado el 14 de septiembre de 2007, en <http://www.monografias.com>
12. Beltrán, J. (1998) Psicología evolutiva y de la educación. Procesos, Estrategias y Técnicas de aprendizaje. Editorial Síntesis. S.A. Madrid. España.
13. Bermúdez, Rogelio y Marisela Rodríguez R. (1996): Metodología de la Enseñanza y el Aprendizaje. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana
14. Caballero Delgado E. y Gilberto García Batista (2002): Preguntas y respuestas para elevar la calidad del trabajo en la escuela. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana.
15. Campistrous, L. y C. Rizo. (1996). Aprende a resolver problemas aritméticos. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana.
16. Castellanos Simons D. et al. (2005): Aprender y enseñar en la escuela. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Cuba.
17. Castellanos, D., Castellanos, B., Llivina, M. J. & Moreno, M. J. (2004). Aprendizaje y desarrollo. En G. García (Ed.), Temas de introducción a la formación pedagógica general (pp. 291-315). La Habana: Pueblo y Educación.
18. Castro Ruz, F. Compilación de discursos y Reflexiones.
19. Castro, E., Rico, L. & Romero, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. Enseñanza de las Ciencias, 15 (3), 361-371.

20. Chávez Rodríguez J. (1996) Bosquejo histórico de las ideas educativas en Cuba. Edit. Pueblo y educación. La Habana.
21. Chávez, J., Suárez, A. & Permuy, L. D. (2002). Acercamiento necesario a la Pedagogía General. La Habana: Pueblo y Educación.
22. Valdés Castro, C. y otros. (1983). Análisis Matemático. Tomo II. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana.
23. De Guzmán, M. (1993). Tendencias innovadoras en educación matemática. Organización de estados iberoamericanos para la educación. la ciencia y la cultura. Editorial popular. ISBN: 84-7884-092-3. Depósito legal: M-9207-1993.
24. Delgado, J. R. (1999). La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Dos elementos fundamentales para lograr su eficacia: la estructuración sistémica del contenido de estudio y el desarrollo de las habilidades generales matemáticas. Tesis de Doctorado. Camagüey. Cuba.
25. Delors, J. y otros (1996). La educación encierra un tesoro. Informe a la UNESCO de la Comisión Internacional sobre la Educación para el Siglo XXI. España: Ediciones UNESCO.
26. Díaz, A. C. (2003). Modelo teórico con enfoque interdisciplinario para la formación de los conceptos del cálculo infinitesimal en la preparación de profesores de física y de ciencias exactas. Tesis presentada para optar por el grado científico de doctor en ciencias pedagógicas. Santa Clara. Cuba.
27. Font, V. (2005). Las representaciones en Educación Matemática. Presentación electrónica para uso del doctorado en Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Granada. Recuperado de <http://www.ugr.es/~jgodino/>
28. Gascón, J. (1994). El papel de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas. Educación Matemática, 6 (3), 125-141. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
29. Godino, J. D. (2002c). Hacia una teoría de la instrucción matemática significativa. Material para el uso en el Doctorado en Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Granada. España. Recuperado de <http://www.ugr.es/~jgodino>.
30. Godino, J. D., Batanero, C. & Navarro-Pelayo, V. (2003). Epistemología e instrucción matemática: implicaciones para el desarrollo curricular. En, Investigaciones sobre fundamentos teóricos y metodológicos de la educación matemática (pp. 105-122). Universidad de Granada. España. Recuperado de <http://www.ugr.es/~jgodino>.
31. González Rodríguez, B. E. (2001). La preparación del profesor para la utilización de la modelación matemática en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. No publicada. Universidad Central de Las Villas. Santa Clara. Cuba.
32. González Milanés, E. & Navarrete Reyes, M. (2004). Una experiencia sobre la formación del profesional en la universidad "Agostinho Neto", Angola. Informe sobre los asuntos académicos de la UAN del 2001-2005.
33. Guétmanova, A. (1989). Lógica. Moscú: Progreso.
34. Guétmanova, A., Petrov, V. & Panov, M. (1991). Lógica en forma simple sobre lo complejo. Moscú: Progreso.
35. Guzmán. M. de (1998). Matemáticas y estructura de la naturaleza. En F. Mora Teruel & J. M. Segovia Arana (coord.), Ciencia y Sociedad. Desafíos del Conocimiento ante el Tercer Milenio (pp. 327-357). Recuperado de <http://ochoa.mat.ucm.es/~guzman/>

36. Hidalgo, J.L. (1992). Aprendizaje operatorio. Ensayos de teoría pedagógica. Casa de la Cultura del maestro mexicano. A.C.
37. Hit, F. (2001). El papel de los esquemas, las conexiones y las representaciones internas y externas dentro de un proyecto de investigación en Educación Matemática. En P. Gómez & L. Rico (Eds.), Iniciación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al Profesor Mauricio Castro (pp. 165-178). Granada: Editorial Universidad de Granada. Recuperado de <http://cumbia.ath.cx/ugr/phmc/PDF/Hitt.pdf>
38. Horrutinier Silva, P. (2006): La universidad cubana: el modelo de formación. Editorial Félix Varela. Ciudad de La Habana. Cuba.
39. Jungk, W. (1978). Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática 1. La Habana: Pueblo y Educación.
40. Jungk, W. (1979). Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática 2. Primera parte. La Habana: Pueblo y Educación.
41. Jungk, W. (1981). Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática 2. Segunda Parte. La Habana: Pueblo y Educación.
42. Klingberg, L. (1972). Introducción a la didáctica general. La Habana: Pueblo y Educación.
43. Krulik, S y J. Rudnik. (1980). Problem Solving. a handbook for teachers. Allyn & Bacon Inc.
44. Labarrere G., Valdivia G. (1988) Pedagogía. Editorial Pueblo y Educación.
45. Labarrere, A. (1987). Bases psicopedagógicas de la solución de problemas matemáticos en la escuela primaria. La Habana: Pueblo y Educación.
46. Landman, G. W. (2005). Las definiciones en matemática y los procesos de su formulación: algunas reflexiones. En G. Martínez Sierra (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 19 (pp. 528-552). México: CLAME.
47. Larios, V. (2000). Las conjeturas en los procesos de validación matemática. Un estudio sobre su papel en los procesos relacionados con la Educación Matemática. Querétaro. Tesis de maestría. Recuperado de <http://www.geocities.com/discendi2/tm/tm0r.html>
48. Leontiev, A. N. (1981). Actividad, conciencia, personalidad. La Habana: Pueblo y Educación.
49. Llivina, M., Castellanos, D., Hernández, R. & Arencibia, V. (2000). Aproximación al aprendizaje desarrollador de la Matemática. Memorias del Evento Universidad 2000. La Habana. Cuba.
50. Martí Pérez J.: Ideario pedagógico. (1961) MINED. La Habana
51. Martínez, D. (2002). Estrategia para el logro de la significatividad didáctica en la formación del concepto de función en la Matemática para la Licenciatura en Economía. Tesis presentada para optar por el grado científico de doctor en ciencias pedagógicas. Santa Clara. Cuba.
52. Martínez Llantada, M. et al. (2003) Metodología de la investigación educacional. Desafío y polémicas actuales. Editorial Félix Varela
53. Martínez, A. (2003). Procedimiento metodológico para la generalización de conceptos de los temas Dominios Numéricos y Series en la Educación Superior. Tesis presentada para optar por el grado científico de doctor en ciencias pedagógicas. Universidad central "Marta Abreu" de las Villas. Villa Clara. Cuba.

54. Martínez, J. E. (2005). Estrategia didáctica para el estudio de conceptos con un proceso de formación inductivo en la carrera Licenciatura en Matemática. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Universidad central "Marta Abreu" de las Villas. Villa Clara. Cuba.
55. Mederos, O. & González, B. E. (1997). Una variante metodológica para el estudio de los conceptos a partir de su definición. Boletín de Matemática, Nueva Serie, IV, 85-100. Colombia.
56. Mederos, O. & González, B. E. (2000). Procedimiento para el estudio de los conceptos. No publicado. Universidad Central de Las Villas. Santa Clara. Cuba.
57. Mederos, O. & González, B. E. (2005). La modelación en la Educación Matemática. Saltillo. México: Universidad Autónoma de Coahuila.
58. Mederos, O. & Martínez, A. (1997). Las operaciones de generalización y restricción de conceptos. Boletín de Matemática, Nueva Serie, IV, 101-113. Colombia.
59. Mederos, O. & Martínez, J. E. (2005, diciembre). La resolución de problemas y la formación y desarrollo de conceptos. El concepto de media numérica. Números, 62, 53-64. Islas Canarias. España.
60. Mederos, O. & Ruiz, A. M. (2003). Aplicación de la operación clasificación de conceptos al estudio de los cuadriláteros. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa "RELME", 16 (1). La Habana.
61. Mitjans Martínez A. (1995). Creatividad, personalidad y educación. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Cuba.
62. Nogales, F. V. (2003). Estrategias Educativas. Quaderns Digitals. Centre d'Estudis Vall de Segó. Valencia. España. Recuperado el 5 de julio de 2006, en <http://www.quadernsdigitals.net/>
63. Peltier, M.-L. (1993). Una visión general de la didáctica de las matemáticas en Francia. Educación Matemática, 5 (2), 4-10. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
64. Pérez, G., García, G., Nocado, I. & García, M. L. (1996). Metodología de la investigación educacional. Tomo I. La Habana: Pueblo y Educación.
65. Pérez, L. y otros (2004). La personalidad: su diagnóstico y su desarrollo. La Habana: Pueblo y Educación.
66. Petrovsky, A. V. (sf). Psicología pedagógica y de las edades. La Habana: Pueblo y Educación.
67. Polya, G. (1986). ¿Cómo plantear y resolver problemas? Editorial Trillas. México.
68. Puig, L. (1997). La didáctica de las matemáticas como tarea investigadora. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia. Valencia. España. Recuperado de <http://www.uv.es/~didmat/luis/textos.htm>
69. Rebollar, A. (2000). Una variante para la estructuración del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, a partir de una nueva forma de organizar el contenido, en la escuela media cubana. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. No publicada. Santiago de Cuba.
70. Remedios, J. M. & Hernández, T. (2005). Desempeño y evaluación de los docentes desde los modos de actuación profesional. En, Memorias del Evento Pedagogía 2005. La Habana.
71. Rico, L. & Sierra, M. (1999). Didáctica de la Matemática e investigación. Universidad de Granada. Granada. España. Recuperado de [http://www.ugr.es/~dpto\\_did/](http://www.ugr.es/~dpto_did/)

72. Rico, L. (1995a). Didáctica de la Matemática como campo de problemas. Las Palmas. Recuperado de [http://www.ugr.es/~dpto\\_did/](http://www.ugr.es/~dpto_did/)
73. Rico, L. (1995b). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. J. Kilpatrick, L. Rico & P. Gómez (Eds.), Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia (pp. 69-108). Bogotá: Una Empresa Docente. Recuperado de [http://www.ugr.es/~dpto\\_did/](http://www.ugr.es/~dpto_did/)
74. Rico, L. (2001). Análisis conceptual e investigación en didáctica de la matemática. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), Iniciación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al Profesor Mauricio Castro (pp. 180-194). Granada: Universidad de Granada. Recuperado de [http://www.ugr.es/~dpto\\_did/](http://www.ugr.es/~dpto_did/)
75. Rico, L., Castro, E. & Romero, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. Recuperado de [http://www.ugr.es/~dpto\\_did/](http://www.ugr.es/~dpto_did/)
76. Rico, P & Silvestre, M. (2002). Proceso de enseñanza-aprendizaje. En G. García Batista (Ed.), Compendio de Pedagogía (pp. 68-79). La Habana: Pueblo y Educación.
77. Rico, P. & Silvestre, M. (2001). Hacia la remodelación del proceso de enseñanza-aprendizaje. Ciencias Pedagógicas, 2 (1). Recuperado el 9 de junio de 2006, en <http://cied.rimed.cu/revista/21/portada/laportada2r1.html>
78. Rodríguez del Castillo María Antonia (2003). La estrategia como resultado científico de la investigación educativa. Centro de ciencias e investigaciones pedagógicas ISP "Félix Varela"
79. Rosental, M. & Iudin, P. (1981). Diccionario filosófico. La Habana: Editora Política.
80. Rubinstein (1977). Principios de psicología general. La Habana: Pueblo y Educación.
81. Sampier, R. (2003). Metodología de la investigación. Tomo I. Editorial Félix Varela. La Habana. Cuba
82. Sánchez Fernández, C. (1982). Análisis Matemático. Tomo I. La Habana: Pueblo y Educación.
83. Sánchez, M. (2002). La investigación sobre el desarrollo y la enseñanza de las habilidades de pensamiento. Revista Electrónica de Investigación Educativa 4 (1). México. Recuperado de <http://redie.ens.uabc.mx/vol4no1/contents-amestoy.html>
84. Schoenfeld, A. H. (1985). Ideas y tendencias en la resolución de problemas. En La enseñanza de la Matemática a debate. Ministerio de Educación y Ciencias. Madrid.
85. Sigarreta, J. M. (2001). Incidencia del tratamiento de los problemas matemáticos en la formación de valores. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. No publicada. ISP "José de la Luz y Caballero". Holguín.
86. Silvestre, M. & Zilberstein, J. (2002). Hacia una didáctica desarrolladora. La Habana: Pueblo y Educación.
87. Silvestre, M., (1999): Aprendizaje educación y desarrollo, Editorial Pueblo y Educación, La Habana.
88. Talízina, N. F. (1988). Psicología de la enseñanza. Moscú: Progreso.
89. Torres, P. (2000b). La enseñanza de la Matemática en Cuba en los umbrales del siglo XXI: logros y retos. ISPEJV. La Habana: Impresión Ligera.
90. Vázquez, R. A. (1998). La resolución de problemas y tareas docentes de Matemática IV para ingeniería eléctrica. Tesis de Doctorado. Camagüey. Cuba.

91. Vygotski, L. S. (1981). Pensamiento y lenguaje. La Habana: Edición Revolucionaria.
92. Vygotski, L. S. (1989). Obras completas. Tomo V. La Habana: Pueblo y Educación.
93. Villegas, E. & Placeres, L. (2004). El tratamiento de conceptos y definiciones: situación típica de la enseñanza de las ciencias. En M. Álvarez (Comp.), Interdisciplinariedad: una aproximación desde la enseñanza-aprendizaje de las ciencias (pp. 205-227). La Habana: Pueblo y Educación.
94. Zilberstein, J. & Valdés, H. (2001). Aprendizaje escolar, diagnóstico y calidad educativa. Segunda edición. México: Ediciones CEIDE.
95. Zilberstein, J. (2000). Reflexiones acerca de qué es un resultado científico en la investigación educativa y qué vías son las más propicias para introducirlo. Ciencias Pedagógicas, 1 (2). Recuperado el 6 de octubre de 2006, en <http://cied.rimed.cu/revista/12/portada/laportadaa1r2.html>

# ANEXOS

## Anexo # 1: Encuesta a profesores

### Compañero profesor:

Se dirigen a usted: el Lic. Juca Martins Celestino Sachipia, procedente del Instituto Superior de Ciencias de la Educación de Huambo (ISCED), Angola, cursante de la Maestría en Matemática Aplicada de la Universidad Central de Las Villas, Cuba (UCLV) y miembro del proyecto de investigación "Perfeccionamiento de la Didáctica de la Matemática Superior" de dicha universidad; así como los doctores en ciencias pedagógicas: Antonio Martínez Fonseca y José Enrique Martínez Serra, miembros de dicho proyecto y tutores del maestrante.

En la enseñanza de la Matemática Superior constantemente se nos presentan deficiencias en la comprensión de diferentes aspectos de esta ciencia, tenemos la opinión de que el tratamiento de conceptos y teoremas transcurre por varios procesos en los cuales el profesor debe plantearse acciones conscientes para que estos transcurran de forma que conduzcan a un aprendizaje activo, mediado y significativo por los estudiantes, en lo que la resolución de problemas enfocada en tres direcciones: como motivación, como vía para introducir los contenidos y como instrumento de aplicación práctica de los diferentes conceptos y teoremas puede contribuir de manera favorable.

Conscientes de su alta profesionalidad y maestría en el ejercicio de la docencia y en el trabajo investigativo, consideramos que su ayuda con algunas opiniones sobre lo que tradicionalmente muchos profesores hacemos en el aula nos sería de gran utilidad.

Por tal motivo le pedimos que nos responda, con el ánimo de ayudarnos, el cuestionario siguiente:

### Cuestionario:

- 1) En el empleo de los problemas para el tratamiento de conceptos y teoremas en la asignatura que imparte, ¿cuál es la vía que más predomina? Ejemplifique:
  - a. \_\_\_\_\_ Enseñanza de la resolución de problemas: *planteamiento de problemas encaminados a practicar modelos y estrategias para resolver problemas (modelo de Polya, modelo de Schoenfeld)*
  - b. \_\_\_\_\_ Enseñanza para la resolución de problemas: *se muestra una técnica a los estudiantes para resolver problemas y luego se presentan problemas de práctica hasta que se ha dominado la técnica (generalmente en la resolución de clases de problemas de aplicación en las ingenierías)*
  - c. \_\_\_\_\_ Enseñanza por medio de la resolución de problemas: *planteo de problemas mediante cuya resolución se produce el aprendizaje de los nuevos contenidos.*
  
- 2) Al abordar el estudio de los conceptos matemáticos, ¿qué vía ha predominado durante el proceso de formación de los mismos?
  - a. \_\_\_\_\_ de lo particular a lo general (inductiva).
  - b. \_\_\_\_\_ de lo general a lo particular (deductiva).
  - c. \_\_\_\_\_ Ambas en la misma medida.
  - d. \_\_\_\_\_ En dependencia de las características del concepto que se vaya a tratar. Ejemplifique.
  
- 3) ¿Qué acciones de formación, desarrollo y generalización conceptual usted ha realizado en clases durante el tratamiento de conceptos y cuáles considera que deben hacerse? Ejemplifique las que considere pertinentes.
  - a. Proceso de formación

Acción	¿Usted la realiza?		¿Considera que debe realizarse?		Observación
	Sí ejemplo	/ No	Sí	No	
Presentar a los estudiantes cierto número de objetos, especialmente seleccionados, con el objetivo que los comparen y los analicen.					
Mediar para que los alumnos seleccionen propiedades de cada objeto, los comparen con los otros objetos, determinen las propiedades comunes y hagan su abstracción de las					

propiedades no comunes.					
Facilitar el proceso mental de síntesis, para que se seleccione un conjunto mínimo de propiedades (esenciales), a partir de las cuales se puedan obtener todas las demás propiedades comunes.					
Dejar claro mediante la generalización, la posible existencia de un conjunto de objetos más amplio que los considerados, que satisfacen estas características esenciales, y la posibilidad de que algunos de los presentados no se incluya en el concepto.					
Utilizar una denominación verbal para nombrar la clase de todos los objetos que cumplen las propiedades esenciales, y realizar la definición científica del concepto correspondiente a la clase de propiedades seleccionada.					

b. Proceso de desarrollo

Acción		¿Usted la realiza?		¿Considera que debe realizarse?		Observación
		Sí ejemplo	No	Sí	No	
En el contenido del concepto	Obtener condiciones necesarias del concepto.					
	Obtener condiciones suficientes del concepto.					
	Obtener caracterizaciones del concepto definido.					
En la extensión del concepto	Realizar el estudio de estructuras algebraicas y topológicas.					
	Ampliar la clase de elementos conocidos de su extensión.					
	Establecer isomorfismos entre su extensión y la extensión de otros conceptos u otros conjuntos.					
	Determinar relaciones significativas con las extensiones de otros conceptos.					
	Construir mapas de extensiones que tienen lugar entre la extensión del concepto estudiado con las extensiones de otros conceptos, y de los mapas de contenido correspondientes.					
	Determinar objetos límite y casos especiales del concepto en estudio.					
Realizar aplicaciones importantes del concepto en problemas intramatemáticos y extramatemáticos.						
Ampliar los significados del concepto.						
Ejercitar a los estudiantes en las técnicas de demostración para ampliar las propiedades del concepto, utilizando para ellos las caracterizaciones más adecuadas.						

c. Proceso de generalización

	¿Usted la realiza?	¿Considera que debe realizarse?	Observación



Acción		realizarse?			
		Sí ejemplo	/ No	Sí	No
Preparar el concepto para su generalización.					
Realizar generalizaciones	Por debilitamiento del contenido del concepto.				
	Por consideración de contextos más amplios.				
Establecer criterios de bondad para valorar la calidad de las generalizaciones hechas.					

4) ¿Qué acciones de obtención, demostración, valoración y aplicación de los teoremas se han realizado durante el tratamiento de teoremas y cuáles considera que deben hacerse? Ejemplifique los que considere pertinentes.

a. Proceso de obtención

Acción		¿Usted la realiza?		¿Considera que debe realizarse?		Observación
		Sí ejemplo	/ No	Sí	No	
Preparar el camino para la obtención del teorema	La motivación para la misma.					
	La visualización geométrica del resultado que se pretende enunciar.					
	La realización de preguntas heurísticas cuyas respuestas permiten la obtención de resultados parciales que en su conjunto conducen a la formulación del teorema como tal.					

b. Proceso de demostración

Acción		¿Usted realiza?		¿Considera que debe realizarse?		Observación
		Sí ejemplo	/ No	Sí	No	
Realizar la demostración de la mayoría de los teoremas que ofrecen estrategias de trabajo generales, y las que no puedan hacerse en clases por presupuesto de tiempo, entonces orientarlas como estudio independiente para ser posteriormente controladas, preferiblemente en seminarios.						
Preparar el camino para la demostración	La motivación para la misma.					
	La determinación de las hipótesis y las tesis.					
	La elección del método de demostración más adecuado.					
	La elaboración del plan de demostración.					
	La ejecución del plan.					
Durante la ejecución del plan, dejar claras las reglas de inferencias que se utilizan, así como los principios, reglas y estrategias heurísticas que se emplean.						

Llevar a cabo un tratamiento óptimo de explotación del error que cometen los estudiantes.					
---	--	--	--	--	--

c. Proceso de valoración de la calidad del teorema obtenido.

Acción	¿Usted realiza?		¿Considera que debe realizarse?		Observación
	Sí ejemplo	No	Sí	No	
Relacionar más de una vía de demostración en aquellos teoremas factibles para ello.					
Valorar validez de recíprocos, poner contraejemplos, mencionar condiciones necesarias, suficientes o caracterizaciones.					
Valorar posibilidades de empleo en contenidos venideros.					
Reproducir las demostraciones definidas en el programa como básicas.					

d. Proceso de aplicación del teorema

Acción	¿Usted realiza?		¿Considera que debe realizarse?		Observación
	Sí ejemplo	No	Sí	No	
Identificar cuál teorema debe aplicarse en determinados pasos de la solución de algunos problemas.					
Cuando se identifica el teorema que debe usarse, debe garantizarse que se emplee correctamente.					

- 5) ¿De qué manera ha sido evaluado el aprendizaje de los conceptos y teoremas tratados? En las pruebas que se han aplicado, ¿qué tipos de preguntas relativas a los conceptos se han puesto (reproductivas, memorísticas, de aplicación de conceptos, de establecimiento de relaciones con otros conceptos, de análisis de contenidos de los conceptos, de valoración sobre la pertenencia o no de un objeto a la extensión del concepto que se evalúa, de significados del concepto, de elaboración o interpretación de mapas conceptuales, diagramas, etc)? Ejemplifique.
- 6) Al realizar acciones relativas al tratamiento de los conceptos y teoremas de la asignatura, ¿ha predominado el trabajo independiente de los alumnos, el trabajo cooperativo con los demás alumnos bajo la guía del profesor, o el intercambio y la elaboración conjunta con el profesor? ¿de qué manera se ha llevado a cabo el trabajo cooperativo?
- 7) Cuando los alumnos cometen errores en la realización de alguna tarea relativa al tratamiento de un concepto o un teorema, ¿cómo se han subsanado los mismos?

**Datos del encuestado:** Categoría Científica: \_\_\_\_\_ Categoría Docente: \_\_\_\_\_ Años de experiencia como profesor: \_\_\_\_\_ Asignaturas / Carreras que imparte: \_\_\_\_\_

Muchas gracias por su colaboración, y un saludo del Licenciado Juca Celestino Sachipia y de los Doctores en Ciencias Antonio Martínez Fonseca y José Enrique Martínez Serra.

Febrero de 2010

## Anexo # 2: Encuesta a alumnos

### Estimado alumno:

Como parte del proyecto de investigación “Perfeccionamiento de la Didáctica de la Matemática Superior” en la Universidad Central de las Villas, se están investigando una serie de deficiencias en la comprensión de diferentes aspectos de esta ciencia, que pueden estar provocadas por algunas dificultades en el empleo de la resolución de problemas durante el tratamiento de los conceptos y teoremas de esta materia.

Es por ello que le pedimos nos conteste las siguientes preguntas encaminadas a constatar su punto de vista sobre la manera en que se manifiestan algunos aspectos del proceso de enseñanza – aprendizaje de la Matemática Superior.

### Cuestionario:

- 1) En el empleo de los problemas para el tratamiento de conceptos y teoremas en las asignaturas de Matemática que ha recibido, ¿cuál es la vía que más predomina? Ejemplifique:
  - a. \_\_\_\_\_ Enseñanza de la resolución de problemas: *planteamiento de problemas encaminados a practicar modelos y estrategias para resolver problemas*
  - b. \_\_\_\_\_ Enseñanza para la resolución de problemas: *se muestra una técnica a los estudiantes para resolver problemas y luego se presentan problemas de práctica hasta que se ha dominado la técnica (generalmente en la resolución de clases de problemas de aplicación en las ingenierías)*
  - c. \_\_\_\_\_ Enseñanza por medio de la resolución de problemas: *planteo de problemas mediante cuya resolución se produce el aprendizaje de los nuevos contenidos.*
- 2) ¿Qué acciones para el tratamiento de conceptos se han realizado en clases y cuáles considera que debían haberse realizado? Ejemplifique las que considere pertinentes.
  - a. Proceso de formación de conceptos

Acción	¿Se han realizado en clases de Matemática?		¿Considera que debe realizarse?		Observación
	Sí / ejemplo	No	Sí	No	
Presentar a los estudiantes cierto número de objetos, especialmente seleccionados, con el objetivo que los comparen y los analicen.					
Los alumnos seleccionan propiedades de cada objeto, los comparan con los otros objetos, determinan las propiedades comunes y hacen abstracción de las propiedades no comunes.					
Se facilita el proceso mental de síntesis, para que se seleccione un conjunto mínimo de propiedades (esenciales), a partir de las cuales se puedan obtener todas las demás propiedades comunes.					
Se deja claro mediante la generalización, la posible existencia de un conjunto de objetos más amplio que los considerados, que satisfacen estas características esenciales, y la posibilidad de que algunos de los presentados no se incluya en el concepto.					
Utilizar una denominación verbal para nombrar la clase de todos los objetos que cumplen las propiedades esenciales, y realizar la definición científica del concepto correspondiente a la clase de propiedades seleccionada.					

- b. Proceso de desarrollo

	¿Se han realizado	¿Considera	Observación
--	-------------------	------------	-------------

Acción	en clases de	de	que debe realizarse?		
	Matemática?		Sí	No	
	Sí / ejemplo	No	Sí	No	
Obtener condiciones necesarias del concepto.					
Obtener condiciones suficientes del concepto.					
Obtener caracterizaciones del concepto definido.					
Realizar el estudio de las propiedades que cumplen representantes del concepto con determinadas operaciones.					
Ampliar la cantidad clase de elementos conocidos.					
Establecer comparaciones entre los representantes del concepto con los representantes de otros conceptos.					
Construir esquemas donde se relacionen la colección de representantes del concepto con la colección de representantes de otros conceptos					
Determinar objetos límite y casos especiales del concepto en estudio.					
Realizar aplicaciones importantes del concepto en problemas intramatemáticos y extramatemáticos.					
Ampliar los significados del concepto.					
Ejercitar a los estudiantes en las técnicas de demostración para ampliar las propiedades del concepto, utilizando para ellos las caracterizaciones más adecuadas.					

c. Proceso de generalización

Acción	¿Se han realizado en clases de Matemática?		¿Considera que debe realizarse?		Observación
	Sí ejemplo	No	Sí	No	
Preparar el concepto para su generalización.					
Realizar generalizaciones del concepto.					
Establecer criterios para valorar la calidad de las generalizaciones hechas.					

3) ¿Qué acciones de obtención, demostración, valoración y aplicación de los teoremas se han realizado durante el tratamiento de teoremas y cuáles considera que deben hacerse? Ejemplifique los que considere pertinentes.

a. Proceso de obtención

Acción	¿Se han realizado en clases de Matemática?		¿Considera que debe realizarse?		Observación
	Sí / ejemplo	No	Sí	No	
Preparar el camino para la obtención del teorema	La motivación para la misma.				
	La visualización geométrica del resultado que se pretende enunciar.				
	La realización de preguntas cuyas respuestas permiten la obtención de resultados parciales que				

en su conjunto conducen a la formulación del teorema como tal.					
--	--	--	--	--	--

b. Proceso de demostración

Acción	¿Se han realizado en clases de Matemática?		¿Considera que debe realizarse?		Observación
	Sí / ejemplo	No	Sí	No	
Realizar la demostración de la mayoría de los teoremas que ofrecen estrategias de trabajo generales, y las que no puedan hacerse en clases por presupuesto de tiempo, entonces orientarlas como estudio independiente para ser posteriormente controladas, preferiblemente en seminarios.					
Preparar el camino para la demostración	La motivación para la misma.				
	La determinación de las hipótesis y las tesis.				
	La elección del método de demostración más adecuado.				
	La elaboración del plan de demostración.				
	La ejecución del plan.				
Durante la ejecución del plan, dejar claras los pasos lógicos que se utilizan, así como los recursos auxiliares que se emplean.					
Llevar a cabo un tratamiento óptimo del error que cometen los estudiantes.					

c. Proceso de valoración de la calidad del teorema obtenido.

Acción	¿Se han realizado en de clases Matemática?		¿Considera que debe realizarse?		Observación
	Sí / ejemplo	No	Sí	No	
Relacionar más de una vía de demostración en aquellos teoremas factibles para ello.					
Valorar validez de recíprocos, poner contraejemplos, mencionar condiciones necesarias, suficientes o caracterizaciones.					
Valorar posibilidades de empleo en contenidos venideros.					
Reproducir las demostraciones definidas en el programa como básicas.					

d. Proceso de aplicación del teorema

Acción	¿Se han realizado en clases de Matemática?		¿Considera que debe realizarse?		Observación
	Sí / ejemplo	No	Sí	No	
Los alumnos son capaces de identificar cuál teorema debe aplicarse en determinados pasos de la solución de algunos problemas.					

Cuando identifican el teorema que debe usarse, este se emplea correctamente.					
--	--	--	--	--	--

- 4) ¿De qué manera ha sido evaluado el aprendizaje de los conceptos y teoremas tratados? En las pruebas que se han aplicado, ¿qué tipos de preguntas relativas a los conceptos se han puesto (reproductivas, memorísticas, de aplicación de conceptos, de establecimiento de relaciones con otros conceptos, de análisis de propiedades de los conceptos, de valoración sobre la pertenencia o no de un objeto a representantes del concepto que se evalúa, de significados del concepto, de elaboración o interpretación de esquemas, etc)? Ejemplifique.
- 5) Al realizar acciones relativas al tratamiento de los conceptos y teoremas de la asignatura, ¿ha predominado el trabajo independiente de los alumnos, el trabajo cooperativo con los demás alumnos bajo la guía del profesor, o el intercambio y la elaboración conjunta con el profesor? ¿de qué manera se ha llevado a cabo el trabajo cooperativo?
- 6) Cuando los alumnos cometen errores en la realización de alguna tarea relativa al tratamiento de un concepto o un teorema, ¿cómo se han subsanado los mismos?

**Datos del encuestado:** Año / Carrera que estudia:\_\_\_\_\_

Muchas gracias por su colaboración, y un saludo del Licenciado Juca Martins Celestino Sachipia y de los Doctores en Ciencias Antonio Martínez Fonseca y José Enrique Martínez Serra.

Febrero de 2010

### **Anexo # 3 Encuesta a profesores: Sobre Resolución de Problemas:**

Compañero profesor:

Nosotros formamos parte del proyecto de investigación de Matemática Educativa de la UCLV. Conscientes de su alta profesionalidad y maestría en el ejercicio de la docencia y en el trabajo investigativo, consideramos que su ayuda en las valoraciones de algunos aspectos para nuestra investigación nos sería de gran utilidad. Por tal motivo le pedimos nos responda, con el ánimo de ayudarnos, la encuesta siguiente:

#### **Encuesta:**

Valore las afirmaciones que enunciamos a continuación utilizando la simbología siguiente: **1:** En ninguna medida. **2:** En cierta medida. **3:** En gran medida. **4:** Completamente.

1. La resolución de problemas en forma general:
  - a) Es de dominio de todos los profesores. \_\_\_\_\_
  - b) Se adecua al estudio de la Matemática en el nivel superior. \_\_\_\_\_
  - c) Está presente en todos los programas de las diferentes asignaturas. \_\_\_\_\_
2. La introducción de temas específicos con problemas básicos a resolver en cada asignatura:
  - a) Está presente en los planes de cada disciplina de los ISCDE. \_\_\_\_\_
  - b) Orienta al profesor a la hora de organizar los contenidos. \_\_\_\_\_
  - c) Contribuye a entender mejor los contenidos por parte de los alumnos. \_\_\_\_\_
3. El programa de una asignatura específica "Práctica y Resolución de Ejercicios y Problemas" :
  - a) Resuelve todas las deficiencias que presentan los estudiantes en este aspecto. \_\_\_\_\_
  - b) Es la única vía para enseñar a resolver problemas. \_\_\_\_\_
  - c) El que existe, tiene la calidad requerida para cumplir el objetivo para el que se propone. \_\_\_\_\_

**Datos del encuestado:** Categoría Científica: \_\_\_\_\_ Categoría Docente: \_\_\_\_\_  
experiencia como profesor: \_\_\_\_\_.

Años de

Muchas gracias por su colaboración, y un saludo del Licenciado Juca Martins Celestino Sachipia y de los Doctores en Ciencias Antonio Martínez Fonseca y José Enrique Martínez Serra

Octubre de 2009

## **Anexo # 4. PROGRAMA DE LA DISCIPLINA ANÁLISIS MATEMÁTICO**

TOTAL DE HORAS: 336 h

Asignaturas	Horas
Análisis Matemático I	112
Análisis Matemático II	112
Análisis Matemático III	112

### **FUNDAMENTACIÓN DE LA DISCIPLINA**

Las exigencias actuales en relación con el nivel profesional que debe poseer un docente, encargado de la educación en el nivel medio básico y medio superior, condicionan su formación a la necesidad de garantizar que este sea capaz, entre otros muchos aspectos, de realizar dicha educación a través de una instrucción científicamente fundamentada, en correspondencia con las condiciones socioeconómicas en que vive.

El mundo en que vivimos, debido al desarrollo actual, interpreta, valora, representa y predice los fenómenos y procesos que en él se manifiestan o se pueden manifestar a través de modelos matemáticos que se describen a través de funciones. El límite, la continuidad, la derivación y la integración de funciones reales de una variable real constituyen el contenido básico inicial que lo posibilitan en muchos casos. El desarrollo alcanzado por la humanidad, cada vez sitúa al hombre más cerca de conocer a cabalidad la realidad que le rodea, donde los fenómenos que ocurren y se estudian tienen un carácter multifactorial. La extensión a las funciones de dos variables reales del límite, la continuidad, la derivación y la integración de funciones, así como la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer y segundo orden, además de constituir una sistematización de éstos en una variable, como contenido escolar, posibilitan una mayor comprensión por el profesional de los fenómenos y procesos de la realidad, lo que contribuye a su cultura general.

Por otra parte, en virtud de la importancia de los métodos numéricos para la solución aproximada de problemas y para la actividad experimental de la física, se hace necesario abordar algunos de ellos en la formación del profesor que enseñe Matemática, tanto para ampliar su visión acerca de la naturaleza de la matemática y de los recursos que esta dispone, como por razones de su relevancia para su formación profesional.

Por ello la propuesta de estos contenidos para conformar la disciplina Análisis Matemático para la formación de un profesor de la enseñanza media básica y media superior, que enseñe Matemática, es una necesidad.

En resumen, este programa debe coadyuvar a la formación integral y profesional de los estudiantes, en especial, al desarrollo de un modo de actuación profesional pedagógico a través de las diferentes formas organizacionales del proceso educativo, al sistematizar y profundizar los contenidos esenciales de la matemática escolar y en particular los relativos al límite, la continuidad, la derivación, la integración de funciones reales de una variable real y la resolución de los diferentes tipos de ecuaciones y vincular la Matemática con la vida y otras disciplinas, a través de la modelación de problemas cuya resolución se apoye en los recursos informáticos.

### **OJETIVOS GENERALES**

Los estudiantes deben ser capaces de:

- Asumir una concepción científica del mundo fundamentada en el materialismo dialéctico e histórico al valorar el papel de los métodos del Análisis Matemático en el proceso de construcción de la Matemática como ciencia.
- Identificar, formular y resolver problemas, a partir de establecer relaciones de dependencia entre magnitudes variables con abstracción de su contenido, para modelar situaciones problemáticas a través del límite, la continuidad, la derivación, la integración y la resolución de ecuaciones



diferenciales de primer y segundo orden y en las que en su resolución utilicen métodos exactos y/o aproximados.

- ❑ Desarrollar, a través del aprendizaje del Análisis Matemático, una cultura matemática y formas de pensar y actuar, sustentadas en la utilización de procesos de pensamiento, métodos, enfoques interdisciplinarios, procedimientos y estrategias, tanto cognitivas como metacognitivas, y una conducta en correspondencia con los principios y normas de la ética profesional pedagógica.
- ❑ Aprender, a través del aprendizaje del Análisis Matemático, a elevar de manera permanente su preparación cultural, sobre la base del desarrollo científico-técnico, y en correspondencia con los problemas sociales, económicos y políticos que acontecen en el mundo en general, en América Latina y en Cuba en particular.
- ❑ Demostrar una actitud crítica y autocrítica a través del aprendizaje del Análisis Matemático en particular en el análisis de los problemas y en la búsqueda de las posibles alternativas de solución, manteniendo un compromiso pleno con su labor, expresado en una actitud creadora y transformadora.
- ❑ Comunicarse de forma clara y precisa con la ayuda de la terminología y simbología matemáticas de manera oral, escrita y/o visual.
- ❑ Utilizar el inglés como lengua extranjera, en la consulta bibliográfica sobre el Análisis Matemático.

## **CONTENIDOS DE LA DISCIPLINA:**

### **CONOCIMIENTOS ESENCIALES:**

#### **Análisis Matemático I**

Función real de variable real. Propiedades de las funciones: dominio, imagen, ceros, inyectividad, sobreyectividad, biyectividad, signos, monotonía, dilatación, contracción, reflexión, traslación, paridad, polo, periodicidad. Operaciones con funciones. Función compuesta e inversa.

Sucesión numérica. Operaciones. Sucesiones acotadas. Propiedades. Convergencia. Sucesiones infinitesimales. Sucesiones infinitamente grandes. Propiedades de las sucesiones convergentes. Encajamientos. Sucesiones monótonas. Caracterización de los puntos de adherencia y de acumulación. Subsucesiones. Sucesión de Cauchy.

Series numéricas. Convergencia. Propiedades. Condición de convergencia. Propiedades de las series convergentes. Series de términos positivos. Criterios de convergencia.

El principio de inducción completa. El método de demostración por inducción completa. Etapas del método de demostración.

Aproximar una variable a un número y aproximar los valores funcionales a un valor: punto de acumulación de un conjunto. Límite de una función en un punto. Caracterizaciones. Interpretación geométrica. Operaciones. Límites laterales. Límite al infinito y en el infinito. Comparación de funciones y cálculo de límites mediante el uso de equivalentes.

Función continua en un punto. Caracterizaciones. Interpretación geométrica. Operaciones. Tipos de discontinuidades. Continuidad lateral. Continuidad de las funciones elementales. Propiedades locales de las funciones continuas. Propiedades de las funciones continuas en un intervalo.

Derivada. Interpretación geométrica y física. Derivadas laterales e infinitas. Derivadas de las funciones elementales. Reglas de derivación. Diferencial. Relación entre continuidad y derivabilidad. Derivada de una función compuesta. Derivada de la inversa. Derivada de funciones definidas en forma paramétrica. Derivadas y diferenciales de orden superior.

Teoremas básicos de cálculo diferencial: Fermat, Rolle, Lagrange, Cauchy. Problemas de optimización. Regla de L'Hospital. Extremos relativos. Monotonía. Puntos de inflexión. Convexidad. Asíntotas. Construcción de gráficos. Serie de funciones. Serie de potencias. Fórmula y serie de Taylor.

### **Análisis Matemático II**

Primitiva de una función. Propiedades. Integral indefinida. Métodos de integración. Función integrable Riemann. Integral definida. Condición necesaria y suficiente de integrabilidad. Clases de funciones Riemann integrables. Propiedades de las funciones integrables. Teoremas fundamentales: Valor medio, Primer y Segundo teorema fundamental. Métodos de integración.

Determinación de áreas de figuras planas. Determinación del volumen de cuerpos sólidos. Determinación de la longitud de un arco de curva. Integral impropia. Criterios de convergencia. Criterio integral para determinar el carácter de una serie.

Funciones de dos variables (escalar y vectorial). Superficies. Distancia y norma euclidiana. Conjunto abierto y cerrado. Vecindades y puntos de acumulación en  $\mathbb{R}^2$ . Sucesiones en  $\mathbb{R}^2$ . Sucesiones convergentes. Sucesiones coordenadas. Límite de una función en  $\mathbb{R}^2$ . Acotabilidad. Unicidad. Operaciones. Límites parciales. Límites iterados y según un camino. Continuidad de una función en un punto y en un conjunto de  $\mathbb{R}^2$ . Operaciones.

Derivada direccional. Derivadas parciales. Diferencial. Unicidad. Relación de la diferenciabilidad en un punto y la existencia de la derivada direccional y las parciales en dicho punto. Diferenciabilidad y continuidad. Condición suficiente de diferenciabilidad. Gradiente. Derivadas de orden superior. Derivación de funciones compuestas (Regla de la Cadena). Derivación implícita. Extremos. Puntos estacionarios, de ensilladura, máximos y mínimos.

### **Análisis Matemático III**

Integral doble de una función acotada sobre un rectángulo y sobre regiones acotadas. Condiciones de integrabilidad. Propiedades. Cambio de variables. Integral triple. Cálculo de áreas y volúmenes. Integral a lo largo de un camino. Relación con la integral doble.

Series de funciones. Series de Fourier.

### **HABILIDADES PRINCIPALES:**

Se proponen desarrollar las habilidades siguientes: interpretar, identificar, recodificar, graficar, algoritmizar, calcular, definir, demostrar, clasificar, comparar, construir funciones, aproximar, modelar, aplicar, seleccionar, controlar, valorar, resolver ecuaciones diferenciales y resolver problemas.

### **VALORES FUNDAMENTALES A LOS QUE TRIBUTA:**

La disciplina contribuye a la formación en valores como: honradez, honestidad, laboriosidad, incondicionalidad, responsabilidad, patriotismo; y de normas de comportamiento ciudadano que les permiten no sólo instruir con sólidos argumentos, sino educar con el ejemplo como activos y comprometidos participantes de obra de nuestro pueblo.

### **INDICACIONES METODOLÓGICAS GENERALES PARA SU ORGANIZACIÓN**

El uso de la computadora estará dirigido a varias intenciones: usar los paquetes matemáticos para ir de unas formas de representar una función a otra, por ejemplo, de una representación analítica a gráfica o tabular, y poder determinar diferentes escalas para analizar su comportamiento; para calcular; para la utilización de páginas WEB que aborden el contenido del Análisis, entre otras. En el uso de paquetes informáticos se sugiere usar DERIVE y EXCEL.

Para la mejor dirección del proceso y en función de contribuir a un modo de actuación profesional pedagógico en los estudiantes se deberá atender a lo siguiente:

- La actividad docente propiciará que los estudiantes puedan formular preguntas y que tengan tiempo para reflexionar. Los impulsos que se proporcionen deben garantizar la actividad reflexiva, la comprensión y el intercambio de los modos y estrategias generales de pensamiento.
- Los sistemas tanto teóricos como procedimentales deben ser organizados para su enseñanza utilizando las referencias: condiciones necesarias y condiciones suficientes, así como los procedimientos asociados a estas definiciones, teoremas, métodos y propiedades. De tal forma que se desarrolle la estrategia de que ante una exigencia a resolver, hay que asociar todo el sistema teórico vinculado a esta exigencia y determinar qué es necesario aplicar para satisfacerla y cuáles son los procedimientos que corresponden utilizar.
- En la ejercitación se utilizarán exigencias que pidan probar que se cumple una definición, teorema o propiedad para casos particulares; de igual forma ejercicios cuya exigencia pida probar que no se cumple para casos particulares una definición, teorema o propiedad, así como ejercicios donde intervengan parámetros cuyos valores sean condicionantes del cumplimiento o no de la definición, teorema o propiedad. Esta trilogía de ejercicios garantiza en el Cálculo la generalización de las diferentes habilidades, lo que posibilita la solidez en el aprendizaje.
- Los estudiantes tendrán las posibilidades de explicar sus ideas unos a otros, a pequeños grupos o a la totalidad del aula, de forma completa y no con monosílabos.
- Se utilizarán los errores de los estudiantes como vía para indagar sus causas, no se debe desestimar lo que dicen y se debe estimular la evaluación individual y colectiva.
- La evaluación será vista inmersa en el proceso, continua, que promueva la discusión de alternativas y procedimientos para la solución de tareas docentes, con el empleo de la crítica y la autocrítica como método habitual para la evaluación de los compañeros, y la propia autoevaluación como objetivo final.
- Las tareas garantizarán que los estudiantes elaboren resúmenes y esquemas o determinen los conocimientos y habilidades particulares, y los modos y estrategias generales de pensamiento que les han sido útiles en la resolución de un ejercicio.
- La planificación, orientación y el control del estudio independiente de forma sistémica, variada y diferenciada, estimulan su independencia y creatividad, para que los estudiantes comprendan el significado de los conceptos tratados y las relaciones entre ellos, y desarrollen habilidades para la lectura, la búsqueda de información, la interpretación de diversas fuentes y la argumentación y comunicación de sus ideas mediante la utilización de la informática.
- Es importante incorporar ideas para desarrollar habilidades en el procesamiento y análisis de información de datos, confección de mapas conceptuales y resúmenes mediante el paquete Office.

## **BIBLIOGRAFÍA**

### **BÁSICA:**

#### **Textos Básicos**

1. Análisis Matemático. Tomo I. Fernando Borjas Santos, Editorial Porto, 1980.
2. Análisis Matemático. Tomos II. Fernando Borjas Santos, Editorial Porto, 1982.
3. Análisis Matemático. Tomos III. Fernando Borjas Santos, Editorial Porto, 1983.
4. Curso de Análisis Matemático. Tomos I y II. L. D. Kudriatsev, Editorial Mir, 1984.
5. Curso de Matemáticas Superiores para ingenieros. Tomos I y II. M. Krasnov y otros. Editorial Mir, 1990.

#### **Textos complementarios**

6. Análisis Matemático I, Carlos Sánchez Fernández, Editorial Pueblo y Educación, 1982.

7. Análisis Matemático II, Concepción Valdés Castro, Editorial Pueblo y Educación, 1983.
8. Análisis Matemático III. José Luis Fernández Muñiz, Graciela de la Torre Moiné. Editorial Pueblo y Educación. 1982.
9. Análisis Matemático IV. José Luis Fernández Muñiz y Graciella de la Torre Molné. Editorial Pueblo y Educación. 1984.
10. Análisis Matemático V. José Luis Fernández Muñiz y Graciella de la Torre Molné. Editorial Pueblo y Educación. 1984.
11. Cálculo infinitesimal. Michael Spivak. Tomos I y II. Edición Revolucionaria. Ciudad Habana.1989.
12. Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático. B Demidovich. Editorial MIR. 1977.
13. Calculus. Tom M. Apostol. Volumen 1 y 2 . Editorial Reverté. 1973.
14. The Fundamentals of Mathematical Analysis. Volume 1. G.M. Fikhtengol'ts
15. The Fundamentals of Mathematical Analysis. Volume 2. G.M. Fikhtengol'ts
16. Libros de texto de Matemática para la Educación Media Superior

## **Anexo # 5. Programa de la asignatura Análisis Matemático - I**

### **OBJETIVOS INSTRUCTIVOS DE LA ASIGNATURA**

1. Expresar las proposiciones que caracterizan al conjunto de los números reales, en especial la propiedad de continuidad mediante el axioma de los intervalos encajados o de la existencia del supremo o ínfimo de un conjunto acotado.
2. Conocer el surgimiento y desarrollo de los conceptos de límite y derivada como necesidad generalizadora de diferentes situaciones geométricas y físicas.
3. Definir y utilizar los conceptos de función, función compuesta y función inversa, así como las funciones elementales.
4. Enunciar e interpretar los conceptos de límite de una sucesión numérica o de una función real de una variable real, así como formular y demostrar propiedades de los mismos.
5. Calcular límites de sucesiones numéricas y de funciones elementales incluyendo casos indeterminados.
6. Enunciar e interpretar el concepto de continuidad de una función en un punto o en un intervalo, así como analizar y determinar la continuidad de ciertas funciones.
7. Enunciar y demostrar las proposiciones que dependen de la continuidad de una función en un punto o en un intervalo.
8. Definir e interpretar geoméricamente el concepto de derivada así como enunciar y demostrar sus propiedades. Además, calcular derivadas de funciones expresadas mediante las funciones elementales.
9. Enunciar, demostrar y aplicar los teoremas básicos del cálculo diferencial que permiten estudiar el comportamiento de una función mediante sus derivadas sucesivas.
10. Hacer uso de programas (Matemática, Derive) para realizar cálculos de límites, derivadas y realización de gráficos relacionados con los contenidos de la asignatura.

### **I. CONTENIDO DE LA ASIGNATURA**

#### **SISTEMA DE CONOCIMIENTOS:**

Métodos fundamentales de demostración. Conjuntos numéricos. Representación decimal de números reales. Acotación de conjuntos de números reales. Puntos de acumulación de conjuntos de números reales.

Sucesiones numéricas. Sucesiones convergentes y divergentes. Sucesiones monótonas. Propiedades de las sucesiones convergentes. Relación entre punto de acumulación y Límite de sucesiones. Subsecuencias. Criterio de Bolzano-Cauchy. Series numéricas. Suma de una serie. Series convergentes y divergentes. Propiedades de las series convergentes.

Funciones reales de variable real. Funciones inversa y función compuesta. Funciones elementales. Límite de funciones. Continuidad de una función. Propiedades del límite de una función y de las funciones continuas. Clasificación de las discontinuidades. Propiedades de las funciones continuas en un punto y en un intervalo.

Derivada y diferencial de una función en un punto. Funciones derivables. Derivadas de orden superior. Teoremas básicos del cálculo diferencial. Fórmula de Taylor. Extremos relativos y absolutos de una función. Resolución de indeterminaciones. Análisis del crecimiento y de la convexidad de una función. Asíntotas a una curva. Determinación de asíntotas al gráfico de una función real de variable real.

#### **SISTEMA DE HABILIDADES:**

Utilización de los sistemas de prueba fundamentales. Determinación del supremo, ínfimo y puntos de acumulación de conjuntos de números reales.

Análisis de la convergencia de sucesiones. Resolución de límites indeterminados. Uso de la monotonía para el análisis de la convergencia. Uso del criterio de Bolzano-Cauchy. Análisis de la convergencia de series numéricas.

Determinaciones del dominio máximo de una fórmula matemática y de las propiedades de las funciones vinculadas con ella. Cálculo de Límite de funciones elementales.

Resolución de límites indeterminados. Análisis de la continuidad de funciones expresadas mediante funciones elementales. Clasificación de los puntos de discontinuidad. Aplicación de las propiedades de las funciones continuas en la demostración de algunas propiedades sencillas y en la construcción de algoritmos de cálculo simples.

Cálculo de derivadas y diferenciales de funciones dadas a través de funciones elementales. Aplicación del cálculo de derivadas para el análisis del comportamiento de una función de variable real y el trazado de gráfico aproximado de la misma. Determinación del polinomio de Taylor de una función. Acotación del resto. Aplicaciones de la fórmula de Taylor. Resolución de problemas de optimización que pueden reducirse al cálculo de los extremos de una función de una variable real.

### Dosificación de clases del Análisis Matemático - I

<b>DOSIFICACIÓN DE CLASES</b>			
<b>Licenciatura en Educación, especialidad Matemática</b>			
<b>Asignatura: Análisis Matemático I</b>			
<b>Jefe de asignatura: Juca Martins Celestino Sachipia</b>			
<b>Total de horas: 112 horas. Primer semestre</b>			
<b>Sem</b>	<b>Act</b>	<b>F. Doc</b>	<b>Contenido</b>
1	1.	$C_1$	Conjuntos numéricos. Inducción matemática. Conjuntos acotados. Axioma del supremo. Valor absoluto. Propiedades. Punto de acumulación.
	2.	$CP_1$	Sobre conferencia 1
	3.	$CP_2$	Sobre conferencia 1
2	4.	$C_2$	Sucesiones numéricas. Definición. Tipos. Operaciones. Sucesiones acotadas. Sucesiones infinitesimales e infinitamente grandes.
	5.	$CP_4$	Sobre conferencia 2
	6.	$CP_5$	Sobre conferencia 2
3	7.	$C_3$	Sucesión convergente. Propiedades de las sucesiones convergentes. Formas indeterminadas. Sucesiones monótonas. El número e. Punto de acumulación. Criterio de Bolzano Cauchy.
	8.	$CP_6$	Sobre conferencia 3
	9.	$CP_7$	Sobre conferencia 3
4	10.	$C_4$	Series numéricas. Definición y tipos de series. Propiedades generales de las series numéricas. Condición necesaria de convergencia. (Orientación seminario # 1)
	11.	$L_1$	Sobre conjuntos numéricos y sucesiones.
	12.	$E_1$	Prueba Parcial # 1: Sobre conjuntos numéricos y sucesiones.

5	13.	$C_5$	Criterios de convergencia de series de términos positivos y de series alternadas.
	14.	$CP_8$	Sobre conferencias 4 y 5
	15.	$CP_9$	Sobre conferencia 5
	16.	$S_1$	Sobre conferencias 4 y 5
6	17.	$C_6$	Concepto de función. Operaciones con funciones. Funciones algebraicas y trascendentes. Funciones elementales básicas.
	18.	$CP_{10}$	Sobre conferencia 6
	19.	$CP_{11}$	Sobre conferencia 6
7	20.	$C_7$	Función acotada, inyectiva, sobreyectiva, biyectiva, inversa de una función. (Orientación seminario # 2)
	21.	$CP_{12}$	Sobre conferencia 7
	22.	$CP_{13}$	Sobre conferencia 7
8	23.	$C_8$	Límite de una función. Operaciones con límites.
	24.	$CP_{14}$	Sobre conferencia 8
	25.	$CP_{15}$	Sobre conferencia 8
9	26.	$C_9$	Límites por equivalentes
	27.	$CP_{16}$	Sobre conferencia 9
	28.	$CP_{17}$	Sobre conferencia 9
	29.	$S_2$	Sobre conferencias 7, 8 y 9
10	30.	$C_{10}$	Continuidad de funciones reales. Clasificación de discontinuidades.
	31.	$CP_{18}$	Sobre conferencia 10
	32.	$E_2$	Prueba Parcial 2 Sobre funciones, límite y continuidad
11	33.	$C_{11}$	<i>Derivada de una función real de una variable real. Problemas que conducen al concepto. Velocidad instantánea, tangente a una curva. Derivadas laterales. Derivadas infinitas.</i>
	34.	$CP_{19}$	<i>Sobre conferencia 11</i>
	35.	$CP_{20}$	<i>Sobre conferencia 11</i>
12	36.	$C_{12}$	<i>Reglas de derivación. Diferencial. Aplicaciones del diferencial</i>
	37.	$CP_{21}$	<i>Sobre conferencia 12</i>
	38.	$CP_{22}$	<i>Sobre conferencia 12</i>
13	39.	$C_{13}$	<i>Derivada de las funciones compuestas e inversa. Derivada de funciones dadas paramétricamente. Derivadas y diferenciales de orden superior.</i>
	40.	$CP_{23}$	<i>Sobre conferencia 13</i>
	41.	$CP_{24}$	<i>Sobre conferencia 13</i>
14	42.	$C_{14}$	<i>Teoremas básicos del cálculo diferencial. Problemas de extremos. Teorema de Rolle y Lagrange. Problemas de optimización y razón de cambio.</i>
	43.	$CP_{25}$	<i>Sobre conferencia 14</i>

	44.	$CP_{26}$	Sobre conferencia 14
15	45.	$C_{15}$	Teorema de Cauchy. Regla de L' Hopital. Polinomio y serie de Taylor (Se orienta el seminario # 3)
	46.	$CP_{27}$	Sobre conferencia 14
	47.	$CP_{28}$	Sobre conferencia 15
	48.	$S_3$	Sobre fórmula y serie de Taylor
16	49.	$C_{16}$	Extremos relativos de una función.
	50.	$CP_{29}$	Sobre conferencia 1
	51.	$CP_{30}$	Sobre conferencia 1
	52.	$E_3$	Prueba Parcial # 3 Sobre cálculo diferencial de funciones
17	53.	$C_{17}$	Convexidad y punto de inflexión del gráfico de una función. Asíntotas. Esquema para la discusión del gráfico de funciones.
	54.	$CP_{31}$	Sobre conferencia 5
	55.	$CP_{32}$	Sobre conferencia 5
	56.	$L_2$	Sobre aplicaciones de la derivada (fórmula de Taylor y discusión de curvas)

## BIBLIOGRAFÍA

### Textos Básicos

1. Análisis Matemático. Tomo I. Fernando Borjas Santos, Editorial Porto, 1980.
2. Curso de Análisis Matemático. Tomo I. L. D. Kudriatsev, Editorial Mir, 1984.
3. Curso de Matemáticas Superiores para ingenieros. Tomo I. M. Krasnov y otros. Editorial Mir, 1990.

### Textos complementarios

4. Análisis Matemático I, Carlos Sánchez Fernández, Editorial Pueblo y Educación, 1982.
5. Análisis Matemático II, Concepción Valdés Castro, Editorial Pueblo y Educación, 1983.
6. Cálculo infinitesimal. Michael Spivak. Tomo I. Edición Revolucionaria. Ciudad Habana.1989.
7. Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático. B Demidovich. Editorial MIR. 1977.
8. Calculus. Tom M. Apostol. Volumen 1. Editorial Reverté. 1973.

**Anexo # 6 (Ver folleto aparte) Sistema de Clases relativo al tema “Cálculo Diferencial de funciones reales”.**



## **Anexo # 7 Material de Consulta a expertos**

### **Estimado profesor:**

Se dirige a usted el Lic. Juca Martins Celestino Sachipia, procedente del Instituto Superior de Ciencias de la Educación de Huambo (ISCED), Angola, cursante de la Maestría en Matemática Aplicada de la Universidad Central de Las Villas, Cuba (UCLV) y miembro del proyecto de investigación "Perfeccionamiento de la Didáctica de la Matemática Superior" de dicha universidad.

En la enseñanza de la Matemática Superior constantemente se nos presentan deficiencias en la comprensión de diferentes contenidos de esta ciencia por parte de nuestros estudiantes, tenemos la opinión de que el tratamiento de conceptos y teoremas transcurre por varios procesos en los cuales el profesor debe plantearse acciones conscientes para que estos transcurran de forma que conduzcan a un aprendizaje activo, mediado y significativo por los estudiantes, en lo que la resolución de problemas enfocada en tres direcciones: como motivación, como vía para introducir los contenidos y como instrumento de aplicación práctica de los diferentes conceptos y teoremas puede contribuir de manera favorable.

Conscientes de su alta profesionalidad y maestría en el ejercicio de la docencia y en el trabajo investigativo, consideramos que puede fungir como evaluador externo de nuestra propuesta didáctica, siguiendo las indicaciones del fichero "Consulta a expertos", y apoyándose en el fichero "Folleto didáctico", contenedor de las principales acciones aplicadas al tema Cálculo Diferencial de funciones reales.

Le rogamos nos conteste la tabla valorativa contenida en el primer fichero, en el menor tiempo posible, con el ánimo de elaborar el informe final de la tesis.

De antemano, Muchas Gracias por su colaboración.

## CONSULTA A EXPERTOS

### Índice

Aspecto	Pag
<b>§1. Diseño de la investigación</b>	
<b>§2. Establecimiento del sistema de acciones</b>	
<b>§3. Propuesta de implementación de la estrategia</b>	
<b>§4. Planificación del control de la implementación del sistema de acciones</b>	
<b>§5. Consulta a los expertos</b>	
<b>§6. Autovaloración acerca de su competencia como experto sobre el tema consultado</b>	
<b>§7. Autovaloración acerca de las fuentes que le permiten argumentar sus criterios</b>	
<b>§8. Datos generales del experto</b>	
<b>§9. Otras consideraciones</b>	

## §1. Diseño de la investigación.

Según la literatura consultada, los resultados obtenidos durante seis años de ejercicio de la docencia de la Matemática por el autor a alumnos de la carrera Licenciatura en Educación, especialidad Matemática, la experiencia pedagógica transmitida por profesores cubanos durante misiones educativas en Angola y en el postgrado impartido en Cuba a cursantes angolanos, hemos podido constatar, sobre la relación resolución de problemas – tratamiento de conceptos – tratamiento de teoremas – aprendizaje activo – aprendizaje significativo en el PEA del Análisis Matemático, los resultados siguientes:

- Sobre los procesos que intervienen en el tratamiento de conceptos:
  - Son muchos los conceptos de varios temas de la disciplina Análisis Matemático, que pueden ser formados mediante el proceso de comparación de objetos particulares (vía inductiva), sin embargo esto no se hace. En la mayoría de los casos, el tratamiento conceptual parte de su definición; esto se debe, principalmente, al presupuesto de tiempo. No obstante, los estudiantes deben conocer el proceso de formación inductivo, por lo que resulta necesario implementarlo con algunos conceptos a partir de la resolución de problemas.
  - Dada la naturaleza abstracta de los objetos y la infinitud de la extensión de los conceptos matemáticos que se tratan en esta carrera, no existe motivación para establecer su comparación y no se emplean problemas adecuados para lograr esto.
  - Los estudiantes no son conducidos a la determinación de los rasgos esenciales y no realizan, el proceso de abstracción de rasgos no esenciales; no tienen conciencia del proceso de síntesis de los rasgos esenciales y de su consideración en un determinado conjunto (el contenido).
  - No existe un conocimiento acabado sobre aspectos esenciales relativos al trabajo con conceptos como son: en qué consisten los procesos en que se subdivide el tratamiento conceptual (formación, desarrollo y generalización), cuáles son las características lógicas del concepto (contenido y extensión), cuáles son las operaciones lógicas que se pueden realizar con conceptos (definición, clasificación, generalización), etc.
  - Durante los procesos de desarrollo y generalización conceptual, no se llevan a cabo suficientes acciones que traigan consigo un conocimiento más acabado del concepto en estudio.
- Sobre el tratamiento de teoremas:
  - No existe una preparación del camino de obtención del teorema.
  - Muchas veces, por presupuestos de tiempo, no se realiza la demostración del teorema, y cuando se hace, no se lleva a cabo una preparación para su demostración, que incluye la motivación para la misma, la determinación de las hipótesis y las tesis, la elección del método de demostración más adecuado, la elaboración del plan de demostración.
  - Durante la ejecución del plan, no se dejan claras las reglas de inferencias que se utilizan, ni los principios, reglas y estrategias heurísticas que se emplean.

- No se lleva a cabo un tratamiento óptimo de explotación del error que cometen los estudiantes
- No se analizan las condiciones perspectivas y retrospectivas del mismo.
- En ocasiones, la articulación entre los conocimientos que tiene el estudiante con los nuevos no se lleva a cabo significativamente, pues no se emplean adecuados organizadores (como mapas de extensiones, de contenidos, diagramas) encaminados a modificar las estructuras mentales de los estudiantes que permitan organizar el contenido en estructuras relacionadas más fáciles de recordar a largo plazo, salvo el olvido de aspectos secundarios.
- Muchas veces no se logra la necesaria motivación intrínseca en los alumnos y por ende, la actitud de aprendizaje significativo para abordar situaciones de aprendizaje, por medio de la resolución de problemas cercanos a los intereses del futuro profesor de Matemáticas, que traigan consigo una implicación afectiva del alumno, lo que da al traste con que solo se esfuercen en su estudio para salir bien en las evaluaciones de las asignaturas.
- El sistema de evaluación generalmente está encaminado a la reproducción de contenidos aprendidos por medio de evaluaciones orales y escritas (frecuentes, parciales y finales), priorizando la función sumativa de la misma y no a la realización de la evaluación formativa, suscitando escenarios de autoevaluación y coevaluación, no solo de contenidos, sino de la calidad de los procesos que han intervenido en el aprendizaje.

Estas deficiencias se manifiestan, entre otros aspectos, debido a que en el proceso de formación de los profesores de Matemática en el Instituto Superior de Ciencias de la Educación (ISCED) de Huambo en la República de Angola no se ha implementado un sistema de superación que conduzca, de manera efectiva la necesaria relación que debe existir entre el empleo de la resolución de problemas, el tratamiento de conceptos, el tratamiento de teoremas y el aprendizaje significativo en el PEA de las disciplinas matemáticas en general y del Análisis Matemático en particular.

Por todo lo antes expuesto, se ha podido constatar la existencia del siguiente problema científico:

**Problema Científico:** ¿Cómo puede perfeccionarse el proceso de enseñanza aprendizaje de la disciplina Análisis Matemático en la carrera Licenciatura en Ciencias de la Educación, especialidad de Matemática del ISCED-HBO?

Por tanto la presente investigación tiene como **objeto de estudio:** “El Proceso de Enseñanza - aprendizaje del Análisis Matemático en la carrera Licenciatura en Ciencias de la Educación, especialidad de Matemática del ISCED-HBO”

**Nuestro campo de acción es:** “El tratamiento de la resolución de problemas en el proceso de Enseñanza - Aprendizaje del tema Cálculo Diferencial de la disciplina Análisis Matemático de la carrera antes citada”

**El objetivo general es:** Diseñar una estrategia didáctica que contribuya a elevar la calidad del tratamiento metodológico de la resolución de problemas en el proceso de Enseñanza - Aprendizaje del Análisis Matemático en dicha carrera.

### **Preguntas de Investigación:**

1. ¿Cuál es el estado actual que presenta el objeto a investigar en cuanto al tratamiento de la resolución de problemas?
2. ¿Cuáles son los presupuestos teóricos que sustentan la estrategia didáctica que contribuya a elevar la calidad del tratamiento metodológico de la resolución de problemas en el proceso de Enseñanza - Aprendizaje del Análisis Matemático en la carrera Licenciatura en Ciencias de la Educación, especialidad Matemática del ISCED-HBO”
3. ¿Cómo diseñar una estrategia didáctica que permita llevar a cabo el tratamiento de la resolución de problemas de manera acertada en dicha disciplina?
4. ¿Cómo puede comprobarse la validez de esta estrategia?

### **Objetivos Específicos:**

1. Determinación del estado actual del problema de investigación.
2. Establecimiento del marco teórico de la investigación a través del análisis de la bibliografía existente y los resultados obtenidos por el autor en trabajos precedentes.
3. Diseño de una estrategia didáctica para llevar a cabo el tratamiento de la resolución de problemas en la carrera Licenciatura en Ciencias de la Educación, especialidad de Matemática del ISCED-HBO.
4. Comprobación de la validez de esta estrategia.

Por otra parte, resulta necesario destacar el papel que han desempeñado los problemas en el proceso de enseñanza aprendizaje (PEA) de la Matemática desde la década de los ochenta hasta la actualidad.

Puede recordarse que antes de los setenta, la entonces “nueva matemática”, que pretendía transmitir a los alumnos el carácter lógico-deductivo de la matemática, unificar los contenidos por medio de la teoría de conjuntos, las estructuras algebraicas y los conceptos de relación y función de la matemática superior, resultaba un fracaso, pues ni se aprendían los conceptos y estructuras superiores, ni los alumnos dominaban las rutinas básicas del cálculo, produciéndose nuevos movimientos renovadores; entre ellos el trabajo con problemas.

Es conocido que el trabajo con problemas en el PEA de la Matemática se ha empleado en tres direcciones principales: la enseñanza para la resolución de problemas, la enseñanza de la resolución de problemas, y la enseñanza por medio (basada en) de la resolución de problemas.

En los últimos tiempos (a partir de los ochenta), resulta notorio el empleo de la enseñanza basada en la resolución de problemas para conseguir el cumplimiento de objetivos relativos al aprendizaje de los alumnos. Esta consiste en el planteo de problemas en cuya resolución se produce el aprendizaje.

Esta estrategia, en primera instancia, permite que el alumno realice conexiones entre la teoría y el mundo real, facilita que el estudiante se involucre en su propio proceso de aprendizaje, y que el profesor y los alumnos sean mediadores entre el conocimiento y el alumno, para que este

utilice la teoría o los contenidos de una o más asignaturas como herramientas que le permitan identificar problemas, determinar causas, proponer y seleccionar alternativas de solución; propicia el logro de su motivación intrínseca (condición necesaria para el logro de una actitud de aprendizaje significativo), para que sea el mismo estudiante quien trate de relacionar la teoría con un problema real y de su entorno, que sea capaz de relacionar los conocimientos previos con los nuevos para construir su propio conocimiento y de esta manera lograr un aprendizaje significativo y permanente.

El estudio del papel de los problemas en la lógica y estructura del proceso docente constituye un aspecto de cardinal importancia en los fundamentos sobre el aprendizaje de la matemática en los trabajos de A. Schoenfeld, Miguel De Guzmán, Luz M. Santos, Josep Gascón, Jeremy Kilpatrick, Marie Lise Peltier y otros, que no sólo se restringen al estudio de los procesos heurísticos que transcurren en la solución del problema propiamente, como en las concepciones de G. Polya, sino que discuten sobre sus aspectos epistemológicos como base para las sugerencias pedagógicas.

No obstante, es necesario destacar que la enseñanza basada en problemas, aunque se ha aplicado en el tratamiento de diversos contenidos tanto declarativos, procedimentales como actitudinales, esta no se ha empleado con una debida planeación estratégica durante los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual en el PEA de la Matemática Superior, campo este que consideramos fértil para su tratamiento por esta vía.

Teniendo en cuenta las deficiencias detectadas y las potencialidades de la enseñanza basada en la resolución de problemas, el autor realizó una revisión bibliográfica y un estudio sobre los temas relativos al aprendizaje como proceso complejo, mediado, activo y significativo; la enseñanza basada en la resolución de problemas y los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual, así como de la relación e influencia que existe entre estos aspectos, a partir de lo cual se concibió la elaboración de una **estrategia didáctica basada en la resolución de problemas para llevar a cabo los procesos que intervienen en el tratamiento de conceptos y teoremas en la carrera Licenciatura en Educación, especialidad Matemática.**

Se escoge como fundamento psico-pedagógico de la investigación el paradigma histórico-cultural que a su vez se basa en el Materialismo Dialéctico e Histórico, tomando como aspectos centrales de este paradigma las leyes: ley genética fundamental del desarrollo, y la ley de la mediación de lo psíquico; así como, las categorías: zona de desarrollo próximo, "otros" y niveles de ayuda.

Sin hacer una asimilación ecléctica de varios paradigmas, el autor de la tesis complementa las ideas que toma del paradigma anterior con la consideración de que el aprendizaje es, además, un proceso significativo, constructivo y activo.

Para el tratamiento de conceptos el autor asume críticamente pautas generales que ofrecen clásicos de este tema como L. S. Vygotski y V. V. Davidov. Por último, para fundamentar la estrategia didáctica, el autor ha revisado varias propuestas de estrategias en el ámbito pedagógico; para lo cual fueron decisivos los resultados que en este sentido han recopilado los miembros del Centro de Estudios de Ciencias Pedagógicas (CECIP) de la Universidad Pedagógica "Félix Varela" de la provincia de Villa Clara, Cuba.

Además, el autor ha revisado varias tesis doctorales recientemente defendidas, que están relacionadas con este trabajo.

En resumen, se contará como novedad científica y significación práctica de la tesis las siguientes:

**Novedad científica:** Esta tesis resulta novedosa porque ofrece la construcción de árboles de problemas que facilitan los procesos didácticos que intervienen en el tratamiento de los conceptos y teoremas de la disciplina Análisis Matemático.

La ***significación práctica*** de la investigación está dada porque:

- ◆ La aplicación de la estrategia durante los procesos que intervienen en el tratamiento de los conceptos y teoremas del Análisis Matemático garantiza la participación de los estudiantes en estos procesos, el logro de un aprendizaje significativo y una mayor calidad de los mismos.
- ◆ Se explican las potencialidades que posee la estrategia para contribuir a una mejor preparación matemática y metodológica de los profesores en dos sentidos:
  - En el tratamiento de conceptos y teoremas del postgrado.
  - En la apropiación de un sistema de acciones para llevar a cabo el tratamiento de conceptos con más calidad en sus grupos de clase.

## **§2. Establecimiento del sistema de acciones para lograr el aprendizaje activo, mediado y significativo en los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual.**

A continuación se expone un sistema de acciones generales a desarrollar para lograr el objetivo planteado, algunas de las cuales deberán rediseñarse de acuerdo a los conceptos y teoremas escogidos, a los diagnósticos realizados y las necesidades detectadas.

### **➤ Prediseño de temas de estudio.**

Asegurar que en este prediseño aparezcan los elementos esenciales a tener en cuenta en la planificación de las actividades docentes (objetivos educativos, objetivos instructivos, sistema de conocimientos, sistema de habilidades), teniendo en cuenta que cuanto mayor sea el grado de significatividad del aprendizaje realizado, tanto mayor será su funcionalidad. Esto debe ser una preocupación constante en la formación del profesional, de manera que, perspectivamente, pueda relacionar el conocimiento adquirido con nuevas situaciones y puedan ser efectivamente utilizados cuando las circunstancias en las que se encuentra el alumno así lo exijan.

Durante el diseño de estos temas deben contemplarse acciones para cada uno de ellos, relacionadas con:

- El planteamiento de problemas que tributen al perfeccionamiento de los subprocesos que tienen lugar en los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual.
- La utilización de conceptos y teoremas ya enseñados y aprendidos en la asignatura, el año, la carrera o niveles de enseñanza precedentes y la valoración de la contribución que hacen los

nuevos contenidos que se tratan a contenidos de otras asignaturas del año o años venideros. (Visión cíclica, articulación conceptual horizontal y vertical).

- La introducción, el desarrollo y la consolidación de la nueva información atendiendo a los diferentes niveles de aprovechamiento diagnosticados.
- La precisión de acciones del profesor para que los alumnos de bajo, medio y alto nivel participen en los procesos que intervienen en la formación, desarrollo y generalización conceptual, así como en la formulación y demostración de teoremas.
- La consideración de organizadores óptimos en cada tema que garanticen un aprendizaje significativo por los estudiantes.
- La creación de ambientes en que se suscite un aprendizaje mediado, activo y significativo.
- El desarrollo en los estudiantes de la capacidad de autorregulación, que les permita analizar lo que se hizo mal y el porqué del error, asumiendo que en el proceso deban discernir en las fallas del aprendizaje, ya sea en los conocimientos previos o en los que ya tenía.
- El logro de la unidad entre lo cognitivo y lo afectivo durante el PEA.

Es necesario aclarar que si la implementación requiere de un semestre lectivo de alguna asignatura de una disciplina (como la que se llevó a cabo con esta investigación), es necesario diseñar un programa con la debida fundamentación de la relación asignatura ↔ disciplina.

➤ **Acciones relativas al planteamiento de los problemas.**

◇ **Durante todos los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual.**

Los problemas que se planteen deben estar encaminados a:

- Relacionar esencialmente, y no de modo arbitrario, el conocimiento nuevo con los conocimientos previos que tienen los alumnos aplicando el concepto vygotskiano de Zona de Desarrollo Próximo.
- Modificar los esquemas y modelos mentales por medio de un proceso personal de equilibrio → desequilibrio → reequilibrio.
- Propiciar las condiciones para que los alumnos planteen problemas por sí solos, como consecuencia natural de las insatisfacciones con los vacíos que se deben ir llenando al relacionar los conceptos significativamente.
- Cuando un problema, o conjunto de problemas, ha sido resuelto por la mayoría de los alumnos con ayuda del profesor o de otros compañeros más capaces (aprendizaje mediado), deben plantearse otros, con objetivos semejantes a los anteriores, hasta lograr que la mayoría de los estudiantes los resuelvan independientemente y, paulatinamente, plantear otros que requieran de cierta dosis de creatividad, hasta lograr, con su resolución, un aprendizaje activo de los alumnos.
- A la hora de escoger el problema a plantear debe tenerse en cuenta que el aprendizaje significativo del contenido que este incluye queda determinado, no solo por el conocimiento previo que debe tener el alumno, sino por la capacidad adquirida a lo largo de su desarrollo.



◇ **Durante el proceso de formación del concepto por vía inductiva.**

Plantear problemas encaminados a:

- Presentar a los estudiantes cierto número de objetos, especialmente seleccionados, con el objetivo que los comparen y los analicen.
- Mediar para que los alumnos seleccionen propiedades de cada objeto, los comparen con los otros objetos, determinen las propiedades comunes y hagan su abstracción de las propiedades no comunes.
- Facilitar el proceso mental de síntesis, para que se seleccione un conjunto mínimo de propiedades (esenciales), a partir de las cuales se puedan obtener todas las demás propiedades comunes.
- Dejar claro mediante la generalización, la posible existencia de un conjunto de objetos más amplio que los considerados, que satisfacen estas características esenciales, y la posibilidad de que algunos de los presentados no se incluya en el concepto.
- Utilizar una denominación verbal para nombrar la clase de todos los objetos que cumplen las propiedades esenciales, y realizar la definición científica del concepto correspondiente a la clase de propiedades seleccionada.

◇ **Durante el proceso de desarrollo del concepto.**

Plantear problemas encaminados a:

- Obtener caracterizaciones del concepto definido.
- Realizar un estudio de la extensión del concepto caracterizado por:
  - El estudio de estructuras algebraicas y topológicas.
  - La ampliación de la clase de elementos conocidos de su extensión.
  - El establecimiento de isomorfismos entre su extensión y la extensión de otros conceptos u otros conjuntos.
  - La determinación de relaciones significativas con las extensiones de otros conceptos.
  - La construcción de mapas de extensiones que tienen lugar entre la extensión del concepto estudiado con las extensiones de otros conceptos, y de los mapas de contenido correspondientes.
  - La determinación de objetos límite y casos especiales del concepto en estudio.
- Realizar aplicaciones importantes del concepto en problemas intramatemáticos extramatemáticos; así como ampliar sus significados.
- Ejercitar a los estudiantes en las técnicas de demostración para ampliar las propiedades del concepto, utilizando para ellos las caracterizaciones más adecuadas.

◇ **Durante el proceso de generalización del concepto.**

Plantear problemas encaminados a

- Preparar el concepto para su generalización.
- Realizar generalizaciones:
  - Por debilitamiento del contenido del concepto.
  - Por consideración de contextos más amplios.
- Establecer criterios de bondad para valorar la calidad de las generalizaciones hechas.

◇ **Durante el proceso de obtención del teorema.**

Plantear problemas encaminados a:

- Preparar el camino para la obtención del teorema, que incluye:
  - La motivación para la misma.
  - La visualización geométrica del resultado que se pretende enunciar.
  - La realización de preguntas heurísticas cuyas respuestas permiten la obtención de resultados parciales que en su conjunto conducen a la formulación del teorema como tal.

◇ **Durante el proceso de demostración del teorema.**

Plantear problemas encaminados a:

- Realizar la demostración de la mayoría de los teoremas, y las que no puedan hacerse en clases por presupuesto de tiempo, entonces orientarlas como estudio independiente para ser posteriormente controladas, preferiblemente en seminarios.
- Llevar a cabo una preparación para su demostración, que incluye la motivación para la misma, la determinación de las hipótesis y las tesis, la elección del método de demostración más adecuado, la elaboración del plan de demostración.
- Durante la ejecución del plan, dejar claras las reglas de inferencias que se utilizan, así como los principios, reglas y estrategias heurísticas que se emplean.
- Llevar a cabo un tratamiento óptimo de explotación del error que cometen los estudiantes.

◇ **Durante el proceso de valoración de la calidad del teorema obtenido.** (Analizar las condiciones perspectivas y retrospectivas del mismo)

Plantear problemas encaminados a:

- Relacionar más de una vía de demostración en aquellos teoremas factibles para ello.
- Valorar validez de contrarrecíprocos, poner contraejemplos, mencionar condiciones necesarias, suficientes o caracterizaciones.
- Valorar posibilidades de empleo en contenidos venideros.
- Reproducir las demostraciones definidas en el programa como básicas.

◇ **Durante el proceso de aplicación del teorema.**

Deben realizarse preguntas heurísticas encaminadas a:

- Identificar cuál teorema debe aplicarse en determinados pasos de la solución de algunos problemas.
- Cuando identifica el teorema que debe usarse, debe garantizarse que se emplee correctamente.

➤ **Acciones relativas a la resolución de los problemas.**

Existen varios programas heurísticos generales para llevar a cabo el proceso de resolución de problemas; entre ellos: el de Polya (1986), el de Schoenfeld (1985a) y el de Miguel de Guzmán (1992); los cuales presentan muchos aspectos coincidentes. Teniendo en cuenta estos tres programas y las acciones que han realizado los profesores del Seminario de Matemática Educativa de la UCLV en su trabajo profesional a la hora de guiar esta actividad en asignaturas de la carrera Licenciatura en Matemática de la UCLV, planteamos a continuación el programa heurístico general y los procedimientos correspondientes para la resolución de problemas que pretendemos seguir.

**Fases y acciones del programa heurístico general para la resolución de los problemas durante los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual y durante la formulación y demostración de teoremas matemáticos.**

Este programa heurístico general se implementa cuando se proponen los problemas relativos a los procesos descritos anteriormente de: llevar a cabo el proceso de formación por vía inductiva (desarrollo o generalización) conceptual de un concepto matemático, o de llevar a cabo el proceso de obtención (demostración) de teoremas en la carrera Licenciatura en Educación, especialidad Matemática del ISCED de Angola”.

**Durante la resolución de los problemas particulares que se plantean en cada árbol de problemas, puede seguirse el programa heurístico siguiente:**

- Comprensión del problema:
  - ❖ Lectura cuidadosa.
  - ❖ Selección e interpretación de palabras claves.
  - ❖ Modelación verbal del problema, eliminando la información no esencial.
  - ❖ Elaborar figuras, tablas o esquemas que proporcionen una mejor comprensión del problema.
- Trabajo en el problema:
  - ❖ Precisión del problema:
    - Determinar las magnitudes conocidas y buscadas.
    - Determinar leyes a utilizar del área que corresponde el problema.
    - Establecer relaciones y dependencias entre las magnitudes.

- Modelación gráfica, tabular, mediante principios o leyes del área a que corresponde el problema.
- ❖ Modelación matemática del problema.
- Modelación matemática de las magnitudes del problema.
- Modelación de relaciones entre magnitudes.
  - Obtención del modelo matemático a partir del modelo mediante principios o leyes del área a que corresponde el problema.
- ❖ Determinación de las características del modelo matemático con respecto a su solución.
- ❖ Después de obtenido el modelo matemático del problema, con respecto a su solución, puede ocurrir una de tres variantes siguientes:

V1. El alumno conoce, al menos, un método de solución del modelo.

V2. El alumno no conoce un método de solución y le es permitido utilizar las tecnologías de la información y las comunicaciones (TIC) para resolver el modelo.

V3. El alumno no conoce un método de solución y no se le permite utilizar las TIC para resolver el modelo.

**Fases correspondientes a cada una de estas variantes.**

En la primera variante:

- Si conoce un solo método de solución, debe pasar a la fase de solución del modelo.
- Si conoce más de un método de solución, debe:
  - ❖ Determinar el método óptimo para la solución del problema.
    - Aplicar estrategias en este sentido.

En la segunda variante:

- ❖ Determinar el paquete que va a utilizar para resolver el problema.
  - Seleccionar la herramienta computacional que va a utilizar.

En la tercera variante:

- ❖ Determinar la idea de solución.
  - Elaboración de un plan de solución.
  - Determinación de medios y estrategias, por ejemplo, utilizar la estrategia de trabajo hacia adelante o hacia atrás.
  - Realización de estimados.
- Solución del modelo matemático.
  - ❖ Determinación de la solución.

De acuerdo con la variante que corresponda se utilizará un método de solución, se empleará la herramienta computacional escogida, o se aplicará el plan de solución diseñado.

- Evaluación del proceso matemático de solución y de su resultado.
  - ❖ Comprobación de la solución.
  - ❖ Consideraciones perspectivas y retrospectivas.
  - Reflexiones sobre el proceso de solución aplicado.
  - Valoración de la aplicación de otros procesos de solución.
  - Posibilidad de empleo del proceso de solución en otros problemas semejantes.
  - Determinación de las restricciones con las que ha sido resuelto el problema.
    - ❖ Determinación de otros resultados matemáticos necesarios para dar solución al problema original.
- Transferencias de resultados matemáticos.
  - ❖ Aplicación del proceso inverso al de modelación.
  - Transferencia de resultados matemáticos a frases verbales.
  - Transferencia de resultados matemáticos a afirmaciones verbales.
- Planteamiento de nuevos problemas matemáticos.
  - ❖ Eliminar restricciones con las que fue resuelto el modelo matemático.
  - ❖ Analizar la posibilidad de ampliar el dominio de solución del modelo.
- Planteamiento de otros problemas contextuales.
  - ❖ Planteamiento de otros problemas contextuales que se resuelvan con un modelo similar al que se empleó en el problema resuelto.
  - ❖ Planteamiento de nuevos problemas contextuales en correspondencia con las generalizaciones del modelo obtenido en la fase anterior.

#### **Procedimientos heurísticos.**

- Principios heurísticos: analogía, reducción, inducción, generalización, movilidad, medir y comprobar, consideración de casos especiales y casos límites.
- Estrategias heurísticas.
  - ❖ Trabajo hacia adelante.
  - Determinación de una caracterización óptima.
  - Utilización de propiedades conocidas adecuadas.
  - Aplicación de reglas de inferencia correctas.
  - ❖ Trabajo hacia atrás.

- Trabajo operacional obviando reglas de inferencia hasta llegar a una solución probable.
- Comprobación de la solución probable.
  - ❖ Modelación.
    - Modelación verbal del problema.
    - Modelación gráfica, tabular o mediante leyes contextuales.
    - Modelación matemática.
    - Solución del modelo matemático.
    - Transferencia de resultados matemáticos a frases y afirmaciones verbales.
- **Acciones relativas al logro de la motivación intrínseca durante todos los procesos.**

Acciones a realizar en este sentido pueden ser:

- Involucrar a los alumnos en el planteamiento de problemas debidamente dosificados con cierta significatividad experiencial para los alumnos, los que pueden ser extramatemáticos o intramatemáticos de la misma rama del concepto o de otras áreas de la matemática.
- Plantear problemas encaminados a resaltar las necesidades no satisfechas, encaminados a que los estudiantes se esfuercen en su resolución de manera enérgica y con intención.
- Plantear variedad de problemas encaminados al planteamiento de metas por los alumnos, alcanzables con diferentes niveles de esfuerzos.
- Plantear problemas encaminados a despertar la duda, la perplejidad, la contradicción, la confusión o la inadecuación.
- Hacerles ver que de los errores que se cometen también se aprende, lo que ayuda a elevar o mantener estable la autoestima del alumno ante un error cometido.

### **§3. Planificación de la implementación del sistema de acciones de la estrategia por medio de la impartición del tema “Cálculo Diferencial de funciones reales” como parte del Análisis Matemático II del curriculum del Licenciado en Educación, especialidad Matemática en el ISCED de Huambo, Angola.**

Para la implementación de la estrategia planificada se deben poner en práctica, a través de las clases planificadas, las acciones previstas en el epígrafe anterior por medio de la resolución de problemas de manera activa, mediada y significativa durante el tratamiento de los conceptos y teoremas del tema escogido sobre la base de la articulación de los componentes didácticos: objetivo, contenido, método, medio y evaluación; y, siguiendo las orientaciones que se ofrecen en el programa de la disciplina (anexo 4).

En el anexo 6 se presenta el sistema de conferencias talleres (7), clases prácticas (14), seminarios (1) y laboratorios (1) donde se plasman los problemas que se proponen para facilitar los procesos didácticos que intervienen en el tratamiento de los conceptos y teoremas del Cálculo Diferencial de funciones reales.

A continuación se expone la cantidad de problemas que se proponen en cada una de las conferencias talleres:

- Conferencia Taller # 1: Derivadas de funciones de una variable real (9)
- Conferencia Taller # 2: Operaciones con funciones derivables (14)
- Conferencia Taller # 3: Derivada de las funciones compuestas e inversas (10)
- Conferencia Taller # 4: Teoremas básicos del cálculo diferencial (9)
- Conferencia Taller # 5: Regla de L'Hôpital, fórmula y serie de Taylor (9)
- Conferencia Taller # 6: Extremos locales o relativos de una función (11)
- Conferencia Taller # 7: Convexidad y punto de inflexión. Esquema de discusión del gráfico de una función (10)

Total.(72)

También expondremos la cantidad de problemas relativos a los subprocesos que intervienen en los procesos de formación, desarrollo y generalización de los conceptos del tema, así como los teoremas que se proponen obtener.

### CONCEPTOS

Proceso	Proceso de formación del concepto					Proceso de desarrollo del concepto										Proceso generalización del concepto	
	Comparación	Análisis	Síntesis	Abstracción	Generalización	Ampliación de la colección de elementos conocidos de E	Expresión de la utilidad del concepto	Obtención de condiciones necesarias	Obtención de condiciones suficientes	Obtención de caracterizaciones	Ampliación de significados del cpto	Establecimiento de relaciones de E con otras extensiones	Ejemplificación de casos especiales	Determinación de propiedades de estructuras algebraicas de E	Ampliación de la colección de elementos conocidos de E <sup>c</sup>	Preparación para la generalización	Realización de la generalización
Cpto																	
Tgta a una curva	3	1	1	1	1	5	6										
Derivada	2	1	1	1	1	42	28	1		2	3	2	6	4	16	1	1
Derivada lateral		1	1	1	1	7					1						

Incremento de la función		1	1	1	1		2										
Diferencial	1	1	1	1	2	5	4			1	1	1		3			
Suma finita						1											
Derivada de orden superior		1	1	1	1	9				1				3			
Dif. de orden superior		1	1	1	1									3			
Pto estacionario		1	1	1	1	2	5			1							
Pto crítico		1	1	1	1	2	5			1							
Extremo local		1	1	1	1	6	5	1	2				1		4		
Monotonía						3		1	2	1			1				
Fción convexa	1	1	1	1	1	7	1			1							
Pto de inflexión		1	1	1	1	6				1					3		
Asíntota	1	1	1	1	1	5	1	1	1	1			1		4		

## TEOREMAS

Proceso Teorema	De preparación para la obtención del teorema	Empleo de recursos heurísticos para la demostración del teorema	De valoración de la calidad del teorema obtenido	De aplicación del teorema
Relación entre función derivable y función continua	3	1	1	
Derivada de la suma, producto y cociente de funciones	2	3	1	11
Expresión del diferencial en función de la derivada	2	2		5
Unicidad del diferencial	1			
Diferencial de la suma, producto y cociente de	1	1		2



funciones				
Derivada de la función compuesta	1	1		10
Derivada de la función potencial con exponente real	1	1		4
Derivada de la función inversa	1	1		4
Derivada de la función paramétrica	1	1		3
Derivada de la función potencial – exponencial	1	1	1	4
Derivadas y diferenciales de orden superior	1			5
Teorema de Fermat	1	2	2	13
Teorema de Rolle	1		3	3
Teorema de Lagrange	1	2	2	3
Regla de L' Hospital – Bernoulli	3		6	16
Polinomio de Taylor	2	1	4	8
Serie de Taylor	1		1	14
Condición necesaria de extremos	1	1		6
Condición suficiente de monotonía	1	1	1	
Caracterización de la monotonía	1		1	5
Condición suficiente de extremos locales (criterio 1ra derivada)	1		2	6
Condición suficiente de extremos locales (criterio 2da derivada)	2	2	2	6
Condición necesaria y suficiente de convexidad	2			8
Condición necesaria de punto de inflexión	1		1	2
Criterio de la 3ra derivada para punto de inflexión		1		2
Criterio de la derivada n-sima	1			2

Para analizar los problemas concretos propuestos en cada conferencia y clase práctica puede verse el FOLLETO DIDÁCTICO destinado al efecto. [Sistema de clases relativo al tema Calculo Diferencial 170810.doc](#)

#### **§4. Planificación del control de la implementación del sistema de acciones**

Para valorar la calidad de los conceptos y teoremas tratados y lograr una medida de su nivel de desarrollo alcanzado en los alumnos, se proponen los indicadores:

##### 1. Calidad del concepto formado:

- Capacidad de utilizar en situaciones concretas las propiedades del contenido del concepto formado.
- Determinación si, dado un elemento, es capaz de determinar si pertenece a la extensión del concepto formado.

##### 2. Calidad del concepto desarrollado.

- Capacidad de utilizar caracterizaciones.
- Conocimiento de subcolecciones de la extensión.
- Dominio de estrategias para establecer relaciones conjuntistas entre la extensión del concepto con las de otros.
- Conocimiento sobre diferentes significados del concepto.
- Utilización del concepto en la solución de problemas.

##### 3. Calidad del concepto generalizado.

- Utilización de criterios de generalización adecuados.
- Capacidad para realizar cadenas de generalizaciones.
- Empleo de criterios para determinar la calidad de estas.

##### 4. Calidad del teorema obtenido.

- Contestación de las preguntas heurísticas realizadas durante el proceso de obtención.
- Determinación de las hipótesis y las tesis de la mayoría.
- Manejo de argumentos para valorar la calidad de los teoremas obtenidos (recíprocos, contraejemplos, mencionar condiciones necesarias, suficientes o caracterizaciones)

##### 5. Calidad del teorema demostrado.

- Contestación de preguntas heurísticas durante la demostración.
- Realización de manera independiente los pasos de menor dificultad conducentes a resultados en la demostración.

- Relación de más de una vía de demostración en aquellos teoremas factibles para ello.
- Reproducción de las demostraciones definidas como básicas.

#### 6. Calidad del teorema aplicado.

- Identificación de cuáles teoremas deben aplicarse en determinados pasos de la solución de algunos problemas.
- Empleo correcto del teorema identificado.

#### 7. Nivel de aprendizaje significativo logrado.

- Manejo de diagramas o estructuras que integran el nuevo concepto con contenidos previos.
- Capacidad de estructurar el concepto de varias formas.
- Capacidad de plantear problemas o interrogantes como necesidad para la ampliación o modificación de sus estructuras mentales.

#### 8. Papel activo del alumno.

- Necesidad e interés por participar en clases.
- Capacidad de resolver problemas planteados destinados al trabajo independiente.
- Capacidad para responder preguntas orales.
- Elaboración de preguntas o conjeturas acertadas.

#### 9. Papel mediado del aprendizaje logrado.

- Determinar si son capaces de aprovechar las sugerencias mínimas ofrecidas por el profesor u otro alumno.
- Comprobar si, durante el trabajo en equipos, pueden aportar resultados sustanciales a la solución de las tareas.

#### 10. Resultados de las evaluaciones en los cortes realizados.

- Determinación de la calidad del rendimiento de cada alumno a partir de la valoración de las notas obtenidas en las evaluaciones frecuentes y pruebas parciales.
- Determinación de la calidad de la coevaluación y la autoevaluación que se lleva a cabo en el aula.
- Determinación de la calidad de la evaluación sumativa y la formativa realizadas.

Para la medición de estos indicadores durante la implementación con alumnos se propone una clasificación en tres categorías, en bajo (B), medio (M) y alto (A).

1. **Calidad de los conceptos formados (pf)**, Nivel bajo (1): no es capaz de relacionar las propiedades del contenido del concepto formado; ni de determinar si, dado un elemento de un concepto subordinante, este pertenece o no a su extensión; Nivel medio (2): es capaz de relacionar solo algunas propiedades del contenido del concepto formado; en general, es capaz de determinar si, dado un elemento de un concepto subordinante, este pertenece o no a su extensión; Nivel alto (3): cumple con las dos acciones relacionadas anteriormente.
2. **Calidad de los conceptos desarrollados (pd)**: Nivel bajo (1): no es capaz de utilizar diferentes caracterizaciones, no conoce subcolecciones infinitas de elementos de la extensión, no domina estrategias para establecer relaciones conjuntistas entre la extensión del concepto en estudio con las extensiones de otros conceptos, no domina los significados establecidos del concepto, no es capaz de utilizar eficientemente el concepto en la solución de problemas de diferentes ramas matemáticas o extramatemáticas; Nivel medio (2): es capaz de realizar las acciones anteriores solo parcialmente; Nivel alto (3): es capaz de realizar estas acciones.
3. **Calidad de los conceptos generalizados (pg)**, Nivel bajo (1): no es capaz de determinar las dos formas de generalizar el concepto, ni de realizar cadenas de generalizaciones y restricciones del concepto; Nivel medio (2): realiza una de las dos acciones anteriores o las dos solo parcialmente; Nivel alto (3): es capaz de realizar las dos acciones.
4. **Calidad de los teoremas obtenidos (to)**, Nivel bajo (1): en general no responde preguntas heurísticas realizadas durante el proceso de obtención de los teoremas, no es capaz de determinar de manera precisa las hipótesis y las tesis de la mayoría de los teoremas, en general no posee argumentos para valorar la calidad de los teoremas obtenidos (valorar validez de contrarrecíprocos, poner contraejemplos, mencionar condiciones necesarias, suficientes o caracterizaciones); Nivel medio (2): realiza dos de las tres acciones anteriores o las tres solo parcialmente; Nivel alto (3): al menos es capaz de realizar dos acciones y la otra parcialmente.
5. **Calidad de los teoremas demostrados (td)**, Nivel bajo (1): en general no responde preguntas heurísticas realizadas durante el proceso de demostración de los teoremas, no es capaz de realizar de manera independiente los pasos de menor dificultad que conducen a resultados parciales en el proceso de demostración, no es capaz de relacionar más de una vía de demostración en aquellos teoremas factibles para ello, no es capaz de reproducir las demostraciones definidas en el programa como básicas; Nivel medio (2): al menos realiza dos de las cuatro acciones anteriores o tres solo parcialmente; Nivel alto (3): al menos es capaz de realizar tres acciones y la otra parcialmente.
6. **Calidad de los teoremas aplicados (ta)**, Nivel bajo (1): en general no identifica cuál teorema debe aplicarse en determinados pasos de la solución de algunos problemas, cuando identifica el teorema que debe usarse no es capaz de emplearlo correctamente; Nivel medio (2): al menos realiza una de las dos acciones anteriores o las dos solo parcialmente; Nivel alto (3): al menos es capaz de realizar una de las acciones y la otra parcialmente.
7. **Calidad del aprendizaje significativo logrado (as)**, Nivel bajo (1): es capaz de establecer relaciones entre el concepto nuevo con los precedentes por medio de mapas, diagramas que

sintetizan la información, etc. no es capaz de plantear problemas o interrogantes como necesidad para la ampliación o modificación de sus estructuras mentales; Nivel medio (2): realiza una de las dos acciones anteriores o las dos solo parcialmente; Nivel alto (3): es capaz de realizar las dos acciones.

8. **Nivel del papel activo del aprendizaje logrado (pa)**, Nivel bajo (1): es capaz de resolver solo pocos problemas planteados destinados al trabajo independiente, de responder solo las preguntas más sencillas hechas por el profesor, no es capaz de elaborar preguntas o realizar conjeturas acertadas; Nivel medio (2): realiza estas acciones de manera parcial, o no realiza algunas pero realiza otras eficientemente; Nivel alto (3): realiza estas tres acciones de manera eficiente.
9. **Nivel del papel mediado del aprendizaje logrado (pm)**, Nivel bajo (1): no es capaz de aprovechar las sugerencias mínimas ofrecidas por el profesor u otro alumno, durante el trabajo en equipos, no aporta resultados sustanciales a la solución de las tareas; Nivel medio (2): en ocasiones es capaz de aprovechar las sugerencias mínimas ofrecidas por el profesor u otro alumno, durante el trabajo en equipos, aporta algunos resultados a la solución de las tareas; Nivel alto (3): realiza estas acciones de manera eficiente.
10. **Resultados en las evaluaciones (re) (1 prueba parcial, 1 seminario, 1 laboratorio, 14 clases prácticas, 4 preguntas escritas, intercambio de libretas, sistema de ponencias-oponencias, autovaloraciones)**. Nivel bajo (1): Desaprueba la prueba parcial y dos preguntas escritas, no realiza buenas valoraciones durante el intercambio de libretas y pruebas realizadas, ni en ponencias u oponencias, no realiza una adecuada autovaloración (se subvalora o sobrevalora) sobre su trabajo y potencialidades, no es capaz de explicar ejercicios del seminario; Nivel medio (2): Aprueba la prueba parcial con nota de regular u obtiene varias notas de 3, realiza valoraciones aceptables en escenarios de coevaluación y autoevaluación; Nivel alto (3): Aprueba la prueba parcial con nota entre 4 y 5, a lo sumo obtiene un 3 en evaluaciones frecuentes, realiza buenas valoraciones durante actividades de coevaluación y autovaloraciones.

Para comprobar la evolución de estos indicadores en el grupo en que se implementará la estrategia didáctica, los datos obtenidos se valorarán mediante análisis porcentual y la estadística descriptiva.

Para medir la manera en que se manifestarán estos indicadores se aplicarán los métodos: encuestas y entrevistas a estudiantes, observación participante en diferentes momentos y escenarios, pruebas de contenidos y estudio de casos.

#### **Clasificación inicial de los estudiantes de acuerdo a su rendimiento académico.**

Para la clasificación inicial de los estudiantes, estos se clasificarán por su aprovechamiento docente en alto, medio y bajo, de acuerdo a los siguientes criterios:

**Alto:** Los que han sido evaluados de B durante el primer corte de asistencia y evaluación del semestre y obtuvieron buenos resultados en el diagnóstico inicial (nota  $\geq 16$ ), opinión favorable del colectivo de profesores del año sobre el rendimiento académico del alumno (Incluye una

buena participación en clases que evidencie el poder aplicar a la resolución de los problemas, los conocimientos precedentes de Matemática).

**Medio:** Los que tienen han sido evaluados de R durante el primer corte de asistencia y evaluación del semestre, obtuvieron  $10 \leq n \leq 15$ , aunque presentan algunas dificultades, conocen y aplican los conocimientos precedentes pero cometen algunos errores que no le permiten concluir de forma correcta. Además si tiene un índice superior a 4.25 pero presentó muchas dificultades en el diagnóstico inicial. Los profesores del año opinan que su rendimiento es medio.

**Bajo:** Todos los que no cumplen con los requerimientos para ser clasificados como de alto o medio.

Con la estrategia propuesta e implementada se requiere estudiar cómo fue cambiando el comportamiento de los alumnos, su evolución, sobre todo los que al inicio demostraron un bajo aprovechamiento.

Dado que los grupos de la carrera en estudio son únicos se propone llevar a cabo un diseño de preexperimento diagramado de la forma siguiente:

G<sub>único</sub> O<sub>1</sub> X<sub>1</sub> O<sub>2</sub> Ver Sampier (2003, p.136), donde O<sub>1</sub> corresponde al primer corte, donde se controla la prueba de diagnóstico inicial realizado y O<sub>2</sub>, corresponde al control de la implementación X<sub>1</sub> de la estrategia.

**§5. Consulta a los expertos.**

Le solicitamos evalúe los planteamientos que siguen, en una de las siguientes categorías:

- 1: no adecuado
- 2: poco adecuado
- 3: adecuado
- 4: bastante adecuado
- 5: muy adecuado

Aspectos de la estrategia a considerar		Evaluación de la pertinencia de los subaspectos incluidos en estos aspectos	Observaciones sobre su evaluación (opcional)
1. Diseño general de la investigación.		1 2 3 4 5	
Aporte teórico		1 2 3 4 5	
Significación práctica		1 2 3 4 5	
2. Establecimiento del sistema de acciones en general		1 2 3 4 5	
Prediseño de temas de estudio.		1 2 3 4 5	
Acciones relativas al planteamiento de los problemas.	Durante todos los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual.	1 2 3 4 5	
	Durante el proceso de formación del concepto por vía inductiva.	1 2 3 4 5	
	Durante el proceso de desarrollo del concepto.	1 2 3 4 5	
	Durante el proceso de generalización del concepto.	1 2 3 4 5	
	Durante el proceso de obtención del teorema.	1 2 3 4 5	
	Durante el proceso de demostración del teorema.	1 2 3 4 5	
	Durante el proceso de valoración de la calidad del teorema obtenido	1 2 3 4 5	
	Durante el proceso de aplicación del teorema	1 2 3 4 5	

Acciones relativas a la resolución de los problemas.	1 2 3 4 5	
Acciones relativas al logro de la motivación intrínseca durante todos los procesos.	1 2 3 4 5	
3. Calidad de la planificación de la implementación del sistema de acciones	1 2 3 4 5	
Calidad de la planificación del control	1 2 3 4 5	
4. Calidad de este instrumento de medición de la calidad del diseño de investigación y del sistema de acciones de la estrategia.	1 2 3 4 5	

**§6. Autovaloración acerca de su competencia como experto sobre el tema consultado.**

Valore, por favor, su competencia sobre el tema consultado en una escala de 0 a 10, donde: el valor cero significa que Usted no tiene competencia alguna sobre el tema y el valor diez significa que posee un dominio máximo sobre el mismo.

\_\_\_\_\_

0    1    2    3    4    5    6    7    8    9    10

**§7. Autovaloración acerca de las fuentes que le permiten argumentar sus criterios.**

Indique, por favor, marcando con una cruz (X) en la siguiente tabla, el grado de influencia (alto, medio, bajo) que tiene en sus criterios cada una de las fuentes de argumentación que se relacionan.

Fuentes de argumentación	Grado de influencia de cada una de las fuentes sobre sus criterios		
	A (alto)	M (medio)	B (bajo)
Análisis teóricos realizados por él mismo			
Su experiencia			
Trabajos de autores nacionales			
Trabajos de autores extranjeros			
Su conocimiento del estado del problema en el extranjero			
Su intuición			



**§8. Datos generales del experto.**

- Nombre y apellidos: \_\_\_\_\_
- Título universitario: \_\_\_\_\_
- Categoría científica : \_\_\_\_\_
- Categoría docente : \_\_\_\_\_
- Años de trabajo en la Educación Superior : \_\_\_\_\_
- Centro de trabajo : \_\_\_\_\_
- Departamento donde trabaja : \_\_\_\_\_
- Labor que desempeña : \_\_\_\_\_
- Breve síntesis curricular (si lo considera pertinente).

**§9. Otras consideraciones.**

Si Usted desea expresar algún otro criterio sobre el trabajo investigativo presentado, puede hacerlo a continuación.

**Anexo # 8: Tabla de frecuencias. Consulta a especialistas.**

Aspectos considerar		1	2	3	4	5	P
Diseño general de la investigación		0	0	0	1	6	34
Aporte teórico		0	0	1	2	4	31
Significación práctica		0	0	0	1	6	34
Establecimiento del sistema de acciones en general		0	0	0	2	5	33
Prediseño de temas de estudio		0	0	1	2	4	31
Acciones relativas al planteamiento de los problemas durante:	Todos los procesos	0	0	0	2	5	33
	El proceso de formación del concepto	0	0	0	3	4	32
	El proceso de desarrollo	0	0	1	1	5	32
	El proceso de generalización	0	0	0	3	4	32
Acciones relativas al planteamiento de los problemas durante:	El proceso de obtención del teorema	0	0	0	2	5	33
	El proceso de demostración	0	0	0	3	4	32
	El proceso de valoración de la calidad del teorema	0	0	0	1	6	34
	El proceso de aplicación del teorema	0	0	1	2	4	31
Acciones relativas a la resolución de los problemas		0	0	0	1	6	34
Calidad de la planificación de la implementación		0	0	0	2	5	33
Calidad de la planificación del control		0	0	0	3	4	32
Calidad de este instrumento de medición de la calidad del diseño de investigación y del sistema de acciones de la estrategia.		0	0	0	2	5	33